Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas II Andalucía – Septiembre de 2019

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 11 de septiembre de 2019

Opción A

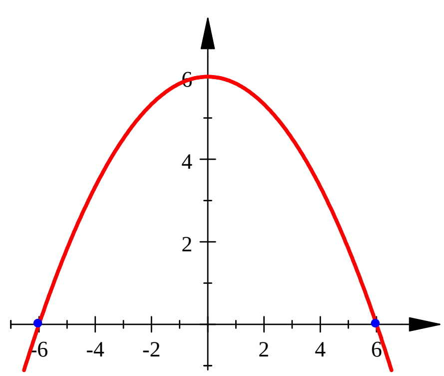
Ejercicio 1 [2'5 puntos] Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \dfrac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

Solución: La función f es una parábola convexa cuyo vértice posee abscisa en $x_v = \frac{-b}{2a} = 0$. Esta parábola corta al eje de abscisas en los puntos:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 - \frac{1}{6}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}x^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 6.$$

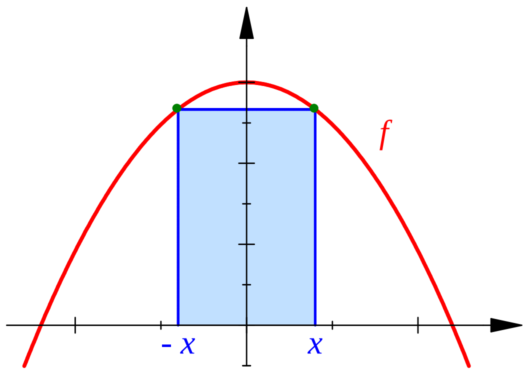
Con estos datos, podemos representarla:

x	$f(x)$
-6	0
0	6
6	0



*Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

Tomemos cualquier $x \in [0,6]$ y consideremos el rectángulo inscrito entre la gráfica de f y la recta $y=0$ (el eje de abscisas) de manera que uno de sus vértices sea el punto $(x,0)$. Su base es la del segmento $[-x,x]$, de anchura $2x$, y su altura es $f(x)$. Por tanto, su área, dependiendo de $x \in [0,6]$, es:



$$\mathcal{A}(x) = (2x)\left(6 - \frac{1}{6}x^2\right) = 12x - \frac{1}{3}x^3.$$

Claramente $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(6) = 0$. Debemos buscar el máximo absoluto de la función $\mathcal{A} : [0,6] \to \mathbb{R}$. Para ello, calculamos sus puntos críticos. Dado que $\mathcal{A}'(x) = 12 - x^2$, deducimos que:

$$\mathcal{A}'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(obsérvese que la solución $x = -\sqrt{12}$ de la ecuación $x^2 = 12$ no está en el dominio de la función $\mathcal{A}$). Para comprobar si este punto es un máximo, completamos la siguiente tabla:

$\mathcal{A}'$		$+$	máx	$-$	
$\mathcal{A}$	0	$\nearrow$	$2\sqrt{3}$	$\searrow$	6

$\mathcal{A}'(1) = 11 > 0, \quad \mathcal{A}'(5) = -13 < 0.$

Como $\mathcal{A}$ es creciente en $\left[0, 2\sqrt{3}\right[$ y decreciente en $\left]0, 2\sqrt{3}\right]$, deducimos que $\mathcal{A}$ posee un máximo absoluto en $x = 2\sqrt{3}$. Como:

$$f\left(2\sqrt{3}\right) = 6 - \frac{1}{6}\left(\sqrt{12}\right)^2 = 6 - \frac{12}{6} = 6 - 2 = 4,$$

concluimos que el rectángulo de mayor área en las condiciones propuestas:

$$\boxed{\text{posee base } 4\sqrt{3} \text{ y altura } 4.}$$

■

Ejercicio 2 [2'5 puntos] Determina la función $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ **sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple**

$$f'(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

($\ln$ **denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de** f **pasa por el punto** $(1,0)$**.**

SOLUCIÓN: Es importante comenzar observando que el dominio de la función f es el intervalo $(0,+\infty)$ por lo que ahí es donde buscaremos su expresión general. Integramos la función f' por partes de la siguiente forma:

$$f(x)=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \left\| \begin{array}{ll} u=\ln x & \Rightarrow \quad du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx=x^{-1/2}dx & \Rightarrow \quad v=\dfrac{x^{1/2}}{1/2}=2\sqrt{x} \end{array} \right\|$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-\int 2\sqrt{x}\,\frac{1}{x}\,dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-2\cdot 2\sqrt{x}+C=2\sqrt{x}\,(-2+\ln x)+C.$$

