



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Una estructura de retículo para hesitant fuzzy sets

Presentado por:
Pedro Maciá Román

Curso académico 2023-2024



Una estructura de retículo para hesitant fuzzy sets

Pedro Maciá Román

Pedro Maciá Román *Una estructura de retículo para hesitant fuzzy sets.*
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2023-2024.

**Responsable de
tutorización**

Luis Merino González
Departamento de Álgebra

Evangelina Santos Aláez
Departamento de Álgebra

Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Pedro Maciá Román

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2023-2024, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 17 de noviembre de 2025

Fdo: Pedro Maciá Román

A mis padres, que son luz y música.

Índice general

Agradecimientos	VII
Summary	IX
Introducción	XI
I. Nociones previas	1
1. Introducción a la Matemática Difusa	3
1.1. Definiciones	3
1.1.1. Retículos	4
1.2. Conceptos de matemática difusa	6
1.2.1. Conceptos clásicos	6
1.2.2. Conjuntos difusos	7
1.3. Extensiones difusas	8
1.3.1. T2FS	8
1.3.2. IVFS	10
2. Hesitant Fuzzy Sets	13
2.1. SVFS	13
2.2. HFS. Operaciones de Torra	13
2.3. Incompatibilidad con la estructura de retículo	14
II. Orden Simétrico. Estructura de retículo para $\mathcal{P}^*([0, 1])$	17
3. Orden a derecha y orden a izquierda	19
3.1. Orden a derecha	19
3.1.1. Definición y propiedades	19
3.1.2. Ínfimo para el orden a derecha	22
3.1.3. Supremo para el orden a derecha	23
3.2. Orden a izquierda	25
3.2.1. Simetría de los órdenes izquierda y derecha	25
3.2.2. Supremo e ínfimo para el orden a izquierda	27
4. Orden simétrico	31
4.1. Definición y propiedades	31
4.2. Ínfimo para el orden simétrico	35
4.2.1. Conceptos y resultados previos	35
4.2.2. Cálculo del ínfimo del orden simétrico.	43
4.3. Supremo para el orden simétrico	48
4.3.1. Restricciones del orden simétrico a otras extensiones	53

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis tutores Luis y Eva, por acompañarme a lo largo de este trabajo. Tanto sus conocimientos como su cercanía y su apoyo han sido fundamentales para llevar a cabo este TFG, y su entusiasmo al hacer matemáticas ha sido una inspiración y una motivación para seguir aprendiendo.

En segundo lugar quiero dar las gracias a mis amigos y compañeros de la carrera. A Julia, Carlos, Cristian, Martina, Carmen, Isa, Fer, Luije, Sara... y a todos los que me han hecho reír y me han sostenido cuando no me creía capaz. Parte de la belleza de las matemáticas se debe al color que tiene aprender y estudiar a vuestro lado.

Gracias infinitas no numerables a mi familia, que está siempre ahí, que cree en mí y que me acompaña día a día. A mi padre y a mi madre, por apostar por mi formación, tanto académica como en los demás aspectos. No he podido tener mejores ejemplos a seguir.

Y por último, quiero dar gracias por las matemáticas. A quien haya creado una aventura tan perfecta, un mundo tan estricto y tan vivo a la vez. A Dios, o a quien crea cada uno que es responsable de este juego.

Larga vida a las Matemáticas, que son A y Ω .

Summary

Fuzzy Mathematics, since its inception in the mid-20th century, has revolutionized the way of facing problems characterized by uncertainty and imprecision. With multiple applications, among which we can highlight decision-making algorithms, applications to medical diagnosis and treatment planning or generation of models for market or climate analysis, fuzzy sets have turned out to be of notable importance.

This area of mathematics arises from the need to adapt set theory so that it can capture features of inaccuracy in certain data. Instead of a dichotomy between membership or non-membership in a set, elements will have a degree of membership in that set. However, estimating the degrees of membership in a fuzzy set is an obstacle when applying Fuzzy Theory in practice. Zadeh, in [20], begins the development of fuzzy extensions, introducing the concept of *type-2 fuzzy set*. After this, a considerable number of extensions of the concept “fuzzy set” has been defined depending on the mathematical object that is used as the degree of membership. Among these fuzzy extensions, the IVFS [16], SVFS [7] or HFS [17] stand out.

All these extensions agree on an important aspect to study: how to compare the degrees of membership. This is, in mathematical language, how to provide the set of possible degrees of membership with a partial order. This problem is easy when the degree of membership belongs to the original set $[0, 1]$, but has proven to be more complicated in other extensions. For example, in the case of the closed subintervals of $[0, 1]$, the lack of an obvious total order creates computational problems when working with objects that are not related to each other. Faced with this problem, the concept of lattice is used, which is more demanding than a partially ordered set, since it allows hierarchies to be established between objects that are not comparable by the order, through “subobjects” or “superobjects”.

However, these “subobjects” and “superobjects” must be subject to certain conditions, to achieve some compatibility between lattice structures, since most fuzzy extensions are contained in others. This compatibility ensures correct use of lattice structures, thus allowing relations to be extended from a fuzzy extension to another extension that contains the previous one. In this context, the lattice structure defined in [7] by Grattan-Guinness for SVFS, with operations arising from the union and intersection of sets, does not extend Zadeh operations on FS. In order to deal with this problem, Torra proposes the so-called *Hesitant Fuzzy Sets* [17], HFS, as a solution, with two operations compatible with Zadeh’s operations. This has caught the attention of many researchers, and despite being a recent work (2010), many papers have been written on both practical and theoretical applications. As an illustration, we can highlight the decomposition of THFS using HFS families developed in [1], or the “three-way” decision method based on HFS averages [13].

Unfortunately, Torra operations on HFS do not provide lattice structure, and only a few studies address this problem. Most of the work on this topic deals with THFS (*Typical Hesitant*

Summary

Fuzzy Sets), in which the degrees of membership are finite subsets. Several papers propose different orders, in order to find a lattice structure compatible with Zadeh operations, such as the one obtained from the normalization process α and β that we find in [4], or the lexicographic orders that we find in [18], [10] and [11]. Despite providing a lattice structure, these orders do not extend the usual order of intervals, so the problem of extending the Zadeh minimum and maximum operations to HFS remained open until 2022, when the paper [9] was published. In this paper the symmetric order is defined. This order provides HFS with a lattice structure, and is compatible with the Zadeh operations for FS and for HFS. This is how this open problem is solved, as well as other problems such as (Challenge 5.3)[14].

The main objectives of this work are to understand the basic notions on fuzzy theory, to explore some of the L -fuzzy sets, and to understand in depth the symmetric order and how it provides HFS with a lattice structure.

Chapter 1 introduces some concepts about orders and lattices as well as the concept of *fuzzy set*, and extends some concepts from classical set theory to these fuzzy sets. Finally, it briefly reviews some of the most relevant fuzzy extensions for this work, such as the L -fuzzy sets, T2FS or IVFS extensions.

Chapter 2 presents SVFS (*Set Valued Fuzzy Sets*) and the operations proposed for this extension. Subsequently, the concept of HFS (*Hesitant Fuzzy Set*) is defined, as well as the operations proposed by Torra, proving that they do not verify the conditions needed to give a lattice structure. This presents the problem to which the solution is given in the paper *A lattice structure on Hesitant Fuzzy Sets* [9].

Chapter 3 develops right and left orders, defined in the non-empty and closed parts on the right and on the left, respectively. These orders will precede the symmetric order, developed in Chapter 4, in which some properties of the symmetric order are studied, and afterwards the infimum and supremum operations for said order are obtained, thus obtaining the structure of desired reticle. The chapter concludes by demonstrating that the symmetric order is compatible with the Zadeh operations for FS and HFS, and therefore the symmetric order is the solution to the problem posed in (Remark 2)[6]: “An interesting open problem is to provide SVFS with a lattice structure so that the Zadeh union and intersection are preserved when restricted to FSs.”.

This work intends to be mainly didactic, aiming to ease the understanding of the topic for new readers. Therefore, this work does not expound on highly complex problems of fuzzy logic, but rather explains in depth the symmetric order and illustrates it with several examples. It provides the reader with a pathway to study further problems in this field on its own.

Introducción

La Matemática Difusa, desde su inicio a mediados del siglo XX, ha revolucionado el modo de afrontar problemas caracterizados por la incertidumbre y la imprecisión. Con múltiples aplicaciones, entre las que podemos destacar los algoritmos de toma de decisiones, las aplicaciones al diagnóstico médico y a la planificación de tratamientos o la generación de modelos para el análisis de mercado o del clima, los conjuntos difusos han resultado ser de notable importancia.

Esta rama de las matemáticas surge de la necesidad de adaptar la teoría de conjuntos para que pueda captar rasgos de inexactitud de ciertos datos. En lugar de una dicotomía entre pertenencia o no pertenencia a un conjunto, los elementos tendrán un grado de pertenencia a dicho conjunto. Ahora bien, la estimación de los grados de pertenencia a un conjunto difuso es un obstáculo a la hora de aplicar la Teoría Difusa en la práctica. Zadeh, en [20], inicia el desarrollo de las extensiones difusas, introduciendo el concepto de *type-2 fuzzy set*. Tras ésta, se ha definido un número considerable de extensiones del concepto “conjunto difuso” (*fuzzy set*) dependiendo del objeto matemático que se use como grado de pertenencia. Entre estas extensiones difusas destacan los IVFS [16], SVFS [7] o HFS [17].

Todas estas extensiones coinciden en un aspecto importante a estudiar: cómo comparar los grados de pertenencia. Esto es, en lenguaje matemático, cómo dotar al conjunto de posibles grados de pertenencia de un orden parcial. Este problema es fácil cuando el grado de pertenencia se encuentra en el conjunto original $[0, 1]$, pero ha resultado ser más complicado en otras extensiones. Por ejemplo, en el caso de los subintervalos cerrados de $[0, 1]$, la falta de un orden total obvio genera problemas computacionales a la hora de trabajar con objetos que no están relacionados entre sí. Ante este problema, se utiliza el concepto de retículo, más exigente que el de conjunto parcialmente ordenado, ya que permite establecer jerarquías entre objetos no comparables por el orden, mediante “subobjetos” o “superobjetos”.

Sin embargo, estos “subobjetos” y “superobjetos” deben estar sujetos a ciertas condiciones, para lograr cierta compatibilidad entre las estructuras de retículo, ya que la mayoría de extensiones difusas están contenidas en otras. Esta compatibilidad asegura un uso correcto de las estructuras de retículo, permitiendo así extender relaciones de una extensión difusa a otra extensión que contenga a la anterior. En este contexto, la estructura de retículo definida en [7] por Grattan-Guinness para SVFS, con operaciones que surgen de la unión e intersección de conjuntos, no extiende las operaciones de Zadeh sobre FS. Ante este problema, Torra propone como solución los llamados *Hesitant Fuzzy Sets* (Conjuntos difusos dubitativos) [17], HFS, con dos operaciones compatibles con las operaciones de Zadeh. Esto ha llamado la atención de multitud de investigadores, y pese a ser un trabajo reciente (2010), se han escrito multitud de artículos y estudios sobre aplicaciones tanto prácticas como teóricas. A modo de ilustración, podemos destacar la descomposición de THFS mediante familias de HFS desarrollada en [1], o el método de decisión “three-way” basado en medias de HFS [13].

Desafortunadamente, las operaciones de Torra sobre HFS no aportan estructura de retículo, y sólo unos pocos estudios tratan este problema. La mayoría de estudios sobre este tema trabajan sobre THFS (*Typical Hesitant Fuzzy Sets*), en los cuales los grados de pertenencia son subconjuntos finitos. Varios artículos proponen distintos órdenes, con el objetivo de encontrar una estructura de retículo compatible con las operaciones de Zadeh, como el obtenido a partir del proceso de normalización α y β que encontramos en [4], o los órdenes lexicográficos que hallamos en [18], [10] y [11]. Pese a dar estructura de retículo, estos órdenes no extienden al orden usual de intervalos, por lo que el problema de extender las operaciones mínimo y máximo de Zadeh a los HFS permaneció abierta, hasta el año 2022 con la publicación del artículo [9], en el que se define el orden simétrico. Este orden da estructura de retículo, y es compatible con las operaciones de Zadeh para FS y para IVFS. Así se resuelve este problema abierto, además de otros retos como (Challenge 5.3)[14].

La intención de este Trabajo de Fin de Grado es principalmente didáctica. El objetivo principal es desarrollar el artículo *A lattice structure on hesitant fuzzy sets* [9], aportando ejemplos y gráficos e incluyendo los requisitos previos para facilitar su comprensión y estudio. Los principales objetivos de este trabajo son los siguientes:

- Obtener los conocimientos básicos sobre teoría de conjuntos difusos y retículos.
- Conocer algunas de las distintas extensiones difusas.
- Comprender el orden simétrico sobre $\mathcal{P}^*([0, 1])$ y la estructura de retículo que aporta a $\mathcal{P}^*([0, 1])$.

La estructura de este trabajo es como sigue.

En la primera parte de este TFG se desarrollan los conocimientos previos necesarios para este trabajo. El **Capítulo 1** introduce algunos conceptos sobre órdenes y retículos, así como el concepto de *conjunto difuso*, y extiende algunos conceptos de la teoría clásica de conjuntos a estos conjuntos difusos. Por último, recorre brevemente algunas de las extensiones difusas más relevantes para este Trabajo de Fin de Grado, como son las extensiones *L*-difusas, T2FS o IVFS.

El **Capítulo 2** presenta los SVFS (*Set Valued Fuzzy Sets*) y las operaciones propuestas para esta extensión. Posteriormente se define el concepto de HFS (*Hesitant Fuzzy Set*) así como las operaciones propuestas por Torra, demostrando que no cumplen las condiciones necesarias para dar estructura de retículo. Se presenta así el problema al que se da solución en el artículo *A lattice structure on Hesitant Fuzzy Sets* [9].

En la segunda parte se desarrolla en profundidad el artículo [9], teniendo como objetivo no solo la corrección matemática y el desarrollo del orden simétrico, sino la claridad en las explicaciones y la ejemplificación. El **Capítulo 3** desarrolla los órdenes a derecha y a izquierda, definidos en las partes no vacías y cerradas por la derecha y por la izquierda respectivamente. Estos órdenes precederán al orden simétrico, que se desarrolla en el **Capítulo 4**, en el cual se estudian en primer lugar algunas propiedades del orden simétrico, y a continuación se obtienen las operaciones ínfimo y supremo para dicho orden, obteniendo así la estructura de retículo deseada. El capítulo concluye demostrando que el orden simétrico es compatible con las operaciones de Zadeh para FS y HFS, probando así que el orden simétrico es la solución del problema planteado en (Remark 2)[6]: “Un problema abierto interesante es dotar a SVFS de una estructura de retículo de forma que la unión y la intersección de Zadeh se preserven al restringirse a FSs.”.

Parte I.

Nociones previas

1. Introducción a la Matemática Difusa

La Matemática Difusa es una rama de las matemáticas que extiende los conceptos matemáticos tradicionales a campos caracterizados por la imprecisión de sus datos. Gracias a ello, tiene una gran importancia en campos como el tratamiento de datos o la inteligencia artificial. Los conceptos desarrollados en este capítulo pueden encontrarse con más detalle en el libro [3].

1.1. Definiciones

En esta sección se recopilan las definiciones básicas que se utilizarán a lo largo del trabajo.

Definición 1.1. Una relación $\preceq$ definida en un conjunto X se dice de **orden** si cumple las siguientes propiedades:

1. (Propiedad reflexiva) $\forall u \in X$ se cumple $u \preceq u$.
2. (Propiedad antisimétrica) Dados $u, v \in X$, si $u \preceq v$ y $v \preceq u$, entonces $u = v$.
3. (Propiedad transitiva) Dados $u, v, w \in X$, si $u \preceq v$ y $v \preceq w$, entonces $u \preceq w$.

Definición 1.2. Un **conjunto parcialmente ordenado** (o **POSET**, del inglés *Partial Ordered Set*) es un par $(X, \preceq)$, con $\preceq$ una relación de orden en X .

Ejemplo 1.1. Los siguientes conjuntos con las siguientes relaciones de orden son conjuntos parcialmente ordenados:

- El conjunto de los números reales con el orden usual, $(\mathbb{R}, \leq)$
- El conjunto de los números naturales con la relación *divisibilidad*, $(\mathbb{N}, |)$
- Las partes de un conjunto X con la relación *inclusión*, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

Definición 1.3. Dado un conjunto ordenado $(X, \preceq)$ y un subconjunto $Y \subseteq X$, diremos que $x \in X$ es una **cota superior** de Y si $y \preceq x, \forall y \in Y$. Diremos que $z \in X$ es una **cota inferior** de Y si $z \preceq y, \forall y \in Y$.

Definición 1.4. Dado un conjunto ordenado $(X, \preceq)$ y un subconjunto suyo $U \subseteq X$, el **supremo** de U , $\sup(U) \in X$ es, si existe, el mínimo de las cotas superiores de U ; y el **ínfimo** de U , $\inf(U) \in X$ es, si existe, el máximo de las cotas inferiores de U .

Ejemplo 1.2. En los números reales con el orden usual, $(\mathbb{R}, \leq)$,

- $\sup\{a, b\} = \max\{a, b\}$
- $\sup\{]a, b[\} = b$
- $\inf\{[a, b] \} = a$

Ejemplo 1.3. En los números reales con el orden divisibilidad, $(\mathbb{N}, |)$,

$$\sup\{a, b\} = \text{mcm}(a, b); \inf\{a, b\} = \text{mcd}(a, b).$$

Ejemplo 1.4. Dado un conjunto X , en $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$,

$$\sup(A, B) = A \cup B; \inf(A, B) = A \cap B.$$

Definición 1.5. Dado un conjunto ordenado $(X, \preceq)$, un elemento $y \in X$ es **máximo** en X si $\forall x \in X$ se tiene $x \preceq y$. Un elemento $z \in X$ es **mínimo** en X si $\forall x \in X$ se tiene que $z \preceq x$.

Ejemplo 1.5. En el conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}, |)$, el elemento 1 es mínimo, ya que dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, se tiene $1|n$. El elemento 0 es máximo, ya que dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \cdot 0 = 0$, por tanto $n|0$.

Definición 1.6. Un orden $\preceq$ sobre un conjunto X se dice **orden total** si $\forall x, y \in X$, o bien $x \preceq y$ o bien $y \preceq x$. Al conjunto $(X, \preceq)$ se le llama entonces conjunto totalmente ordenado o cadena.

1.1.1. Retículos

Definición 1.7. Un **retículo** (en inglés, *lattice*) es un conjunto ordenado $(L, \preceq)$ que cumple que para todo par de elementos en L existen su supremo e ínfimo, es decir, $\forall a, b \in L, \exists \sup\{a, b\}, \exists \inf\{a, b\}$. Se denota

$$\sup\{a, b\} = a \vee b; \inf\{a, b\} = a \wedge b.$$

El supremo y el ínfimo pueden verse como operaciones en L . Algunas propiedades que verifican el supremo y el ínfimo son:

Proposición 1.1. (Primeras propiedades del supremo e ínfimo)

- i) $a \preceq a \vee b; b \preceq a \vee b$.
- ii) $a \wedge b \preceq a; a \wedge b \preceq b$.
- iii) Si $a \preceq c$ y $b \preceq c$, entonces $a \vee b \preceq c$.
- iv) Si $c \preceq a$ y $c \preceq b$, entonces $c \preceq a \wedge b$.

Demostración. Las propiedades i) y ii) son consecuencia de que $a \vee b$ es cota superior de $\{a, b\}$ y de que $a \wedge b$ es cota inferior de $\{a, b\}$. Probemos la propiedad iii), la propiedad iv) se prueba de forma análoga. Si $a \preceq c$ y $b \preceq c$, entonces c es cota superior de $\{a, b\}$. Por ser $a \vee b$ el mínimo de las cotas superiores, tenemos que $a \vee b \preceq c$. $\square$

Ejemplo 1.6. Los siguientes conjuntos son retículos:

1. Un conjunto totalmente ordenado es un retículo, con las operaciones $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a \wedge b = \min\{a, b\}$.
2. El conjunto $(\mathbb{N}, |)$ es un retículo, con las operaciones $m \vee n = \text{mcm}(m, n)$, $m \wedge n = \text{mcd}(m, n)$.
3. Para todo conjunto $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un retículo con $A \vee B = A \cup B$, $A \wedge B = A \cap B$.

Hasta ahora, hemos definido las operaciones del retículo (supremo e ínfimo) utilizando el orden del retículo. En la siguiente proposición se estudian algunas propiedades que caracterizan al supremo y al ínfimo, y construiremos a partir de ellos el orden del retículo.

Proposición 1.2. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Entonces las operaciones $\vee$ (supremo) y $\wedge$ (ínfimo) verifican las siguientes propiedades:

Dados $a, b, c \in L$,

1. **Conmutatividad:** $a \wedge b = b \wedge a$; $a \vee b = b \vee a$.
2. **Asociatividad:** $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$; $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
3. **Absorción:** $a \wedge (a \vee b) = a$; $a \vee (a \wedge b) = a$.
4. **Idempotencia:** $a \wedge a = a$; $a \vee a = a$.

Proposición 1.3. Sea L un conjunto, sean $\wedge$ y $\vee$ dos operaciones sobre L verificando las propiedades conmutativa, asociativa, idempotente y de absorción. Entonces, definiendo la relación de orden

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a \Leftrightarrow a \vee b = b$$

se tiene que $(L, \leq)$ es un retículo en el cual $\inf(a, b) = a \wedge b$ y $\sup(a, b) = a \vee b$.

Demostración. Comprobemos en primer lugar que la relación definida es, efectivamente, de orden. Sea $a \in L$. Por la propiedad de idempotencia, $a = a \wedge a = a \vee a$, y por tanto $a \leq a$. Sean ahora $a, b \in L$ tales que $a \leq b$ y $b \leq a$. Por definición, $a \wedge b = a$; $b \wedge a = b$. Por conmutatividad de las operaciones, $a = a \wedge b = b \wedge a = b$, luego $a = b$. Para probar la transitividad de la relación definida, sean $a, b, c \in L$ tales que $a \leq b$; $b \leq c$. Por definición, $a \wedge b = a$; $b \wedge c = b$. Entonces, por ser $\wedge$ asociativo, $a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c \Rightarrow a \leq c$. Por tanto, la relación $\leq$ definida es una relación de orden.

Comprobemos ahora que $\vee$ y $\wedge$ son el supremo y el ínfimo para el orden $\leq$:

$(a \vee b) \vee a = a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$. Por tanto, $a \leq a \vee b$. De forma simétrica para b se obtiene $b \leq a \vee b$.

Ahora, sea $c \in L$ tal que $a \leq c$; $b \leq c$. Por definición, $a \vee c = c$; $b \vee c = c$. Entonces, utilizando las propiedades de $\vee$, tenemos $c = c \vee c = (a \vee c) \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee (c \vee c) = (a \vee b) \vee c \Rightarrow a \vee b \leq c$. Por tanto $\vee$ define el supremo para $\leq$. Razonando análogamente obtenemos que $\wedge$ define el ínfimo para $\leq$.

Por estar ambas operaciones definidas en todo L , tenemos que para cada par de elementos en L existen supremo e ínfimo. Por tanto, $(L, \leq)$, con el orden $\leq$ construido a partir de $\wedge$ y $\vee$ tiene estructura de retículo. □

Definición 1.8. Un retículo $(L, \preceq)$ se dice **acotado** si existen $x, y \in L$ tales que, para el orden $\preceq$, x es máximo en L e y es mínimo en L .

Si se desea profundizar en los conceptos *Partial Ordered Set* y *Retículo*, se puede consultar los libros [5] y [8].

1.2. Conceptos de matemática difusa

La matemática difusa extiende los conceptos de la teoría de conjuntos clásica (donde la pertenencia a un conjunto es dicotómica) a conjuntos con pertenencia imprecisa. En esta sección estudiaremos como extender algunos conceptos clásicos, como operadores lógicos u operadores de conjuntos, a los conjuntos difusos.

1.2.1. Conceptos clásicos

Definición 1.9. Dado un conjunto X , al que llamaremos conjunto de referencia, se puede definir un conjunto A como los elementos $x \in X$ que cumplen la propiedad p .

$$A = \{x \in X : p(x)\}$$

La pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto A nos define la **función característica de A** del siguiente modo:

$$\chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Dadas dos proposiciones o propiedades p y q , pueden ser verdaderas (1) o falsas (0). En la lógica proposicional clásica encontramos, entre otras, las siguientes operaciones:

- Conjunción (AND, $\wedge$): $p \wedge q$ es cierto si y solo si p y q son ciertos.
- Disyunción (OR, $\vee$): $p \vee q$ es cierto si y solo si p o q son ciertos (si al menos uno de ellos es cierto).
- Negación (NOT, $\neg$): $\neg p$ es cierto si y solo si p es falso.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg p$
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0
0	1	1	0	1

Tabla 1.1.: Tabla de verdad de las principales operaciones lógicas.

Cualquier conjunto $A \subset X$ está unívocamente determinado por su función característica χ_A . Utilizando las operaciones de la lógica proposicional clásica, se definen las siguientes operaciones de conjuntos:

Definición 1.10. Dados dos conjuntos en X , $A = \{x \in X : p(x)\}$ y $B = \{x \in X : q(x)\}$, definimos los siguientes conceptos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in X : p(x) \vee q(x)\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in X : p(x) \wedge q(x)\}$
- Complementario: $\overline{A} = \{x \in X : \neg p(x)\}$

1.2.2. Conjuntos difusos

Consideramos el conjunto de referencia X .

Definición 1.11. Se define un **conjunto difuso** (FS , del inglés *Fuzzy Set*) A sobre X como una aplicación

$$A : X \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto A(x); \quad \forall x \in X,$$

donde $A(x)$ denota el **grado de pertenencia** de x al conjunto A . Cuanto más cercano a 0, menor es la pertenencia, y cuanto más cercano a 1, mayor es la pertenencia. Llamamos $FS(X)$ al conjunto de todos los conjuntos difusos sobre X .

