

**El entramado algebraico del Teorema de
Peter-Weyl. (Apuntes de la primera parte de curso
«Simetrías y Grupos de Lie en Física
Matemática.»)**

Cursos 2020/2024 ¹ Advertencia: al tratarse de un borrador inicial, puede contener erratas, y acaso algún error, así que han de usarse con prudencia, leerse críticamente y preguntar en caso de duda. En particular, declino cualquier responsabilidad por un uso ignorante de esta advertencia.
Comentarios y sugerencias serán bienvenidas.

José Gómez Torrecillas²
Departamento de Álgebra
Universidad de Granada

¹versión: 2023/2024

²<https://www.ugr.es/local/gomezj/>

Índice general

Capítulo 1. El entramado algebraico del Teorema de Peter-Weyl	5
1.1. Introducción: $SU(2)$ como grupo de Lie matricial.	6
1.2. Representaciones de Grupos Compactos	15
1.3. Sobre el Teorema de Peter-Weyl	20
1.4. Funciones representativas sobre espacios homogéneos.	27
Capítulo 2. El álgebra de Lie de un grupo de Lie y sus representaciones	31
2.1. El álgebra de Lie de un grupo de Lie	32
2.2. Producto tensor	38
2.3. Representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $SU(2)$ y $SO(3)$.	41
Bibliografía	45

Naturaleza del texto. Esto no es un libro de matemáticas, sino unas notas informalmente rigurosas que reflejan, con distorsiones inevitables, algunas de mis clases impartidas, tanto de manera presencial como remota, a lo largo de las siete primeras semanas del curso *Simetrías y Grupos de Lie en Física Matemática* durante varios cursos académicos (20-24).

El objetivo es introducir las nociones y terminología fundamentales propias de las representaciones lineales de grupos, y ver cómo se usan para descomponer funciones sobre un grupo en términos de “armónicos”. La exposición es deliberadamente algebraica, apareciendo el análisis funcional como una herramienta auxiliar, si bien indispensable, para “pasar al límite” resultados previamente establecidos para funciones representativas. Este paso a límite, que da lugar al Teorema de Peter-Weyl, no va a ser expuesto en detalle, puesto que, de una parte, no es esencial para comprender cómo se comportan las representaciones finito-dimensionales de un grupo lineal compacto y, de otra, excede los objetivos de este curso.

Para la redacción han sido consultados los textos listados en la bibliografía, pero no se sigue ninguno de ellos.

Capítulo 1

**El entramado algebraico del Teorema de
Peter-Weyl**

1.1. Introducción: $SU(2)$ como grupo de Lie matricial.

La estrategia para tratar algunas nociones abstractas va a ser exponer un ejemplo introductorio de grupo de Lie, $SU(2)$, y dar las definiciones y construcciones generales con un ojo sobre el ejemplo. El formato informal de este texto ha permitido evitar inicialmente cualquier mención a topología, en la convicción de que la comprensión de las construcciones a nivel puramente algebraico facilita enormemente su adaptación posterior a situaciones donde se requiera paso al límite en algún sentido.

1.1.1. Sobre la noción de grupo. Comencemos considerando el espacio vectorial complejo $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$. El subconjunto $GL_2(\mathbb{C})$ formado por todas las matrices invertibles es un grupo, de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.1. Un *grupo* es un conjunto G junto con una operación binaria $\bullet : G \times G \rightarrow G$ que asigna a cada par $(g, h) \in G \times G$ un elemento $g \bullet h \in G$ sujeta a las siguientes condiciones:

1. $g \bullet (h \bullet k) = (g \bullet h) \bullet k$ para todo $g, h, k \in G$.
2. Existe un elemento $e \in G$ tal que $g \bullet e = g = e \bullet g$ para todo $g \in G$.
3. Para cada $g \in G$ existe $\tilde{g} \in G$ tal que $g \bullet \tilde{g} = e = \tilde{g} \bullet g$.

Algunos comentarios son pertinentes. Una definición abstracta tal que 1.1 puede considerarse como una suerte de variable¹ que puede tomar valores en todos los objetos matemáticos que comparten una estructura determinada (la de grupo). Así, tomando $G = GL_2(\mathbb{C})$, la operación $\cdot$ como el producto de matrices, el elemento $e = I_2$, la matriz identidad de tamaño 2×2 y, para $g \in GL_2(\mathbb{C})$, $\tilde{g} = g^{-1}$, la matriz inversa de g , obtenemos un grupo, llamado *grupo lineal general complejo* de orden 2.

Pero podríamos hacer tomar el valor $G = \mathbb{R}$, los números reales, como operación $\cdot = +$, la suma de números reales, como $e = 0$, el número cero, y, dado $g \in \mathbb{R}$, tomamos como $\tilde{g} = -g$, su opuesto. Tendríamos ahora otro grupo, el grupo aditivo de los números reales.

Normalmente, dados elementos g, h de un grupo G , y siempre que esto no lleve a confusión, el elemento $g \bullet h$ se denotará simplemente por yuxtaposición como gh , y la operación del grupo se llama producto. En este caso, pondremos g^{-1} en lugar de $\tilde{g}$.

1.1.2. Noción de subgrupo, $SU(2)$. Para una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$, denotaremos por $A^\dagger$ la matriz obtenida conjugando las entradas de A y trasponiendo la matriz resultante². Consideremos el conjunto de matrices *unitarias*

$$U(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : AA^\dagger = I_2\}.$$

Primero, observemos que $I_2 \in U(2)$, por lo que $U(2)$ es no vacío. Ahora, para cualquier $A \in U(2)$, tenemos que

$$1 = \det(I_2) = \det(A) \det(A^\dagger) = \det(A) \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2,$$

donde $\bar{z}$ denota el conjugado de un número complejo z , y $|z|$ su módulo. Vemos, pues, que $\det(A) \neq 0$ para $A \in U(2)$ y, por tanto, $U(2) \subseteq GL_2(\mathbb{C})$.

Si tenemos $A, B \in U(2)$, entonces

$$AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger = I_2,$$

luego $AB \in U(2)$.

¹Una variable conceptual, podríamos decir.

²Brevemente, $A^\dagger$ es la traspuesta conjugada de A

Observemos que la condición $AA^\dagger = I_2$ significa que $A^\dagger = A^{-1}$, la matriz inversa de A . Por tanto, $A^\dagger A = I_2$. Puesto que $(A^\dagger)^\dagger = A$, deducimos que $A^{-1} = A^\dagger \in U(2)$.

Hemos comprobado que $U(2)$ es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$ de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. Llamamos *subgrupo* de un grupo G a todo subconjunto no vacío H de G tal que si $h, k \in H$, entonces $hk, h^{-1} \in H$. Tenemos así que $U(2)$ es un grupo, conocido como *grupo unitario* de orden 2.

Es bastante obvio que un subgrupo H de un grupo G es un grupo con el producto heredado de G .

Es fácil comprobar que

$$SL_2(\mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) : \det A = 1\}$$

es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$, llamado grupo *especial lineal complejo* de orden 2.

DEFINICIÓN 1.3. El grupo *unitario especial* de orden 2 se define como $SU(2) = U(2) \cap SL_2(\mathbb{C})$.

La anterior definición se justifica porque, de hecho, $SU(2)$ es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$, ya que es fácil comprobar que, en general, si H y K son subgrupos de un grupo G , entonces así lo es $H \cap K$.

Vamos a dar una descripción alternativa del grupo $SU(2)$ que hace uso de los cuaterniones de Hamilton.

Consideremos el conjunto de matrices

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Se comprueba sin dificultad que $\mathbb{H}$ es un subespacio vectorial real de $M_2(\mathbb{C})$, pero no es un subespacio vectorial complejo. Por otra parte, si $p, q \in \mathbb{H}$, entonces $pq \in \mathbb{H}$.

Un sencillo cálculo muestra que, para $q \in \mathbb{H}$, se tiene

$$(1.1) \quad qq^\dagger = \det(q)I_2.$$

Para $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ se tiene que $\det(q) = |\alpha|^2 + |\beta|^2$. Por tanto, y en vista de (1.1), toda $q \in \mathbb{H}$ no nula es invertible y la inversa se calcula según

$$(1.2) \quad q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} q^\dagger.$$

EJERCICIO 1. Demostrar que $SU(2) = \{q \in \mathbb{H} : \det(q) = 1\}$.

1.1.3. Una representación lineal de $SU(2)$. Acaso el lector haya reconocido que las propiedades de $\mathbb{H}$ son las de los cuaterniones de Hamilton. En lo que sigue, vamos a describir cómo, ciertamente, estamos ante una de las muchas representaciones posibles los citados cuaterniones. Haremos uso de éstos para construir una representación lineal interesante del grupo.

Observemos que cada matriz $q \in \mathbb{H}$ se escribe de manera única como

$$(1.3) \quad q = \begin{pmatrix} x_0 + x_3i & x_1 + x_2i \\ -x_1 + x_2i & x_0 - x_3i \end{pmatrix},$$

para $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4$. Identificando cada $x_0 \in \mathbb{R}$ con la matriz escalar x_0I_2 , tenemos la base $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ de $\mathbb{H}$ como espacio vectorial real, donde

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Fijémonos en que, en términos de la expresión (1.3),

$$\det(q) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

es decir, $\det(q)$ es la norma al cuadrado de q visto como un vector de un espacio euclídeo con base ortonormal $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Usaremos la notación $|q| = \sqrt{\det(q)}$, y llamaremos a este número positivo *norma* de q . Adoptamos dicha estructura euclídea sobre $\mathbb{H}$, y consideramos la descomposición ortogonal

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathcal{V},$$

donde $\mathcal{V}$ tiene como base (ortonormal) $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Los elementos de $\mathcal{V}$ fueron llamados *vectores* por Hamilton.

De manera que cada cuaternión $q \in \mathbb{H}$ admite una descomposición única como

$$q = a + v,$$

para $a \in \mathbb{R}$ (parte escalar) y $v \in \mathcal{V}$ (parte vectorial). Usando esta descomposición, obtenemos, de forma compacta,

$$q^\dagger = a - v.$$

Si tenemos otro cuaternión con su correspondiente descomposición $p = b + u$, un cálculo rutinario, usando por ejemplo las igualdades

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \quad \mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j},$$

muestra que

$$(1.4) \quad qp = ab + au + bv + v \times u - \langle v, u \rangle,$$

donde $v \times u$ denota el producto vectorial usual y $\langle v, u \rangle$ el producto escalar.

LEMA 1.4. *Un cuaternión q es un vector si, y sólo si, $q^2 \leq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Por (1.4), para la descomposición $q = a + v$

$$q^2 = a^2 + 2av - \langle v, v \rangle.$$

Si q es un vector, tenemos que $a = 0$ y, por tanto, $q^2 = -\langle v, v \rangle \leq 0$.

Recíprocamente, la condición $q^2 \leq 0$ entraña que q^2 es un escalar, luego $2av = q^2 + \langle v, v \rangle - a^2$ es también un escalar. De aquí, si $v \neq 0$, se sigue que $a = 0$ y, por tanto, $q = v$. Si $v = 0$, entonces $a^2 = q^2 \leq 0$, por lo que $q = a = 0 \in V$. $\square$

OBSERVACIÓN 1.5. Durante la demostración del Lema 1.4 hemos visto que, para un vector $w \in \mathcal{V}$, se tiene que $\langle w, w \rangle = -w^2$.

TEOREMA 1.6. *Cada cuaternión unitario $q \in SU(2)$ proporciona un giro $T(q)$ en el espacio euclídeo $\mathcal{V}$ definido como*

$$T(q)(w) = qwq^\dagger, \quad (w \in \mathcal{V}).$$

Cada giro admite una tal presentación. Bajo esta correspondencia, la composición de giros se obtiene con el producto de cuaterniones.

DEMOSTRACIÓN. Para $w \in \mathcal{V}$, tenemos

$$(1.5) \quad (T(q)(w))^2 = (qwq^\dagger)^2 = qwq^\dagger qwq^\dagger = qw^2q^\dagger = qq^\dagger w^2 = w^2.$$

La penúltima igualdad se justifica porque, al ser w un vector, tenemos que w^2 es un número real, en virtud del Lema 1.4 y, por tanto, $w^2q^\dagger = q^\dagger w^2$.

La igualdad (1.5), de nuevo en conjunción con el Lema 1.4, garantiza $T(q)$ transforma vectores en vectores. Es más, en vista de la Observación 1.5, $T(q)$ preserva la longitud de los vectores. Como es fácil comprobar que $T(q)$ es una transformación lineal del espacio vectorial real $\mathcal{V}$, deducimos que se trata de una isometría. Para demostrar que es un giro, buscamos un posible eje de giro y luego demostramos

que, realmente, lo es. Descompongamos $q = a + v$. La primera tarea es sencilla, puesto que

$$T(q)(v) = qvq^\dagger = q(q - a)q^\dagger = qq^\dagger - qa q^\dagger = q - a = v.$$

Así, v queda invariante bajo $T(q)$, luego es posible que la recta que genera sea el eje de giro de $T(q)$.³ Para demostrar que se trata realmente de un giro, vamos a investigar el efecto de $T(q)$ sobre el plano perpendicular a v . Para ello, comencemos estimando el ángulo de giro:

$$1 = qq^\dagger = (a + v)(a - v) = a^2 + \langle v, v \rangle = a^2 + |v|^2,$$

donde $|v|$, recordemos, denota la norma de v . Puesto que estamos discutiendo el caso no trivial ($v \neq 0$), existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tal que $a = \cos \theta/2$, $|v| = \sin \theta/2$ y podemos tomar el vector normalizado $n = v/|v|$. De esta forma,

$$q = \cos \theta/2 + n \sin \theta/2.$$

Veamos el efecto de $T(q)$ sobre el plano ortogonal a n . Para ello, dado cualquier vector unitario $n^\perp$ perpendicular a n , podemos realizar el siguiente cálculo, que usa (1.4) repetidamente:

$$\begin{aligned} T(q)(n^\perp) &= (\cos \theta/2 + n \sin \theta/2)n^\perp(\cos \theta/2 - n \sin \theta/2) \\ &= (n^\perp \cos \theta/2 + (n \times n^\perp) \sin \theta/2)(\cos \theta/2 - n \sin \theta/2) \\ &= n^\perp \cos^2 \theta/2 - (n^\perp \times n) \sin \theta/2 \cos \theta/2 \\ &\quad + (n \times n^\perp) \sin \theta/2 \cos \theta/2 - (n \times n^\perp) \times n \sin^2 \theta/2 \\ &= n^\perp (\cos^2 \theta/2 - \sin^2 \theta/2) + (n \times n^\perp) 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2 \\ &= n^\perp \cos \theta + (n \times n^\perp) \sin \theta. \end{aligned}$$

En la penúltima igualdad hemos utilizado que $n^\perp \times n = -n \times n^\perp$ y que $(n \times n^\perp) \times n = n^\perp$. Puesto que $\{n^\perp, n \times n^\perp\}$ es una base ortonormal del plano perpendicular a n , vemos $T(q)(n^\perp)$ ha girado un ángulo θ con respecto de $n^\perp$. Al ser $n^\perp$ cualquier vector unitario del citado plano, deducimos que $T(q)$ es un giro de eje n y ángulo θ . Por tanto, $T(q) \in SO(\mathcal{V})$, el grupo de los giros del espacio vectorial euclídeo $\mathcal{V}$.

