UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS DOCTORAL:

INTERPOLACION POR RECURRENCIA Y TECNICAS DE ELIMINACION

Esperanza Lebrón Rueda

GRANADA, 1984

fesis doctoral, dirigida por el Prof. Dr. D. Mariano Gasca González, Catedrático de Análisis Matemático III de la Universidad de Zaragoza. Fué leída el 1 de Octubre de 1984 ante el tribunal formado por los profesores: Gasca González, Martínez Amores, Sanz Serna, Lisbona Cortés y Ramírez González. Obtuvo la calificación de sobresaliente "cum laude".

INDICE

INTRODUCCION 1

CAPITULO 0 : ALGUNOS RESULTADOS ANTERIORES SOBRE INTERPOLACION POR RECURRENCIA. TERMINOLOGIA Y NOTACIONES

1. Fórmula general de interpolación por recurrencia 8
2. La identidad de Sylvester generalizada para determinantes 15

CAPITULO I : ALGUNAS DESIGUALDADES E IDENTIDADES ENTRE DETERMINANTES

1. Otra demostración de la identidad de Sylvester gereraiizada 28
2. Algunas desigualdades entre determinantes de matrices especiales 39
3. Aplicación de la identidad de Sylvester al cálculo de diferencias divididas 54

CAPITULO II : INTERPOLACION POR RECURRENCIA Y RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

1. Relación de la fórmula general de interpolación por recurrencia con los métodos de resolución de sistemas lineales 69
2. Métodos para resolver sistemas lineales 95

CAPITULO III : ALGORITMOS DE INTERPOLACION Y METODOS DE EXTRAPOLACION

1. Introducción 116
2. Algoritmos para los casos habituales 130
3. Métodos de extrapolación 148

CAPITULO IV : INTERPOLACION POR RECURRENCIA EN VARIAS VARIABLES.

1. Algunas consideraciones sobre los resultados de Thacher y Milne 158
2. Establecimiento de una fórmula para la interpolación multivariada por recurrencia 165
3. Otras aplicaciones del teorema 4.1 173

APENDICE 194

BIBLIOGRAFIA 202

INTRODUCCION

INTRODUCCION

El punto de partida de esta memoria es la investigación realizada por el departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, relativa a la interpolación por recurrencia en una y varias variables. Más concretamente, arrancamos en los resultados de la tesis doctoral de A. López-Carmona que dieron lugar a los artículos [9] y [10] basados en trabajos de G. Mühlbach.

Se pretendió continuar la investigación inicia da allí como paralelamente también lo han hecho varios autores cuyos trabajos se han conectado en algunos puntos con el nuestro, y así lo indicaremos.

Dentro de la interpolación por recurrencia, considerando como más clásica la fórmula de Newton, hacia 1930 Aitken y Neville propusieron como alternativa los métodos de sus nombres para evitar el uso de diferencias divididas. Posteriormente, varios autores, como Larkin y Schneider, han utilizado la idea de Aitken-Neville para extenderla al caso no polinomial; pero realemente, el que la ha sistematizado más es Mühlbach [25] - [34]. Con este autor comienzan una serie de trabajos en los que se ha procurado generalizar lo más posible esta teoría. Entre ellos, en [9] y [21] se introducía por primera vez la idea de considerar de una misma familia los métodos de Aitken-Neville y Newton.

Simultáneamente C. Brezinski [4] utilizó la Identidad de Sylvester para determinantes para obtener los resultados de Mühlbach de una manera más simple, con la hipótesis de que los espacios de interpolación utilizados formarán un sistema de

Chebyshev completo.

En [10] se introdujo una generalización de la identidad de Sylvester que permitía abandonar la hipótesis de Brezinski y llegar a una fórmula general de interpolación por recurrencia similar a la obtenida en [9] .

También simultáneamente, T. Havie conseguía llegar a resultados similares a Brezinski utilizando técnicas de eliminación en la resolución de sistemas lineales. Tanto esta técnica como la de Brezinski estaban basadas en sus correspondientes trabajos sobre extrapolación.

Con esta base se inició nuestra investigación, planteándonos, en primer lugar, la posibilidad de demostrar la identidad de Sylvester generalizada de una forma que fuera extensión natural de la demostración habitual de la identidad original que puede verse en [7] o [18] , y que está basada en la eliminación al transformar elementalmente la matriz original en otra triangular por bloques. La demostración que aparecía en [10] no usaba esta técnica sino que se basaba en la anulación de uno de los factores de uno de los miembros de la identidad para deducir la anulación del otro miembro, con lo cuál no se veía claramente el origen de los factores que aparecen en la identidad. Esto se ha conseguido en el Capítulo I de esta memoria.

En la segunda parte de este capítulo, la identidad es aplicada a la obtención de desigualdades entre determinantes de matrices especiales (definidas positivas, totalmente positivas, y similares). En particular, es de señalar el interés de las matrices totalmente positivas en la teoría de splines (ver [18]).

Al final de este capítulo se aplica la identidad para ver que las fórmulas conocidas para las diferencias divi

didas o los sistemas que las definen pueden obtenerse a través de ella.

Una vez concluída esta memoria el tema de la identidad de Sylvester sigue siendo objeto de investigación, estando próximo a concluirse un trabajo de G. Mühlbach y M. Gasca sobre identidades de determinantes para procesos de eliminación.

Previamente, en el capítulo 0, se han recordado los resultados que se utilizan a lo largo de la memoria.

En el capítulo II se ha pretendido continuar el trabajo de T. Havie. Paralelamente a nosotros, G. Mühlbach ha realizado la misma investigación llegando a la vez a resultados similares. Concretamente, antes de concluir esta memoria, dispusimos del trabajo [33] en el que sus resultados eran casos particulares de los nuestros, y una vez finalizado nuestro trabajo hemos conocido su artículo [34] que está para publicarse en Numerische Mathematik. Entre su último artículo y nuestro presente trabajo hay algunas diferencias de matiz ya que nosotros pretendíamos la deducción a través de las técnicas de resolución de sistemas de la fórmula general de interpolación por recurrencia [9] , que no es estudiada directamente por él aunque sí citada en el trabajo. Por eso los teoremas obtenidos son ligeramente distintos. Así, por ejemplo, nosotros llegamos al estudio de la regularidad de la matriz de coeficientes a través de la existencia y unicidad de solución de un problema de interpolación con la unión de los datos de los subproblemas utilizados, mientras que él lo hace directamente en su último artículo.

Así pues, el resumen de este capítulo es la equivalencia entre técnicas de eliminación en la resolución de sistemas lineales y métodos de interpolación por recurrencia,

precisando más los resultados de [9] en el sentido de que , por ejemplo, en uno de los teoremas enunciados allí se daban condiciones suficientes para la existencia de la fórmula general de interpolación por recurrencia y aquí vemos que, con la exclusión de una de las hipótesis, el cumplimiento de esta última es condición necesaria y suficiente para el resultado del teorema (ver lema 2.1, corolario 2.2 y teorema 2.3).

En la introducción del capítulo III se profundiza en la aplicación práctica de las fórmulas de interpolación obtenidas en [10] , utilizando la identidad de Sylvester para mostrar que los restos de interpolación tienen fórmulas análogas. Dichas fórmulas, aplicadas reiteradamente, dan lugar a los algoritmos que obtenemos en el apartado siguiente.

También se ve que las técnicas de resolución de sistemas lineales, mostradas en el capítulo II para obtener la fórmula de interpolación (...) y que cuando son usadas reiteradamente dan lugar a los algoritmos descritos, son en sí un método general de extrapolación. Se obtienen en este sentido unos resultados más generales que los de Havie [15] .

En el capítulo IV nos centramos en la interpolación por recurrencia en varias variables. En este sentido muy pocas contribuciones existen hasta la fecha puesto que, aunque los trabajos que hemos citado hasta ahora han sido enfocados al problema de interpolación lineal finita, su apilcación concreta a problemas de interpolación en varias variables es, en principio, problemática, como puede verse en [9] y [21] .

Aparte de esto podemos citar un trabajo de Thacher y Milne [38] , que bajo hipótesis muy sencillas, permitía

la interpolación por recurrencia en conjuntos de puntos tipo símplex. Al abordar este tema hemos pretendido llegar a obtener fórmulas generales aplicables a disposiciones de puntos más generales. Esto se consigue en el teorema 4.1.

Concretamente, en el trabajo de Thacher y Milne se construye la solución de un problema con $\binom{n+k}{k}$ datos de interpolación en puntos de R^k dispuestos de forma simplicial a partir de $k+1$ subproblemas con $\binom{n+k-1}{k}$ datos del mismo tipo. Obsérvese que el número de subproblemas es independiente de n, y que es igual a la dimensión del espacio más uno. Sin embargo, en nuestros resultados hemos visto una situación más general en la que el número de subproblemas básicos utilizados depende de la disposición de los puntos y del espacio que queremos utilizar para interpolar, teniendo posibilidad, con frecuencia, de optar por varias estrategias, como se muestra en los ejemplos de aplicación del capítulo.

Por último quiero hacer constar mi más sincero agradecimiento al director de esta memoria, Profesor Dr. D. Mariano Gasca González, por la ayuda y estímulo que de él siempre he recibido.

También manifestar mi gratidud a todos los compañeros del departamento de Ecuaciones Funcionales de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Granada, mayo de 1984

Esperanza Lobrón Rueda

CAPITULO 0

ALGUNOS RESULTADOS ANTERIORES SOBRE INTERPOLACION POR RECURRENCIA.

TERMINOLOGIA Y NOTACIONES

CAPITULO 0

ALGUNOS RESULTADOS ANTERIORES SOBRE INTERPOLACION POR RECURRENCIA.

TERMINOLOGIA Y NOTACIONES

En los capítulos I , II y III de esta memoria haremos referencia a algunos resultados recogidos en [9] , [10] y [21] , por lo que pasamos a recordarlos.

1. FORMULA GENERAL DE INTERPOLACION POR RECURRENCIA

En [9] se aborda el llamado problema general de interpolación lineal finita y se establece una fórmula general de interpolación por recurrencia que exponemos a continuación.

Sea $W(K)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo y de característica cero K. Sea $V_{n+m}(K)$ un subespacio vectorial de $W(K)$, de dimensión $n+m$, $n, m \in N$. Consideremos $\mathcal{L}_{n+m} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{n+m} \}$ un conjunto de formas lineales sobre $W(K)$, y $\{ \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \}$ un subconjunto de $V_{n+m}(K)$.
Supongamos que

$$(0.1) \quad \det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{pmatrix} = \det (L_i(\phi_j)) \neq 0 . \quad i,j = 1, 2, \ldots, n+m$$

Es claro que la condición (0.1) se verifica si, y solo si, $\{ \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \}$ forman una base de $V_{n+m}(K)$, y las formas

lineales $L_1, L_2, \ldots, L_{n+m}$ son linealmente independientes sobre este espacio.

Sea $V_n(K)$ el espacio vectorial de dimensión n, generado por $\{ \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \}$.

Para cada $z = [z_1, z_2, \ldots, z_{n+m}]^T \in K^{n+m}$, denotaremos por

$$(0.2) \qquad p_{n+m} = p_{n+m}[z]$$

al elemento de $V_{n+m}(K)$ que verifica

$$(0.3) \qquad L_i(p_{n+m}) = z_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n+m$$

que según la hipótesis (0.1) existe y es único.

Sean $I_{n,i}$, $i = 1, \ldots, s$ $(1 \leq s \leq m+1)$, s subconjuntos distintos de $\{ 1, 2, \ldots, n+m \}$, tales que

$$\text{card}(I_{n,i}) = n \ , \quad \forall i.$$

Llamemos

$$(0.4) \qquad \mathcal{L}_{n,i} = \{ L_j \ / \ j \in I_{n,i} \} \ , \quad i = 1, \ldots, s$$

y supongamos que

$$(0.5) \qquad \det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0 \ , \quad i = 1, \ldots, s.$$

Si $I_{n,i} = \{ \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{in} \}$, escribiremos entonces

pero las que nos interesan $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$, pueden ser calculadas usando alguno de los resultados que referimos a continuación.

1. Bajo las hipotesis del teorema 0.1, las diferencias divididas $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ son la única solución del sistema

$$(0.19)\quad \begin{cases} \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \cdot \left(L_j(\phi_k) - L_j(p^k_{n,i}) \right) = z_j - L_j(p_{n,i}) \\ L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i} \end{cases}$$

correspondiente a cualquier $\mathcal{L}_{n,i}$.

Como en (0.11) realmente sólo necesitamos $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$, podemos utilizar en lugar de lo anterior, el resultado siguiente.

2. Bajo las hipótesis del teorema 0.2, las diferencias divididas $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$ son la única solución del sistema

$$(0.20)\quad \begin{cases} \sum_{k=n+s}^{n+m} x_k \cdot \left(L_j(\phi_k) - L_j(p^k_{n+s-1,\bigcup_{i=1}^{s}\{i\}}) \right) = z_j - L_j(p_{n+s-1,\bigcup_{i=1}^{s}\{i\}}) \\ L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{cases}$$

donde $p_{n+s-1,\bigcup_{i=1}^{s}\{i\}}$ es el único elemento del espacio vectorial $V_{n+s-1}(K)$, que verifica

Con estas notaciones y bajo las hipótesis (0.1) y (0.5) se tiene el siguiente teorema, que presenta la fórmula general de interpolación por recurrencia sobre la que trabajaremos en el capítulo II.

TEOREMA 0.1

Para $s \geq 2$, para cualquier forma lineal L sobre $W(K)$ tal que

$$(0.10)\quad D_L = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ L(p_{n,1}^{n+1}) & L(p_{n,2}^{n+1}) & \cdots & L(p_{n,s}^{n+1}) \\ L(p_{n,1}^{n+2}) & L(p_{n,2}^{n+2}) & \cdots & L(p_{n,s}^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L(p_{n,1}^{n+s-1}) & L(p_{n,2}^{n+s-1}) & \cdots & L(p_{n,s}^{n+s-1}) \end{vmatrix} \neq 0$$

y para cada $z \in K^{n+m}$ se tiene

$$(0.11)\quad L(p_{n+m}) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot L(p_{n,i}) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i \cdot x_k \cdot L(\phi_k - p_{n,i}^{k})$$

donde $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s)$ es la única solución del sistema

$$(0.12)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot L(p_{n,i}^{n+h}) = L(\phi_{n+h}) \quad , \; h = 1, \ldots, s-1 \end{cases}$$

Para $s = 1$, y para toda L sobre $W(K)$ se tiene

$$(0.13) \qquad L(p_{n+m}) = L(p_{n,1}) + \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k . L(\phi_k - p^k_{n,1}).$$

OBSERVACIONES

1. El interés del teorema anterior está en permitir el cálculo de $L(p_{n+m})$ sin necesidad de resolver explícitamente el sistema (0.3).
Nótese que la expresión (0.11) es válida bajo la condición (0.10) para L mientras que (0.13) lo es sin esa condición, pero que (0.13) es simplemente (0.11) para $s = 1$. En este sentido la fórmula (0.11), considerada para $s \geq 1$, fué llamada en [9] fórmula general de interpolación por recurrencia.

2. Nótese también que como (0.13) es válida para toda L y los x_k (véase (0.9)) son independientes de L, ésta puede ser suprimida y así (0.13) puede escribirse en la forma

$$(0.14) \qquad p_{n+m} = p_{n,1} + \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k . (\phi_k - p^k_{n,1}).$$

Esta fórmula ha sido llamada por diversos autores fórmula de Newton generalizada.
Sin embargo, para $s \geq 2$ no puede suprimirse en general L en (0.11), ya que los λ_i satisfacen (0.12) y , por tanto, dependen de L.

3. En el caso particular $s = m+1$, la doble sumatoria del segundo miembro de (0.11) desaparece y se obtiene la fórmula general de Mühlbach-Aitken-Neville.

El siguiente teorema que recordamos sirve para ver que la condición (0.10) se puede sustituir por otras condiciones más fáciles de comprobar en la práctica.

TEOREMA 0.2

Sea $s \geq 2$ y supongamos que los conjuntos $\mathcal{L}_{n,i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$, verifican las condiciones siguientes:

$$(0.15) \qquad \text{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) = n-1 \,, \quad i = 1, \ldots, s-1$$

$$(0.16) \qquad \text{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}\Big) = n+s-1$$

$$(0.17) \qquad \det\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+s-1} \,;\, \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}\right) \neq 0$$

$$(0.18) \qquad \det\left(\phi_1, \ldots\ldots, \phi_n \,;\, (\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\}\right) \neq 0 \,, \; i = 1, \ldots, s-1.$$

Entonces, $D_L \neq 0$.

Para calcular $L(p_{n+m})$ según la expresión (0.11) es necesario conocer ciertas diferencias divididas x_k. Recordemos que las x_k son los coeficientes de p_{n+m} y que por tanto verifican el sistema

$$\sum_{k=1}^{n+m} L_i(\phi_k).x_k = z_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n+m$$

pero las que nos interesan $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$, pueden ser calculadas usando alguno de los resultados que referimos a continuación.

1. Bajo las hipotesis del teorema 0.1, las diferencias divididas $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ son la única solución del sistema

$$(0.19)\quad \begin{cases} \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \cdot (L_j(\phi_k) - L_j(p^k_{n,i})) = z_j - L_j(p_{n,i}) \\ L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_{n,i} \end{cases}$$

correspondiente a cualquier $\mathcal{L}_{n,i}$.

Como en (0.11) realmente sólo necesitamos $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$, podemos utilizar en lugar de lo anterior, el resultado siguiente.

2. Bajo las hipótesis del teorema 0.2, las diferencias divididas $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$ son la única solución del sistema

$$(0.20)\quad \begin{cases} \sum_{k=n+s}^{n+m} x_k \cdot (L_j(\phi_k) - L_j(p^k_{n+s-1,\overset{s}{\underset{i=1}{\cup}}\delta(i)})) = z_j - L_j(p_{n+s-1,\overset{s}{\underset{i=1}{\cup}}\delta(i)}) \\ L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} \mathcal{L}_{n,i} \end{cases}$$

donde $p_{n+s-1,\overset{s}{\underset{i=1}{\cup}}\delta(i)}$ es el único elemento del espacio vectorial $V_{n+s-1}(K)$, que verifica

(0.21) $L_j(p_{n+s-1,\overset{s}{\underset{i=1}{\delta}}\{i\}}) = z_j$, para toda $j \in \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} I_{n,i}$.

Análogamente, $p^k_{n+s-1,\overset{s}{\underset{i=1}{\delta}}\{i\}}$ es el único elemento de $V_{n+s-1}(K)$ que verifica

(0.22) $L_j(p^k_{n+s-1,\overset{s}{\underset{i=1}{\delta}}\{i\}}) = L_j(\phi_k)$, para toda $j \in \overset{s}{\underset{i=1}{\cup}} I_{n,i}$.

2. LA IDENTIDAD DE SYLVESTER GENERALIZADA PARA DETERMINANTES

En [10] y [21] se obtiene una identidad entre determinantes que generaliza a la conocida identidad de Sylvester para determinantes (ver [7] , pág. 33). Esta identidad, llamada identidad de Sylvester generalizada, se aplicó allí para obtener una fórmula de interpolación por recurrencia similar a la anterior y que en los casos más interesantes coincide con ella.

Ahora y siguiendo con las notaciones anteriores, pasemos a desarrollar los puntos de [21] de los que partiremos en los capítulos I y III.

Sea A una matriz cuyos elementos pertenecen a un cuerpo conmutativo y de característica cero K.

$$(0.23) \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p+q} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p+q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p+q1} & a_{p+q2} & \cdots & a_{p+qp+q} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} p \geq 1, \\ q \geq 2. \end{matrix}$$

Denotamos

$$(0.24) \qquad A\begin{bmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_h \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_h \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_h} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_h j_1} & a_{i_h j_2} & \cdots & a_{i_h j_h} \end{vmatrix}$$

y $I A I = A\begin{bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & p+q \\ 1, & 2, & \ldots, & p+q \end{bmatrix} = \det A.$

Sean

$$(0.25) \qquad I_k = \{ r_{k1}, r_{k2}, \ldots, r_{kp+1} \}, \quad k = 1, 2, \ldots, q,$$

q subconjuntos de $I = \{1, 2, \ldots, p+q\}$ tales que

$$(0.26) \qquad \begin{cases} \text{card } (I_k) = p+1, & k = 1, 2, \ldots, q \\ \text{card } (I_k \cap I_{k+1}) = p, & k = 1, \ldots, q-1. \end{cases}$$

Llamemos

$$(0.27) \qquad S_k = I_k \cap I_{k+1} = \{ s_{k1}, s_{k2}, \ldots, s_{kp} \} .$$

Sea

$$(0.28) \qquad |B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qq} \end{vmatrix}$$

el determinante de la matriz cuyos elementos son

$$(0.29) \qquad b_{ij} = A \begin{bmatrix} 1 & , 2 & , \ldots, & p & , p+i \\ r_{j1}, & r_{j2}, & \ldots, & r_{jp}, & r_{jp+1} \end{bmatrix} .$$

Finalmente, sea r_{kh_k} el elemento de I_k tal que

$$(0.30) \qquad \begin{cases} r_{kh_k} \in I_k - I_{k-1} = I_k - S_{k-1} , & k = 2, \ldots, q \\ r_{1h_1} \in I_1 - i_2 = I_1 - S_1 . \end{cases}$$

Se considera la siguiente ordenación θ del conjunto $\{ 1, 2, \ldots, p+q \}$

1°) los $p+1$ primeros elementos de θ son los $p+1$ elementos de I_1 con una ordenación cualquiera.

2°) el elemento de lugar $p+j$, $j \geq 2$, de θ es aquél de I_j que no pertenece a I_{j-1}.

En estas condiciones y supuesto un orden arbitrario en I_j e $I_j \cap I_{j+1}$ dado en (0.25) y (0.27), denotamos:

$$(0.31)\begin{cases} \sigma_\theta: \text{número de inversiones en la ordenación } \theta \text{ respecto a } \{1, 2, \ldots, p+q\} \\ \sigma_j: \text{número de inversiones en } I_j \text{ respecto a la ordenación de sus elementos en } \theta \\ \rho_j: \text{número de inversiones en } I_j \cap I_{j+1} \text{ respecto a la ordenación de sus elementos en } \theta \end{cases}$$

Con estas consideraciones se puede establecer el siguiente resultado:

<u>TEOREMA 0.3</u>

Bajo las hipótesis anteriores se tiene

$$(0.32)\quad |B| = C \cdot |A| \cdot \prod_{k=1}^{q-1} A\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & p \\ s_{k1} & s_{k2} & \ldots & s_{kp} \end{bmatrix}$$

donde C es una constante que no depende de los a_{ij} de $|A|$ y que toma los valores cero, uno ó menos uno según la fórmula

$$(0.33)\quad C = \begin{cases} 0, & \text{si } \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{q} I_k\right) < p+q \\ (-1)^{\sigma_\theta + \sum_{j=1}^{q} \sigma_j + \sum_{j=1}^{q-1} \rho_j}, & \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{q} I_k\right) = p+q \end{cases}$$

A (0.32) se la denomina " Identidad de Syives-ter generalizada para determinantes ", ya que en el caso especial en que

$$I_k = \{ 1, 2, \ldots, p, p+k \} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, q$$

entonces $r_{kh_k} = p+k$, $h_k = p+1$ $\forall k$, y (0.32) tiene la forma

$$(0.34) \qquad |B| = |A|\,.\,A\begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, p \\ 1, 2, \ldots, p \end{bmatrix}^{q-1}$$

que es la identidad de Sylvester para determinantes dada en [4] .

En [10] se siguió una demostración diferente a la [21] para llegar a la fórmula (0.33). Esto dió lugar a que la constante C que aparece en (0.33) se expresara de forma diferente. Allí, bajo la hipótesis

$$r_{k1} < r_{k2} < \ldots < r_{kp+1} \qquad k = 1, 2, \ldots, q$$

$$s_{k1} < s_{k2} < \ldots < s_{kp} \qquad k = 1, \ldots, q-1$$

se llegaba, cuando $\operatorname{card}(\bigcup_{k=1}^{q} I_k) = p+q$, a que

$$C = (-1)^{q(q-1)/2 + \sum_{i=1}^{q} (r_{ih_i} - h_i) + \beta}$$

donde β es el número de inversiones de $\{ r_{1h_1}, \ldots, r_{qh_q} \}$ respecto a $\{ 1, 2, \ldots, p+q \}$.
(Nótese que en la expresión de C que se encuentra en [10] faltaba el tercer sumando : β).

La identidad de Sylvester generalizada sirvió para obtener una nueva igualdad similar a la (0.11), como vamos a ver.

Consideremos de nuevo el problema de interpolación (0.2)-(0.3) en las siguientes circunstancias:

1°) se verifica la condición (0.1)

2°) se definen unos conjuntos $\mathcal{L}_{n,i}$, $i = 1, \ldots, s$, ($1 \leq s \leq m+1$) como se hizo en (0.4), verificando las condiciones (0.5), (0.15), (0.16) y (0.18). (Obsérvese que ya no se supone (0.17).)

Por (0.16), se debe verificar que

$$\operatorname{card}\Big(\mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \Big) = m-s+1$$

por lo que si $s < m+1$, entonces $\mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \neq \emptyset$, y podemos considerar

$$\mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} = \{ L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_{m-s+1}} \}$$

con $i_1 < i_2 < \ldots < i_{m-s+1}$.

Bajo estas consideraciones se llegó a que el valor de la forma lineal L sobre la solución del problema de interpolación (0.2)-(0.3), denotando

$$(0.35) \qquad r_{n,j}^{n+k} = \phi_{n+k} - p_{n,j}^{n+k}$$

para simplificar, es:

$$
(0.36)\qquad L(p_{n+m}) = \frac{\begin{vmatrix}
L(r_{n,1}^{n+1}) & \dots & L(r_{n,s}^{n+1}) & L_{\ell_1}(r_{n,s}^{n+1}) & \dots\dots & L_{\ell_{m-s+1}}(r_{n,s}^{n+1}) \\
L(r_{n,1}^{n+2}) & \dots & L(r_{n,s}^{n+2}) & L_{\ell_1}(r_{n,s}^{n+2}) & \dots\dots & L_{\ell_{m-s+1}}(r_{n,s}^{n+2}) \\
\dots & & & & & \\
L(r_{n,1}^{n+m}) & \dots & L(r_{n,s}^{n+m}) & L_{\ell_1}(r_{n,s}^{n+m}) & \dots\dots & L_{\ell_{m-s+1}}(r_{n,s}^{n+m}) \\
L(p_{n,1}) & \dots & L(p_{n,s}) & -z_{\ell_1} + L_{\ell_1}(p_{n,s}) & \dots\dots & -z_{\ell_{m-s+1}} + L_{\ell_{m-s+1}}(p_{n,s})
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
L(r_{n,1}^{n+1}) & \dots & L(r_{n,s}^{n+1}) & L_{\ell_1}(r_{n,s}^{n+1}) & \dots\dots & L_{\ell_{m-s+1}}(r_{n,s}^{n+1}) \\
\dots & & & & & \\
L(r_{n,1}^{n+m}) & \dots & L(r_{n,s}^{n+m}) & L_{\ell_1}(r_{n,s}^{n+m}) & \dots\dots & L_{\ell_{m-s+1}}(r_{n,s}^{n+m}) \\
1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots & 0
\end{vmatrix}}
$$

En el caso particular interesante $s = m+1$, (0.36) toma la forma

$$(0.37)\quad L(p_{n+m}) = \frac{\begin{vmatrix} L(r_{n,1}^{n+1}) & L(r_{n,2}^{n+1}) & \cdots & L(r_{n,m+1}^{n+1}) \\ L(r_{n,1}^{n+2}) & L(r_{n,2}^{n+2}) & \cdots & L(r_{n,m+1}^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L(r_{n,1}^{n+m}) & L(r_{n,2}^{n+m}) & \cdots & L(r_{n,m+1}^{n+m}) \\ L(p_{n,1}) & L(p_{n,2}) & \cdots & L(p_{n,m+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L(r_{n,1}^{n+1}) & L(r_{n,2}^{n+1}) & \cdots & L(r_{n,m+1}^{n+1}) \\ L(r_{n,1}^{n+2}) & L(r_{n,2}^{n+2}) & \cdots & L(r_{n,m+1}^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L(r_{n,1}^{n+m}) & L(r_{n,2}^{n+m}) & \cdots & L(r_{n,m+1}^{n+m}) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}}.$$

Si $s = 1$, por las mismas razones señaladas en páginas anteriores, L puede ser suprimida en (0.36) obteniéndose la fórmula

$$p_{n+m} = \frac{(-1)^m \begin{vmatrix} r_{n,1}^{n+1} & L_{\ell_1}(r_{n,1}^{n+1}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_{n,1}^{n+1}) \\ r_{n,1}^{n+2} & L_{\ell_1}(r_{n,1}^{n+2}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_{n,1}^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n,1}^{n+m} & L_{\ell_1}(r_{n,1}^{n+m}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_{n,1}^{n+m}) \\ p_{n,1} & -z_{\ell_1} + L_{\ell_1}(p_{n,1}) & \cdots & -z_{\ell_m} + L_{\ell_m}(p_{n,1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{\ell_1}(r_{n,1}^{n+1}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_{n,1}^{n+1}) \\ L_{\ell_1}(r_{n,1}^{n+2}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_{n,1}^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{\ell_1}(r_{n,1}^{n+m}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_{n,1}^{n+m}) \end{vmatrix}} \tag{0.38}$$

Puede verse en [21] que la fórmula (0.36) no coincide en general con (0.11). Es decir, que son dos expresiones distintas para el mismo valor $L(p_{n+m})$, aunque en los casos particulares $s = 1$ y $s = m+1$ representados en (0.37) y (0.38), sí coinciden.

CAPITULO I

ALGUNAS DESIGUALDADES E IDENTIDADES ENTRE DETERMINANTES

CAPITULO I

ALGUNAS DESIGUALDADES E IDENTIDADES ENTRE DETERMINANTES

El centro de este capítulo se encuentra en la denominada identidad de Sylvester para determinantes, tanto en su forma original (0.34) como en la forma generalizada (0.32).

C. Brezinski en [4] utilizó la identidad de Sylvester en su forma original para la obtención de algoritmos del tipo Aitken-Neville (algoritmo M-N-A). Posteriormente, como ya hemos visto, Gasca & López-Carmona & Ramírez [10] y [21] lograron generalizar dicha identidad y la aplicaron a problemas de interpolación para obtener la fórmula general (0.36), incluyendo los resultados de aquél como caso particular.

Como las demostraciones de la identidad generalizada que aparecían en [10] y [21] están basadas en una idea distinta de la que aparece en los libros de Karlin [18] o de Gantmacher [7] para la identidad de Sylvester original, vamos a ver ahora otra demostración que sí está basada en la idea de ésta y además veremos otras aplicaciones, algunas de ellas ligadas a las que aparecen en [18] para matrices especiales (totalmente positivas, definidas positivas, etc.).

En el último apartado de este capítulo se aplicará la identidad de Sylvester a problemas de interpolación.

1.- OTRA DEMOSTRACION DE LA IDENTIDAD DE SYLVESTER GENERALIZADA

Comenzaremos pues dando una nueva demostración del teorema 0.3 de esta memoria, para el caso en que $\operatorname{card}(\bigcup_{k=1}^{q} I_k)=p+q$, que es el más interesante.

Como allí se hizo, se denotará

$$I_k = \{r_{k1}, r_{k2}, \ldots, r_{kp+1}\} \quad , k = 1, 2, \ldots, q$$

$$I_k \cap I_{k+1} = \{s_{k1}, s_{k2}, \ldots, s_{kp}\} \quad , k = 1, \ldots, q-1,$$

pero aquí supondremos que

$$(1.1) \quad \begin{cases} r_{k1} < r_{k2} < \ldots < r_{kp+1} \\ \\ s_{k1} < s_{k2} < \ldots < s_{kp} \end{cases}$$

y llamaremos B a una matriz definida como en (0.28), cuando se tiene en cuenta (1.1).

TEOREMA 1.1.- Suponiendo que se verifican las condiciones (0.26), (0.30) y (1.1), y además que $\operatorname{card}(\bigcup_{k=1}^{q} I_k) = p+q$, entonces se tiene

$$(1.2) \quad |B| = c.|A|.\prod_{k=1}^{q-1} A\begin{bmatrix} 1 & , 2 & , \ldots, & p \\ s_{k1} & , s_{k2} & , \ldots, & s_{kp} \end{bmatrix}$$

donde c es una constante dada por

$$c = (-1)^{q(p+1)+\sum_{j=1}^{q} h_j + \alpha}$$

y α es el número de inversiones de la ordenación

$\{s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1p}, r_{1h_1}, \ldots, r_{qh_q}\}$ respecto a $\{1, 2, \ldots, p+q\}$.

Para demostrarlo comencemos estableciendo el siguiente lema :

LEMA 1.2 .- Sea $I = \{1, 2, \ldots, p+q\}$ y llamemos I_k, $k=1, \ldots, q$, a q subconjuntos de I que verifican

$$(1.3) \quad \begin{cases} \text{card}(I_k) = p+1, & k = 1, 2, \ldots, q \\ \text{card}(I_k \cap I_{k+1}) = p, & k = 1, \ldots, q-1. \end{cases}$$

Entonces, son equivalentes las siguientes proposiciones :

1.- $$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{q} I_k\right) = p+q \qquad (1.4)$$

2.- $$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{r} I_i\right) = p+r, \; r = 1,2,\ldots,q \qquad (1.5)$$

3.- Para toda j, $2 \leq j \leq q$, el elemento $r_{jh_j} \in I_j - I_{j-1}$ verifica

$$r_{jh_j} \notin \bigcup_{i=1}^{j-1} I_i \qquad (1.6)$$

Demostración .:- Empecemos viendo la equivalencia entre (1.4) y (1.5). Que (1.5) implica (1.4) es evidente. Para el recíproco razonemos por reducción al absurdo : supongamos que $\exists\, k$, $1 \leq k \leq q$, tal que

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right) \neq p+k \qquad (1.7).$$

Pensemos qué forma deben tener los conjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_q$ para que verifiquen (1.3).

I_1 estará formado por $p+1$ elementos de I

$$I_1 = \{ r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1p+1} \},$$

y observemos que con nuestras notaciones se tiene

$$I_1 = I_1 \cap I_2 \cup \{ r_{1h_1} \}$$

$$I_2 = I_1 \cap I_2 \cup \{ r_{2h_2} \} \quad \text{tal que } r_{1h_1} \notin I_2,\ r_{2h_2} \notin I_1.$$

Por tanto

$$\text{card}(I_1 \cup I_2) = p+2.$$

En cuanto a I_3, puede expresarse en la forma

$$I_3 = I_2 \cap I_3 \cup \{ r_{3h_3} \} \quad \text{con } r_{3h_3} \notin I_2,$$

pero pudieran suceder dos cosas:

a) que $r_{3h_3} = r_{1h_1}$

b) que $r_{3h_3} \neq r_{1h_1}$.

En cualquier caso, se tiene que

$$\text{card}(I_1 \cup I_2 \cup I_3) \leq p+3.$$

En general, ocurre que

$$I_j = I_{j-1} \cap I_j \cup \{ r_{jh_j} \},\ j \geq 3, \text{ con } r_{jh_j} \notin I_{j-1}.$$

con la posibilidad de que sucedan dos cosas :

a) que $r_{jh_j} \in I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{j-2}$

b) que $r_{jh_j} \notin I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{j-2}$.

En cualquier caso se tendrá

(1.8) $\quad \text{card}(I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_j) \leq p+j$, para todo $j \geq 3$,

por lo que para el k de (1.7) se debe verificar

(1.9) $\quad \text{card}(\bigcup_{i=1}^{k} I_i) < p+k$.

Ahora bien, puesto que cada I_m sólo puede poseer un elemento que no esté en $\bigcup_{i=1}^{m-1} I_i$, de (1.9) se obtiene que

$$\text{card}(\bigcup_{i=1}^{q} I_i) < p+q.$$

Con lo que se llega a una contradicción.