Nótese que los conjuntos clásicos pueden verse como conjuntos difusos, en los casos en los que A solo toma valores 0 y 1. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales pares se puede ver como un conjunto difuso $A : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, donde dado $n \in \mathbb{N}$, $A(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2 \nmid n \\ 1 & \text{si } 2 \mid n \end{cases}$

A partir de la definición de conjunto difuso, se pueden extender varios conceptos propios de los conjuntos clásicos a conjuntos difusos.

Definición 1.12. Un conjunto difuso A es **vacío** si y solo si cumple

$$A(x) = 0; \quad \forall x \in X.$$

Un conjunto difuso es el **total** si y solo si $A(x) = 1; \quad \forall x \in X$.

Sean ahora A y B dos conjuntos difusos en X .

Definición 1.13. Sean $A, B \in FS(X)$. Diremos que A es **igual** que B , $A = B$, si y solo si $A(x) = B(x); \quad \forall x \in X$.

Diremos que A está **incluido** en B , $A \subseteq_{FS} B$, si y solo si $A(x) \leq B(x); \quad \forall x \in X$.

1.2.2.1. Unión, intersección y negación difusas

Definición 1.14. Lofti A. Zadeh, uno de los precursores de la matemática difusa, define en [20] las siguientes operaciones sobre conjuntos difusos.

Para A y B dos conjuntos difusos sobre el conjunto de referencia X , y $x \in X$ arbitrario:

- **Unión:** $(A \cup_F B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$
- **Intersección:** $(A \cap_F B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$
- **Negación:** $\bar{A}(x) = 1 - A(x)$

Estas operaciones cumplen las *leyes de De Morgan* y las *propiedades distributivas*, extendiendo así las propiedades de los conjuntos clásicos.

Proposición 1.4. Sean A, B, C tres conjuntos difusos sobre un conjunto de referencia X . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. *Leyes de De Morgan:*

1. Introducción a la Matemática Difusa

$$\begin{aligned}\overline{(A \cup_F B)} &= \overline{A} \cap_F \overline{B} \\ \overline{(A \cap_F B)} &= \overline{A} \cup_F \overline{B}\end{aligned}$$

2. Propiedades distributivas

$$\begin{aligned}C \cup_F (A \cap_F B) &= (C \cup_F A) \cap_F (C \cup_F B) \\ C \cap_F (A \cup_F B) &= (C \cap_F A) \cup_F (C \cap_F B)\end{aligned}$$

Nótese que las operaciones $\cup_F$ y $\cap_F$ provienen del orden 'estar incluido', $\subseteq_{FS}$. En efecto, dados $A, B \in FS(X)$, si $A \subseteq_{FS} B$, por definición $A(x) \leq B(x)$, $\forall x \in X$. Esto equivale a $\min(A(x), B(x)) = A(x)$; $\forall x \in X$, o lo que es igual, $A \cap_F B = A$. De forma análoga se obtiene que $A \subseteq_{FS} B \Leftrightarrow A \cup_F B = B$. Gracias a estas equivalencias se obtiene inmediatamente la siguiente proposición.

Proposición 1.5. $(FS(X), \cap_F, \cup_F)$ es un retículo acotado.

1.3. Extensiones difusas

Los conjuntos difusos pueden extenderse cambiando el objeto matemático que actúa como grado de pertenencia, obteniendo así nuevos tipos de conjuntos difusos. En esta sección veremos, en primer lugar, el concepto general de extensión de conjunto L -difuso (en inglés, L -Fuzzy Set), y veremos después algunos ejemplos de estas extensiones.

Definición 1.15. Sea L un retículo acotado. Un conjunto L -difuso A sobre X es una aplicación $A : X \rightarrow L$.

La clase de conjuntos L -difusos sobre X se denota $L-FS(X)$.

Podemos dotar a $L-FS(X)$ de una relación de orden del siguiente modo: dados dos conjuntos L -difusos sobre X , $A, B \in L-FS(X)$, diremos $A \leq_{LF} B$ si la desigualdad $A(x) \leq_L B(x)$ se cumple $\forall x \in X$, donde $\leq_L$ denota el orden del retículo L . El siguiente resultado es equivalente:

Proposición 1.6. Sea L un retículo acotado. Entonces $(L-FS(X), \cap_F, \cup_F)$ es un retículo acotado donde, dados $A, B \in L-FS(X)$, se definen $\cap_F$ y $\cup_F$ del siguiente modo:

- $(A \cap_{LF} B)(x) = A(x) \wedge_L B(x)$, para $x \in X$ arbitrario.
- $(A \cup_{LF} B)(x) = A(x) \vee_L B(x)$, para $x \in X$ arbitrario.

donde $\wedge_L$ es el ínfimo para el orden $\leq_L$ y $\vee_L$ es el supremo para el orden $\leq_L$.

Los conjuntos difusos de Zadeh, definidos previamente, son una particularización de conjuntos L -difusos $L-FS(X)$ con $L = [0, 1]$, y con operaciones $\wedge_{LF} = \min$, $\vee_{LF} = \max$. Estos conjuntos reciben también el nombre de **T1FS** (del inglés *Type 1 fuzzy set*).

1.3.1. T2FS

L. A. Zadeh define en [19] los **T2FS** (*Type 2 fuzzy set*) del siguiente modo:

Definición 1.16. Un T2FS A sobre X es una aplicación

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow FS([0, 1]) \\ x &\longmapsto A(x) : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto A(x)(t) \end{aligned}$$

Un T2FS puede verse como un conjunto difuso en el que el grado de pertenencia de los elementos de X es, a su vez, difuso. Por tanto, un T2FS sobre X se puede ver también como una aplicación $A : X \longrightarrow [0, 1]^{[0, 1]}$.

A partir de los escritos de Zadeh, los matemáticos Mizumoto y Tanaka (1976) proponen en [12] las siguientes operaciones unión e intersección para T2FS:

Definición 1.17. Dados $A, B \in T2FS(X)$, se define la unión y la intersección de A y B como

- $A \cup_{T2F} B(x) = A(x) \cup_F B(x); \forall x \in X$
- $A \cap_{T2F} B(x) = A(x) \cap_F B(x); \forall x \in X$

respectivamente.

Proposición 1.7. $(T2FS(X), \cap_{T2F}, \cup_{T2F})$ tiene estructura de retículo.

Observación 1.1. Pese a ser un retículo, esta estructura presenta un inconveniente: sus operaciones no extienden a las de Zadeh para FS. Veamos esto con un ejemplo. Supongamos $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, y consideremos los siguientes FS:

$$A(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } i = 2 \\ 1 & \text{si } i = 3 \end{cases} ; \quad B(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = 2 \\ \frac{1}{7} & \text{si } i = 3 \end{cases} . \text{ Calculemos, por ejemplo, la unión de}$$

A y B que propone Zadeh:

$$(A \cup_F B)(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } i = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } i = 2 \\ 1 & \text{si } i = 3 \end{cases} ;$$

El conjunto difuso $(A \cup_F B)(x_i)$ visto como un T2FS tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (A \cup_{T2F} B)(x_1)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \\ (A \cup_{T2F} B)(x_2)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \\ (A \cup_{T2F} B)(x_3)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \end{aligned}$$

De modo alternativo, veamos A y B como T2FS, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} A(x_1)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; & B(x_1)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{4} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \\ A(x_2)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{3} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; & B(x_2)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \\ A(x_3)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; & B(x_3)(t) &= \begin{cases} 1 & \text{si } t = \frac{1}{7} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} ; \end{aligned}$$

Aplicando la definición de unión para T2FS, $\cup_{T2F}$, tenemos

$$\begin{aligned} (A \cup_{T2F} B)(x_1)(t) &= \begin{cases} 1 \text{ si } t = \frac{1}{4} \text{ o } t = \frac{1}{2} ; \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} ; \\ (A \cup_{T2F} B)(x_2)(t) &= \begin{cases} 1 \text{ si } t = \frac{1}{2} \text{ o } t = \frac{1}{3} ; \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} ; \\ (A \cup_{T2F} B)(x_3)(t) &= \begin{cases} 1 \text{ si } t = \frac{1}{7} \text{ o } t = 1 ; \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases} ; \end{aligned}$$

Lo cual claramente no coincide con la unión para FS de Zadeh.

Se han propuesto otras operaciones unión e intersección para T2FS, pero las principales operaciones propuestas o bien no extienden las operaciones de Zadeh o bien no proporcionan una estructura de retículo para T2FS.

1.3.2. IVFS

Los IVFS (del inglés *Interval Valued Fuzzy Set*) son conjuntos L -difusos en los que el grado de pertenencia no se conoce con certeza, pero se puede situar dentro de un intervalo cerrado.

Definición 1.18. Un IVFS sobre X se define como una aplicación $A : X \rightarrow \mathbb{I}^c$, donde $\mathbb{I}^c$ denota el conjunto de los subintervalos cerrados de $[0, 1]$.

Definición 1.19. Sean A, B dos IVFS sobre X . Denotamos $A(x) = [A(x)^-, A(x)^+]$ y $B(x) = [B(x)^-, B(x)^+]$. Definimos las operaciones unión e intersección del siguiente modo:

- $A \cap_{\mathbb{I}^c} B(x) = A(x) \wedge_{\mathbb{I}} B(x) = [\min(A(x)^-, B(x)^-), \min(A(x)^+, B(x)^+)]$
- $A \cup_{\mathbb{I}^c} B(x) = A(x) \vee_{\mathbb{I}} B(x) = [\max(A(x)^-, B(x)^-), \max(A(x)^+, B(x)^+)]$

Estas operaciones extienden las operaciones de Zadeh, mediante la identificación de cada grado de pertenencia de un FS, α , con el intervalo $[\alpha, \alpha] \in \mathbb{I}^c$.

Proposición 1.8. $(IVFS(X), \cap_{\mathbb{I}^c}, \cup_{\mathbb{I}^c})$ es un retículo acotado.

Demostración. Para probar que es un retículo veamos que ambas operaciones provienen del ínfimo de un orden sobre $\mathbb{I}^c$. Este orden es $\leq_{IVF}$, que se define del siguiente modo:

$$A \leq_{IVF} B \Leftrightarrow A(x) \leq_{\mathbb{I}} B(x); \forall x \in X \Leftrightarrow A(x)^- \leq B(x)^- \text{ y } A(x)^+ \leq B(x)^+; \forall x \in X.$$

Veamos que efectivamente provienen de este orden. Tomemos $A, B \in IVFS(X)$. Si $A \leq_{IVF} B$, entonces por definición para cada $x \in X$ tenemos $A(x)^- \leq B(x)^-$ y $A(x)^+ \leq B(x)^+$. Esto equivale a que para todo $x \in X$ se cumplan las siguientes igualdades:

$\min(A(x)^-, B(x)^-) = A(x)^-, \min(A(x)^+, B(x)^+) = A(x)^+, \max(A(x)^-, B(x)^-) = B(x)^-, \max(A(x)^+, B(x)^+) = B(x)^+$. Pero estas cuatro igualdades son, por definición de las operaciones unión e intersección, equivalentes a $A \cap_{\mathbb{I}^c} B = A$ y $A \cup_{\mathbb{I}^c} B = B$.

Por tanto, las operaciones provienen de un orden parcial sobre $\mathbb{I}^c$, luego $(IVFS(X), \cap_{\mathbb{I}^c}, \cup_{\mathbb{I}^c})$ es un retículo. Es fácil ver que los conjuntos $\mathbf{0} = [0, 0]$ y $\mathbf{1} = [1, 1]$ son el mínimo y el máximo, respectivamente, de este retículo.

□

Existen otras muchas extensiones difusas diferentes, como por ejemplo los AIFS (*Atanassor Intuitionistic Fuzzy Sets*) [2], en los que el grado de pertenencia es una dúpla, en la cual el primer término es el grado con el que el elemento x pertenece al conjunto y el segundo término es el grado con el que dicho elemento no pertenece a él. Los T_3FS son conjuntos difusos en los que el grado de pertenencia de un elemento x es un $T2FS([0,1])$; los $T4FS$ son conjuntos difusos en los que los grados de pertenencia son $T3FS([0,1])$, y de forma iterativa se definen los llamados T_nFS , que pese a ser teóricamente válidos, no tienen hasta el momento aplicaciones para $n > 2$.

A continuación introduciremos las dos extensiones que serán centrales en este TFG: los SVFS y los Hesitant Fuzzy Sets.

Este recorrido por las distintas extensiones difusas se encuentra desarrollado con más detalle en [6], incluyendo más extensiones que no se citan en este TFG por no ser necesarias para su objetivo.

2. Hesitant Fuzzy Sets

Los **HFS** (del inglés *Hesitant Fuzzy Sets*, conjuntos difusos dubitativos) generalizan a la mayoría de extensiones que se trabajan actualmente, como los FS o los IVFS. Pese a que se han realizado diversos estudios, no se ha conseguido, hasta la publicación del paper *A lattice structure on hesitant fuzzy sets* [9], definir una estructura consistente con las operaciones de Zadeh sobre FS y con las operaciones sobre IVFS.

En este capítulo introduciremos brevemente el concepto de HFS, las operaciones definidas por Torra en [17] para estos conjuntos y veremos por qué no se verifican las propiedades deseadas para estas operaciones.

2.1. SVFS

En 1976, el matemático Ivor Grattan-Guinness presenta en [7] el concepto de **SVFS** (del inglés *Set Valued Fuzzy Set*), en el que los grados de pertenencia son subconjuntos no vacíos del intervalo $[0, 1]$.

Definición 2.1. Un **SVFS** A sobre X se define como una aplicación $A : X \rightarrow \mathcal{P}^*([0, 1])$, donde $\mathcal{P}^*([0, 1])$ denota el conjunto de las partes no vacías de $[0, 1]$. Denotamos $SVFS(X)$ al conjunto de SVFS sobre X .

El conjunto $\mathcal{P}^*([0, 1])$, con las definiciones clásicas de unión e intersección de conjuntos es un retículo acotado. Por tanto, el siguiente resultado es trivial:

Proposición 2.1. $(SVFS(X), \cap_{SVF}, \cup_{SVF})$ es un retículo acotado, donde $\forall A, B \in SVFS(X)$,

- $(A \cap_{SVF} B)(x) = A(x) \cap B(x); \forall x \in X$
- $(A \cup_{SVF} B)(x) = A(x) \cup B(x); \forall x \in X$

Sin embargo, como ocurría con los T2FS, estas operaciones no son consistentes con las operaciones de Zadeh para FS. Aunque Grattan-Guinness no continuó investigando en esta línea, Torra, en 2010 [17], propuso una solución al problema entonces abierto, de dotar a $SVFS(X)$ de dos operaciones compatibles con una estructura de retículo que extendieran a la estructura propuesta por Zadeh para los FS.

2.2. HFS. Operaciones de Torra

En 2010, Vincent Torra propone en [17] dos nuevas operaciones para SVFS, y cambia también el nombre de SVFS a HFS. Es importante notar que, pese a que no hay diferencias entre los grados de pertenencia de los SVFS y de los HFS, las operaciones que define Torra, que serán consistentes con las de Zadeh, suponen un cambio importante.

Definición 2.2. Un **HFS** A sobre X es una aplicación $A : X \longrightarrow \mathcal{P}^*([0, 1])$. Llamamos $HFS(X)$ al conjunto de todos los HFS sobre X .

Dados dos HFS sobre X , $A, B \in HFS(X)$, se definen las siguientes operaciones unión e intersección para HFS:

- $(A \cap_{HF} B)(x) = \{t \in A(x) \cup B(x) / t \leq \min(\sup(A(x)), \sup(B(x)))\}$
- $(A \cup_{HF} B)(x) = \{t \in A(x) \cup B(x) / t \geq \max(\inf(A(x)), \inf(B(x)))\}$

Proposición 2.2. La unión e intersección de HFS pueden definirse también del siguiente modo:

- $(A \cap_{HF} B)(x) = \{t \in A(x) \cup B(x) / t = \min(a, b) \text{ con } a \in A, b \in B\}$
- $(A \cup_{HF} B)(x) = \{t \in A(x) \cup B(x) / t = \max(a, b) \text{ con } a \in A, b \in B\}$

Demostración. Veamos que las dos definiciones de intersección son equivalentes. Sea $t \in A(x) \cup B(x)$ tal que $t \leq \min(\sup(A(x)), \sup(B(x)))$. En particular, $t \leq \sup(A(x))$ y $t \leq \sup(B(x))$, luego por definición de supremo, existen $\alpha \in A(x)$ y $\beta \in B(x)$ tales que $t \leq \alpha$ y $t \leq \beta$. Además $t \in A(x) \cup B(x)$. Por tanto, o bien $t \in A(x)$, con lo que $t = \min(t, \beta)$; o bien $t \in B(x)$, con lo que $t = \min(\alpha, t)$. En consecuencia $t = \min(a, b)$ con $a \in A(x)$, $b \in B(x)$. Sea ahora $t \in A(x) \cup B(x)$ tal que $t = \min(\alpha, \beta)$ con $\alpha \in A(x)$, $\beta \in B(x)$. Es claro que $t \leq \alpha \leq \sup(A(x))$ y $t \leq \beta \leq \sup(B(x))$. Tenemos así $t \leq \min(\sup(A(x)), \sup(B(x)))$. Concluimos pues que ambas definiciones son equivalentes.

La equivalencia entre las definiciones de unión se prueba de forma totalmente análoga. $\square$

Al contrario de lo que ocurría con las operaciones de Grattan-Guiness sobre SVFS, las operaciones de Torra sí son consistentes con las operaciones de Zadeh y con las operaciones definidas sobre IVFS. Esto ha hecho a los HFS ganar mucha importancia en el campo de la matemática difusa, utilizándose en problemas de toma de decisiones [13], así como para desarrollar la programación con palabras [15], entre otras aplicaciones.

Definición 2.3. Como un caso particular de HFS, cuando el grado de pertenencia de cada elemento $x \in X$ al conjunto A es un subconjunto finito no vacío de $[0, 1]$, el conjunto A se dirá un THFS (del inglés *Typical Hesitant Fuzzy Set*).

Así, un THFS A sobre X es una aplicación $A : X \longrightarrow \mathcal{P}^{f*}([0, 1])$, donde $\mathcal{P}^{f*}([0, 1])$ denota el conjunto de las partes finitas no vacías de $[0, 1]$.

2.3. Incompatibilidad con la estructura de retículo

Pese a extender las operaciones de Zadeh y las operaciones sobre IVFS, $(HFS, \cap_{HF}, \cup_{HF})$ no es un retículo, ya que sus operaciones no cumplen la propiedad de absorción.

Ejemplo 2.1. Sean $A = A(x) = \{0.3, 0.4, 0.6\}$ y $B = B(x) = \{0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$. Veamos que no se verifica la propiedad de absorción, esto es, $A \cup_{HF} (A \cap_{HF} B) \neq A$.

$$A \cap_{HF} B = \{t \in A \cup B / t \leq \min(A^+, B^+)\} = \{t \in A \cup B / t \leq 0.6\} = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}.$$

$$\begin{aligned} A \cup_{HF} (A \cap_{HF} B) &= \{t \in A \cup (A \cap_{HF} B) / t \geq \max(A^-, \inf(A \cap_{HF} B))\} = \\ &= \{t \in A \cup (A \cap_{HF} B) / t \geq 0.3\} = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\} \neq A. \end{aligned}$$

Por tanto no se cumple la propiedad de absorción.

Al no cumplirse esta propiedad deducimos que las operaciones de Torra no provienen del ínfimo y del supremo, respectivamente, de un orden. Quedó abierto así el problema planteado en [6](Remark 2) de encontrar en $\mathcal{P}^*([0, 1])$ un orden que lo dote de estructura de retículo, y que sea compatible a su vez con las operaciones de Zadeh y con las de IVFS. Este orden es, como se desarrolla en el artículo sobre el que trata este TFG, el orden simétrico.

Parte II.

Orden Simétrico. Estructura de retículo para
 $\mathcal{P}^*([0, 1])$

3. Orden a derecha y orden a izquierda

En este capítulo definiremos y estudiaremos los órdenes a derecha y a izquierda. Estos órdenes no dotan a $\mathcal{P}^*([0,1])$ de estructura de retículo (de hecho, ni siquiera están definidos para todo $\mathcal{P}^*([0,1])$), pero son de gran importancia para comprender el objetivo final de este TFG, el orden simétrico.

Para simplificar la notación, dados dos subconjuntos de $[0,1]$, $A, B \in \mathcal{P}([0,1])$, escribimos $A < B$ cuando se cumple lo siguiente: $a < b \forall a \in A; b \in B$. Dado $\alpha \in [0,1]$, diremos $A < \alpha$ cuando $a < \alpha, \forall a \in A$; y $\alpha < A$ cuando $\alpha < a, \forall a \in A$.

Nótese que si $A = \emptyset$ entonces trivialmente $A < B$ y $B < A$.

Definición 3.1. Dado $A \in \mathcal{P}^*([0,1])$, denotamos por A^- al ínfimo de A , y por A^+ al supremo de A . En el caso de que $A^- \in A$, entonces será el mínimo de A , y diremos que A es cerrado por la izquierda. En el caso de que $A^+ \in A$, entonces $A^+ = \max(A)$, y A es cerrado por la derecha.

Llamaremos $\mathcal{P}^-([0,1]) := \{A \subseteq [0,1] / A^- \in A\}$ a la clase de los subconjuntos cerrados por la izquierda de $[0,1]$. Asimismo, llamaremos $\mathcal{P}^+([0,1]) := \{A \subseteq [0,1] / A^+ \in A\}$ a la clase de los subconjuntos cerrados por la derecha de $[0,1]$.

3.1. Orden a derecha

Definamos ahora la relación $\leq^r$, sobre la clase $\mathcal{P}^*([0,1])$.

3.1.1. Definición y propiedades

Definición 3.2. Dados dos subconjuntos $A, B \in \mathcal{P}^*([0,1])$, diremos que $A \leq^r B$ si y solo si se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $A^+ \leq B^+$
- ii) $A < B \setminus A$

A la propiedad i) se la conoce como propiedad del supremo (PS), y a la propiedad ii) se la conoce como propiedad de la diferencia (PD).

Estudiemos ahora si esta relación es un orden en $\mathcal{P}^*([0,1])$:

- (Propiedad reflexiva) Sea $A \in \mathcal{P}^*([0,1])$. Claramente $A^+ = A^+$, y $A \setminus A = \emptyset$, luego trivialmente $A < A \setminus A$. Por tanto $A \leq^r A$.
- (Propiedad transitiva) Sean $A, B, C \in \mathcal{P}^*([0,1])$, con $A \leq^r B \leq^r C$. La propiedad del supremo se cumple trivialmente ya que $A^+ \leq B^+ \leq C^+$. Veamos la propiedad de la diferencia. Por hipótesis tenemos que $A < B \setminus A$ y $B < C \setminus B$. Si $C \setminus A = \emptyset$, se cumple trivialmente. Supongamos que $\exists c \in C \setminus A$. Para $a \in A$ arbitrario, veamos que $a < c$. Distingamos dos casos:

3. Orden a derecha y orden a izquierda

- i) Si $c \in B$, entonces $c \in B \setminus A$, luego por la PD de $A \leq^r B$, tenemos $a < c$.
 - ii) Si $c \notin B$ se tiene $c \in C \setminus B$. Si $\exists b \in B \setminus A$, entonces por PD de $A \leq^r B$, y tomando este b , tenemos $a < b < c$.
Si $\nexists b \in B \setminus A$ es claro que $B \subseteq A$. Por tanto $B^+ \leq A^+$, y entonces $A^+ = B^+$. Además, si $B < C \setminus B$, por definición de supremo $B^+ \leq C \setminus B$. Por tanto, para $a \in A, c \in C \setminus A$ arbitrarios, $a \leq A^+ = B^+ \leq c$. Si se diera $a = c$, entonces tendríamos $a = c \in A$, pero $c \in C \setminus A$, lo cual es contradictorio. Por tanto, $a < c$.
- La propiedad antisimétrica no se cumple en $\mathcal{P}^*([0, 1])$. Veamos el siguiente contraejemplo:
Sea $A = [x, y]; B = [x, y[$, con $0 \leq x < y \leq 1$. La propiedad del supremo se cumple tanto para $A \leq^r B$ como para $B \leq^r A$ ya que $A^+ = B^+$. Como $B \setminus A = \emptyset$, la PD para $A \leq^r B$ se cumple trivialmente. Además, $B < A \setminus B = \{y\}$. Por tanto tenemos $A \leq^r B$ y $B \leq^r A$. Sin embargo $A \neq B$.

Para lograr que sea un orden, restringimos la relación $\leq^r$ a la clase $\mathcal{P}^+([0, 1]) = \{A \in \mathcal{P}^*([0, 1]) / A^+ \in A\}$ de los subconjuntos de $[0, 1]$ cerrados por la derecha. Nótese que $\mathcal{P}^+([0, 1]) \subset \mathcal{P}^*([0, 1])$.

Proposición 3.1. *La relación $\leq^r$ es un orden en $\mathcal{P}^+([0, 1])$. Para este orden, el conjunto $\{1\}$ es el máximo, y el conjunto $\{0\}$ es el mínimo.*

Demostración. Las propiedades reflexiva y transitiva se han probado anteriormente para $\mathcal{P}^*([0, 1])$, luego se cumplen para $\mathcal{P}^+([0, 1])$ por ser un subconjunto suyo. Probemos la propiedad antisimétrica.

Sean $A, B \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, tales que $A \leq^r B$ y $B \leq^r A$. $A^+ \leq B^+$ y $B^+ \leq A^+$, luego $A^+ = B^+$. Supongamos por reducción al absurdo que existe $b \in B \setminus A$. Por PD, como $A^+ \in A$ por ser $A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, tenemos $A^+ < b$, pero a su vez $b \leq B^+ = A^+$, lo que es contradicción. Por tanto $B \setminus A = \emptyset$, y así $B \subseteq A$. Razonando idénticamente con $A \setminus B$, tenemos $A \subseteq B$, y por tanto $A = B$.

Veamos por último que $\mathbf{1} = \{1\}$ y $\mathbf{0} = \{0\}$ son el máximo y el mínimo, respectivamente. Sea $A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$. Claramente $\mathbf{1}^+ = 1$, y $A \subseteq [0, 1]$, luego $A^+ \leq \mathbf{1}^+$. Para ver la propiedad de la diferencia, tenemos en cuenta que o bien $1 \in A \Rightarrow \mathbf{1} \setminus A = \emptyset$, o bien $\mathbf{1} \setminus A = \{1\}$, luego trivialmente $A < \mathbf{1} \setminus A$. Por tanto, $A \leq^r \mathbf{1}; \forall A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, luego $\mathbf{1}$ es máximo para el orden $\leq^r$.