Observemos por último que, si $q_1, q_2 \in SU(2)$, y $v \in \mathcal{V}$, entonces

$$T(q_1)T(q_2)v = T(q_1)q_2vq_2^\dagger = q_1q_2vq_2^\dagger q_1^\dagger = q_1q_2v(q_1q_2)^\dagger = T(q_1q_2)v.$$

De aquí, $T(q_1) \circ T(q_2) = T(q_1q_2)$. □

Una consecuencia del Teorema 1.6 es que podemos considerar la aplicación⁴ $T : SU(2) \rightarrow GL(\mathcal{V})$, y ésta resulta ser una representación lineal del grupo $SU(2)$ de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.7. Sea G un grupo y V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Una *representación $\mathbb{K}$ -lineal*⁵ de G con espacio de representación V es una aplicación $T : G \rightarrow GL(V)$ tal que $T(g_1) \circ T(g_2) = T(g_1g_2)$ para todo $g_1, g_2 \in G$. Usaremos la notación (T, V) para referirnos a la representación de G .

Usando terminología algebraica, una tal representación no es más que un homomorfismo de grupos $T : G \rightarrow GL(V)$, de acuerdo con la definición que sigue.

DEFINICIÓN 1.8. Dados G y H grupos, una aplicación $\Phi : G \rightarrow H$ es un *homomorfismo de grupos* si $\Phi(gg') = \Phi(g)\Phi(g')$ para todo $g, g' \in G$.

³El caso $v = 0$ se da cuando $q = 1, -1$, y $T(q)$ resulta ser el giro trivial.

⁴En realidad, $T : SU(2) \rightarrow SO(\mathcal{V})$, pero aquí estamos teniendo en cuenta que $SO(\mathcal{V}) \subseteq GL(\mathcal{V})$.

⁵Más adelante, consideraremos representaciones lineales continuas, pero, por el momento, sólo miraremos la condición algebraica.

OBSERVACIÓN 1.9. Para un grupo G , definimos su *grupo opuesto* G^{op} como aquél que, como conjunto, es el propio G , pero cuyo producto $*$ está definido por $g * h = hg$, donde la yuxtaposición denota el producto original en G . Las representaciones de G^{op} se conocen con el nombre de *anti-representaciones* de G .

Consideraremos sólo representaciones complejas.

1.1.4. Espacios de representación de funciones. Normalmente, los espacios de representación suelen ser espacios de funciones. Para dar un ejemplo significativo, consideremos la esfera unidad $S^2 \subseteq \mathcal{V}$, cuyos puntos son aquellos vectores $v \in \mathcal{V}$ tales que⁶ $|v| = 1$. Dado $q \in SU(2)$ y $v \in S^2$, deducimos del Teorema 1.6 que $T(q)v \in S^2$. Podemos simplificar la notación y escribir abreviadamente $q \cdot v = T(q)v$. Se tiene entonces la igualdad $(q_1 q_2) \cdot v = q_1 \cdot (q_2 \cdot v)$ para cualesquiera $q_1, q_2 \in SU(2)$, $v \in S^2$. Estamos en presencia de una acción de un grupo, en el siguiente sentido.

DEFINICIÓN 1.10. Diremos que un grupo G *actúa* sobre un conjunto X si existe una aplicación $G \times X \rightarrow X$ que asigna a cada par $(g, x) \in G \times X$ un elemento $g \cdot x \in X$ sujeta a las siguientes condiciones:

1. $e \cdot x = x$ para todo $x \in X$,
2. $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ para todo $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$.

La aplicación mencionada se suele llamar *acción*. También se dice que X es un G -conjunto.

Es usual decir que X es un G -espacio homogéneo cuando dados $x, y \in X$ cualesquiera, existe $g \in G$ tal que $y = g \cdot x$.

EJERCICIO 2. Sea X un G -conjunto. Demostrar que X es un G -espacio homogéneo si, y sólo si, existe $x_0 \in X$ tal que $X = \{g \cdot x_0 : g \in G\}$.

EJEMPLO 1.11. Una consecuencia del Teorema 1.6 es que la esfera S^2 es un $SU(2)$ -espacio homogéneo. En efecto, cada $q \in SU(2)$ actúa sobre $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k} \in S^2$ como $q \cdot \mathbf{x} = T(q)(\mathbf{x}) = q \mathbf{x} q^\dagger$. Pasando de coordenadas cartesianas a esféricas, tenemos que los puntos de S^2 están parametrizados como

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \theta \sin \varphi \\ x_2 &= \sin \theta \cos \varphi \\ x_3 &= \cos \theta \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Consideramos ahora los elementos de $SU(2)$

$$e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{k}} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\varphi}{2} i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\varphi}{2} i} \end{pmatrix}, \quad e^{-\frac{\theta}{2} \mathbf{i}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Podemos ahora comprobar mediante un cálculo que

$$(1.6) \quad (e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{k}} e^{-\frac{\theta}{2} \mathbf{i}}) \cdot \mathbf{k} = e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{k}} e^{-\frac{\theta}{2} \mathbf{i}} \mathbf{k} e^{\frac{\theta}{2} \mathbf{i}} e^{\frac{\varphi}{2} \mathbf{k}} = \mathbf{i} \sin \varphi \sin \theta + \mathbf{j} \cos \varphi \sin \theta + \mathbf{k} \cos \theta,$$

lo que significa, de acuerdo con el Ejercicio 2, que S^2 es un $SU(2)$ -espacio homogéneo.

EJERCICIO 3. Comprobar la igualdad (1.6).

OBSERVACIÓN 1.12. Es usual, cuando no hay riesgo de confusión, denotar $g \cdot x$ por gx para $g \in G$, $x \in X$, para X un G -conjunto.

⁶Equivalentemente, usando en producto cuaterniónico, $v^2 = -1$.

Cada G -espacio homogéneo X permite definir representaciones lineales del grupo G . Para describir esta construcción, tomemos el $\mathbb{C}$ -espacio vectorial $\mathcal{M}(X)$ de todas las funciones⁷ $X \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos entonces la aplicación $\Phi : G \rightarrow GL(\mathcal{M}(X))$ definida por

$$\Phi(g)(\varphi)(x) = \varphi(gx),$$

para $g \in G$, $\varphi \in \mathcal{M}$, $x \in X$. Un breve cálculo comprueba que $\Phi(g) \in GL(\mathcal{M}(X))$ para cada $g \in G$, y que Φ es un homomorfismo de grupos desde G^{op} a $GL(\mathcal{M}(X))$. Es así como obtenemos una anti-representación de G con espacio de representación $\mathcal{M}(X)$.

Si queremos una representación de G , mediante composición con el isomorfismo⁸ de grupos $G \rightarrow G^{op}$ que lleva g en g^{-1} , obtenemos que la definición

$$(1.7) \quad \Pi(g)(\varphi)(x) = \varphi(g^{-1}x),$$

proporciona una representación $(\Pi, \mathcal{M}(X))$ de G con espacio de representación $\mathcal{M}(X)$.

DEFINICIÓN 1.13. La representación dada por (1.7) se designará como *representación por traslación*.

EJERCICIO 4. Demostrar que dar un G^{op} -conjunto sobre X es equivalente a dar una aplicación $X \times G \rightarrow X$ que asigna a cada par $(x, g) \in X \times G$ un elemento $x \cdot g \in X$ sujeta a las condiciones $x \cdot e = x$ y $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ para todo $x \in X, g, h \in G$. En este caso, comprobar que podemos obtener una representación Σ de G con espacio de representación $\mathcal{M}(X)$ mediante la fórmula

$$\Sigma(g)(\varphi)(x) = \varphi(x \cdot g),$$

para $x \in X$, $g \in G$ y $\varphi \in \mathcal{M}(X)$.

EJEMPLO 1.14. De acuerdo con el Ejemplo 1.11, la esfera S^2 es un espacio homogéneo bajo la acción de $SU(2)$ allí descrita. Por (1.7), tenemos una representación lineal Π de $SU(2)$ con espacio de representación $\mathcal{M}(S^2)$ definida por

$$q\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(q^{-1} \cdot \mathbf{x}) = \varphi(q^\dagger \mathbf{x} q),$$

para $\mathbf{x} \in S^2$, $\varphi \in \mathcal{M}(S^2)$, $q \in SU(2)$, donde estamos usando la abreviatura $q\varphi = \Pi(q)(\varphi)$.

El subespacio vectorial $\mathcal{L}^2(S^2)$ de $\mathcal{M}(S^2)$ cuyos elementos son las funciones de cuadrado integrable, esto es

$$\mathcal{L}^2(S^2) = \{\varphi : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{S^2} |\varphi|^2 < +\infty\}$$

verifica que $q\varphi \in \mathcal{L}^2(S^2)$ para toda $\varphi \in \mathcal{L}^2(S^2)$ y $q \in SU(2)$. Esto es porque, para cualquier función integrable φ en S^2 , se tiene que

$$\int_{S^2} q\varphi = \int_{S^2} \varphi,$$

para todo $q \in SU(2)$, puesto que $T(q) : S^2 \rightarrow S^2$ es una transformación que preserva áreas. Esto es, $\mathcal{L}^2(S^2)$ es un subespacio invariante para la representación considerada y, así, obtenemos una representación de $SU(2)$ con espacio de representación $\mathcal{L}^2(S^2)$, de acuerdo con la siguiente definición.

⁷En realidad, según la estructura añadida al conjunto X , se suelen tomar funciones con condiciones adicionales (de cuadrado integrable, regulares, etc.)

⁸Esto es, un homomorfismo de grupos invertible.

DEFINICIÓN 1.15. Si $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ es una representación de G y $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial de V tal que $\Pi(g)(w) \in W$ para todo $w \in W$, diremos que W es un subespacio Π -invariante de V . Obviamente, obtenemos una representación $\Pi : G \rightarrow GL(W)$, que se suele llamar *restricción de Π a W* .

OBSERVACIÓN 1.16. En el espacio vectorial complejo $\mathcal{L}^2(S^2)$ podemos definir la forma hermitiana semidefinida positiva

$$(1.8) \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_{S^2} \varphi \bar{\psi}.$$

Aunque $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{L}^2(S^2)$, no tenemos un producto interno, ya que es posible que $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0$ con $\varphi \neq 0$. Para enmendar esto, se suele considerar el espacio $L^2(S^2)$ de las clases de equivalencia de funciones bajo la relación “ser iguales casi por doquier⁹”. Es usual identificar estas clases de equivalencia con sus funciones representantes, de manera que la forma hermitiana (1.8) deviene un producto interno de manera que $L^2(S^2)$ es un espacio de Hilbert¹⁰. Como cualquier rotación preserva conjuntos de medida nula, la representación de $SU(2)$ descrita anteriormente da lugar a otra con espacio de representación $L^2(S^2)$.

1.1.5. Construcción algebraica de representaciones de $SU(2)$. Vamos seguidamente a construir algunas representaciones de $SU(2)$ cuyos espacios de representación son de dimensión finita. Estos estarán formados por polinomios abstractos, pero, más adelante, veremos cómo dan lugar a representaciones cuyos espacios de representación son subespacios de $L^2(S^2)$. Así, consideramos el conjunto H_n de los polinomios homogéneos en dos indeterminadas z_1, z_2 con coeficientes complejos de grado total n , que es un espacio vectorial complejo con base

$$\{z_1^{n-j} z_2^j \mid 0 \leq j \leq n\}.$$

Éste va a ser el espacio de representación de una representación lineal Π_n de $SL_2(\mathbb{C})$ definida como sigue:

$$\Pi_n(A)(f)(z_1, z_2) = f((z_1, z_2)A), \quad (A \in SL_2(\mathbb{C}), f \in H_n).$$

Queremos cambiar el espacio de representación H_n por P_n , el conjunto de los polinomios con coeficientes complejos en una indeterminada z de grado menor o igual que n . Se trata de un espacio vectorial complejo de dimensión $n+1$, una de cuyas bases es

$$\{1, z, z^2, \dots, z^n\}.$$

Tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales

$$S : H_n \rightarrow P_n, \quad (f \mapsto f(z, 1))$$

cuya transformación inversa es

$$S^{-1} : P_n \rightarrow H_n, \quad (f \mapsto z_2^n f(z_1/z_2)).$$

Podemos definir así una nueva representación Σ_n de $SL_2(\mathbb{C})$ sobre el espacio P_n dada por

$$\Sigma_n(A) = S\Pi_n(A)S^{-1}, \quad (A \in SL_2(\mathbb{C})).$$

Un sencillo cálculo muestra que, para

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C}),$$

⁹*almost everywhere*, en inglés

¹⁰Esta es una construcción estándar que puede encontrarse en muchos textos, por ejemplo [4]

$$\Sigma_n(A)(f)(z) = (\beta z + \delta)^n f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right), \quad (f \in P_n).$$

La aplicación $S : H_n \rightarrow P_n$ es entrelazante en el sentido de la siguiente definición, de donde también aprendemos que Π_n y Σ_n son representaciones equivalentes.