Pasemos ahora a comprobar la equivalencia entre (1.5) y (1.6). La implicación (1.6) $\Longrightarrow$ (1.5) es trivial teniendo en cuenta la demostración de la equivalencia anterior.
Para el recíporco, fijémonos en que al verificarse (1.5) , la única forma en que se pueden tener los I_j es la que corresponde a los casos indicados en b). De ahí que se verifique (1.6).

Demostración del teorema 1.1 .- Hemos denotado

$$I_k = \{ r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kp}, r_{kp+1} \}, \; j = 1, 2, \dots, q$$

a

$$I_k \cap I_{k+1} = \{ s_{k1}, s_{k2}, \ldots, s_{kp} \} , \; j = 1, \ldots, q-1,$$

y supuesto que en ambos conjuntos los elementos están ordenados en orden creciente. Según esto, el elemento b_{ij} de B es

$$b_{ij} = A \begin{bmatrix} 1 & , 2 & , \ldots, p & , p+i \\ r_{j1}, & r_{j2}, & \ldots, r_{jp}, & r_{jp+1} \end{bmatrix} .$$

En un principio añadamos la hipótesis :

$$(1.10) \qquad A \begin{bmatrix} 1 & , 2 & , \ldots, p \\ s_{j1}, & s_{j2}, & \ldots, s_{jp} \end{bmatrix} \neq 0 , \; j = 1, \ldots, q-1.$$

En lo que sigue todo se reduce a ver qeé forma tienen las columnas de $|B|$. Empecemos por la última columna. De (1.10) se tiene

$$(1.11) \qquad A \begin{bmatrix} 1 & , 2 & , \ldots, p \\ s_{q-1,1}, & s_{q-1,2}, & \ldots, s_{q-1,p} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Por verificarse (1.11), se puede construir una matriz $\hat{A}^q$ a partir de la matriz A , de la siguiente manera:

La columna r_{qh_q} de $\hat{A}^q$ tendrá ceros en sus p primeras filas, y se habrá obtenido al sumarle a la columna r_{qh_q} de A una combinación lineal adecuada de las columnas $s_{q-1,1}$, $s_{q-1,2}, \ldots, s_{q-1,p}$. El resto de las columnas de $\hat{A}^q$ serán iguales a las correspondientes columnas de A.

De esta forma $|\hat{A}^q| = |A|$ y además se verificará que

$$(1.12)\quad b_{jq} = A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p & , p+j \\ r_{q1}, & \ldots, & r_{qp}, & r_{qp+1} \end{bmatrix} = \hat{A}^{q}\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p & , p+j \\ r_{q1}, & \ldots, & r_{qp}, & r_{qp+1} \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{p+1+h_q} \cdot \hat{a}^{q}_{p+j,r_{qh_q}} \cdot A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{q-1,1}, & \ldots, & s_{q-1,p} \end{bmatrix}$$

para $j = 1, 2, \ldots, q$, donde $\hat{a}^{q}_{p+j,r_{qh_q}}$ representa al elemento de $\hat{A}^{q}$ que está en la fila $p+j$, columna r_{qh_q}.

Así, de (1.12) se deduce que la última columna de $|B|$ es

$$(1.13)\quad \begin{bmatrix} b_{1q} \\ b_{2q} \\ \vdots \\ b_{qq} \end{bmatrix} = (-1)^{p+1+h_q} \cdot A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{q-1,1}, & \ldots, & s_{q-1,p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}^{q}_{p+1,r_{qh_q}} \\ \hat{a}^{q}_{p+2,r_{qh_q}} \\ \vdots \\ \hat{a}^{q}_{p+q,r_{qh_q}} \end{bmatrix}.$$

Por estar en las condiciones del lema 1.2 y verificarse (1.4), se tiene que

$$(1.14)\quad r_{qh_q} \notin \bigcup_{i=1}^{q-1} I_i .$$

Además, por (1.10) se verifica

$$A\begin{bmatrix}1 & , \cdots, & p\\ s_{q-2,1}, & \cdots, & s_{q-2,p}\end{bmatrix} \neq 0$$

que junto con (1.14) implica

$$(1.15)\qquad \hat{A}^{q}\begin{bmatrix}1 & , \cdots, & p\\ s_{q-2,1}, & \cdots, & s_{q-2,p}\end{bmatrix} \neq 0.$$

Teniendo en cuenta (1.15) podemos construir una matriz $\hat{A}^{q-1}$ de tal forma que $|\hat{A}^{q-1}| = |\hat{A}^{q}|$. $\hat{A}^{q-1}$ tendrá todas las columnas, a excepción de la $r_{q-1,h_{q-1}}$, iguales a las correspondientes columnas de $\hat{A}^{q}$. Su columna $r_{q-1,h_{q-1}}$ tendrá ceros en las p primeras filas, ya que se habrá obtenido sumándole a la columna $r_{q-1,h_{q-1}}$ de $\hat{A}^{q}$ una combinación lineal adecuada de sus columnas $s_{q-2,1}, \cdots, s_{q-2,p}$. Así $\hat{A}^{q-1}$ se diferencia de la matriz A sólo en las columnas r_{qh_q} y $r_{q-1,h_{q-1}}$, y además se verifica $|\hat{A}^{q-1}| = |A|$.

Se tendrá

$$(1.16)\qquad b_{jq-1} = A\begin{bmatrix}1 & , \cdots, & p & , & p+j\\ r_{q-1,1}, & \cdots, & r_{q-1,p}, & & r_{q-1,p+1}\end{bmatrix} =$$

$$= \hat{A}^{q}\begin{bmatrix}1 & , \cdots, & p & , & p+j\\ r_{q-1,1}, & \cdots, & r_{q-1,p}, & & r_{q-1,p+1}\end{bmatrix} =$$

$$= \hat{A}^{q-1}\begin{bmatrix}1 & , \cdots, & p & , & p+j\\ r_{q-1,1}, & \cdots, & r_{q-1,p}, & & r_{q-1,p+1}\end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^{p+1+h_{q-1}} \cdot \hat{a}^{q-1}_{p+j,r_{q-1,h_{q-1}}} \cdot A\begin{bmatrix}1 & , \cdots, & p\\ s_{q-2,1}, & \cdots, & s_{q-2,p}\end{bmatrix}$$

para $j = 1, 2, \ldots, q$, donde $\hat{a}^{q-1}_{p+j,r_{q-1},h_{q-1}}$ representa al elemento de $\hat{A}^{q-1}$ que está en la fila $p+j$, columna r_{q-1},h_{q-1}.

Así pues, de (1.16), la columna q-1 (penúltima) de $|\hat{B}|$ puede escribirse

$$\begin{bmatrix} b_{1q-1} \\ b_{2q-1} \\ \vdots \\ b_{qq-1} \end{bmatrix} = (-1)^{p+1+h_{q-1}} \cdot A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{q-2,1}, & \ldots, & s_{q-2,p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{a}^{q-1}_{p+1,r_{q-1},h_{q-1}} \\ \hat{a}^{q-1}_{p+2,r_{q-1},h_{q-1}} \\ \vdots \\ \hat{a}^{q-1}_{p+q,r_{q-1},h_{q-1}} \end{bmatrix}.$$

Razonando como antes, de $\hat{A}^{q-1}$ pasaríamos a otra matriz $\hat{A}^{q-2}$, de ésta a otra $\hat{A}^{q-3}$, ..., y así sucesivamente hasta conseguir una matriz $\hat{A}^{1}$ con $|\hat{A}^{1}| = |A|$, y que se diferencia de A sólo en las columnas $r_{qq}, r_{q-1,h_{q-1}}, \ldots, r_{1h_1}$.

Teniendo en cuenta la forma en que podrían escribirse las columnas de $|B|$, se tiene:

$$(1.17) \quad |B| = (-1)^{(p+1).q + \sum_{j=1}^{q} h_j} \cdot A\begin{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{11}, & \ldots, & s_{1p} \end{bmatrix}\end{pmatrix}^2 \cdot$$

$$\cdot A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{21}, & \ldots, & s_{2p} \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{q-1,1}, & \ldots, & s_{q-1,p} \end{bmatrix} \cdot |\hat{A}|,$$

donde $\hat{A}$ es la matriz siguiente:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a}^{1}_{p+1,r_{1h_1}} & \tilde{a}^{2}_{p+1,r_{2h_2}} & \cdots\cdots & \tilde{a}^{q}_{p+1,r_{qh_q}} \\ \tilde{a}^{1}_{p+2,r_{1h_1}} & \tilde{a}^{2}_{p+2,r_{2h_2}} & \cdots\cdots & \tilde{a}^{q}_{p+2,r_{qh_q}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}^{1}_{p+q,r_{1h_1}} & \tilde{a}^{2}_{p+q,r_{2h_2}} & & \tilde{a}^{q}_{p+q,r_{qh_q}} \end{bmatrix} .$$

Por otra parte, $\tilde{A}^{1}$ es una matriz que con respecto a A sólo se diferencia en las columnas $r_{1h_1}, \ldots, r_{qh_q}$. En esas columnas, las p primeras filas tienen ceros y las restantes filas unos elementos que hemos designado $\tilde{a}^{k}_{i,r_{kh_k}}$. Así que, permutando en $\tilde{A}^{1}$ sus columnas de la forma siguiente:

- las columnas $s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1p}$ pasarán a ser, respectivamente, las columnas 1, 2, ..., p
- las últimas columnas serán las columnas $r_{1h_1}, \ldots, r_{qh_q}$, en este orden

y, llamando M a la nueva matriz, se tiene que

$$|M| = (-1)^{\alpha} . |\tilde{A}^{1}| = (-1)^{\alpha} . |A| \qquad (1.18)$$

donde α es el número de inversiones de la ordenación $\{ s_{11}, \ldots, s_{1p}, r_{1h_1}, \ldots, r_{qh_q} \}$ con respecto a $\{ 1, 2, \ldots, p+q \}$.

Además

$$|M| = A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, & p \\ s_{11}, & \ldots, & s_{1p} \end{bmatrix} . |\tilde{A}| \qquad (1.19)$$

por lo que, de (1.18) y (1.19) se tiene

$$(1.20) \qquad A\begin{bmatrix} 1 & , \cdots, & p \\ s_{11}, & \cdots, & s_{1p} \end{bmatrix} . | \tilde{A} | = (-1)^{\alpha} . | A |$$

y, sustituyendo (1.20) en (1.17) se llega a que

$$| B | = (-1)^{(p+1).q + \sum_{j=1}^{q} h_j + \alpha} . A\begin{bmatrix} 1 & , \cdots, & p \\ s_{11}, & \cdots, & s_{1p} \end{bmatrix} . \cdots .$$

$$. A\begin{bmatrix} 1 & , \cdots, & p \\ s_{q-1,1}, & \cdots, & s_{q-1,p} \end{bmatrix} . | A | =$$

$$= (-1)^{(p+1).q + \sum_{j=1}^{q} h_j + \alpha} . \prod_{k=1}^{q-1} A\begin{bmatrix} 1 & , \cdots, & p \\ s_{k1}, & \cdots, & s_{kp} \end{bmatrix} . | A |$$

que es precisamente la expresión (1.2) a la que queríamos llegar.

Además, (1.2) es cierta sin las restricciones (1.11) ya que el conjunto de todas las matrices de orden $p+q$ que satisfacen (1.11) es denso en la clase de todas las matrices de orden $p+q$. Y por tanto, al ser (1.2) una identidad algebraica, dicha igualdad es cierta por continuidad.

OBSERVACIONES

1. Cuando en el teorema 1.1 se prescinde de la hipótesis (1.1), es decir, se consideran ordenaciones arbitrarias y fijas en los conjuntos I_k e $I_k \cap I_{k+1}$, se obtiene:

$$(1.21)\quad |B| = (-1)^{(p+1).q+\alpha+\sum_{j=1}^{q}(h_j+\gamma_j)+\sum_{j=1}^{q-1}\eta_j} \cdot \sum_{k=1}^{q-1} A\begin{bmatrix}1, \ldots, p\\ I_k \cap I_{k+1}\end{bmatrix} |A|$$

donde γ_j y η_j son, respectivamente, el número de inversiones de las ordenaciones de I_j e $I_j \cap I_{j+1}$ respecto a las ordenaciones de sus elementos en orden creciente.

En efecto: los elementos b_{ij} de la matriz B del teorema 1.1 son

$$b_{ij} = A\begin{bmatrix}1 & , \ldots, p & , p+i\\ r_{j1}, & \ldots, r_{jp}, & r_{jp+1}\end{bmatrix}$$

y se pueden escribir en la forma

$$(1.22)\quad b_{ij} = (-1)^{\gamma_j} . A\begin{bmatrix}1, \ldots p, p+i\\ I_j\end{bmatrix}.$$

Como además,

$$(1.23)\quad A\begin{bmatrix}1 & ,2 & \ldots & , p\\ s_{k1}, & s_{k2}, & \ldots, & s_{kp}\end{bmatrix} = (-1)^{\tau_k} . A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, p\\ I_k \cap I_{k+1}\end{bmatrix}$$

entonces, sinmás que sustituir (1.22) y (1.23) en (1.2) se obtiene (1.21).

La demostración del teorema 1.1 y estos últimos razonamientos nos permiten concluir que la identidad (1.21) es la identidad de Sylvester para determinantes generalizada (0.32). Queda así demostrado el teorema 0.3, para el caso en que $\mathrm{card}(\bigcup_{k=1}^{q} I_k) = p+q$.

2. Dos de los casos particulares más interesantes de (1.21) son aquéllos que utilizan como I_k, $k = 1, 2, \ldots, q$, los conjuntos

$$I_k = \{ k, k+1, \ldots, k+p \} \tag{1.24}$$

y

$$I_k = \{ 1, 2, \ldots, p, p+k \} \tag{1.25}$$

y en ambos casos, con la ordenación natural.

Para la elección (1.24), tenemos que

$$\begin{cases} \alpha = p \\ h_1 = 1 \\ h_j = p+1, \quad j = 2, \ldots, q \\ \gamma_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q \\ \eta_j = 0, \quad j = 2, \ldots, q \end{cases}$$

por lo que (1.21) adopta la forma

$$|B| = |A|. \prod_{k=1}^{q-1} A\begin{bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & p \\ k+1, & k+2, & \ldots, & k+p \end{bmatrix}. \tag{1.26}$$

Considerando la elección (1.25), se tiene

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ h_j = p+1, \quad j = 1, 2, \ldots, q \\ \gamma_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q \\ \eta_j = 0, \quad j = 2, \ldots, q \end{cases}$$

y, por tanto, (1.21) se escribe como sigue:

$$|B| = |A|. A\begin{bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & p \\ 1, & 2, & \ldots, & p \end{bmatrix}^{q-1}. \tag{1.27}$$

3. Esta identidad (1.27) aparece en [18] , pag. 3, en otra forma equivalente que nos será útil en lo sucesivo.

Sea A una matriz de orden $n\times n$. Sean $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_p \leq n$ y $1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p \leq n$, dos conjuntos de p-tuplas de índices. Para cada índice i $(1 \leq i \leq n)$ no pertenecientes al conjunto $\nu = \{ \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p \}$, y cada j $(1 \leq j \leq n)$ no contenido en $\mu = \{ \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \}$, formamos

$$b_{ij} = A \begin{bmatrix} k_1, & k_2, & \dots, & k_{p+1} \\ i, & l_2, & \dots, & l_{p+1} \end{bmatrix}$$

donde $\{ k_1, k_2, \dots, k_{p+1} \}$ es el conjunto de índices $\{ i, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p \}$ colocados en orden natural, y $\{ l_1, l_2, \dots, l_{p+1} \}$ es el conjunto de índices $\{ j, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \}$ en orden natural.

Entonces para $i_1 < i_2 < \dots < i_q$, no pertenecientes a ν , y para $j_1 < j_2 < \dots < j_q$, no pertenecientes a μ , donde $q \leq n-p$, tenemos que el determinante

$$\nabla = \begin{vmatrix} b_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} & \dots & b_{i_1,j_q} \\ b_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} & \dots & b_{i_2,j_q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i_q,j_1} & b_{i_q,j_2} & \dots & b_{i_q,j_q} \end{vmatrix}$$

es igual a

$$\nabla = A \begin{bmatrix} \nu_1, & \nu_2, & \dots, & \nu_p \\ \mu_1, & \mu_2, & \dots, & \mu_p \end{bmatrix}^{q-1} \cdot A \begin{bmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \dots, & \alpha_{p+q} \\ \beta_1, & \beta_2, & \dots, & \beta_{p+q} \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

donde $\{ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+q} \}$, $\{ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p+q} \}$ son, respectivamente, los conjuntos de índices $\{ i_1, i_2, \ldots, i_q, \nu_1, \ldots, \nu_p \}$ y $\{ j_1, j_2, \ldots, j_q, \mu_1, \ldots, \mu_p \}$, ordenados de forma natural.

2.- ALGUNAS DESIGUALDADES ENTRE DETERMINANTES DE MATRICES ESPECIALES

Mediante la identidad de Sylvester pueden demostrarse ciertas desigualdades para determinantes de matrices del estilo de las que pueden verse en los capítulos 0 y 2 de [18].

Veremos ahora cómo la identidad (1.21) permite obtener otras desigualdades similares. La demostración se basa con frecuencia en que la matriz B de (1.21) mantenga el mismo caracter especial que tenga A.

Recordemos que una matriz real de orden n x n se dice que es totalmente positiva (T.P.), (respec. estrictamente totalmente positiva (S.T.P.)), si todos los determinantes

$$(1.29) \qquad A \begin{bmatrix} j_1, j_2, \ldots, j_p \\ k_1, k_2, \ldots, k_p \end{bmatrix}$$

donde $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ y $k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, $p = 1, 2, \ldots, n$, son no negativos (respec. positivos).

Una condición necesaria y suficiente para que A sea S.T.P. (ver [18], pag. 85) es

$$(1.30) \qquad A \begin{bmatrix} i, i+1, \ldots, i+s \\ j, j+1, \ldots, j+s \end{bmatrix} > 0, \quad s = 0, 1, \ldots, n-1, \quad i,j = 1, 2, \ldots, n-s.$$

Para que A, simétrica, sea definida positiva (S.D.P.), es decir, $x^T A x > 0 \quad \forall x \in R^n \quad x \neq 0$, es condición necesaria y suficiente que

$$(1.31) \qquad A\begin{bmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{bmatrix} > 0$$

donde $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

Las matrices S.T.P. y las S.D.P. son casos particulares de matrices que verifican la condición siguiente: si $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_p \leq n$ y $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p \leq n$

$$(1.32) \qquad \begin{cases} A\begin{bmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{bmatrix} > 0 \\ A\begin{bmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix} k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

donde $p = 1, 2, .., n$.

Otro tipo de matrices de nuestro interés son aquéllas que verifican la condición

$$(1.33) \qquad \begin{cases} A\begin{bmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{bmatrix} > 0, & 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n \\ & p = 1, 2, \ldots, n \\ a_{ij} \leq 0, \ \forall i \neq j. \end{cases}$$

Sucede que el conjunto formado por las matrices que verifican la condición (1.32), y el que constituyen las que satifascen la condición (1.33) tienen intersección no vacía , y no hay inclusión de uno en otro. Por ejemplo, la matriz

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

verifica ambas condiciones, y sin embargo

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

verifica (1.32) y no (1.33), y a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1/6 \\ -1/6 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

le ocurre lo contrario pues $A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -1/2 < 0.$

Veamos en primer lugar que ciertas matrices B (0.28) verifican la condición (1.32) si A la verifica.

Así, si

$$(1.34) \qquad b_{ij} = A\begin{bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & k, & k+i \\ 1, & 2, & \ldots, & k, & k+j \end{bmatrix} \qquad 1 \leq i,j \leq n-k$$

por (1.27) se tiene

$$(1.35) \qquad B\begin{bmatrix} j_1, j_2, \ldots, j_p \\ j_1, j_2, \ldots, j_p \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1, & \ldots, & k \\ 1, & \ldots, & k \end{bmatrix}^{p-1} \cdot A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k, k+j_1, \ldots, k+j_p \\ 1, \ldots, k, k+j_1, \ldots, k+j_p \end{bmatrix} > 0$$

y

$$(1.36) \qquad B\begin{bmatrix} j_1, j_2, \ldots, j_p \\ k_1, k_2, \ldots, k_p \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1, & \ldots, & k \\ 1, & \ldots, & k \end{bmatrix}^{p-1} \cdot A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k, k+j_1, \ldots, k+j_p \\ 1, \ldots, k, k+k_1, \ldots, k+k_p \end{bmatrix} > 0$$

luego

$$(1.37) \qquad B\begin{bmatrix} j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \\ k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \end{bmatrix} \cdot B\begin{bmatrix} k_1, & k_2, & \ldots, & k_p \\ j_1, & j_2, & \ldots, & j_p \end{bmatrix} > 0.$$

Es fácil comprobar que si A fuese estrictamente totalmente positiva, la B definida según (1.34) también lo sería. Por otra parte, si en vez de tomar (1.34) construímos B mediante

$$(1.38)\qquad b_{ij} = A\begin{bmatrix} 1, & 2 & , \ldots, & k & , k+i \\ j, & j+1, & \ldots, & j+k-1, & j+k \end{bmatrix} \qquad 1 \leq i,j \leq n-k$$

entonces, si A es S.T.P., B es S.T.P., porque por (1.26) se verifica

$$(1.39)\quad B\begin{bmatrix} i, & i+1, & \ldots, & i+s \\ j, & j+1, & \ldots, & j+s \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1,2 & ,\ldots,k & ,k+i & ,\ldots,k+i+s \\ j,j+1,\ldots,j+k, & j+k+1,\ldots, & j+k+s \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \prod_{h=j}^{j+s-1} A\begin{bmatrix} 1, & 2 & , \ldots, & k \\ h, & h+1, & \ldots, & h+k \end{bmatrix} > 0.$$

En cambio con (1.38) no se transmite el carácter de simétrica definida positiva de A a B. Por ejemplo, a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

le corresponde

$$B = \begin{bmatrix} A\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 2 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 1, & 2 \\ 2, & 3 \end{bmatrix} \\ A\begin{bmatrix} 1, & 3 \\ 1, & 2 \end{bmatrix} & A\begin{bmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por último, veamos que si A verifica (1.33) entonces B definida según (1.34) también verifica (1.33). En efecto: por (1.35) se tiene la desigualdad

$$B\begin{bmatrix} i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \\ i_1, & i_2, & \ldots, & i_p \end{bmatrix} > 0.$$

Por otra parte,

$$(1.40)\quad b_{ij} = A\begin{bmatrix}1,2,\ldots,k,k+i\\ 1,2,\ldots,k,k+j\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2k+j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kk+j} \\ a_{k+i,1} & a_{k+i,2} & \cdots & a_{k+i,k} & a_{k+i,k+j} \end{vmatrix}$$

es, para $i \neq j$, el determinante de una matriz del tipo (1.33) orlada con una fila y columna de números no positivos. Por tanto, para comprobar que $b_{ij} \leq 0$ probemos que el determinante de una matriz de estas características es no positivo.

La demostración la haremos por inducción sobre el orden dela matriz.

Para una matriz de orden 2x2, $k = 1$, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j+1} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{i+1,j+1} - a_{1j+1}\cdot a_{i+1,1} \leq 0$$

ya que $a_{11} > 0$ y $a_{i+1,j+1}\ ,\ a_{i+1,1}\ ,\ a_{1j+1} \leq 0$.

Supongamos que la proposición es cierta hasta para matrices de orden kxk, y probémosla para las matrices de orden $(k+1)x(k+1)$.

Desarrollando el determinante de (1.40) por la última fila, se tiene:

$$b_{ij} = a_{k+i,k+j}\cdot \Delta_{k+j} + \sum_{\ell=1}^{k} (-1)^{k+1+\ell}\cdot a_{k+i,\ell}\cdot \Delta_{\ell} \leq 0$$

ya que, por hipótesis, $\Delta_{k+j} > 0$, $a_{k+i,k+j}\ ,\ a_{k+i,\ell} \leq 0$, $\ell=1, \ldots,k$,

y además Δ_ℓ es positivo ya que

$$\Delta_\ell = (-1)^{k-\ell} \cdot \tilde{\Delta}_\ell$$

siendo $\tilde{\Delta}_\ell$ el determinante Δ_ℓ cuando la ℓ-ésima fila se lleva al último lugar. Por ello b_{ij}, $i \neq j$, es suma de números no positivos y, por tanto, no positivo.

Consideremos ahora matrices A verificando (1.32), y pasemos a ver algunas desigualdades entre determinantes que satisfacen estas matrices.

1. Si A es una matriz real cuadrada de orden $n \geq 2$ verificando (1.32), se tiene, para $p = 1, 2, \ldots, n-1$

$$(1.41) \quad |A| \leq A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, p\\ 1, 2, \ldots, p\end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix}p+1, p+2, \ldots, n\\ p+1, p+2, \ldots, n\end{bmatrix}.$$

Se demostrará (1.41) por inducción sobre n. Para $n=2$, $p=1$, (1.41) es

$$(1.42) \quad |A| \leq a_{11} \cdot a_{22}$$

que es cierta para matrices verificando (1.32) porque $a_{12} \cdot a_{21} \geq 0$.
Suponiendo que (1.41) es cierta hasta para $n-1$, veamos para n.
Sea $p = 1$. Formando una matriz B con

$$(1.43) \quad b_{ij} = A\begin{bmatrix}i, n\\ j, n\end{bmatrix} \qquad 1 \leq i, j \leq n-1$$

B verifica (1.32), como se deduce de (1.28), y es de orden $n-1$.
Por tanto

$$(1.44) \quad |A| \cdot a_{nn}^{n-2} = |B| \leq B\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \cdot B\begin{bmatrix}2, 3, \ldots, n-1\\ 2, 3, \ldots, n-1\end{bmatrix} =$$

$$= A\begin{bmatrix}1, n\\ 1, n\end{bmatrix} \cdot a_{nn}^{n-3} \cdot A\begin{bmatrix}2, 3, \ldots, n\\ 2, 3, \ldots, n\end{bmatrix}$$

es decir

$$(1.45)\quad |A|\,a_{nn}^{n-2} \leq a_{11}\,a_{nn}^{n-2}\,A\begin{bmatrix}2, 3, \ldots, n\\ 2, 3, \ldots, n\end{bmatrix}$$

luego

$$(1.46)\qquad |A| \leq A\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix}2, 3, \ldots, n\\ 2, 3, \ldots, n\end{bmatrix}.$$

Suponiendo (1.41) cierta hasta para $p=k-1$ $(k < n)$ se demuestra análogamente a lo anterior que también es cierta para $p=k$, formando una matriz B con

$$b_{ij} = A\begin{bmatrix}1, & i+1\\ 1, & j+1\end{bmatrix} \qquad 1 \leq i,j \leq n-1\ ,$$

y utilizando que

$$|B| = B\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n-1\\ 1, 2, \ldots, n-1\end{bmatrix} \leq B\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k-1\\ 1, 2, \ldots, k-1\end{bmatrix} \cdot B\begin{bmatrix}k, \ldots, n-1\\ k, \ldots, n-1\end{bmatrix}.$$

Así pues queda demostrada (1.41).

2. Continuando con A verificando (1.32), construyamos B mediante (1.34). De acuerdo con (1.41), si $1 \leq k < q < n$ se tiene

$$(1.47)\qquad |B| \leq B\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, q-k\\ 1, 2, \ldots, q-k\end{bmatrix} \cdot B\begin{bmatrix}q-k+1, \ldots, n-k\\ q-k+1, \ldots, n-k\end{bmatrix}$$

y como

$$|B| = |A|\,.\,A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k\\ 1, 2, \ldots, k\end{bmatrix}^{n-k-1}$$

resulta

$$|A|\,.\,A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k\\ 1, 2, \ldots, k\end{bmatrix}^{n-k-1} \leq A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, q\\ 1, 2, \ldots, q\end{bmatrix}.\,A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k\\ 1, 2, \ldots, k\end{bmatrix}^{q-k-1}.$$

$$.A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k, q+1, \ldots, n\\ 1, 2, \ldots, k, q+1, \ldots, n\end{bmatrix}.\,A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k\\ 1, 2, \ldots, k\end{bmatrix}^{n-q-1}$$

por lo que simplificando

$$(1.48)\quad |A|\,.\,A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, k\\ 1, 2, \ldots, k\end{bmatrix} \leq A\begin{bmatrix}1, \ldots, q\\ 1, \ldots, q\end{bmatrix}.\,A\begin{bmatrix}1,\ldots,k,q+1,\ldots,n\\ 1,\ldots,k,q+1,\ldots,n\end{bmatrix}.$$

Obsérvese que para la obtención de (1.48) se necesita que k sea estrictamente menor que q. No obstante, es obvio, que también es válida para $k=q$, puesto que en ese caso (1.48) se escribiría en la forma $|A| \leq |A|$.

Reordenaciones simúltaneas de filas y columnas nos permiten escribir la desigualdad (1.48) en forma más general:

Si F y G son dos subconjuntosno disjuntos del conjunto $I = \{ 1, 2, \ldots, n \}$, cuya unión sea I, y llamamos $J = F \cap G$, entonces para toda matriz A de orden $n\times n$ verificando (1.32) se tiene

$$(1.49)\quad |A|\,.\,A\begin{bmatrix}J\\ J\end{bmatrix} \leq A\begin{bmatrix}F\\ F\end{bmatrix}.\,A\begin{bmatrix}G\\ G\end{bmatrix}$$

donde si $J = \{ j_1, j_2, \ldots, j_k \}$, se ha indicado

$$(1.50)\quad A\begin{bmatrix}J\\ J\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}j_1, j_2, \ldots, j_k\\ j_1, j_2, \ldots, j_k\end{bmatrix}$$

y similarmente $A\begin{bmatrix}F\\ F\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}G\\ G\end{bmatrix}$.

Para demostar (1.49) supongamos que

$$F = \{ j_1, j_2, \ldots, j_k \} \cup \{ j_{k+1}, \ldots, j_q \}$$

y

$$G = \{ j_1, j_2, \ldots, j_k \} \cup \{ j_{q+1}, \ldots, j_n \}.$$

Llamemos $\hat{A}$ a la matriz que se obtiene al reordenar simultáneamente las filas y columnas de A de tal forma que las de índices $j_1, j_2, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_q, j_{q+1}, \ldots, j_n$ ocupen, respectivamente, los lugares $1, 2, \ldots, k, \ldots, q, \ldots, n$.
Como para formar la matriz $\hat{A}$ se han reorganizado las filas y columnas de A de la misma manera, es fácil comprobar que $\hat{A}$ verifica la condición (1.32). Así, por (1.48), se tiene

$$| \hat{A} | . \hat{A} \begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, k \\ 1, 2, \ldots, k \end{bmatrix} \leq \hat{A} \begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, q \\ 1, 2, \ldots, q \end{bmatrix} . \hat{A} \begin{bmatrix} 1, \ldots, k, q+1, \ldots, n \\ 1, \ldots, k, q+1, \ldots, n \end{bmatrix}$$

o lo que es igual

$$| A | . A \begin{bmatrix} j_1, \ldots, j_k \\ j_1, \ldots, j_k \end{bmatrix} \leq A \begin{bmatrix} j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_q \\ j_1, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_q \end{bmatrix} . A \begin{bmatrix} j_1, \ldots, j_k, j_{q+1}, \ldots, j_n \\ j_1, \ldots, j_k, j_{q+1}, \ldots, j_n \end{bmatrix}$$

que es efectivamente (1.49).
Obsérvese que se puede considerar cualquier ordenación en los conjuntos J, F y G, siempre que en (1.50) y similares se mantenga la misma ordenación en filas y columnas. Además, si definimos cuando $J = \emptyset$

$$A \begin{bmatrix} J \\ J \end{bmatrix} = 1,$$

la desigualdad (1.49) sigue siendo válida puesto que resulta ser una versión de (1.41). Desde este punto de vista, (1.49) incluye a (1.41) como caso particular.

3. Por reiteración de (1.41) para la matriz B definida en (1.34) se tiene, siempre que A verifique (1.32), que :

$$(1.51) \qquad |B| \leq \prod_{i=1}^{n-k} h_{ii}$$

luego

$$(1.52) \qquad |A| . A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{bmatrix}^{n-k-1} \leq \prod_{i=1}^{n-k} A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k, k+i \\ 1, \ldots, k, k+i \end{bmatrix} .$$

Por tanto

$$(1.53) \qquad |A| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n-k} A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k, k+i \\ 1, \ldots, k, k+i \end{bmatrix}}{A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k \\ 1, \ldots, k \end{bmatrix}^{n-k-1}} .$$

Los desigualdades (1.41), (1.49) y (1.53) pueden verse en [18] aplicadas a matrices simétricas definidas positivas.

A continuación fijémonos en las matrizes S.T.P. Satisfacen las desigualdades anteriores por ser éstas válidas para todas las matrices que verifican (1.32). Veremos seguidamente que las características de las matrices S.T.P. y, en especial, el hecho de que esta propiedad se transmita a la matriz B construída según (1.38), nos permiten obtener nuevas desigualdades entre determinantes. Se observará también que dichas desigualdades no las satisfacen todas las matrices que verifican (1.32).

4. Si A es una matriz S.T.P. cuadrada de orden $n \geq 2$, se tiene

$$(1.54)\quad |A|\,A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots & k\\ q-k+1 & q-k+2 & \dots & q\end{bmatrix} \le A\begin{bmatrix}1 & \dots & q\\ 1 & \dots & q\end{bmatrix} . A\begin{bmatrix}1 & \dots & k & q+1 & \dots & n\\ q-k+1 & \dots & q & q+1 & \dots & n\end{bmatrix}$$

siempre que $1 \le k \le q < n$.

Demostración.: El caso $k = q$ es trivial por ser (1.54) $|A| \le |A|$. Demostremos (1.54) cuando $k < q$. Construyendo B según (1.38) se tendrá, por ser B S.T.P.,

$$|B| \le B\begin{bmatrix}1, & 2, & \dots, & q-k\\ i, & 2, & \dots, & q-k\end{bmatrix} . B\begin{bmatrix}q-k+1, & \dots, & n-k\\ q-k+1, & \dots, & n-k\end{bmatrix}.$$

Como en este caso

$$(1.55)\qquad |B| = |A| . \prod_{i=1}^{n-k-1} A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots, & k\\ i+1, & i+2, & \dots, & i+k\end{bmatrix}$$

resulta

$$|A| . \prod_{i=1}^{n-k-1} A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots, & k\\ i+1, & i+2, & \dots, & i+k\end{bmatrix} \le A\begin{bmatrix}1, & \dots, & q\\ 1, & \dots, & q\end{bmatrix} . \prod_{i=1}^{q-k-1} A\begin{bmatrix}1 & , & \dots, & k\\ i+1, & & \dots, & i+k\end{bmatrix} .$$

$$. A\begin{bmatrix}1 & \dots, & k & q+1, & \dots, & n\\ q-k+1, & \dots, & q & q+1, & \dots, & n\end{bmatrix} . \prod_{i=q-k+1}^{n-k-1} A\begin{bmatrix}1 & 2 & \dots, & k\\ i+1, & i+2, & \dots, & i+k\end{bmatrix}$$

de lo que sin más que simplificar se obtiene (1.54).

No todas las matrices que verifican (1.32) satisfacen (1.54), como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente. La matriz

$$\begin{bmatrix}4 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

es simétrica definida positiva, y no satisface (1.54) cuando k=1 y q=2.

A continuación, mediante una generalización de (1.54), veremos que el papel especial que juegan en dicha desigualdad las filas 1, 2, ..., k y las columnas q-k+1, ..., q de A, lo pueden desempeñar k filas y columnas cualesquiera.