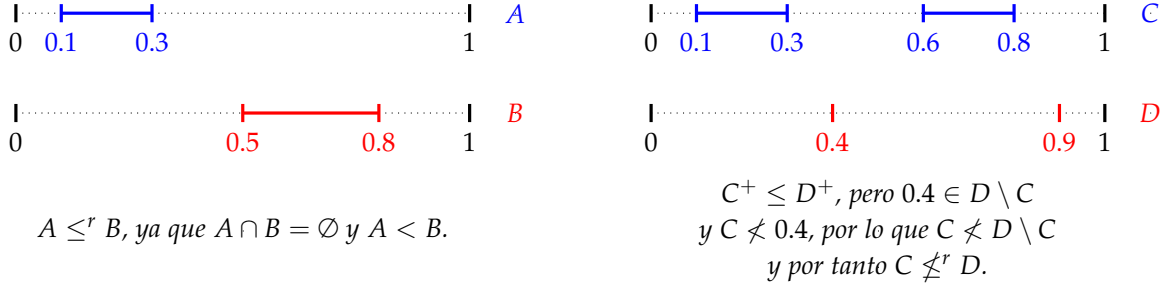
Probar que $\mathbf{0} = \{0\}$ es mínimo es análogo: dado $A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, claramente $\mathbf{0}^+ = 0 \leq A^+$, y trivialmente $0 < a, \forall a \in A \setminus \mathbf{0}$. Luego $\mathbf{0} \leq^r A, \forall A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, luego $\mathbf{0}$ es mínimo para el orden $\leq^r$. $\square$

Llamaremos al orden $\leq^r$ **orden a derecha**. Hemos visto, por tanto, que $\leq^r$ no es un orden en el conjunto $\mathcal{P}^*([0, 1])$, pero sí que es un orden en el conjunto $\mathcal{P}^+([0, 1])$.

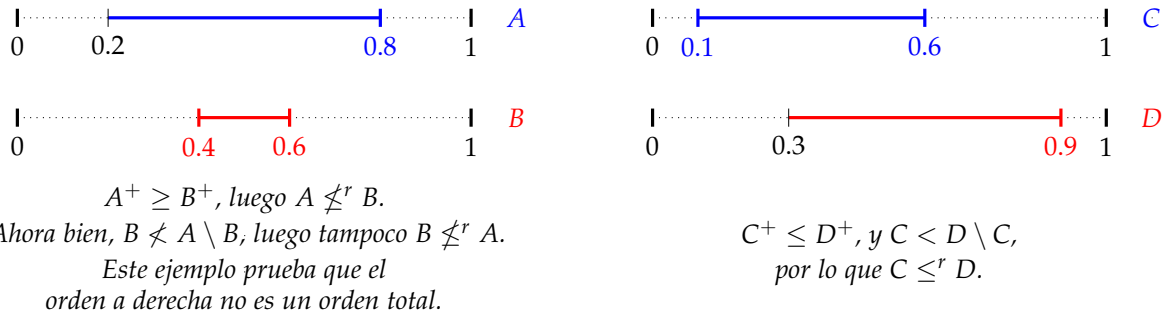
Nótese que si A y B son disjuntos, entonces $A \leq^r B$ equivale a $A < B$. Además, si $B \not\subseteq A$, la propiedad del supremo se obtiene de la propiedad de la diferencia, luego en este caso es suficiente comprobar PD.

Veamos a continuación algunos ejemplos del orden a derecha.

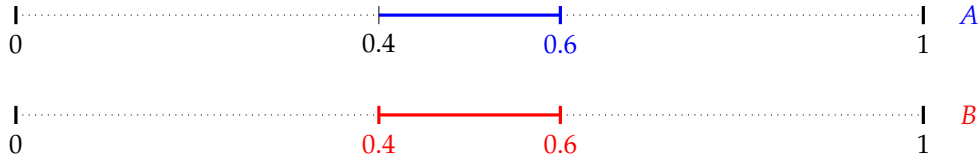
Ejemplo 3.1. Sean $A = [0.1, 0.3]$; $B = [0.5, 0.8]$; $C = [0.1, 0.3] \cup [0.6, 0.8]$; $D = \{0.4, 0.9\}$.



Ejemplo 3.2. Sean $A =]0.2, 0.8]$; $B = [0.4, 0.6]$; $C = [0.1, 0.6]$; $D =]0.3, 0.9]$.



Ejemplo 3.3. Sean $A =]0.4, 0.6]$; $B = [0.4, 0.6]$



En este caso tenemos que $A \setminus B = \emptyset$. Por tanto, trivialmente $B < A \setminus B$. Además,
 $B \setminus A = \{0.4\} < A$. Concluimos pues que $B \leq^r A$.

Lema 3.1. Sean $A, B \in \mathcal{P}^+([0, 1])$. Consideramos las siguientes afirmaciones:

- i) $A \leq^r B$
- ii) $B \subseteq A$
- iii) $A^+ = B^+$

Cualesquier par de estas afirmaciones implica la tercera.

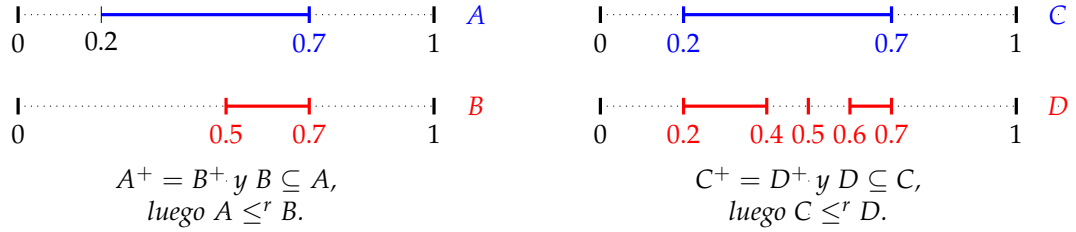
Demostración. Supongamos cierto i) y ii). Entonces, por la PS de $A \leq^r B$, tenemos $A^+ \leq B^+$. Por ii), tenemos $B^+ \leq A^+$. Por tanto iii) es cierto.

3. Orden a derecha y orden a izquierda

Supongamos cierto ii) y iii). Entonces por ii), tenemos que $B \setminus A = \emptyset$, luego la PD se cumple trivialmente; y por iii) tenemos $A^+ \leq B^+$. Por tanto tenemos i).

Supongamos por último cierto i) y iii). Por reducción al absurdo, sea $b \in B \setminus A$. Entonces $a < b \leq B^+$, $\forall a \in A$. En particular, como $A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, $A^+ \in A$, por lo que $A^+ < b \leq B^+$, lo que es contradictorio. Por tanto $B \setminus A = \emptyset$, luego se cumple ii). $\square$

Ejemplo 3.4. Sean $A =]0.2, 0.7]$; $B = [0.5, 0.7]$; $C = [0.2, 0.7]$; $D = [0.2, 0.4] \cup \{0.5\} \cup [0.6, 0.7]$. En ambos casos aplicaremos el **Lema 3.1**.



Veamos ahora que el orden a derecha extiende al orden $\leq$ de $[0, 1]$ y al orden definido sobre subintervalos cerrados de $[0, 1]$ considerado en el capítulo anterior.

Proposición 3.2. Dados dos intervalos cerrados A, B en $[0, 1]$, $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+]$, se tiene

$$A \leq^r B \Leftrightarrow A^- \leq B^- \text{ y } A^+ \leq B^+.$$

Demostración. Veamos la implicación a la derecha. Supongamos $A \leq^r B$. Por PS, $A^+ \leq B^+$. Además, $A < B \setminus A$. Supongamos que $B \setminus A \neq \emptyset$, ya que si lo fuera, tendríamos $B \subseteq A$, lo que implica trivialmente que $A^- \leq B^-$. Por reducción al absurdo supongamos que $A^- > B^-$. Entonces por definición de ínfimo, $\exists b \in B$ tal que $b < a \forall a \in A$. Pero por PD, $a < b \forall b \in B \setminus A$, luego tenemos una contradicción. Por tanto, $A^- \leq B^-$.

Veamos ahora la implicación a la izquierda. Supongamos que $A^- \leq B^-$ y $A^+ \leq B^+$. La PS se cumple por hipótesis. Si $B \setminus A = \emptyset$, la propiedad de la diferencia se cumple trivialmente. En otro caso, dado $b \in B \setminus A$, o bien $b < A^-$ o bien $b > A^+$. Si $b < A^-$, entonces $B^- \leq b < A^-$, contradiciendo la hipótesis. Si $b > A^+$, entonces $b > a, \forall a \in A$. Por tanto $A < B \setminus A$, luego $A \leq^r B$. $\square$

El orden a derecha extiende también al orden $\leq$ en $[0, 1]$, mediante la identificación de cada elemento $x \in [0, 1]$ con el conjunto unitario $\{x\} \in \mathcal{P}^+([0, 1])$. Entonces es fácil ver que $x \leq y$ equivale a $\{x\} \leq^r \{y\}$ (es un caso particular de la proposición anterior, considerando $A = [x, x]$ y $B = [y, y]$).

3.1.2. Ínfimo para el orden a derecha

Proposición 3.3. Dados dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, el ínfimo de A y B para el orden $\leq^r$ es el conjunto

$$A \wedge_r B = \{x \in A \cup B / x \leq A^+ \wedge B^+\}$$

Además, si $A^+ \leq B^+$ tenemos $A \subseteq A \wedge_r B$, y $(A \wedge_r B)^+ = A^+ \wedge B^+$.

Demostración. Sean $A, B \in \mathcal{P}^+([0, 1])$. En primer lugar, de la definición del conjunto $A \wedge_r B$ es claro que $(A \wedge_r B)^+ = A^+ \wedge B^+$.

Veamos ahora que dicho conjunto es, en efecto, el ínfimo de A y B . Supongamos sin pérdida de generalidad (ya que la definición es simétrica) que $A^+ \leq B^+$. Llamemos $X = \{x \in A \cup B / x \leq A^+ \wedge B^+\} = \{x \in A \cup B / x \leq A^+\}$. Para probar que X es el ínfimo de A y B para el orden $\leq^r$ recordamos que por definición el ínfimo es la mayor cota inferior de A y B para el orden $\leq^r$.

Veamos en primer lugar que $X \leq^r A$ y $X \leq^r B$. Claramente $X^+ = A^+$, y $A \subseteq X \Rightarrow A \setminus X = \emptyset$, luego $X < A \setminus X$, y por tanto $X \leq^r A$.

$X^+ = A^+ \leq B^+$, luego $X^+ \leq B^+$. Veamos que $X < B \setminus X$. Si $B \setminus X = \emptyset$ se cumple trivialmente. Supongo $B \setminus X \neq \emptyset$. Sea $b \in B \setminus X$. Entonces $b \notin X \Rightarrow b > A^+ \Rightarrow x \leq A^+ < b, \forall x \in X$, luego $X \leq^r B$.

Veamos ahora que X es la mayor cota inferior de A y B . Sea $Z \in \mathcal{P}^+([0, 1])$ cumpliendo $Z \leq^r A, Z \leq^r B$, y veamos que $Z \leq^r X$. Como $Z^+ \leq A^+ = X^+$, tenemos la PS. Veamos ahora PD. Si $X \setminus Z = \emptyset$ se cumple trivialmente. Supongo $X \setminus Z \neq \emptyset$. Dado $x \in X \setminus Z$, o bien $x \in A$, en cuyo caso $x \in A \setminus Z > Z$; o bien $x \in B$, en cuyo caso $x \in B \setminus Z > Z$. En ambos casos $z < x, \forall z \in Z$, luego $Z \leq^r X$. Por tanto X es el ínfimo de A y B .

□

Este ínfimo nos da una operación en los conjuntos de $\mathcal{P}^+([0, 1])$, que cumple la siguiente propiedad: $A \leq^r B \Leftrightarrow A \wedge_r B = A$.

Proposición 3.4. *El orden a derecha es el único orden en $\mathcal{P}^+([0, 1])$ para el cual el ínfimo de A y B coincide con $A \cap_H B$ (siendo $\cap_H$ la operación de Torra sobre HFS).*

Demostración. Recordemos que la operación de Torra se define del siguiente modo: $A \cap_H B = \{x = \min(a, b) / a \in A, b \in B\}$. Veamos que coincide con el ínfimo para el orden a derecha.

Sea $x \in A \cap_H B$. Por la definición, $x = \min(a, b)$ para ciertos $a \in A, b \in B$. Por tanto $x \in A \cup B$, y $x \leq a \leq A^+, x \leq b \leq B^+$, luego $x \leq A^+ \wedge B^+$, por lo que $x \in A \wedge_r B$.

Sea ahora $x \in A \wedge_r B$, es decir, $x \in A \cup B$ y $x \leq A^+ \wedge B^+$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A^+ \leq B^+$. Entonces $x \leq A^+$. Si $x \in A$, tomando $b = B^+$ (ya que B es cerrado por la derecha), tenemos que $x = \min(x, b)$ con $x \in A, b \in B$, luego $x \in A \cap_H B$. Si $x \in B$, tomando $a = A^+$, tenemos que $x = \min(a, x)$ con $a \in A, x \in B$, luego $b \in A \cap_H B$. Por tanto $A \cap_H B = A \wedge_r B$. □

3.1.3. Supremo para el orden a derecha

Proposición 3.5. *Dados dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}^+([0, 1])$, el conjunto*

$$A \vee_r B = (A \cap B) \cup \{x \in A \cup B / x > A^+ \wedge B^+\}$$

es el supremo de A y B para el orden a derecha. Además $(A \vee_r B)^+ = A^+ \vee B^+$, y si $A^+ \leq B^+$, entonces $A \vee_r B \subseteq B$.

Demostración. Probemos en primer lugar que si $A^+ \leq B^+$ se tiene $A \vee_r B \subseteq B$. Sea $x \in A \cup B$ arbitrario. Si $x \in A \cap B$, en particular se tiene que $x \in B$. Supongamos que $x \notin A \cap B$, lo que implica $x \in \{x \in A \cup B / x > A^+ \wedge B^+\} = \{x \in A \cup B / x > A^+\}$. Es claro que $x > A^+$, por lo que $x \notin A$. Pero $x \in A \cup B$, por lo que obtenemos $x \in B$. Así, $A \vee_r B \subseteq B$.

3. Orden a derecha y orden a izquierda

El supremo de A y B para $\leq^r$ es la menor cota superior de A y B . Veamos que $A \vee_r B$ cumple esta condición.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $A^+ \leq B^+$. Entonces el conjunto dado, al que llamaremos X , es $X = \{x \in B / x \in A \text{ ó } x > A^+\}$. Claramente $A^+ \leq X^+ = B^+$, luego la PS se cumple para A y B . Veamos la PD. Es claro que $X \subseteq B$, por lo que $B < X \setminus B = \emptyset$.

$X = \{x \in B / x \in A \text{ ó } x > A^+\}$, luego $X \setminus A = \{x \in B / x > A^+\}$. Claramente $a \leq A^+ < x \forall x \in X \setminus A$, $a \in A$, y por tanto $A \leq^r X$ y $B \leq^r X$.

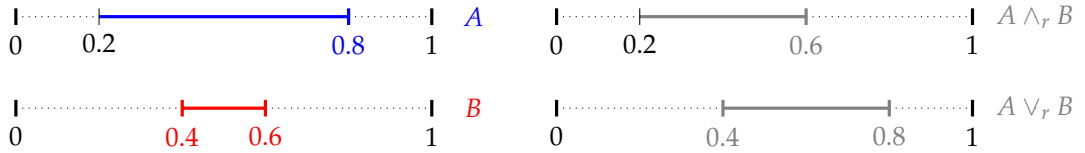
Sea ahora $Z \in \mathcal{P}^+([0, 1])$ cumpliendo $A \leq^r Z$, $B \leq^r Z$. Veamos que $X \leq^r Z$. La PS se cumple ya que $B^+ = X^+ \leq Z^+$.

Demostremos ahora la PD. Sea $z \in Z \setminus X$. Por ser $A^+ \leq B^+$ (como hemos supuesto), tenemos que $X \subseteq B$. Si $z \notin B \Rightarrow z \in Z \setminus B$, luego por la PD, $b < z$, $\forall b \in B$, y por tanto $x < z$, $\forall x \in X$. Si $z \in B$, como $z \notin X$, tenemos que $z \leq A^+$ y $z \notin A$. Entonces $z \in Z \setminus A$ y $z \leq A^+ \in A$ (ya que A es cerrado por la derecha). Luego $A \not\leq^r Z$, lo que es contradicción. Concluimos que $X \leq^r Z$.

$(A \vee_r B)^+ = A^+ \vee B^+$ de forma clara. $\square$

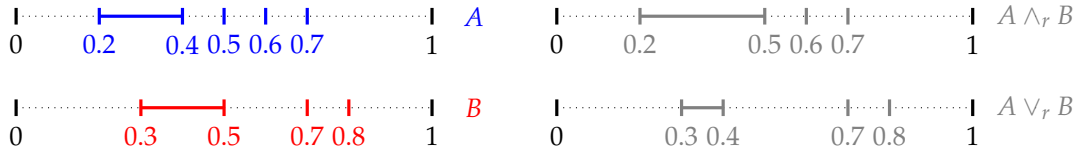
Veamos algunos ejemplos de ínfimo y supremo para el orden a derecha.

Ejemplo 3.5. Sean $A =]0.2, 0.8]$; $B = [0.4, 0.6]$.



Aplicando las caracterizaciones de ínfimo y supremo, $A \wedge_r B =]0.2, 0.6]$ y $A \vee_r B = [0.4, 0.8]$.

Ejemplo 3.6. Sean $A =]0.2, 0.4] \cup \{0.5, 0.6, 0.7\}$; $B = [0.3, 0.5] \cup \{0.7, 0.8\}$.



Aplicando las caracterizaciones de ínfimo y supremo,
 $A \wedge_r B =]0.2, 0.5] \cup \{0.6, 0.7\}$ y $A \vee_r B = [0.3, 0.4] \cup \{0.7, 0.8\}$.

Observación 3.1. Las operaciones $\wedge_r$ y $\vee_r$ dan las siguientes operaciones sobre subintervalos cerrados de $[0, 1]$, $A = [A^-, A^+]$, $B = [B^-, B^+]$:

$$A \wedge_r B = [A^- \wedge B^-, A^+ \wedge B^+];$$

$$A \vee_r B = [A^- \vee B^-, A^+ \vee B^+].$$

Teorema 3.1. La clase $\mathcal{P}^+([0, 1])$ tiene estructura de retículo acotado con el orden a derecha, $\leq^+$, cuyas operaciones son $\wedge_r$ y $\vee_r$ respectivamente.

3.2. Orden a izquierda

En esta sección definiremos el orden a izquierda sobre el conjunto de las partes cerradas por la izquierda de $[0, 1]$, y veremos qué relación guarda con el orden a derecha.

Sea $\mathcal{P}^-([0, 1]) := \{A \subseteq [0, 1] / A^- \in A\}$ la clase de los subconjuntos de $[0, 1]$ cerrados por la izquierda.

Definición 3.3. Definimos en $\mathcal{P}^-([0, 1])$ la relación $\leq^l$, del siguiente modo:

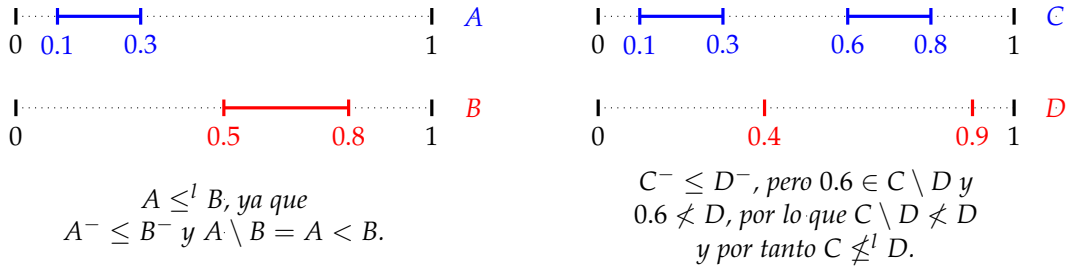
Dados $A, B \in \mathcal{P}^-([0, 1])$, diremos $A \leq^l B$ si se cumplen las siguientes propiedades:

$$i) A^- \leq B^-$$

$$ii) A \setminus B < B$$

A la propiedad *i)* se la conoce como propiedad del ínfimo (P.I), y a la propiedad *ii)* se la conoce como propiedad de la diferencia (PD).

Ejemplo 3.7. $A = [0.1, 0.3]$; $B = [0.5, 0.8]$; $C = [0.1, 0.3] \cup [0.6, 0.8]$; $D = \{0.4, 0.9\}$



3.2.1. Simetría de los órdenes izquierda y derecha

Para cada conjunto $A \in \mathcal{P}^-([0, 1])$, consideramos el conjunto $1 - A = \{1 - a / a \in A\}$. Claramente $1 - A \in \mathcal{P}^+([0, 1])$. Asimismo, si $B \in \mathcal{P}^+([0, 1])$ entonces $1 - B \in \mathcal{P}^-([0, 1])$. Podemos definir en $\mathcal{P}^*([0, 1])$ la aplicación simetría respecto de $\frac{1}{2}$ del siguiente modo:

$$\mathcal{S}_{\frac{1}{2}} : \mathcal{P}^*([0, 1]) \longrightarrow \mathcal{P}^*([0, 1])$$

$$A \longmapsto 1 - A = \{1 - a / a \in A\}$$

Esta simetría tiene una serie de propiedades que nos serán útiles para demostrar los resultados de esta subsección.

Proposición 3.6. La simetría respecto de $\frac{1}{2}$ cumple las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow 1 - A \subseteq 1 - B$.
2. $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow (1 - A) \setminus (1 - B) = \emptyset$.
3. $1 - (1 - A) = A, \forall A \in \mathcal{P}^*([0, 1])$.
4. $1 - (A \cup B) = (1 - A) \cup (1 - B)$, y $1 - (A \cap B) = (1 - A) \cap (1 - B)$.

3. Orden a derecha y orden a izquierda

Demostración.

1. Probemos la implicación a la derecha. Supongamos que para cada $a \in A$ se tiene $a \in B$. Entonces, dado $1 - a \in 1 - A$ tenemos $a \in A \subseteq B$, por lo que $1 - a \in 1 - B$. Por tanto $1 - A \subseteq 1 - B$.
Probemos ahora la implicación a la izquierda. Suponemos $(1 - A) \subseteq (1 - B)$. Dado $a \in A$, $1 - a \in 1 - A \subseteq 1 - B$, luego $1 - a \in 1 - B$ y en consecuencia $a \in B$.
2. Esta afirmación es consecuencia directa de 1. Veámoslo:
 $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow (1 - A) \subseteq (1 - B) \Leftrightarrow (1 - A) \setminus (1 - B) = \emptyset$.
3. Esta afirmación se obtiene trabajando con la definición de $1 - A$ del siguiente modo:
 $1 - (1 - A) = \{1 - x/x \in 1 - A\} = \{1 - (1 - a)/a \in A\} = \{a/a \in A\} = A$.
4. Trabajemos con las expresiones para obtener las igualdades:
Veamos primero el caso de la unión: $1 - (A \cup B) = \{1 - x/x \in A \cup B\} = \{1 - a/a \in A\} \cup \{1 - b/b \in B\} = (1 - A) \cup (1 - B)$.
Veamos ahora el caso de la intersección: $1 - (A \cap B) = \{1 - x/x \in A \cap B\} = \{1 - a/a \in A\} \cap \{1 - b/b \in B\} = (1 - A) \cap (1 - B)$.

□

Teniendo presentes las propiedades de la simetría respecto de $\frac{1}{2}$ veamos como se relacionan $\leq^r$ y $\leq^l$.

Proposición 3.7. *Dados $A, B \in \mathcal{P}^-([0, 1])$, se tiene que $A \leq^l B \Leftrightarrow (1 - B) \leq^r (1 - A)$.*

Demostración. La propiedad del supremo de $(1 - B) \leq^r (1 - A)$ y la propiedad del ínfimo de $A \leq^l B$ son equivalentes por el siguiente argumento: $A^- \leq B^- \Leftrightarrow 1 - A^- = (1 - A)^+ \geq (1 - B)^+ = 1 - B^-$. Luego $A^- \leq B^- \Leftrightarrow (1 - B)^+ \leq (1 - A)^+$. Demostremos ahora que las propiedades de la diferencia de $(1 - B) \leq^r (1 - A)$ y de $A \leq^l B$ son equivalentes.

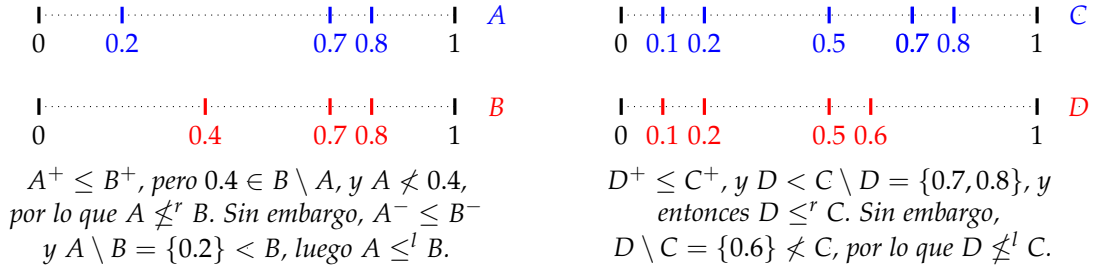
Veamos la implicación a la izquierda. Supongamos $(1 - B) \leq^r (1 - A)$. Sean $a \in A \setminus B$ y $b \in B$. Entonces $1 - a \in (1 - A) \setminus (1 - B)$, $1 - b \in (1 - B)$. Por la PD, se tiene $1 - b < 1 - a \Rightarrow a < b$. Por tanto $A \setminus B < B$, y $A \leq^l B$.