DEFINICIÓN 1.17. Consideremos dos representaciones (Π, V) y (Σ, W) de un grupo G . Una aplicación lineal $S : V \rightarrow W$ es *entrelazante* si $\Sigma(g)S = S\Pi(g)$ para todo $g \in G$. En el caso de ser S biyectiva, diremos que es una *equivalencia*, y que las representaciones Π y Σ son *equivalentes*. Denotaremos esta situación mediante la notación $\Pi \sim \Sigma$.

Como $SU(2)$ es un subgrupo de $SL_2(\mathbb{C})$, la representación (Σ_n, P_n) , mirada sólo sobre matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2),$$

da la representación de este grupo, que denotaremos también por Σ_n , definida por

$$(1.9) \quad \Sigma_n(A)(f)(z) = (\beta z + \bar{\alpha})^n f\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right), \quad (f \in P_n).$$

Este proceso de considerar representaciones dadas sobre subgrupos recibe un nombre, de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.18. Sea $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ una representación lineal de un grupo G . Si H es un subgrupo de G , la restricción de Π a H proporciona una representación de H llamada *representación restricción*¹¹ a H de Π .

Cualquier representación de un grupo da lugar a una representación en el espacio de funciones sobre el grupo. De hecho, se tiene una construcción algo más general sobre un espacio homogéneo X .

El proceso es el siguiente: partimos de una representación lineal (Π, V) de un grupo G , y ponemos $X = Gx_0$ para cierto $x_0 \in X$. Se tiene entonces el subgrupo estabilizador H de G en x_0 definido como

$$H = \{h \in G : hx_0 = x_0\}.$$

Supongamos que existe una forma lineal $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$(1.10) \quad \varepsilon(hv) = \varepsilon(v), \text{ para todo } v \in V, h \in H.$$

Tengo la aplicación $S_\varepsilon : V \rightarrow \mathcal{M}(X)$, definida por

$$(1.11) \quad S_\varepsilon(v)(gx_0) = \varepsilon(\Pi(g^{-1})(v)), \quad (g \in G, v \in V).$$

Debemos argumentar que el valor de $S_\varepsilon(v)(gx_0)$ no depende del elemento $g \in G$ tomado para obtener $gx_0 \in X$. En efecto, si $gx_0 = hx_0$, entonces $g^{-1}hx_0 = x_0$ y, por tanto, $g^{-1}h \in H$. Se tiene así que

$$\varepsilon(\Pi(h^{-1})v) = \varepsilon(\Pi(g^{-1}h)\Pi(h^{-1})v) = \varepsilon(\Pi(g^{-1})v),$$

para todo $v \in V$, ya que $h^{-1}g \in H$.

EJERCICIO 5. Demostrar que $S_\varepsilon : V \rightarrow \mathcal{M}(X)$, definida según (1.11), es una aplicación entrelazante cuando se toma la representación por traslación de G definida según (1.7). Deducir que

$$\text{Im}(S_\varepsilon) = \{S_\varepsilon(v) : v \in V\}$$

es un subespacio Π -invariante de $\mathcal{M}(X)$.

¹¹No confundir con la restricción descrita en la Definición 1.15. Como de costumbre, el contexto desambiguará el significado.

EJEMPLO 1.19. Apliquemos la anterior construcción a S^2 vista como $SU(2)$ -espacio homogéneo. Tomamos $x_0 = \mathbf{k}$. El subgrupo estabilizador es

$$H = \{q \in SU(2) : q\mathbf{k}q^\dagger = \mathbf{k}\} = \{q \in SU(2) : q\mathbf{k} = \mathbf{k}q\}.$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1 \right\}.$$

El efecto de la acción de un elemento de H sobre los monomios de la base de P_n según (1.9) es

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \cdot z^k = \bar{\alpha}^n \alpha^{2k} z^k, \quad (k = 0, \dots, n).$$

Por tanto, la condición $\varepsilon(q \cdot z^k) = \varepsilon(z^k)$ para todo $k = 0, \dots, n$ y todo $q \in H$ requerida sobre una forma lineal $\varepsilon : P_n \rightarrow \mathbb{C}$ implica que $\varepsilon(z^k) = 0$ siempre que $2k \neq n$. Esto implica que, para disponer de una forma $\varepsilon \neq 0$, hemos de suponer que n es par. Tomamos, pues, la forma lineal definida por las condiciones, para n par,

$$\varepsilon(z^k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2k \neq n \\ 1 & \text{si } 2k = n \end{cases}, \quad (k = 0, \dots, n).$$

Pasamos ahora a calcular la aplicación entrelazante

$$(1.12) \quad S_\varepsilon : P_n \rightarrow \mathcal{M}(S^2)$$

de acuerdo con el procedimiento general descrito en (1.11). Así, sobre los elementos de la base de P_n , tenemos

$$S_\varepsilon(z^k)(q \cdot \mathbf{k}) = \varepsilon(q^{-1} \cdot z^k), \quad (k = 0, \dots, n; q \in SU(2)).$$

De acuerdo con el Ejemplo 1.11, basta con tomar q de la forma $q = e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{k}}e^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{i}}$, con $0 \leq \varphi < \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Como

$$e^{\frac{\theta}{2}\mathbf{i}}e^{\frac{\varphi}{2}\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}} \end{pmatrix},$$

obtenemos, siempre a la vista del Ejemplo 1.11, y usando la acción (1.9), las funciones sobre S^2 expresadas en coordenadas esféricas

$$S_\varepsilon(z^k)(\theta, \varphi) = \varepsilon \left(e^{(2k-n)\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}} \left(z \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^{n-k} \left(z \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)^k \right),$$

para $k = 0, \dots, n$.

Poniendo $n = 2l$ y $m = k - l$, y teniendo en cuenta que ε es lineal, tenemos que

$$S_\varepsilon(z^{m+l})(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} \varepsilon \left(\left(z \sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^{l-m} \left(z \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)^{l+m} \right),$$

para $|m| \leq l$.

EJERCICIO 6. Consideremos, para $0 \leq |m| \leq l$, el polinomio en las indeterminadas x, y, z ,

$$f_l^m(z, x, y) = (xz + y)^{l-m}(yz - x)^{l+m}.$$

Definimos $p_l^m(x, y)$ como el coeficiente de $f_l^m(z, x, y)$ de grado l en z . Denotando por $s_l^m(\theta, \varphi) = S_\varepsilon(z^{m+l})(\theta, \varphi)$, tenemos que

$$s_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} p_l^m\left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}\right).$$

Demostrar que, para cada l , las funciones $s_l^m(\theta, \varphi)$ forman un sistema ortogonal con respecto de la forma hermitiana definida en la Observación 1.16¹². Encontrar una fórmula cerrada para $s_l^m(\theta, \varphi)$. Estas funciones son los armónicos esféricos (sin normalizar).

1.2. Representaciones de Grupos Compactos

Vamos a discutir la noción de grupo de Lie lineal y de grupo de Lie matricial. De particular interés para nosotros serán los grupos compactos, para los cuales las representaciones finito-dimensionales adquieren una relevancia excepcional. Se intentará, en lo posible, aligerar los tecnicismos topológicos; éste es uno de los motivos principales de que nos restrinjamos a grupos matriciales. El otro es que muchos ejemplos fundamentales, como los grupos unitarios, son grupos de Lie matriciales.

1.2.1. Grupos de Lie lineales y matriciales. Ejemplos. Comencemos considerando un espacio vectorial complejo V de dimensión finita n , y el espacio vectorial $L(V, V)$ cuyos elementos son todas las transformaciones lineales de V en V . Fijada una base de V , tomando coordenadas con respecto de la misma, obtenemos un isomorfismo de $\mathbb{C}$ -espacios vectoriales $L(V, V) \cong M_n(\mathbb{C})$. En este último espacio de matrices se tiene perfectamente definida la convergencia de sucesiones, por ejemplo, con respecto de la norma $\|\cdot\|$ proporcionada por el producto interno

$$\langle A, B \rangle = \text{traza}(AB^\dagger), \quad (A, B \in M_n(\mathbb{C})).$$

DEFINICIÓN 1.20. Llamamos *grupo de Lie lineal* a todo subgrupo G de $GL(V)$, donde V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, sujeto a la siguiente condición¹³: para toda sucesión $\{g_m\} \subseteq G$ que converja a un límite g en $GL(V)$, entonces $g \in G$. La noción de *grupo de Lie matricial* se obtiene de igual forma, sustituyendo $GL(V)$ por $GL_n(\mathbb{C})$.

OBSERVACIÓN 1.21. Los isomorfismos de coordenadas $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$ dan una correspondencia biunívoca entre grupos de Lie lineales y matriciales, teniendo en cuenta que los cambios de base en V dan lugar a subgrupos conjugados¹⁴ de $GL_n(\mathbb{C})$. Nos referiremos indistintamente a ambos (lineales o matriciales) como grupos de Lie, bien entendido que el concepto de grupo de Lie es más general.

EJEMPLO 1.22. El grupo $GL_n(\mathbb{R})$ de las matrices reales no singulares de tamaño $n \times n$ es un grupo de Lie.

EJEMPLO 1.23. Tenemos el *grupo lineal especial complejo*

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A = 1\}.$$

Que se trata de un subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$ es claro, por ser la aplicación determinante un homomorfismo de grupos. Ahora, una sucesión convergente de matrices con determinante 1 ha de converger a una matriz cuyo determinante es 1, ya que la aplicación determinante es claramente continua (es polinómica).

Es bastante obvio que dos grupos de Lie G y G' que sean subgrupos cerrados de $GL_n(\mathbb{C})$ dan lugar a un subgrupo cerrado $G \cap G'$ de $GL_n(\mathbb{C})$ y, por tanto, a un nuevo grupo de Lie. Ilustramos esto con un ejemplo.

¹²Discutiremos más adelante que, de hecho, estas funciones también son ortogonales enter sí para distintos $l = 0, 1, 2, \dots$

¹³Esta condición significa, en términos topológicos, que G es un subgrupo cerrado de $GL(V)$, para la topología inducida sobre este último por la de $L(V, V)$.

¹⁴Dos subgrupos K y H de un grupo G se dicen *conjugados* si $K = gHg^{-1}$ para algún elemento $g \in G$.

EJEMPLO 1.24. Tenemos el *grupo lineal especial real*

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1\},$$

que es un grupo de Lie porque $SL_n(\mathbb{R}) = SL_n(\mathbb{C}) \cap GL_n(\mathbb{R})$.

EJEMPLO 1.25. Supongamos dada una matriz $\mathbf{J} \in GL_n(\mathbb{C})$. Definimos

$$U_{\mathbf{J}}(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A\mathbf{J}A^\dagger = \mathbf{J}\}.$$

Comprobemos que se trata de un grupo de Lie. Primero, puesto que $\det(\mathbf{J}) \neq 0$, dada $A \in U_{\mathbf{J}}(n)$, deducimos que $A \in GL_n(\mathbb{C})$, ya que

$$\det(A) \det(\mathbf{J}) \det(A^\dagger) = \det(\mathbf{J}).$$

Si ahora $A, B \in U_{\mathbf{J}}(n)$, tenemos

$$AB\mathbf{J}(AB)^\dagger = AB\mathbf{J}B^\dagger A^\dagger = \mathbf{J},$$

y

$$\mathbf{J} = A^{-1}\mathbf{J}(A^\dagger)^{-1} = A^{-1}\mathbf{J}(A^{-1})^\dagger,$$

lo que prueba que $AB, A^{-1} \in U_{\mathbf{J}}(n)$. Por tanto, $U_{\mathbf{J}}(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$.

Para ver que es cerrado, observemos que la aplicación

$$M_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{f} M_n(\mathbb{C}), \quad (A \mapsto A\mathbf{J}A^\dagger)$$

es continua. Por tanto, $U_{\mathbf{J}}(n) = f^{-1}(\mathbf{J})$ es un subconjunto cerrado¹⁵ de $M_n(\mathbb{C})$ (y de $GL_n(\mathbb{C})$). Así que tenemos el grupo de Lie $U_{\mathbf{J}}(n)$ que podemos llamar *grupo $\mathbf{J}$ -unitario de orden n* . Llamaremos *grupo $\mathbf{J}$ -unitario especial de orden n* a

$$SU_{\mathbf{J}}(n) = U_{\mathbf{J}}(n) \cap SL_n(\mathbb{C}).$$

EJEMPLO 1.26. Tomando $\mathbf{J} = I_n$, la matriz identidad de orden n , obtenemos, en el Ejemplo 1.25, el *grupo unitario de orden n*

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^\dagger = I_n\},$$

y el *grupo unitario especial de orden n*

$$SU(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : AA^\dagger = I_n, \det A = 1\}.$$

EJEMPLO 1.27. A partir del Ejemplo 1.25, podemos definir el grupo de Lie *$\mathbf{J}$ -ortogonal* como

$$O_{\mathbf{J}}(n) = U_{\mathbf{J}}(n) \cap GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A\mathbf{J}A^T = \mathbf{J}\},$$

donde A^T denota la matriz traspuesta de A (por supuesto, para matrices reales $A^T = A^\dagger$). También tenemos el grupo *$\mathbf{J}$ -ortogonal especial*

$$SO_{\mathbf{J}}(n) = U_{\mathbf{J}}(n) \cap GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A\mathbf{J}A^T = \mathbf{J}, \det A = 1\},$$

Tomando $\mathbf{J} = I_n$, obtenemos los grupos *ortogonal de orden n*

$$O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I_n\},$$

y el *grupo especial ortogonal de orden n*

$$SO(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I_n, \det A = 1\}.$$

Aunque existe una noción de espacio topológico compacto, vamos a adoptar la siguiente definición de grupo de Lie (lineal) compacto.

DEFINICIÓN 1.28. Un grupo de Lie lineal $G \subseteq GL(V)$ se dirá *compacto* cuando se satisfagan las dos siguientes condiciones:

1. Toda sucesión $\{g_m\} \subseteq G$ convergente en $L(V, V)$ tiene su límite en G .
2. Existe $M > 0$ tal que $\|g\| \leq M$ para todo $g \in G$.

¹⁵Esto puede comprobarse fácilmente mediante convergencia de sucesiones, si no se recuerda.

Tomando coordenadas, se obtiene la noción de grupo matricial compacto.

EJEMPLO 1.29. Son compactos los grupos unitarios $U(n)$, $SU(n)$ y los grupos ortogonales $O(n)$, $SO(n)$.