Sean L y M dos subconjuntos de $I = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ tales que

$$1 \leq \text{card}(L) = k = \text{card}(M) < n.$$

Sea $k \leq q < n$, y formemos los conjuntos F, G, R y S de la siguiente manera:

- F contiene a L y a los q-k primeros elementos del conjunto $I - L$.
- G contiene a L y a los elementos del conjunto $I - F$.
- R y S se construyen, respectivamente, de forma análoga a F y G cambiando el papel de L por el de M.

Entonces, si A es una matriz S.T.P. de orden nxn, $n \geq 2$, se tiene:

$$(1.56) \qquad |A| \cdot A\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \leq A\begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix} G \\ S \end{bmatrix}$$

donde si $L = \{ i_1, i_2, \ldots, i_k \}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$, y $M = \{ j_1, j_2, \ldots, j_k \}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, se ha indicado

$$A\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} i_1, i_2, \ldots, i_k \\ j_1, j_2, \ldots, j_k \end{bmatrix}$$

y análogamente $A\begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix} G \\ S \end{bmatrix}$.

Demostración.: La haremos por inducción sobre n.
Cuando $n = 2$, entonces $q = k = 1$ y por tanto $F = L$ y $P = M$. En este caso la desigualdad (1.56) es trivialmente cierta porque nos quedaría

$$|A| \cdot A\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \leq A\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix} \cdot |A| . \tag{1.57}$$

Suponiendo cierta (1.56) hasta para n-1, demostrémosla para n.
Supondremos k y q fijos, tales que $1 \leq k < q < n$. (Hemos eliminado el caso $k = q$ pues para éste quedaría una desigualdad del tipo (1.57), que resulta trivial.)
Para cada índice i ($1 \leq i \leq n$) tal que $i \notin L$, y para cada j ($1 \leq j \leq n$) tal que $j \notin M$, llamamos

$$b_{ij} = A\begin{bmatrix} \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{k+1} \\ m_1, m_2, \ldots, m_{k+1} \end{bmatrix}$$

donde $\{ \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{k+1} \}$ es el conjunto de índices $L \cup \{ i \}$ ordenado de forma natural, y $\{ m_1, m_2, \ldots, m_{k+1} \}$ es el conjunto $M \cup \{ j \}$ ordenado de forma natural.
Entonces para $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$ no pertenecientes a L, y para $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-k}$ no pertenecientes a M, por (1.28), se tiene

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{i_1,j_1} & b_{i_1,j_2} & \cdots & b_{i_1,j_{n-k}} \\ b_{i_2,j_1} & b_{i_2,j_2} & \cdots & b_{i_2,j_{n-k}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i_{n-k},j_1} & b_{i_{n-k},j_2} & \cdots & b_{i_{n-k},j_{n-k}} \end{vmatrix} = A\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}^{n-k-1} \cdot |A| .$$

Es fácil comprobar que la matriz B que se ha construído es S.T.P. Y, como es de orden $(n-1)\times(n-1)$, se tendrá

$$(1.58) \qquad |B| \leq B\begin{bmatrix}1, \ldots, q-k\\ 1, \ldots, q-k\end{bmatrix} \cdot B\begin{bmatrix}q-k+1, \ldots, n-k\\ q-k+1, \ldots, n-k\end{bmatrix}$$

con lo que aplicando de nuevo (1.28) al segundo miembro de (1.58) queda

$$A\begin{bmatrix}L\\ M\end{bmatrix}^{n-k-1} \cdot |A| \leq A\begin{bmatrix}L\\ M\end{bmatrix}^{q-k-1} \cdot A\begin{bmatrix}F\\ R\end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix}L\\ M\end{bmatrix}^{n-q-1} \cdot A\begin{bmatrix}G\\ S\end{bmatrix}.$$

Así

$$A\begin{bmatrix}L\\ M\end{bmatrix}^{n-k-1} \cdot |A| \leq A\begin{bmatrix}L\\ M\end{bmatrix}^{n-k-2} \cdot A\begin{bmatrix}F\\ R\end{bmatrix} \cdot A\begin{bmatrix}G\\ S\end{bmatrix}$$

y simplificando se obtiene (1.56).

5. Otra desigualdad que satisfacen las matrices S.T.P. se obtiene teniendo en cuenta que la matriz B construída según (1.38) es S.T.P., por lo que verifica

$$|B| \leq \prod_{i=1}^{n-k} b_{ii} .$$

Así, como

$$b_{ii} = A\begin{bmatrix}1, \ldots, k & , k+i\\ i, \ldots, i+k-1, & i+k\end{bmatrix}$$

y

$$|B| = |A| \cdot \prod_{i=1}^{n-k-1} A\begin{bmatrix}1 & , \ldots, k\\ i+1, \ldots, & i+k\end{bmatrix}$$

se tiene

$$(1.59) \qquad |A| \cdot \prod_{i=1}^{n-k-1} A\begin{bmatrix}1 & , \ldots, k\\ i+1, \ldots, & i+k\end{bmatrix} \leq \prod_{i=1}^{n-k} A\begin{bmatrix}1, \ldots, k & , k+i\\ i, \ldots, & i+k-1, i+k\end{bmatrix}$$

Y por tanto

$$(1\ 60) \qquad |A| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n-k} A\begin{bmatrix} 1, \ldots, k & , k+i \\ i, \ldots, i+k-1, & i+k \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{n-k-1} A\begin{bmatrix} 1 & , \ldots, k \\ i+1, & .. , i+k \end{bmatrix}} .$$

Hasta aquí hemos visto algunos ejemplos de desigualdades que pueden demostrarse para matrices que verifican la condición (1.32) y , en particular, para las que son estrictamente totalmente positivas. Evidentemente por continuidad y teniendo en cuenta que el conjunto de todas las matrices S.T.P. de orden nxn es denso en el conjunto de todas las matrices T.P. de orden nxn (ver [18] , pag. 88), es inmediato que (1.49), (1.52), (1.56) y (1.59) son ciertas para matrices T.P. . Razones similares atribuyen que (1.49) y (1.52)son ciertas para matrices simétricas y semidefinidas positivas.

Para completar este apartado recordemos que en un principio mencionamos otro tipo de matrices: las que verifican la condición (1.33). Tales matrices satisfacen las mismas desigualdades que hemos probado para las matrices (1.32), si bien no nos detendremos en las demostraciones por ser totalmente paralelas a las ya vistas. Hay que reseñar también que no tienen por qué satisfacer las desigualdades (1.56) y (1.59), probadas para matrices S.T.P.. Por ejemplo, si a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

le aplicamos (1.56) con $L = \{ 3 \}$, $M = \{ 2 \}$ y $q = 2$, resultaría

$$|A|\cdot A\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \leq A\begin{bmatrix}1,3\\1,2\end{bmatrix}\cdot A\begin{bmatrix}2,3\\2,3\end{bmatrix} \qquad 45.(-2) \leq (-9).14\ ,$$

y si le aplicamos (1.59) para k = 1 tendríamos

$$|A|\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \leq A\begin{bmatrix}1,2\\1,2\end{bmatrix}\cdot A\begin{bmatrix}1,3\\2,3\end{bmatrix} \qquad 45.(-1) \leq 15.(-8).$$

Como puede observarse ambas desigualdades son falsas.

Queremos hacer notar que en este apartado se ha conseguido demostrar que desigualdades que en [18] se proponían como válidas para algunas matrices (S.D.P. y T.P.), son ciertas también para matrices que verifican la condición (1.32). Además se consiguen desigualdades – (1.49), (1.56) y (1.60) – que o bien generalizan a aquéllas o aportan nuevas relaciones entre los determinantes de estos tipos de matrices.

3.- APLICACION DE LA IDENTIDAD DE SYLVESTER AL CALCULO DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS

En [21] se llegó mediante procedimientos diferentes a dos fórmulas generales (0.11) y (0.36) para la interpolación lineal finita. En (0.11) aparecen las diferencias divididas $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$ que, según se vió, se pueden calcular de los sistemas (0.19) ó (0.20). Por otra parte, para llegar a (0.36) se utilizó la Identidad de Sylvester generalizada para determinantes.

Se pretende ver aquí si aplicando la Identidad de Sylvester al cálculo de las diferencias divididas se llegaría

a los mismos sistemas.

Consideremos el problema general de interpolación lineal finita con los mismas notaciones que en el Capítulo 0. Bajo la hipótesis

$$(1.61)\quad \det\begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \\ \mathcal{L}_{n+m} \end{pmatrix} = \det\,(L_i(\phi_j))_{i,j=1,\ldots,n+m} \neq 0$$

el problema dado, planteado en los términos:

Hallar $p_{n+m} \in V_{n+m}(K) \;/\; L_i(p_{n+m}) = L_i(f)\,,\ i=1,2,\ldots,n+m$

tiene solución única. Como ya hemos dicho, escribiendo su solución en la forma

$$(1.62)\quad p_{n+m} = \sum_{j=1}^{n+m} x_j.\phi_j\,,$$

se llama k-ésima diferencia dividida de f respecto a $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}\}$ y $\mathcal{L}_{n+m}$, al coeficiente x_k de ϕ_k. Por su definición, es conveniente utilizar la notación

$$(1.63)\quad x_k = \left[\begin{array}{c|c} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{array}\right]\,.$$

Las diferencias divididas en (1.62) están definidas por el siguiente sistema:

$$(1.64)\quad \sum_{j=1}^{n+m} L_i(\phi_j).x_j = L_i(f),\quad i=1,2,\ldots,n+m.$$

Así, por Cramer, tendremos que

$$
(1.65)\qquad
\left[\begin{array}{c|c} \phi_1,\ \phi_2,\ \ldots,\ \phi_{n+m} & f \\ \mathcal{L}_{n+m} & k \end{array}\right] =
\frac{\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \longrightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
L_1(\phi_1) & L_2(\phi_1) & \ldots & L_{n+m}(\phi_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
L_1(\phi_{k-1}) & L_2(\phi_{k-1}) & \ldots & L_{n+m}(\phi_{k-1}) \\
L_1(f) & L_2(f) & \ldots & L_{n+m}(f) \\
L_1(\phi_{k+1}) & L_2(\phi_{k+1}) & \ldots & L_{n+m}(\phi_{k+1}) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
L_1(\phi_{n+m}) & L_2(\phi_{n+m}) & \ldots & L_{n+m}(\phi_{n+m})
\end{vmatrix}}{\begin{array}{c} \\ \\ \\ k \longrightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{vmatrix}
L_1(\phi_1) & L_2(\phi_1) & \ldots & L_{n+m}(\phi_1) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
L_1(\phi_{k-1}) & L_2(\phi_{k-1}) & \ldots & L_{n+m}(\phi_{k-1}) \\
L_1(\phi_k) & L_2(\phi_k) & \ldots & L_{n+m}(\phi_k) \\
L_1(\phi_{k+1}) & L_2(\phi_{k+1}) & \ldots & L_{n+m}(\phi_{k+1}) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
L_1(\phi_{n+m}) & L_2(\phi_{n+m}) & \ldots & L_{n+m}(\phi_{n+m})
\end{vmatrix}} .
$$

Nuestro objetivo en este apartado es obtener otras expresiones de las diferencias divididas que nos permitan calcularlas de forma recurrente, utilizando para ello la identidad de Sylvester para determinantes.

En (1.65) x_k se expresa como cociente de dos determinantes que se diferencian sólo en la k-ésima fila. Llamemos $|A_k|$ al determinante del numerador del segundo miembro de (1.65) y $|\tilde{A}|$ al del denominador.

Las matrices A_k y $\tilde{A}$ se diferencian por sus k-ésimas filas, que son $(L_1(f), L_2(f), \ldots, L_{n+m}(f))$ y

($L_1(\phi_k)$, $L_2(\phi_k)$, ..., $L_{n+m}(\phi_k)$), respectivamente.

Supongamos que existe un menor no nulo de las n primeras filas de la matriz de coeficientes de (1.64). Para fijar ideas, supongamos concretamente que

$$(1.66) \qquad \begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & L_2(\phi_1) & \dots & L_n(\phi_1) \\ L_1(\phi_2) & L_2(\phi_2) & \dots & L_n(\phi_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_1(\phi_n) & L_2(\phi_n) & \dots & L_n(\phi_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aplicando la identidad de Sylvester (1.27) a $|A_k|$ y $|\hat{A}|$, se tiene

$$\begin{cases} |A_k| \cdot A_k \begin{bmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{bmatrix}^{m-1} = |B_k| \\ |\hat{A}| \cdot \hat{A} \begin{bmatrix} 1, 2, \dots, n \\ 1, 2, \dots, n \end{bmatrix}^{m-1} = |\hat{B}| \end{cases}$$

donde B_k y $\hat{B}$ son matrices de orden mxm, en las que los elementos (i,j) son respectivamente :

$$A_k \begin{bmatrix} 1, 2, \dots, n, n+i \\ 1, 2, \dots, n, n+j \end{bmatrix}, \quad \hat{A} \begin{bmatrix} 1, 2, \dots, n, n+i \\ 1, 2, \dots, n, n+j \end{bmatrix}$$

con $i,j = 1, 2, \dots, m$.

Consideremos $k = n+t$, $t \geq 1$. Como las matrices A_k y $\hat{A}$ se diferencian sólo en la k-ésima fila, se tendrá

$$(1.67)\qquad A_k\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n\\ 1, 2, \ldots, n\end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n\\ 1, 2, \ldots, n\end{bmatrix} \neq 0$$

$$(1.68)\qquad A_k\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+i\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+i\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix} \qquad i \neq t$$

$i,j = 1, 2, \ldots, m$; y según (1.68), las matrices B_k y $\hat{B}$ para $k = n+t$, $t \geq 1$, sólo se diferencian por sus respectivas t-ésimas filas.

De (1.66) y (1.67) se deduce que

$$(1.69)\qquad x_{n+t} = \frac{|A_{n+t}|}{|\hat{A}|} = \frac{|B_{n+t}|}{|\hat{B}|} .$$

Dividamos cada columna de $|B_{n+t}|$ y $|\hat{B}|$ por

$$\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Los elementos de la j-ésima columna de D_{n+t} son de la forma

$$A_{n+t}\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+i\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

y coinciden, por (1.68), con los correspondientes elementos de la j-ésima columna de $\hat{B}$, a excepción del que está situado en la fila t-ésima.

Sea $j = 1, 2, \ldots, m$ e $i \neq t$, entonces

$$\frac{A_{n+t}\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+i\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n)\end{vmatrix}} = \frac{A\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+i\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n)\end{vmatrix}} =$$

$$\frac{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1) & L_{n+j}(\phi_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n) & L_{n+j}(\phi_n)\\ L_1(\phi_{n+i}) & \ldots & L_n(\phi_{n+i}) & L_{n+j}(\phi_{n+i})\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n)\end{vmatrix}} =$$

$$= L_{n+j}(\phi_{n+i}) + \frac{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_n) & L_{n+j}(\phi_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n) & L_{n+j}(\phi_n)\\ L_1(\phi_{n+i}) & \ldots & L_n(\phi_{n+i}) & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n)\end{vmatrix}} =$$

$$= L_{n+j}(\phi_{n+i}) + \sum_{d=1}^{n} a_d \cdot L_{n+j}(\phi_d) =$$

$$= L_{n+j}\left(\phi_{n+i} + \sum_{d=1}^{n} a_d \cdot \phi_d \right) = L_{n+j}\left(\phi_{n+i} - p_n^{n+i} \right) = L_{n+j}(r_n^{n+i}),$$

ya que

$$a_d = (-1)^{d+n+1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \cdots & L_n(\phi_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_1(\phi_{d-1}) & \cdots & L_n(\phi_{d-1}) \\ L_1(\phi_{d+1}) & \cdots & L_n(\phi_{d+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_1(\phi_n) & \cdots & L_n(\phi_n) \\ L_1(\phi_{n+i}) & \cdots & L_n(\phi_{n+i}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \cdots & L_n(\phi_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_1(\phi_n) & \cdots & L_n(\phi_n) \end{vmatrix}} =$$

$$\overset{(*)}{=} - \begin{bmatrix} \phi_1, \cdots, \phi_n & \phi_{n+i} \\ \mathcal{L}_n & d \end{bmatrix}, \text{ según (1.65)}$$

Por lo que

$$- \sum_{d=1}^{n} a_d \cdot \phi_d = p_n^{n+i}$$

(*) se llevará la fila n-ésima del numerador a la d-ésima

Por otro lado, para $j = 1, 2, \ldots, m$ resultará que

$$\frac{A_{n+t}\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+t\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n)\end{vmatrix}} = L_{n+j}(f - p_n) = L_{n+j}(r_n)$$

y

$$\frac{\tilde{A}\begin{bmatrix}1, 2, \ldots, n, n+t\\ 1, 2, \ldots, n, n+j\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots & L_n(\phi_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_1(\phi_n) & \ldots & L_n(\phi_n)\end{vmatrix}} = L_{n+j}(\phi_{n+t} - p_n^{n+t}) = L_{n+j}(r_n^{n+t}) ,$$

por lo que concluímos que para $t = 1, 2, \ldots, m$

$$(1.10)\qquad x_{n+t} = \frac{\begin{vmatrix} L_{n+1}(r_n^{n+1}) & L_{n+2}(r_n^{n+1}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n+1}(r_n^{n+t-1}) & L_{n+2}(r_n^{n+t-1}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+t-1}) \\ \rightarrow\ L_{n+1}(r_n) & L_{n+2}(r_n) & \cdots & L_{n+m}(r_n) \\ L_{n+1}(r_n^{n+t+1}) & L_{n+2}(r_n^{n+t+1}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+t+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n+1}(r_n^{n+m}) & L_{n+2}(r_n^{n+m}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1}(r_n^{n+1}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \rightarrow\ L_{n+1}(r_n^{n+r}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+r}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{n+1}(r_n^{n+m}) & \cdots & L_{n+m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix}}$$

donde $r_n^{n+j} = \phi_{n+j} - p_n^{n+j}$, $r_n = f - p_n$ y como siempre, hemos llamado p_n^{n+j} a la solución de

hallar $p_n^{n+j} \in (\overline{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n}) / L_k(p_n^{n+j}) = L_k(\phi_{n+j}) \ , \forall L_k \in \mathcal{L}_n$

y p_n a la solución de

hallar $p_n \in (\overline{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n}) / L_k(p_n) = L_k(f), \forall L_k \in \mathcal{L}_n$ #.

Mediante (1.70) las diferencias divididas se expresan como cociente de determinantes de orden m , y los elementos de las matrices del numerador y denominador se pueden calcular de forma recurrente como se mostrará en el capítulo III.

Observamos a continuación que la fórmula (1.70) se puede obtener por otro procedimiento menos artificioso. En efecto, bajo las hipótesis (1.61) y (1.66), la solución p_{n+m} de nuestro problema es igual a

$$(1.71)\qquad p_{n+m} = (-1)^m \cdot \frac{\begin{vmatrix} r_n^{n+1} & L_{n+1}(r_n^{n+1}) & L_{n+2}(r_n^{n+1}) & \dots & L_{n+m}(r_n^{n+1}) \\ r_n^{n+2} & L_{n+1}(r_n^{n+2}) & L_{n+2}(r_n^{n+2}) & \dots & L_{n+m}(r_n^{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n^{n+m} & L_{n+1}(r_n^{n+m}) & L_{n+2}(r_n^{n+m}) & \dots & L_{n+m}(r_n^{n+m}) \\ p_n & -L_{n+1}(r_n) & -L_{n+2}(r_n) & \dots & -L_{n+m}(r_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{n+1}(r_n^{n+1}) & L_{n+2}(r_n^{n+1}) & \dots & L_{n+m}(r_n^{n+1}) \\ L_{n+1}(r_n^{n+2}) & L_{n+2}(r_n^{n+2}) & \dots & L_{n+m}(r_n^{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n+1}(r_n^{n+m}) & L_{n+2}(r_n^{n+m}) & \dots & L_{n+m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix}} ;$$

con lo que

$$p_{n+m} = p_n + (-1)^m \cdot \sum_{t=1}^{m} \beta_t \cdot r_n^{n+t} =$$

$$= p_n + (-1)^m \cdot \sum_{t=1}^{m} \beta_t \cdot (\phi_{n+t} - p_n^{n+t}) =$$

$$= p_n + \sum_{t=1}^{m} (-1)^{m+1} \cdot \beta_t \cdot p_n^{n+t} + \sum_{t=1}^{m} (-1)^m \cdot \beta_t \cdot \phi_{n+t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow p_{n+m} = \sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \phi_i + \sum_{t=1}^{m} (-1)^m \cdot \beta_t \cdot \phi_{n+t} .$$

Por ello $(-1)^m \cdot \beta_1 = x_{n+1}$, $(-1)^m \cdot \beta_2 = x_{n+2}$, ..., $(-1)^m \cdot \beta_m = x_{n+m}$, son diferencias divididas de f respecto a $\mathcal{L}_{n+m}$ y $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}\}$. Y ya es fácil ver que (1.70) es la expresión que resulta en (1.71) para $(-1)^m \cdot \beta_t$.

Supongamos ahora que en nuestro problema existen en las n primeras filas m+1 menores no nulos, que vamos a llamar

$$\det\begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} , \quad i = 1, 2, \ldots, m+1.$$

Supongamos además que se verifica:

$$(1.72) \quad \begin{cases} \operatorname{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) = n-1 , \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} \mathcal{L}_{n,i}\right) = n+m \\ \det\begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{n-1} \\ \mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} \end{pmatrix} \neq 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{cases}$$

Volvamos de nuevo a la igualdad (1.65) y apliquemos ahora la identidad de Sylvester (0.32) a $|A_k|$ y $|\hat{A}|$.
Se tendrá que

$$C \cdot |A_k| \cdot \prod_{j=1}^{m} A_k \begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, n-1 \\ \mathcal{L}_{n,j} \cap \mathcal{L}_{n,j+1} \end{bmatrix} = |B_k^*|$$

$$C \cdot | \tilde{A} | = \prod_{j=1}^{m} \tilde{A} \begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, n-1 \\ \mathcal{L}_{n,j} \cap & \mathcal{L}_{n,j+1} \end{bmatrix} = | \tilde{B}^{*} |$$

donde C es una constante que vale ± 1. Aquí B_k^* y $\tilde{B}^*$ son matrices de orden $(m+1)\times(m+1)$ en las que el elemento situado en la fila i-ésima, columna j-ésima es

$$A_k \begin{bmatrix} 1, \ldots, n-1, n-1+i \\ \mathcal{L}_{n,j} \end{bmatrix} \qquad i,j = 1, 2, \ldots, m+1$$

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} 1, \ldots, n-1, n-1+i \\ \mathcal{L}_{n,j} \end{bmatrix} \qquad i,j = 1, 2, \ldots, m+1$$

respectivamente.

Puesto que A_k y $\tilde{A}$ se diferencian en la fila k-ésima, ocurre que si $k \geq n$, entonces

$$A_k \begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, n-1 \\ \mathcal{L}_{n,j} \cap & \mathcal{L}_{n,j+1} \end{bmatrix} = \tilde{A} \begin{bmatrix} 1, 2, \ldots, n-1 \\ \mathcal{L}_{n,j} \cap & \mathcal{L}_{n,j+1} \end{bmatrix} \neq 0$$

y de ahí que para $k \geq n$

$$(1.73) \qquad x_k = \frac{| A_k |}{| \tilde{A} |} = \frac{| B_k^* |}{| \tilde{B}^* |}$$

Así si $k = n+t$ $(t = 1, 2, \ldots, m+1)$, entonces $k \geq n$ y las matrices B_k^* y $\tilde{B}^*$ se diferencian sólo en la $(t+1)$-ésima fila (no en la primera fila).

Para $j = 1, 2, \ldots, m+1$, dividamos la columna j-ésima de B^{n+t} y $\hat{B}^{n+t}$ por el primer elemento que aparece en ella :

$$A_{n+t}\begin{bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ & \mathcal{L}_{n,j} & & \end{bmatrix} = \hat{A}\begin{bmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ & \mathcal{L}_{n,j} & & \end{bmatrix} \neq 0.$$

Y teniendo en cuenta (1.73) y (1.65), se obtiene

$$x_{n+t} = \frac{\begin{vmatrix} \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+1} \\ n\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+1} \\ n\end{matrix}\right] & \cdots & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,m+1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+1} \\ n\end{matrix}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}f \\ n\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}f \\ n\end{matrix}\right] & \cdots & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,m+1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}f \\ n\end{matrix}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+m} \\ n\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+m} \\ n\end{matrix}\right] & \cdots & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,m+1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+m} \\ n\end{matrix}\right] \end{vmatrix} \leftarrow t+1}{\begin{vmatrix} \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+1} \\ n\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+1} \\ n\end{matrix}\right] & \cdots & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,m+1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+1} \\ n\end{matrix}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+t} \\ n\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+t} \\ n\end{matrix}\right] & \cdots & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,m+1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+t} \\ n\end{matrix}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+m} \\ n\end{matrix}\right] & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,2}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+m} \\ n\end{matrix}\right] & \cdots & \left[\begin{matrix}\phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,m+1}\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\phi_{n+m} \\ n\end{matrix}\right] \end{vmatrix} \leftarrow t+1} \qquad (1.74)$$

Cociente de dos determinantes que se diferencian en la $t+1$ fila. Esta fórmula permite calcular las diferencias divididas como cociente de determinantes cuyos elementos son diferencias divididas de problemas de interpolación con menos datos.

Resumiendo, mediante la identidad de Sylvester para determinantes y bajo ciertas hipótesis, es posible obtener dos expresiones - (1.70) y (1.74) - para las diferencias divididas $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$. Obsérvese que (1.70) es la expresión que tiene x_{n+t} cuando ésta se calcula aplicando el método de Cramer de resolución de sistemas en (0.19); y que, por otra parte, (1.74) proporciona un nuevo método recurrente para calcular esas diferencias divididas.

CAPITULO II

INTERPOLACION POR RECURRENCIA Y RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

CAPITULO II

INTERPOLACION POR RECURRENCIA Y RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

Los resultados de Mühlbach [28] y [31] han sido deducidos por él mismo y T. Havie [15] por un procedimiento distinto de los que hemos visto hasta ahora y que consiste en la resolución de sistemas lineales mediante técnicas elementales de eliminación.

Parece pues interesante completar también esta vía viendo la relación de la fórmula general de interpolación por recurrencia (0.11) con los métodos de resolución de sistemas lineales. Este va a ser el objetivo de este capítulo, que en parte sigue la línea del trabajo [33], por lo que señalaremos los casos particulares que son el objeto de dicho trabajo.

1. RELACION DE LA FORMULA GENERAL DE INTERPOLACION POR RECURRENCIA CON LOS METODOS DE RESOLUCION DE SISTEMAS LINEALES

Sea V_{n+m} un espacio vectorial de dimensión $n+m$ ($n, m \in N$) sobre un cuerpo K commutativo y de característica cero, y consideremos $L_1, L_2, \ldots, L_{n+m}$, formas lineales sobre V_{n+m}.

Sea

$$(2.1)\quad p_{n+m} \in V_{n+m} \ / \ L_i(p_{n+m}) = b_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n+m$$

un problema de interpolación con $n+m$ datos, donde $b_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n+m$, son dados.

Sea $\{ \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \}$ una base de V_{n+m} y llamemos $\mathcal{L}_{n+m}$ al conjunto de formas lineales

$$\mathcal{L}_{n+m} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{n+m} \} .$$

Se trata de obtener el valor de una forma lineal L sobre p_{n+m}. Escribiendo

$$p_{n+m} = \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot \phi_j$$

se tendrá

$$L_i(p_{n+m}) = \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot L_i(\phi_j) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n+m$$

$$L(p_{n+m}) = \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot L(\phi_j) .$$

Así pues, el problema es hallar $L(p_{n+m})$ en el sistema lineal

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot L_i(\phi_j) = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n+m \\ \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot L(\phi_j) - L(p_{n+m}) = 0 \end{cases}$$

que con las notaciones

$$L_i(\phi_j) = a_{ij} \quad , \quad 1 \leq i, j \leq n+m$$

$$L(\phi_j) = x_j \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n+m$$

$$L(p_{n+m}) = a$$

se puede escribir

$$(2.2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot a_{ij} = b_i, \ i = 1, \ldots, n+m \iff A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n+m} \end{bmatrix} \\ \sum_{j=1}^{n+m} x_j \cdot a_j - a = 0 \iff [a_1, \ldots, a_{n+m}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} - a = 0. \end{cases}$$

Es frecuente que V_{n+m} sea subespacio de un espacio vectorial W sobre K, y que los b_i sean el valor sobre $f \in W$ de las formas lineales L_j.

Razonando en sentido contrario, si

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} \cdot x_j = b_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n+m$$

es un sistema de $n+m$ ecuaciones e incógnitas y se desea hallar

$$a = \sum_{j=1}^{n+m} a_j \cdot x_j$$

donde las x_j son solución del sistema, asociamos a este problema unas formas lineales L_i y L sobre $V_{n+m} = K^{n+m}$ definidas así : si $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m}\}$ es la base canónica de K^{n+m}, entonces

$$L_i(\phi_j) = a_{ij} \ , \quad i,j = 1, 2, \ldots, n+m$$

$$L(\phi_j) = a_j \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n+m$$

con lo cual el sistema queda replanteado en términos de interpolación.

Esta equivalencia en el planteamiento de los problemas hace que pensemos en métodos de resolución de sistemas como formas de resolver un problema de interpolación , y recíprocamente.

Supongamos que existen s subconjuntos de $\{ 1, 2, \ldots, n+m \}$

$$I_{n,i} = \{ \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{in} \}, \quad i = 1, \ldots, s \qquad 1 \leq s \leq m+1$$

tales que las matrices $A_{n,i}$ formadas por las filas $\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{in}$ de las columnas $1, 2, \ldots, n$ de A son regulares. Ello equivale a decir que las formas lineales asociadas a esas filas

$$\{ L_{\sigma_{i1}}, L_{\sigma_{i2}}, \ldots, L_{\sigma_{in}} \} = \mathcal{L}_{n,i}$$

verifican , para todo $i = 1, \ldots, s$

$$\det(L_{\sigma_{ik}} (\phi_j)) \neq 0 , \qquad 1 \leq j,k \leq n$$

y que por tanto el problema de interpolación asociado a $\mathcal{L}_{n,i}$ y $V_n = \{\overline{\phi_1, \ldots, \phi_n}\}$ tiene solución única.
Nuestra meta es obtener α a partir de las soluciones de varios sistemas de orden n ó equivalentemente, obtener $\alpha = L(p_{n+m})$ a partir de los valores de L sobre las soluciones de varios problemas de interpolación con n datos.

El sistema (2.2) es equivalente a la unión de s sistemas tales que el i-ésimo está formado por las ecuaciones $\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{in}$ de (2.2), las que ocupan los lugares

$$\{1, 2, \ldots, n+m\} - \bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i}$$

y la última de (2.2).

En ese sistema i-ésimo se puede aplicar el método de eliminación de Gauss por bloques tomando por pivote a $A_{n,i}$, que es la matriz formada por las n primeras filas y columnas del sistema, para producir ceros en las n primeras columnas por debajo de las n primeras filas.

La última ecuación queda

$$(2.3)\quad \left(\left[a_{n+1}, \ldots, a_{n+m} \right] - \left[a_1, \ldots, a_n \right] . A_{n,i}^{-1} . B_i \right) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} - a = - \left[a_1, \ldots, a_n \right] . A_{n,i}^{-1} . \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \vdots \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix}$$

donde B_i es la matriz de orden nxm siguiente:

$$B_i = \begin{bmatrix} a_{\sigma_{i1},n+1} & \cdots & a_{\sigma_{i1},n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma_{in},n+1} & \cdots & a_{\sigma_{in},n+m} \end{bmatrix} .$$

Si llamamos $p_{n,i}$ al elemento de V_n tal que

$$L_j(p_{n,i}) = b_j \ . \ \forall j \in I_{n,i} \ (\text{es decir } L_j \in \mathcal{L}_{n,i}),$$

podemos escribir

$$p_{n,i} = \sum_{k=1}^{n} z_k^i . \phi_k$$

verificándose

$$\sum_{k=1}^{n} z_k^i \cdot L_j(\phi_k) = b_j \quad \text{. para toda} \quad j \in I_{n,i}$$

Por lo que

$$\begin{bmatrix} z_1^i \\ \vdots \\ z_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\sigma_{i1}}(\phi_1) & \dots & L_{\sigma_{i1}}(\phi_n) \\ \dots\dots\dots\dots & & \dots\dots\dots\dots \\ L_{\sigma_{in}}(\phi_1) & \dots & L_{\sigma_{in}}(\phi_n) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \vdots \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix}$$

es decir

$$\begin{bmatrix} z_1^i \\ \vdots \\ z_n^i \end{bmatrix} = A_{n,i}^{-1} \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \vdots \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix} .$$

Por tanto

$$L(p_{n,i}) = \sum_{k=1}^{n} z_k^i \cdot L(\phi_k) = \sum_{k=1}^{n} z_k^i \cdot a_k = \left[a_1, \dots, a_n\right] \cdot A_{n,i}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \vdots \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix} .$$

De forma análoga, si para $k = n+1, \dots, n+m$, llamamos $p_{n,i}^k$ al elemento de V_n que verifica

$$L_j(p_{n,i}^k) = L_j(\phi_k) = a_{jk} \quad \text{. para toda} \quad j \in I_{n,i}$$

resulta

$$L(p_{n,i}^k) = \left[a_1, \dots, a_n\right] \cdot A_{n,i}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_{\sigma_{i1},k} \\ \vdots \\ a_{\sigma_{in},k} \end{bmatrix} .$$

En consecuencia (2.3) se puede escribir, por ser $a = L(p_{n+m})$,

$$L(p_{n+m}) = L(p_{n,i}) + \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \cdot (L(p_k) - L(p^k_{n,i})).$$

Habremos obtenido, pues, s igualdades del tipo (2.3)

$$(2.4) \quad \left([a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}] - [a_1, \ldots, a_n] \cdot A^{-1}_{n,i} \cdot B_i \right) \cdot \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = a =$$

$$= - [a_1, \ldots, a_n] \cdot A^{-1}_{n,i} \cdot \begin{bmatrix} b_{a_{i1}} \\ \vdots \\ b_{a_{in}} \end{bmatrix} \quad , \quad i = 1, \ldots, s.$$

Llamando $B_{i1}, \ldots, B_{im}$ a las columnas de la matriz B_i , sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in K$ tales que

$$\begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1 \\ \sum_{i=1}^{s} (a_{n+j} - [a_1, \ldots, a_n] \cdot A^{-1}_{n,i} \cdot B_{ij}) \cdot \lambda_i = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, s-1, \end{cases}$$

es decir

$$(2.5) \begin{cases} \lambda_1 + \ldots + \lambda_s = 1 \\ \sum_{i=1}^{s} [a_1, \ldots, a_n] \cdot A^{-1}_{n,i} \cdot B_{ij} \cdot \lambda_i = a_{n+j} \quad , \quad j = 1, \ldots, s-1. \end{cases}$$

Si multiplicamos la igualdad i-ésima de (2.4) por λ_i y sumamos, se llega a

$$(2.6)\quad \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\cdot\sum_{k=s}^{m}x_{n+k}\cdot\left(a_{i+k}-[a_1,\ \dots,\ a_n]\cdot A_{n,i}^{-1}\cdot b_{ik}\right)-\alpha=$$

$$=-\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\cdot[a_1,\ \dots,\ a_n]\cdot A_{n,i}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}b_{\sigma_{i1}}\\ \vdots\\ b_{\sigma_{in}}\end{bmatrix}$$

donde el doble sumatorio desaparece si $s = m+1$.

En términos de interpolación, esta fórmula nos dice que

$$(2.7)\quad L(p_{n+m})=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\cdot L(p_{n,i})+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\sum_{k=n+s}^{n+m}x_k\cdot\left(L(\phi_k)-L(p_{n,i}^{k})\right),$$

es decir, (2.7) es la fórmula general de interpolación por recurrencia (0.11) que aparecía en el capítulo 0.