Como la gráfica de f pasa por el punto $(1,0)$, despejamos el valor de la constante C sabiendo que:

$$0=f(1)=2\sqrt{1}\,(-2+\ln 1)+C=2\,(-2)+C=-4+C,$$

de donde $C=4$. Así, la función f viene dada por la siguiente expresión general:

$$\boxed{f(x)=2\sqrt{x}\,(-2+\ln x)+4 \quad \text{para cada } x\in(0,+\infty)\,.}$$

■

Ejercicio 3 Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 0 \\ (m+2)\,x+y-z & = & m \\ 3x+(m+2)\,y+z & = & m \end{array} \right.$$

(a) [1'5 puntos] Discute el sistema según los valores de m.

(b) [1 punto] Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Calculamos el determinante de la matriz A del sistema, obteniendo:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix}=\left[1+(-3)+2\,(m+2)^2\right]-\left[6+(m+2)-(m+2)\right]$$

$$=\left[-2+2m^2+8m+8\right]-6=2m^2+8m=2m\,(m+4)\,.$$

Este determinante sólo se anula cuando $m = 0$ o $m = -4$. Por tanto, si $m \in \mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}$, la matriz A posee rango 3 (es inversible) y el sistema es compatible determinado. Estudiamos ahora los casos $m = 0$ y $m = -4$ utilizando el método de reducción de Gauss-Jordan.

Si $m = 0$, la matriz ampliada $(\, A^t \,|\, B \,)$ es:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Como los rangos de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada $(\, A^t \,|\, B \,)$ son iguales a 2, y hay tres incógnitas, el sistema es compatible indeterminado (uniparamétrico).

Si $m = -4$,

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & -4 \end{array} \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \end{array} \right\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right\|$$

Como la matriz del sistema A posee rango 2 y la matriz ampliada $(\, A^t \,|\, B \,)$ posee rango 3, el *teorema de Rouché-Fröbenius* nos garantiza que el sistema es incompatible. Por consiguiente, hemos llegado a la siguiente clasificación.

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \bullet \ \text{Si } m \in \mathbb{R}\setminus\{-4, 0\}, \text{ el sistema es compatible determinado.} \\ \bullet \ \text{Si } m = -4, \text{ el sistema es incompatible.} \\ \bullet \ \text{Si } m = 0, \text{ el sistema es compatible indeterminado.} \end{array} \right.}$$

Apartado (b). Cuando $m = 0$ hemos demostrado que el sistema es equivalente al sistema homogéneo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 0, \\ y + 5z & = & 0. \end{array} \right.$$

Si llamamos $\lambda = z$ entonces $y = -5z = -5\lambda$ y $x = -y - 2z = 5\lambda - 2\lambda = 3\lambda$. Por consiguiente, las infinitas soluciones del sistema viene dadas por:

$$\boxed{x = 3\lambda, \quad y = -5\lambda, \quad z = \lambda \quad \text{para cada } \lambda \in \mathbb{R}.}$$

■

Ejercicio 4 **Se consideran los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$ y $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$, donde α y β son números reales.**

(a) **[0'75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

(b) **[0'75 puntos] Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.**

(c) **[1 punto] Para $\alpha = 8$, determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Solución: **Apartado (a).** Un vector es perpendicular a otro cuando su producto escalar se anula. Por consiguiente, establecemos las ecuaciones:

$$\begin{array}{lllllll} \vec{u} \perp \vec{w} & \Leftrightarrow & \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 & \Leftrightarrow & (1, 2, 3) \cdot (2, \alpha, \beta) = 0 & \Leftrightarrow & 2 + 2\alpha + 3\beta = 0; \\ \vec{v} \perp \vec{w} & \Leftrightarrow & \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 & \Leftrightarrow & (1, -2, -1) \cdot (2, \alpha, \beta) = 0 & \Leftrightarrow & 2 - 2\alpha - \beta = 0. \end{array}$$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = -2, \\ 2\alpha + \beta = 2 \end{cases}$$

llegamos a la solución $\alpha = 2$ y $\beta = -2$.