EJERCICIO 7. Demostrar que el grupo $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r \in \mathbb{Q} \right\}$ no es un grupo de Lie matricial.

1.2.2. Representaciones de dimensión finita. Las representaciones de dimensión finita juegan un papel fundamental en el ámbito de los grupos compactos. Las mismas se pueden describir a partir de las representaciones irreducibles, definidas seguidamente para cualquier grupo. Recordemos que, dada una representación (Π, V) de un grupo G , usamos a veces, siempre que no quepa ambigüedad, la notación abreviada

$$gv = \Pi(g)(v), \quad (g \in G, v \in V).$$

Recordemos que un subespacio vectorial W de V se dice Π -invariante si $\Pi(g)(w) \in W$ para todo $w \in W$ y todo $g \in G$. Cuando el contexto lo permita, se dirá simplemente subespacio invariante, sin mención explícita de Π .

DEFINICIÓN 1.30. Sea (Π, V) una representación de dimensión finita de un grupo G . Un subespacio Π -invariante W de V se dice *irreducible* si $W \neq \{0\}$ y W no contiene más que dos subespacios Π -invariantes (que son, obviamente, $\{0\}$ y W). La representación (Π, V) se dice irreducible si V es irreducible.

Para una aplicación entrelazante $S : V \rightarrow W$, es fácil ver que la imagen de S

$$\text{Im } S = \{S(v) : v \in V\}$$

es un subespacio invariante de W , en tanto que su núcleo

$$\ker S = \{v \in V : S(v) = 0\}$$

es un subespacio invariante de V . Esta observación permite probar muy cómodamente el siguiente resultado que, a pesar de su sencillez, es muy útil.

LEMA 1.31 (Lema de Schur). *Toda aplicación entrelazante $S : V \rightarrow W$ entre representaciones irreducibles complejas es o nula o una equivalencia. Además, si $W = V$, entonces $S = \lambda \text{id}_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $S \neq 0$, entonces $\text{Im } S = W$, ya que se trata de un subespacio invariante no nulo de W . Además, $\ker S \neq V$, por lo que $\ker S = \{0\}$ y S resulta ser inyectiva. Así, S es una equivalencia.

Si $V = W$, tomemos $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de S y tomemos cualquier vector propio suyo $v \in V$. Dado $g \in G$, tenemos que

$$S(gv) = gS(v) = g\lambda v = \lambda gv.$$

De manera que el subespacio propio de λ es invariante, con lo que ha de ser todo el espacio de representación V . $\square$

Una consecuencia importante del Lema de Schur es la siguiente.

PROPOSICIÓN 1.32. *Toda representación compleja irreducible de un grupo conmutativo es de dimensión 1.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos una representación irreducible (Π, V) de un grupo conmutativo G . Razonemos que, dado $g \in G$, $\Pi(g) : V \rightarrow V$ es entrelazante. En efecto, dado $h \in G$, y $v \in V$,

$$\Pi(g)\Pi(h)(v) = \Pi(gh)(v) = \Pi(hg)(v) = \Pi(h)\Pi(g)(v).$$

Sea $v \in V$ no nulo. Según el Lema de Schur, $\Pi(g)(v)$ está en la recta generada por v para todo $g \in G$. Así que dicha recta es Π -invariante, por lo que coincide con V . $\square$

EJEMPLO 1.33. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, tenemos la representación irreducible $\chi_k : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ dada por $\chi_k(e^{i\theta}) = e^{ik\theta}$, para $\theta \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 8. Supongamos que una representación (Π, V) de un grupo G es tal que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ para $V_1, \dots, V_n$ subespacios Π -invariantes irreducibles. Demostrar que si W es un subespacio Π -invariante irreducible de V , entonces la representación obtenida de Π por restricción a W es equivalente la restricción de Π a algún V_i .

EJERCICIO 9. Sean $(\Pi_1, V_1), \dots, (\Pi_t, V_t)$ representaciones de un grupo G . Consideremos el espacio vectorial suma directa externa $V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$ y la aplicación

$$\Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_t : G \rightarrow GL(V_1 \oplus \cdots \oplus V_t),$$

definida, para $g \in G$, $v = (v_1, \dots, v_t) \in V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, por

$$(\Pi_1 \oplus \cdots \oplus \Pi_t)(g)(v_1, \dots, v_t) = (\Pi_1(g)(v_1), \dots, \Pi_t(g)(v_t))$$

Comprobar que se trata de una representación de G , que denotaremos por $V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$.

1.2.3. Representaciones unitarias. Las representaciones unitarias, que pasamos a definir, resultan especialmente útiles.

DEFINICIÓN 1.34. Supongamos que el espacio de representación V de una representación (Π, V) viene dotado de un producto interno $\langle -, - \rangle$. La representación se dice ser *unitaria* si

$$\langle \Pi(g)(v), \Pi(g)(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

para todo $g \in G$, $v, w \in V$.

EJEMPLO 1.35. Para cada $l = 0, 1, 2, \dots$ consideremos el subespacio vectorial complejo $\mathcal{H}_l$ de $\mathcal{M}(S^2)$ generado por los armónicos esféricos $s_l^m(\theta, \varphi)$, con $|m| \leq l$. Como $\mathcal{H}_l$ es la imagen de la aplicación entrelazante (1.12), resulta ser un espacio invariante para la representación por traslación de $SU(2)$ sobre S^2 . Por tanto, la restricción de ésta proporciona una representación cuyo espacio de representación $\mathcal{H}_l$ tiene dimensión $2l+1$. Esta representación es unitaria con respecto del producto interno definido por restricción de (1.8), esto es

$$\langle f, g \rangle = \int_{S^2} f \bar{g}.$$

La siguiente consecuencia del Lema de Schur muestra cuán inherente es el producto interno a una representación unitaria.

PROPOSICIÓN 1.36. Supongamos que (Π, V) es una representación irreducible de un grupo G unitaria con respecto de dos productos internos $\langle -, - \rangle$ y $(-, -)$ sobre V . Entonces $(-, -) = \lambda \langle -, - \rangle$ para un escalar $\lambda > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Existe un operador lineal $A : V \rightarrow V$ tal que $(v, w) = \langle Av, w \rangle$ para todo $v, w \in V$. Comprobemos que se trata de una aplicación entrelazante. En efecto, dado $g \in G$, tenemos, para $v, w \in V$ cualesquiera

$$\langle A\Pi(g)v, \Pi(g)w \rangle = (\Pi(g)v, \Pi(g)w) = (v, w) = \langle Av, w \rangle = \langle \Pi(g)Av, \Pi(g)w \rangle,$$

lo que sólo es posible si $A\Pi(g) = \Pi(g)A$. El Lema de Schur da ahora el resultado. $\square$

Disponer de una representación unitaria permite descomponer el espacio de representación (de dimensión finita, recordemos) como suma directa de subespacios irreducibles.

PROPOSICIÓN 1.37. *Si (Π, V) es una representación unitaria no nula de dimensión finita de un grupo G , entonces V se descompone como suma ortogonal de subespacios invariantes irreducibles.*

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar que, dado un subespacio Π -invariante W de V , entonces su complemento ortogonal

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w \rangle = 0, \forall w \in W\}$$

es también Π -invariante. El enunciado se sigue entonces fácilmente por inducción sobre la dimensión de V .

Bien, dado $g \in G$ y $v \in W^\perp$, tenemos que $\langle \Pi(g)v, \Pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle = 0$ para todo $w \in W$. Pero, para cada $g \in G$, puesto que W es Π -invariante y de dimensión finita, $\Pi(g)(W) = W$. Por tanto, $\Pi(g)(v) \in W^\perp$. $\square$

Una de las propiedades más interesantes de un grupo compacto es que cualquier representación *continua* de dimensión finita deviene unitaria para un producto interno adecuado sobre el espacio de representación. La clave está en que sobre un grupo de Lie compacto existe una medida invariante por traslaciones (llamada medida de Haar) que permite definir una integral $\int_G$ para funciones adecuadas sobre G que, en cualquier caso, incluyen las funciones continuas. Esta integral hereda la propiedad de invarianza por traslaciones en el sentido de que, para cualquier función integrable f sobre G , y cualquier $g \in G$, se tienen las igualdades

$$\int_G f(gx) = \int_G f(x) = \int_G f(xg).$$

Además,

$$\int_G f(x^{-1}) = \int_G f(x).$$

Con la ayuda de tal integral, podemos demostrar el siguiente importante hecho sobre representaciones lineales continuas de un grupo de Lie compacto. Definamos primero qué entenderemos por tales representaciones.

DEFINICIÓN 1.38. Diremos que una representación lineal (Π, V) de un grupo de Lie G es *continua* si V es de dimensión finita y la aplicación $\Pi : G \rightarrow GL(V)$ es continua.

TEOREMA 1.39. *Si (Π, V) es una representación lineal continua de un grupo compacto G , entonces existe un producto interno sobre V de manera que la representación deviene unitaria. Por tanto, el espacio de representación V es suma directa de subespacios invariantes irreducibles.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos cualquier producto interno $\langle -, - \rangle$ sobre V y modifiquémoslo adecuadamente. Esto es, definamos, para $v, w \in V$,

$$\langle v, w \rangle_G = \int_G \langle \Pi(x)v, \Pi(x)w \rangle.$$

Esta integral está bien definida ya que la función de G bajo el signo integral es continua, porque suponemos que la representación lo es, y es finita al ser G compacto. Es fácil comprobar que $\langle -, - \rangle_G$ es una forma hermitiana definida positiva.

Además, dado $g \in G$,

$$\begin{aligned} \langle \Pi(g)v, \Pi(g)w \rangle_G &= \int_G \langle \Pi(x)\Pi(g)v, \Pi(x)\Pi(g)w \rangle \\ &= \int_G \langle \Pi(xg)v, \Pi(xg)w \rangle = \langle v, w \rangle_G, \end{aligned}$$

ya que xg recorre una sola vez G al mover $x \in G$. $\square$

EJEMPLO 1.40. Toda representación compleja continua del grupo aditivo $\mathbb{R}$ es, de acuerdo con el Lema de Schur, de dimensión 1. Esto es, se trata, salvo equivalencias, de un homomorfismo continuo de grupos $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Vamos a describir todos ellos.

Para ello, observemos primero que el conjunto de los números de la forma $n/2^m$, para $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ es denso en $\mathbb{R}$. Supuesto conocido que $\mathbb{Q}$ lo es, basta el siguiente argumento: dado $p/q \in \mathbb{Q}$ con $q > 0$ y $m \in \mathbb{N}$, existen $n \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}$ tales que

$$2^m p = nq + r, \quad r < q.$$

Así,

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{n}{2^m} \right| = \frac{r}{2^m q} < \frac{1}{2^m}.$$

En segundo lugar, dado un homomorfismo de grupos continuo $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, tenemos que $\rho(t) = \chi(t)/|\chi(t)|$ es otro homomorfismo continuo de grupos. Existe $c > 0$ tal que, para todo $t \in [-c, c]$, el número complejo $\rho(t)$ pertenece al conjunto $\{e^{i\theta} : \theta \in (-\pi/2, \pi/2)\}$. Si escribo $\rho(c) = e^{i\theta}$, entonces $\rho(c) = \rho(c/2)^2$, de donde $\rho(c/2) = e^{i\theta/2}$. Reiterando el argumento, tenemos que $\rho(c/2^m) = e^{i\theta/2^m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De aquí, $\rho(cn/2^m) = e^{i\theta n/2^m}$ para todo $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Por tanto, las funciones continuas $\rho(ct)$ y $e^{i\theta t}$ coinciden en un subconjunto denso de $\mathbb{R}$, así que son iguales. Tomando $b = \theta/c$ obtenemos que $\rho(t) = e^{ibt}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por otra parte, $r(t) = |\chi(t)|$ da una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que $r(t+t') = r(t)r(t')$ para todo $t, t' \in \mathbb{R}$. Se supone conocido que, en tal caso, $r(t) = e^{at}$, para cierto $a \in \mathbb{R}$.

En conclusión, $\chi(t) = e^{wt}$, para $w = a + bi \in \mathbb{C}$.

Vamos ahora a dar todas las representaciones continuas complejas irreducibles de $U(1) = S^1$. Para ello, observemos que tenemos un homomorfismo de grupos $p : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ dado por $p(t) = e^{it}$. Dada una representación continua $\chi : U(1) \rightarrow \mathbb{C}^\times$, tenemos, según la discusión anterior, que existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\chi p(t) = e^{wt}$. Esto es, $\chi(e^{it}) = e^{wt}$. En particular, $1 = \chi(1) = \chi(e^{i2\pi}) = e^{w2\pi}$. Si escribo $w = a + ib$, tengo la igualdad $1 = e^{a2\pi} e^{ib2\pi}$. De donde $a = 0, b \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\chi(e^{it}) = e^{ibt}$, con $b \in \mathbb{Z}$. En resumen, las representaciones complejas continuas irreducibles de $U(1)$ son

$$\text{Irr}(U(1)) = \{\chi_k : k \in \mathbb{Z}\},$$

donde $\chi_k(z) = z^k$ para $z \in U(1)$.

EJEMPLO 1.41. Como $U(1)$ es compacto, tenemos que toda representación compleja continua ρ es suma directa de representaciones irreducibles. Así, $\rho \sim \chi_{k_1} \oplus \cdots \oplus \chi_{k_n}$, para $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$.

1.3. Sobre el Teorema de Peter-Weyl

El Teorema de Peter-Weyl es el fundamento teórico de los desarrollos similares a los de Fourier sobre grupos compactos y sus espacios homogéneos. Comencemos con el estudio de las llamadas funciones representativas o, también, funciones matriciales sobre un grupo. En lo que sigue, las representaciones no se suponen finito-dimensionales, salvo que se indique explícitamente.

DEFINICIÓN 1.42. Sea (Π, V) una representación finito-dimensional de un grupo G y $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base de V . Para cada $g \in G$, tenemos coeficientes $z_{ij}(g) \in \mathbb{C}$ tales que

$$\Pi(g)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n z_{ij}(g) \mathbf{e}_i.$$

Las funciones $z_{ij} \in \mathcal{M}(G)$ se llaman *funciones matriciales* asociadas a Π y la base fijada.