Así pues, si el sistema (2.2) tiene solución única y también el sistema (2.5), $\alpha = L(p_{n+m})$ puede obtenerse mediante la fórmula (2.7), donde los $L(p_{n,i})$, $i = 1, \dots, s$, son la solución de s problemas similares más sencillos, así como los $L(p_{n,i}^{k})$. Las x_k, $k = n+s, \dots, n+m$, pueden obtenerse resolviendo uno cualquiera de los siguientes sistemas:

Para cualquier $i = 1, \ldots, s$, y llamando $\{ \mu_{i1}, \ldots, \mu_{im} \} = \{ 1, 2, \ldots, n+m \} - I_{n,i}$

$$\left(\begin{bmatrix} a_{\mu_{i1},n+1} & \cdots & a_{\mu_{i1},n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{im},n+1} & \cdots & a_{\mu_{im},n+m} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{\mu_{i1},1} & \cdots & a_{\mu_{i1},n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{im},1} & \cdots & a_{\mu_{im},n} \end{bmatrix} . A_{n,i}^{-1} \begin{bmatrix} a_{\sigma_{i1},n+1} & \cdots & a_{\sigma_{i1},n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\sigma_{in},n+1} & \cdots & a_{\sigma_{in},n+m} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n+m} \end{bmatrix} =$$

(I.8)

$$= \begin{bmatrix} b_{\mu_{i1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{\mu_{im}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{\mu_{i1},1} & \cdots & a_{\mu_{i1},n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{im},1} & \cdots & a_{\mu_{im},n} \end{bmatrix} . A_{n,i}^{-1} \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix}$$

$i = 1, \ldots, s$

que tienen solución única porque se han obtenido por el procedimiento de eliminación de Gauss por bloques en el sistema (2.2) prescindiendo de la última ecuación , y tomando como pivote a $A_{n,i}$ después de reordenar las ecuaciones para llevar $\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{in}$ a las primeras. Por este método queda un sistema triangular inferior por bloques y al ser el determinante total distinto de cero, el determinante que aparece en el subsistema inferior debe ser distinto de cero también. Ese subsistema es precisamente el (2.8).

Si ocurriera además que

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i}\right) = n+s-1$$

y que llamando

$$\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i} = \{ d_1, \ldots, d_{n+s-1} \}$$

se tuviera

$$|\bar{A}| = \begin{vmatrix} a_{d_1,1} & \cdots & a_{d_1,n+s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{d_{n+s-1},1} & \cdots & a_{d_{n+s-1},n+s-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces las $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$ podrían obtenerse también resolviendo el siguiente sistema:

$$(2.9) \qquad (D - E.F^{-1}.G).x'' = b' - E.F^{-1}.b''$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} a_{\ell_1, n+s} & \cdots & a_{\ell_1, n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\ell_{m-s+1}, n+s} & \cdots & a_{\ell_{m-s+1}, n+m} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} a_{\ell_1, 1} & \cdots & a_{\ell_1, n+s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\ell_{m-s+1}, 1} & \cdots & a_{\ell_{m-s+1}, n+s-1} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} a_{d_1, 1} & \cdots & a_{d_1, n+s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{d_{n+s-1}, 1} & \cdots & a_{d_{n+s-1}, n+s-1} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} a_{d_1, n+s} & \cdots & a_{d_1, n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{d_{n+s-1}, n+1} & \cdots & a_{d_{n+s-1}, n+m} \end{bmatrix}$$

siendo $\{ \ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n-s+1} \} = \{ 1, 2, \ldots, n+m \} - \bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i}$,

y donde $X^0 = \left[x_{n+s}, \ldots, x_{n+m} \right]^T$, $b^0 = \left[b_{\ell_1}, \ldots, b_{\ell_{m-s+1}} \right]^T$ y

$$b^{**} = \left[b_{d_1}, \ldots, b_{d_{n+s-1}} \right]^T .$$

Hemos llegado así a lo expresado en el teorema 0.1 al que originalmente ([9] y [21]) se llegaba de otra forma.

Ahora bien, en [9] y [21] se vió que la condición de regularidad de (2.5) era incómoda en general, y que podía ser sustituída por otras más fáciles de comprobar en la práctica (teorema 0.2 de esta memoria). Nosotros a continuación vamos a profundizar en lo que acabamos de exponer y en las condiciones de aquel teorema 0.2, para completarlo en ciertos sentidos. Incluso veremos cómo sin suponer la regularidad de la matriz del sistema (2.2) podemos deducirla.

Sea D_L el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema (2.5).
Como en el caso $s=1$ el determinante D_L se reduce a 1, y por tanto trivialmente es distinto de cero, veamos el siguiente lema para $s \geq 2$:

LEMA 2.1 .-

Con las notaciones anteriores, sea $2 \leq s \leq m+1$ y supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:

i) $| A_{n,i} | \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, s$

ii) $\text{card}(I_{n,i} \cap I_{n,i+1}) = n-1$, para todo $i = 1, \ldots, s-1$

iii) $\text{card}(\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i}) = n+s-1$, $\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i} = \{ d_1, d_2, \ldots, d_{n+s-1} \}$

iv) Si $I_{n,i} \cap I_{n,i+1} = \{ p_{i1}, \ldots, p_{i,n-1} \}$, $i = 1, \ldots, s-1$,

$$\begin{vmatrix} a_{\rho_{i1},1} & \cdots & a_{\rho_{i1},n} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ a_{\rho_{i,n-1},1} & \cdots & a_{\rho_{i,n-1},n} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} \neq 0 \text{ , para todo } i = 1, \ldots, s-1.$$

Entonces se tiene que

$$D_L \neq 0 \iff |\bar{A}| = \begin{vmatrix} a_{d_1,1} & \cdots & a_{d_1,n+s-1} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ a_{d_{n+s-1},1} & \cdots & a_{d_{n+s-1},n+s-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Demostración.:

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que $D_L = 0$.

$$D_L = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cdot A^{-1}_{n,1} \cdot B_{11} & \cdots & [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cdot A^{-1}_{n,s} \cdot B_{s1} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cdot A^{-1}_{n,1} \cdot B_{1,s-1} & \cdots & [\alpha_1, \ldots, \alpha_n] \cdot A^{-1}_{n,s} \cdot B_{s,s-1} \end{vmatrix} = 0$$

Restando en D_L de cada columna la siguiente, y desarrollando el determinante por la primera fila, se tiene que el determinante

$$\begin{vmatrix} [\alpha_1,\ldots,\alpha_n].(A_{n,1}^{-1}B_{11}-A_{n,2}^{-1}B_{21}) & \ldots\ldots & [\alpha_1,\ldots,\alpha_n].(A_{n,s-1}^{-1}B_{s-1,1}-A_{n,s}^{-1}B_{s1}) \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ [\alpha_1,\ldots,\alpha_n].(A_{n,1}^{-1}B_{1,s-1}-A_{n,2}^{-1}B_{2,s-1}) & \ldots & [\alpha_1,\ldots,\alpha_n].(A_{n,s-1}^{-1}B_{s-1,s-1}-A_{n,s}^{-1}B_{s,s-1}) \end{vmatrix}$$

es cero, por lo que existe una combinación lineal nula de las filas del determinante, con coeficientes no todos nulos

$$\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i.([\alpha_1,\ldots,\alpha_n].(A_{n,j}^{-1}B_{ji}-A_{n,j+1}^{-1}B_{j+1,i})) = 0 \ , \ j = 1,\ldots,s-1$$

es decir, para toda $j = 1, \ldots, s-1$ se tiene

$$(2.10) \quad [\alpha_1,\ldots,\alpha_n].\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i(A_{n,j}^{-1}B_{ji}-A_{n,j+1}^{-1}B_{j+1,i}) = 0 \ .$$

Por otra parte, como $I_{n,j} \cap I_{n,j+i} = (\rho_{j1}, \ldots, \rho_{j,n-1})$ entonces

$$[a_{\rho_{jk},1}, \ldots, a_{\rho_{jk},n}].A_{n,j}^{-1}B_{ji} = [0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots, 0]_j B_{ji} =$$

$$[0,\ldots,0,\ldots 1, \ldots,0].B_{j+1,i} =$$

$$[a_{\rho_{jk},1}, \ldots, a_{\rho_{jk},n}].A_{n,j+1}^{-1}.B_{j+1,i}$$

para $k = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, s-1$; y por tanto se tiene

$$(2.11)\begin{cases} \left[a_{\rho_{j1},1},\ \ldots,\ a_{\rho_{j1},n}\right]\cdot \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot(A^{-1}_{n,j}B_{ji} - A^{-1}_{n,j+1}B_{j+1,i}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[a_{\rho_{j,n-1},1},\ldots,a_{\rho_{j,n-1},n}\right]\cdot \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot(A^{-1}_{n,j}B_{ji} - A^{-1}_{n,j+1}B_{j+1,i}) = 0 \end{cases}$$

para toda $j = 1, \ldots, s-1$.

Para cada j ($1 \leq j \leq s-1$) fijo, la ecuación (2.10) junto con las $n-1$ ecuaciones de (2.11) forman un sistema homogéneo de n ecuaciones cuyas incógnitas son las n componentes del vector

$$\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot(A^{-1}_{n,j}B_{ji} - A^{-1}_{n,j+1}B_{j+1,i}) .$$

La matriz de coeficientes de cada uno de estos sistemas es regular por la hipótesis iv) , y, por tanto, todos ellos tienen solución única la trivial.

Así

$$\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot(A^{-1}_{n,j}B_{ji} - A^{-1}_{n,j+1}B_{j+1,i}) = \vec{0}, \quad j = 1, \ldots, s-1$$

es decir

$$(2.12)\quad A^{-1}_{n,j}\cdot\left(\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot B_{ji}\right) = A^{-1}_{n,j+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot B_{j+1,i}\right), \quad j = 1,\ldots,s-1.$$

Llamando

$$\left[\tau_{j+1,1},\ \ldots,\ \tau_{j+1,n}\right]^T = A^{-1}_{n,j+1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i\cdot B_{j+1,i}\right), \quad j = 1,\ldots,s-1$$

se tiene, por verificarse (2.12)

$$[\tau_{j+1,1}, \ldots, \tau_{j+1,n}]^T = [\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,n}]^T \ , \ j = 1, \ldots, s-1,$$

luego

$$[\tau_{j,1}, \ldots, \tau_{j,n}]^T = [\tau_1, \ldots, \tau_n]^T \ , \ j = 1, \ldots, s.$$

Así que

$$(2.13) \quad \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{ji} = A_{n,j} \cdot A_{n,j+1}^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{j+1,i} \right) =$$

$$= \tau_1 \cdot \begin{bmatrix} 1°\text{col.} \\ \text{de} \\ A_{n,j} \end{bmatrix} + \ldots + \tau_n \cdot \begin{bmatrix} n\text{-ésima} \\ \text{col. de} \\ A_{n,j} \end{bmatrix} \ , \ j = 1, \ldots, s-1$$

y análogamente

$$(2.14) \quad \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{j+1,i} = A_{n,j+1} \cdot A_{n,j}^{-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{ji} \right) =$$

$$= \tau_1 \cdot \begin{bmatrix} 1°\text{col.} \\ \text{de} \\ A_{n,j+1} \end{bmatrix} + \ldots + \tau_n \cdot \begin{bmatrix} n\text{-ésima} \\ \text{col. de} \\ A_{n,j+1} \end{bmatrix} \ , \ j = 1, \ldots, s-1.$$

(2.13) y (2.14) se pueden resumir en

$$(2.15) \quad \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{ji} = \tau_1 \cdot \begin{bmatrix} 1° \text{ col.} \\ \text{de} \\ A_{n,j} \end{bmatrix} + \ldots + \tau_n \cdot \begin{bmatrix} n\text{-ésima} \\ \text{col. de} \\ A_{n,j} \end{bmatrix}_j$$

para $j = 1, 2, \ldots, s$, lo que expresa, por la hipótesis ii) y

y iii), que existe una combinación lineal nula de las columnas de $\bar{A}$ con coeficientes no todos nulos. Absurdo pues $|\bar{A}| \neq 0$.

De nuevo por reducción al absurdo, supongamos que $|\bar{A}| = 0$. Por ser $|\bar{A}| = 0$, entonces se tiene (2.15), donde los coeficientes $\theta_1, \ldots, \theta_{s-1}, \tau_1, \ldots, \tau_n$ son no todos nulos. Tenemos pues,

$$\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{ji} = A_{n,j} \cdot \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

luego

$$A_{n,j}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{ji} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

así que

$$A_{n,j}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{ji} = A_{n,j+1}^{-1} \cdot \sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot B_{j+1,i}, \quad j = 1, \ldots, s-1.$$

Por tanto

$$\sum_{i=1}^{s-1} \theta_i \cdot (A_{n,j}^{-1} \cdot B_{ji} - A_{n,j+1}^{-1} \cdot B_{j+1,i}) = \vec{0}, \quad j = 1, \ldots, s-1,$$

que supone $D_L = 0$, en contra de la hipótesis.

COROLARIO 2.2 .-

Bajo las hipótesis i), ii), iii) y iv) del lema anterior, si $s = m+1$, se tiene:

A es regular $\iff D_L \neq 0$.

Demostración.-

En nuestras hipótesis, que son las mismas que las del lema anterior, se ha demostrado que

$$D_L \neq 0 \iff \bar{A} \text{ es regular.}$$

Por ser $s = m+1$, resulta $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i}\right) = n+m$, y por tanto $\bar{A} = A$.

TEOREMA 2.3 .-

Sea $1 \leq s \leq m+1$. Supongamos que:

i) $|A_{n,i}| \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$

que si $s \geq 2$

ii) $\text{card}(I_{n,i} \cap I_{n,i+1}) = n-1$, para todo $i = 1, \ldots, s-1$

iii) $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i}\right) = n+s-1$, $\bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i} = \{d_1, \ldots, d_{n+s-1}\}$

iv) si $I_{n,i} \cap I_{n,i+1} = \{\rho_{i1}, \ldots, \rho_{i,n-1}\}$, $i = 1, \ldots, s-1$

$$\begin{vmatrix} a_{\rho_{i1},1} & \cdots & a_{\rho_{i1},n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\rho_{i,n-1},1} & \cdots & a_{\rho_{i,n-1},n} \\ a_1 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{para todo } i = 1,\ldots,s-1$$

y que si $1 < s \leq m+1$

v) $|\bar{A}| \neq 0$.

Entonces se tiene:

1) si $s < m+1$, $|A| \neq 0$ si y solo si el sistema (2.9) tiene solución única.
2) Para todo s, si $|A| \neq 0$, el valor de α en (2.2) puede obtenerse mediante las expresiones (2.6) y (2.9), donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ son la única solución de (2.5).

Demostración:

1) Si $s < m+1$, $|\bar{A}| \neq 0$ por hipótesis, y podemos aplicar el procedimiento de eliminación de Gauss por bloques en el sistema (2.2) prescindiendo de la última ecuación y tomando como pivote a $\bar{A}$, después de reordenar las ecuaciones para llevar las $d_1, d_2, \ldots, d_{n+s-1}$ a las primeras. Por este método queda un sistema triangular inferior por bloques en el que el subsistema inferior es precisamente el sistema (2.9).
Al ser $|\bar{A}| \neq 0$, el sistema triangular por bloques obtenido tiene solución única si, y solo si, el sistema (2.9) tiene solución única. Así pues, $|A| \neq 0$ si, y solo si, el sistema (2.9) tiene solución única.

2) Si $|A| \neq 0$ y $s = m+1$, sabemos por el lema 2.1 que $D_L \neq 0$ y que existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ únicos verificando (2.5) y, por tanto, se puede aplicar (2.6).
Si $|A| \neq 0$ y $1 < s < m+1$, (2.9) tiene solución única según hemos visto en 1) y (2.5) también, por el lema 2.1; luego se puede aplicar (2.6).
Por último, si $|A| \neq 0$ y $s = 1$, $D_L = 1$ es trivialmente no nulo y por 1) el sistema (2.9) tiene solución única, luego se puede aplicar (2.6).
Así queda demostrado el teorema.

Interesa también escribir estos resultados en términos de interpolación, a efectos de visualizarlos. Así, D_L es el valor del determinante de la matriz de coeficientes del sistema

$$(2.16)\qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{s} \lambda_s = 1 \\ \\ \sum_{i=1}^{s} L(p_{n,i}^{n+j}).\lambda_i = L(\phi_{n+j}) \ , \quad j = 1, \ldots, s-1, \end{cases}$$

es decir, $D_L = 1$ si $s = 1$, y

$$D_L = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ L(p_{n,1}^{n+1}) & L(p_{n,2}^{n+1}) & \ldots & L(p_{n,s}^{n+1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L(p_{n,1}^{n+s-1}) & L(p_{n,2}^{n+s-1}) & \ldots & L(p_{n,s}^{n+s-1}) \end{vmatrix} \quad \text{si} \quad 2 \leq s \leq m+1.$$

El lema, corolario y teorema anteriores se expresan en los siguientes términos de interpolación:

LEMA 2.1 .-

Sea $s \geq 2$, y supongamos que con respecto al problema (2.1) se cumplen las siguientes condiciones:

i) $\det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, s$

ii) $\text{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) = n-1$, para todo $i = 1, \ldots, s-1$

iii) $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}\right) = n+s-1$

iv) $\det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \\ (\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0$, para todo $i=1,\ldots,s-1$.

Entonces se tiene que

$$D_L \neq 0 \iff \det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+s-1} \\ \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0.$$

COROLARIO 2.2 .-

Si se verifican las hipótesis i), ii), iii) y iv) del lema 2.1 para $s = m+1$, entonces se tiene: el problema de interpolación (2.1) tiene solución única si, y solo si, $D_L \neq 0$.

TEOREMA 2.3 .-

Sea $1 \leq s \leq m+1$. Supongamos que:

i) $\det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,i} \end{pmatrix} \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, s$

que si $s \geq 2$

ii) $\text{card}(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) = n-1$, para todo $i = 1, \ldots, s-1$

iii) $\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}\right) = n+s-1$

iv) $\det \begin{pmatrix} \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \\ (\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0$, para todo $i = 1,\ldots,s-1$

y que si $1 < s < m+1$

$$v)\ \det\left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+s-1} \Big|_{\bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i}}\right) \neq 0.$$

Entonces se tiene:

1) Si $s < m+1$, el problema de interpolación (2.1) tiene solución única si, y solo si, el sistema

$$(2.17)\begin{cases} \sum_{k=n+s}^{n+m} L_j(\phi_k - p^k_{n+s-1, \bigcup_{i=1}^{\delta}\{i\}}).x_k = b_j - L_j(p_{n+s-1, \bigcup_{i=1}^{\delta}\{i\}}) \\ \forall L_j \in \mathcal{L}_{n+m} - \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{L}_{n,i} \end{cases}$$

tiene solución única.

2) Para todo s, si el problema (2.1) tiene solución única p_{n+m}, el valor

$$L(p_{n+m}) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i . L(p_{n,i}) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \sum_{k=n+s}^{n+m} x_k . L(\phi_k - p^k_{n,i})$$

donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ y $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$ son, respectivamente, las únicas soluciones de los sistemas (2.16) y (2.17).

El resultado del corolario 2.2 en el caso m=1, se reduce a afirmar que, bajo las hipótesis i), ii), iii) y iv), el problema de interpolación (2.1) tiene solución única si, y solo si, $D_L = L(p^{n+1}_{n,2}) - L(p^{n+1}_{n,1}) \neq 0$. Esta condición ha sido establecida por Mühlbach [33] recientemente, y ya aparecía en [ ], pero particularizada a un ejemplo. En dicho ejemplo se mostraba cómo utilizar conjuntamente los resultados de allí con los de [24] en un pro-

blema de interpolación en seis puntos del plano, cuando la situación de éstos no permite inmediatamente afirmar o negar la existencia y unicidad de solución en el espacio de los polinomios en x , y de grado 2, es decir, cuando no hay tres puntos alineados.

Veamos ahora otro ejemplo en el se muestra que gracias al corolario 2.2 se puede aplicar la misma técnica que allí a otros problemas.

EJEMPLO 2.1 .-

Consideremos el problema de interpolar una función f por polinomios del espacio $P_2(x,y)$, usando como datos

$$(2.18)\quad \{ f(1,0),\ f(-1,0),\ f(1,1),\ f(-1,1),\ f(0,2),\ \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \} .$$

Este problema no puede ser resuelto por el método de [24], pero sí lo puede ser con aquel método el problema resultante al suprimir el último dato y usar como espacio interpolador el engrendrado por

$$(2.19)\quad \{ 1,\ x-1,\ y,\ y(x-1),\ y(y-1) \}$$

que, como es evidente, es el engrendrado por

$$\{ 1,\ x,\ y,\ xy,\ y^2 \} .$$

Lo mismo sucede con el problema resultante al suprimir el quinto dato en (2.18) y usar el espacio de interpolación engrendrado por (2.19).

Denotando

$$L_1(f) = f(1,0), \quad L_2(f) = f(-1,0), \quad L_3(f) = f(1,1)$$

$$L_4(f) = f(-1,1), \quad L_5(f) = f(0,2), \quad L_6(f) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}$$

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = x-1, \quad \phi_3 = y$$

$$\phi_4 = y(x-1), \quad \phi_5 = y(y-1), \quad \phi_6 = x^2$$

$$\mathcal{L}_{5,1} = \{ L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 \}$$

$$\mathcal{L}_{5,2} = \{ L_1, L_2, L_3, L_4, L_6 \}$$

$$L(f) = f(x,y),$$

se cumplen las hipótesis i), ii) y iii) del corolario 2.2 y [24] nos permite asegurar que si (x,y) no verifica $y = 0$ ó $y = 1$, también se cumple iv). Entonces el problema asociado a (2.18) tendrá solución única si, y sólo si, al evaluar en (x,y) la combinación lineal de (2.19) que interpola a x^2 en los datos asociados a L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 sale distinto que al evaluar en (x,y) la que lo hace en los datos asociados a L_1, L_2, L_3, L_4, L_6.

Los cálculos se realizan de manera muy simple si se usa la base (2.19):
escribiendo

$$p^6_{5,1} = a_0 + a_1(x-1) + a_2 y + a_3 y(x-1) + a_4 y(y-1)$$

resulta $a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0, \quad a_4 = -1/2,$ y para

$$p^6_{5,2} = b_0 + b_1(x-1) + b_2 y + b_3 y(x-1) + b_4 y(y-1)$$

$b_i = a_i$, si $i = 0, 1, 2, 3,$ y $b_4 = 0.$
Así

$$L(p^6_{5,1}) = 1 - \frac{y(y-1)}{2} \neq L(p^6_{5,2}) = 1 \iff y \neq 0 \wedge y \neq 1.$$

y cuando esto sucede el problema inicial tiene solución única.

Además su solución es

$$(2.20) \qquad p_6(x,y) = \lambda_1 \cdot p_{5,1}(x,y) + \lambda_2 \cdot p_{5,2}(x,y)$$

donde

$$(2.21) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \cdot \left(x^2 - 1 + \dfrac{y(y-1)}{2} \right) + \lambda_2 \cdot (x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

o equivalentemente

$$(2.22) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \cdot \dfrac{y(y-1)}{2} = 1 - x^2, \end{cases}$$

es decir

$$\lambda_1 = \frac{2(1 - x^2)}{y(y - 1)} \quad , \quad \lambda_2 = 1 - \frac{2(1 - x^2)}{y(y - 1)} \, ,$$

y $p_{5,1}$ (resp. $p_{5,2}$) es el polinomio del espacio engendrado por (2.19) que interpola a f en los datos $L_1, L_2, \ldots, L_5$ (resp. L_1, L_2, L_3, L_4, L_6).

Estos polinomios se construyen inmediatamente por el método recurrente de [24] , resultando:

$$p_{5,1}(x,y) = c_0 + c_1(x-1) + c_2 y + c_3 y(x-1) + c_4 y(y-1)$$

con

$$c_0 = f(1,0) \qquad c_1 = (f(1,0)-f(-1,0))/2$$

$$c_2 = f(1,1) - f(1,0) \qquad c_3 = (f(1,1)-f(1,0)-f(-1,1)+f(-1,0))/2$$

$$c_4 = (2f(0,2)+f(1,0)+f(-1,0)-2f(1,1)-2f(-1,1))/4$$

y

$$p_{5,2}(x,y) = \bar{c}_0 + \bar{c}_1(x-1) + \bar{c}_2 y + \bar{c}_3 y(x-1) + \bar{c}_4 y(y-1)$$

con $\bar{c}_i = c_i$ para $i = 0, 1, 2, 3$ y

$$\bar{c}_4 = (f(1,1)-f(1,0)+f(-1,1)-f(-1,0))/2 - \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} .$$

Antes de continuar con el desarrollo del capítulo, obsérvese que:

1. Hasta ahora hemos mostrado un nuevo camino para obtener los resultados del teorema 0.1 de esta memoria.

2. Con el lema 2.1 hemos visto que en el teorema 0.2 realmente , bajo tres de las hipótesis , la cuarta es necesaria y suficiente para el resultado , mientras que allí se daban las cuatro como

suficientes.

3. Al seguir esta línea para conseguir la fórmula general de interpolación por recurrencia, con los resultados obtenidos, extendemos los de Mühlbach [33] . Los teoremas 3.1 y 3.11 de dicho artículo quedan incluídos en nuestro teorema 2.3 como los casos en que $s = m = 1$ y $s = 1$, respectivamente. Además, el teorema 4.1 se recoge en nuestro corolario 2.2, para el caso $m = 1$, y en el apartado 2) del teorema 2.3.

2.METODOS PARA RESOLVER SISTEMAS LINEALES

En todo lo anterior hemos puesto especial énfasis en la relación entre sistemas y problemas de interpolación, más que en observar la resolución práctica del sistema.

En lo que sigue vamos a ver con más detalle dicha resolución práctica. A pesar de ello, continuamos con la equivalencia entre problemas de interpolación y métodos de resolución de sistemas.

Volvamos, pues, al sistema (2.2) y veamos cómo podríamos calcular α.

Bajo las hipótesis del teorema 2.3 y si $|A| \neq 0$, hemos visto que el valor de α puede obtenerse mediante la expresión:

$$(2.23)\qquad \alpha = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n^-}] \cdot A_{n,i}^{-1} \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \vdots \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot \sum_{k=s}^{m} x_{n+k} \cdot \left(\alpha_{n+k} - [\alpha_1, \ldots, \alpha_{n^-}] \cdot A_{n,i}^{-1} \cdot B_{ik} \right),$$

donde $x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}$ son la única solución de (2.9) y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ lo son de (2.5).

Así pues, calculando cada uno de los términos del segundo miembro de (2.23) se puede determinar el valor de α.

Por tanto para calcular α se pueden seguir los siguientes pasos:

Primero

Para cada $i = 1, \ldots, s$; calcular el vector $[z_1^i, \ldots, z_n^i]^T$ solución del sistema

$$A_{n,i} \cdot \begin{bmatrix} z_1^i \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{\sigma_{i1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{\sigma_{in}} \end{bmatrix}$$

y calcular los valores

$$\beta_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot z_j^i .$$

Segundo

Para $k = n+1, \ldots, n+m$, e $i = 1, \ldots, s$; calcular para cada par (k,i) el vector $[y_1^{k,i}, \ldots, y_n^{k,i}]^T$ solución del sistema

$$A_{n,i} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{k,i} \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^{k,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\sigma_{i1},k} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{\sigma_{in},k} \end{bmatrix}$$

y calcular para cada uno de esos pares (k,i) el valor

$$\beta_{k,i} = \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot y_j^{k,i} .$$

Tercero

Calcular $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \beta_{n+1,1} & \cdots & \beta_{n+1,s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n+s-1,1} & \cdots & \beta_{n+s-1,s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_{n+s-1} \end{bmatrix}$$

Cuarto

Para $k = n+s, \ldots, n+m$; calcular el vector $\left[t_1^k, \ldots, t_{n+s-1}^k \right]^T$ solución del sistema

$$\bar{A} \cdot \begin{bmatrix} t_1^k \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{n+s-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{d_1,k} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{d_{n+s-1},k} \end{bmatrix}$$

y, suponiendo que $\{1, 2, \ldots, n+m\} - \bigcup_{i=1}^{s} I_{n,i} = \{\ell_1, \ldots, \ell_{m-s+1}\}$, calcular también los valores

$$Y_{ik} = \sum_{j=1}^{n+s-1} a_{\ell_i,j} \cdot t_j^k$$

$i = 1, \ldots, m-s+1$, $k = n+s, \ldots, n+m$.

Quinto

Calcular el vector $\left[\theta_1, \ldots, \theta_{n+s-1} \right]^T$ solución del sistema:

$$\bar{A}. \begin{bmatrix} \theta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_{n+s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{d_1} \\ . \\ . \\ . \\ b_{d_{n+s-1}} \end{bmatrix}$$

y, calcular los valores

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n+s-1} a_{i_i,j} \cdot \theta_j$$

para $i = 1, \ldots, m-s+1$.

Sexto

Calcular $[x_{n+s}, \ldots, x_{n+m}]^T$ resolviendo:

$$\begin{bmatrix} a_{i_1,n+s} - \gamma_{1,n+s} & \cdots & a_{i_1,n+m} - \gamma_{1,n+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_{m-s+1},n+s} - \gamma_{m-s+1,n+s} & \cdots & a_{i_{m-s+1},n+m} - \gamma_{m-s+1,n+m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{n+s} \\ . \\ . \\ . \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{i_1} - \gamma_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_{i_{m-s+1}} - \gamma_{m-s+1} \end{bmatrix}$$

Séptimo

Calcular $\alpha = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot D_i + \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=n+s}^{n+m} \lambda_i \cdot x_k (\alpha_k - \beta_{k,i})$.

OBSERVACIONES

1. En el proceso anterior, si $s = m+1$, entonces α valdría

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i \cdot \beta_i .$$

y de ahí, que para calcular α sólo se tengan que efectuar los pasos primero, segundo, tercero y séptimo.
Por otro lado, si $s = 1$, entonces α valdría

$$\alpha = \beta_1 + \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \cdot (\alpha_k - \beta_{k,1}),$$

y por tanto, sólo se efectuarían los pasos primero, segundo, sexto y séptimo, puesto que en el paso sexto el sistema a resolver es

$$\sum_{k=n+}^{n+m} x_k \cdot (a_{\ell_i,k} - \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_i,j} \cdot y_j^{k,1}) = b_{\ell_i} - \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_i,j} \cdot z_j^1$$

para $i = 1, \ldots, m$.

2. Hay que señalar que las matrices de coeficientes de los sistemas a resolver se repiten con frecuencia; como en los pasos primero y segundo o en los pasos cuarto y quinto.

3. En las hipótesis del teorema 2.3 se imponían una serie de condiciones referentes a unas submatrices sacadas de las n primeras columnas de la matriz de coeficientes del sistema. Es obvio, que el que aquí se trabaje con las n primeras columnas de A no es un hecho fundamental en sí. O sea, que todo lo dicho vale cuando se trabaje con cualesquiera n columnas de A. Basta con permutar las columnas de A (esto lleva consigo una permutación de las componentes del vector solución) para pasar cualesquiera n columnas a las n primeros lugares y, en esta situación, se puede aplicar lo que aquí se ha expuesto.

4. Dependiendo de las hipótesis que se puedan manejar sobre la matriz de coeficientes del sistema (2.3) y, por tanto, de las distintas posibilidades de tomar n , m y el número de subproblemas, s, que se quieran utilizar para calcular α

se tienen diferentes formas de calcular dicho valor.

5. El problema que aquí se ha estudiado es el de calcular el valor de una forma lineal sobre la solución de un sistema lineal. Es evidente que dentro de este mismo planteamiento cabe la posibilidad de calcular una a una las componentes del vector solución: se procedería a resolver varios problemas para distintas formas lineales. Por ejemplo, $\alpha = 1.x_1 + 0.x_2 + \ldots + 0.x_{n+m}$, $\alpha = 0.x_1 + 1.x_2 + \ldots + 0.x_{n+m}$.

Casos particulares interesantes del anterior procedimiento para calcular α son los correspondientes a los valores

a) $m = 1$ con $s = m+1 = 2$

b) $s = 1$.

<u>Caso $m = 1$ con $s = m+1 = 2$</u>. Bajo las hipótesis :

i) la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n+1}$ es regular

ii) existen dos submatrices $A_{n,i}$, $i = 1,2$, de orden $n \times n$ de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n+1,i} & \cdots & a_{n+1,n} \end{bmatrix}$$

que son regulares. Para fijar ideas vamos a suponer

que

$$A_{n,1} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A_{n,2} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n} \end{bmatrix}$$

iii) el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

es distinto de cero.

El valor $\alpha = \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{n+1} \cdot x_{n+1}$ se puede calcular así:

Primero

Resolver los sistemas:

$$A_{n,1} \cdot \begin{bmatrix} z_1^1 \\ \vdots \\ z_n^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A_{n,2} \cdot \begin{bmatrix} z_1^2 \\ \vdots \\ z_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$

y calcular $\beta_1 = \alpha_1 \cdot z_1^1 + \ldots + \alpha_n \cdot z_n^1$, $\beta_2 = \alpha_1 \cdot z_1^2 + \ldots + \alpha_n \cdot z_n^2$.

Segundo

Resolver los sistemas:

$$A_{n,1}\cdot\begin{bmatrix} y_1^1 \\ \vdots \\ y_n^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}, \quad A_{n,2}\cdot\begin{bmatrix} y_1^2 \\ \vdots \\ y_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,n+1} \\ \vdots \\ a_{n+1,n+1} \end{bmatrix}$$

y calcular: $\hat{\beta}_1 = \alpha_1 \cdot y_1^1 + \ldots + \alpha_n \cdot y_n^1$, $\hat{\beta}_2 = \alpha_1 \cdot y_1^2 + \ldots + \alpha_n \cdot y_n^2$.

Tercero

Calcular:

$$\lambda_1 = \frac{\hat{\beta}_2 - a_{n+1}}{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_1}$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1.$$

Entonces, Cuarto

$$\alpha = \lambda_1 \cdot \beta_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2.$$

Obsérvese que el denominador que aparece en el tercer paso es no nulo ya que en las condiciones ii) y iii) se tiene que $|A| \neq 0$ si, y solo si, $\hat{\beta}_2 \neq \hat{\beta}_1$.
Análogamente a lo que sucede en el método de Aitken-Neville, será mejor a efectos de cálculo construir α en la forma

$$\alpha = \beta_2 - \frac{\beta_1 - \beta_2}{\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2} \cdot (\hat{\beta}_2 - a_{n+1})$$

que en la forma $\alpha = \lambda_1 \cdot \beta_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2$, ante la posibilidad de que $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2$ sea pequeño.

Caso s = 1. Bajo las hipótesis:

i) la matriz $A = (a_{ij})_{i,j = 1, 2, \ldots, n+m}$ es regular

ii) la matriz $A_{n,1} = (a_{ij})_{i,j = 1, \ldots, n}$ es regular.

Se puede calcular el valor $\alpha = \alpha_1 \cdot x_1 + \ldots + \alpha_{n+m} \cdot x_{n+m}$ y/o el vector $[x_1, \ldots, x_{n+m}]^T$ procediendo como sigue.

Primero

a) Resolver el sistema

$$A_{n,1} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

y para $j = n+1, \ldots, n+m$, calcular

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \cdot z_i .$$

b) Además de efectuar el apartado a), calcular

$$\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z_i .$$

Segundo

a) Para $k = n+1, \ldots, n+m$, resolver los sistemas

$$A_{n,1} \cdot \begin{bmatrix} y_1^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$$

y, para esos valores de k, y para $j = n+1, \ldots, n+m$

calcular

$$\gamma_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} \cdot y_i^k \quad .$$

b) Además de hacer el apartado a), calcular

$$\hat{\beta}_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot y_i^k \quad , \quad k = n+1, \ldots, n+m.$$

Tercero

Calcular $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ resolviendo el sistema

$$\sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \cdot (a_{jk} - \gamma_{j,k}) = b_j - \gamma_j, \quad j = n+1, \ldots, n+m.$$

Cuarto

a) Calcular para $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = z_i - \sum_{k=1}^{m} x_{n+k} \cdot y_i^{n+k} \quad .$$

b) Calcular

$$\alpha = \beta + \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k \cdot (\alpha_k - \hat{\beta}_k).$$

NOTA.- En cada uno de los pasos anteriores, salvo en el tercero se distinguen dos apartados: a) y b). Para calcular únicamente el vector $[x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}]^T$ se deben realizar los apartados a), mientras que para calcular α los apartados b), y ambos si se desean las dos cosas.