Apartado (b). Para que los vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ tengan la misma dirección, sus coordenadas deben ser proporcionales. Por tanto:

$$\frac{2}{1} = \frac{\alpha}{-2} = \frac{\beta}{-1},$$

de donde $\alpha = -4$ y $\beta = -2$.

Apartado (c). Suponiendo que $\alpha = 8$, el vector $\vec{w}$ es combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ si existen dos números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Por tanto:

$$a(1, 2, 3) + b(1, -2, -1) = (2, 8, \beta).$$

Llegamos entonces al sistema:

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 2a - 2b = 8, \\ 3a - b = \beta. \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 2a - 2b = 8, \end{cases}$$

se deduce que $a = 3$ y $b = -1$, y entonces de la tercera igualdad deducimos que $\beta = 3a - b = 9 + 1 = 10$.

(a) $\alpha = 2$ y $\beta = -2$ **(b)** $\alpha = -4$ y $\beta = -2$ **(c)** $\beta = 10$

■

Opción B

Ejercicio 1 [2'5 puntos] Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) + ax + b & \textbf{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \textbf{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano) es derivable. Calcula a y b.

Solución: Para que la función f sea continua en $x = 0$, los límites laterales de f en $x = 0$ deben coincidir. Por un lado,

$$f\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[\operatorname{sen} x + ax + b \right] = b,$$

Por el otro lado, la función presenta una indeterminación de tipo $\dfrac{0}{0}$, que resolvemos utilizando la *regla de L'Hôpital*:

$$f\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \left[\text{Indet. } \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x+1}}{1} = 1.$$

Así f es continua en $x = 0$ cuando $b = 1$. En tal caso, la función primera derivada de f viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x + a, & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \dfrac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}, & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Como f es derivable en $x = 0$, esta función debe poseer límites laterales en $x = 0$ y estos deben ser iguales. Por un lado,

$$f'\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1 + a.$$

Por el otro lado, nuevamente nos encontramos ante una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$, que volvemos a resolver mediante la *regla de L'Hôpital*:

$$f'\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \left[\text{ Indet. } \frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x+1}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1-(x+1)}{(x+1)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{-x}{(x+1)^2}}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2(x+1)^2} = \frac{-1}{2}.$$

Por tanto, $a+1 = f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right) = \frac{-1}{2}$, de donde $a = \frac{-3}{2}$.

$$\boxed{a = \frac{-3}{2} \quad \text{y} \quad b = 1}$$

■

Ejercicio 2 Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

(a) **[1'25 puntos] Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados y los extremos relativos de f (abscisas en los que se obtienen y valores que se alcanzan).**

(b) **[1'25 puntos] Determina $a>0$ de manera que sea $\frac{1}{4}$ el área del recinto determinado por la gráfica de f en el intervalo $[0,a]$ y el eje de abscisas.**

Solución: **Apartado (a).** Dado que $f(0)=0$, el punto $(0,0)$ es el único punto de corte con el eje de ordenadas. De hecho, también es punto de corte con el eje de abscisas, y es el único ya que:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Por consiguiente,

$$\boxed{\text{la función } f \text{ solo corta a los ejes de coordenadas en el punto } (0,0).}$$

Para determinar los extremos relativos de f, calculamos su primera derivada:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} + x(-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2} = \left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Como la función exponencial nunca se anula, los puntos críticos de f son:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 - 2x^2\right) \mathrm{e}^{-x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La siguiente tabla nos indica la monotonía de f y sus extremos relativos:

f'	$-$	mín	$+$	máx	$-$
f	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$

$$\begin{cases} f'(-2) = f'(2) = -7\,\mathrm{e}^{-4} < 0, \\ f'(0) = 1 > 0. \end{cases}$$

Así, f posee un mínimo en $x = -\sqrt{2}/2$ y un máximo en $x = \sqrt{2}/2$. Como:

$$f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \exp\left(-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2},$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2},$$

$$\boxed{f \text{ posee un mínimo en } \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}\right) \text{ y un máximo en } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-1/2}\right).}$$

Apartado (b). Calculamos una primitiva de f de la siguiente forma:

$$\int f(x)\,dx = \int x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int (-2x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}\,\mathrm{e}^{-x^2} + C = -\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} + C.$$