EJERCICIO 10. Calcular las funciones matriciales reales sobre $SU(2)$ dadas por la representación definida en clase con espacio de representación el de los vectores de Hamilton $\mathcal{V}$. Usar la base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Observemos que, de la condición $\Pi(gh) = \Pi(g)\Pi(h)$, deducimos que

$$z_{ij}(gh) = \sum_{k=1}^n z_{ik}(g) z_{kj}(h).$$

Vamos a estudiar estas funciones matriciales de G . La primera observación es que, dado un grupo G , el espacio de funciones $\mathcal{M}(G)$ admite ser espacio de representación para las representaciones *regulares* R y R' dadas por

$$\begin{aligned} R(g)(f)(x) &= f(g^{-1}x), & (g \in G, f \in \mathcal{M}(G), x \in G), \\ R'(g)(f)(x) &= f(xg), & (g \in G, f \in \mathcal{M}(G), x \in G). \end{aligned}$$

Aunque se trata de representaciones distintas, se tiene que la aplicación

$$\mathcal{M}(G) \xrightarrow{S} \mathcal{M}(G) \quad (f(x) \mapsto f(x^{-1}))$$

es una equivalencia.

DEFINICIÓN 1.43. Dada una representación (Π, V) de un grupo G , y un conjunto de vectores $Y \subseteq V$, llamaremos *subespacio invariante generado por Y* al menor de los subespacios invariantes de V que contiene a Y . Este subespacio vectorial está generado por el conjunto de vectores

$$\{\Pi(g)(y) : g \in G, y \in Y\} = \{g \cdot y : g \in G, y \in Y\}.$$

Usaremos la notación $\mathbb{C}G \cdot Y$ para denotar este subespacio invariante de V . Cuando $Y = \{v\}$, para un cierto $v \in V$, usamos la notación abreviada

$$\mathbb{C}G \cdot \{v\} = \mathbb{C}G \cdot v.$$

PROPOSICIÓN 1.44. Para cada función $f \in \mathcal{M}(G)$ consideremos $y \in G$, consideremos $y \cdot f \in \mathcal{M}(G)$ definida¹⁶ por $(y \cdot f)(x) = f(xy)$ para $x \in G$. Las siguientes condiciones son equivalentes sobre f :

1. f es una combinación lineal de funciones matriciales;
2. $\mathbb{C}G \cdot f$ es un espacio vectorial de dimensión finita.

DEMOSTRACIÓN. $(1 \Rightarrow 2)$. Sea (Π, V) tal que f es una combinación lineal de funciones matriciales z_{ij} con respecto de Π y una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Podemos reducirnos al caso $f = z_{ij}$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Para $x, y \in G$, tenemos

$$(y \cdot z_{ij})(x) = z_{ij}(xy) = \sum_k z_{ik}(x) z_{kj}(y).$$

De aquí,

$$y \cdot f = y \cdot z_{ij} = \sum_k z_{kj}(y) z_{ik}.$$

¹⁶Estamos usando la representación que habíamos denotado por R' .

Por tanto, $\mathbb{C}G \cdot f$ es un espacio vectorial de dimensión finita por estar contenido en el subespacio de $\mathcal{M}(G)$ generado por $\{z_{ik} : k = 1, \dots, n\}$.

($2 \Rightarrow 1$). Si $f \in \mathcal{M}(G)$ es una función tal que $\mathbb{C}G \cdot f$ es de dimensión finita, puesto que se trata de un subespacio invariante para la representación regular R' , tenemos la restricción de esta última a $\mathbb{C}G \cdot f$ da una representación finito-dimensional de G . Obviamente, podemos suponer que $f \neq 0$ y, así, elegir una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathbb{C}G \cdot f$ tal que $\mathbf{e}_1 = f$. Así, para $x \in G$,

$$x \cdot f = \sum_i z_{i1}(x) \mathbf{e}_i,$$

para ciertas funciones matriciales $\{z_{i1} : i = 1, \dots, n\}$. Evaluando en el elemento neutro $e \in G$,

$$f(x) = (x \cdot f)(e) = \sum_i z_{i1}(x) \mathbf{e}_i(e).$$

Por tanto,

$$f = \sum_i \mathbf{e}_i(e) z_{i1}.$$

□

DEFINICIÓN 1.45. Las funciones $f \in \mathcal{M}(G)$ descritas por cualquiera de las dos condiciones equivalentes de la Proposición 1.44 se llaman *funciones representativas* de G . El espacio vectorial de todas ellas se denotará por $\mathcal{R}(G)$. Si G es un grupo de Lie, el subespacio vectorial de $\mathcal{R}(G)$ de las funciones representativas y continuas se denotará por $\mathcal{R}_c(G)$.

EJERCICIO 11. Demostrar que $\mathcal{R}(G)$ es un subespacio R -invariante y R' -invariante de $\mathcal{M}(G)$. Si G es un grupo de Lie, demostrar lo propio para $\mathcal{R}_c(G)$.

Dada una representación (Π, V) de G , denotaremos por $C(\Pi)$ al conjunto de las funciones representativas que se pueden poner como combinación lineal de funciones matriciales asociadas a Π con respecto de alguna base de V . También usaremos la notación $C(V)$, siempre y cuando esto no lleve a confusión.

Observemos que, puesto que un cambio de base en V hace que las matrices que representan a $\Pi(g)$ con $g \in G$ resulten semejantes por medio de la matriz del cambio de base, la definición de $C(\Pi)$ no depende de la base escogida. Es más, el mismo argumento muestra que $C(\Pi) = C(\Sigma)$ para representaciones equivalentes Π y Σ .

EJERCICIO 12. Si $\Pi \sim \Pi_1 \oplus \dots \oplus \Pi_n$ son representaciones de dimensión finita de G , entonces $C(\Pi) = C(\Pi_1) + \dots + C(\Pi_n)$.

EJEMPLO 1.46. Observemos que, para una representación compleja continua Π de $U(1)$ se tiene que $\Pi = \chi_{k_1} \oplus \dots \oplus \chi_{k_n}$ para ciertos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$. Así, $C(\Pi) = C(\chi_{k_1}) + \dots + C(\chi_{k_n})$. Un conjunto de generadores de este espacio vectorial complejo es $\{\chi_{k_1}, \dots, \chi_{k_n}\}$. Como consecuencia, un conjunto de generadores de $\mathcal{R}_c(U(1))$ es $\{\chi_k : k \in \mathbb{Z}\}$. De hecho, se trata de una base, ya que

$$\int_{U(1)} \chi_k \chi_l = \int_{U(1)} z^k z^l = \int_0^{2\pi} e^{i(k+l)t} dt = 0,$$

si $k + l \neq 0$. De hecho, si dotamos a $\mathcal{R}_c(U(1))$ del producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{U(1)} f \bar{g},$$

lo que hemos comprobado antes es que $\{\chi_k : k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal del espacio pre-hilbertiano $\mathcal{R}_c(U(1))$ resultante. Se tiene la descomposición como suma directa ortogonal

$$\mathcal{R}_c(U(1)) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}\chi_k.$$

Para cada $f \in \mathcal{R}_c(U(1))$, tenemos que

$$(1.13) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \chi_k, \quad o \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k z^k, \quad (z \in U(1)),$$

donde

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{U(1)} f \overline{\chi_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{U(1)} f(z) z^{-k}.$$

Subrayemos que, en (1.17), las sumas que aparecen son finitas, aunque el número de sumandos no nulos no está limitado a priori y depende de la función representativa f .

EJERCICIO 13. Demostrar que si $U \subseteq \mathcal{R}(G)$ es un subespacio invariante de dimensión finita para alguna de las representaciones regulares R o R' de un grupo G , entonces $U \subseteq C(U)$.

1.3.0.1. Funciones representativas continuas sobre un grupo compacto. Supongamos ahora que G es un grupo de Lie compacto que dotamos de una integral invariante por traslaciones $\int_G$. Consideremos dos representaciones continuas (Π, V) y (Σ, W) de G . Según el Teorema 1.39, podemos dotar a V y W de sendos productos internos con respecto de los cuales las representaciones son unitarias. Además, tomando bases ortonormales de V y W , es posible entender que las representaciones son, de hecho, matriciales.

Bien, pongamos que las dimensiones de V y W son, respectivamente, n y m . Consideremos la matriz E_{ij} de tamaño $n \times m$ todas cuyas componentes son nulas salvo la (i, j) -ésima, que vale 1. Construimos la matriz A_{ij}

$$(1.14) \quad A_{ij} = \int_G \Sigma(x) E_{ij} \Pi(x^{-1}).$$

Comprobemos que el operador definido por A_{ij} es entrelazante: dado $g \in G$,

$$\begin{aligned} \Sigma(g) A_{ij} &= \Sigma(g) \int_G \Sigma(x) E_{ij} \Pi(x^{-1}) = \int_G \Sigma(g) \Sigma(x) E_{ij} \Pi(x^{-1}) \\ &= \int_G \Sigma(gx) E_{ij} \Pi(x^{-1}) = \int_G \Sigma(y) E_{ij} \Pi(y^{-1}g) = A_{ij} \Pi(g), \end{aligned}$$

donde, en la cuarta igualdad, hemos realizado el cambio $y = gx$ y usado que la integral $\int_G$ es invariante por traslaciones.

Supongamos ahora que las funciones matriciales de las representaciones con respecto de las bases ortonormales fijadas son, respectivamente, t_{kl}, z_{sp} , con $k, l = 1, \dots, n$, $s, p = 1, \dots, m$. La componente (k, p) -ésima de A_{ij} adopta la forma

$$(1.15) \quad (A_{ij})_{kp} = \int_G t_{ki}(x) z_{jp}(x^{-1}) = \int_G t_{ki}(x) \overline{z_{pj}(x)},$$

igualdad en la que hemos usado que los operadores $\Pi(x)$ son unitarios. Se tiene también

$$(1.16) \quad (A_{ij})_{kp} = \int_G t_{ki}(x) \overline{z_{pj}(x)} = \int_G t_{ki}(x^{-1}) \overline{z_{pj}(x^{-1})} = \int_G \overline{t_{ik}(x)} z_{jp}(x).$$

Vamos a considerar sobre el espacio vectorial $\mathcal{R}_c(G)$ de las funciones representativas continuas de G , el producto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_G \varphi(x) \overline{\psi(x)},$$

que tomamos normalizado en el sentido de que $\int_G 1 = 1$.

TEOREMA 1.47. *Consideremos dos representaciones continuas irreducibles (Π, V) y (Σ, W) de un grupo de Lie compacto G .*

1. *Si Π y Σ no son equivalentes, entonces $C(\Pi)$ y $C(\Sigma)$ son subespacios de $\mathcal{R}_c(G)$ ortogonales entre sí.*
2. *Si tomamos funciones matriciales $\{t_{ik}^\Pi\}$ asociadas a Π con respecto de una base ortonormal, entonces las mismas forman una base ortogonal de $C(\Pi)$.*
3. *Si la dimensión de V es d_Π , para cada $i, k = 1, \dots, n$,*

$$\int_G |t_{ik}(x)|^2 = 1/d_\Pi.$$

DEMOSTRACIÓN. 1. Como conjuntos de generadores de $C(\Pi)$ y $C(\Sigma)$ podemos tomar funciones matriciales $\{t_{kl}\}$ y $\{z_{sp}\}$, respectivamente, satisfaciendo (1.15). Como cada operador A_{ij} es entrelazante, el Lema de Schur muestra que ha de ser nulo. Así que, de acuerdo con (1.15), cada t_{ki} es ortogonal a cada z_{pj} .

2. Ahora, el Lema de Schur dice que el operador A_{ij} es escalar. Por tanto, $(A_{ij})_{pk} = 0$ siempre que $p \neq k$. Así, deducimos de (1.15) que

$$0 = \int_G t_{ki}(x) \overline{t_{pj}(x)},$$

si $p \neq k$. Si ahora $i \neq j$, tengo, por (1.16), que $(A_{pk})_{ij} = 0$, así que

$$0 = \int_G t_{jp}(x) \overline{t_{ik}(x)}.$$

3. Sea d_Π la dimensión de V . Para cada $i = 1, \dots, n$, el operador A_{ii} es, de acuerdo con el Lema de Schur, escalar, digamos λ_i . Así, de (1.15), deducimos que $\lambda_i = \int_G |t_{ki}(x)|^2$ para cada $k = 1, \dots, n$. Por otra parte, tomando trazas en (1.14) para $i = j$ y $\Sigma = \Pi$, obtenemos que $d_\Pi \lambda_i = \int_G 1 = 1$, ya que tomamos la integral en G normalizada.

□

TEOREMA 1.48. *Sea G un grupo de Lie compacto.*

1. *Si tomamos un conjunto $\text{Irr}(G)$ de representantes de los tipos de equivalencia de las representaciones continuas irreducibles de G , entonces*

$$\mathcal{R}_c(G) = \bigoplus_{\Pi \in \text{Irr}(G)} C(\Pi).$$

2. *Para cada $i = 1, \dots, d_\Pi$, el subespacio S_i^Π generado por las funciones t_{ik}^Π para $k = 1, \dots, d_\Pi$ es R' -invariante e irreducible. Además, la representación obtenida por restricción de R' es equivalente a Π . Claramente, $C(\Pi) = \bigoplus_{i=1}^{d_\Pi} S_i^\Pi$.*
3. *Para cada $i = 1, \dots, d_\Pi$, el subespacio C_i^Π generado por las funciones t_{ki}^Π para $k = 1, \dots, d_\Pi$ es R -invariante e irreducible. Además, la representación obtenida por restricción de R es equivalente a Π . Claramente, $C(\Pi) = \bigoplus_{i=1}^{d_\Pi} C_i^\Pi$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Si $\varphi \in \mathcal{R}_c(G)$, entonces $\varphi \in C(\Lambda)$ para alguna representación continua finito-dimensional (Λ, U) . Según el Teorema 1.39, U se descompone como

Representaciones de Grupos de Lie

J. Gómez-Torrecillas

suma directa se subespacios irreducibles, digamos $U_1, \dots, U_m$. Las representaciones correspondientes serán equivalentes a algunas de las que aparecen en $\text{Irr}(G)$, digamos $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ con $n \leq m$ (pensemos que algunos de los U_i pueden dar representaciones equivalentes). Finalmente, $\varphi \in C(\Lambda) = C(\Pi_1) \oplus \dots \oplus C(\Pi_n)$.