Obsérvese que el método que acabamos de describir, correspondiente al valor $s = 1$, es, por la forma en que se obtuvo, la exposición

de los cálculos del conocido método de Gauss por bloques para resolver sistemas lineales cuando se utiliza como bloque pivote a $A_{n,1}$. Por otra parte, la aplicación de este método usando un método de Gauss puntual sin estrategia de pivote en la resolución de cada sistema parcial es igual de costoso, en cuanto al número de operaciones elementales, que el método de Gauss puntual (sin estrategia de pivote), es decir, que no depende de la elección de n y m. En efecto, el número de operaciones en cada paso es el siguiente:

	NUMERO DE OPERACIONES	
PRIMER PASO	$\frac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$	resolver sistema
	$m.(2n - 1)$	calcular los y_j
SEGUNDO PASO	$m.n.(n-1)$	transformar términos independientes de los m sistemas
	$m.n^2$	resolver m sistemas triangulares
	$m^2.(2n-1)$	calcular los $y_{j,k}$
TERCER PASO	$m + m^2$	obtener matrices coefi. y vector de térm. indep.
	$\frac{4m^3 + 9m^2 - 7m}{6}$	resolver sistema
CUARTO PASO	$2n.m$	calcular vector
TOTAL	$\frac{4(n+m)^3 + 9(n+m)^2 - 7(n+m)}{6}$	

A continuación veremos un ejemplo ilustrativo. Detallamos los pasos para mejor compresión , pero todos son muy elementales.

EJEMPLO 2.2

a) Calcular el valor de $\alpha = x_1 + x_4$, correspondiente a la solución del sistema

$$(2.24)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b) Calcular la solución de (2.24).

Solución

a) Vamos a proceder a calcular α por dos métodos distintos. Estos dos métodos utilizan, respectivamente, los bloques de hipótesis H_1 y H_2 que vamos a detallar:

H_1

i) la matriz A de coeficientes de (2.24) es regular

ii) en las dos primeras columnas de A se tiene que

$$A_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ es regular, } I_{2,1} = \{1, 2\}$$

$$A_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ es regular, } I_{2,2} = \{2, 3\}$$

iii)

$$\text{card}(I_{2,1} \cap I_{2,2}) = 1$$

$$\text{card}(I_{2,1} \cup I_{2,2}) = 3$$

H_1

iv) la matriz

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{es regular}$$

v) $L = [1, 0, 0, 1]^T$ y se verifica $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

H_2

i) la matriz A de coeficientes de (2.24) es regular

ii) en las tres primeras columnas de A se tiene que

$$A_{3,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ es regular, } \quad I_{3,1} = \{1, 2, 3\}$$

$$A_{3,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ es regular, } \quad I_{3,2} = \{2, 3, 4\}$$

iii)

$$\text{card}(I_{3,1} \cap I_{3,2}) = 2$$

$$\text{card}(I_{3,1} \cup I_{3,2}) = 4$$

iv) la matriz $\bar{A} = A$ es regular

v) $L = [1, 0, 0, 1]^T$, y se verifica

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Para calcular α utilizando las hipótesis H_1 se procedería como sigue:

Primer paso

Resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

y calcular $\beta_1 = 1.z_1^1 + 0.z_2^1$, $\beta_2 = 1.z_1^2 + 0.z_2^2$.

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 9/5 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = -3$, $\beta_2 = -2/5$.

Segundo paso

Resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{3,1} \\ y_2^{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{4,1} \\ y_2^{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{3,2} \\ y_2^{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^{4,2} \\ y_2^{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y calcular : $\beta_{3,1} = 1.y_1^{3,1} + 0.y_2^{3,1}$, $\beta_{3,2} = 1.y_1^{3,2} + 0.y_2^{3,2}$

$\beta_{4,1} = 1.y_1^{4,1} + 0.y_2^{4,1}$, $\beta_{4,2} = 1.y_1^{4,2} + 0.y_2^{4,2}$.

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1^{3,1} \\ y_2^{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1^{4,1} \\ y_2^{4,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1^{3,2} \\ y_2^{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1^{4,2} \\ y_2^{4,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} \qquad \beta_{3,1} = -1, \quad \beta_{3,2} = -2/5$$

$$\beta_{4,1} = -2, \quad \beta_{4,2} = 3/5$$

Tercer paso

Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ;$$

se obtiene : $\lambda_1 = -2/3$, $\lambda_2 = 5/3$.

Cuarto paso

Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_1^4 \\ t_2^4 \\ t_3^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y calcular $Y_{1,4} = -1.t_1^4 + 2.t_2^4 + 3.t_3^4$.

Se obtiene:

$$[\, t_1^4 , t_2^4, t_3^4] = [\, 7/3, 2/3, 13/3] \, , \; Y_{1,4} = 12.$$

Quinto paso

Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

y calcular $\gamma_1 = -1.\theta_1 + 2.\theta_2 + 3.\theta_3$.

Se obtiene: $[\theta_1, \theta_2, \theta_3] = [4/3, 8/3, 13/3]$, $\gamma_1 = 17$.

Sexto paso

Calcular x_4 de $(-1-12).x_4 = 4-17$. Se obtiene $x_4 = 1$.

Séptimo paso

Calcular $\alpha = \lambda_1.\beta_1 + \lambda_2.\beta_2 + x_4[\lambda_1(\alpha_4 - \beta_{4,1}) + \lambda_2(\alpha_4 - \beta_{4,2})]$.

Se obtiene $\alpha = 0$.

A continuación veamos qué pasos habría que seguir para calcular α utilizando las hipótesis H_2.

Primer paso

Resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y calcular : $\beta_1 = 1.z_1^1 + 0.z_2^1 + 0.z_3^1$, $\beta_2 = 1.z_1^2 + 0.z_2^2 + 0.z_3^2$.

Se obtiene :

$$\begin{bmatrix} z_1^1 \\ z_2^1 \\ z_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 8/3 \\ 13/3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} z_1^2 \\ z_2^2 \\ z_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 9/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\beta_1 = 4/3$, $\beta_2 = -2/5$.

Segundo paso

Resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ y_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ y_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y calcular

$$\hat{\beta}_1 = 1.y_1^1 + 0.y_2^1 + 0.y_3^1$$

$$\hat{\beta}_2 = 1.y_1^2 + 0.y_2^2 + 0.y_3^2.$$

Se obtiene :

$$\begin{bmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ y_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 2/3 \\ 13/3 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ y_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -1/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\hat{\beta}_1 = 7/3$, $\hat{\beta}_2 = 3/5$.

Tercer paso

Calcular $$\lambda_1 = \frac{3/5 - 1}{3/5 - 7/3}$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1.$$

Se obtiene $\lambda_1 = 3/13$, $\lambda_2 = 10/13$.

Cuarto paso

Calcular $\alpha = \lambda_1.\beta_1 + \lambda_2.\beta_2$. Resulta $\alpha = 0$.

b) Calculemos ahora la solución del sistema (2.24). En este caso utilizando el hecho de que:

i) la matriz de coeficientes del sistema (2.24) es regular

ii) la matriz

$$A_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$ es regular,

se procedería así:

Primer paso

Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y calcular $\gamma_3 = 3.z_1 - 1.z_2$, $\gamma_4 = -1.z_1 + 2.z_2$.

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\gamma_3 = -16$, $\gamma_4 = 17$.

Segundo paso

Resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1^4 \\ y_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y calcular

$$Y_{3,3} = 3.y_1^3 - 1.y_2^3$$

$$Y_{3,4} = 3.y_1^4 - 1.y_2^4$$

$$Y_{4,3} = -1.y_1^3 + 2.y_2^3$$

$$Y_{4,4} = -1.y_1^4 + 2.y_2^4 .$$

Se obtiene:

$$\begin{bmatrix} y_1^3 \\ y_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} y_1^4 \\ y_2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Y_{3,3} = -4, \quad Y_{3,4} = -11, \quad Y_{4,3} = 3, \quad Y_{4,4} = 12.$$

Tercer paso

Resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 13 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -13 \end{bmatrix} .$$

Se obtiene

$$[x_3, x_4] = [0, 1] .$$

Cuarto paso

Calcular

$$x_1 = z_1 - x_3 \cdot y_1^3 - x_4 \cdot y_2^3$$

$$x_2 = z_2 - x_3 \cdot y_1^4 - x_4 \cdot y_2^4 .$$

Se obtiene $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.
Por tanto la solución de (2.24) es el vector

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

NOTA .- No es este el único método que nos permite calcular la solución del sistema (2.24). Por ejemplo, utilizando que

i) la matriz de coeficientes del sistema (2.24) es regular

ii) las matrices

$$A_{3,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{3,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

son regulares

iii) y que se verifica

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 , \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

se pueden resolver tres problemas en los que se calculen, respectivamente, $\alpha = x_1$, $\alpha = x_2$ y $\alpha = x_3$. Como el valor de x_4 se calcularía en cualquiera de esos problemas, se obtendría así la solución de (2.24).

CAPITULO III

ALGORITMOS DE INTERPOLACION Y METODOS DE EXTRAPOLACION

CAPITULO III

ALGORITMOS DE INTERPOLACION Y METODOS DE EXTRAPOLACION

1. INTRODUCCION

La fórmula general de interpolación por recurrencia (0.36), que fue obtenida en [10] y [21] por aplicación de la Identidad de Sylvester generalizada, permite calcular la solución de un problema de interpolación lineal general utilizando s soluciones de otros problemas análogos con menos datos.

Aquélla es una reformulación de (0.11), y coincide con ésta en los casos particulares más importantes, $s = 1$ y $s = m+1$. Por tanto ambas fórmulas, usadas reiteradamente en los casos $s = 1$ y $s = m+1$, nos conducen de manera natural a la obtención de los mismos algoritmos de interpolación. Como además (0.11) ha sido obtenida en el capítulo II por técnicas de resolución de sistemas lineales, aquellos algoritmos equivalen al empleo reiterado de las técnicas de resolución de sistemas lineales vistas en el capítulo anterior.

Estas razones y el que en [10] y [21] no se llegaron a obtener los algoritmos específicos para la construcción por recurrencia de la solución de un determinado problema, nos llevan a obtener en este capítulo los algoritmos correspondientes a los casos más frecuentes y a estudiar el efecto que producen sus correspondientes técnicas de resolución de sistemas cuando se emplean reiteradamente.

Consideremos de nuevo el problema general de interpolación lineal finita:

(3.1) Sea $W(K)$ un espacio vectorial sobre un cuerpo K conmutativo y de característica cero. Consideremos

$$\mathcal{L}_{n+m} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{n+m} \} \qquad n,m \in N$$

un conjunto de formas lineales sobre $W(K)$, y el subespacio vectorial $V_{n+m}(K)$ de $W(K)$, de dimensión finita $n+m$, del que supondremos que $\{ \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{n+m} \}$ es base.

Dado el elemento $f \in W(K)$, hallar $p_{n+m} \in V_{n+m}(K)$ tal que

$$L_i(p_{n+m}) = L_i(f) = z_i \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n+m.$$

Si en relación al problema planteado se verifica que:

a) $$\det \left(L_i(\phi_j) \right)_{i,j=1,2,\ldots,n+m} \neq 0 \qquad (3.2)$$

b) Existe un subconjunto $\mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+m}$, $\text{card}(\mathcal{L}_n) = n$, tal que

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1, & \phi_2, & \ldots, & \phi_n \\ & \mathcal{L}_n & & \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (3.3)$$

entonces, estamos en condiciones de aplicar la fórmula (0.36) para calcular la solución p_{n+m} de (3.1). Según dicha fórmula, p_{n+m} se puede expresar como sigue:

$$(3.4)\quad p_{n+m}=\frac{(-1)^m\begin{vmatrix} r_n^{n+1} & L_{i_1}(r_n^{n+1}) & L_{i_2}(r_n^{n+1}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+1}) \\ r_n^{n+2} & L_{i_1}(r_n^{n+2}) & L_{i_2}(r_n^{n+2}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n^{n+m} & L_{i_1}(r_n^{n+m}) & L_{i_2}(r_n^{n+m}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+m}) \\ p_n, & -z_{i_1}+L_{i_1}(p_n), & -z_{i_2}+L_{i_2}(p_n), & \dots, & -z_{i_m}+L_{i_m}(p_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{i_1}(r_n^{n+1}) & L_{i_2}(r_n^{n+1}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+1}) \\ L_{i_1}(r_n^{n+2}) & L_{i_2}(r_n^{n+2}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{i_1}(r_n^{n+m}) & L_{i_2}(r_n^{n+m}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix}}$$

donde las formas lineales $L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_m}$ constituyen el conjunto

$$\{ L_{i_1}, L_{i_2}, \dots, L_{i_m} \} = \mathcal{L}_{n+m} - \mathcal{L}_n .$$

De (3.4) y teniendo en cuenta la identidad

$$(3.5)\quad f.\begin{vmatrix} L_{i_1}(r_n^{n+1}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+1}) \\ L_{i_1}(r_n^{n+2}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{i_1}(r_n^{n+m}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix} = (-1)^m.\begin{vmatrix} r_n^{n+1} & L_{i_1}(r_n^{n+1}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+1}) \\ r_n^{n+2} & L_{i_1}(r_n^{n+2}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_n^{n+m} & L_{i_1}(r_n^{n+m}) & \dots & L_{i_m}(r_n^{n+m}) \\ f & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

se obtiene que

$$r_{n+m} = f - p_{n+m} = (-1)^m \cdot \begin{vmatrix} r_n & L_{\ell_1}(r_n) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n) \\ r_n^{n+1} & L_{\ell_1}(r_n^{n+1}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n^{n+1}) \\ r_n^{n+2} & L_{\ell_1}(r_n^{n+2}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_n^{n+m} & L_{\ell_1}(r_n^{n+m}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} L_{\ell_1}(r_n^{n+1}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n^{n+1}) \\ L_{\ell_1}(r_n^{n+2}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n^{n+2}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{\ell_1}(r_n^{n+m}) & \cdots & L_{\ell_m}(r_n^{n+m}) \end{vmatrix} \tag{3.6}$$

Observemos que (3.4) construye la solución del problema (3.1) utilizando la solución de otro problema análogo cuyos datos vienen dados por el subconjunto de formas lineales $\mathcal{L}_n$ de $\mathcal{L}_{n+m}$. Esto nos permite obtener, si contáramos con las hipótesis adecuadas, la solución p_{n+m} de nuestro problema mediante un proceso recurrente en el que, en cada paso, se consigue interpolar en m datos más del total.

Nótese que los restos que aparecen en (3.4) se pueden obtener también de forma recurrente utilizando (3.6). Así pues, conjugando (3.4) y (3.6), y dependiendo del valor de m que se elija obtendremos algoritmos para construir por recurrencia la solución de (3.1).

Otro tipo de hipótesis que podría verificar el problema (3.1) son las siguientes:

a) $$\det\left(L_i(\phi_j) \right)_{i,j=1,2,\ldots,n+m} \neq 0 \qquad (3.7)$$

b) Existen $m+1$ subconjuntos distintos $\mathcal{L}_{n,l} \subset \mathcal{L}_{n+m}$, $i = 1, 2, \ldots, n+m$, $\operatorname{card}(\mathcal{L}_{r,l}) = n$ $\forall l$, que verifican

$$(3.8) \quad \begin{cases} \det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ \mathcal{L}_{n,l} \end{pmatrix} \neq 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, m+1 \\ \operatorname{card}\left(\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1} \right) = n-1, \ i = 1, \ldots, m \\ \operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} \mathcal{L}_{n,i} \right) = n+m \end{cases}$$

c) Para una forma lineal L sobre $W(K)$ se tiene

$$(3.9) \qquad \det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_n \\ (\mathcal{L}_{n,i} \cap \mathcal{L}_{n,i+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0 \ , \ i = 1, \ldots, m.$$

En estas condiciones conocemos que el valor de la forma lineal L sobre la solución p_{n+m} de (3.1) se puede calcular mediante la fórmula (0.37).

Así tenemos que

$$(3.10)\quad L(p_{n+m}) = \frac{\begin{vmatrix} L(r_{n,1}^{n+1}) & L(r_{n,2}^{n+1}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L(r_{n,1}^{n+m}) & L(r_{n,2}^{n+m}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+m}) \\ L(p_{n,1}) & L(p_{n,2}) & \dots & L(p_{n,m+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L(r_{n,1}^{n+1}) & L(r_{n,2}^{n+1}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L(r_{n,1}^{n+m}) & L(r_{n,2}^{n+m}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+m}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} .$$

De (3.10) se deduce que

$$(3.11)\quad L(r_{n+m}) = \frac{\begin{vmatrix} L(r_{n,1}^{n+1}) & L(r_{n,2}^{n+1}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L(r_{n,1}^{n+m}) & L(r_{n,2}^{n+m}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+m}) \\ L(r_{n,1}) & L(r_{n,2}) & \dots & L(r_{n,m+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L(r_{n,1}^{n+1}) & L(r_{n,2}^{n+1}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L(r_{n,1}^{n+m}) & L(r_{n,2}^{n+m}) & \dots & L(r_{n,m+1}^{n+m}) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}} .$$

Por razones análogas a las que se expusieron anteriormente, el valor de la forma lineal L sobre la solución de (3.1)

puede obtenerse mediante un proceso recurrente utilizando para ello (3.10) y (3.11). En este caso los distintos algoritmos resultarán de los valores de m y de las diversas maneras en que se pueden elegir los paquetes de formas lineales $\mathcal{L}_{n,1}, \mathcal{L}_{n,2}, \ldots, \mathcal{L}_{n,m+1}$.

Veamos ahora estas mismas ideas desde el punto de vista del capítulo II, es decir, de la resolución de sistemas lineales.

Consideremos el sistema lineal asociado al problema general de interpolación que estamos tratando, pero para simplificar escribámoslo con n en lugar de $n+m$

$$(3.12)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j . L_i(\phi_j) = L_i(f) \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \\ \sum_{j=1}^{n} x_j . L(\phi_j) - L(p_n) = 0. \end{cases}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} L_1(\phi_1) & L_1(\phi_2) & \ldots & L_1(\phi_n) \\ L_2(\phi_1) & L_2(\phi_2) & \ldots & L_2(\phi_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_n(\phi_1) & L_n(\phi_2) & \ldots & L_n(\phi_n) \end{bmatrix}$$

la matriz de coeficientes del sistema formado por las n primeras ecuaciones de (3.12).

(3.13) Supongamos que todos los determinantes formados con las $n_1, n_2, \ldots, n_q = n$, $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_q$, primeras columnas de la matriz A son distintos de cero.

Formemos $n - n_1 + 1$ subconjuntos de n_1 elementos de

$$\mathcal{L}_n = \{ L_1, L_2, \ldots, L_n \}$$

que llamamos $\mathcal{L}_{n_1,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n-n_1+1$, de forma que su unión sea $\mathcal{L}_n$.

Como ya sabemos, el sistema (3.12) es equivalente a la unión de los $n-n_1+1$ sistemas

$$k = 1,2,\ldots,n-n_1+1 \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j . L_i(\xi_j) = L_i(f), \quad \forall L_i \in \mathcal{L}_{n_1,k} \\ \sum_{j=1}^{n} x_j . L(\xi_j) - L(p_n) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Aplicando el método de Gauss por bloques usando como pivote en (3.14) las n_1 primeras filas y columnas, la última ecuación queda

$$\sum_{j=n_1+1}^{n} x_j . L(r^j_{n_1,k}) - L(p_n) = -L(p_{n_1,k}), \quad k=1,2,\ldots,n-n_1+1 \tag{3.15}$$

con las notaciones ya habituales.

Se toman ahora $n-n_2+1$ subconjuntos $\mathcal{L}_{n_2,k}$ ($k=1,2,\ldots,n-n_2+1$) tales que

$$\mathcal{L}_{n_2,k} = \bigcup_{j=1}^{n_2-n_1+1} \mathcal{L}_{n_1,j,k} \ ,$$

donde los $\mathcal{L}_{n_1,j,k}$ son elegidos entre los $\mathcal{L}_{n_1,h}$ ($h=1,2,\ldots,n-n_1+1$) de forma que se verifiquen las siguientes condiciones:

$$(3.16)\quad \begin{cases} \operatorname{card}(\mathcal{L}_{n_2,k}) = n_2 \\ \operatorname{card}(\mathcal{L}_{n_1,j,k} \cap \mathcal{L}_{n_1,j+1,k}) = n_1 - 1\ ,\ j = 1, \ldots, n_2 - n_1 \\ \det(L_i(\phi_j)) \neq 0,\ 1 \leq j \leq n_1\ ,\ L_i \in \mathcal{L}_{n_1,j,k} \cap \mathcal{L}_{n_1,j+1,k} \cup \{L\} \end{cases}$$

para cada $k = 1, 2, \ldots, n-n_2+1$.

Bajo estas condiciones sabemos que existen $\lambda_{n_1,1,k}, \ldots, \lambda_{n_1,n_2-n_1+1,k}$ escalares, tales que al multiplicar las igualdades (3.15) correspondientes a los $\mathcal{L}_{n_1,h}$ cuya unión sea $\mathcal{L}_{n_2,k}$ por los $\lambda_{n_1,i,k}$ y luego sumar respecto a i se tiene

$$(3.17)\quad \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,k} \sum_{j=n_2+1}^{n} x_j \cdot L(r^j_{n_1,i,k}) - L(p_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,k} \cdot L(p_{n_1,i,k})\ .$$

Pero en este caso además se verifica

$$(3.18)\quad \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,k} \cdot L(p_{n_1,i,k}) = L(p_{n_2,k})$$

y

$$(3.19)\quad \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,k} \cdot L(p^j_{n_1,i,k}) = L(p^j_{n_2,k})\ ,\ j = n_2+1, \ldots, n$$

donde naturalmente $p_{n_2,k}$ es el elemento de $V_{n_2} = \{\phi_1, \ldots, \phi_{n_2}\}$ tal que

$$(3.20)\quad L_i(p_{n_2,k}) = L_i(f)\ ,\quad L_i \in \mathcal{L}_{n_2,k}$$

y análogamente $p^j_{n_2,k}$ con segundo miembro $L_1(\phi_j)$.

Como por otra parte los $\lambda_{n_1,1,k}, \ldots, \lambda_{n_1,n_2-n_1+1,k}$ son la única solución de

$$(3.21)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,k} = 1 \\ \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,k} \cdot L(r^i_{n_1,i,k}) = 0, \quad s = n_1+1, \ldots, n_2 \end{cases}$$

entonces, de la primera ecuación de (3.21) y de (3.19), también se tiene

$$(3.22)\quad \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,1,k} \cdot L(r^j_{n_1,1,k}) = L(r^j_{n_2,k}), \quad j = n_2+1, \ldots, n.$$

Teniendo todo esto en cuenta en (3.17) se llega a

$$(3.23)\quad \sum_{j=n_2+1}^{n} x_j \cdot L(r^j_{n_2,k}) - L(p_n) = - L(p_{n_2,k}), \quad k=1,2,\ldots,n-n_2+1.$$

Estamos de nuevo en una situación similar a (3.15) y por tanto podemos reiterar el proceso eligiendo

$$(3.24)\quad \mathcal{L}_{n_3,k} = \bigcup_{j=1}^{n_3-n_2+1} \mathcal{L}_{n_2,j,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-n_3+1$$

con condiciones análogas a las (3.16) y así sucesivamente.
Al final tendríamos $n-n_{q-1}+1$ expresiones del tipo (3.23) en las que n_{q-1} reemplaza a n_2

$$(3.25)\qquad \sum_{j=n_{q-1}+1}^{n} x_j \cdot L(r^j_{n_{q-1},k}) - L(p_n) = -L(p_{n_{q-1},k}),$$

$k = 1, 2, \ldots, n-n_{q-1}+1.$

Por último, formando $\mathcal{L}_{n_q,1} = \mathcal{L}_n$ si es posible a partir de los $\mathcal{L}_{n_{q-1},k}$ como unión de todos ellos verificándose condiciones similares a las (3.16), multiplicando las igualdades (3.25) por los $\lambda_{n_{q-1},k,1}$ correspondientes y sumando, obtenemos

$$(3.26)\qquad -L(p_n) = -\sum_{i=1}^{n-n_{q-1}+1} \lambda_{n_{q-1},i,1} \cdot L(p_{n_{q-1},i,1}) \quad (= L(p_{n_q,1})).$$

Así pues, a lo largo del proceso los segundos miembros de las igualdades van constituyendo la siguiente tabla

$$(3.27)\qquad \begin{array}{c|c|c|c|c} L(p_{n_1,1}) & L(p_{n_2,1}) & & L(p_{n_{q-1},1}) & \\ L(p_{n_1,2}) & L(p_{n_2,2}) & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & L(p_{n_q,1}) \\ L(p_{n_1,n-n_1+1}) & L(p_{n_2,n-n_2+1}) & & L(p_{n_{q-1},n-n_{q-1}+1}) & -L(p_n) \end{array}$$

en la que partiendo de los valores

$$L(p_{n_1,1}),\ L(p_{n_1,2}),\ \ldots\ldots,\ L(p_{n_1,n-n_1+1})$$

y

$$L(p^{\ell}_{n_1,1}),\ L(p^{\ell}_{n_1,2}),\ \ldots,\ L(p^{\ell}_{n_1,n-n_1+1})\ ,\quad \ell = n_1+1,\ \ldots,n_2$$

se calculan los restantes.

A.f, por ejemplo, $L(p_{n_2,1})$ es igual a

$$L(p_{n_2,1}) = \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,1}\cdot L(p_{n_1,i,1})\ ,$$

que habrá resultado al multiplicar las igualdades (3.15) correspondientes a los $\mathcal{L}_{n_1,k}$ cuya unión sea $\mathcal{L}_{n_2,1}$ por los $\lambda_{n_1,i,1}$ solución del sistema

$$(3.28)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,1} = 1 \\ \\ \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,1}\cdot L(r^{\ell}_{n_1,i,1}) = 0,\quad \ell = n_1+1,\ \ldots,\ n_2 \end{cases}$$

y después sumar.

Los coeficientes $L(r^{\ell}_{n_1,i,1})$ pueden calcularse mediante

$$(3.29)\quad L(r^{\ell}_{n_1,i,1}) = L(\ldots) - L(p^{\ell}_{n_1,i,1}).$$

A la vez que se calcula $L(p_{n_2,1})$ se pueden calcular los $L(r^{\ell}_{n_2,1})$ mediante

$$(3.30)\quad L(r^{\ell}_{n_2,1}) = \sum_{i=1}^{n_2-n_1+1} \lambda_{n_1,i,1}\cdot L(r^{\ell}_{n_1,i,1})$$

por (3.22), para ser usados en nuevos sistemas (3.28) con n_2 y n_3 en lugar de n_1 y n_2, y así sucesivamente.

Obsérvese que después de la hipótesis inicial sobre la no anulación de todos los determinantes de las n_1, n_2, ..., n_q primeras columnas, ha habido otras del tipo (3.16) respecto a la elección de los $\ell_{n_i,k}$ que hay que tratar de conseguir con la estrategia adecuada. Todas esas hipótesis nos han permitido ir eliminando las x_i para llegar al final a $L(p_n)$ sin calcular aquéllas explícitamente.

Naturalmente, también es posible ir eliminando con la idea del método de Newton. Por ejemplo, si para $1 \leq t \leq u \leq n$ se tiene

$$(3.31) \qquad \det(L_i(\xi_j)) \neq 0$$

para $1 \leq i,j \leq t$ y para $1 \leq i,j \leq u$, el método de Gauss por bloques, usando como pivote $\det(L_i(\xi_j))$, $1 \leq i,j \leq t$, deja el sistema (3.12) en la forma

$$(3.32) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j . L_i(\xi_j) = L_i(f) , & i = 1, \ldots, t \\ \sum_{j=t+1}^{n} x_j . L_i(r_t^j) = L_i(r_t) , & i = t+1, \ldots, n \\ \sum_{j=t+1}^{n} x_j . L(r_t^j) - L(p_n) = -L(p_t) . \end{cases}$$

De la no anulación de $\det(L_i(\xi_j))$, $1 \leq i,j \leq u$, se deduce que en (3.32) se verifica

$$(3.33) \qquad \det (L_i(r_t^j)) \neq 0, \quad t+1 \leq i,j \leq u$$

por lo que, usando como pivote (3.33), podremos eliminar en los dos últimos bloques de ecuaciones (3.32) $x_{t+1}, \ldots, x_u$, quedando

$$(3.34)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j . L_i(\phi_j) = L_i(f) \quad i = 1, \ldots, t \\ \sum_{j=t+1}^{n} x_j . L_i(r_t^j) = L_i(r_t) \qquad i = t+1, \ldots, u \\ \sum_{j=u+1}^{n} x_j . L_i(r_u^j) = L_i(r_u) \qquad i = u+1, \ldots, n \\ \sum_{j=u+1}^{n} x_j . L(r_u^j) - L(p_n) = - L(p_u) \end{cases}$$

ya que, por ejemplo, se tiene

$$\left[r_t^{u+1}, r_t^{u+2}, \ldots, r_t^n\right] - \left[r_t^{t+1}, \ldots, r_t^u\right] \cdot \begin{bmatrix} L_{t+1}(r_t^{t+1}) & \ldots & L_{t+1}(r_t^u) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_u(r_t^{t+1}) & \ldots & L_u(r_t^u) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} L_{t+1}(r_t^{u+1}) & \ldots & L_{t+1}(r_t^n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L_u(r_t^{u+1}) & \ldots & L_u(r_t^n) \end{bmatrix}$$

$$= \left[r_u^{u+1}, \ldots, r_u^n\right].$$

En efecto, se comprueba inmediatamente que el j-ésimo elemento de cada miembro es $\phi_{u+j} - p_u^{u+j}$ ya que es la diferencia entre ϕ_{u+j} y una combinación lineal de $\phi_1, \ldots, \phi_u$, que al aplicarle $L_1, L_2, \ldots, L_u$ da siempre cero.

Luego la no anulación de sucesivos determinantes $\det(L_i(\phi_j))$ para $1 \leq i,j \leq t$, para $1 \leq i,j \leq u$, etc. permite la eliminación de sucesivos bloques de términos x_j.

2. ALGORITMOS PARA LOS CASOS HABITUALES

Siguiendo con las notaciones del principio del capítulo, a continuación se dan seis algoritmos para la interpolación lineal finita y algunas de sus aplicaciones.

Algoritmo 1 (s = 1, m = 1 en el problema (3.1)).-

Eligiendo $m = 1$ en el problema de interpolación (3.1) y, si se verifica que para $k = 1, 2, \ldots, n+m=n+1$

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1, & \ldots, & \phi_k \\ L_1, & \ldots, & L_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & \ldots. & L_1(\phi_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_k(\phi_1) & \ldots. & L_k(\phi_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces, para calcular su solución $p_{n+1} \in V_{n+1}(K)$, $n+1 \geq 2$, se puede utilizar el siguiente algoritmo:

- Calcular para $k = 1, 2, \ldots, n+1$
  - Calcular para $i = 1, 2, \ldots, n+1$
    - $a_{ik} = L_i(\phi_k)$

Calcular

$$p_1 = \frac{z_1}{a_{11}} \cdot \phi_1$$

→ Calcular para $i = 2, \ldots, n+1$

$$r_1^i = \phi_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}} \cdot \phi_1$$

$$L_i(p_1) = \frac{z_1}{a_{11}} \cdot a_{i1}$$

→ Calcular para $j = 2, \ldots, n+1$

$$L_j(r_1^i) = a_{ji} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} \cdot a_{j1}$$

→ Calcular para $k = 2, \ldots, n+1$

$$p_k = \frac{z_k - L_k(p_{k-1})}{L_k(r_{k-1}^k)} \cdot r_{k-1}^k + p_{k-1}$$

Si $k \leq n$, entonces:

→ Calcular para $i = k+1, \ldots, n+1$

$$L_i(p_k) = \frac{z_k - L_k(p_{k-1})}{L_k(r_{k-1}^k)} \cdot L_i(r_{k-1}^k) + L_i(p_{k-1})$$

$$r_k^i = r_{k-1}^i - \frac{L_k(r_{k-1}^i)}{L_k(r_{k-1}^k)} \cdot r_{k-1}^k$$

→ Calcular para $j = k+1, \ldots, n+1$

$$L_j(r_k^i) = L_j(r_{k-1}^i) - \frac{L_k(r_{k-1}^i)}{L_k(r_{k-1}^k)} \cdot L_j(r_{k-1}^k)$$

Algoritmo II. (s = 1, m = 2 en el problema (3.1).):

Tomando $m = 2$ en el problema de interpolación (3.1) y cuando $n+m = n+2$ sea impar, igual a $2t+1 \geq 3$, si se verifica que

$$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{2k+1} \\ L_1, \ldots, L_{2k+1} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, t$$

entonces, para calcular la solución $p_{2t+1} \in V_{2t+1}(K)$ de (3.1) se puede utilizar el siguiente algoritmo:

→ Calcular para $i = 1, 2, \ldots, 2t+1$

→ Calcular para $j = 1, 2, \ldots, 2t+1$

$a_{ij} = L_i(\phi_j)$

Calcular

$$p_1 = \frac{z_1}{a_{11}} \cdot \phi_1$$

→ Calcular para $i = 2, \ldots, 2t+1$

$$r_1^i = c_i - \frac{a_{1i}}{a_{11}} . c_1$$

$$L_i(p_1) = \frac{z_1}{a_{11}} . a_{i1}$$

→ Calcular para $j = 2, \ldots, 2t+1$

$$L_j(r_1^i) = a_{ji} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} . a_{j1}$$

Calcular

$$D_1 = L_2(r_1^2) . L_3(r_1^3) - L_2(r_1^3) . L_3(r_1^2)$$

$$N_1 = L_2(r_1^3) . \left[L_3(p_1) - z_3 \right] - L_3(r_1^3) . \left[L_2(p_1) - z_2 \right]$$

$$M_1 = L_3(r_1^2) . \left[L_2(p_1) - z_2 \right] - L_2(r_1^2) . \left[L_3(p_1) - z_3 \right]$$

→ Calcular para $k = 1, \ldots, t$

$$p_{2k+1} = p_{2k-1} + r_{2k-1}^{2k} . \frac{N_k}{D_k} + r_{2k-1}^{2k+1} . \frac{M_k}{D_k}$$

Si $k \leq t-1$, entonces:

→ Calcular para $i = 2k+2, \ldots, 2t+1$

$$U_k^i = L_{2k}(r_{2k-1}^{2k+1}) . L_{2k+1}(r_{2k-1}^i) - L_{2k+1}(r_{2k-1}^{2k+1}) . L_{2k}(r_{2k-1}^i)$$

$$V_k^i = L_{2k+1}(r_{2k-1}^{2k}) \cdot L_{2k}(r_{2k-1}^{i}) - L_{2k}(r_{2k-1}^{2k}) \cdot L_{2k+1}(r_{2k-1}^{I})$$

$$L_j(p_{2k+1}) = L_j(p_{2k-1}) + L_j(r_{2k-1}^{2k}) \cdot \frac{N_k}{D_k} + L_j(r_{2k-1}^{2k+1}) \cdot \frac{M_k}{D_k}$$

$$r_{2k+1}^{i} = r_{2k-1}^{i} + r_{2k-1}^{2k} \cdot \frac{U_k^i}{D_k} + r_{2k-1}^{2k+1} \cdot \frac{V_k^I}{D_k}$$

Calcular para $j = 2k+2, \ldots, 2t+1$

$$L_j(r_{2k+1}^{i}) = L_j(r_{2k-1}^{i}) + L_j(r_{2k-1}^{2k}) \cdot \frac{U_k^I}{D_k} + L_j(r_{2k-1}^{2k+1}) \cdot \frac{V_k^i}{D_k}$$

Calcular

$$D_{k+1} = L_{2k+2}(r_{2k+1}^{2k+2}) \cdot L_{2k+3}(r_{2k+1}^{2k+3}) - L_{2k+2}(r_{2k+1}^{2k+3}) \cdot L_{2k+3}(r_{2k+1}^{2k+2})$$

$$N_{k+1} = L_{2k+2}(r_{2k+1}^{2k+3}) \cdot \left[L_{2k+3}(p_{2k+1}) - z_{2k+3}\right] -$$

$$- L_{2k+3}(r_{2k+1}^{2k+2}) \cdot \left[L_{2k+2}(p_{2k+1}) - z_{2k+2}\right]$$

$$M_{k+1} = L_{2k+3}(r_{2k+1}^{2k+2}) \cdot \left[L_{2k+2}(p_{2k+1}) - z_{2k+2}\right] -$$

$$- L_{2k+2}(r_{2k+1}^{2k+2}) \cdot \left[L_{2k+3}(p_{2k+1}) - z_{2k+3}\right]$$

Algoritmo III. Caso m=1 en el problema (3.1). Neville.-

Tomemos $m = 1$ en el problema de interpolación (3.1). Sea $\mathcal{L}_{n+m} = \mathcal{L}_{n+1} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{n+1} \}$ el conjunto de formas lineales que definen el problema.