Veamos ahora la implicación a la derecha. Supongamos ahora que $A \leq^l B$. Sea $1 - a \in (1 - A) \setminus (1 - B)$ y $1 - b \in (1 - B)$. Entonces $a \in A \setminus B$, $b \in B$, luego $a < b \Rightarrow 1 - b < 1 - a$. Por tanto $(1 - B) < (1 - A) \setminus (1 - B)$, y $(1 - B) \leq^l (1 - A)$. □

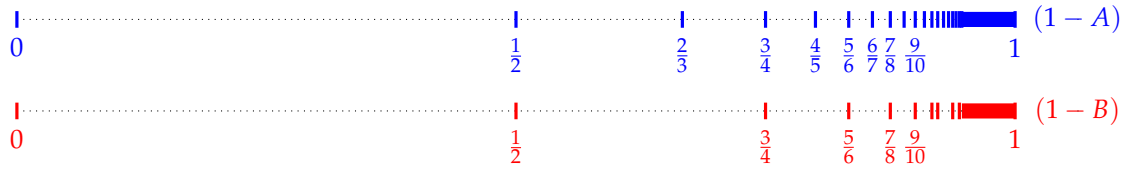
Esta simetría entre ambas relaciones nos permite deducir que $\leq^l$ es un orden en $\mathcal{P}^-([0, 1])$, al que llamaremos **orden a izquierda**.

Veamos algunos ejemplos del orden a izquierda y derecha, para convencernos de que, pese a tener algunas similitudes, son órdenes totalmente diferentes.

Ejemplo 3.8. Sean $A = \{0.2, 0.7, 0.8\}$; $B = \{0.4, 0.7, 0.8\}$; $C = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.8\}$; $D = \{0.1, 0.2, 0.5, 0.6\}$.



Ejemplo 3.9. Sean $A = \{1 - \frac{1}{k}/k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{1\}$; $B = \{1 - \frac{1}{2k}/k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0, 1\}$.



Estudiemos primero el orden a izquierda. $A^- = B^- = 0$, y $B \subseteq A$, luego $B \setminus A = \emptyset \Rightarrow B \setminus A < A$.
 Por tanto $B \leq^l A$. Además, $\frac{2}{3} \in A \setminus B$, y $\frac{2}{3} > \frac{1}{2} \in B$, luego $A \setminus B < B$, y por tanto $A <^l B$.
 Veamos ahora el orden a derecha. $A^+ = B^+ = 1$ y $B \subseteq A$, luego utilizando el lema 3.1, tenemos que
 $A \leq^r B$. Por ser $\frac{2}{3} \in A \setminus B$ y $\frac{7}{8} \in B$, $\frac{2}{3} < \frac{7}{8}$, entonces $B < A \setminus B$, luego $B <^r A$.
 Hemos encontrado por tanto dos conjuntos tales que A es menor que B para el orden a derecha, y B es
 menor que A para el orden a izquierda.

Ejemplo 3.10. Definimos $C := \{\frac{1}{k}/k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$; $D := \{\frac{1}{2k}/k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0, 1\}$. Nótese que, siendo A, B los conjuntos definidos en el ejemplo 3.8, se tiene que $C = 1 - A$, $D = 1 - B$. Por tanto, aplicando **Proposición 3.7**, tenemos que $C \leq^l D$ y $D \leq^r C$.

3.2.2. Supremo e ínfimo para el orden a izquierda

Para calcular el supremo y el ínfimo para $\leq^l$ podemos utilizar la relación con el orden a derecha dada en **Proposición 3.7**. Veamos un resultado necesario para calcular la expresión del ínfimo y el supremo para $\leq^l$.

Proposición 3.8. Dados $A, B \in \mathcal{P}^-([0, 1])$, entonces

$$A \wedge_l B = 1 - ((1 - A) \vee_r (1 - B));$$

$$A \vee_l B = 1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B)).$$

Demostración. Para esta demostración, recordemos que el supremo es la menor cota superior de A y B , y el ínfimo es la mayor cota inferior de A y B .

Veamos en primer lugar el ínfimo de $\leq^l$. Es claro que $(1 - A) \vee_r (1 - B) \geq^r (1 - A)$. Utilizando **Proposición 3.7** y las propiedades de la simetría respecto de $\frac{1}{2}$ tenemos

$$1 - ((1 - A) \vee_r (1 - B)) \leq^r 1 - (1 - A) = A$$

3. Orden a derecha y orden a izquierda

De forma idéntica se obtiene

$$1 - ((1 - A) \vee_r (1 - B)) \leq^l 1 - (1 - B) = B$$

Tenemos por tanto que el conjunto propuesto es cota inferior de A y B . Veamos que es la mayor cota inferior de ambos. Sea $Z \in \mathcal{P}^-([0, 1])$ cumpliendo $Z \leq^l A$ y $Z \leq^l B$. Por **Proposición 3.7**, $1 - A \leq^r 1 - Z$ y $1 - B \leq^r 1 - Z$. Por tanto $(1 - A) \wedge_r (1 - B) \leq^r 1 - Z$, y utilizando de nuevo **Proposición 3.7** tenemos $1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B)) \leq^l Z$. Concluimos pues que $A \wedge_l B = 1 - ((1 - A) \vee_r (1 - B))$.

Veamos ahora el supremo de $\leq^l$. Por definición de ínfimo de $\leq^r$, $(1 - A) \wedge_r (1 - B) \leq^r (1 - A)$. Usando **Proposición 3.7** tenemos $1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B)) \geq^l A$. Análogamente obtenemos $1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B)) \geq^l B$. Tenemos por tanto que el conjunto propuesto es cota superior de A y B . Veamos que es la menor cota superior de ambos. Sea $Z \in \mathcal{P}^-([0, 1])$ cumpliendo $A \leq^l Z$ y $B \leq^l Z$. Entonces, utilizando **Proposición 3.7**, $1 - Z \leq^r 1 - A$ y $1 - Z \leq^r 1 - B$. Por la definición de ínfimo, $(1 - Z) \leq^r (1 - A) \wedge_r (1 - B)$. Utilizando de nuevo **Proposición 3.7** tenemos $1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B)) \leq^l 1 - (1 - Z) = Z$. Concluimos que $A \vee_l B = 1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B))$ □

Teorema 3.2. $\mathcal{P}^-([0, 1])$ tiene estructura de retículo con el orden $\leq^l$. Las operaciones ínfimo y supremo para el orden a izquierda son, respectivamente,

$$A \wedge_l B := (A \cap B) \cup \{x \in A \cup B / x < A^- \vee B^-\}$$

$$A \vee_l B := \{x \in A \cup B / x \geq A^- \vee B^-\}$$

Demostración. La simetría entre el orden a derecha y el orden a izquierda nos da que el orden a izquierda es un orden en $\mathcal{P}^-([0, 1])$. Veamos las operaciones de ínfimo y supremo:

$$\begin{aligned} A \vee_l B &= 1 - ((1 - A) \wedge_r (1 - B)) = 1 - \{y \in (1 - A) \cup (1 - B) / y \leq (1 - A)^+ \wedge (1 - B)^+\} \\ &= 1 - \{y \in 1 - (A \cup B) / y \leq 1 - (A^- \vee B^-)\} \stackrel{(*)}{=} 1 - 1 + \{x \in A \cup B / 1 - x \leq 1 - (A^- \vee B^-)\} \\ &= \{x \in A \cup B / x \geq A^- \vee B^-\}. \text{ Por tanto } A \vee_l B = \{x \in A \cup B / x \geq A^- \vee B^-\}. \end{aligned}$$

(*) En esta igualdad realizamos el cambio $y = 1 - x$.

$$A \wedge_l B = 1 - (1 - A) \vee_r (1 - B). \text{ Trabajemos la expresión } (1 - A) \vee_r (1 - B).$$

$$\begin{aligned} ((1 - A) \vee_r (1 - B)) &= ((1 - A) \cap (1 - B)) \cup \{y \in (1 - A) \cup (1 - B) / \\ &/ y > (1 - A)^+ \wedge (1 - B)^+\} = (1 - (A \cap B)) \cup \{y \in 1 - (A \cup B) / y > 1 - (A^- \vee B^-)\} = \\ &= (1 - (A \cap B)) \cup (1 - \{x \in A \cup B / 1 - x > 1 - (A^- \vee B^-)\}) = \\ &= 1 - ((A \cap B) \cup \{x \in A \cup B / x < A^- \vee B^-\}). \end{aligned}$$

Por tanto, $A \wedge_l B = (A \cap B) \cup \{x \in A \cup B / x < A^- \vee B^-\}$. □

Proposición 3.9. El orden a izquierda es el único orden en $\mathcal{P}^-([0, 1])$ para el cual el supremo de A y B coincide con $A \cup_H B$ (siendo $\cup_H$ la operación de Torra sobre HFS)

Demostración. Recordemos que la operación de Torra se define del siguiente modo: $A \cup_H B = \{x = \max(a, b) / a \in A, b \in B\}$. La demostración de este resultado es análogo a la prueba de **Proposición 3.4**. $\square$

Denotamos $\mathcal{P}^\pm([0, 1])$ a los subconjuntos de $[0, 1]$ cerrados por la derecha y por la izquierda, esto es, $\mathcal{P}^\pm([0, 1]) = \{A \in \mathcal{P}^*([0, 1]) / A^-, A^+ \in A\}$.

Corolario 3.1. *Dados $A, B \in \mathcal{P}^\pm([0, 1])$, se cumple:*

1. $A \wedge_l B \subseteq A \wedge_r B$.
2. $A \vee_r B \subseteq A \vee_l B$.

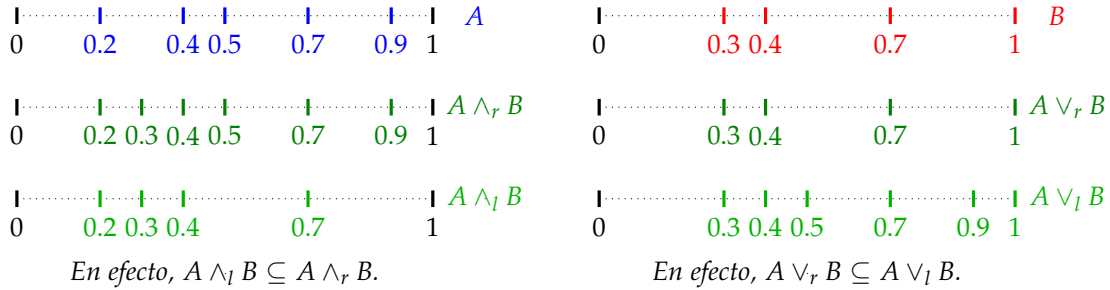
Demostración. 1. Sea $x \in A \wedge_l B \subseteq A \cup B$.

- Si $x \in A \cap B \Rightarrow x \leq A^+ \wedge B^+$. Por tanto $x \in A \wedge_r B$.
- Si $x \notin A \cap B$, suponemos sin pérdida de generalidad que $A^- \leq B^-$. Entonces $x \in A \cup B$ y $x < B^- \leq B^+$, luego $x \in A \Rightarrow x \leq A^+$. Por lo tanto $x \leq A^+ \wedge B^+$ y por tanto $x \in A \wedge_r B$.

2. Sea $x \in A \vee_r B$. Claramente $x \in A \cup B$. Distinguimos dos casos:

- Si $x \in A \cap B$ entonces $x \geq A^- \vee B^-$, luego $x \in A \vee_l B$.
- Si $x \notin A \cap B$ entonces $x > A^+ \wedge B^+$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $A^+ \leq B^+$. Tenemos entonces $x > A^+ \geq A^-$, esto es, $x \notin A$. Por tanto $x \in B$ y $x \geq B^-$. Concluimos que $x \geq A^- \vee B^-$, y en consecuencia $x \in A \vee_l B$. $\square$

Ejemplo 3.11. Sean $A = \{0.2, 0.4, 0.5, 0.7, 0.9\}$ y $B = \{0.3, 0.4, 0.7, 1\}$. Aplicando las definiciones calculamos el ínfimo y el supremo para los órdenes derecha e izquierda.



Proposición 3.10. *Sean $A, B \in \mathcal{P}^\pm([0, 1])$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) $A \wedge_l B = A \wedge_r B$.
- b) $\forall x \in A \cup B$ tal que $A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+$ se tiene que $x \in A \cap B$.
- c) $A \vee_r B = A \vee_l B$.

Demostración. Veamos las equivalencias entre a) y b) y entre b) y c):

a) $\Leftrightarrow$ b) Veamos la implicación a la izquierda por contrarrecíproco. Si $A \wedge_l B \neq A \wedge_r B$, entonces $\exists x \in A \cup B; x \leq A^+ \wedge B^+$ cumpliendo $x \geq A^- \vee B^-$ y $x \notin A \cap B$; luego tenemos $A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+$ con $x \notin A \cap B$, luego b) no se cumple. Por tanto a) $\Leftrightarrow$ b).

3. Orden a derecha y orden a izquierda

Veamos ahora $a) \Rightarrow b)$ razonando también por contrarrecíproco. Supongamos que no se cumple $b)$, es decir, $\exists x \in A \cup B$ tal que $A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+$ y $x \notin A \cap B$. Entonces $x \in A \wedge_r B$ ya que $x \leq A^+ \wedge B^+$. Sin embargo, $x \geq A^- \vee B^-$ y $x \notin A \cap B$, por lo que $x \notin A \wedge_l B$. Concluimos así que $a) \Rightarrow b)$, y por tanto son equivalentes.

$b) \Leftrightarrow c)$ Veamos la implicación a izquierda por contrarrecíproco. Si $A \vee_r B \neq A \vee_l B$ entonces $\exists x \in A \cup B$ tal que $A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+$ y $x \notin A \cap B$, por lo que $b)$ no se cumple. Por tanto $c) \Leftarrow b)$.

Veamos ahora la implicación a derecha, también por contrarrecíproco. Supongamos que $\exists x \in A \cup B$ tal que $A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+$ y $x \notin A \cap B$. Entonces $x \in A \vee_l B$, pero $x \notin A \vee_r B$, luego $A \vee_l B \neq A \vee_r B$. Obtenemos así la equivalencia que buscamos. $\square$

Este resultado se puede utilizar para trabajar con intervalos cerrados, del siguiente modo:

Corolario 3.2. *Dados dos intervalos cerrados $A = [A^-, A^+]; B = [B^-, B^+]$, se tiene $A \wedge_l B = A \wedge_r B = [A^- \wedge B^-, A^+ \wedge B^+]$ y $A \vee_l B = A \vee_r B = [A^- \vee B^-, A^+ \vee B^+]$.*

Demostración. Apliquemos **Proposición 3.10**. Sea $x \in A \cup B$ tal que $A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+$. Entonces $A^- \leq A^- \vee B^- \leq x \leq A^+ \wedge B^+ \leq A^+$, luego $x \in A$. De idéntica manera obtenemos $x \in B$, luego $x \in A \cap B$. Por tanto, se cumple la afirmación $b)$ del corolario, y al aplicarlo obtenemos el resultado buscado. $\square$

Por este corolario tenemos que los órdenes a izquierda y a derecha coinciden en el conjunto $\mathbb{I}^c$ de los subintervalos cerrados de $[0, 1]$.

4. Orden simétrico

En esta sección obtendremos, a partir de los órdenes estudiados en la sección anterior, un orden no trivial en $\mathcal{P}^*([0, 1])$ que lo dote de estructura de retículo, y que extienda al orden de intervalos y al orden en $[0, 1]$ estudiados en Def. 1.14 y Def. 1.19. Este orden resolverá el reto de dar estructura de retículo compatible con las estructuras de Zadeh a $\mathcal{P}^*([0, 1])$.

4.1. Definición y propiedades

Definición 4.1. Definimos la relación $\leq^0$ en $\mathcal{P}^*([0, 1])$ del siguiente modo:

Dados dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, diremos $A \leq^0 B$ si se dan las siguientes condiciones:

$$i) A < B \setminus A$$

$$ii) A \setminus B < B$$

A la propiedad *i)* se la conoce como propiedad de la diferencia 1 (PD1), y a la propiedad *ii)* se la conoce como propiedad de la diferencia 2 (PD2).

Recordemos que, dado cualquier conjunto $A \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, trivialmente $\emptyset < A$ y $A < \emptyset$. Por tanto, si dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ se cumple $B \setminus A = \emptyset$ entonces la propiedad PD1 se cumple trivialmente; y si $A \setminus B = \emptyset$, la propiedad PD2 se cumple trivialmente. Es importante tener en cuenta que esta relación $<$, que hemos definido en los conjuntos $\mathcal{P}([0, 1])$, no es una relación de orden ni de semiorden, puesto que falla la propiedad transitiva: para cualesquiera $A, B \in \mathcal{P}([0, 1])$, se tiene trivialmente que $A < \emptyset$ y $\emptyset < B$, pero no tiene por qué darse que $A < B$.

Nótese que las condiciones de la relación $\leq^0$ coincide con las propiedades de la diferencia de los órdenes a izquierda y a derecha. Veamos que $\leq^0$ extiende a los órdenes a izquierda y a derecha.

Proposición 4.1. Sean dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}^\pm([0, 1])$. Entonces

$$A \leq^0 B \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq^r B \\ y \\ A \leq^l B \end{cases}$$

Demostración. La implicación a la izquierda es trivial, ya que las propiedades de la diferencia de $\leq^r$ y $\leq^l$ son PD1 y PD2, respectivamente.

Veamos la implicación a la derecha. Para probarla, necesitamos ver que las propiedades del supremo y el ínfimo vienen dadas por PD1 y PD2. Supongamos $A \leq^0 B$. Por reducción al absurdo, sea $A^+ > B^+$. Por ser $A \in \mathcal{P}^\pm([0, 1])$, tenemos $A^+ \in A \Rightarrow A^+ \in A \setminus B < B$ (por la PD2). Pero $B^+ \in B$, por lo que $A^+ < B^+$, lo que nos lleva a contradicción. Concluimos que $A^+ \leq B^+$.

La propiedad del ínfimo se obtiene de forma análoga. Supongamos por reducción al absurdo $A^- > B^-$. Como $B^- \in B$, tenemos $B^- \in B \setminus A > A$. Ahora bien, $A^- \in A$, luego $B^- > A^-$, lo que es contradictorio. Por tanto $A^- \leq B^-$. $\square$

4. Orden simétrico

Es claro, por tanto, que la relación $\leq^0$ se construye a partir de los órdenes a izquierda y a derecha. Sin embargo, los órdenes a izquierda y a derecha están definidos únicamente en $\mathcal{P}^-([0,1])$ y $\mathcal{P}^+([0,1])$ respectivamente, mientras que $\leq^0$ está definida en $\mathcal{P}^*([0,1])$. Demostraremos a continuación que $\leq^0$ es una relación de orden definida en $\mathcal{P}^*([0,1])$.

Proposición 4.2. *La relación $\leq^0$ es un orden parcial en $\mathcal{P}^*([0,1])$, con máximo $\mathbf{1} = \{1\}$ y mínimo $\mathbf{0} = \{0\}$.*

Demostración. La propiedad reflexiva se cumple trivialmente, ya que $A \setminus A = \emptyset$, por lo que $A < A \setminus A$ y $A \setminus A < A$. Por tanto $A \leq^0 A$.

Probemos la propiedad transitiva. Sean $A, B, C \in \mathcal{P}^*([0,1])$ cumpliendo $A \leq^0 B$ y $B \leq^0 C$. Veamos que $A \leq^0 C$. Para probar la propiedad PD1, tomamos $c \in C \setminus A$. Si $c \in B$, entonces $c \in B \setminus A > A$ (por PD1 de $A \leq^0 B$), luego $c > a$, $\forall a \in A$. Si $c \notin B$, entonces $c \in C \setminus B$, y por la PD1 de $B \leq^0 C$ tenemos $b < c$, $\forall b \in B$. Dado cualquier $a \in A$, si $a \in B$ es claro que $a < c$ por la afirmación anterior ($b < c$, $\forall b \in B$). Si por el contrario $a \notin B$, entonces $a \in A \setminus B < B$, y tomando $b \in B$ arbitrario tenemos $a < b < c$. Por tanto se cumple PD1.

La PD2 se obtiene de forma análoga. Dado $a \in A \setminus C$, o bien $a \in B$ o bien $a \notin B$. Si $a \in B$ tenemos $a \in B \setminus C < C$ (por PD2 de $B \leq^0 C$), luego $a < c$. Si $a \notin B$, entonces $a \in A \setminus B < B$ (por PD2 de $A \leq^0 B$), es decir, $a < b$, $\forall b \in B$. Dado $c \in C$ arbitrario, si $c \in B$ tendremos (por PD2 de $A \leq^0 B$) que $a < c$. Si por el contrario $c \notin B$, tendremos $c \in C \setminus B > B$ (por PD1 de $B \leq^0 C$). Por tanto, tomando cualquier $b \in B$, concluimos que $a < b < c$, y en particular $a < c$.

Por último, probemos la propiedad antisimétrica. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0,1])$ cumpliendo $A \leq^0 B$ y $B \leq^0 A$. Veamos que $A = B$. Supongamos por reducción al absurdo que $\exists b \in B \setminus A$. Por PD1 de $A \leq^0 B$ se cumple $a < b$, $\forall a \in A$, pero por PD2 de $B \leq^0 A$ tenemos $b < a$, $\forall a \in A$. Esto nos lleva a contradicción, por lo que $\nexists b \in B \setminus A$, o lo que es equivalente, $B \subseteq A$.

Supongamos ahora por reducción al absurdo que $\exists a \in A \setminus B$. Por PD1 de $B \leq^0 A$ se cumple $b < a$, $\forall b \in B$. Sin embargo, por PD2 de $A \leq^0 B$ tenemos $a < b$, $\forall b \in B$, lo que es una contradicción. Por tanto $\nexists a \in A \setminus B$, o lo que es igual, $A \subseteq B$.

Por lo tanto $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, lo que implica $A = B$.

Concluimos que $\leq^0$ es un orden en $\mathcal{P}^*([0,1])$.

Veamos por último que, dado $A \in \mathcal{P}^*([0,1])$, se cumple $\mathbf{0} \leq^0 A$ y $A \leq^0 \mathbf{1}$.

Si $0 \in A$, entonces $\mathbf{0} \setminus A = \emptyset < A$, y claramente $\mathbf{0} < A \setminus \mathbf{0}$. Si $0 \notin A$, entonces las propiedades PD1 y PD2 se cumplen trivialmente, ya que $\forall x \in [0,1]$ con $x \neq 0$ se tiene $0 < x$. Concluimos pues que $\mathbf{0} \leq^0 A$.

De forma análoga vemos $A \leq^0 \mathbf{1}$. Si $1 \in A$, entonces $A < \mathbf{1} \setminus A = \emptyset$ trivialmente. Además, es claro que $A \setminus \mathbf{1} < \mathbf{1}$, ya que $\forall x \in [0,1]$ con $x \neq 1$ se tiene que $x < 1$. Si $1 \notin A$, las propiedades PD1 y PD2 se cumplen trivialmente por el mismo argumento. Por tanto $A \leq^0 \mathbf{1}$. $\square$

La notación $A < B$ y el hecho de que $A < \emptyset$ y $\emptyset < A$, $\forall A \in \mathcal{P}([0,1])$ nos permite simplificar el orden simétrico cuando uno de los conjuntos está contenido en el otro.

Proposición 4.3. *Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0,1])$ tales que $A \subseteq B$. Entonces:*

$$i) A \leq^0 B \Leftrightarrow A < B \setminus A$$

$$ii) B \leq^0 A \Leftrightarrow B \setminus A < A.$$

Además si $A \leq^0 B$ entonces $A^- = B^-$, y si $B \leq^0 A$, entonces $A^+ = B^+$.

Demostración. Probemos *i*). La implicación a la derecha es trivial, ya que $A < B \setminus A$ es la propiedad PD1. La implicación a la izquierda es fácil, ya que por hipótesis se cumple la PD1, y la PD2 es trivial ya que $A \setminus B = \emptyset < B$.

La afirmación *ii*) se prueba de forma similar. La implicación a la derecha es trivial, y la implicación a la izquierda es fácil, ya que $B < A \setminus B = \emptyset$, y la propiedad PD2 se supone cierta.

Veamos ahora que $A \leq^0 B \Rightarrow A^- = B^-$. Por *i*), $A < B \setminus A$. Por reducción al absurdo, supongamos $A^- > B^-$. Entonces $\exists b \in B$ tal que $b < a, \forall a \in A$. Claramente $b \in B \setminus A$, luego $A \not< B \setminus A$, lo que es contradictorio. Por tanto $A^- \leq B^-$, y como $A \subseteq B \Rightarrow A^- \geq B^-$, entonces $A^- = B^-$.

La afirmación $B \leq^0 A \Rightarrow A^+ = B^+$ es análoga. $\square$

A continuación estudiaremos algunas propiedades de este orden, que nos serán de utilidad para calcular el ínfimo y el supremo para el orden simétrico.

La siguiente propiedad se apoya en las propiedades de la simetría respecto a $\frac{1}{2}$. El nombre de orden simétrico se debe a esta propiedad.

Proposición 4.4. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$. Entonces $A \leq^0 B \Leftrightarrow (1 - B) \leq^0 (1 - A)$.

Demostración. Veamos que PD1 de $A \leq^0 B$ equivale a PD2 de $(1 - B) \leq^0 (1 - A)$, y PD2 de $A \leq^0 B$ es equivalente a PD1 de $(1 - B) \leq^0 (1 - A)$.

La propiedad PD1 de $A \leq^0 B$ es $A < B \setminus A$. Tenemos entonces la siguiente cadena de equivalencias: $\forall a \in A, \forall b \in B \setminus A$ se tiene $a < b \Leftrightarrow 1 - b < 1 - a, \forall a \in A, \forall b \in B \setminus A \Leftrightarrow 1 - b < 1 - a, \forall (1 - a) \in (1 - A), \forall (1 - b) \in (1 - B) \setminus (1 - A) \Leftrightarrow (1 - B) \setminus (1 - A) < (1 - A)$, que es, por definición, PD2 de $(1 - B) \leq^0 (1 - A)$.