2. Dado $g \in G$, tenemos que

$$R'(g)t_{ik}^\Pi(x) = t_{ik}^\Pi(xg) = \sum_j t_{ij}^\Pi(x)t_{jk}^\Pi(g),$$

esto es, $R'(g)t_{ik}^\Pi = \sum_j t_{jk}^\Pi(g)t_{ij}^\Pi$. Por tanto, $\mathcal{S}_i^\Pi$ es R' -invariante. Esta igualdad también muestra que la matriz de la restricción de R' a $\mathcal{S}_i^\Pi$ con respecto de la base $\{t_{ik}^\Pi : k = 1, \dots, d_\Pi\}$ es $(t_{jk}^\Pi(g))$, que coincide con la de Π con respecto de la base ortonormal originalmente fijada en V . Así, ambas representaciones son equivalentes.

3. Para $g, x \in G$, tenemos que

$$R(g)t_{ki}^\Pi(x) = t_{ki}(g^{-1}x) = \sum_j t_{kj}(g^{-1})t_{ji}(x),$$

esto es,

$$R(g)t_{ki}^\Pi = \sum_j t_{kj}(g^{-1})t_{ji}.$$

Igualdad que demuestra no sólo que $C(\Pi)$ es R -invariante, sino que cada $\mathcal{C}_i^\Pi$ lo es.

Por otra parte, tenemos la equivalencia $S : \mathcal{M}(G) \rightarrow \mathcal{M}(G)$ dada por $f(x) \mapsto f(x^{-1})$. Así, llevará la representación irreducible dada por restricción de R' a $\mathcal{S}_i^\Pi$ a una representación irreducible equivalente dada por restricción de R a $\mathcal{S}_i^\Pi$. Ambas son equivalentes a Π . Por tanto, la restricción de R a $C(\Pi)$ es equivalente a una suma directa de representaciones equivalentes a Π . Pero $\mathcal{C}_i^\Pi$ es un subespacio R -invariante de $C(\Pi)$ cuya dimensión es d_Π , así que ha de ser equivalente a uno de esos sumandos directos irreducibles, luego es equivalente a Π . $\square$

OBSERVACIÓN 1.49. Observemos que $S(\mathcal{S}_i^\Pi) \subseteq C(S(\mathcal{S}_i^\Pi)) = C(\Pi)$ para cada $i = 1, \dots, d_\Pi$. De esta forma, $\bar{t}_{ji} = S(t_{ij}) \in C(\Pi)$ para todo $i, j = 1, \dots, d_\Pi$.

COROLARIO 1.50 (Desarrollo de Fourier). *Para cada $\Pi \in \text{Irr}(G)$, tomemos d_Π la dimensión del espacio de representación V_Π de Π , y $\{t_{ik}^\Pi : 1 \leq i, k \leq d_\Pi\}$ las funciones matriciales asociadas a Π con respecto de una base ortonormal de V_Π . Cada $f \in \mathcal{R}_c(G)$ se expresa de manera única como una suma con una cantidad finita de sumandos no nulos*

$$(1.17) \quad f = \sum_{\Pi \in \text{Irr}(G)} \sum_{i,k=1}^{d_\Pi} f_{ik}^\Pi t_{ik}^\Pi,$$

donde

$$(1.18) \quad f_{ik}^\Pi = d_\Pi \int_G f(x) \overline{t_{ik}^\Pi(x)}.$$

Además, se verifica la identidad de Parseval

$$(1.19) \quad \int_G |f(x)|^2 = \sum_{\Pi \in \text{Irr}(G)} \frac{1}{d_\Pi} \sum_{i,k=1}^{d_\Pi} |f_{ik}^\Pi|^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Como consecuencia de la Proposición 1.47, una base ortonormal de $\mathcal{R}_c(G)$ viene dada por los vectores $\sqrt{d_\Pi} t_{ik}^\Pi$. $\square$

El Teorema de Peter-Weyl se obtiene por “paso al límite” del armazón algebraico dado por (1.50). Técnicamente, el límite, valga la expresión, de dicho corolario no es trivial, y se toma en el espacio de Hilbert $L^2(G)$. Desde un punto de vista práctico, este teorema da soporte al Análisis Armónico sobre grupos compactos y sus espacios

homogéneos, dando lugar a desarrollos de tipo Fourier en funciones más generales que las clásicas trigonométricas. Ejemplos detallados se pueden encontrar en [6].

TEOREMA 1.51 (Peter-Weyl). *Las funciones representativas continuas $\mathcal{R}_c(G)$ sobre un grupo de Lie compacto G forman un subconjunto denso del espacio de Hilbert $L^2(G)$. Como consecuencia, la validez de las fórmulas (1.17) y (1.19) se extiende para cualquier $f \in L^2(G)$, siempre que las sumas involucradas se entiendan como series convergentes, con respecto de la norma en $L^2(G)$ dada por el producto interno definido por $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_G \varphi \bar{\psi}$ en el caso de (1.17).*

DEMOSTRACIÓN. Este teorema está demostrado en bastantes textos, por ejemplo en [5] o [6]. $\square$

1.3.1. Funciones representativas sobre $SU(2)$. Vamos a describir los espacios de coeficientes $C(\Sigma_n)$ proporcionados por las representaciones (Σ_n, P_n) definidas en (1.9). Puesto que $SU(2)$ es compacto, sabemos que existe un producto interno $\langle -, - \rangle$ en P_n para el cual Σ_n es una representación unitaria. Vamos a obtener una base ortogonal para dicho producto, que después calibraremos para obtener una base ortonormal.

Dada $t \in \mathbb{R}$, consideremos la matriz

$$(1.20) \quad A_t = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix}.$$

Para $k = 0, 1, \dots, n$, se sigue de (1.9) que

$$(1.21) \quad \Sigma_n(A_t)(z^k) = e^{it(2k-n)} z^k.$$

Como $\Sigma_n(A_t)$ es un operador unitario, tenemos, para $k, k' = 0, 1, \dots, n$,

$$\langle e^{it(2k-n)} z^k, e^{it(2k'-n)} z^{k'} \rangle = \langle z^k, z^{k'} \rangle.$$

De ahí,

$$e^{it(2k-2k')} \langle z^k, z^{k'} \rangle = \langle z^k, z^{k'} \rangle,$$

lo que implica que $\langle z^k, z^{k'} \rangle = 0$ para $k \neq k'$. De modo que $\{1, z, \dots, z^n\}$ es una base ortogonal de P_n .

Para ortonormalizarla, vamos a obtener una relación entre las normas de las funciones z^k . Para ello, tomamos

$$(1.22) \quad B_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$(1.23) \quad \Sigma_n(B_t)(z^k) = (z \sin t + \cos t)^{n-k} (z \cos t - \sin t)^k.$$

Derivando con respecto de t , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma_n(B_t)(z^k) &= (n-k)(z \sin t + \cos t)^{n-k-1} (z \cos t - \sin t)^{k+1} \\ &\quad - k(z \sin t + \cos t)^{n-k+1} (z \cos t - \sin t)^{k-1}. \end{aligned}$$

Deducimos, pues, que

$$(1.24) \quad \frac{d}{dt} \Sigma_n(B_t)(z^k)|_{t=0} = (n-k)z^{k+1} - kz^{k-1}.$$

Puesto que $\Sigma_n(B_t)$ es un operador unitario, tenemos que

$$0 = \langle z^k, z^{k+1} \rangle = \langle \Sigma_n(B_t)(z^k), \Sigma_n(B_t)(z^{k+1}) \rangle.$$

Derivando y evaluando en $t = 0$, obtenemos, en vista de (1.23) y (1.24),

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (n-k)z^{k+1} - kz^{k-1}, z^{k+1} \rangle + \langle z^k, (n-k-1)z^{k+2} - (k+1)z^k \rangle \\ &= (n-k)\langle z^{k+1}, z^{k+1} \rangle - (k+1)\langle z^k, z^k \rangle. \end{aligned}$$

EJERCICIO 14. Demostrar que cada matriz

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

en $SU(2)$ con $\alpha\beta \neq 0$ se puede expresar como

$$q = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}} & \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{pmatrix}$$

para

$$0 \leq \varphi < 2\pi, -2\pi \leq \psi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi$$

Deducimos del ejercicio anterior que

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix},$$

o, en la notación introducida en (1.20) y (1.22), cada $q \in SU(2)$, con $\alpha\beta \neq 0$, se escribe

$$q = A_{\varphi/2} B_{\theta/2} A_{\psi/2}, \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, -2\pi \leq \psi < 2\pi, 0 \leq \theta < \pi).$$

Por tanto,

$$\Sigma_n(q) = \Sigma_n(A_{\varphi/2}) \Sigma_n(B_{\theta/2}) \Sigma_n(A_{\psi/2}).$$

De acuerdo con (1.21), los operadores $\Sigma_n(A_{\varphi/2})$ y $\Sigma_n(A_{\psi/2})$ son diagonales con respecto de la base $\{z^k : k = 0, \dots, n\}$. De modo que las funciones matriciales responden a la fórmula

$$t_{kj}^n(q) = t_{kk}^n(A_{\varphi/2}) t_{kj}^n(B_{\theta/2}) t_{jj}^n(A_{\psi/2}), \quad (0 \leq k, j \leq n).$$

De acuerdo con (1.23), $t_{kj}^n(B_{\theta/2})$ puede expresarse como una función de $\cos \theta$, digamos $p_{kj}^n(\cos \theta)$. Así,

$$t_{kj}^n(q) = e^{i((k-n/2)\varphi + (j-n/2)\psi)} p_{kj}^n(\cos \theta).$$

Es tradición usar $l = n/2$ y, usando índices enteros o semienteros, escribir

$$t_{kj}^l(q) = e^{i(k\varphi + j\psi)} p_{kj}^l(\cos \theta), \quad (j, k = -l, \dots, l).$$

1.4. Funciones representativas sobre espacios homogéneos.

Vamos a hacer algunos comentarios sobre las funciones representativas sobre un espacio homogéneo X para un grupo de Lie compacto G . Supondremos que G actúa continuamente sobre X , esto es, la acción $G \times X \rightarrow X$ es una aplicación continua.

Tomemos $x_0 \in X$ y definamos la aplicación

$$p : G \rightarrow X, \quad (p(g) = g^{-1} \cdot x_0, \quad g \in G).$$

Esto da lugar a una aplicación

$$p^* : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(G), \quad (p^*(f) = f \circ p, \quad f \in \mathcal{M}(X)).$$

Una función $f \in \mathcal{M}(X)$ se dice representativa si $\mathbb{C}G \cdot f$ tiene dimensión finita. Recordemos que, en $\mathcal{M}(X)$, tenemos definida la representación por traslación dada por $g \cdot f(x) = f(g^{-1} \cdot x)$ para $g \in G$, $f \in \mathcal{M}(X)$, $x \in X$. El conjunto de todas las funciones representativas continuas se denota por $\mathcal{R}_c(X)$. Claramente, se trata de un subespacio vectorial invariante de $\mathcal{M}(X)$.

PROPOSICIÓN 1.52. *Si consideramos en $\mathcal{M}(X)$ la representación por traslación y en $\mathcal{M}(G)$ la representación regular R' , entonces p^* es una aplicación entrelazante. Además, $p^*(\mathcal{R}_c(X)) \subseteq \mathcal{R}_c(G)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para $f \in \mathcal{M}(X)$ y $g, h \in G$, tenemos

$$\begin{aligned} g \cdot p^*(f)(h) &= p^*(f)(hg) = f((hg)^{-1} \cdot x_0) = f(g^{-1} \cdot (h^{-1} \cdot x_0)) \\ &= g \cdot f(h^{-1} \cdot x_0) = p^*(g \cdot f)(h). \end{aligned}$$

Esto prueba que p^* es entrelazante. Si $f \in \mathcal{M}(X)$, tenemos que $p^*(\mathbb{C}G \cdot f) = \mathbb{C}G \cdot p^*(f)$. Como consecuencia, $p^*(f)$ es representativa siempre que f lo sea. $\square$

PROPOSICIÓN 1.53. *Dado un subespacio R' -invariante W de $\mathcal{R}_c(G)$, se tiene que*

$$W = \bigoplus_{\Pi \in Irr(G)} W \cap C(\Pi).$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $\varphi \in W$, tenemos que $\mathbb{C}G \cdot \varphi = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ para subespacios irreducibles adecuados. Observemos que, puesto que W es R' -invariante, $V_i \subseteq W$ para todo $i = 1, \dots, n$. La representación proporcionada por V_i es equivalente a alguna $\Pi_i \in Irr(G)$. Así, en virtud del Ejercicio 13,

$$V_i \subseteq C(V_i) = C(\Pi_i).$$

De donde $V_i \subseteq C(\Pi_i) \cap W$ para cada sumando directo V_i . Esto demuestra la proposición. $\square$

Volvamos a nuestro G -espacio homogéneo X . Dada $\Pi \in Irr(G)$, definimos

$$C_X(\Pi) = \{f \in \mathcal{R}_c(X) : p^*(f) \in C(\Pi)\}.$$

Se trata de un subespacio invariante de $\mathcal{R}_c(X)$. En efecto, si $f \in C_X(\Pi)$ y $g \in G$, entonces

$$p^*(g \cdot f) = g \cdot p^*(f) \in C(\Pi),$$

ya que p^* es entrelazante y $C(\Pi)$ es invariante.

Tomamos $Irr(X) = \{\Pi \in Irr(G) : C_X(\Pi) \neq \{0\}\}$.