Formemos los conjuntos

$$\mathcal{L}_{k,j} = \{ L_j, L_{j+1}, \ldots, L_{j+k-1} \} \tag{3.35}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n+1$, $j = 1, 2, \ldots, n-k+2$.
De esta definición se tiene que los conjuntos $\mathcal{L}_{k,1}$, que también los notaremos por $\mathcal{L}_k$, son:

$$\mathcal{L}_{k,1} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_k \} = \mathcal{L}_k, \quad k=1,2,\ldots,n+1$$

y que se verifica

$$\mathcal{L}_{k,j} = \mathcal{L}_{k-1,j} \cup \mathcal{L}_{k-1,j+1} \quad \begin{cases} k = 2, \ldots, n+1 \\ j = 1, \ldots, n-k+2 \end{cases}$$

Con estas notaciones, si los conjuntos definidos en (3.35) verifican:

a) $$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_k \\ \mathcal{L}_{k,j} \end{pmatrix} \neq 0, \quad k=1,2,\ldots,n+1, \; j=1,\ldots,n-k+2$$

$$b)\quad \det\begin{pmatrix} \phi_1, \ldots \phi_k \\ (\mathcal{L}_{k,j} \cap \mathcal{L}_{k,j+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \begin{matrix} k = 1 \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n-k+1 \end{matrix}$$

entonces, para calcular $L(p_{n+1}) = L(p_{n+1,1})$, $n+1 \geq 2$, se puede utilizar el siguiente algoritmo:

- Calcular para $j = 1, 2, \ldots, n+1$
  - $b_j = L(\phi_j)$
  - Calcular para $i = 1, 2, \ldots, n+1$
    - $a_{ij} = L_i(\phi_j)$
- Calcular para $j = 1, 2, \ldots, n+1$
  - $L(p_{1,j}) = \dfrac{z_j}{a_{j1}} . b_1$
  - Calcular para $k = 2, \ldots, n+1$
    - $L(r^k_{1,j}) = b_k - \dfrac{a_{jk} . b_1}{a_{j1}}$
- Calcular para $i = 2, \ldots, n+1$
  - Calcular para $j = 1, \ldots, n+2-i$
    - $$L(p_{i,j}) = \frac{L(p_{i-1,j+1}) . L(r^i_{i-1,j}) - L(p_{i-1,j}) . L(r^i_{i-1,j+1})}{L(r^i_{i-1,j}) - L(r^i_{i-1,j+1})}$$

Si $i \leq n$, entonces:

Calcular para $k = i+1, \ldots, n+1$

$$L(r^k_{i,j}) = \frac{L(r^i_{i-1,j}).L(r^k_{i-1,j+1}) - L(r^i_{i-1,j+1}).L(r^k_{i-1,j})}{L(r^i_{i-1,j}) - L(r^i_{i-1,j+1})}$$

Algoritmo IV. ($s = n+1$, $m = 1$ en el problema (3.1). Aitken.):

Tomemos $m = 1$ en el problema de interpolación (3.1). Sea $\mathcal{L}_{n+m} = \mathcal{L}_{n+1} = \{L_1, L_2, \ldots, L_{n+1}\}$ el conjunto de formas lineales asociadas a este problema.

Formemos los conjuntos

$$(3.36) \quad \begin{cases} \mathcal{L}_{1,j} = \{L_j\}, & j = 1, 2, \ldots, n+1 \\ \mathcal{L}_{k,j} = \{L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}, L_{k+j-1}\} & k = 2, \ldots, n+1 \\ & j = 1, \ldots, n-k+2 \end{cases}$$

Según (3.36), se tiene que

$$\mathcal{L}_{k,1} = \{L_1, \ldots, L_k\} = \mathcal{L}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n+1$$

$$\mathcal{L}_{k,j} = \mathcal{L}_{k-1,1} \cup \mathcal{L}_{k-1,j+1}, \quad \begin{cases} k = 2, \ldots, n+1 \\ j = 1, \ldots, n-k+1 \end{cases}$$

Si para estos conjuntos se verificara que:

a) $\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_k \\ \mathcal{L}_{k,j} \end{pmatrix} \neq 0, \quad k=1,\ldots,n+1, \quad j=1,\ldots,n-k+2$

b) $\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots\ldots, \phi_k \\ (\mathcal{L}_{k,j} \quad \mathcal{L}_{k,j+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \begin{matrix} k = 2, \ldots, n+1 \\ j = 1, \ldots, n-k+1 \end{matrix}$

entonces, se puede calcular $L(p_{n+1}) = L(p_{n+1,1})$, $n+1 \geq 2$, mediante el siguiente algoritmo:

- Calcular para $j = 1, 2, \ldots, n+1$
  - $b_j = L(\phi_j)$
  - Calcular para $i = 1, 2, \ldots, n+1$
    - $a_{ij} = L_i(\phi_j)$
- Calcular para $j = 1, 2, \ldots, n+1$
  - $L(p_{1,j}) = \frac{z_j}{a_{j1}} . b_1$
  - Calcular para $k = 2, \ldots, n+1$
    - $L(r^k_{1,j}) = b_k - \frac{a_{jk}}{a_{j1}} . b_1$
- Calcular para $i = 2, \ldots, n+1$
  - Calcular para $j = 1, \ldots, n+2-i$

$$L(p_{i,j}) = \frac{L(p_{i-1,j+1}) . L(r^i_{i-1,1}) - L(p_{i-1,1}) . L(r^i_{i-1,j+1})}{L(r^i_{i-1,1}) - L(r^i_{i-1,j+1})}$$

  Si $i \leq n$, entonces :

  - Calcular para $k = i+1, \ldots, n+1$

$$L(r^k_{i,j}) = \frac{L(r^k_{i-1,j+1}) . L(r^i_{i-1,1}) - L(r^k_{i-1,1}) . L(r^i_{i-1,j+1})}{L(r^i_{i-1,1}) - L(r^i_{i-1,j+1})}$$

Algoritmo V. (s = n+1, m = 2 en el problema (3.1). Neville).-

Tomemos $m = 2$ en el problema (3.1) y supongamos que el número de datos $n+m = n+2$ sea impar

$$n+m = n+2 = 2t+1 \geq 3.$$

Sea, por tanto,

$$\mathcal{L}_{n+m} = \mathcal{L}_{2t+1} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{2t+1} \}$$

el conjunto de formas lineales asociado al problema.
Para $k = 0, 1, \ldots, t$, $j = 1, 2, \ldots, 2t+1-2k$, formemos los conjutos

$$(3.37) \qquad \mathcal{L}_{2k+1,j} = \{ L_j, L_{j+1}, \ldots, L_{j+2k} \} .$$

Así se tiene

$$\mathcal{L}_{2k+1,1} = \mathcal{L}_{2k+1} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{2k+1} \} , \quad k = 0, 1, \ldots, t$$

$$\mathcal{L}_{2k+1,j} = \mathcal{L}_{2k-1,j} \cup \mathcal{L}_{2k-1,j+1} \cup \mathcal{L}_{2k-1,j+2}, \begin{cases} k=1,\ldots,t \\ j=1,\ldots,2t+1-2k \end{cases}$$

Con estas notaciones, bajo las hipótesis:

a) $$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{2k+1} \\ \mathcal{L}_{2k+1,j} \end{pmatrix} \neq 0, \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots, t \\ j = 1, 2, \ldots, 2t+1-2k \end{matrix}$$

b) $$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{2k+1} \\ (\mathcal{L}_{2k+1,j} \cap \mathcal{L}_{2k+1,j+1}) \cup \{L\} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \begin{matrix} k = 1, \ldots, t-1 \\ j = 1, \ldots, 2t-2k \end{matrix}$$

se puede calcular recurrentemente el valor $L(p_{2t+1}) = L(p_{2t+1,1})$ utilizando el siguiente algoritmo:

Calcular para $j = 1, 2, \ldots, 2t+1$

$b_j = L(\phi_j)$

Calcular para $i = 1, 2, \ldots, 2t+1$

$a_{ij} = L_i(\phi_j)$

Calcular para $j = 1, 2, \ldots, 2t+1$

$L(r_{1,j}) = \frac{z_j}{a_{j1}} \cdot b_1$

Calcular para $k = 2, 3, \ldots, 2t+1$

$L(r^k_{1,j}) = b_k - \frac{a_{jk}}{a_{j1}} \cdot b_1$

Calcular para $j = 1, \ldots, 2t-1$

$N_{1,j} = L(r^2_{1,j+1}) \cdot L(r^3_{1,j+2}) - L(r^3_{1,j+1}) \cdot L(r^2_{1,j+2})$

$M_{1,j} = L(r^3_{1,j}) \cdot L(r^2_{1,j+2}) - L(r^2_{1,j}) \cdot L(r^3_{1,j+2})$

$\tilde{N}_{1,j} = L(r^2_{1,j}) \cdot L(r^3_{1,j+1}) - L(r^3_{1,j}) \cdot L(r^2_{1,j+1})$

$D_{1,j} = L(r^2_{1,j}) \cdot \left[L(r^3_{1,j+1}) - L(r^3_{1,j+2})\right] + L(r^2_{1,j+1}) \cdot \left[L(r^3_{1,j+2}) - L(r^3_{1,j})\right] + L(r^2_{1,j+2}) \cdot \left[L(r^3_{1,j}) - L(r^3_{1,j+1})\right]$

Calcular para $k = 1, \ldots, t$

Calcular para $j = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$L(p_{2k+1,j}) = L(p_{2k-1,j}) \cdot \frac{N_{k,j}}{D_{k,j}} + L(p_{2k-1,j+1}) \cdot \frac{M_{k,j}}{D_{k,j}} + L(p_{2k-1,j+2}) \cdot \frac{\tilde{N}_{k,j}}{D_{k,j}}$$

Si $k \leq t-1$, entonces:

Calcular para $i = 2k+2, \ldots, 2t+1$

Calcular para $\ell = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$L(r^i_{2k+1,\ell}) = L(r^i_{2k-1,\ell}) \cdot \frac{N_{k,\ell}}{D_{k,\ell}} + L(r^i_{2k-1,\ell+1}) \cdot \frac{M_{k,\ell}}{D_{k,\ell}} + L(r^i_{2k-1,\ell+2}) \cdot \frac{\tilde{N}_{k,\ell}}{D_{k,\ell}}$$

Calcular para $j = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$N_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,j+1}) \cdot L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j+1}) \cdot L(r^{2k+2}_{2k+1,j+2})$$

$$M_{k+1,j} = L(r^{2k+3}_{2k+1,j}) \cdot L(r^{2k+2}_{2k+1,j+2}) - L(r^{2k+2}_{2k+1,j}) \cdot L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2})$$

$$\tilde{N}_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,j}) \cdot L(r^{2k+3}_{2k+1,j+1}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j}) \cdot L(r^{2k+2}_{2k+1,j+1})$$

$$D_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,j}) \cdot \left[L(r^{2k+3}_{2k+1,j+1}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) \right] +$$

$$L(r^{2k+2}_{2k+1,j+1}) \cdot \left[L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j}) \right] +$$

$$L(r^{2k+2}_{2k+1,j+2}) \cdot \left[L(r^{2k+3}_{2k+1,j}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j+1}) \right]$$

Algoritmo VI (s = m+1, m ≥ 2 en el problema (3.1), Aitken).-

Tomemos $m = 2$ en el problema (3.1) y supongamos que el número de datos $n+m = n+2$ sea impar

$$n+m = n+2 = 2t+1 \geq 3.$$

Sea $\mathcal{L}_{n+m} = \mathcal{L}_{2t+1} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{2t+1} \}$ el conjunto de formas lineales asociado al problema.

Formemos los conjuntos:

$$\mathcal{L}_{1,j} = \{ L_j \} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, 2t+1$$

$$\mathcal{L}_{2k+1,j} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{2k}, L_{2k+j} \} \quad \begin{matrix} k=1,2,\ldots,t \\ j=1,\ldots,2t+1-2k. \end{matrix}$$

Así, se tiene que para $k = 1, \ldots, t$ y $j = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$\mathcal{L}_{2k+1,\ j} = \mathcal{L}_{2k-1,1} \cup \mathcal{L}_{2k-1,2} \cup \mathcal{L}_{2k-1,j+2}$$

y que

$$\mathcal{L}_{2k-1,1} = \mathcal{L}_{2k+1} = \{ L_1, L_2, \ldots, L_{2k+1} \} \ .$$

Si se verifica que:

a) $$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots, \phi_{2k+1} \\ \mathcal{L}_{2k+1,j} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots, t \\ j = 1, \ldots, 2t+1-2k \end{matrix}$$

b) $$\det \begin{pmatrix} \phi_1, \ldots\ldots, \phi_{2k+1} \\ L_1, \ldots, L_{2k}, L \end{pmatrix} \neq 0, \quad k = 1, \ldots, t-1.$$

entonces, el valor $L(p_{2t+1})$ se puede calcular mediante el

siguiente algoritmo:

- Calcular para $j = 1, 2, \ldots, 2t+1$
  - $b_j = L(\phi_j)$
  - Calcular para $i = 1, 2, \ldots, 2t+1$
    - $a_{ij} = L_i(\phi_j)$
- Calcular para $j = 1, 2, \ldots, 2t+1$
  - $L(p_{1,j}) = \frac{z_j}{a_{j1}} . b_1$
  - Calcular para $k = 2, 3, \ldots, 2t+1$
    - $L(r^k_{1,j}) = b_k - \frac{a_{jk}}{a_{j1}} . b_1$
- Calcular para $j = 1, \ldots, 2t-1$

$$N_{1,j} = L(r^2_{1,2}) . L(r^3_{1,j+2}) - L(r^3_{1,2}) . L(r^2_{1,j+2})$$

$$M_{1,j} = L(r^2_{1,j+2}) . L(r^3_{1,1}) - L(r^3_{1,j+2}) . L(r^2_{1,1})$$

$$N_{1,j} = L(r^2_{1,1}) . L(r^3_{1,2}) - L(r^3_{1,1}) . L(r^2_{1,2})$$

$$D_{1,j} = L(r^2_{1,1}) . \left[L(r^3_{1,2}) - L(r^3_{1,j+2}) \right] + L(r^2_{1,2}) . \left[L(r^3_{1,j+2}) - L(r^3_{1,1}) \right] + L(r^2_{1,j+2}) . \left[L(r^3_{1,1}) - L(r^3_{1,2}) \right]$$

Calcular para $k = 1, \ldots, t$

Calcular para $j = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$L(p_{2k+1,j}) = L(p_{2k-1,1}) \cdot \frac{N_{k,j}}{D_{k,j}} + L(p_{2k-1,2}) \cdot \frac{M_{k,j}}{D_{k,j}} + L(p_{2k-1,j+2}) \cdot \frac{\hat{N}_{k,j}}{D_{k,j}}$$

Si $k < t-1$, entonces:

Calcular para $i = 2k+2, \ldots, 2t+1$

Calcular para $j = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$L(r^{i}_{2k+1,j}) = L(r^{i}_{2k-1,1}) \cdot \frac{N_{k,j}}{D_{k,j}} + L(r^{i}_{2k-1,2}) \cdot \frac{M_{k,j}}{D_{k,j}} + L(r^{i}_{2k-1,j+2}) \cdot \frac{\hat{N}_{k,j}}{D_{k,j}}$$

Calcular para $j = 1, \ldots, 2t+1-2k$

$$N_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,2}) \cdot L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,2}) \cdot L(r^{2k+2}_{2k+1,j+2})$$

$$M_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,j+2}) \cdot L(r^{2k+3}_{2k+1,1}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) \cdot L(r^{2k+2}_{2k+1,1})$$

$$\hat{N}_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,1}) \cdot L(r^{2k+3}_{2k+1,2}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,1}) \cdot L(r^{2k+2}_{2k+1,2})$$

$$D_{k+1,j} = L(r^{2k+2}_{2k+1,1}) \cdot \left[L(r^{2k+3}_{2k+1,2}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) \right] + L(r^{2k+2}_{2k+1,2}) \cdot \left[L(r^{2k+3}_{2k+1,j+2}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,1}) \right] + L(r^{2k+2}_{2k+1,j+2}) \cdot \left[L(r^{2k+3}_{2k+1,1}) - L(r^{2k+3}_{2k+1,2}) \right]$$

Nota.- Los algoritmos I y III han sido descritos por Mühlbach como teoremas (3.6) y (3.7) de [33] .

Veamos algunos ejemplos de aplicación de estos algoritmos.

Ejemplo 3.1.-

Consideremos una red rectangular de lados paralelos a los ejes de coordenadas, de $(n+1)x(m+1)$ puntos de $\mathbb{R}^2$:

$$S = \{(x_i,y_j) \;/\; i=0,1,\ldots,n \;;\; j=0,1,\ldots,m\} \quad .$$

El problema de interpolación de encontrar p tal que

$$p(X) = f(X) \qquad \forall X \in S$$

donde f es una función dada, es unisolvente en el espacio $Q_{n,m}$ de polinomios de grado no mayor que n en x y no mayor que m en y.

Para calcular la solución de este problema se puede utilizar el Algoritmo I (ver programa en el Apéndice), y para ello se deberá tomar:

- como base $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{(n+1)x(m+1)}\}$ de $Q_{n,m}$ los elementos

$$\phi_k = x^i.y^j \quad \text{para} \quad k = i+1+j.(n+1) \qquad \begin{matrix} i=0,1,\ldots,n \\ j=0,1,\ldots,m \end{matrix}$$

- como formas lineales $\{L_1, L_2, \ldots, L_{(n+1)x(m+1)}\}$ las que se definen

$$L_k(f) = f(x_i, y_j) \text{ para } k = i+1+j.(n+1) \quad \begin{matrix} i=0,1,\ldots,n \\ j=0,1,\ldots,m \end{matrix}$$

Ejemplo 3.2 .-

El problema de interpolación trigonométrica en $P_{2n+1}(\cos x, \operatorname{sen} x)$, con datos lagrangianos en $2n+1$ puntos $x_i \in [\, a, a+2\pi \,) \subset R$, $x_i \neq x_k$ si $i \neq k$, se puede resolver aplicando el Algoritmo II (ver programa en el Apéndice).

En este caso se deberán tomar:

- como formas lineales $L_1, L_2, \ldots, L_{2n+1}$ las definidas por

$$L_i(f) = f(x_i) \ , \ i = 1, 2, \ldots, 2n+1$$

- como base $\{ \phi_1, \ldots, \phi_{2n+1} \}$ de P_{2n+1} los elementos

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= 1 \\ \phi_{2k} &= \cos kx \\ \phi_{2k+1} &= \operatorname{sen} kx \end{aligned}\right\} \ k = 1, 2, \ldots, n$$

A este mismo problema también se le pueden aplicar los Algoritmos V y VI cuando se desea calcular el valor de la solución en un punto $y \in [\, a, a+2\pi \,)$, $y \neq x_i \ \forall\, i$.

Ejemplo 3.3 .-

El problema de interpolación : hallar el elemento $p_{2n+1} \in P_{2n+1}(\cos x, \operatorname{sen} x)$ que interpola a una cierta función f en el sentido de que

$$p_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \ , \ i = 1, 2, \ldots, n+1$$

$$p'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad , \quad i = 2, \ldots, n+1$$

donde $x_i \in [a, a+2\pi)$, $i = 1, \ldots, n+1$, y $x_i \neq x_j \quad \forall\, i \neq j$, se puede resolver aplicándole el Algoritmo II (ver programa en el Apéndice).

Para ello se deberán tomar:

- como formas lineales $L_1, L_2, \ldots, L_{2n+1}$ las definidas por

$$\left.\begin{aligned} L_1(f) &= f(x_1) \\ L_{2k}(f) &= f(x_{k+1}) \\ L_{2k+1}(f) &= f'(x_{k+1}) \end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, n$$

- como base $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_{2n+1}\}$ de $P_{2n+1}(\cos x, \operatorname{sen} x)$ la siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= 1 \\ \phi_{2k} &= \cos kx \\ \phi_{2k+1} &= \operatorname{sen} kx \end{aligned}\right\} \quad k = 1, \ldots, n$$

Por otra parte, si se quisiera calcular el valor de una forma lineal L sobre la solución p_{2n+1} de este problema, cuando $2n+1 \geq 5$, se podría aplicar un algoritmo de " tipo Neville ", análogo al Algoritmo V. Para ello en lugar de tomar como conjuntos de formas lineales los definidos en (3.37) se deberán utilizar los siguientes:

$$\mathcal{L}_{3,1} = \{L_1, L_2, L_3\}$$

$$\mathcal{L}_{3,j} = \{L_i, L_{j+1}, L_{j+2}\} \begin{cases} i = j \text{ , si } j \text{ par} \\ i = j-1, \text{ si } j \text{ impar} \end{cases}$$

para $j = 1, 2, \ldots, 2n-1$; y en general

$$\mathcal{L}_{2k+1,j} = \mathcal{L}_{2k-1,j} \cup \mathcal{L}_{2k-1,j+1} \cup \mathcal{L}_{2k-1,j+2}$$

$k = 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, 2n+1-2k$. Además en el algoritmo se partirá de las soluciones de los problemas de interpolación asociados a los datos determinados por los conjuntos $\mathcal{L}_{3,j}$.

3. METODOS DE EXTRAPOLACION

En su forma más simple se conocen clásicamente por métodos de extrapolación los que a través del cálculo de $A(h)$ para varios valores de h nos permiten calcular con más precisión un valor determinado A_0 tal que

$$(3.38) \quad \lim_{h \to 0} A(h) = A_0 .$$

Sea, por ejemplo,

$$(3.39) \quad A(h) = A_0 + A_1 . h^r + A_2 . h^{2r} + \ldots + A_m . h^{mr} + h^{(m+1)r} . \alpha_{m+1}(h)$$

donde A_i es independiente de h para todo i, $r > 0$, $\alpha_{m+1}(h)$ está acotada cuando h tiende a cero.

Un método de extrapolación sería lo siguiente: seleccionamos una sucesión de pasos $F = \{ h_0, h_1, h_2, \ldots \}$ con $h_0 > h_1 > h_2 > \ldots > 0$. La idea es utilizar los valores fácilmente calculables $A(h_i)$ para obtener mediante combinaciones lineales de un número finito de ellos un valor más aproximado de A_0. Una posibilidad para hacer esto es construir esas combinaciones lineales de manera que se vayan eliminando los términos en h^r, h^{2r}, ..., etc.,

sucesivamente, y aquí es donde aparece la conexión con los problemas de interpolación, como vamos a recordar.

Llamando $z = h^r$ podemos construir el polinomio

$$(3.40) \quad p_{ik}(z) = b_0 + b_1.z + \ldots + b_k.z^k$$

que interpola a $A(h)$ en los valores

$$(3.41) \quad \{ h_j \;/\; j = i-k,\ i-k+1,\ \ldots,\ i \}$$

y después evaluarlo en $z = 0$.

Por la fórmula de interpolación de Lagrange se tiene

$$(3.42) \quad T_{ik} = p_{ik}(0) = \sum_{j=i-k}^{i} \ell_j(0).A(h_j),$$

donde los $\ell_j(x)$ son los polinomios de Lagrange de este problema de interpolación, que verifican

$$(3.43) \quad \ell_j(z_s) = \ell_j(h_s^r) = \delta_{js} \quad \text{(delta de Kronecker).}$$

Entre otras propiedades, estos polinomios también verifican

$$(3.44) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=i-k}^{i} \ell_j(0) = 1 \\ \\ \displaystyle\sum_{j=i-k}^{i} \ell_j(0).z_j^t = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, k, \end{cases}$$

y de ahí que estos números $\ell_j(0)$ sean los indicados para multiplicar por ellos los $A(h_j)$ para eliminar los términos en h^r, h^{2r}, ... h^{kr}.

Así pues, el procedimiento de ir construyendo el valor en cero de los sucesivos polinomios de interpolación permite encontrar expresiones en las que se van eliminando términos en (3.39). La forma más práctica de construir esos polinomios de interpolación suele ser el método recurrente de Aitken-Neville.

Es evidente, por tanto, que los procesos de eliminación que hemos mostrado en este capítulo pueden ser considerados como una generalización de esto, es decir, como un método general de extrapolación.

A este respecto T. Havie [15] ha utilizado la aplicación reiterada del método de eliminación sucesiva de Gauss, empleada por él en extrapolación, para obtener los resultados de Mühlbach. Aquellos resultados, [15], los obtuvimos en el apartado anterior y son el caso particular de los nuestros en que $q=n$, $n_1=1$, $n_2=2$, ..., $n_n=n$.

A continuación se calcula el valor de una integral por dos de los métodos de extrapolación vistos anteriormente.

Ejemplo 3.4.-

Se trata de calcular la integral

$$(3.45) \qquad A_0 = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^{-3/4}.(1-t)^{-1/2}dt.$$

Es decir, el valor de la función beta en (1/4,1/2).

Usaremos la aproximación obtenida de la regla del punto medio compuesta, dada por

$$(3.46) \qquad R^{[n,0]}f = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{2j-1}{2n}\right) .$$

$R^{[a,b]}_{f}$ El error cometido al aproximar A_0 mediante $R^{[a,b]}_{f}$ admite el siguiente desarrollo [*]:

$$(3.47)\quad Ef = R^{[a,b]}_{f} - A_0 = \frac{a_0}{m^{1/4}} + \frac{a_1}{m^{5/4}} + \frac{a_2}{m^{9/4}} + O(m^{-3/4})$$

$$+ \frac{b_0}{m^{1/2}} + \frac{b_1}{m^{3/2}} + \frac{b_2}{m^{5/2}} + O(m^{-7/2})$$

donde los a_i y b_i son independientes de m.

Haciendo $h = 1/m$, (3.46) se puede escribir así:

$$(3.48)\quad A(h) = h.\sum_{j=1}^{m} f\left(\left(\frac{2j-1}{2}\right).h\right),$$

y según (3.47), que también se puede escribir como

$$(3.49)\quad A(h) - A_0 = a_0.h^{1/4} + a_1.h^{5/4} + a_2.h^{9/4} + O(h^{3/4}) +$$

$$+ b_0.h^{1/2} + b_1.h^{3/2} + b_2.h^{5/2} + O(h^{7/2}),$$

se tiene que $\lim_{h\to 0} A(h) = A_0$.

Llamando $z = h^{1/4}$ y denotando

$$\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5, \phi_6, \phi_7\} = \{1, z, z^2, z^5, z^6, z^9, z^{10}\}$$

---

[*] En [23] puede verse este desarrollo de Ef como un caso particular de desarrollos en los que no se puede aplicar la fórmula de Euler-Maclaurin.

si contáramos con las hipótesis necesarias, podríamos construir el valor en cero (tomamos la forma lineal $L(f) = f(0)$) de los polinomios

$$p_{i,j} \in \{ \overline{\phi_1, \ldots, \phi_j} \} \quad , \quad i=1,2,\ldots,7, \quad j=1,\ldots,7-i+1$$

que interpolan a $A(h)$ en los valores

$$h_0 = 1 \ , \ h_k = (1/2)^k \quad k=1,\ldots,6$$

de la siguiente manera:

$$L_{k+1}(p_{i,j}) = p_{i,j}(h_k^{1/4}) = A(h_k) \ , \ k=j-1,j,\ldots,j+i-2 \ .$$

Los valores de esos polinomios en $z = 0$ nos darán sucesivas aproximaciones de A_0 .

El Algoritmo III (de Neville) nos permite calcular de forma recurrente esos valores, que son los que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 1

$$\begin{array}{ccccccc}
L(p_{1,1}) & & & & & & \\
 & L(p_{2,1}) & & & & & \\
L(p_{1,2}) & & L(p_{3,1}) & & & & \\
 & L(p_{2,2}) & & L(p_{4,1}) & & & \\
L(p_{1,3}) & & L(p_{3,2}) & & L(p_{5,1}) & & \\
 & L(p_{2,3}) & & L(p_{4,2}) & & L(p_{6,1}) & \\
L(p_{1,4}) & & L(p_{3,3}) & & L(p_{5,2}) & & L(p_{7,1}) \\
 & L(p_{2,4}) & & L(p_{4,3}) & & L(p_{6,2}) & \\
L(p_{1,5}) & & L(p_{3,4}) & & L(p_{5,3}) & & \\
 & L(p_{2,5}) & & L(p_{4,4}) & & & \\
L(p_{1,6}) & & L(p_{3,5}) & & & & \\
 & L(p_{2,6}) & & & & & \\
L(p_{1,7}) & & & & & &
\end{array}$$

Las hipótesis

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} \phi_1, & \cdots, & \phi_k \\ L_j, & \cdots, & L_{j+k-1} \end{pmatrix} \neq 0 \ , \quad k=1,\ldots,7 \ , \quad j=1,\ldots,8-k$$

$$\text{b) } \det \begin{pmatrix} \phi_1, & \cdots\cdots\cdots, & \phi_k \\ L_{j+1}, & \cdots, L_{j+k-1}, & L \end{pmatrix} \neq 0 \ , \quad \begin{matrix} k=1,\ldots,6 \\ j=1,\ldots,7-k \end{matrix}$$

necesarias para poder aplicar este algoritmo se pueden ir comprobando a lo largo de los cálculos. Por una parte, a) y b) son trivialmente ciertas para $k=1,2,3$ y para toda j .
Por otra, las hipótesis para $k \geq 4$ se comprueban aplicando el corolario 2.2 del capítulo II al mismo tiempo que se aplica el algoritmo. Por ejemplo, para $k=4$ se debe verificar

$$\det \begin{pmatrix} 1, & z, & z^2, & z^5 \\ L_j, & L_{j+1}, & L_{j+2}, & L_{j+3} \end{pmatrix} \neq 0 \quad , \quad j=1,\ldots,4$$

$$\det \begin{pmatrix} 1, & z, & z^2, & z^5 \\ L_{j+1}, & L_{j+2}, & L_{j+3}, & L \end{pmatrix} \neq 0 \quad , \quad j=1,\ldots,3 \ ,$$

y para comprobarlas se puede razonar como sigue. Como

$$\{ L_j, L_{j+1}, L_{j+2}, L_{j+3} \} = \{ L_j, L_{j+1}, L_{j+2} \} \cup \{ L_{j+1}, L_{j+2}, L_{j+3} \}$$

y estos dos subconjuntos verifican las hipótesis del corolario 2.2, entonces

$$\det \begin{pmatrix} 1, & z, & z^2, & z^5 \\ L_j, & L_{j+1}, & L_{j+2}, & L_{j+3} \end{pmatrix} \neq 0 \iff L(r^4_{3,j+1}) - L(r^4_{3,j}) \neq 0 \ .$$

De la misma forma, como

$$\{L_{j+1}, L_{j+2}, L_{j+3}, L\} = \{L_{j+1}, L_{j+2}, L_{j+3}\} \cup \{L_{j+2}, L_{j+3}, L\}$$

y también estos subconjuntos verifican las hipótesis del corolario 2.2, entonces

$$\det \begin{pmatrix} 1 & , z & , z^2 & , z^5 \\ L_{j+1}, & L_{j+2}, & L_{j+3}, & L \end{pmatrix} \neq 0 \iff L(r^4_{j,j+1}) \neq 0.$$

Luego las hipótesis se pueden comprobar al mismo tiempo que se van calculando los restos.

Con este método y trabajando con ocho dígitos, obtenemos los valores dados en la tabla siguiente

Tabla 2

2.3784142							
	5.4920169						
2.8737996		5.5611095					
	5.5122536		5.4169541				
3.2935870		5.3544860		5.2421225			
	5.4660445		5.3030184		5.2442228		
3.6392327		5.2820228		5.2442256		5.2444091	
	5.4121456		5.2397899		5.2444367		
3.9213096		5.2575466		5.2445261			
	5.3668646		5.2428509				
4.1513026		5.2490298					
	5.3323517						
4.3392116							

cuando el valor exacto es $B(1/4,1/2) = 5.2441151$.

También se puede aplicar el Algoritmo V para calcular $L(p_{7,1})$. Con él sólo se obtienen las columnas impares de la

Tabla 1, sin querer decir ésto que se reduzcan las operaciones.

Aunque no suponga ventajas en este caso concreto respecto al método empleado ya, éstos serían los resul[illegible]

Tabla 3

2.3784142			
2.8737996	5.5611097		
3.2935870	5.3544860	5.2430516	
3.6392327	5.2820224	5.2454417	5.2439303
3.9213096	5.2575465	5.2372804	
4.1513026	5.2490278		
4.3392116			

A pesar de que no tengamos que comprobar las hipótesis bajo las que se puede aplicar este algoritmo, ya que éstas son algunas de las que se debían verificar en el Algoritmo III, es obvio que se podría proceder de la misma forma que indicamos allí. O sea, podemos usar el corolario 2.2 para asegurarnos de que son ciertas las hipótesis que permiten calcular los valores de la Tabla 3 desde la columna tercera en adelante.

En este caso el corolario 2.2 nos da como condición necesaria y suficiente el que se verifique:

$$L(r^{2k}_{2k-1,j})\left[L(r^{2k+1}_{2k-1,j+1}) - L(r^{2k+1}_{2k-1,j+2})\right] + L(r^{2k}_{2k-1,j+1})\left[L(r^{2k+1}_{2k-1,j+2}) - L(r^{2k+1}_{2k-1,j})\right] + L(r^{2k}_{2k-1,j+2})\left[L(r^{2k+1}_{2k-1,j}) - L(r^{2k+1}_{2k-1,j+1})\right] \neq 0$$

para $k=2,3$, $j=1,2,\ldots,7-2k$, y que

$$L(r^{2k}_{2k-1,j+1}).L(r^{2k+1}_{2k-1,j+2}) - L(r^{2k-1}_{2k-1,j+1}).L(r^{2k}_{2k-1,j+2}) \neq 0$$

para $k=2$, $j=1,2$, siempre con las notaciones que se usaron en el Algoritmo V.

CAPITULO IV

INTERPOLACION POR RECURRENCIA EN VARIAS VARIABLES

CAPITULO IV

INTERPOLACION POR RECURRENCIA EN VARIAS VARIABLES

Los métodos Aitken-Neville vistos anteriormente para el problema general de interpolación lineal finita han sido aplicados en algún caso [9] a interpolación multivariada. Pero tal como fueron aplicados allí no presentaban ventajas porque los cálculos se iban complicando muchísimo al crecer el número de datos.