La propiedad PD2 de $A \leq^0 B$ es $A \setminus B < B$. La cadena de equivalencias es la siguiente: $a < b, \forall a \in A \setminus B, \forall b \in B \Leftrightarrow 1 - b < 1 - a, \forall b \in B, \forall a \in A \setminus B \Leftrightarrow 1 - b < 1 - a, \forall (1 - b) \in 1 - B, \forall (1 - a) \in (1 - A) \setminus (1 - B)$, que es, por definición, PD1 de $(1 - B) \leq^0 (1 - A)$.

$\square$

Proposición 4.5. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$. Entonces

$$A \leq^0 B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \emptyset \text{ y } A < B \\ \text{o bien} \\ A \cap B \neq \emptyset \text{ y } A \setminus B < A \cap B < B \setminus A \end{cases}$$

Demostración. En efecto, veamos la implicación a la derecha. Suponemos $A \leq^0 B$. Entonces, en el caso de $A \cap B \neq \emptyset$, sean $a \in A \setminus B, b \in B \setminus A$ y $x \in A \cap B$. Tenemos por PD1 que $a < b$ y $x < b$, ya que tanto a como x pertenecen a A . Razonando idénticamente obtenemos de la PD2 que $a < x$, ya que $x \in B$. Por tanto $a < x < b$, luego $A \setminus B < A \cap B < B \setminus A$. En el caso $A \cap B = \emptyset$, tenemos $A = A \setminus B < B \setminus A = B$, por PD1 y PD2.

Veamos ahora la implicación a la izquierda. Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A = A \setminus B < B \setminus A = B$, luego las propiedades PD1 y PD2 se cumplen.

Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces suponemos $A \setminus B < A \cap B < B \setminus A$. Es claro que $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, y $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Por tanto, dado $b \in B$, o bien $b \in A \cap B$ o bien $b \in B \setminus A$, y en ambos casos $a < b, \forall a \in A \setminus B$. Por tanto se cumple PD2. Para probar PD1, tomamos $a \in A$. O bien $a \in A \cap B$ o bien $a \in A \setminus B$. En ambos casos $a < b, \forall b \in B \setminus A$, luego se cumple PD1.

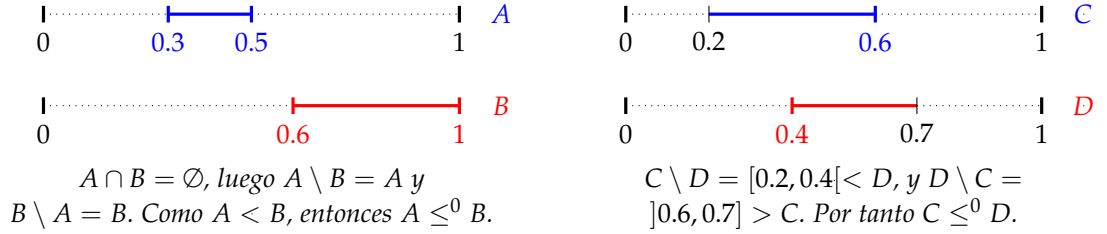
$\square$

4. Orden simétrico

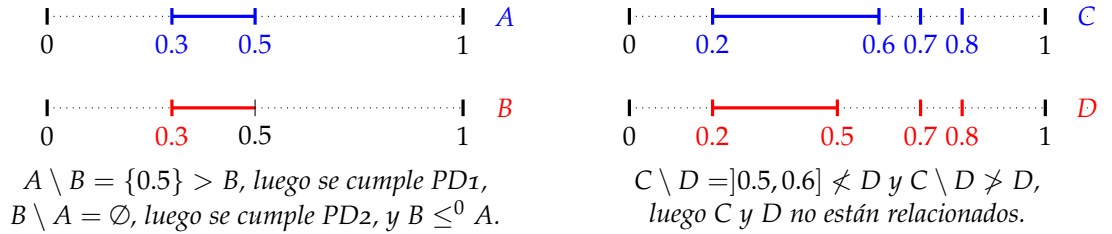
Este resultado permite visualizar fácilmente las condiciones necesarias para que se cumpla $A \leq^0 B$.

Veamos algunos ejemplos del orden simétrico y de aplicaciones de estas propiedades.

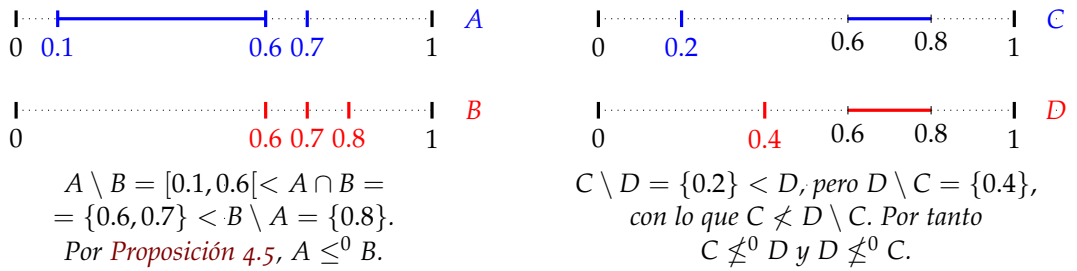
Ejemplo 4.1. Sean $A = [0.3, 0.5]$, $B = [0.6, 1]$, $C =]0.2, 0.6]$, $D = [0.4, 0.7[$.



Ejemplo 4.2. Sean $A = [0.3, 0.5]$, $B = [0.3, 0.5[$, $C = [0.2, 0.6] \cup \{0.7, 0.8\}$, $D = [0.2, 0.5] \cup \{0.7, 0.8\}$.



Ejemplo 4.3. Sean $A = [0.1, 0.6] \cup \{0.7\}$, $B = \{0.6, 0.7, 0.8\}$, $C = \{0.2\} \cup]0.6, 0.8[$, $D = \{0.4\} \cup]0.6, 0.8[$.



Ejemplo 4.4. Sean $0 \leq a < b \leq 1$. Entonces,

$$[a, b[\leq^0 [a, b] \leq^0]a, b]$$

$$[a, b[\leq^0]a, b[\leq^0]a, b]$$

pero $[a, b]$ y $]a, b[$ no están relacionados.

Ejemplo 4.5. Dado $A \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ se tiene que $\{A^-\} \leq^0 A$.

En efecto, si $A^- \in A$, entonces $\{A^-\} \setminus A = \emptyset < A \cap \{A^-\} = \{A^-\} < A \setminus \{A^-\}$. Si, por el contrario, $A^- \notin A$, entonces $\{A^-\} \cap A = \emptyset$ y claramente $\{A^-\} < A$, luego por la **Proposición 4.5**, $\{A^-\} \leq^0 A$.

4.2. Ínfimo para el orden simétrico

Una vez probado que el orden simétrico $\leq^0$ es un orden en $\mathcal{P}^*([0, 1])$, veamos que existen el ínfimo y el supremo de este orden, y que ambos dotan de estructura de retículo a $\mathcal{P}^*([0, 1])$. Obtendremos en esta sección el ínfimo, y el supremo se calculará, utilizando la simetría de este orden, a partir del ínfimo.

4.2.1. Conceptos y resultados previos

Definamos una serie de conceptos necesarios para obtener el ínfimo de $\leq^0$.

Definición 4.2. Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, definimos

$$T_{A,B} = \{t \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ tales que } t > A^- \vee B^-\}.$$

Llamaremos $t_{A,B}$ al ínfimo de $T_{A,B}$, esto es, $t_{A,B} = \inf(T_{A,B})$.

El ínfimo de A y B para el orden simétrico $\leq^0$ dependerá de la relación entre $t_{A,B}$ y los conjuntos A y B . Veamos algunas propiedades y algunos ejemplos sobre $T_{A,B}$ y $t_{A,B}$ que nos serán útiles más adelante.

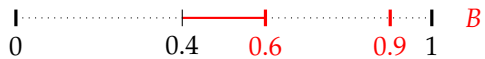
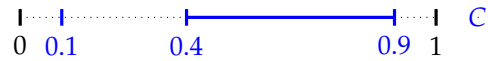
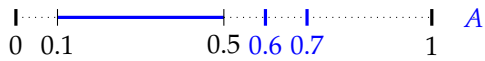
Observación 4.1. Existen $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ para los cuales $T_{A,B}$ es vacío. Es estos casos, como el ínfimo de un conjunto es la mayor cota inferior de dicho conjunto, tendremos que $t_{A,B} = 1$. Esto se debe a que $\forall \alpha \in [0, 1]$, se tiene trivialmente que $\alpha \leq t, \forall t \in T_{A,B}$ (ya que $T_{A,B} = \emptyset$). Por ejemplo, dados $A = [0.2, 0.5[\cup \{0.6, 0.7, 0.8\}$ y $B = \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8\}$, se tiene que $A^- \vee B^- = 0.5$, y $T_{A,B} = \emptyset$, luego $t_{A,B} = 1$.

Observación 4.2. Por la observación anterior, sabemos que $T_{A,B} = \emptyset \Rightarrow t_{A,B} = 1$. Sin embargo la implicación recíproca no es cierta, como podemos ver en el siguiente caso:

Consideremos $A = [0.2, 0.5[\cup \{\frac{n}{n+1} \text{ con } n \geq 2\} \cup \{1\}$ y $B = \{\frac{n}{n+1} \text{ con } n \geq 1\}$. En este caso $A^- \vee B^- = B^- = 0.5$. Además $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = [0.2, 0.5[\cup \{1\}$. Por lo tanto $T_{A,B} = \{1\}$ y tenemos $t_{A,B} = 1$.

Veamos algunos ejemplos prácticos del cálculo de $T_{A,B}$ y $t_{A,B}$.

Ejemplo 4.6. Sean $A =]0.1, 0.5[\cup \{0.6, 0.7\}$, $B =]0.4, 0.6[\cup \{0.9\}$, $C = \{0.1\} \cup [0.4, 0.9]$, $D = \{0.4\} \cup [0.7, 0.9]$.



$$T_{A,B} = [0.5, 0.6] \cup \{0.7, 0.9\},$$

luego $t_{A,B} = 0.5$.

$$T_{C,D} = [0.4, 0.7]. \text{ Por tanto } t_{C,D} = 0.4.$$

4. Orden simétrico

Lema 4.1. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$. Para todo $Z \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ cota inferior de A y B , esto es, cumpliendo $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$, se cumple $z \leq t_{A,B}$, $\forall z \in Z$.

Demostración. El caso $T_{A,B} = \emptyset$ es trivial: en este caso $t_{A,B} = 1$ y en consecuencia $z \leq t_{A,B}$, $\forall z \in Z \subseteq [0, 1]$.

Supongamos $T_{A,B} \neq \emptyset$. Sea $t \in T_{A,B}$ arbitrario. Veamos primero que $t \notin Z$. Por reducción al absurdo supongamos $t \in Z$. La definición de $T_{A,B}$ nos asegura que $t \notin A \cap B$. Por tanto o bien $t \in Z \setminus A$ o bien $t \in Z \setminus B$. En el primer caso $t < a$, $\forall a \in A$ por PD2 de $Z \leq^0 A$, luego $t \leq A^-$. En el segundo caso $t < b$, $\forall b \in B$ por PD2 de $Z \leq^0 B$, luego $t \leq B^-$. En ambos casos tenemos $t \leq A^- \vee B^-$, por lo que $t \notin T_{A,B}$, lo que contradice la hipótesis $t \in T_{A,B}$. Por tanto $t \notin Z$.

Ahora bien, $t \in A \cup B$. Distinguimos dos casos, o bien $t \in A \Rightarrow t \in A \setminus Z$, o bien $t \in B \Rightarrow t \in B \setminus Z$. En ambos casos, aplicando las propiedades PD2 de $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$ respectivamente, se obtiene $z < t$, $\forall z \in Z$. Por la arbitrariedad de t podemos tomar límites en la desigualdad, obteniendo $z \leq t_{A,B}$, $\forall z \in Z$. $\square$

De la demostración de este lema se obtiene también que si Z es cota inferior de A y B , entonces $Z \cap T_{A,B} = \emptyset$, y $Z < T_{A,B}$.

Una vez definido $t_{A,B}$, construimos a partir de éste los siguientes conjuntos:

Definición 4.3. Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, definimos

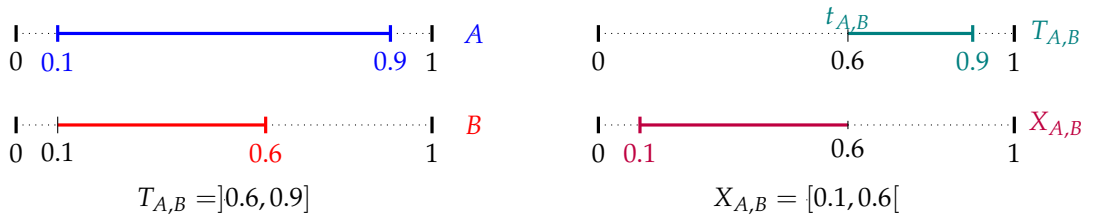
$$X_{A,B} = \{x \in A \cup B / x < t_{A,B}\}$$

$$\bar{X}_{A,B} = \{x \in A \cup B / x \leq t_{A,B}\}$$

Claramente $X_{A,B} \subseteq \bar{X}_{A,B}$. Además $\bar{X}_{A,B} \subseteq X_{A,B} \cup \{t_{A,B}\}$, pero no siempre se da la igualdad, como se puede ver en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.7. Sean $A = \{\frac{1}{2n} ; n \geq 1\}$ y $B = \{\frac{1}{2n+1} ; n \geq 1\}$. En este caso $A^- = 0$, $B^- = 0$ y $A \cap B = \emptyset$, por lo que $T_{A,B} = A \cup B$ y $t_{A,B} = 0$. Es claro que $0 \notin A \cup B$, luego $\bar{X}_{A,B} = X_{A,B} = \emptyset$, y además $\emptyset = \bar{X}_{A,B} \subsetneq X_{A,B} \cup \{t_{A,B}\} = \{t_{A,B}\}$.

Ejemplo 4.8. Sean $A = [0.1, 0.9]$, $B =]0.1, 0.6]$.



Lema 4.2. Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, se cumple que $X_{A,B} \leq^0 \bar{X}_{A,B}$.

Demostración. Distingamos dos casos en función de $t_{A,B}$. Si $t_{A,B} \notin A \cup B$, entonces $X_{A,B} = \bar{X}_{A,B}$, y por reflexividad de $\leq^0$ tenemos $X_{A,B} \leq^0 \bar{X}_{A,B}$. Si, por el contrario, $t_{A,B} \in A \cup B$, entonces $X_{A,B} \setminus \bar{X}_{A,B} = \emptyset < \bar{X}_{A,B}$, y $\bar{X}_{A,B} \setminus X_{A,B} = \{t_{A,B}\} > X_{A,B}$. Por tanto $X_{A,B} \leq^0 \bar{X}_{A,B}$. $\square$

Los conjuntos $X_{A,B}$ y $\bar{X}_{A,B}$ serán de vital importancia para el cálculo del ínfimo para el orden simétrico $\leq^0$ de los conjuntos A y B . Estudiaremos a continuación algunas propiedades de $X_{A,B}$ y $\bar{X}_{A,B}$ que se utilizarán en el cálculo del ínfimo para $\leq^0$.

Lema 4.3. *Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, equivalen*

a) $X_{A,B} = \emptyset$

b) $t_{A,B} = A^- = B^-$.

Demostración. Demostremos en primer lugar la implicación $b) \Rightarrow a)$. Suponemos $t_{A,B} = A^- = B^-$. Tenemos entonces que $t_{A,B} \leq x, \forall x \in A \cup B$. Por lo tanto tenemos que $X_{A,B} = \{x \in A \cup B / x < t_{A,B}\} = \emptyset$.

Demostremos ahora $a) \Rightarrow b)$. Supongamos $X_{A,B} = \emptyset$. Puesto que $X_{A,B} = \{x \in A \cup B / x < t_{A,B}\}$ deducimos que dado $x \in A \cup B$ arbitrario, se cumple $t_{A,B} \leq x$. Entonces, dado $a \in A$ tenemos $t_{A,B} \leq a$, y en particular, $t_{A,B} \leq A^-$. De igual modo, para todo $b \in B$ se tiene $t_{A,B} \leq b$, y $t_{A,B} \leq B^-$. Uniendo ambas desigualdades obtenemos $t_{A,B} \leq A^- \wedge B^-$, y además, por la definición de $T_{A,B}$, sabemos que $A^- \vee B^- \leq t_{A,B}$. Por tanto $A^- \vee B^- \leq A^- \wedge B^-$, lo que implica $A^- = B^- = t_{A,B}$. $\square$

Ejemplo 4.9. Dados los conjuntos A, B definidos en E.j. 4.7, tenemos que $A^- = B^- = t_{A,B} = 0$. Por tanto, de acuerdo con el Lema 4.3, tenemos $X_{A,B} = \emptyset$.

Definiendo $C = A \cup \{0\} = \{\frac{1}{2^n} ; n \geq 1\} \cup \{0\}$, y $D = \{\frac{1}{2^{n+1}} ; n \geq 1\} \cup \{0\}$, tenemos $C^- = D^- = 0$. Aplicando la definición de $T_{C,D}$ obtenemos $T_{C,D} = (C \cup D) \setminus \{0\}$, luego $t_{C,D} = 0 = A^- = B^-$. Entonces por Lema 4.3 tenemos $X_{A,B} = \emptyset$, pero a diferencia del caso de A y B , $\bar{X}_{C,D} = \{0\} \neq \emptyset$.

En adelante asumiremos por simplicidad que $A^- \leq B^-$. En el caso en que $B^- < A^-$ es suficiente renombrar los conjuntos para aplicar los resultados.

Lema 4.4. *Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$. Si $A^- \leq B^-$, entonces se cumple:*

a) $X_{A,B} \subseteq A \cup \{B^-\}$

b) $\bar{X}_{A,B} \subseteq A \cup \{B^-, t_{A,B}\}$

c) $X_{A,B} < A \setminus X_{A,B}$

d) $\bar{X}_{A,B} < A \setminus \bar{X}_{A,B}$

e) $\bar{X}_{A,B} < B \setminus \bar{X}_{A,B}$

Demostración. a) Si $X_{A,B} = \emptyset$, entonces la afirmación se cumple trivialmente ya que $\forall \Delta \subseteq [0, 1]$ se tiene $\emptyset \subseteq \Delta$. Supongamos $X_{A,B} \setminus A \neq \emptyset$. Sea $x \in X_{A,B} \setminus A$. Por la definición de $X_{A,B} = \{x \in A \cup B / x < t_{A,B}\}$ deducimos que $x \in B$, luego $x \geq B^-$. Además $x < t_{A,B}$, luego $x \notin T_{A,B}$. Como $x \notin A \cap B$, la no pertenencia de x a $T_{A,B}$ implica que $x \leq A^- \vee B^- = B^-$. Por lo tanto $x = B^-$, con lo que concluimos $X_{A,B} \subseteq A \cup \{B^-\}$.

b) Recordemos que $\bar{X}_{A,B} \subseteq X_{A,B} \cup \{t_{A,B}\}$, como se explica en Def. 4.3. Entonces, aplicando el apartado a), tenemos $\bar{X}_{A,B} \subseteq X_{A,B} \cup \{t_{A,B}\} \subseteq A \cup \{B^-, t_{A,B}\}$.

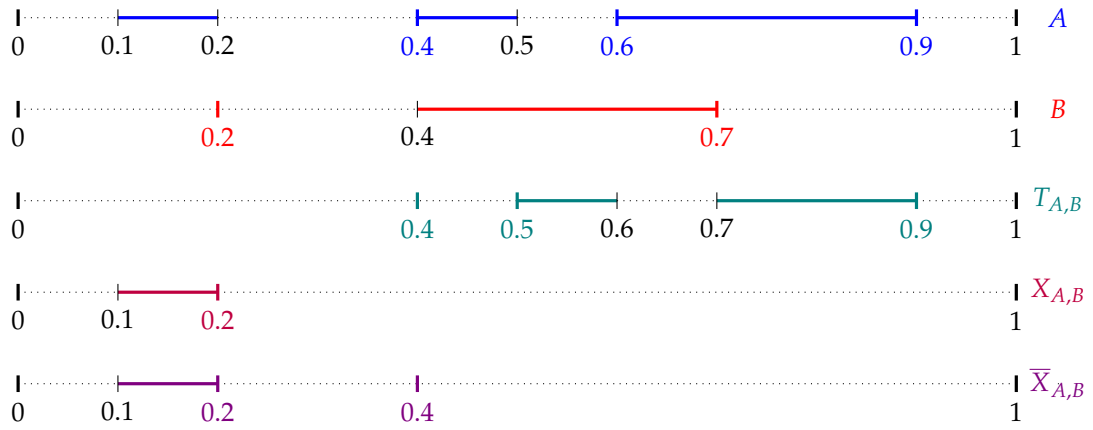
4. Orden simétrico

c) Sea $a \in A \setminus X_{A,B}$. En particular $a \in A \Rightarrow a \in A \cup B$. Como $a \notin X_{A,B}$, deducimos que $a \geq t_{A,B}$. Por tanto, dado $x \in X_{A,B}$ arbitrario, se cumple $x < t_{A,B} \leq a \Rightarrow x < a$. Obtenemos así $X_{A,B} < A \setminus X_{A,B}$.

d) Sea $a \in A \setminus \bar{X}_{A,B}$. En particular $a \in A \cup B$ y $a \notin \bar{X}_{A,B}$, por lo que se cumple $t_{A,B} < a$. Por tanto, dado $x \in \bar{X}_{A,B}$ arbitrario, $x \leq t_{A,B}$, luego $x \leq t_{A,B} < a$. Por tanto $\bar{X}_{A,B} < A \setminus \bar{X}_{A,B}$.

e) La afirmación e) se demuestra de forma totalmente análoga a d). Tomamos $b \in B \setminus \bar{X}_{A,B}$. En particular $b \in A \cup B$ y $b \notin \bar{X}_{A,B}$. Entonces $t_{A,B} < b$, y, dado $x \in \bar{X}_{A,B}$, $x \leq t_{A,B} < b$, demostrando $\bar{X}_{A,B} < B \setminus \bar{X}_{A,B}$. □

Ejemplo 4.10. Sean $A =]0.1, 0.2[\cup]0.4, 0.5[\cup]0.6, 0.9[$ y $B = \{0.2\} \cup]0.4, 0.7]$. Veamos visualmente ambos conjuntos y comprobemos que se cumple el **Lema 4.4**.



Vemos que $X_{A,B} \subseteq A \cup \{B^-\}$, y $\bar{X}_{A,B} \subseteq A \cup \{B^-, t_{A,B}\}$. Además, se cumplen c), d) y e):

$$\begin{aligned} X_{A,B} =]0.1, 0.2[&< A \setminus X_{A,B} = [0.4, 0.5[\cup]0.6, 0.9[; \\ X_{A,B} =]0.1, 0.2[&< B \setminus X_{A,B} =]0.4, 0.7]; \\ \bar{X}_{A,B} =]0.1, 0.2[\cup \{0.4\} &< A \setminus \bar{X}_{A,B} =]0.4, 0.5[\cup]0.6, 0.9[; \\ \bar{X}_{A,B} =]0.1, 0.2[\cup \{0.4\} &< B \setminus \bar{X}_{A,B} =]0.4, 0.7]. \end{aligned}$$

Estudiaremos a continuación una serie de proposiciones sobre las que se apoyará la obtención del ínfimo para el orden simétrico de dos conjuntos. Caracterizaremos en ellas los casos en los que $X_{A,B}$ y $\bar{X}_{A,B}$ son menores que A y B respecto al orden simétrico, y los conjuntos para los cuales $X_{A,B}$ o $\bar{X}_{A,B}$ son la mayor cota inferior para el orden simétrico.

Proposición 4.6. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tales que $A^- \leq B^-$ y $X_{A,B} \neq \emptyset$. Entonces se verifican las siguientes equivalencias:

- a) $X_{A,B} \leq^0 A$ si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:
 - i) $A^- = B^-$
 - ii) $B^- = t_{A,B}$
 - iii) $B^- \notin B \setminus A$
- b) $\bar{X}_{A,B} \leq^0 A$ si y solo si se cumple $t_{A,B} \notin B \setminus A$ y $X_{A,B} \leq^0 A$.

Demostración. a). Veamos la implicación a la derecha. Supongamos $X_{A,B} \leq^0 A$. Si $X_{A,B} \setminus A \neq \emptyset$ tenemos, por **Lema 4.4 a)** que $X_{A,B} \setminus A = \{B^-\}$. Por PD1 de $X_{A,B} \leq^0 A$ se tiene que $X_{A,B} \setminus A < A$, lo que implica $B^- \leq A^-$. Por tanto $A^- = B^-$. Si $X_{A,B} \setminus A \neq \emptyset$, tenemos las siguientes opciones: o bien $B^- \in A$, lo que implica $B^- \notin B \setminus A$; o bien $B^- \notin A$ y por tanto $B^- \notin X_{A,B}$. Este caso ocurre si $B^- \notin B$ o si $B^- \geq t_{A,B}$. En el primer caso se verifica $B^- \notin B \setminus A$, y en el segundo se cumple $t_{A,B} = B^-$ (ya que por construcción de $t_{A,B}$ se tiene que $B^- \leq t_{A,B}$).

Veamos la implicación a la izquierda. El **Lema 4.4 c)** prueba la PD1 de $X_{A,B} \leq^0$. Veamos pues PD2. Recordemos que, por **Lema 4.4 a)**, se tiene $X_{A,B} \setminus A \subseteq \{B^-\}$. Entonces

- i) Si $A^- = B^-$, por definición de ínfimo, $B^- \leq a, \forall a \in A$. Si $B^- \in A$ tendremos $X_{A,B} \setminus A = \emptyset$, luego PD2 se cumple trivialmente. Si por el contrario $B^- \notin A$, entonces la igualdad no puede darse para ningún $a \in A$, luego $B^- < a, \forall a \in A$.
- ii) Supongamos $B^- = t_{A,B}$. Entonces $B^- \notin X_{A,B}$, por lo que $X_{A,B} \setminus A = \emptyset$ y la PD2 se cumple trivialmente.
- iii) Si $B^- \notin B \setminus A$, o bien $B^- \notin B \Leftarrow B^- \notin A \cup B$ o bien $B^- \in A$. En el primer caso tenemos $X_{A,B} \setminus A = \emptyset$. En el segundo caso $B^- \notin X_{A,B}$, luego $X_{A,B} \setminus A = \emptyset$. En ambos casos la PD2 se cumple trivialmente.