TEOREMA 1.54. *Si X es un espacio homogéneo para un grupo de Lie compacto y la acción es continua, entonces*

$$(1.25) \quad \mathcal{R}_c(X) = \bigoplus_{\Pi \in Irr(X)} C_X(\Pi).$$

DEMOSTRACIÓN. De acuerdo con la Proposición 1.53,

$$(1.26) \quad p^*(\mathcal{R}_c(X)) = \bigoplus_{\Pi \in Irr(G)} p^*(\mathcal{R}_c(X)) \cap C(\Pi).$$

Observemos primero que, dada $\Pi \in Irr(G)$,

$$p^*(C_X(\Pi)) = p^*(\mathcal{R}_c(X)) \cap C(\Pi).$$

Como p^* es una aplicación inyectiva, obtenemos que $C_X(\Pi) \neq \{0\}$ si, y sólo si, $p^*(\mathcal{R}_c(X)) \cap C(\Pi) \neq 0$. Por tanto, en la descomposición como suma directa (1.26) podemos tomar sólo los sumandos con $\Pi \in Irr(X)$. Con esto, se deduce fácilmente (1.25). $\square$

OBSERVACIÓN 1.55. La descomposición (1.25) no es ortogonal, puesto que no hemos supuesto ningún producto interno en $\mathcal{R}_c(X)$. Para tener tal propiedad, podría buscarse un producto interno para el cual p^* fuese una isometría. Eso podría conseguirse mediante una integral en X “compatible” con la de G .

Para el G -espacio homogéneo X y $x_0 \in X$, tomamos el subgrupo estabilizador

$$H = \{h \in G : h \cdot x_0 = x_0\}.$$

PROPOSICIÓN 1.56. *Dada $(\Pi, V) \in \text{Irr}(X)$, se tiene un isomorfismo entre el espacio vectorial $\text{hom}_G(\Pi, C_X(\Pi))$ de las aplicaciones entrelazantes $T : V \rightarrow C_X(\Pi)$ y el espacio vectorial $\text{Lin}(V, \mathbb{C})^H$ de las formas lineales $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\varepsilon(hv) = \varepsilon(v)$ para todo $h \in H, v \in V$. Dicho isomorfismo viene dado por la asignación*

$$\varepsilon_T(v) = T(v)(x_0),$$

con inversa

$$T_\varepsilon(v)(g \cdot x_0) = \varepsilon(g^{-1}v).$$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que comprobar varios hechos. Por ejemplo, que $T_\varepsilon(v)$ está bien definido: para $g, k \in G$ tales que $g \cdot x_0 = k \cdot x_0$, tenemos que

$$\varepsilon(k^{-1}v) = \varepsilon(g^{-1}kk^{-1}v) = \varepsilon(g^{-1}v),$$

ya que $g^{-1}k \in H$.

También hemos de comprobar que T_ε es entrelazante y que su imagen cae dentro de $C_X(\Pi)$. En efecto, dados $g, k \in G, v \in V$,

$$T_\varepsilon(gv)(k \cdot x_0) = \varepsilon(k^{-1}gv) = \varepsilon((g^{-1}k)^{-1}v) = T_\varepsilon(v)(g^{-1}kx_0) = gT_\varepsilon(v)(kx_0).$$

De modo que T_ε es entrelazante. De no ser nula, como (Π, V) es irreducible, Π es equivalente con la imagen de T_ε , luego ésta está incluida en $C_X(\Pi)$.

Por otro lado, para $h \in H, v \in V$, tenemos

$$\varepsilon_T(hv) = T(hv)(x_0) = hT(v)(x_0) = T(v)(h^{-1} \cdot x_0) = T(v)(x_0) = \varepsilon_T(v).$$

Finalmente, se comprueba que

$$T_{\varepsilon_T} = T, \quad \varepsilon_{T_\varepsilon} = \varepsilon.$$

□

Para un G -espacio homogéneo sobre un grupo compacto G , y H el subgrupo estabilizador de un elemento $x_0 \in X$, consideremos la representación regular R sobre $\mathcal{R}_c(G)$. Entonces

$$(1.27) \quad p^*(\mathcal{R}_c(X)) = {}_H\mathcal{R}_c(G) = \{\varphi \in \mathcal{R}_c(G) : R(h)(\varphi) = \varphi, \forall h \in H\}.$$

En efecto, si $\varphi = f \circ p, h \in H$ y $g \in G$, entonces

$$\begin{aligned} R(h)(\varphi)(g) &= \varphi(h^{-1}g) = f((h^{-1}g)^{-1} \cdot x_0) \\ &= f(g^{-1} \cdot h \cdot x_0) = f(g^{-1} \cdot x_0) = f(p(g)) = \varphi(g). \end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\varphi \in \mathcal{R}_c(G)$ es tal que $R(h)\varphi = \varphi$ para todo $h \in H, g \in G$, entonces defino $f(g \cdot x_0) = \varphi(g^{-1})$. El siguiente cálculo muestra que f está bien definida: para $g_1, g_2 \in G$ tales que $g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0$,

$$\varphi(g_1^{-1}) = \varphi(g_1^{-1}g_2g_2^{-1}) = R(g_2^{-1}g_1)\varphi(g_2^{-1}) = \varphi(g_2^{-1}).$$

Es claro que $p^*(f) = \varphi$. Que f es una función representativa sobre X es consecuencia de que $p^*(\mathbb{C}G \cdot f) = \mathbb{C}G \cdot p^*(f) = \mathbb{C}G \cdot \varphi$, que es finito-dimensional, y de que p^* es inyectiva. Con esto, queda comprobada (1.27).

TEOREMA 1.57. *Sea X un espacio homogéneo sobre un grupo compacto G . Definamos, para (Π, V) , $m_\Pi = \dim_{\mathbb{C}} {}_H V$. Entonces*

$$(1.28) \quad \dim_{\mathbb{C}} {}_H C(\Pi) = m_\Pi d_\Pi.$$

Por tanto, $\Pi \in \text{Irr}(X)$ si, y sólo si, $m_\Pi \neq 0$. Tenemos, además, que

$$(1.29) \quad p^*(\mathcal{R}_c(X)) = \bigoplus_{\Pi \in \text{Irr}(X)} {}_H C(\Pi).$$

1.4. FUNCIONES REPRESENTATIVAS SOBRE ESPACIOS HOMOGÉNEOS 30

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 1.48, $C(\Pi) = \bigoplus_{i=1}^{d_\Pi} \mathcal{C}_i^\Pi$, para $\mathcal{C}_i^\Pi$ subespacios irreducibles para la representación regular R , que son equivalentes a Π . Observemos que cada proyección canónica $p_i : C(\Pi) \rightarrow \mathcal{C}_i^\Pi$ es una aplicación entrelazante para R . Bien, dada $\varphi \in C(\Pi)$, escribamos su descomposición única $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_{d_\Pi}$ con $\varphi_i \in \mathcal{C}_i^\Pi$. Si $R(h)\varphi = \varphi$ para todo $h \in H$, entonces

$$R(h)\varphi_i = R(h)p_i(\varphi) = p_i(R(h)\varphi) = p_i(\varphi) = \varphi_i,$$

para cada $i = 1, \dots, d_\Pi$. Esto demuestra que ${}_H C(\Pi) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{d_\Pi} {}_H \mathcal{C}_i^\Pi$. Como la inclusión recíproca es clara, obtenemos que

$$(1.30) \quad {}_H C(\Pi) = \bigoplus_{i=1}^{d_\Pi} {}_H \mathcal{C}_i^\Pi.$$

Ahora, como cada $\mathcal{C}_i^\Pi$ es equivalente a Π , tenemos que $\dim_{\mathbb{C}} {}_H \mathcal{C}_i^\Pi = \dim_{\mathbb{C}} {}_H V = m_\Pi$ para cada i . Deducimos de (1.30), pues, que $\dim_{\mathbb{C}} {}_H C(\Pi) = m_\Pi d_\Pi$.

Se sigue de (1.27) que $p^*(\mathcal{R}_c(G)) \cap C(\Pi) = {}_H C(\Pi)$. De donde $\Pi \in \text{Irr}(X)$ si, y sólo si, $m_\Pi \neq 0$, en virtud de (1.28). Finalmente, la igualdad (1.29) viene del Teorema 1.54. $\square$

Capítulo 2

El álgebra de Lie de un grupo de Lie y sus representaciones

2.1. El álgebra de Lie de un grupo de Lie

Uno de los fundamentos de estudio de los grupos de Lie y sus representaciones es extraer información de su álgebra de Lie. Definamos primero qué son estos objetos algebraicos.

DEFINICIÓN 2.1. Un álgebra de Lie sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial L dotado de una aplicación bilineal antisimétrica $[-, -] : L \times L \rightarrow L$ que satisface la identidad de Jacobi:

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0 \quad (\text{para todo } x, y, z \in L).$$

La aplicación $[-, -]$ se suele llamar corchete de Lie.

EJEMPLO 2.2. Si V es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial, entonces $\text{Lin}(V, V)$ es un álgebra de Lie, con corchete de Lie dado por el conmutador, esto es,

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f \quad (f, g \in \text{Lin}(V, V)).$$

EJEMPLO 2.3. El espacio vectorial $M_n(\mathbb{K})$ es una $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie con el corchete dado por el conmutador, esto es,

$$[A, B] = AB - BA, \quad (A, B \in M_n(\mathbb{K})).$$

Para grupos de Lie matriciales, la construcción de su álgebra de Lie es más sencilla que en el caso de un grupo de Lie general.

DEFINICIÓN 2.4. Sea $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ un grupo de Lie matricial. Definimos su álgebra de Lie como

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : e^{tX} \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}$$

EJEMPLO 2.5. Vamos a calcular el álgebra de Lie del grupo $U_{\mathbf{J}}(n)$ introducido en el Ejemplo 1.25. Queremos, para $X \in M_n(\mathbb{C})$, estudiar la condición $e^{tX} \in U_{\mathbf{J}}(n)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Esta condición implica, derivando con respecto de t y evaluando en $t = 0$, que $X\mathbf{J} + \mathbf{J}X^\dagger = 0$. Recíprocamente, si $X\mathbf{J} = -\mathbf{J}X^\dagger$, entonces

$$\mathbf{J}^{-1}e^{tX}\mathbf{J} = e^{\mathbf{J}^{-1}tX\mathbf{J}} = e^{-tX^\dagger}.$$

De donde $e^{tX}\mathbf{J}e^{tX^\dagger} = \mathbf{J}$, equivalentemente, $e^{tX}\mathbf{J}(e^{tX})^\dagger = \mathbf{J}$. De modo que

$$\mathfrak{u}_{\mathbf{J}}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X\mathbf{J} = -\mathbf{J}X^\dagger\}.$$

DEFINICIÓN 2.6. Los homomorfismos del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en G se llaman subgrupos uniparamétricos de G . Así, se trata de aplicaciones continuas $A : \mathbb{R} \rightarrow G$ tal que $A(t+s) = A(t)A(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 2.7. Si A es un subgrupo uniparamétrico de $GL_n(\mathbb{C})$, entonces existe $X \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A(t) = e^{tX}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Deducimos que $A(t)$ es diferenciable y $A'(0) = X$.

DEMOSTRACIÓN. Fijamos entornos abiertos U de 0 en $M_n(\mathbb{C})$ y V de I en $GL_n(\mathbb{C})$ tales que las aplicaciones $\log : U \rightarrow V$ y $\exp : V \rightarrow U$ son mutuamente inversas. Tomemos un entorno abierto $U' \subseteq U$ de 0 tal que $2X \in U$ para todo $X \in U'$, y pongamos $V' = \exp(U')$. Puesto que A es continua, existe $t_0 > 0$ tal que $A(t) \in V'$ para todo $|t| \leq t_0$. Para cada tal t , puesto que $A(t/2) \in V'$, tenemos que

$$A(t) = A(t/2)^2 = (e^{\log A(t/2)})^2 = e^{2\log A(t/2)}.$$

Como $\log A(t), 2\log A(t/2) \in U$, deducimos que $\log A(t) = 2\log A(t/2)$, para todo $|t| \leq t_0$. Una sencilla inducción muestra que

$$\log A(t) = 2^k \log A(t/2^k),$$

para todo $|t| \leq t_0$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Deducimos en particular, para $t = t_0$, que

$$\log A(t_0/2^k) = \frac{1}{2^k} \log(A_0).$$

De aquí que, puesto que $A(t_0/2^k) \in V'$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se tenga

$$A(t_0/2^k) = e^{\frac{1}{2^k} \log A(t_0)}.$$

De aquí, cualquiera sea $m \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$A(mt_0/2^k) = e^{\frac{m}{2^k} \log A(t_0)}.$$

Finalmente, el conjunto de los números de la forma $mt_0/2^k$ es denso en $\mathbb{R}$, por lo que la continuidad de las funciones A y exponencial permiten deducir que

$$A(t) = e^{\frac{t}{t_0} \log A(t_0)},$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Tómese $X = A(t_0)/t_0$. □

Tenemos la siguiente consecuencia directa de la anterior proposición.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Se tiene una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los subgrupos uniparamétricos de G y las matrices de $\mathfrak{g}$ que lleva $A(t)$ en $A'(0)$, y cuya inversa asigna a $X \in \mathfrak{g}$ el subgrupo uniparamétrico e^{tX} de G .*

Nos hará falta la fórmula del producto de Lie.

PROPOSICIÓN 2.9. *Para matrices X, Y , se tiene que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(e^{X/k} e^{Y/k} \right)^k = e^{X+Y}$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, para $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$e^{tX} = I + tX + t^2 S(t),$$

donde $S(t)$ es una función matricial continua. Escribiendo así también e^{tY} , obtenemos que

$$e^{tX} e^{tY} = I + tX + tY + t^2 M(t),$$

para $M(t)$ una función matricial continua. Por tanto, $M(t)$ está acotada para $0 \leq t \leq 1$.