Siguiendo un camino diferente, H.C. Thacher Jr. y W.E. Milne [38] obtuvieron en 1960 una fórmula de recurrencia del tipo Aitken-Neville para la interpolación polinomial multivariada y que puede ser aplicada sólo a determinados conjuntos de puntos. La simplicidad de la fórmula recurrente obtenida por estos autores nos ha conducido a generalizar sus resultados llegando así a una fórmula de recurrencia del tipo A-N adaptada particularmente a la interpolación multivariada, que puede ser aplicada en casos más generales que el citado en [38].

1. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS RESULTADOS DE THACHER Y MILNE

Empecemos recordando los resultados de Thacher y Milne.

Sea S un conjunto formado por

$$(4.1) \qquad N_n(k) = \binom{n+k}{k}$$

puntos de R^k, tal que el problema de interpolación de encontrar

p de modo que

$$(4.2) \qquad p(X) = f(X) \quad \forall X \in S$$

donde f es una función dada, tenga solución única en P_n (espacio de los polinomios en $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}$ de grado total no mayor que n).

Sean S_j, $j = 1, 2, \ldots, k+1$, $k+1$ subconjuntos de S verificando las siguientes condiciones :

i) $S = \bigcup_{j=1}^{k+1} S_j$

ii) Para cada $j = 1, 2, \ldots, k+1$, el problema de interpolación (4.2), con S reemplazada por S_j, tiene solución única en P_{n-1}. (Notemos que esto implica $\text{card}(S_j) = W_{n-1}(k)$).

iii) Para cada $j = 1, 2, \ldots, k+1$ existe un único punto $X_j \in S_j$ tal que $X_j \notin S_h \ \forall h \neq j$, y si escribimos

$$T = \{ X_1, X_2, \ldots, X_{k+1} \},$$

entonces el problema de interpolación (4.2) asociado al conjunto T tiene solución única en P_1.

Denotamos por $X_{k+2}, X_{k+3}, \ldots, X_{W_n(K)}$ los restantes puntos de S.

iv) Para cada $j > k+1$ y cada $h = 1, 2, \ldots, k+1$, si $X_j \notin S_h$ entonces el problema de interpolación (4.2) asociado al conjunto

$$\{X_j\} \cup \bigcup_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^{k+1} \{X_t\}$$

no es unisolvente en P_1.

Bajo estas condiciones, la solución p_n del problema (4.2) puede escribirse en términos de las soluciones $p_{n-1}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, de los problemas (4.2) asociados con S_i (y P_{n-1}) de la siguiente forma :

$$(4.3)\qquad p_n = \frac{\begin{vmatrix} p_{n-1}^{(1)} & x_1^{(1)} - x^{(1)} & \cdots & x_1^{(k)} - x^{(k)} \\ p_{n-1}^{(2)} & x_2^{(1)} - x^{(1)} & \cdots & x_2^{(k)} - x^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1}^{(k+1)} & x_{k+1}^{(1)} - x^{(1)} & \cdots & x_{k+1}^{(k)} - x^{(k)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \cdots & x_1^{(k)} \\ 1 & x_2^{(1)} & \cdots & x_2^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{k+1}^{(1)} & \cdots & x_{k+1}^{(1)} \end{vmatrix}}$$

donde $(x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(k)}) = x_j$.

Para $k = 1$ ésta es la conocida fórmula del método Aitken- Neville.

Veamos un ejemplo de aplicación . Para $n=2$, $k=2$, sea

$$S = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \}$$

un conjunto formado por $\binom{n+k}{k} = 6$ puntos de R^2, tal que el problema (4.2) es unisolvente en P_2.

Por ser k=2, deberemos tomar tres subconjuntos S_1, S_2 y S_3 de S de tal forma que:

i) $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

ii) Cada S_i contenga tres puntos no alineados de S.

iii) Cada S_i, i = 1, 2, 3, debe contener a un punto que no pertenezca a los otros dos subconjuntos. Llamemos a estos puntos x_1, x_2 y x_3, respectivamente. Debe ocurrir además que estos tres puntos no estén alineados.
Con todo esto sea, por ejemplo

$$S_1 = \{ x_1, x_4, x_5 \}$$

$$S_2 = \{ x_2, x_4, x_6 \}$$

$$S_3 = \{ x_3, x_5, x_6 \}$$

Por lo que debe ocurrir además que:

iv)

x_5 esté alineado con x_1 y x_3

x_4 esté alineado con x_1 y x_2

x_6 esté alineado con x_2 y x_3

Por todo ello, las siguientes figuras muestran disposiciones posibles de estos puntos

Figura 1

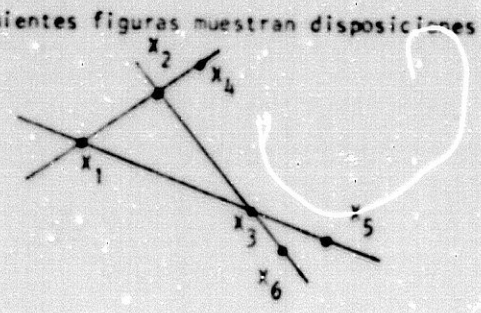
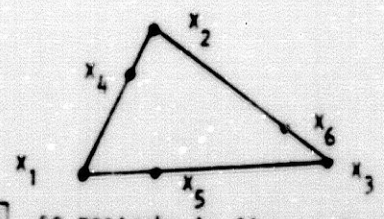


Figura 2

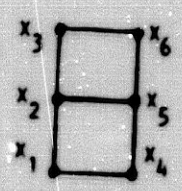


En [38] se mostraba la fórmula (4.3) y se daba como aplicación un único ejemplo: los conjuntos S en que $x_1, \ldots, x_{k+1}$ son los vértices de un k-simplex y cada punto que no pertenezca a S_j se encuentra en la cara opuesta al vértice j. Sin embargo, nótese que como en el caso de la Figura 1 es posible aplicarlos a conjuntos con otras configuraciones.

Con objeto de extender los resultados de Thacher y Milne a otras situaciones, consideremos ahora la siguiente malla rectangular de puntos:

$$S = \{ (x_1,y_1),\ (x_1,y_2),\ (x_1,y_3),\ (x_2,y_1),\ (x_2,y_2),\ (x_2,y_3) \}\ .$$

Figura 3



El problema de interpolación (4.2) asociado a este conjunto S es ahora unisolvente en el espacio $Q_{1,2}$ de los polinomios de grado no mayor que 1 en la variable x y no mayor que 2 en la variable y.

Llamando $x_1 = (x_1,y_1)$, $x_2 = (x_1,y_2)$, $x_3 = (x_1,y_3)$, $x_4 = (x_2,y_1)$, $x_5 = (x_2,y_2)$ y $x_6 = (x_2,y_3)$, formemos los conjuntos

$$S_1 = \{ x_1,\ x_4 \}\ ,\quad S_2 = \{ x_2,\ x_5 \}\ ,\quad S_3 = \{ x_3,\ x_6 \}\ .$$

En nuestras condiciones se verifica que:

1°) $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

2°) El problema de interpolación (4.2) asociado a cada S_i es unisolvente en $Q_{1,0}$.

3°) Hay tres puntos : $X_1 \in S_1$, $X_2 \in S_2$ y $X_3 \in S_3$ de tal forma, que si escribimos

$$T = \{ X_1, X_2, X_3 \}$$

entonces el problema de interpolación (4.2) asociado a T es unisolvente en $Q_{0,2}$.

4°) Para $j = 4, 5, 6$, $h = 1, 2, 3$, si $X_j \notin S_h$ entonces el problema (4.2) asociado a

$$\{ X_j \} \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{3} \{ X_i \}$$

no es unisolvente en $Q_{0,2}$.

Estas condiciones son análogas a las condiciones i), ii), iii) y iv) de [38], por lo que podríamos pensar en una fórmula similar a (4.2) pero adaptada a este caso:

$$(4.4)\quad q(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} q_1(x) & y_1 - y & y_1^2 - y^2 \\ q_2(x) & y_2 - y & y_2^2 - y^2 \\ q_3(x) & y_3 - y & y_3^2 - y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 \end{vmatrix}}$$

donde $q_i \in Q_{1,0}$ es la única solución del problema (4.2) en el espacio $Q_{1,0}$ asociado al conjunto S_i, $i = 1, 2, 3$.

En orden a demostrar que la expresión de $q(x,y)$ dada por (4.4) corresponde a la solución del problema (4.2) asociado a S y $Q_{1,2}$, observemos en primer lugar que el segundo miembro de (4.4) pertenece a $Q_{1,2}$.
Por otra parte, si $X = X_i$ $i = 1, 2, 3$, es fácil comprobar, desarrollando por la i-ésima fila del determinante del numerador de (4.4), que

$$(4.5)\quad q(X_i) = q(x_1, y_i) = f(X_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

Igualmente se ve que (4.5) es cierta también para $i = 4, 5, 6$; luego, efectivamente, $q \in Q_{1,2}$ y

$$q(X) = f(X) \quad \forall\, X \in S.$$

Todo esto nos hace pensar en una nueva fórmula de recurrencia para la interpolación multivariada que dejaría a (4.2) como caso particular.

2. ESTABLECIMIENTO DE UNA FORMULA PARA LA INTERPOLACION MULTIVARIADA POR RECURRENCIA

TEOREMA 4.1

Sea S un conjuntu formado por $n+m$ puntos de R^s y P un espacio vectorial de funciones de R^s en R, de dimensión $n+m$.

Sean $S_i \subset S$, $i = 1, 2, \ldots, k$, k subconjuntos de S verificando:

a) $S = \bigcup_{i=1}^{k} S_i$

b) Existen k puntos de S, que llamaremos $X_1, X_2, \ldots, X_k$, tales que

$$X_i \in S_i \quad y \quad X_i \notin \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} S_j \,, \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Supondremos que el problema (4.2) asociado al conjunto $\{ X_1, X_2, \ldots, X_k \}$ es unisolvente en un espacio vectorial Q de dimensión k, que contiene al espacio de los polinomios de grado cero.

c) Para $i = 1, 2, \ldots, k$, el problema de interpolación (4.2) asociado a S_i es unisolvente en un espacio vectorial H.

d) $P = H.Q = \{ h.q \;/\; h \in H, q \in Q \}$

e) Llamemos $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{n+m}$ a los puntos de

$$S - \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Para $j = k+1, \ldots, n+m$, y para $h = 1, 2, \ldots, k$, si $x_j \notin S_h$ entonces el problema de interpolación (4.2) asociado al conjunto

$$\{x_j\} \cup \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{k} \{x_i\}$$

no es unisolvente en Q.

En estas condiciones, existe un único elemento $p \in P$ tal que

$$p(x) = f(x) \quad \forall x \in S,$$

y se puede obtener mediante:

$$(4.6) \quad p(x) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(x) & \psi_2(x_1) - \psi_2(x) & \ldots & \psi_k(x_1) - \psi_k(x) \\ p_2(x) & \psi_2(x_2) - \psi_2(x) & \ldots & \psi_k(x_2) - \psi_k(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_k(x) & \psi_2(x_k) - \psi_2(x) & \ldots & \psi_k(x_k) - \psi_k(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \psi_2(x_1) & \ldots & \psi_k(x_1) \\ 1 & \psi_2(x_2) & \ldots & \psi_k(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \psi_2(x_k) & \ldots & \psi_k(x_k) \end{vmatrix}}$$

donde $\{1, \psi_2, \ldots, \psi_k\}$ es una base de Q y para $i = 1,2,\ldots,k$

p_i es la única solución en H del problema (4.2) asociado al conjunto S_i.

Demostración :

Llamemos | D | al determinante del denominador de (4.6). Por la hipótesis b) se tiene | D | ≠ 0.

En un principio debemos demostrar que p es un elemento del espacio vectorial P y en segundo lugar, que

$$p(X) = f(X) \quad \forall X \in S.$$

Lo primero es fácilmente comprobable teniendo en cuenta que el determinante del numerador de (4.6) se puede expresar como

$$(4.7) \qquad - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \psi_2(X) & \cdots & \psi_k(X) \\ p_1(X) & 1 & \psi_2(X_1) & \cdots & \psi_k(X_1) \\ p_2(X) & 1 & \psi_2(X_2) & \cdots & \psi_k(X_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_k(X) & 1 & \psi_2(X_k) & \cdots & \psi_k(X_k) \end{vmatrix} .$$

Así al desarrollar (4.7) por la primera columna y llamando $\psi_1(X) \equiv 1$, nos queda :

$$p(X) = \frac{1}{|D|} \left[p_1(X).\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i.\psi_i(X) \right) - p_2(X).\left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i.\psi_i(X) \right) + \right.$$

$$\left. + \cdots + (-1)^{k+1}.p_k(X).\left(\sum_{i=1}^{k} \gamma_i.\psi_i(X) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{|D|} \sum_{i=1}^{k} p_i(X).\left(\sum_{j=1}^{k} \theta_{ij}.\psi_j(X) \right)$$

luego, por la hipótesis d), p ∈ P.

Pasemos ahora a ver que $p(X_i) = f(X_i) \quad \forall i$.

Para el punto X_i, $1 \leq i \leq k$, se verifica

$$X_i \in S_i \quad y \quad X_i \notin S_j \quad \forall j \neq i,$$

luego

$$p(X_i) = \frac{1}{|D|} \cdot \begin{vmatrix} p_1(X_i) & \psi_2(X_1) - \psi_2(X_i) & \dots & \psi_k(X_1) - \psi_k(X_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(X_i) \leftarrow i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_k(X_i) & \psi_2(X_k) - \psi_2(X_i) & \dots & \psi_k(X_k) - \psi_k(X_i) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{i+1} \cdot f(X_i) \cdot (-1)^{i+1} \cdot |D|}{|D|} = f(X_i).$$

Cojamos ahora un punto X_i, $k+1 \leq i \leq n+m$. Por ser $i \geq k+1$, el punto X_i puede pertenecer a varios S_j. Podemos suponer sin pérdida de la generalidad que X_i pertenece a $S_1, S_2, \dots, S_t$, y no pertenece a $S_{t+1}, \dots, S_k$, $(t \geq 1)$.
Entonces

$$p(X_i) = \frac{\begin{vmatrix} f(X_i) & \psi_2(X_1) - \psi_2(X_i) & \dots & \psi_k(X_1) - \psi_k(X_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(X_i) & \psi_2(X_t) - \psi_2(X_i) & \dots & \psi_k(X_t) - \psi_k(X_i) \\ p_{t+1}(X_i) & \psi_2(X_{t+1}) - \psi_2(X_i) & \dots & \psi_k(X_{t+1}) - \psi_k(X_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_k(X_i) & \psi_2(X_k) - \psi_2(X_i) & \dots & \psi_k(X_k) - \psi_k(X_i) \end{vmatrix}}{|D|}.$$

Restando a cada fila del determinante del numerador la primera fila, y después desarrollando por la primera columna, tenemos:

$$p(x_i) = f(x_i) \cdot \frac{\begin{vmatrix} \psi_2(x_2) - \psi_2(x_1) & \cdots & \psi_k(x_2) - \psi_k(x_1) \\ \psi_2(x_3) - \psi_2(x_1) & \cdots & \psi_k(x_3) - \psi_k(x_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_2(x_k) - \psi_2(x_1) & \cdots & \psi_k(x_k) - \psi_k(x_1) \end{vmatrix}}{|D|} +$$

$$+ \sum_{j=t+1}^{k} (-1)^{j+1} \lambda_j \cdot (p_j(x_i) - f(x_i)) = f(x_i)$$

ya que para toda $j=t+1, \ldots, k$, $\lambda_j = 0$ por la hipótesis e).

La unicidad de p se deduce de su existencia cualquiera que sea f, puesto que es la solución de un sistema lineal de $n-m$ ecuaciones e incógnitas.

Es fácil observar que los resultados de [38] son un caso particular de este teorema.

Con nuestro teorema 4.1 es posible obtener la solución de algunos problemas de interpolación lagrangiana en una o varias variables, y no tienen que ser necesariamente problemas de interpolación polinomial.

Por ejemplo, en el caso de una variable se pueden utilizar nuestros resultados en los problemas de interpolación trigonométrica con datos lagrangianos:

Sea S un conjunto formado por $2n+1$, $n \geq 2$, puntos distintos de un intervalo $[\, a,\ a+2\pi \,) \subset \mathbb{R}$.

$$S = \{ x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1} \}$$

El problema de interpolación

hallar p tal que $p(x) = f(x) \quad \forall\, x \in S$

es unisolvente en $P = P_n(\cos x, \operatorname{sen} x)$, espacio de los polinomios trigonométricos de grado menor o igual que n.
Tomando un número impar de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}$, se pueden formar k , $k \geq 1$, subconjuntos

$$S_i = \{ x_i, x_{2k+2}, \ldots, x_{2n+1} \}$$

de forma que si llamamos

$$Q = P_k(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

$$H = P_{n-k}(\cos x, \operatorname{sen} x)$$

se verifican todas las condiciones del teorema 4.1, y por tanto podremos aplicar (4.6) para calcular p.

Ejemplo 4.1.- Calculemos el elemento p de $P_2(\cos x, \operatorname{sen} x)$ que verifica:

$$x_1 = 0 \longrightarrow p(0) = f(x_1) = 0$$

$$x_2 = \pi/4 \longrightarrow p(\pi/4) = f(x_2) = \sqrt{2}/2$$

$$x_3 = \pi/3 \longrightarrow p(\pi/3) = f(x_3) = 1$$

$$x_4 = \pi/2 \longrightarrow p(\pi/2) = f(x_4) = 1$$

$$x_5 = \pi \longrightarrow p(\pi) = f(x_5) = -2$$

Formemos los conjuntos

$$S_1 = \{ x_1, x_4, x_5 \}$$

$$S_2 = \{ x_2, x_4, x_5 \}$$

$$S_3 = \{ x_3, x_4, x_5 \}$$

y llamemos $p_i \in P_1(\cos x, \operatorname{sen} x)$ al único elemento que verifica

$$p_i(x) = f(x) \qquad \forall x \in S_i.$$

Se tiene entonces que

$$p_1(x) = -1 + \cos x + 2\operatorname{sen} x$$

$$p_2(x) = -\sqrt{2} + (2-\sqrt{2}).\cos x + (1+\sqrt{2}).\operatorname{sen} x$$

$$p_3(x) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}+3}{2}.\operatorname{sen} x + \frac{3-\sqrt{3}}{2}.\cos x$$

$P_1(\cos x, \operatorname{sen} x) = \{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$, luego

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2/2 & 2/2 \\ 1 & 1/2 & 3/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$$

y aplicando (4.6) tenemos que

$$p(x) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(x) & 1-\cos x & -\operatorname{sen} x \\ p_2(x) & \sqrt{2}/2-\cos x & \sqrt{2}/2-\operatorname{sen} x \\ p_3(x) & 1/2-\cos x & \sqrt{3}/2-\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} p_1(x) & 1-\cos x & -\operatorname{sen} x \\ p_2(x)-p_1(x) & \sqrt{2}/2-1 & \sqrt{2}/2 \\ p_3(x)-p_1(x) & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix}}{\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}} .$$

que efectuando los calculos queda $p(x) = \cos x - \cos 2x$.

Por otra parte, el resultado obtenido por Thacher y Milne [38] para el caso de una variable (k=1) es la conocida fórmula de interpolación por recurrencia debida a Aitken:

Sea S el conjunto de puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de R, distintos dos a dos. Sean S_1 y S_2 dos subconjuntos de S, $S=S_1 \cup S_2$, con todos sus puntos comunes excepto $x_j \in S_1$, que no está en S_2, y $x_k \in S_2$, que no está en S_1. Entonces si llamamos p_1 y p_2 a las soluciones del problema (4.2) asociado a S_1 y S_2 en P_{n-1}, se tiene que la solución del problema (4.2) asociada a S en P_n viene dada por

$$p(x) = \frac{(x - x_k).p_1(x) - (x - x_j).p_2(x)}{x_j - x_k} .$$

En este caso, el teorema 4.1 permitirá resolver el mismo problema utilizando un mayor número de subconjuntos de S con menos puntos en cada uno. Es más, nuestro teorema 4.1 corresponde con el teorema 0.1 cuando se está bajo las hipótesis del teorema 0.2 para el caso s=m+1, y siendo L la forma lineal $L(f) = f(x)$.

3. OTRAS APLICACIONES DEL TEOREMA 4.1

Entre las posibles aplicaciones de este teorema vamos a destacar a continuación algunas muy interesantes en cuanto que permiten resolver de forma simple problemas de interpolación que se presentan con frecuencia.

1. Sea S un conjunto de puntos de R^2, en los cuales se conoce el valor de una cierta función $f: R^2 \longrightarrow R$.

Veamos que se puede encontrar un espacio de polinomios P de tal forma que el problema (4.2) tenga solución única, y que la solución de este problema se puede obtener mediante (4.6) utilizando dos polinomios de un subespacio H de P.

Con este objetivo procedamos de la siguiente manera: tracamos por cada punto de S una paralela a una dirección arbitraria. Si hay dos de éstas que tengan el mismo número de puntos de S y este número es igual o mayor que el que hay en las restantes rectas, llamamos a aquéllas r_0 y r_1. Observemos que siempre es posible esta situación sin más que variar la dirección fijada al principio. En el peor de los casos siempre hay una dirección tal que cada recta paralela a ella sólo tendría un punto de S.

Las paralelas trazadas serán denotadas $r_0, r_1, \ldots, r_n$ y, escribiendo sus ecuaciones las denotamos también $r_i=0$. Así pues, la misma letra que denota a la recta, denota al polinomio de grado uno que determina su ecuación, salvo un factor de proporcionalidad.

Llamemos x_{ij} , $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, n(i)$, a los puntos de S y notemos $x_{i0}, x_{i1}, \ldots, x_{in(i)}$ a los que están en la recta r_i.
Como hemos dicho,

$$n(0) = n(1) \geq n(2) \geq \ldots \geq n(n)$$

Para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, a cada recta r_i le asociaremos unas rectas $r_{i0}, r_{i1}, \ldots, r_{in(i)}$, de tal forma que

$$r_i \cap r_{ij} = x_{ij} , \quad j = 0, 1, \ldots, n(i).$$

Además se tomarán todas las rectas r_{ij} paralelas entre sí.

El problema inicial es unisolvente (esta teoría se encuentra en [24] y [35]) en un espacio de polinomios P del cuál el conjunto

$$\{ 1,\ r_{00},\ r_{00}\cdot r_{01},\ \cdots,\ r_{00}\cdot r_{01}\cdot\ \cdots\ \cdot r_{0,n(0)-1},\ r_0,\ r_0\cdot r_{10},$$

$$r_0\cdot r_{10}\cdot r_{11},\ \cdots,\ r_0\cdot r_{10}\cdot r_{11}\cdot\ \cdots\ \cdot\ r_{1,n(1)-1},\ r_0\cdot r_1,\ \cdots\ ,$$

$$r_0\cdot r_1\cdot\ \cdots\ ,r_{n-1},\ r_0\cdot r_1\cdot\ \cdots\ \cdot r_{n-1}\cdot r_{n0},\ r_0\cdot r_1\cdot\cdots\cdot r_{n-1}\cdot r_{n0}\cdot r_{n1},$$

$$\cdots\ ,\ r_0\cdot r_1\cdot\ \cdots\ \cdot r_{n-1}\cdot r_{n0}\cdot r_{n1}\cdot\ \cdots\ \cdot r_{n,n(n)-1}\}$$

es base.

Puesto que las rectas r_i son paralelas entre sí, y lo mismo les ocurre a las rectas r_{ij}, entonces el conjunto

$$\{ 1,\ r_{00},\ r_{00}^2,\ \cdots,\ r_{00}^{n(0)},\ r_0,\ r_0\cdot r_{00},\ \cdots,\ r_0\cdot r_{00}^{n(0)},\ r_0^2,\ \cdots$$

$$\cdots,\ r_0^n,\ r_0^n\cdot r_{00},\ r_0^n\cdot r_{00}^2,\ \cdots,\ r_0^n\cdot r_{00}^{n(n)}\}$$

también es base del mismo espacio P.

Formemos los conjuntos

$$(4.10)\qquad \begin{cases} S_1 = S - \bigcup_{j=0}^{n(1)} \{ x_{1j} \} = S - \bigcup_{j=0}^{n(0)} \{ x_{1j} \} \\ \\ S_2 = S - \bigcup_{j=0}^{n(0)} \{x_{0j}\}\ . \end{cases}$$

S_1 y S_2 tienen en común todos los puntos de S salvo los que están en las rectas r_0 y r_1 que pertenecen, respectivamente, a S_1 y S_2.

Llamemos X_1 a un punto cualquiera de S que esté en la recta r_0 y, análogamente X_2 a un punto de r_1. Se tiene

$$S = S_1 \cup S_2$$

$$X_1 \in S_1, \quad X_1 \notin S_2$$

$$X_2 \in S_2, \quad X_2 \notin S_1.$$

El problema (4.2) asociado a $T = \{ X_1, X_2 \}$ es unisolvente en el espacio de los polinomios

$$Q = \{ \overline{1, r_0} \} .$$

Además los problemas (4.2) correspondientes a los conjuntos S_1 y S_2 son unisolventes en el espacio de polinomios

$$(4,11) \qquad H = \{ \overline{1, r_{00}, r_{00}^2, \ldots, r_{00}^{n(0)}, r_0, r_0 \cdot r_{00}, \ldots, r_0 \cdot r_{00}^{n(2)}, r_0^2, \ldots, r_0^{n-1}, r_0^{n-1} \cdot r_{00}, \ldots, r_0^{n-1} r_{00}^{n(n)}} \}.$$

Con estas consideraciones se verifican todas las hipótesis del teorema 4.1, por lo que el elemento $p \in P$ solución del problema (4.2) se puede obtener así :

$$(4.12) \qquad p(X) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(X) & r_0(X_1) - r_0(X) \\ p_2(X) & r_0(X_2) - r_0(X) \end{vmatrix}}{r_0(X_2) - r_0(X_1)} =$$

$$= \frac{\left[r_0(x_2) - r_0(x)\right] \cdot p_1(x) + r_0(x) \cdot p_2(x)}{r_0(x_2)} .$$

Debe observarse que la complejidad del espacio interpolador P depende de la elección de las rectas r_i. r_{ij} . Con frecuencia, se pueden hacer varias elecciones por lo que en muchos casos se podrá conseguir un determinado espacio de polinonios.

Ejemplo 4.2.-

Sea S el conjunto de puntos de la siguiente figura

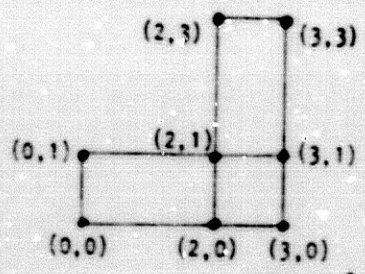


Figura 4

Por [35] conocemos que existe un único $p \in P = \{ \overline{1, x, x^2}, y, \overline{yx, yx^2}, \overline{y^2}, \overline{y^2x} \}$ tal que

$p(0,0) = 0$	$p(2,1) = 1$
$p(2,0) = 0$	$p(3,1) = 2$
$p(3,0) = 0$	$p(2,3) = -3$
$p(0,1) = -1$	$p(3,3) = 0.$

Pues bien, ese elemento de P se puede obtener mediante (4.12)

si se eligen las rectas:

$$r_0 \equiv y = 0 \quad \Big| \quad r_{00} \equiv x = 0 \quad \Big| \quad r_{01} \equiv x-2 = 0 \quad \Big| \quad r_{02} \equiv x-3 = 0$$

$$r_1 \equiv y-1 = 0 \quad \Big| \quad r_{10} \equiv x = 0 \quad \Big| \quad r_{11} \equiv x-2 = 0 \quad \Big| \quad r_{12} \equiv x-3 = 0$$

$$r_2 \equiv y-3 = 0 \quad \Big| \quad r_{20} \equiv x-2 = 0 \quad \Big| \quad r_{30} \equiv x-3 = 0 \ ,$$

con lo que

$$S_1 = \{ (0,0),\ (2,0),\ (3,0),\ (2,3),\ (3,3) \}$$

$$S_2 = \{ (0,1),\ (2,1),\ (3,1),\ (2,3),\ (3,3) \} \ ,$$

y podemos elegir $X_1 = (2,0),\ X_2 = (0,1)$.

El elemento $p_1 \in \{ 1,\ x,\ x^2,\ y,\ yx \}$ tal que

$$p_1(0,0) = 0 \ ,\quad p_1(2,0) = 0 \ ,\quad p_1(3,0) = 0$$

$$p_1(2,3) = -3 \ ,\quad p_1(3,3) = 0$$

es $p_1(x,y) = -3y + xy$.

Análogamente, el elemento $p_2 \in \{1,\ x,\ x^2,\ y,\ yx\}$ tal que

$$p_2(0,1) = -1 \ ,\quad p_2(2,1) = 1, \quad p_2(3,1) = 2$$

$$p_2(2,3) = -3 \ ,\quad p_2(3,3) = 0$$

es $p_2(x,y) = 3 - 4y + xy$.

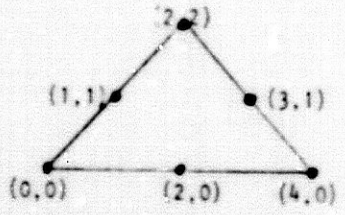
Luego el polinomio p buscado es:

$$p(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(x,y) & -y \\ p_2(x,y) & -y \end{vmatrix}}{1} = xy - y^2 .$$

Ejemplo 4.3 .-

Sea S el conjunto de puntos indicados en la siguiente figura

Figura 5



El problema de interpolación de hallar p tal que

$$p(0,0) = f(0,0) \ , \quad p(2,0) = f(2,0) \ , \quad p(4,0) = f(4,0)$$

$$p(1,1) = f(1,1) \ , \quad p(2,2) = f(2,2) \ , \quad p(3,1) = f(3,1)$$

es unisolvente en el espacio P_2, como es bien sabido. Sin embargo, por el procedimiento que hemos indicado en este apartado no se puede obtener el elemento $p \in P_2$ utilizando (4.2), o sea, utilizando dos polinomios que interpolen en subconjuntos S_1 y S_2 de S. Esto se debe a que únicamente se podrían tomar rectas paralelas que contengan un solo punto de S , y de ahí que el espacio P que se obtenga no coincide con P_2. Claro está que el elemento interpolador $p \in P_2$ se podría obtener mediante tres polinomios de P_1 , tal y como se indicaba en [38] .

Es fácil observar que el papel que jugaban las dos rectas r_0 y r_1 en el método propuesto para encontrar un espacio de polinomios P en el que el problema (4.2) tuviera solución, lo pueden desempeñar k rectas, $k \geq 2$, obteniéndose en este caso la solución del problema mediante (4.6) utilizando k polinomios de un subespacio H de P.

Como es lógico, llamando a las k rectas r_0, r_1, ..., r_{k-1}, se formarán ahora k subconjuntos S_1, S_2, ..., S_k de S de forma que tengan en común todos los puntos de S salvo los que se encuentren en las rectas r_0, r_1, ..., r_{k-1}, que pertenecerán respectivamente a S_1, S_2, ..., S_k.

Tomando X_1, ..., X_k, k puntos cualesquiera de S con tal que $X_i \in r_i$, $i = 1, \ldots, k$, el problema (4.2) asociado a

$$T = \{ X_1, \ldots, X_k \}$$

es unisolvente en

$$Q = \{ \overline{1, r_0, r_0 \cdot r_1, \ldots, r_0 \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_{k-2}} \} = \{ \overline{1, r_0, r_0^2, \ldots, r_0^{k-1}} \},$$

y los problemas asociados a los conjuntos S_1, ..., S_k lo son en

$$H = \{ \overline{1, r_{00}, r_{00}^2, \ldots, r_{00}^{n(0)}, r_0, r_0 \cdot r_{00}, \ldots, r_0 \cdot r_{00}^{n(k)}, r_0^2, \ldots, r_0^{n-k+1}, r_0^{n-k+1} \cdot r_{00}, \ldots, r_0^{n-k+1} \cdot r_{00}^{n(n)}} \}.$$

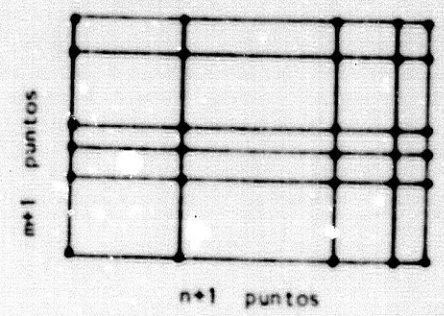
Así se verifican las hipótesis del teorema 4.1 y, por tanto, el elemento p del espacio dado en (4.9) se puede obtener como sigue:

$$(4.13)\quad p(x) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(x) & r_0(x_1) - r_0(x) & \dots & r_0^{k-1}(x_1) - r_0^{k-1}(x) \\ p_2(x) & r_0(x_2) - r_0(x) & \dots & r_0^{k-1}(x_2) - r_0^{k-1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_k(x) & r_0(x_k) - r_0(x) & \dots & r_0^{k-1}(x_k) - r_0^{k-1}(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & r_0(x_1) & r_0^2(x_1) & \dots & r_0^{k-1}(x_1) \\ 1 & r_0(x_2) & r_0^2(x_2) & \dots & r_0^{k-1}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & r_0(x_k) & r_0^2(x_k) & \dots & r_0^{k-1}(x_k) \end{vmatrix}} .$$

A continuación mostramos la utilidad de este resultado en la resolución de cualquier problema lagrangiano sobre los puntos de una malla rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados.

Si S es un conjunto de $(n+1)\times(m+1)$ puntos de R^2 (Figura 6) que determinan una malla rectangular de lados paralelos a los ejes de coordenadas,

Figura 6



es sabido que el problema (4.2) es unisolvente en $Q_{n,m}$ (espacio de los polinomios de gradr no mayor que n en x y no mayor que m en y).

Pues bien, la solución de dicho problema se puede obtener por el procedimiento anteriormente descrito. Para ello hay dos posibles elecciones de rectas r_i , r_{ij} : basta tomar como roctas r_i las verticales (respec. horizontales) que determinan la malla, y como r_{ij} las rectas horizontales (respec. verticales).