Por tanto $X_{A,B} \leq^0 A$.

b). Veamos la implicación a la derecha. Suponemos $\bar{X}_{A,B} \leq^0$. Por **Lema 4.2** tenemos $X_{A,B} \leq^0 \bar{X}_{A,B}$. Por transitividad de $\leq^0$ se tiene $X_{A,B} \leq^0 A$. Para probar $t_{A,B} \notin B \setminus A$ distinguimos dos casos. Si $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \setminus A$, o bien $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B}$, con lo que $t_{A,B} \notin A \cup B$; o bien $t_{A,B} \in A$. En ambos casos se verifica $t_{A,B} \notin B \setminus A$. Si por el contrario $t_{A,B} \in \bar{X}_{A,B} \setminus A$, por PD1 tenemos $t_{A,B} < a, \forall a \in A$, luego $t_{A,B} \leq A^- \leq B^- \leq t_{A,B}$. Obtenemos así que $A^- = B^- = t_{A,B}$, y por **Lema 4.3** tenemos $X_{A,B} = \emptyset$, contradiciendo la hipótesis. Por tanto $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \setminus A$, y las condiciones buscadas se cumplen.

Veamos ahora la implicación a la izquierda. Por **Lema 4.4 a)**, tenemos $\bar{X}_{A,B} < A \setminus \bar{X}_{A,B}$, luego la PD1 se cumple. Veamos la PD2. Recordemos que $\bar{X}_{A,B} \subseteq X_{A,B} \cup \{t_{A,B}\}$. Si $t_{A,B} \in A$, entonces $\bar{X}_{A,B} \setminus A = X_{A,B} \setminus A < A$ por hipótesis ($X_{A,B} \leq^0 A$). Si $t_{A,B} \notin A$, entonces por la hipótesis $t_{A,B} \notin B \setminus A$ tenemos $t_{A,B} \notin A \cup B$, por lo que $\bar{X}_{A,B} = X_{A,B}$ y por la hipótesis, $X_{A,B} = \bar{X}_{A,B} \leq^0 A$.

□

Proposición 4.7. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0,1])$ tales que $A^- \leq B^-$ y $X_{A,B} \neq \emptyset$. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

- a) $X_{A,B} \leq^0 B$
- b) $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$ si y solo si se cumple una de las siguientes condiciones:
 - $t_{A,B} = B^- \notin B$
 - $t_{A,B} \notin A \setminus B$

Demostración. a). Probemos en primer lugar $X_{A,B} < B \setminus X_{A,B}$. Tomemos $b \in B \setminus X_{A,B}$. Es claro que $b \in B$ y en consecuencia $b \in A \cup B$. Como $b \notin X_{A,B}$ deducimos $b \geq t_{A,B}$. Por tanto, dado $x \in X_{A,B}$ arbitrario, tenemos $x < t_{A,B} \leq B$. Obtenemos así PD1.

4. Orden simétrico

Veamos ahora $X_{A,B} \setminus B < B$. Sea $x \in X_{A,B} \setminus B$. Entonces $x \in A$, ya que $x \in X_{A,B} \subseteq A \cup B$ y $x \notin B$. Además, $x < t_{A,B}$. Por tanto $x \notin T_{A,B}$. Recordemos que $T_{A,B} = \{t \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) / t > A^- \vee B^-\}$. Puesto que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, necesariamente $x \leq A^- \vee B^- = B^-$. Si $x = B^-$ entonces $x = B^- \notin B$ y por definición de ínfimo, $x < b, \forall b \in B$. Si $x < B^-$ entonces $x < B^- < b, \forall b \in B$. En ambos casos se verifica PD2.

b) Veamos la implicación a la derecha. Supongamos $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$. Si $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B}$ se tiene que $t_{A,B} \notin A \cup B \Rightarrow t_{A,B} \notin A \setminus B$. Si por el contrario $t_{A,B} \in \bar{X}_{A,B}$ tenemos que $t_{A,B} \in A \cup B$. El caso $t_{A,B} \in B$ es fácil de concluir ya que en este caso $t_{A,B} \notin A \setminus B$. Veamos el caso $t_{A,B} \notin B \Rightarrow t_{A,B} \in \bar{X}_{A,B} \setminus B$. Por PD2 de $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$ tenemos $t_{A,B} < b, \forall b \in B$, y tomando ínfimo, $t_{A,B} \leq B^-$. Teniendo en cuenta que, por definición de $T_{A,B}$ se tiene $t_{A,B} \geq A^- \vee B^- = B^-$, concluimos que $t_{A,B} = B^- \notin B$.

Veamos ahora la implicación a la izquierda. Por **Lema 4.4** tenemos probada PD1, es decir, $\bar{X}_{A,B} < B \setminus \bar{X}_{A,B}$. Veamos PD2. Si $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \setminus B$ tenemos $\bar{X}_{A,B} = X_{A,B}$, y por el apartado a) obtenemos $\bar{X}_{A,B} = X_{A,B} \leq^0 B$. Supongamos $t_{A,B} \in \bar{X}_{A,B} \setminus B$.

- Si $t_{A,B} = B^- \notin B$ entonces dado $x \in \bar{X}_{A,B}$ se cumple $x \leq t_{A,B} < b, \forall b \in B$. Es claro que $\bar{X}_{A,B} \setminus B \subseteq \bar{X}_{A,B}$, por lo que podemos concluir $\bar{X}_{A,B} \setminus B < B$.
- Si $t_{A,B} \notin A \setminus B$, o bien $t_{A,B} \notin A \Rightarrow t_{A,B} \notin A \cup B$, luego $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \Rightarrow t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \setminus B$; o bien $t_{A,B} \in B$, en cuyo caso $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \setminus B$. Ambos casos contradicen la hipótesis $t_{A,B} \in \bar{X}_{A,B} \setminus B$. Por tanto, si $t_{A,B} \notin A \setminus B$, entonces necesariamente $t_{A,B} \notin \bar{X}_{A,B} \setminus B$, lo que implica $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$, como hemos demostrado anteriormente.

□

Proposición 4.8. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0,1])$ tales que $A^- \leq B^-$ y $X_{A,B} \neq \emptyset$. Entonces si $Z \in \mathcal{P}^*([0,1])$ es tal que $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$, se tiene que $Z \leq \bar{X}_{A,B}$.

Demostración. Tomemos $Z \in \mathcal{P}^*([0,1])$ cumpliendo $Z \leq^0 A, Z \leq^0 B$. Probemos en primer lugar PD1 de $Z \leq^0 \bar{X}_{A,B}$, esto es, $Z < \bar{X}_{A,B} \setminus Z$. Si $\bar{X}_{A,B} \setminus Z = \emptyset$ la PD1 se cumple trivialmente. Supongamos $\bar{X}_{A,B} \setminus Z \neq \emptyset$, y tomemos $x \in \bar{X}_{A,B} \setminus Z$ arbitrario. En particular $x \in (A \cup B) \setminus Z$, luego o bien $x \in A \setminus Z$ o bien $x \in B \setminus Z$. En ambos casos, aplicando la PD1 de $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$, obtenemos $z < x, \forall z \in Z$. Por tanto $Z < \bar{X}_{A,B} \setminus Z$.

Veamos ahora PD2. Aplicando **Lema 4.1**, tenemos $z \leq t_{A,B}$. Dado $z \in Z \setminus \bar{X}_{A,B}$ arbitrario, entonces $z \notin A \cup B$ (de lo contrario, como $z \leq t_{A,B}$, tendríamos $z \in \bar{X}_{A,B}$), y en consecuencia $z \in Z \setminus (A \cup B) = (Z \setminus A) \cup (Z \setminus B)$. Por PD1 de $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$, tenemos $z < a, \forall a \in A$ y $z < b, \forall b \in B$. La inclusión $\bar{X}_{A,B} \subseteq A \cup B$ nos da $Z \setminus \bar{X}_{A,B} < A \cup B$ y por tanto $Z \setminus \bar{X}_{A,B} < \bar{X}_{A,B}$, obteniendo así DP2.

Concluimos pues que $Z \leq^0 \bar{X}_{A,B}$, por lo que en caso de ser cota inferior de A y B tendremos que $\bar{X}_{A,B}$ es la mayor cota inferior para el orden simétrico. □

Para probar el siguiente teorema utilizaremos la siguiente propiedad de la relación $<$ definida para subconjuntos de $[0,1]$ al comienzo del **Capítulo 3**. Recordemos su definición: dados $A, B \in \mathcal{P}([0,1])$, diremos $A < B$ cuando $a < b, \forall a \in A, \forall b \in B$.

Observación 4.3. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0,1])$ tales que $A < B$. Entonces todo subconjunto de A , $C \in \mathcal{P}^*([0,1])$ tal que $C \subseteq A$, cumple $C < B$. En efecto, dado $c \in C$ es claro que $c \in A$. Por $A < B$ se cumple $c < b, \forall b \in B$, esto es, $C < B$.

De modo idéntico se demuestra que para todo subconjunto de B , $D \subseteq B$, se cumple $A < D$.

Teorema 4.1. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tales que $A^- \leq B^-$, $X_{A,B} \neq \emptyset$ y $t_{A,B} \in \overline{X}_{A,B}$. Supongamos $A^- = B^-$ o $B^- \notin B \setminus A$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) $\forall Z \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ cumpliendo $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$ se tiene $Z \leq^0 X_{A,B}$.
- b) $\overline{X}_{A,B}$ no es cota inferior de A y B .
- c) Una de las siguientes condiciones se cumple:
 - i) $t_{A,B} \in B \setminus A$
 - ii) $t_{A,B} \in A \setminus B$ y $B^- < t_{A,B}$

Demostración.

a) $\Rightarrow$ b) Supongamos $\forall Z \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ con $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$ se tiene $Z \leq^0 X_{A,B}$. Por **Lema 4.2** tenemos $X_{A,B} \leq^0 \overline{X}_{A,B}$. Por tanto tenemos que $\overline{X}_{A,B}$ no puede ser cota inferior de A y B : si lo fuera tendríamos por la hipótesis $\overline{X}_{A,B} < X_{A,B} \Rightarrow \overline{X}_{A,B} = X_{A,B}$, pero esto implica que $t_{A,B} \notin \overline{X}_{A,B}$, lo que es una contradicción. Por tanto $\overline{X}_{A,B}$ no es cota inferior de A y B .

b) $\Rightarrow$ c) Supongamos $\overline{X}_{A,B}$ no es cota inferior de A y B . Por lo supuesto en las hipótesis del enunciado ($A^- = B^-$ o $B^- \notin B \setminus A$) podemos aplicar **Proposición 4.6 a)**, obteniendo $X_{A,B} \leq^0 A$. Supongamos por reducción al absurdo que no se cumple ninguna de las condiciones enunciadas. $t_{A,B} \notin B \setminus A$, luego por **Proposición 4.6 b)** tenemos $\overline{X}_{A,B} \leq^0 A$. Ahora bien, si $t_{A,B} \notin A \setminus B$, por **Proposición 4.7 b)** tenemos $\overline{X}_{A,B} \leq^0 B$, luego $\overline{X}_{A,B}$ es cota inferior de A y B , contradicción. Si $B^- \geq t_{A,B}$ tendremos $B^- = t_{A,B}$ (ya que por definición $t_{A,B} \leq A^- \vee B^-$). En este caso puede darse o bien $B^- \notin B$, lo que implica por **Proposición 4.7** que $\overline{X}_{A,B} \leq^0 B$ (absurdo); o bien $B^- \in B$, con lo que $B^- = t_{A,B} \notin A \setminus B$, caso que hemos estudiado ya y que lleva a absurdo.

Por tanto debe cumplirse al menos una de las dos condiciones.

c) $\Rightarrow$ a) Sea $Z \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tal que $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$. Supongamos cierta alguna de las condiciones de c). Veamos la PD1 de $Z \leq^0 X_{A,B}$. Por ser $X_{A,B} \subseteq A \cup B$ tenemos, para $z \in Z$ arbitrario, $\begin{cases} z < a, \forall a \in A \setminus Z \\ z < b, \forall b \in B \setminus Z \end{cases} \Rightarrow z < x, \forall x \in (A \cup B) \setminus Z$. Por tanto $Z < (A \cup B) \setminus Z$ y, como $X_{A,B} \subseteq A \cup B$, se tiene $Z < X_{A,B} \setminus Z$. Probemos ahora la PD2 de $Z \leq^0 X_{A,B}$. Sea $z \in Z \setminus X_{A,B}$. En particular $z \leq t_{A,B}$. Por **Lema 4.1** sabemos que $z \leq t_{A,B}$. Si $z \notin A \cup B$ es claro que $z \in Z \setminus A$ y $z \in Z \setminus B$, luego por PD2 tenemos $\begin{cases} z < a, \forall a \in A \\ z < b, \forall b \in B \end{cases} \Rightarrow Z < (A \cup B) \setminus Z$. Como $X_{A,B} \subseteq A \cup B$, entonces $Z \setminus X_{A,B} < X_{A,B}$. Veamos ahora el caso $z \in A \cup B$. Sabemos que $z \notin X_{A,B}$, por lo que $z \geq t_{A,B}$ (de lo contrario $z \in X_{A,B}$), y por tanto $z = t_{A,B}$.

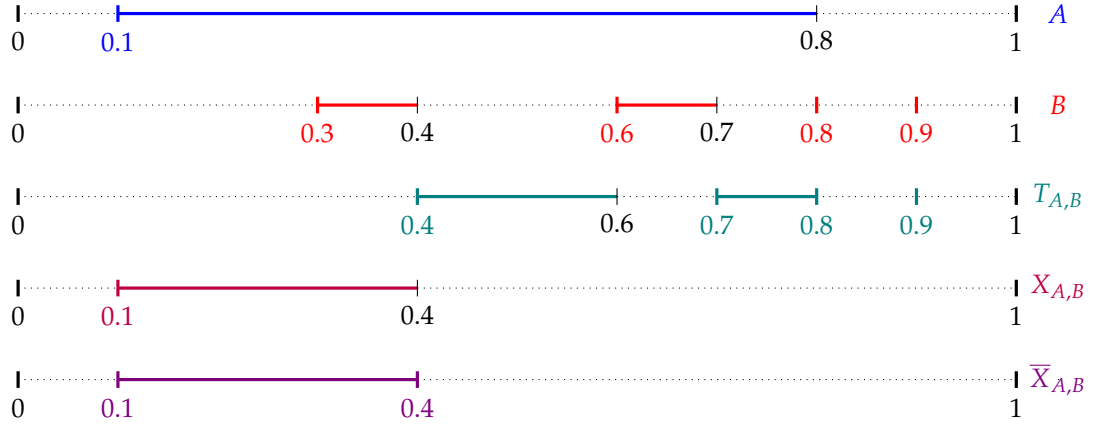
- i) Si $z = t_{A,B} \in B \setminus A$ entonces $z \notin A \Rightarrow z \in Z \setminus A < A$, luego $t_{A,B} = z \leq A^-$. Sin embargo, por definición, $t_{A,B} \geq A^- \vee B^- \geq B^- \geq A^- \Rightarrow t_{A,B} = A^- = B^-$, de lo que deducimos, utilizando **Lema 4.3**, que $X_{A,B} = \emptyset$, lo que es contradicción con las hipótesis del enunciado.
- ii) Si $t_{A,B} = z \in A \setminus B$ y $B^- < t_{A,B} = z$ tenemos por lo primero que $z = t_{A,B} \in Z \setminus B$, y por lo segundo que $\exists b \in B$ tal que $b < t_{A,B}$, lo que contradice PD2 de $Z \leq^0 B$, supuesto cierto por hipótesis.

4. Orden simétrico

Concluimos así que si se cumple alguna de las condiciones *i*), *ii*), no se puede dar $z \in A \cup B$. Por lo tanto se dará el caso $z \notin A \cup B$, que como ya hemos probado implica $Z \leq^0 X_{A,B}$. $\square$

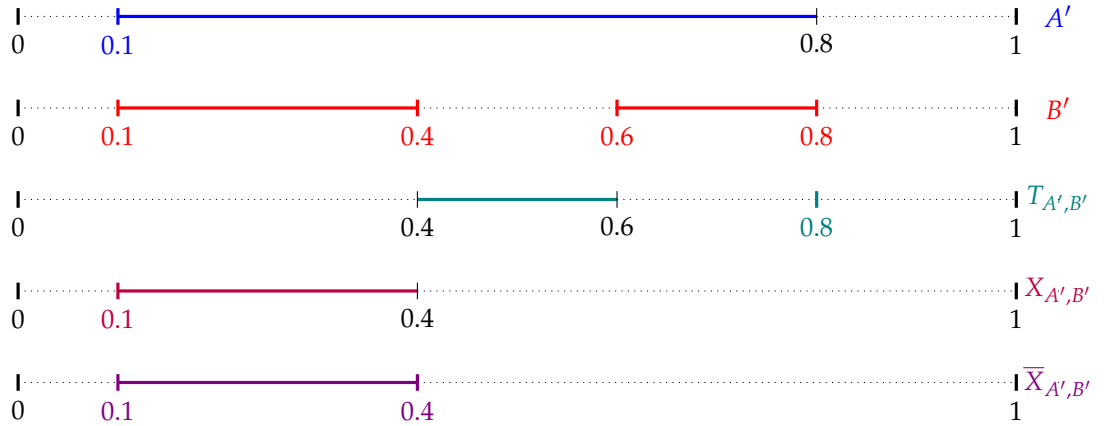
Veamos a continuación un ejemplo visual en el que podemos aplicar **Teorema 4.1**.

Ejemplo 4.11. Sean $A = [0.1, 0.8[$ y $B = [0.3, 0.4[\cup [0.6, 0.7[\cup \{0.8, 0.9\}$.



Los conjuntos A y B verifican las hipótesis del **Teorema 4.1** ($B^- = 0.3 \in A \Rightarrow B^- \notin B \setminus A$), y $t_{A,B} = 0.4$. Además, se cumple la propiedad *ii*) del **Teorema 4.1**, luego aplicando este teorema obtenemos que $\bar{X}_{A,B}$ no es cota inferior, como podemos ver en el dibujo; y que $X_{A,B}$ es la mayor cota inferior de A y B para el orden simétrico.

Estudiemos ahora otro modo de aplicar este teorema. Sean $A' = [0.1, 0.8[$ y $B' = [0.1, 0.4] \cup [0.6, 0.8]$.

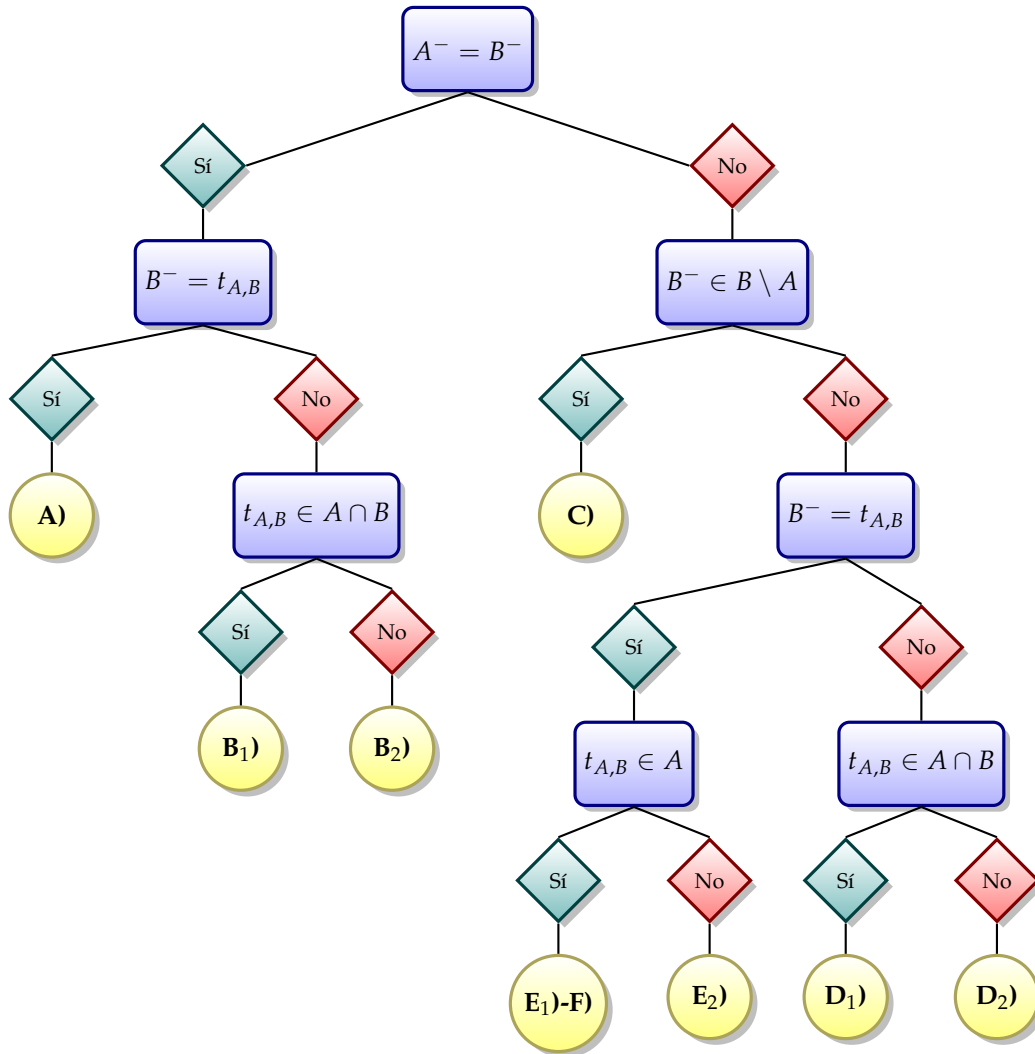


Los conjuntos A' y B' verifican las hipótesis del **Teorema 4.1**. En el gráfico podemos ver que $t_{A',B'} = 0.4$. Puesto que no se cumple ninguna de las condiciones de **Teorema 4.1 c**) ($t_{A',B'} \notin A' \setminus B'$ y $t_{A',B'} \notin B' \setminus A'$) obtenemos que $\bar{X}_{A',B'}$ es cota inferior de A' y B' para el orden simétrico, como se aprecia en el gráfico.

4.2.2. Cálculo del ínfimo del orden simétrico.

Tenemos ya todas las herramientas necesarias para calcular el ínfimo para el orden simétrico de A y B , que denotaremos por $A \wedge_0 B$. Distinguiremos varios casos en función de A^- , B^- y $t_{A,B}$ y calcularemos $A \wedge_0 B$ en cada caso. El siguiente esquema sirve de apoyo para distinguir los casos que estudiaremos:

Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tales que $A^- \leq B^-$.



[Esquema de casos para el cálculo del ínfimo.]

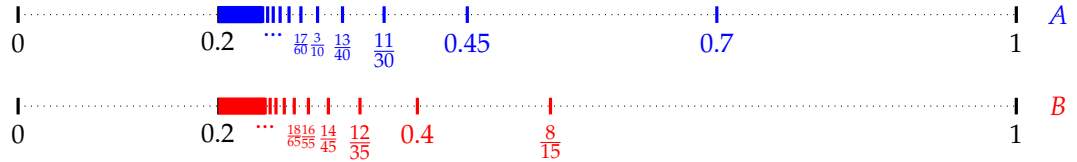
Veamos ahora el ínfimo en cada caso. En las siguientes proposiciones trabajaremos con dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tales que $A^- \leq B^-$.

4. Orden simétrico

Proposición 4.9. Caso A) Si $A^- = B^- = t_{A,B}$, entonces $A \wedge_0 B = \{B^-\}$.

Demostración. Por hipótesis tenemos $\{A^-\} = \{B^-\}$. Por E.j. 4.5 tenemos que $\{B^-\} \leq^0 A$ y $\{B^-\} \leq^0 B$, es decir, $\{B^-\}$ es cota inferior de A y B . Veamos que es la mayor cota inferior de A y B . Tomemos $Z \in \mathcal{P}^*([0,1])$ cumpliendo $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$. Por Lema 4.1 tenemos que dado $z \in Z$ arbitrario, $z \leq t_{A,B} = B^-$. Por tanto es claro que $Z < \{B^-\} \setminus Z$ y $Z \setminus \{B^-\} < \{B^-\}$, luego $Z \leq^0 \{B^-\}$. Obtenemos así $A \wedge_0 B = \{B^-\}$. $\square$

Ejemplo 4.12. Caso A). Sean $A = \{0.2 + \frac{1}{2n} ; n = 1, 2, \dots\}$ y $B = \{0.2 + \frac{1}{2n+1} ; n = 1, 2, \dots\}$



$A^- = B^- = 0.2 = t_{A,B}$. Por tanto este ejemplo corresponde al caso A, con lo que $A \wedge_0 B = \{B^-\} = \{0.2\}$. Es fácil ver visualmente que $\{0.2\}$ es la mayor cota inferior de A y B .

Proposición 4.10. Caso B) Si $A^- = B^- < t_{A,B}$, entonces $A \wedge_0 B = \begin{cases} \overline{X}_{A,B} & \text{si } t_{A,B} \in A \cap B \\ X_{A,B} & \text{si } t_{A,B} \notin A \cap B \end{cases}$

Demostración. Supongamos $t_{A,B} \notin A \cup B$, lo que implica $X_{A,B} = \overline{X}_{A,B}$. Por Proposición 4.6 y Proposición 4.7 tenemos $X_{A,B} \leq^0 A$ y $X_{A,B} \leq^0 B$. Además, por Proposición 4.8, $\overline{X}_{A,B} = X_{A,B}$ es la mayor cota inferior. Por tanto $A \wedge_0 B = X_{A,B} = \overline{X}_{A,B}$.