Como el área del recinto indicado es $1/4$:

$$\frac{1}{4} = \int_0^a f(x)\,dx = \left(-\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2}\right]_{x=0}^{x=a} = -\frac{\mathrm{e}^{-a^2}}{2} - \left(-\frac{\mathrm{e}^0}{2}\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a^2}}{2}.$$

De esta forma:

$$\frac{1}{4} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-a^2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = 1 - \mathrm{e}^{-a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-a^2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -a^2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad a^2 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\ln 1 - \ln 2\right) = \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad a = \pm\sqrt{\ln 2} \approx \pm 0.83255.$$

Como buscamos una solución positiva, la única solución es:

$$\boxed{a = \sqrt{\ln 2}.}$$

■

Ejercicio 3 [2'5 puntos] Calcula, en grados, los tres ángulos de un triángulo sabiendo que el menor de ellos es la mitad del ángulo mayor y que la suma del ángulo menor y el ángulo mayor es el doble del otro ángulo.

Solución: Llamemos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ a los ángulos menor, mediano y mayor del triángulo. Sabiendo que la suma de las medidas de los tres ángulos de un triángulo es 180°, podemos escribir las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=180^\circ, \\ \widehat{A}=\dfrac{\widehat{C}}{2}, \\ \widehat{A}+\widehat{C}=2\widehat{B}. \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuaciones, deducimos que:

$$180^\circ=\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=\widehat{B}+2\widehat{B}=3\widehat{B} \quad\Rightarrow\quad \widehat{B}=60^\circ.$$

Ahora la segunda y la tercera ecuaciones nos dicen que:

$$120^\circ=2\widehat{B}=\widehat{A}+\widehat{C}=\frac{\widehat{C}}{2}+\widehat{C}=\frac{3}{2}\,\widehat{C} \quad\Rightarrow\quad \widehat{C}=120^\circ:\frac{3}{2}=80^\circ.$$

Por tanto, $\widehat{A}=\widehat{C}/2=40^\circ$.

$$\boxed{\text{Los ángulos del triángulo miden } 40^\circ,\ 60^\circ \text{ y } 80^\circ.}$$

■

Ejercicio 4 Considera las rectas $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-k}{2}=\dfrac{z}{2}$ **y** $s\equiv\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$**.**

(a) **[1'5 puntos] Halla k sabiendo que ambas rectas se cortan en un punto.**

(b) **[1 punto] Para $k=1$, halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.**

Solución: **Apartado (a).** Un punto de la recta r es $A_r=(2,k,0)$ y un vector director es $\overrightarrow{u}_r=(1,2,2)$. Igualmente, un punto de la recta s es $A_s=(-1,1,3)$ y un vector director es $\overrightarrow{u}_s=(-1,1,1)$. Si las rectas r y s se cortan en un punto, entonces están contenidas en un mismo plano, por lo que los vectores $\overrightarrow{u}_r$, $\overrightarrow{u}_s$ y $\overrightarrow{A_rA_s}$ son coplanarios, es decir, están contenidos en el mismo plano, lo que significa que no son linealmente independientes. Así, el determinante formado por sus coordenadas debe ser cero. Como $\overrightarrow{A_rA_s} = A_s - A_r = (-1,1,3) - (2,k,0) = (-3,1-k,3)$, llegamos a la ecuación:

$$0 = \det\left(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_s, \overrightarrow{A_rA_s}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1-k & 3 \end{vmatrix} = [\,3-6-(2-2k)\,] - [\,-6-6+(1-k)\,]$$
$$= (2k-5) - (-k-11) = 3k+6.$$

Por tanto,

$$\boxed{k = -2}$$

Apartado (b). Si $k=1$, el plano π que contiene a r y es paralelo a s debe contener al punto $A_r = (2,k,0) = (2,1,0)$ y debe llevar la dirección de los vectores $\overrightarrow{u}_r = (1,2,2)$ y $\overrightarrow{u}_s = (-1,1,1)$. Así, un vector normal $\overrightarrow{n}_\pi$ al plano π es:

$$\overrightarrow{n}_\pi = \overrightarrow{u}_r \times \overrightarrow{u}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, una ecuación general del plano debe ser de la forma $y - z = C$, donde podemos calcular la constante C para que este plano contenga al punto $A_r = (2,1,0)$. Así $1 - 0 = C$, de donde $C = 1$, de donde concluimos que una ecuación general del plano indicado es:

$$\boxed{y - z = 1}$$

■