En efecto, si

$$S = \{ (x_i, y_j) \ ; \ i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, m \}$$

entonces llamando , por ejemplo, r_i a las rectas verticales de la malla tendríamos:

$$r_i \equiv x - x_i = 0 \quad , \ i = 0, 1, \ldots, n$$

$$r_{ij} \equiv y - y_j = 0 \quad , \ i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots, m.$$

Todas las rectas r_i tienen el mismo número de puntos de S, por lo que si $k \leq n+1$, tomando k puntos de S, $X_1, \ldots, X_k$, tales que $X_i \in r_i$, el elemento p dado por (4.13) pertenece a $Q_{n,m}$ ya que los subespacios Q y H son los siguientes:

$$Q = \{ \overline{1, x, \ldots, x^{k-1}} \}$$

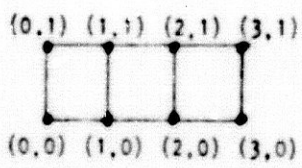
$$H = \{ \overline{1, y, y^2, \ldots, y^m, x, xy, \ldots, xy^m, x^2, \ldots} \overline{\ldots, x^{n-k+1}, x^{n-k+1}y, \ldots, x^{n-k+1}y^m} \}.$$

Veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo 4.4.-

Sea S el conjunto de puntos de la malla de la siguiente figura

Figura 7



Queremos encontrar el elemento $p \in Q_{3,1}$ tal que

$$p(0,0) = f(0,0) = 0, \quad p(0,1) = f(0,1) = -1$$

$$p(1,0) = f(1,0) = 1, \quad p(1,1) = f(1,1) = 0$$

$$p(2,0) = f(2,0) = 2, \quad p(2,1) = f(2,1) = 3$$

$$p(3,0) = f(3,0) = 3, \quad p(3,1) = f(3,1) = 8.$$

Para ello podemos aplicar (4.13) para $k = 2$, utilizando como

$$r_0 \equiv y = 0 \ , \ X_1 = (0,0) \ \text{ y } \ X_2 = (0,1).$$

De esta forma tendremos que

$$S_1 = \{ (0,0), (1,0), (2,0), (3,0)\}$$

$$S_2 = \{ (0,1), (1,1), (2,1), (3,1)\} .$$

Como los elementos $p_i \in Q_{3,0}$, $i = 1,2$, tales que

$$p_i(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in S_i \ , \ i = 1,2$$

son $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = x^2-1$, entonces aplicando (4.12) resulta que p es igual a

$$p(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(x,y) & -y \\ p_2(x,y) & 1-y \end{vmatrix}}{1} = (1-y)x + y(x^2-1).$$

Este mismo problema se podría resolver aplicando (4.13) para $k = 3$ ó $k = 4$, o sea, utilizando tres o cuatro polinomios que interpolen en menos datos. Para estos valores de k nos veríamos obligados a que las rectas r_i fuesen las rectas verticales que determinan la red de la figura 7.
Así, por ejemplo, para $k = 3$ y tomando

$$r_0 \equiv x = 0, \quad X_1 = (0,0), \quad X_2 = (1,0), \quad X_3 = (2,0)$$

se formarían los conjuntos

$$S_1 = \{ (0,0), (0,1), (3,0), (3,1) \}$$

$$S_2 = \{ (1,0), (1,1), (3,0), (3,1) \}$$

$$S_3 = \{ (2,0), (2,1), (3,0), (3,1) \},$$

y como los polinomios $p_i \in Q_{1,1}$ tales que

$$p_i(x) = f(x) \quad \forall x \in S_i, \quad i = 1, 2, 3$$

son $p_1(x,y) = x - y + 2xy$, $p_2(x,y) = x - 4y + 3xy$,

$p_3(x,y) = x - 7y + 4xy$, entonces

$$p(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} x - y + 2xy & -x & -x^2 \\ x - 4y + 3xy & 1-x & 1-x^2 \\ x - 7y + 4xy & 2-x & 4-x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = (1-y)x + y(x^2-1).$$

2. Sigamos con el problema de interpolación lagrangiana en $Q_{n,m}$ para puntos de una malla rectangular de lados paralelos a los ejes (figura 6).

En el apartado anterior se ha visto una forma de construir la solución de un problema de este tipo utilizando k polinomios que interpolan en menos datos del total. En particular, siempre que el problema sea unisolvente en $Q_{n,m}$ con $n \geq 3$ ó $m \geq 3$, se puede aplicar (4.13) para $k = 4$. Aquí se trata de ver otra forma de aplicar el teorema 4.1 mediante la cuál se puede construir la solución utilizando cuatro polinomios de $Q_{n-1,m-1}$.

Si el problema en cuestión es unisolvente en $Q_{n,m}$, $n \geq 1$ y $m \geq 1$, siempre es posible tomar cuatro rectas de las que determinan la malla de puntos de tal forma que dos de ellas - r_0 y r_1 - sean paralelas al eje de abcisas, y las otras dos - r_2 y r_3 - lo sean al eje de ordenadas.
Llamemos $X_i = (x_i, y_j)$, $i = 1, 2, 3, 4$, a los vértices del rectángulo que queda determinado por la intersección de las cuatro rectas r_0, r_1, r_2 y r_3. Entonces cada X_i pertenecerá a dos de esas rectas.

Supongamos que

$$x_1 \in r_0 \wedge r_2$$

$$x_2 \in r_1 \wedge r_2$$

$$x_3 \in r_0 \wedge r_3$$

$$x_4 \in r_1 \wedge r_3 .$$

En estas circunstancias , formando los conjuntos

$$S_1 = S - A_{13}$$

$$S_2 = S - A_{03}$$

$$S_3 = S - A_{12}$$

$$S_4 = S - A_{02}$$

donde A_{ij} representa el conjunto de puntos du S que están sobre las rectas r_i y r_j, se verifican todas las hipótesis del teorema 4.1 para los espacios $Q = Q_{1,1}$ y $H = Q_{n-1,m-1}$.
Por tanto, la solución del problema inicial se puede expresar como sigue:

$$(4.14)\qquad p(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} p_1(x,y) & x_1-x & y_1-y & x_1y_1-xy \\ p_2(x,y) & x_2-x & y_2-y & x_2y_2-xy \\ p_3(x,y) & x_3-x & y_3-y & x_3y_3-xy \\ p_4(x,y) & x_4-x & y_4-y & x_4y_4-xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 4.5.-

Resolvamos aplicando (4.14) el problema planteado en el ejemplo 4.4.
Tomando

$$r_0 \equiv y = 0$$

$$r_1 \equiv y - 1 = 0$$

$$r_2 \equiv x - 1 = 0$$

$$r_3 \equiv x - 2 = 0$$

resulta

$$x_1 = (1,0),\quad x_2 = (1,1),\quad x_3 = (2,0) \text{ y } x_4 = (2,1)$$

por lo que

$$S_1 = \{ (0,0),\ (1,0),\ (3,0) \}$$

$$S_2 = \{ (0,1),\ (1,1),\ (3,1) \}$$

$$S_3 = \{ (0,0),\ (2,0),\ (3,0) \}$$

$$S_4 = \{ (0,1),\ (2,1),\ (3,1) \}\ .$$

Los polinomios $p_i \in Q_{2,0}$ tales que interpolan a f en los datos de S_i son:

$$p_1(x,y) = p_1(x) = x$$

$$p_2(x,y) = p_2(x) = x^2 - 1$$

$$p_3(x,y) = p_3(x) = x$$

$$p_4(x,y) = p_4(x) = x^2 - 1,$$

por lo que aplicando (4.14), la solución del problema es

$$p(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} x & 1-x & -y & -xy \\ x^2-1 & 1-x & 1-y & 1-xy \\ x & 2-x & -y & -xy \\ x^2-1 & 2-x & 1-y & 2-xy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} =$$

$$= (1-y)x + y(x^2-1).$$

Para finalizar damos dos ejemplos en los que aplicando el teorema 4.1 se construye un espacio de interpolación en el que el problema planteado es unisolvente, y se calcula la solución. Se observará que estos ejemplos no se resuelven por el método dado en el apartado que hemos llamado " Otras aplicaciones del teorema 4.1 " y son distintos del simplicial.

Ejemplo 4.6.-

Sea

$S = \{ (0,0), (1/2,1/2), (1,1), (1/2,3/2), (0,2), (-1/2,3/2), (-1,1), (-1/2,1/2) \}$.

Se pretende hallar un polinomio p de un cierto espacio de polinomios P donde el problema de interpolación para los datos siguientes sea unisolvente:

$p(0,0) = f(0,0) = 1$	$p(0,2) = f(0,2) = 9$
$p(1/2,1/2) = f(1/2,1/2) = 1$	$p(-1/2,3/2) = f(-1/2,3/2) = 4$
$p(1,1) = f(1,1) = 1$	$p(-1,1) = f(-1,1) = 1$
$p(1/2,3/2) = f(1/2,3/2) = 4$	$p(-1/2,1/2) = f(-1/2,1/2) = 1.$

Consideremos los conjuntos:

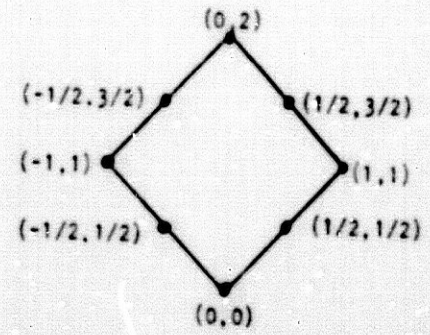
$$S_1 = \{ (0,2), (-1/2,3/2), (1/2,3/2) \}$$

$$S_2 = \{ (-1,1), (-1/2,3/2), (-1/2,1/2) \}$$

$$S_3 = \{ (1,1), (1/2,3/2), (1/2,1/2) \}$$

$$S_4 = \{ (0,0), (-1/2,1/2), (1/2,1/2) \} .$$

Figura 8



Los polinomios asociados a los S_i , $i = 1, 2, 3, 4$, son unisolventes en el espacio

$$H = \{ \overline{1, x, y} \}$$

y, tomando como puntos destacados $X_1 = (0,2)$, $X_2 = (-1,1)$, $X_3 = (1,1)$ y $X_4 = (0,0)$, el problema asociado al conjunto T formado por esos puntos, es unisolvente en

$$Q = \{ \overline{1, x, y, y^2 - x^2} \} .$$

En estas condiciones se verifican las hipótesis del teorema 4.1 por lo que el problema dado es unisolverte en el espacio

$$P = H.Q = \{ \overline{1, x, y, y^2, x^2, xy, y^2x-x^3, y^3-x^2y} \},$$

por ser dimensión de P igual a 8.
El elemento $p \in P$ buscado es, aplicando (4.6), el siguiente:

$$p(x,y) = y^3 - yx^2 + 1,$$

ya que los $p_i(x,y) \in H$ que interpolan a f en los datos de S_i son

$$p_1(x,y) = -11 + 10y , \qquad p_2(x,y) = 1 + 3x + 3y$$

$$p_3(x,y) = 1 - 3x + 3y , \qquad p_4(x,y) = 1.$$

Ejemplo 4.7.-

Dado el conjunto de puntos

$$S = \{ (0,10),\ (1,10),\ (2,10),\ (0\ 100),\ (1,100),\ (2,100) \}\ ,$$

el problema de hallar p tal que

$$p(0,10) = -1 \qquad p(0,100) = -2$$

$$p(1,10) = 0 \qquad p(1,100) = -1$$

$$p(2,10) = 3 \qquad p(2,100) = 2$$

es unisolvente en el espacio

$$P = \{ \overline{1,\ x,\ x^2,\ \log y,\ x\log y\ x^2\log y} \}$$

puesto que se verifican las hipótesis del teorema 4.1, considerando como

$$S_1 = \{ (0,10),\ (1,10),\ (2,10) \}$$

$$S_2 = \{ (0,100),\ (1,100),\ (2,100) \}\ ,$$

, tomando $X_1 = (0,10)$ y $X_2 = (1,100)$.
Además en las notaciones de dicho teorema , se considerará

$$H = \{ \overline{1,\ x,\ x^2} \}$$

$$Q = \{ \overline{1,\ \log y} \}\ .$$

Por tanto, el elemento $p \in P$ solución de este problema es:

$$p(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} -1+x^2 & 1-\log y \\ -2+x^2 & 2-\log y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = x^2 - \log y .$$

APENDICE

APENDICE

A continuación se presentan los programas que permiten resolver mediante los Algoritmos I y II del Capítulo III los problemas de interpolación que allí se dieron como ejemplos (ver Ejemplos 3.1, 3.2 y 3.3 del Capítulo III).

Los problemas que se resuelven son: interpolación lagrangiana sobre los puntos de una malla rectangular de lados paralelos a los ejes coordenados, interpolación lagrangiana trigonométrica y, por último, un problema de Hermite trigonométrico.

Los programas han sido realizados en lenguaje HP y su computación se ha hecho en un ordenador HP-9825.A.

```
0: beep:dsp "ALG
 ORITMO I";wai
 t 2000:beep
1: dsp "INTERPOL
 ACION LAGRANGIA
 NA EN O(N,M)";
 wait 3000:beep:
 beep
2: prt "INTERPOL
 ACION   LAGRANG
 IANA EN  O(N,
 M)":spc :spc
3: ent N,M:(N+
 1)(M+1)→D:dim
 A[D,D],X[N+1],
 Y[M+1],Z[N+1,M+
 1]
4: fxd 0:prt "
      N ="&str(N)
5: prt "      M
 ="&str(M):spc :
 spc :fxd 2
6: for I=1 to N+
 1:ent "PRIMERA
 COORDENADA ?",
 X[I]
7: for J=1 to M+
 1:if I=1:ent
 "SEGUNDA COORDE
 NADA ?",Y[J]
8: ent "VALOR?",
 Z[I,J]
9: next J:next I
10: prt "PUNTOS
 :":spc
11: for I=1 to
 N+1:for J=1 to
 M+1
12: prt "["&str(
 X[I])&","&str(
 Y[J])&"]"
13: next J:next
 I
14: spc :spc :
 prt "VALORES
 :":spc
15: for I=1 to
 N+1:for J=1 to
 M+1
16: prt Z[I,J]:
 next J:next I:
 spc :spc
17: dim W[D]
18: for K=1 to
 M+1:for I=1 to
 N+1:Z[I,K]→W[(K
 -1)(N+1)+I]:
 next I:next K
19: for I=1 to
 D:1→A[I,1]:next
  I
20: 0→H→G
21: for J=2 to
 D:if H=N:G+1→G:
 0→H:goto "AQUI"
22: H+1→H
23: "AQUI":0→F:
 1→E:for I=1 to
 D
24: if F=N+1:E+
 1→E:0→F
25: F+1→F
26: X[F]=0 and
 H=0→U:Y[E]=0
 and G=0→V
27: if U=1 and
 V=1:goto 32
28: if U=1 and
 V=1:1→A[I,J]:
 goto 32
29: if U=1:Y[E]→
 G→A[I,J]:goto 32
30: X[F]→H→A[I,
 J]:goto 32
31: X[F]→H→Y[E]→
 G→A[I,J]
32: next I:next
 J
33: dim S[D,2:D,
 2:D],L[D,2:D]
34: for I=2 to
 D:Z[1,1]A[1,1]
 A[1,1]→L[1,1]
35: for J=2 to
 D:A[J,1]-A[1,
 1]A[J,1]/A[1,
 1]→S[1,I,J]:
 next J:next I
36: 0→H→G
37: prt "LAS
 FUNCIONES DE
 LA BASE SON:"
38: spc :prt
 "1":1→H→G:fxd 0
39: for J=2 to D
40: for I=1 to
 D:if H=N:G+1→G:
 0→H:goto "ALLI"
41: H+1→H
42: "ALLI":prt
 "X ↑"&str(H)&"
 Y ↑"&str(G):
 if H=N:if G=M:
 goto 44
43: next I:next
 J
44: dim C[D,2:D,
 D]:fxd 2
45: for I=2 to
 D:-A[1,I]/A[1,
 1]→C[1,I,I]:
 1→C[1,I,I]:next
  I
46: dim T[D,D]
47: Z[1,1]/A[1,
 1]→T[1,1]
48: for K=2 to
 D:for C=1 to K-
 1
49: T[K-1,C]→
 (W[K]-L[K-1,
 K])C[K-1,K,C]
 S[K-1,K,K]→T[K,
 C]:next C
```

```
90: [W[K]-L[K-1,
 K]]C[K-1,K,K]/
 S[K-1,K,K]→T[K,
 K]
91: if K>D-1
 then "MAS ALLA"
 src !src
92: for I=K+1
 to D
93: [W[K]-L[K-1,
 K]]S[K-1,K,I]/
 S[K-1,K,K]→L[K-
 1,I]→L[K,I]
94: for J=K+1
 to D!S[K-1,I,
 J]-S[K-1,I,K]S[
 K-1,K,J]/S[K-1,
 K,K]→S[K,I,J]
 next J
95: for C=1 to
 K-1!C[K-1,I,C]-
 S[K-1,I,K]C[K-
 1,K,C]/S[K-1,K,
 K]→C[K,I,C]
96: next C
97: C[K-1,I,I]→C
 [K,I,I]!-S[K-1,
 I,K]C[K-1,K,K]
 S[K-1,K,K]→C[K,
 I,K]
98: next I!next
 K
99: "MAS ALLA":p
 rt "LA SOLUCION
  DEL PROBLEMA
 ES EL"
60: prt "POLINOM
 IO QUE   TIENE
 POR COEFI-CIENT
 ES RESPECTO"
61: prt "DE LA
 BASE ANTE-RIOR,
 EN EL ORDENDADO
 :"
62: src !for
 C=1 to D!prt
 T[D,C]!next C
```

* EJEMPLO *

INTERPOLACION LAGRANGIANA EN R(N,M)

N = 1
M = 2

PUNTOS :

[1.00 , 1.00]
[1.00 , 2.00]
[1.00 , 3.00]
[2.00 , 1.00]
[2.00 , 2.00]
[2.00 , 3.00]

VALORES :

9.50
31.00
66.50
16.00
59.00
130.00

LA SOLUCION DEL PROBLEMA ES EL POLINOMIO QUE TIENE POR COEFICIENTES RESPECTO DE LA BASE ANTERIOR,EN EL ORDENDADO:

9.00
-1.00
0.00
0.50
0.00
7.00

LAS FUNCIONES DE LA BASE SON:

1
X ↑ 1 *Y ↑ 0
X ↑ 0 *Y ↑ 1
X ↑ 1 *Y ↑ 1
X ↑ 0 *Y ↑ 2
X ↑ 1 *Y ↑ 2

```
0: dsp "ALGORITM
 O II : TRIGONOM
 ETRICO"|wait
 3000
1: prt "@INTERPO
 LACION  LAGRANG
 IANO TRI-GONOME
 TRICA@"|spc ;
 spc
2: ent T|dim
 A[2T+1,2T+1],
 X[2T+1],A$[20],
 F$[80]
3: beep|beep|
 beep
4: dsp "LOS VALO
 RES X[I] DEBEN
 DARSE EN RADIAN
 ES"|wait 3000
5: beep|beep
6: for I=1 to
 2T+1|ent X[I];
 next I|rad
7: prt "LOS PUNT
 OS:"|aprt X
8: prt "LAS FUNC
 IONES DE LA
 BASE SON:"|spc
 |spc |fxd 0
9: prt "1"
10: spc |for
 I=2 to 2T+1|I/
 2→C|if Z*int(C)
 =I|prt "COS"&st
 r(I/2)&"X"|gto
 12
11: prt "SEN"&st
 r((I-1)/2)&"X"
12: spc |next I;
 spc |spc |fxd 2
13: for I=1 to
 2T+1|1→R[I,1];
 next I
14: for I=1 to
 2T+1|for J=3
 to 2T+1 by 2;
 sin((J-1)X[I]/
 2)→A[I,J]|next
 J
15: for K=2 to
 2T by 2|cos(KX[
 I]/2)→A[I,K];
 next K|next I
16: dim P[2T+1,
 2T+1],Z[2T+1],
 R[2T-1,2T+1,2T+
 1],L[2:2T+1,2T+
 1]
17: dim S[2:2T+
 1,2T+1,2:2T+1]
18: ent "VALORES
  O FUNCION?",A$
19: cap(A$)→A$;
 if A$[1,1]="F";
 gto 59
20: for I=1 to
 2T+1|ent Z[I];
 next I
21: prt "LOS
 VALORES:"|aprt
 Z
22: Z[1]→P[1,1]
23: for I=2 to
 2T+1|1→R[1,I,
 I];-A[1,I]→R[1,
 I,1]
24: Z[1]A[I,1]→L
 [I,1]
25: for J=2 to
 2T+1|A[J,I]-
 A[1,I]A[J,1]→S[
 J,1,I]|next J;
 next I
26: dim D[T],
 N[T],M[T]
27: S[2,1,2]S[3,
 1,3]-S[2,1,3]S[
 3,1,2]→D[1]
28: S[2,1,3](L[3
 ,1]-Z[3])-S[3,
 1,3](L[2,1]-
 Z[2])→N[1]
29: S[3,1,2](L[2
 ,1]-Z[2])-S[2,
 1,2](L[3,1]-
 Z[3])→M[1]
30: dim U[T,2T+
 1],V[T,2T+1]
31: for K=1 to
 T|for I=1 to
 2K-1
32: P[2K-1,I]+
 (N[K]R[2K-1,2K,
 I]+M[K]R[2K-1,
 2K+1,I])/D[K]→P
 [2K+1,I]
33: next I|N[K]R
 [2K-1,2K,2K]/
 D[K]→P[2K+1,2K]
34: M[K]R[2K-1,
 2K+1,2K+1]/D[K]
 →P[2K+1,2K+1]
35: for H=2 to
 2T+1
36: L[H,2K-1]+
 (N[K]S[H,2K-1,
 2K]+M[K]S[H,2K-
 1,2K+1])/D[K]→L
 [H,2K+1]|next H
37: if K=T|gto
 "ALLI"
38: for J=2K+2
 to 2T+1
39: S[2K,2K-1,
 2K+1]S[2K+1,2K-
 1,J]-S[2K+1,2K-
 1,2K+1]S[2K,2K-
 1,J]→U[K,J]
40: S[2K+1,2K-1,
 2K]S[2K,2K-1,
 J]-S[2K,2K-1,
 2K]S[2K+1,2K-1,
 J]→V[K,J]
41: for I=1 to
 2K-1
42: R[2K-1,J,I]+
 (U[K,J]R[2K-1,
 2K,I]+R[2K-1,
 2K+1,I]V[K,J])/
 D[K]→R[2K+1,J,
 I]
43: next I|R[2K-
 1,J,J]→R[2K+1,
 J,J]
```

```
44: U[K,J]R[2K-
 1,2K,2K]/D[K]→R
 [2K+1,J,2K]
45: V[K,J]R[2K-
 1,2K+1,2K+1]/
 D[K]→R[2K+1,J,
 2K+1]
46: for C=2K+2
 to 2T+1
47: S[C,2K-1,J]+
 (S[C,2K-1,2K]U[
 K,J]+S[C,2K-1,
 2K+1]V[K,J])/
 D[K]→S[C,2K+1,
 J]
48: next C:next
 J
49: S[2K+2,2K+1,
 2K+2]S[2K+3,2K+
 1,2K+3]→D[K+1]
50: D[K+1]-S[2K+
 2,2K+1,2K+3]S[2
 K+3,2K+1,2K+
 2]→D[K+1]
51: S[2K+2,2K+1,
 2K+3](L[2K+3,
 2K+1]-Z[2K+3])→
 N[K+1]
52: N[K+1]-S[2K+
 3,2K+1,2K+3](L[
 2K+2,2K+1]-Z[2K
 +2])→N[K+1]
53: S[2K+3,2K+1,
 2K+2](L[2K+2,
 2K+1]-Z[2K+2])→
 M[K+1]
54: M[K+1]-S[2K+
 2,2K+1,2K+2](L[
 2K+3,2K+1]-Z[2K
 +3])→M[K+1]:
 next K
55: "ALLI":"@EL
 ELEMENTO IN-
 TERPOLADOR TIEN
 E "→F@
56: "COEFICIENTE
 S CONRESPECTO
 A LA BASE ANTER
 IOR@"→F$[33]:
 prt F$:@pc
57: for I=1 to
 2T+1:prt P[2T+
 1,I]:next I:end
58: "Y":
59: @sp "DEFINA
 LA FUNCION EN
 LINEA 58":wait
 2000
60: @sp "DESPUES
  ESCRIBA cont
 61 Y PULSE EXEC
 UTE":stp
61: for I=1 to
 2T+1:'f'(X[I])→
 Z[I]:next I
 @to 21
```

```
@EJEMPLO@

@INTERPOLACION
LAGRANGIANO TRI-
GONOMETRICA@


LOS PUNTOS:

                0.00
                0.79
                1.57
                3.14
                4.71


LAS FUNCIONES DE
 LA BASE SON:

1
COS 1X
SEN 1X
COS 2X
SEN 2X

LOS VALORES:

                2.00
               -2.41
               -6.06
                2.00
               -2.00


@EL ELEMENTO IN-
TERPOLADOR TIENE
COEFICIENTES CON
RESPECTO A LA BA
SE ANTERIOR@

               -1.00
                0.00
               -2.00
                3.00
               -0.00
```

```
0: dsp "ALGORITM
 O II : TRIGONOM
 ETRICO"!wait
 3000
1: prt "@INTERPO
 LACION  DE HERM
 ITE  TRI-GONOME
 TRICA@"!spc !
 spc
2: ent T!dim
 A[2T+1,2T+1],
 X[T+1],F$[80]
3: beep!beep!
 beep
4: dsp "LOS VALO
 RES X[I] DEBEN
 DARSE EN RADIAN
 ES"!wait 3000
5: beep!beep
6: for I=1 to T+
 1!ent X[I]!next
  I!rad
7: prt "LOS PUNT
 OS:"!prt X
8: prt "LAS FUNC
 IONES DE LA
 BASE SON:"!spc
 !fxd 0
9: prt "1"
10: for I=2 to
 2T+1!I/2→C!if
 2=int(C)=I!prt
 "COS"&str(I/
 2)&"X"!goto 12
11: prt "SEN"&st
 r((I-1)/2)&"X"
12: next I!spc :
 fxd 2
13: 1→A[1,1]
14: for I=2 to
 2T by 2!1→A[I,
 I]!0→A[I+1,I]!
 next I
15: for J=2 to
 T by 2!cos(JX[I
 ])→A[I,J]!sin(J
 X[I])→A[I,J+1]!
 next J
16: for I=1 to
 T!for J=1 to T!
 cos(JX[I+1])→A[
 2I,2J]!sin(JX[I
 +1])→A[2I,2J+1]
17: -Jsin(JX[I+
 1])→A[2I+1,2J]!
 Jcos(JX[I+1])→A
 [2I+1,2J+1]!
 next J!next I
18: dim P[2T+1,
 2T+1],Z[2T+1],
 R[2T-1,2T+1,2T+
 1],L[2:2T+1,2T+
 1]
19: dim S[2:2T+
 1,2T+1,2:2T+1]
20: dsp "VALORES
 ?"!wait 1500
21: for I=1 to
 2T+1!ent Z[I]!
 next I
22: prt "LOS
 VALORES:"!prt
 Z
23: Z[1]→P[1,1]
24: for I=2 to
 2T+1!1→R[1,I,
 I]!-A[1,I]→R[1,
 I,1]
25: Z[1]R[I,1]→L
 [I,1]
26: for J=2 to
 2T+1!A[J,I]-
 A[1,I]A[J,1]→S[
 J,1,I]!next J!
 next I
27: dim D[T],
 N[T],M[T]
28: S[2,1,2]S[3,
 1,3]-S[2,1,3]S[
 3,1,2]→D[1]
29: S[2,1,3](L[3
 ,1]-Z[3])-S[3,
 1,3](L[2,1]-
 Z[2])→N[1]
30: S[3,1,2](L[2
 ,1]-Z[2])-S[2,
 1,2](L[3,1]-
 Z[3])→M[1]
31: dim U[T,2T+
 1],V[T,2T+1]
32: for K=1 to
 T!for I=1 to
 2K-1
33: P[2K-1,I]+
 (N[K]R[2K-1,2K,
 I]+M[K]R[2K-1,
 2K+1,I])/D[K]→P
 [2K+1,I]
34: next I!N[K]R
 [2K-1,2K,2K]/
 D[K]→P[2K+1,2K]
35: M[K]R[2K-1,
 2K+1,2K+1]/D[K]
 →P[2K+1,2K+1]
36: for H=2 to
 2T+1
37: L[H,2K-1]+
 (N[K]S[H,2K-1,
 2K]+M[K]S[H,2K-
 1,2K+1])/D[K]→L
 [H,2K+1]!next H
38: if K=T!goto
 "ALL"
39: for J=2K+2
 to 2T+1
```

```
40: S[2K,2K-1,
 2K+1]S[2K+1,2K-
 1,J]-S[2K+1,2K-
 1,2K+1]S[2K,2K-
 1,J]→U[K,J]
41: S[2K+1,2K-1,
 2K]S[2K,2K-1,
 J]-S[2K,2K-1,
 2K]S[2K+1,2K-1,
 J]→V[K,J]
42: for I=1 to
 2K-1
43: R[2K-1,J,I]+
 (U[K,J]R[2K-1,
 2K,I]+R[2K-1,
 2K+1,I]V[K,J])/
 D[K]→R[2K+1,J,
 I]
44: next I:R[2K-
 1,J,J]→R[2K+1,
 J,J]
45: U[K,J]R[2K-
 1,2K,2K]/D[K]→R
 [2K+1,J,2K]
46: V[K,J]R[2K-
 1,2K+1,2K+1]/
 D[K]→R[2K+1,J,
 2K+1]
47: for C=2K+2
 to 2T+1
48: S[C,2K-1,J]+
 (S[C,2K-1,2K]U[
 K,J]+S[C,2K-1,
 2K+1]V[K,J])/
 D[K]→S[C,2K+1,
 J]
49: next C:next
 J
50: S[2K+2,2K+1,
 2K+2]S[2K+3,2K+
 1,2K+3]→D[K+1]
51: D[K+1]-S[2K+
 2,2K+1,2K+3]S[2
 K+3,2K+1,2K+
 2]→D[K+1]
52: S[2K+2,2K+1,
 2K+3](L[2K+3,
 2K+1]-Z[2K+3])+
 N[K+1]
53: N[K+1]-S[2K+
 3,2K+1,2K+3](L[
 2K+2,2K+1]-Z[2K
 +2])→N[K+1]
54: S[2K+3,2K+1,
 2K+2](L[2K+2,
 2K+1]-Z[2K+2])+
 M[K+1]
55: M[K+1]-S[2K+
 2,2K+1,2K+2](L[
 2K+3,2K+1]-Z[2K
 +3])→M[K+1]:
 next K
56: "ALLI":"@EL
 ELEMENTO IN-
 TERPOLADOR TIEN
 E "+F$
57: "COEFICIENTE
 S CONRESPECTO
 A LA BASE ANTER
 IOR@"→F$[33]:
 prt F$:inc
58: for I=1 to
 2T+1:prt P[2T+
 1,I]:next I
```

```
@EJEMPLO@

@INTERPOLACION
DE HERMITE  TRI-
GONOMETRICA@

LOS PUNTOS:

                0.00
                0.79
                1.57


LAS FUNCIONES DE
 LA BASE SON:

1
COS 1X
SEN 1X
COS 2X
SEN 2X

LOS VALORES:

                1.00
                0.00
                1.41
                0.00
               -0.00


@EL ELEMENTO IN-
TERPOLADOR TIENE
COEFICIENTES CON
RESPECTO A LA BA
SE ANTERIOR@

                2.00
               -1.00
                1.00
                0.00
                0.00
```

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

[1] ATKINSON,K.E. : "An introduction to Numerical Analysis". John Wiley & Sons. (1978)

[2] BLUM,E.K. : "Numerical Analysis and computation. Theory and practice". Addison-Wesley. (1972)

[3] BREZINSKI,C. : "A general extrapolation algorithm". Num. Math. 35, 175-187. (1980)

[4] BREZINSKI,C. : "The Mühlbach-Neville-Aitken algorithm and some extensions". B.I.T. 20, 200-212. (1980)

[5] DAVIS,P.J. : "Interpolation and approximation". Blaisdell.(1963)

[6] FADDEEV,D.K. & FADDEEVA,V.N. : "Computational methods of linear Algebra". W.H. freeman. (1963)

[7] GANTMACHER,F.R. : "Théorie des matrices". Tomo 1. Dunod. (1966)

[8] GASCA,M. & LOPEZ-CARMONA,A. : "Interpolación por recurrencia: una fórmula general". Actas VII Jornadas Matemáticas Hispano-Lusas. (1980)

[9] GASCA,M. & LOPEZ-CARMONA,A. : "A general recurrence interpolation formula and its applications to multivariate interpolation". Journal of Approx. Theory 34, 361-374. (1982)

[10] GASCA,M. & LOPEZ-CARMONA,A. & RAMIREZ,V. : "A generalized Sylvester's identity on determinants and its applications to interpolation problems". Multivariate Approx. Theory II. W. Schempp & K. Zeller. I.S.N.M. 61, 171-184. Birkhauser Verlag Basel.(1982)

[11] GASCA,M. & LEBRON,E. : "Métodos iterativos para la resolución de un problema de interpolación de Hermite trigonométrico". Actas IX Jornadas Matem. Hispano-Lusas. Salamanca. (1982)

[12] GASCA,M. & LEBRON,E. : "A note on recurrence interpolation formula for certain sets of points in R^k". Proceedings del congreso "Numerische Methoden der Aproximations-Theorie". Oberwolfach 1983. Birkhauser Verlag (en prensa).

[13] GASCA,M. & LEBRON, E. : "Existencia y unicidad de solución de problemas de interpolación a partir de otros más simples". Actas VI C.E.D.Y.A., Jaca 1983 (en prensa).

[14] HAVIE,T. : "Remarks on the Mühlbach-Neville-Aitken algorithm". Math. and Computation 2. Universidad de Trodheim,Noruega.(1980)

[15] HAVIE,T. : "Remarks on a unified theory for classical and generalized interpolation and extrapolation". B.I.T.,465-474.(1981)

[16] HENRICI,P. : "Elementos de Análisis Numérico". Trillas. (1972)

[17] ISAACSON,E. & KELLER,H.B. : "Analysis of Numerical methods". John Wiley & Sons. (1966)

[18] KARLIN,S. : "Total positivity". Vol. I. Stanford University Press. (1968)

[19] LARKIN,F.M. : "Some techniques for rational interpolation". Computer J., 10, n° 2, 178-187. (1967)

[20] LARKIN,F.M. : "A class of methods for tabular interpolation". Proce. Camb. Phil. Soc. 63, 1101-1114. (1967)

[21] LOPEZ-CARMONA,A. : "Interpolación por recurrencia en varias variables". Tesis. Universidad de Granada. (1981)

[22] LYCHE,T. : "A Newton form for trigonometric Hermite interpolation". Research report in informatics. University of Oslo.(1978)

[23] LYNESS,J.N. & NINHAM,B.W. : "Numerical quadrature and a ymptotic expansions". Mathe. Comp. 2, 162-178. (1967)

[24] MAEZTU,J.I. : "Interpolación de Lagrange y Hermite en R^k". Tesis. Universidad de Granada. (1979)

[25] MÜHLBACH,G. : "Neville-Aitken algorithm for interpolation by functions of Cebysev-systems in the sense of Newton and in a generalized sense of Hermite". Theory of Approx. with applications. Law, Shaney editores, Acad. Press 1976, p. 200-212.

[26] MÜHLBACH,G. : "Error estimates for extrapolation operators". Journal of Approx. Theory 21, 328-332. (1977)

[27] MÜHLBACH,G. : "Two algorithms for partially solving a system of linear equations". Repport Univ. Hannover. (1978)

[28] MÜHLBACH,G. : "The general Neville-Aitken-algorithm and some applications". Num. Math. 31, 97-110. (1978)

[29] MÜHLBACH,G. : "The general recurrence relation for divided differences and the general Newton-interpolation algorithm with applications to triginometric interpolation". Num. Math. 32, 393-408. (1979)

[30] MÜHLBACH,G. : "An algorithmic approach to Hermite-Birkhoff-interpolation". Num. Math. (1979)

[31] MÜHLBACH,G. : "An algorithmic approach to finite linear interpolation". Approx. Theory III. E.W. Cheney Ed.,655-660. Academic Press. (1980)

[32] MÜHLBACH,G. : "On two general algorithms for extrapolation with applications to numerical differentiation and integration". Proceedings of the conference on "Padé Approximat. and its Applications". (de Bruin, van Rossum edit.) L.N.M. 888, Springer Verlag . (1981)

[33] MÜHLBACH,G. : "Extrapolation algorithms as elimination techniques with applications to systems of linear equations". Repport Institut fur Mathem. 152, 33-42. Univ. Hannover (1982)

[34] MÜHLBACH,G. : "Two composition methods for solving certain systems of linear equations". To appear in Num. Math.

[35] RAMIREZ,V. : "Interpolación de Hermite en varias variables". Tesis. Universidad de Granada.(1980)

[36] SCHNEIDER,C. : "Vereinfachte rekursionen zur Richardson-extrapolation in spezialfallen". Num. Math. 24. (1975)

[37] STOER,J. & BULIRSCH,R. : "Introduction to Numerical Analysis". Springer-Verlag. (1980)

[38] THACHER,H.C. & MILNE,W.E. : "Interpolation in several variables". J. Soc. Indust. Appl. Math. 8. (1960)

[39] ZARZER,E.A. : "On the method of extrapolation in the case of several discretization parameters". Num. Funct. Anal. and Optimization 3(1), 69-93 (1981)