Supongamos ahora $t_{A,B} \in A \cup B$. En este caso $t_{A,B} \in \overline{X}_{A,B}$. Distingamos dos casos:

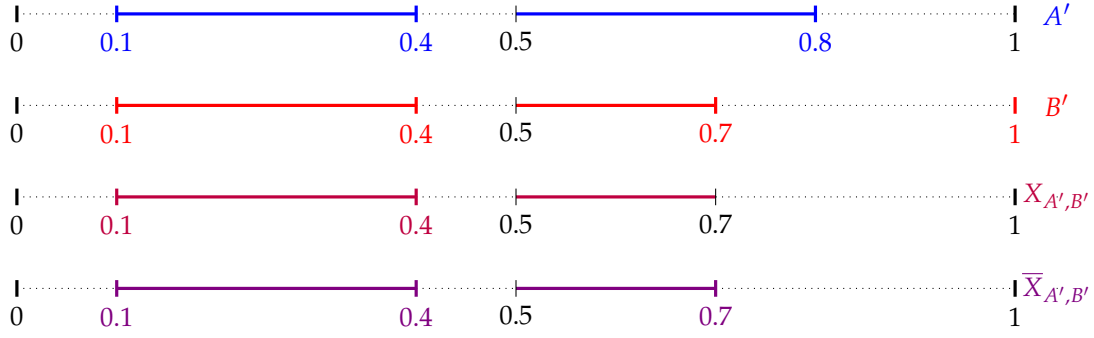
- Si $t_{A,B} \in A \cap B$ tenemos $t_{A,B} \notin B \setminus A$. Aplicando Proposición 4.6 a) tenemos $X_{A,B} \leq^0 A$ (ya que $A^- = B^-$). Aplicamos ahora el apartado b) de la misma proposición y obtenemos $\overline{X}_{A,B} \leq^0 A$. Además, aplicando Proposición 4.7 b) tenemos $\overline{X}_{A,B} \leq^0 B$ ya que $t_{A,B} \notin A \setminus B$. Por último utilizamos Proposición 4.8 para obtener que $\overline{X}_{A,B}$ es la mayor cota inferior de A y B para el orden simétrico.
- Si $t_{A,B} \notin A \cap B$ entonces o bien $t_{A,B} \in B \setminus A$ o bien $t_{A,B} \in A \setminus B$. Como $A^- = B^-$ podemos aplicar los resultados Proposición 4.6 a) y Proposición 4.7 b), obteniendo $X_{A,B} \leq^0 A$ y $X_{A,B} \leq^0 B$. Además, se cumplen las condiciones de Teorema 4.1 c), por lo que tenemos que $\overline{X}_{A,B}$ no es cota inferior de A y B , y que $X_{A,B}$ es la mayor cota inferior, luego $A \wedge_0 B = X_{A,B}$.

$\square$

Ejemplo 4.13. Caso B) Sean $A = [0, 0.1] \cup \{0.3 + \frac{1}{2n} ; n = 1, 2, \dots\}$ y $B = [0, 0.1] \cup \{\frac{1}{2n+1} ; n = 1, 2, \dots\}$.

$A^- = B^- = 0$, y $t_{A,B} = 0.3$. Es claro que $t_{A,B} \notin A \cup B \Rightarrow t_{A,B} \notin A \cap B$, luego aplicando el caso B), tenemos $A \wedge_0 B = X_{A,B} = [0, 0.1]$.

Sean ahora $A' = [0.1, 0.4] \cup [0.5, 0.8]$ y $B' = [0.1, 0.4] \cup [0.5, 0.7] \cup \{1\}$.



$A^- = B^- = 0.1$, y $t_{A,B} = 0.7 \in A \cap B$. Por tanto, aplicando el caso B, tenemos
 $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B} = [0.1, 0.4] \cup [0.5, 0.7]$.

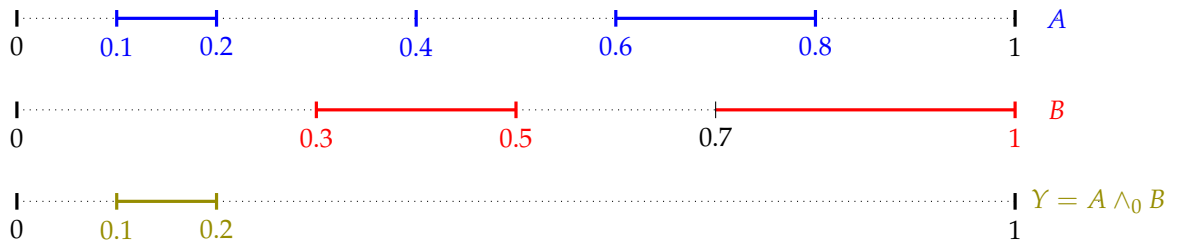
Proposición 4.11. Caso C) Si $A^- < B^-$ y $B^- \in B \setminus A$, entonces $A \wedge_0 B = \{a \in A / a < B^-\}$.

Demostración. Sea $Y = \{a \in A / a < B^-\} \subseteq A$. Probemos que Y es el ínfimo de A y B . Claramente $Y < B$, luego $Y \leq^0 B$. Veamos $Y \leq^0 A$. La propiedad DP2 se cumple trivialmente ya que $Y \setminus A = \emptyset < A$. Para probar $Y < A \setminus Y$, tomemos $a \in A \setminus Y$, esto es, $a \in A$ y $a \notin Y$. La no pertenencia de a a Y implica que $a \geq B^-$, por lo que dado $y \in Y$ se tiene $y < B^- \leq a$, luego $y < a$, $\forall y \in Y$. Obtenemos así PD1, y $Y \leq^0 A$.

Probemos por último que Y es la mayor cota inferior. Sea $Z \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tal que $Z \leq^0 A$ y $Z \leq^0 B$. Por PD1 de $Z \leq^0 A$ tenemos $Z < A \setminus Z$. Ahora bien, $Y \subseteq A \Rightarrow Y \setminus Z \subseteq A \setminus Z$, luego por **Observación 4.3** tenemos $Z < Y \setminus Z$.

Veamos $Z \setminus Y < Y$. Si $Z \setminus Y = \emptyset$ la propiedad se cumple trivialmente. Supongamos $Z \setminus Y \neq \emptyset$. Probaremos primero que $B^- \notin Z$: por hipótesis $B^- \in B \setminus A$, luego $B^- \notin A$. Ahora bien, $A^- < B^-$, por lo que $\exists a \in A$ tal que $a < B^-$. Como $Z \setminus A < A$ (PD2 de $Z \leq^0 A$) tenemos que $B^- \notin Z \setminus A$ (de lo contrario tendríamos $a < B^-$ para cierto $a \in A$, contradiciendo esta hipótesis), y teniendo en cuenta $B^- \notin A$ obtenemos $B^- \notin Z$. Sabemos pues que $B^- \in B \setminus Z$. Por PD1 de $Z \leq^0 B$ tenemos $Z < B \setminus Z$, luego $z < B^-$, $\forall z \in Z$. Por tanto $Z \cap A \subseteq Y$, lo que implica $Z \setminus Y \subseteq Z \setminus A = Z \setminus (Z \cap A)$, y por **Observación 4.3** tenemos $Z \setminus Y < A$. Por último, $Y \subseteq A$, luego aplicando la misma observación tenemos $Z \setminus Y < Y$ y en consecuencia $Z \leq^0 Y$. Concluimos así que $A \wedge_0 B = Y = \{a \in A / a < B^-\}$. $\square$

Ejemplo 4.14. Caso C) Sean $A = [0.1, 0.2] \cup \{0.4\} \cup [0.6, 0.8]$ y $B = [0.3, 0.5] \cup [0.7, 1]$.



$A^- = 0.1 < B^-$ y $B^- = 0.3 \in B \setminus A$, luego estamos en el caso C. Por tanto $A \wedge_0 B = [0.1, 0.2]$.

4. Orden simétrico

Proposición 4.12. Caso D) Si $A^- < B^-$, $B^- \notin B \setminus A$ y $B^- < t_{A,B}$, entonces

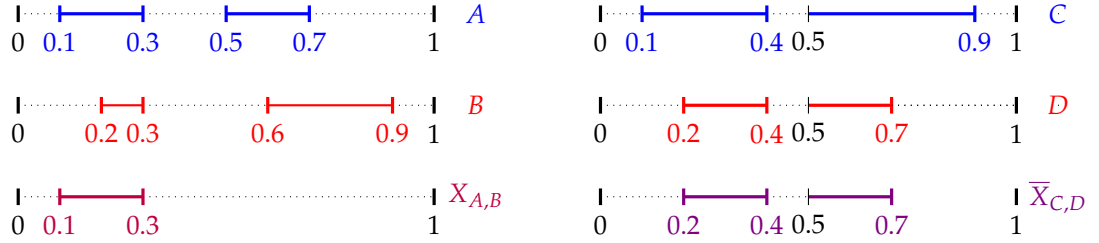
$$A \wedge_0 B = \begin{cases} \bar{X}_{A,B} & \text{si } t_{A,B} \in A \cap B \\ X_{A,B} & \text{si } t_{A,B} \notin A \cap B \end{cases}$$

Demostración. Por la hipótesis $A^- < B^-$ tenemos, aplicando **Lema 4.3**, $X_{A,B} \neq \emptyset$. Diferenciamos dos casos:

- Si $t_{A,B} \notin (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ entonces o bien $t_{A,B} \notin A \cup B \Rightarrow t_{A,B} \notin A \setminus B$, o bien $t_{A,B} \in A \cap B \Rightarrow t_{A,B} \notin A \setminus B$. Aplicando **Proposición 4.7 b)** obtenemos $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$. Por el mismo razonamiento $t_{A,B} \notin B \setminus A$, que junto a la hipótesis $B^- \notin B \setminus A$ implica $\bar{X}_{A,B} \leq^0 A$ por **Proposición 4.6**. Aplicando por último **Proposición 4.8** tenemos que $\bar{X}_{A,B}$ es la mayor cota inferior de A y B , luego $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B}$. Nótese que, en el caso $t_{A,B} \notin A \cup B$ se tiene también $t_{A,B} \notin A \cap B$, pero se da la igualdad $X_{A,B} = \bar{X}_{A,B}$, por lo que se sigue cumpliendo la proposición.
- Si $t_{A,B} \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ es claro que $t_{A,B} \notin A \cap B$. Entonces $t_{A,B} \in \bar{X}_{A,B}$ y, por la **Proposición 4.7** tenemos $X_{A,B} \leq^0 B$. Además $B^- \notin B \setminus A$, luego por **Proposición 4.6** tenemos $X_{A,B} \leq^0 A$. Para aplicar **Teorema 4.1** y obtener que $X_{A,B}$ es la mayor cota inferior de A y B notemos que $t_{A,B} \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ y que por hipótesis $B^- < t_{A,B}$. Por tanto podemos aplicar **Teorema 4.1**, con lo que $\bar{X}_{A,B}$ no es cota inferior de A y B , y $A \wedge_0 B = X_{A,B}$.

□

Ejemplo 4.15. Caso D) Sean $A = [0.1, 0.3] \cup [0.5, 0.7]$, $B = [0.2, 0.3] \cup [0.6, 0.9]$, $C = [0.1, 0.4] \cup [0.5, 0.9]$, $D = [0.2, 0.4] \cup [0.5, 0.7]$. Es claro que $A^- < B^-$ y $C^- < D^-$. Además, $B^- \notin B \setminus A$, $D^- \notin D \setminus C$; y $B^- < t_{A,B}$, $D^- < t_{C,D}$. Aplicamos por tanto el caso D).



$t_{A,B} = 0.5$, luego $B^- < t_{A,B}$ y $A \wedge_0 B = X_{A,B} = [0.1, 0.3]$.

$t_{C,D} = 0.7 \in C \cap D$, luego $C \wedge_0 B = \bar{X}_{C,D} = D$, como vemos en la figura.

Proposición 4.13. Caso E) Si $A^- < B^-$, $B^- \notin B \setminus A$ y $B^- \notin A \setminus B$, entonces

$$A \wedge_0 B = \begin{cases} \bar{X}_{A,B} & \text{si } t_{A,B} \in A \cap B \\ X_{A,B} & \text{si } t_{A,B} \notin A \cap B \end{cases}$$

Demostración. Por ser $A^- < B^-$ tenemos, por **Lema 4.3** que $X_{A,B} = \emptyset$.

- Si $t_{A,B} \notin (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow t_{A,B} \notin A \setminus B$ y $t_{A,B} \notin B \setminus A$. Como $X_{A,B} \neq \emptyset$, aplicando **Proposición 4.6** y **Proposición 4.7** obtenemos $\bar{X}_{A,B} \leq^0 A$ y $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$. Por **Proposición 4.8** tenemos que $\bar{X}_{A,B}$ es la mayor cota inferior de A y B .

- Si $t_{A,B} \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, luego o bien $t_{A,B} \in A \setminus B$ o bien $t_{A,B} \in B \setminus A$. Por hipótesis tenemos $B^- \notin A \setminus B$ y $B^- \notin B \setminus A$.

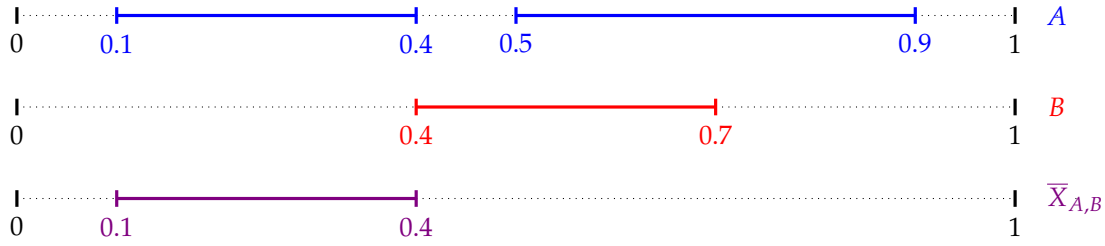
Supongamos $t_{A,B} \in B \setminus A$. Dado un elemento $b \in B$ se cumple por definición de ínfimo $B^- \leq b$. Además, como $B^- \notin B \setminus A \subseteq B$, se da la desigualdad estricta. Por tanto $B^- < b$, $\forall b \in B \setminus A$. En particular $B^- < t_{A,B}$, ya que $t_{A,B} \in B \setminus A$.

Si $t_{A,B} \in A \setminus B$, por definición de $T_{A,B}$ se tiene $B^- = A^- \vee B^- \leq t_{A,B}$. Como $B^- \notin A \setminus B$ y $t_{A,B} \in A \setminus B$ la igualdad no se puede cumplir. Por tanto $B^- < t_{A,B}$.

En ambos casos se cumple $B^- < t_{A,B}$, y por hipótesis $A^- < B^-$ y $B^- \notin B \setminus A$, por lo que estamos en el caso D).

Nótese que si $t_{A,B} \notin A \cup B$ entonces estaríamos en el primer caso, con lo que $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B}$. Además, $t_{A,B} \notin A \cup B \Rightarrow t_{A,B} \notin A \cap B$, con lo que según la proposición, $A \wedge_0 B = X_{A,B}$. Esto no es contradictorio ya que, por ser $t_{A,B} \notin A \cup B$, se da la igualdad $X_{A,B} \bar{X}_{A,B}$. $\square$

Ejemplo 4.16. Caso E) Sean $A = [0.1, 0.4] \cup [0.5, 0.9]$ y $B = [0.4, 0.7]$.

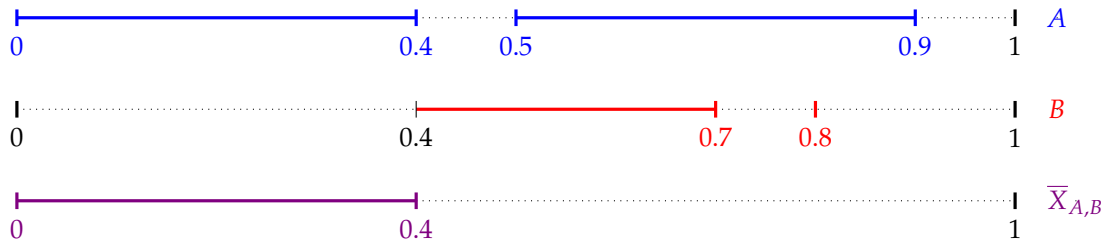


$B^- = 0.4 \in A \cup B \Rightarrow B^- \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, y $A^- < B^-$, luego estamos en el caso E).
 $t_{A,B} = 0.4 \in A \cap B$, por lo que $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B}$, como se ve en el gráfico.

Proposición 4.14. Caso F) Si $A^- < B^-$, $B^- \notin B \setminus A$ y $B^- = t_{A,B} \in A \setminus B$, entonces $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B}$.

Demostración. Por hipótesis tenemos $B^- = t_{A,B}$, lo que nos da las siguientes condiciones sobre $t_{A,B}$: $t_{A,B} \notin B \setminus A$ y $t_{A,B} \in A \setminus B$, esto es, $t_{A,B} \in A$, $t_{A,B} \notin B$. Podemos aplicar **Proposición 4.6**, obteniendo $\bar{X}_{A,B} \leq^0 A$ (ya que $X_{A,B} \neq \emptyset$, $B^- = t_{A,B}$ y $B^- \notin B \setminus A$); y aplicando también **Proposición 4.7** (ya que se cumplen las condiciones del apartado b), $t_{A,B} = B^- \notin B$) obtenemos $\bar{X}_{A,B} \leq^0 B$. La **Proposición 4.8** nos asegura que $\bar{X}_{A,B}$ es la mayor cota inferior de A y B , luego $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B}$. $\square$

Ejemplo 4.17. Caso F) Sean $A = [0, 0.4] \cup [0.5, 0.9]$ y $B =]0.4, 0.7] \cup \{0.8\}$.

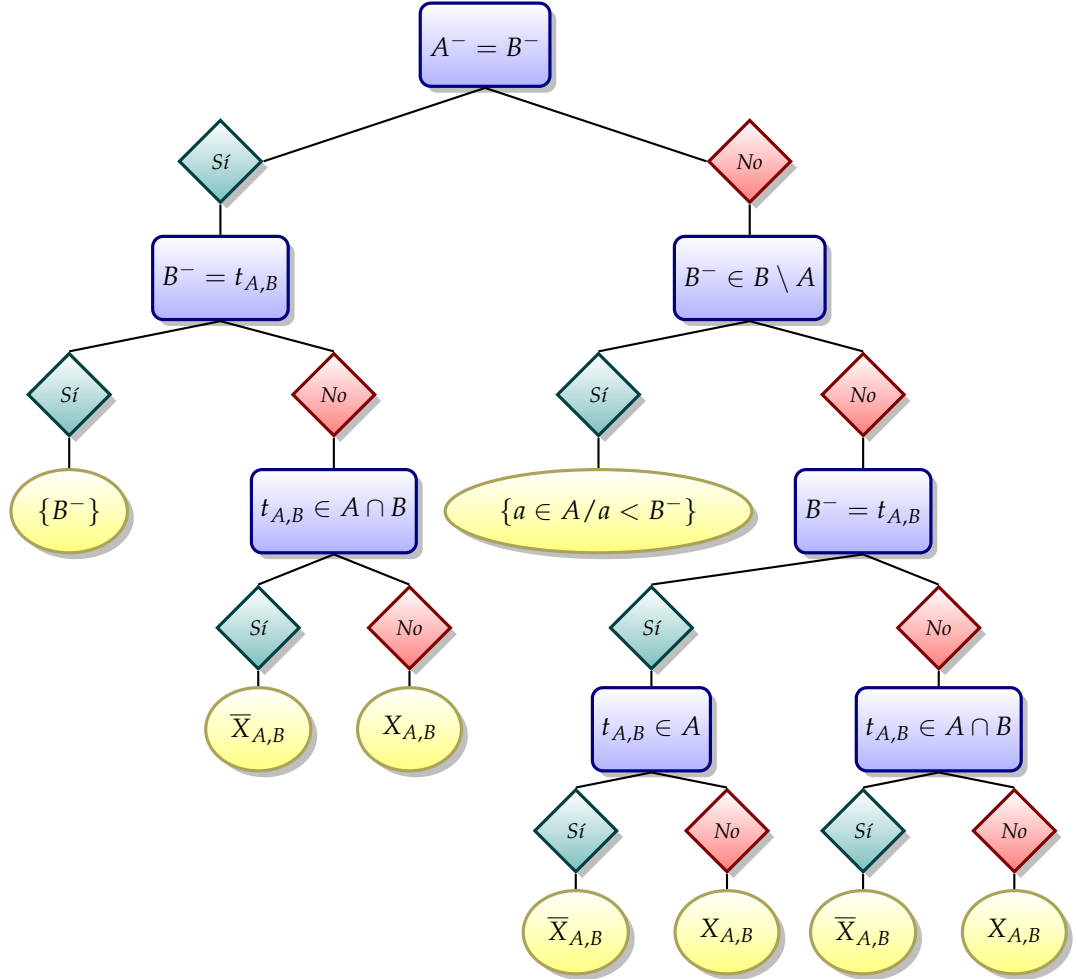


$A^- = 0 < B^- = 0.4 = t_{A,B}$. Además, $B^- \notin B \setminus A$ y $B^- = t_{A,B} \in A \setminus B$. Por tanto estamos en el caso F), y $A \wedge_0 B = \bar{X}_{A,B} = [0, 0.4]$.

4. Orden simétrico

Teorema 4.2. Los casos A) - F) son exhaustivos, es decir, dados dos subconjuntos de $[0, 1]$. Por tanto, dados dos conjuntos $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ cualesquiera, su ínfimo viene dado por los casos A) - F), según la siguiente figura:

Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tales que $A^- \leq B^-$.



[Gráfico para el cálculo del ínfimo.]

4.3. Supremo para el orden simétrico

En esta sección estudiaremos el supremo para el orden simétrico. Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, el supremo de A y B para el orden simétrico se puede calcular de forma detallada mediante un razonamiento similar al seguido para el cálculo del ínfimo de A y B .

Sin embargo, se puede utilizar la simetría del orden simétrico estudiada en [Proposición 4.4](#) y las propiedades de la simetría respecto de $\frac{1}{2}$ para obtener el supremo de A y B a partir del ínfimo de ambos.

Proposición 4.15. Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, el supremo de A y B para el orden simétrico es

$$A \vee_0 B = 1 - ((1 - A) \wedge_0 (1 - B))$$

Demostración. Por definición de ínfimo, tenemos $(1 - A) \wedge_0 (1 - B) \leq^0 (1 - A)$ y $(1 - A) \wedge_0 (1 - B) \leq^0 (1 - B)$. Aplicando **Proposición 4.4** obtenemos $1 - ((1 - A) \wedge_0 (1 - B)) \leq^0 1 - (1 - A) = A$ y $1 - ((1 - A) \wedge_0 (1 - B)) \leq^0 1 - (1 - B) = B$. Por tanto $1 - ((1 - A) \wedge_0 (1 - B))$ es cota superior de A y B .

Sea ahora $Z \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ tal que $A \leq^0 Z$ y $B \leq^0 Z$. Por **Proposición 4.4** se tiene que Z es cota inferior de $(1 - A)$ y $(1 - B)$, por lo que $(1 - Z) \leq^0 (1 - A) \wedge_0 (1 - B)$. Aplicando de nuevo **Proposición 4.4** tenemos $1 - ((1 - A) \wedge_0 (1 - B)) \leq^0 1 - (1 - Z) = Z$. Por tanto $A \vee_0 B = 1 - ((1 - A) \wedge_0 (1 - B))$. $\square$

De este modo, habiendo calculado el ínfimo de A y B podemos obtener el supremo de ambos. Veamos, sin embargo, cómo obtener explícitamente el supremo de A y B para el orden simétrico, realizando un proceso dual al realizado para el ínfimo.

Definamos algunos conceptos que utilizaremos para calcular el supremo de A y B .

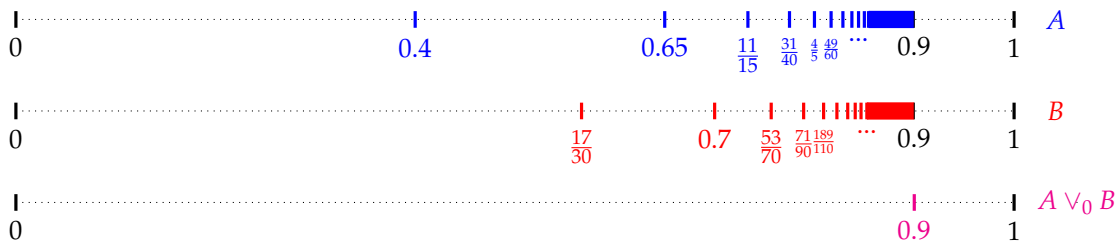
Definición 4.4. Dados $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$, definimos los siguientes conjuntos:

- $S_{A,B} = \{s \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \text{ tal que } s < A^+ \wedge B^+\}$. Llamaremos $s_{A,B}$ al supremo de $S_{A,B}$, que obviamente cumple $s_{A,B} \leq A^+ \wedge B^+$.
- $Y_{A,B} = \{y \in A \cup B / s_{A,B} < y\}$
- $\bar{Y}_{A,B} = \{y \in A \cup B / s_{A,B} \leq y\}$

No desarrollaremos en este TFG las pruebas de esta parte ya que son análogas a las ya realizadas. No obstante, es de gran utilidad comprobar que las propiedades que se cumplían para $T_{A,B}$, $t_{A,B}$, $X_{A,B}$ y $\bar{X}_{A,B}$ se cumplen de forma simétrica para $S_{A,B}$, $s_{A,B}$, $Y_{A,B}$ y $\bar{Y}_{A,B}$. Veamos pues la definición explícita de supremo para el orden simétrico de A y B . Trabajaremos en las siguientes proposiciones suponiendo que $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ son tales que $A^+ \leq B^+$.

Proposición 4.16. Caso A') Si $A^+ = B^+ = s_{A,B}$, entonces $A \wedge_0 B = \{A^+\}$.

Ejemplo 4.18. Caso A') Sean $A = \{0.9 - \frac{1}{2n} ; n \in \mathbb{N}^*\}$ y $B = \{0.9 - \frac{1}{2n+1} ; n \in \mathbb{N}^*\}$.

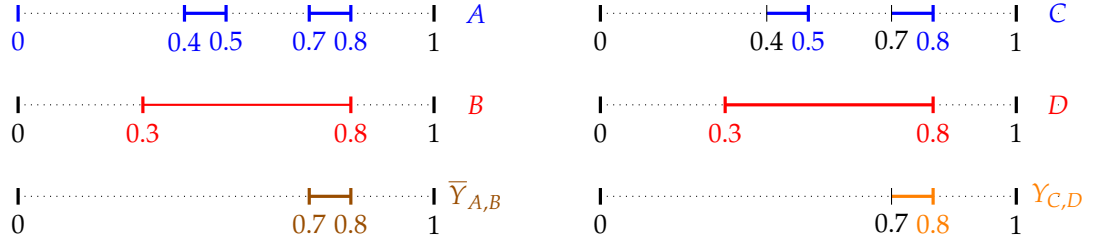


$A^+ = B^+ = 0.9 = s_{A,B}$. Por tanto este ejemplo corresponde al caso A', por lo que $A \vee_0 B = \{A^+\} = \{0.9\}$, como podemos ver en el gráfico.

Proposición 4.17. Caso B') Si $s_{A,B} < A^+ = B^+$, entonces $A \vee_0 B = \begin{cases} \bar{Y}_{A,B} & \text{si } s_{A,B} \in A \cap B \\ Y_{A,B} & \text{si } s_{A,B} \notin A \cap B \end{cases}$

4. Orden simétrico

Ejemplo 4.19. Caso B') Sean $A = \{0\} \cup]0.4, 0.5] \cup]0.7, 0.8]$, $B = [0.3, 0.8]$, $C = \{0\} \cup]0.4, 0.5] \cup]0.7, 0.8]$ y $D = [0.3, 0.8]$.

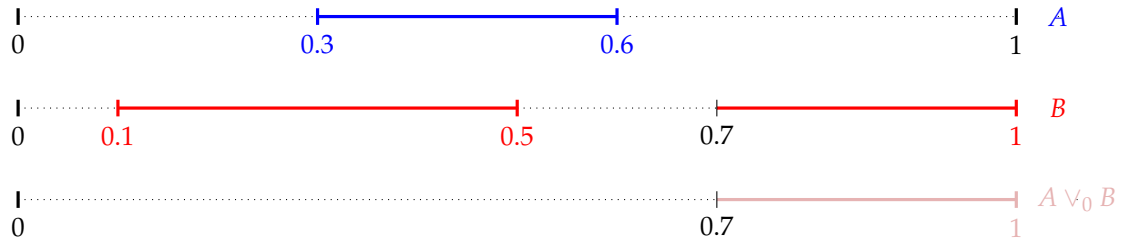


$s_{A,B} = 0.7 < A^+ = B^+$, luego estamos en el caso B', por lo que $A \vee_0 B = \bar{Y}_{A,B} = [0.7, 0.8]$.

$s_{C,D} = 0.7 \notin C \cap D$, luego $C \wedge_0 B = Y_{C,D} =]0.7, 0.8]$, como vemos en la figura.

Proposición 4.18. Caso C') Si $A^+ < B^+$ y $A^+ \in A \setminus B$, entonces $A \vee_0 B = \{b \in B / A^+ < b\}$.

Ejemplo 4.20. Caso C') Sean $A = [0.3, 0.6]$ y $B = [0.1, 0.5] \cup]0.7, 1]$.

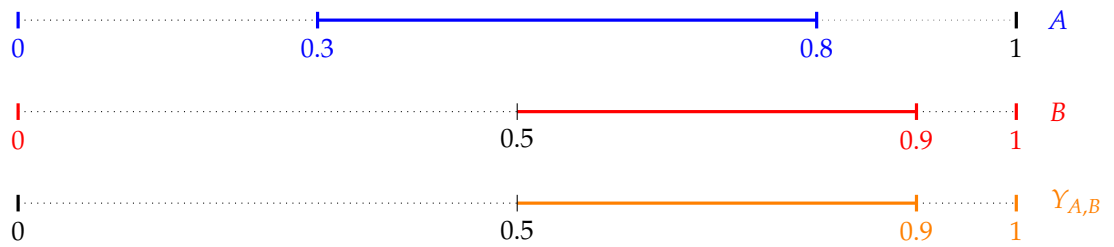


Es claro, como podemos ver en el dibujo, que $A^+ = 0.6 < B^+ = 1$, y además $A^+ \in A \setminus B$, por lo que estamos en el caso C' y por tanto $A \vee_0 B =]0.7, 1]$.

Proposición 4.19. Caso D') Si $A^+ < B^+$; $A^+ \notin A \setminus B$ y $s_{A,B} < A^+$, entonces

$$A \wedge_0 B \vee_0 B = \begin{cases} \bar{Y}_{A,B} & \text{si } s_{A,B} \in A \cap B \\ Y_{A,B} & \text{si } s_{A,B} \notin A \cap B \end{cases}$$

Ejemplo 4.21. Caso D') Sean $A = [0.3, 0.8]$, $B =]0.5, 0.9] \cup \{0, 1\}$.

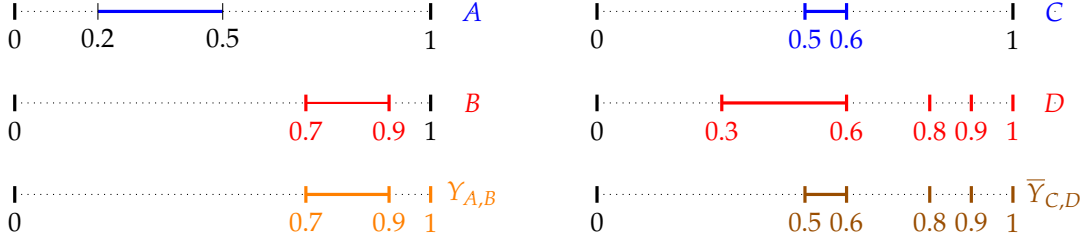


Vemos que $A^+ = 0.8 < B^+ = 1$. Además, $A^+ = 0.8 \in B$, luego $A^+ \notin A \setminus B$, y $A^+ > s_{A,B} = 0.5 \notin A \cap B$. Por tanto estamos en el caso D' y $A \vee_0 B = Y_{A,B} =]0.5, 0.9] \cup \{1\}$.

Proposición 4.20. Caso E') Si $A^+ < B^+$, $A^+ \notin A \setminus B$ y $A^+ \notin B \setminus A$, entonces

$$A \vee_0 B = \begin{cases} \bar{Y}_{A,B} & \text{si } s_{A,B} \in A \cap B \\ Y_{A,B} & \text{si } s_{A,B} \notin A \cap B. \end{cases}$$

Ejemplo 4.22. Caso E') Sean $A =]0.2, 0.5[$, $B = [0.7, 0.9]$, $C = [0.5, 0.6]$, $D = [0.3, 0.6] \cup \{0.8, 0.9, 1\}$.

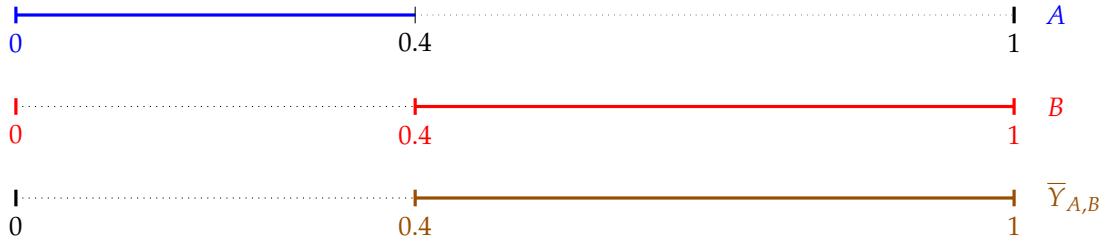


$s_{A,B} = 0.5 < A^+ = B^+$, luego estamos en el caso B'. Como $s_{A,B} \notin A \cap B$, tenemos $A \vee_0 B = Y_{A,B} = [0.7, 0.9]$.

$B^+ > A^+ > s_{C,D} = 0.5 \in C \cap D$, luego $C \wedge_0 B = \bar{Y}_{C,D} =]0.5, 0.6] \cup \{0.8, 0.9, 1\}$, como vemos en el gráfico.

Proposición 4.21. Caso F') Si $A^+ < B^+$, $A^+ \notin A \setminus B$ y $A^+ = s_{A,B} \in B \setminus A$, entonces $A \vee_0 B = \bar{Y}_{A,B}$.

Ejemplo 4.23. Caso F') Sean $A = [0, 0.4[$ y $B = [0.4, 1]$.

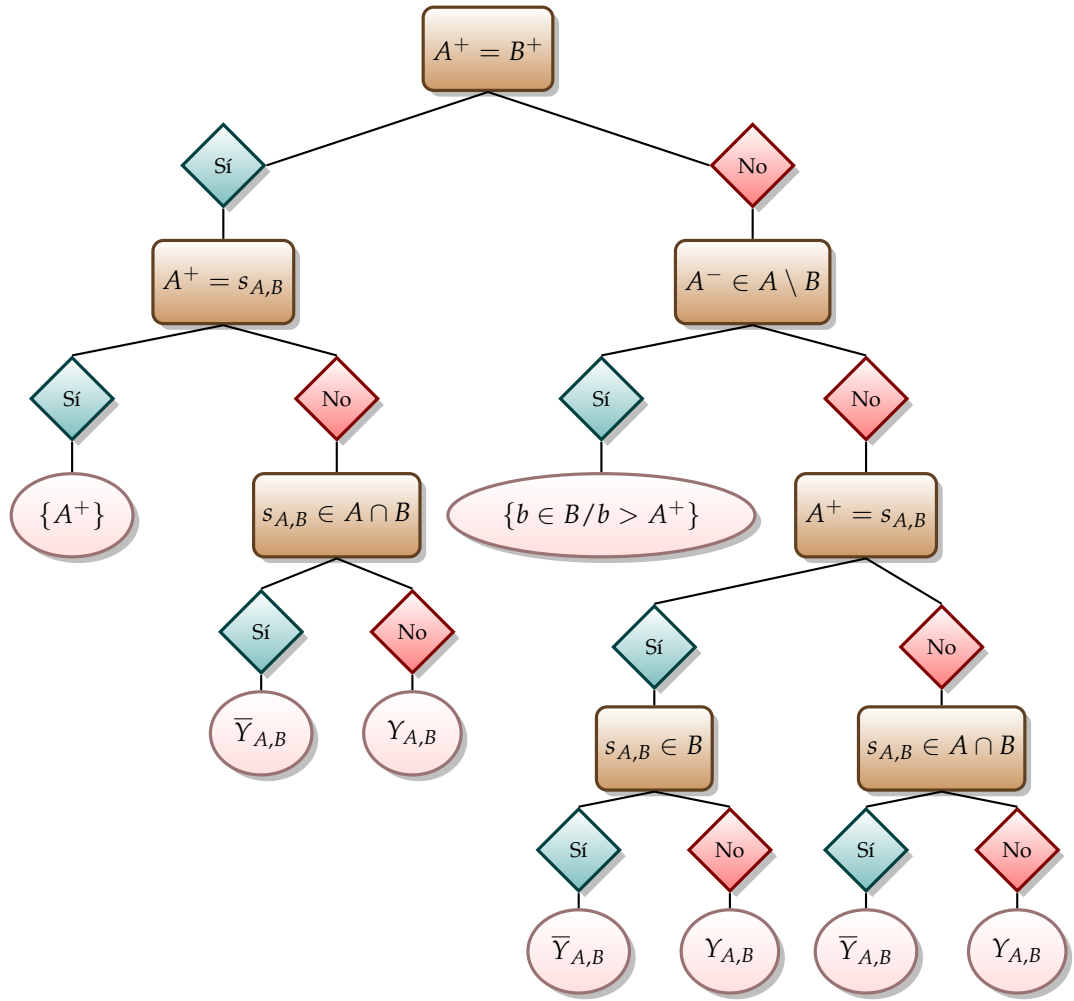


Como podemos ver en el gráfico, $s_{A,B} = 0.4 = A^+ \in B \setminus A$. Además $A^+ < B^+$ y $A^+ \notin A \setminus B$. Por tanto estamos en el caso F', y $A \vee_0 B = \bar{Y} = [0.4, 1]$.

Teorema 4.3. Los casos A') - F') son exhaustivos, es decir, dados dos subconjuntos de $[0, 1]$, $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ cualesquiera, su supremo viene dado por los casos A') - F').

El siguiente esquema nos ayuda a visualizar los casos para el cálculo del supremo de dos subconjuntos de $[0, 1]$, A y B , con $A^+ \leq B^+$. Sean $A, B \in \mathcal{P}^*([0, 1])$ con $A^+ \leq B^+$.

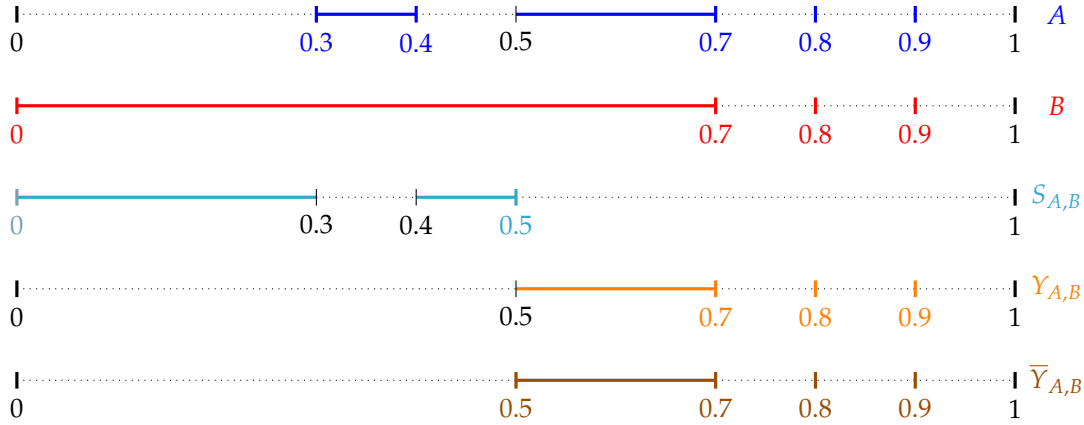
4. Orden simétrico



[Gráfico para el cálculo del supremo.]

Veamos un ejemplo detallado del cálculo del supremo de A y B .

Ejemplo 4.24. Sean $A = [0.3, 0.4] \cup [0.5, 0.7] \cup \{0.8, 0.9\}$ y $B = [0, 0.7] \cup \{0.8, 0.9\}$.



Vemos en el dibujo que $s_{A,B} = 0.5 \in B \setminus A$. Además, $0.9 = B^+ = A^+ > s_{A,B}$, luego estamos en el caso B' . Como $s_{A,B} \notin A \cap B$, entonces por el caso B' tenemos $A \vee_0 B = Y_{A,B} = [0.5, 0.7] \cup \{0.8, 0.9\}$. Efectivamente en el gráfico podemos ver que $Y_{A,B}$ es cota inferior de A y B , pero $\bar{Y}_{A,B}$ no lo es.

Teorema 4.4. El conjunto $\mathcal{P}^*([0, 1])$ equipado con las operaciones $\wedge_0$ y $\vee_0$ (ínfimo y supremo para el orden simétrico, respectivamente) tiene estructura de retículo acotado, siendo $\mathbf{1} = \{1\}$ su máximo y $\mathbf{0} = \{0\}$ su mínimo.

4.3.1. Restricciones del orden simétrico a otras extensiones

Veamos por último que el orden simétrico extiende a los órdenes usuales en $\mathbb{I}^c$ y en $[0, 1]$ definidos en Def. 1.14 y Def. 1.19, es decir, que $([0, 1], \max, \min)$ y $(\mathbb{I}^c, \wedge, \vee)$ son subretículos de $(\mathcal{P}^*([0, 1]), \leq^0)$.

Teorema 4.5. El conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}^*([0, 1]), \leq^0)$ restringido a la clase de los subintervalos cerrados de $[0, 1]$, $\mathbb{I}^c$, coincide con $(\mathbb{I}^c, \leq)$. Como consecuencia, $(\mathbb{I}^c, \wedge, \vee)$ es un subretículo de $(\mathcal{P}^*([0, 1]), \wedge_0, \vee_0)$.

Demostración. Este teorema es consecuencia directa de Proposición 4.1 y de Proposición 3.2. Supongamos que $A, B \in \mathbb{I}^c$ cumplen $A \leq^0 B$. Por Proposición 4.1 tenemos $A \leq^0 B \Leftrightarrow A \leq^r B$ y $A \leq^l B$. Hemos visto en el Capítulo 3 que los órdenes a derecha y a izquierda coinciden en $\mathbb{I}^c$. Por tanto $A \leq^0 B \Leftrightarrow A \leq^r B$, y por Proposición 3.2 tenemos que $A \leq^r B$ equivale a $A \leq B$, con $\leq$ el orden usual de intervalos. Por tanto $A \leq^0 B \Leftrightarrow A \leq B$.

$(\mathbb{I}^c, \wedge, \vee)$ es subretículo de $(\mathcal{P}^*([0, 1]), \wedge_0, \vee_0)$ es claro ya que las operaciones del retículo quedan totalmente determinadas por el orden que lo define. Los órdenes coinciden en $\mathbb{I}^c$, y por ende las operaciones también lo hacen. $\square$

Veamos ahora que el retículo que hemos construido, $(\mathcal{P}^*([0, 1]), \wedge_0, \vee_0)$, es compatible con la estructura $([0, 1], \min, \max)$. Para ello, definamos el concepto de morfismo de retículos.

4. Orden simétrico

Definición 4.5. Dados dos retículos $(X, \wedge_X, \vee_X)$ y $(Y, \wedge_Y, \vee_Y)$, se define morfismo de retículos como una aplicación

$$\varphi : X \rightarrow Y$$

que cumple las siguientes propiedades:

- $\varphi(\alpha) \vee_Y \varphi(\beta) = \varphi(\alpha \vee_X \beta)$
- $\varphi(\alpha) \wedge_Y \varphi(\beta) = \varphi(\alpha \wedge_X \beta)$

Diremos que φ es un monomorfismo si es inyectivo, epimorfismo si es sobreyectivo, e isomorfismo si es biyectivo.

Un isomorfismo de retículos es una aplicación entre retículos que preserva el orden. Utilizando morfismos de retículos, veremos que $(\mathcal{P}^*([0, 1]) \wedge_0, \vee_0)$ es compatible con el retículo $([0, 1], \min, \max)$.

Como se conoce por teoría básica de conjuntos, un monomorfismo es un isomorfismo sobre su imagen. Así, el retículo $([0, 1], \min, \max)$ se puede introducir en $(\mathbb{I}^c, \wedge, \vee)$ por medios de varios monomorfismos de retículos que identifican cada elemento $x \in [0, 1]$ con un único intervalo $[a, b] \in \mathbb{I}^c$. Algunos de estos monomorfismos son:

1. $\varphi_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{I}^c ; \varphi_1(x) = [0, x]$
2. $\varphi_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{I}^c ; \varphi_2(x) = [x, 1]$
3. $\varphi_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{I}^c ; \varphi_3(x) = [x, x]$

Veamos que en efecto las tres aplicaciones respetan la estructura de retículo y son inyectivos. Sean $x, y \in [0, 1]$. Utilizando la notación de la definición de morfismo tenemos $x \wedge_{[0,1]} y = \min(x, y) ; x \vee_{[0,1]} y = \max(x, y) ; [a, b] \wedge_{\mathbb{I}^c} [c, d] = [\min(a, c), \min(b, d)] ; [a, b] \vee_{\mathbb{I}^c} [c, d] = [\max(a, c), \max(b, d)]$.

Entonces, para el caso 1, $\varphi_1(x) = [0, x]$, $\varphi_1(y) = [0, y]$, y

$$\begin{cases} \varphi_1(x) \wedge_{\mathbb{I}^c} \varphi_1(y) = [\min(0, 0), \min(x, y)] = [0, \min(x, y)] = \varphi_1(x \wedge_{[0,1]} y) \\ \varphi_1(x) \vee_{\mathbb{I}^c} \varphi_1(y) = [\max(0, 0), \max(x, y)] = [0, \max(x, y)] = \varphi_1(x \vee_{[0,1]} y) \end{cases}$$

Si $a, b \in [0, 1]$ son tales que $\varphi_1(a) = \varphi_1(b)$, entonces $[0, a] = [0, b] \Rightarrow a = b$, luego φ_1 es inyectivo.

Trabajamos análogamente los otros dos casos: en el caso 2,

$$\begin{cases} \varphi_2(x) \wedge_{\mathbb{I}^c} \varphi_2(y) = [\min(x, y), \min(1, 1)] = [\min(x, y), 1] = \varphi_2(x \wedge_{[0,1]} y) \\ \varphi_2(x) \vee_{\mathbb{I}^c} \varphi_2(y) = [\max(x, y), \max(1, 1)] = [\max(x, y), 1] = \varphi_2(x \vee_{[0,1]} y) \end{cases}$$

Si $a, b \in [0, 1]$ son tales que $\varphi_2(a) = \varphi_2(b)$, entonces $[a, 1] = [b, 1] \Rightarrow a = b$, luego φ_2 es inyectivo.

Por último, en el caso 3,

$$\begin{cases} \varphi_3(x) \wedge_{\mathbb{I}^c} \varphi_3(y) = [\min(x, y), \min(x, y)] = \varphi_3(x \wedge_{[0,1]} y) \\ \varphi_3(x) \vee_{\mathbb{I}^c} \varphi_3(y) = [\max(x, y), \max(x, y)] = \varphi_3(x \vee_{[0,1]} y) \end{cases}$$

Si $a, b \in [0, 1]$ son tales que $\varphi_3(a) = \varphi_3(b)$, entonces $[a, a] = [b, b] \Rightarrow a = b$, luego φ_3 es inyectivo.

Por tanto, componiendo cualquiera de estos 3 morfismos de retículos con la inclusión, que es claramente un monomorfismo de retículos, construimos el siguiente diagrama:

$$([0, 1], \min, \max) \xrightarrow{\varphi_j} (\mathbb{I}^c, \wedge_{\mathbb{I}^c}, \vee_{\mathbb{I}^c}) \xhookrightarrow{i} (\mathcal{P}^*([0, 1]), \wedge_0, \vee_0)$$

Tenemos así una cadena de monomorfismos de retículos, luego el orden simétrico extiende al orden de intervalos y, mediante identificación (monomorfismo de retículos), al orden usual de $[0, 1]$.

Así, queda resuelto el problema de hallar un orden compatible con las operaciones de Zadeh, que dote a $\mathcal{P}^*([0, 1])$ de estructura de retículo, planteado en (Challenge 5.3)[14] y en (Remark 2)[6]. Este orden es el orden simétrico, $\leq^0$.

Bibliografía

- [1] José Carlos R Alcantud and Vicenç Torra. Decomposition theorems and extension principles for hesitant fuzzy sets. *Information Fusion*, 41:48–56, 2018.
- [2] Krassimir T Atanassov. *Intuitionistic fuzzy sets*. Springer, 1999.
- [3] Barnabas Bede. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. Springer, 2012.
- [4] Benjamin Bedregal, Renata Reiser, Humberto Bustince, Carlos Lopez-Molina, and Vicenç Torra. Aggregation functions for typical hesitant fuzzy elements and the action of automorphisms. *Information Sciences*, 255:82–99, 2014.
- [5] G Birkhoff. Lattice theory (revised edition)(am. math. soc. colloquium publications 25). *New York*, 1948.
- [6] Humberto Bustince, Edurne Barrenechea, Miguel Pagola, Javier Fernandez, Zeshui Xu, Benjamin Bedregal, Javier Montero, Hani Hagra, Francisco Herrera, and Bernard De Baets. A historical account of types of fuzzy sets and their relationships. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 24(1):179–194, 2015.
- [7] Ivor Grattan-Guinness. Fuzzy membership mapped onto intervals and many-valued quantities. *Mathematical Logic Quarterly*, 22(1):149–160, 1976.
- [8] George A Grätzer. Lattice theory: foundation. 2011.
- [9] Pascual Jara, Luis Merino, Gabriel Navarro, and Evangelina Santos. A lattice structure on hesitant fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022.
- [10] Mônica Matzenauer, Renata Reiser, Héliida Santos, Benjamín Bedregal, and Humberto Bustince. Strategies on admissible total orders over typical hesitant fuzzy implications applied to decision making problems. *International journal of intelligent systems*, 36(5):2144–2182, 2021.
- [11] Monica Matzenauer, Héliida Santos, Benjamín Bedregal, Humberto Bustince, and Renata Reiser. On admissible total orders for typical hesitant fuzzy consensus measures. *International Journal of Intelligent Systems*, 37(1):264–286, 2022.
- [12] Masaharu Mizumoto and Kokichi Tanaka. Some properties of fuzzy sets of type 2. *Information and control*, 31(4):312–340, 1976.
- [13] Rosa M Rodríguez, B Bedregal, Humberto Bustince, YC Dong, Bahram Farhadinia, Cengiz Kahraman, L Martínez, Vicenç Torra, YJ Xu, ZS Xu, et al. A position and perspective analysis of hesitant fuzzy sets on information fusion in decision making. towards high quality progress. *Information Fusion*, 29:89–97, 2016.
- [14] Rosa M Rodríguez, B Bedregal, Humberto Bustince, YC Dong, Bahram Farhadinia, Cengiz Kahraman, L Martínez, Vicenç Torra, YJ Xu, ZS Xu, et al. A position and perspective analysis of hesitant fuzzy sets on information fusion in decision making. towards high quality progress. *Information Fusion*, 29:89–97, 2016.
- [15] Rosa M Rodríguez, Luis Martinez, and Francisco Herrera. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets. *Information Sciences*, 241:28–42, 2013.
- [16] R Sambuc. *Functions-Flous, Application alaide au Diagnosticien Pathologie Thyroïdienne*. PhD thesis, These de Doctorat en Medecine, 1975.
- [17] Vicenç Torra. Hesitant fuzzy sets. *International journal of intelligent systems*, 25(6):529–539, 2010.

Bibliografia

- [18] Hai Wang and Zeshui Xu. Admissible orders of typical hesitant fuzzy elements and their application in ordered information fusion in multi-criteria decision making. *Information Fusion*, 29:98–104, 2016.
- [19] Lotfi A Zadeh. Quantitative fuzzy semantics. *Information sciences*, 3(2):159–176, 1971.
- [20] Lotfi Asker Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.