Tenemos, por tanto, para cada entero positivo k , que

$$e^{X/k} e^{Y/k} = I + \frac{X+Y}{k} + \frac{M(1/k)}{k^2}.$$

Para k suficientemente grande, podemos tomar logaritmo, y obtenemos

$$\log(e^{X/k} e^{Y/k}) = \frac{X+Y}{k} + \frac{1}{k^2} \sum_{m \geq 2} (-1)^{m+1} \frac{1}{mk^{m-2}} \left(X+Y + \frac{M(1/k)}{k} \right)^m,$$

es decir,

$$\log(e^{X/k} e^{Y/k}) = \frac{X+Y}{k} + \frac{1}{k^2} T(k),$$

donde la norma de las matrices $T(k)$ está acotada para k suficientemente grande. Tomando exponenciales,

$$e^{X/k} e^{Y/k} = e^{\frac{X+Y}{k} + \frac{1}{k^2} T(k)},$$

de donde

$$(e^{X/k} e^{Y/k})^k = e^{X+Y + \frac{1}{k} T(k)}.$$

Tomando límites, y usando que la exponencial es continua, concluimos. □

PROPOSICIÓN 2.10. *Dados subgrupos uniparamétricos $A(t), B(t)$ de un grupo de Lie G , y $g \in G$, tenemos que*

1.

$$(2.1) \quad C(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (A(t/k)B(t/k))^k$$

es un subgrupo uniparamétrico de G tal que $C'(0) = A'(0) + B'(0)$,

2.

$$(2.2) \quad \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} A(s)B'(0)A(-s) = [A'(0), B'(0)],$$

3. *$D(t) = gA(t)g^{-1}$ es un subgrupo uniparamétrico de G tal que $D'(0) = gA'(0)g^{-1}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $A(t) = e^{tA'(0)}, B(t) = e^{tB'(0)}$, por lo que

$$\begin{aligned} e^{t(A'(0)+B'(0))} &= e^{tA'(0)+tB'(0)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (e^{tA'(0)/k} e^{tB'(0)/k})^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (A(t/k)B(t/k))^k = C(t). \end{aligned}$$

Esta igualdad muestra que $C(t)$ es un subgrupo uniparamétrico de $GL_n(\mathbb{C})$ y que $C'(0) = A'(0) + B'(0)$. Ahora, $C(t)$ es límite de una sucesión de elementos de G , luego ha de pertenecer a G . Esto concluye la prueba de la afirmación 1. La afirmación 2 se obtiene fácilmente aplicando la regla de Leibniz. La afirmación 3 es también clara. $\square$

TEOREMA 2.11. *Si $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ es un grupo de Lie matricial, entonces*

$$\mathfrak{g} = \{A'(0) : A(t) \text{ es un subgrupo uniparamétrico de } G\}$$

es una subálgebra de Lie real de $M_n(\mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Si $A(t)$ es un subgrupo uniparamétrico de G , entonces, para cada $s \in \mathbb{R}$, $S(t) = A(st)$ es un subgrupo uniparamétrico de G y $S'(0) = sA'(0)$. Si $B(t)$ es otro subgrupo uniparamétrico de G , entonces, de acuerdo con la Proposición 2.10, existe un subgrupo uniparamétrico $C(t)$ de G tal que $C'(0) = A'(0) + B'(0)$. Concluimos así que $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial real de $M_n(\mathbb{C})$. Ahora, para cada $t \in \mathbb{R}$, de acuerdo con el apartado 3 de la Proposición 2.10, $A(t)B'(0)A(-t) \in \mathfrak{g}$. Por (2.2), $[A'(0), B'(0)] \in \mathfrak{g}$, ya que se obtiene como la derivada en $t = 0$ de una curva dentro del subespacio vectorial real $\mathfrak{g}$ de $M_n(\mathbb{C})$, que es cerrado topológicamente. $\square$

TEOREMA 2.12. *Sea $\Phi : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos de Lie. Existe una única aplicación lineal $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que*

$$(2.3) \quad \Phi(e^X) = e^{\phi(X)}$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Además, ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie que se calcula mediante la fórmula

$$(2.4) \quad \phi(X) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(e^{tX}).$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que si $A : \mathbb{R} \rightarrow G$ es un subgrupo uniparamétrico de G , entonces $\Phi \circ A : \mathbb{R} \rightarrow H$ es un subgrupo uniparamétrico de H . Esto da consistencia a la definición de $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ como

$$\phi(A'(0)) = (\Phi \circ A)'(0).$$

Escribiendo $X = A'(0)$, obtenemos además (2.3) y (2.4), puesto que $A(t) = e^{tX}$ y $\Phi(A(t)) = e^{t\phi(X)}$.

Ahora, usando (2.1),

$$\begin{aligned}\phi(A'(0) + B'(0)) &= (\Phi(\lim_{k \rightarrow \infty} (A(t/k)B(t/k))^k))'(0) \\ &= (\lim_{k \rightarrow \infty} ((\Phi \circ A)(t/k)(\Phi \circ B)(t/k))^k)'(0) \\ &= (\Phi \circ A)'(0) + (\Phi \circ B)'(0) = \phi(A'(0)) + \phi(B'(0)),\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad viene de la continuidad de Φ , en tanto que la tercera se justifica porque es un homomorfismo de grupos.

Puesto que, para $s \in \mathbb{R}$, $S(t) = A(st)$ es un subgrupo uniparamétrico de G , tenemos que

$$\phi(sA'(0)) = \phi(S'(0)) = (\Phi \circ S)'(0) = s(\Phi \circ A)'(0) = s\phi(A'(0)).$$

De manera que ϕ es lineal.

Para argumentar la unicidad de ϕ , supongamos $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ lineal tal que $\Phi(e^X) = e^{\psi(X)}$ para todo $X \in \mathfrak{g}$. Así, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\Phi(e^{tX}) = e^{\psi(tX)} = e^{t\psi(X)}.$$

Derivando y evaluando en $t = 0$ obtenemos que $\phi(X) = \psi(X)$.

Comprobemos por último que ϕ es un homomorfismo de álgebras de Lie, es decir, que conserva conmutadores.

$$\begin{aligned}[\phi(A'(0)), \phi(B'(0))] &= [(\Phi \circ A)'(0), (\Phi \circ B)'(0)] \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\Phi \circ A)(s)(\Phi \circ B)'(0)(\Phi \circ A)(-s) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\Phi \circ A)(s)(\Phi \circ B)(t)(\Phi \circ A)(-s) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi(A(s)B(t)A(-s)) \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \phi(A(s)B'(0)A(-s)) \\ &= \phi\left(\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} A(s)B'(0)A(-s)\right) = \phi([A'(0), B'(0)]),\end{aligned}$$

donde en la segunda y séptima igualdades hemos usado (2) y para la sexta, que ϕ es lineal y, por tanto, continua. $\square$

2.1.1. Representaciones de un grupo de Lie a la luz de las de su álgebra de Lie. Una representación de una $\mathbb{K}$ -álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ con espacio de representación V es un homomorfismo de $\mathbb{K}$ -álgebras se Lie

$$\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V).$$

Aquí, estamos denotando por $\mathfrak{gl}(V)$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial V en sí mismo con el corchete de Lie dado por el conmutador con respecto de la composición de operadores. El espacio V se llama *espacio de representación* de π y usaremos la notación (π, V) para referirnos a la representación.

Notemos que, en el caso de ser $\mathfrak{g}$ real, es posible tomar V complejo, con lo que lo será $\mathfrak{gl}(V)$. En ese caso, π es $\mathbb{R}$ -lineal y hablaremos de una representación compleja del álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$.

Observemos que, como toda álgebra de Lie compleja se puede ver como real, es lícito hablar de representaciones complejas de un álgebra de Lie real. Para ello, basta con tomar como espacio de representación un espacio complejo V , pero considerar $\mathfrak{gl}(V)$ como álgebra de Lie real. No obstante, las nociones que vamos a usar

de subespacio invariante, representación irreducible, y aplicación entrelazante no son las propias de representaciones reales. Explícitamente, tenemos las siguientes definiciones.

DEFINICIÓN 2.13. Sea (π, V) una representación compleja de un álgebra de Lie real o compleja $\mathfrak{g}$. Diremos que un subespacio vectorial complejo W de V es π -invariante si $\pi(w) \in W$ para todo $w \in W$. Diremos que (π, V) es irreducible si $V \neq 0$ y los únicos subespacios vectoriales complejos π -invariantes de V son $\{0\}$ y V .

DEFINICIÓN 2.14. Sean $(\pi, V), (\sigma, U)$ representaciones complejas de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ real o compleja. Diremos que una aplicación lineal compleja $T : V \rightarrow U$ es entrelazante si, para todo $X \in \mathfrak{g}$, se tiene $T \circ \pi(X) = \sigma(X) \circ T$. Dicha T se llama equivalencia si es biyectiva.

Vamos a usar las representaciones de las álgebras de Lie como herramientas para el estudio de las representaciones de los grupos de Lie. Esto se hará mediante de la asignación a cada representación (Π, V) de un grupo de Lie G de una representación (π, V) de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ mediante diferenciación. Describimos seguidamente este proceso.

Puesto que una representación (Π, V) de un grupo de Lie G es un homomorfismo de grupos de Lie $\Pi : G \rightarrow GL(V)$, podemos aplicarle la maquinaria anterior y obtenemos así su *representación diferencial* (π, V) , que, a la luz del Teorema 2.12, es la representación del álgebra de Lie asociada determinada por la condición

$$\Pi(e^X)v = e^{\pi(X)}v, \quad (v \in V).$$

PROPOSICIÓN 2.15. Sea (Π, V) una representación compleja de un grupo de Lie G y (π, V) su representación diferencial. Si $W \subseteq V$ es un subespacio Π -invariante, entonces W es π -invariante. Como consecuencia, si (π, V) es irreducible, entonces así lo es (Π, V) .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $w \in W$ y tomemos $X \in \mathfrak{g}$. De acuerdo con (2.4),

$$\pi(X)w = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Pi(e^{tX})w = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pi(e^{hX})w - w}{h} \in W,$$

ya que cada vector bajo el símbolo de límite está en W y, así, también se queda el límite, ya que W es cerrado en V . $\square$

EJEMPLO 2.16. Vamos a demostrar que las representaciones (Σ_n, P_n) de $SL_2(\mathbb{C})$ son irreducibles. Para ello, en virtud de la Proposición 2.15, basta con demostrar que las representaciones diferenciales (σ_n, P_n) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ son irreducibles. Para

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$$

tenemos el subgrupo uniparamétrico de $SL_2(\mathbb{C})$

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\sigma_n(X)z^k = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} e^{tX}z^k = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (tz + 1)^{n-k}z^k = (n-k)z^{k+1},$$

para $k = 0, \dots, n$. Análogamente, para

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se obtiene que

$$\sigma_n(Y)z^k = kz^{k-1}, \quad (k = 0, \dots, n).$$

Tomemos un subespacio complejo σ_n -invariante W no nulo de P_n . Entre los polinomios no nulos en W , tomemos uno de grado mínimo, digamos $f = \sum_{i=0}^l a_i z^i$, para l el grado de f . Si $l > 0$, entonces $\sigma_n(Y)f$ tiene grado $l-1$, lo que es una contradicción. Así que W contiene una constante no nula y, por tanto, $1 \in W$. Por aplicación reiterada del operador $\sigma_n(X)$ obtenemos que todo $z^k \in W$, luego $W = V$. Por tanto, σ_n es irreducible.

Deducimos de la Proposición 2.15 que las representaciones (Σ_n, P_n) con $n \in \mathbb{N}$ son irreducibles.

EJERCICIO 15. Para cada representación (Σ_n, P_n) de $SL_2(\mathbb{C})$ con representación diferencial (σ_n, P_n) calcular

$$\sigma_n(X), \sigma_n(iX), \sigma_n(Y), \sigma_n(iY), \sigma_n(H), \sigma_n(iH)$$

sobre los elementos de la base $\{z^k : k = 0, \dots, n\}$. Deducir que σ_n es una representación del álgebra de Lie compleja $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Nota: sabemos que (σ_n, P_n) es una representación compleja del álgebra de Lie real $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, así que hemos de comprobar que σ_n es $\mathbb{C}$ -lineal.

TEOREMA 2.17. Si (Π, V) es una representación del grupo de Lie conexo G , entonces los subespacios Π -invariantes de V son los mismos que los subespacios π -invariantes. Como consecuencia, (Π, V) es irreducible si, y sólo si, (π, V) es irreducible.

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la Proposición 2.15, hemos de demostrar que si W es un subespacio π -invariante V , entonces es Π -invariante. La clave es que, por ser G conexo, vamos a poder demostrar que cada $A \in G$ puede escribirse en la forma $A = e^{X_0} \dots e^{X_n}$ para $X_0, \dots, X_n \in \mathfrak{g}$ adecuadas. De este modo, basta con demostrar que W queda invariante bajo operadores de la forma $\Pi(e^X)$ para $X \in \mathfrak{g}$. Para ello, dado $w \in W$, tenemos

$$\Pi(e^X)w = e^{\pi(X)}w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi(X)^k}{k!}w \in W,$$

puesto que W es cerrado topológicamente en V .

Razonemos ahora que cada elemento de G se pone como producto de exponenciales. Para ello, nos apoyamos en el hecho, demostrado en [2], de que existen entornos abiertos U de 0 en $\mathfrak{g}$ y V de I en G tales que la aplicación exponencial $\exp : U \rightarrow V$, dada por $\exp(X) = e^X$ es un homeomorfismo, esto es, es continua y biyectiva con inversa continua.

Usando la continuidad de las aplicaciones multiplicación y e inversión en G , tenemos que existe un entorno abierto V' de la identidad I en G tal que si $A, B \in V'$, entonces $AB^{-1} \subseteq V$. Ahora, dada $A \in G$, tomemos una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ tal que $\gamma(0) = I, \gamma(1) = A$. Para cada $t \in [0, 1]$, tengo que $\gamma(t)V'$ es un entorno abierto de $\gamma(t)$. Como γ es continua, existe un entorno abierto de t en $[0, 1]$ tal que $I_t \subseteq \gamma^{-1}(\gamma(t)V')$. Usando la compacidad y la conexión de $[0, 1]$, obtemos $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tales que $[0, 1] = \bigcup_{k=0}^n I_{t_k}$ e $I_{t_k} \cap I_{t_{k+1}} \neq \emptyset$ para $k = 0, \dots, n-1$. De aquí,

$$\emptyset \neq \gamma(I_{t_k} \cap I_{t_{k+1}}) \subseteq \gamma(t_k)V' \cap \gamma(t_{k+1})V'.$$

Así, para cada $k = 0, \dots, n-1$, existen $B_k, B_{k+1} \in V'$ tales que $\gamma(t_k)B_k = \gamma(t_{k+1})B_{k+1}$. Por tanto, $\gamma(t_k)^{-1}\gamma(t_{k+1}) = B_k B_{k+1}^{-1} \in V$. De aquí, podemos tomar $X_k \in U$ tal que $e^{X_k} = \gamma(t_k)^{-1}\gamma(t_{k+1})$. Finalmente,

$$e^{X_0}e^{X_1} \dots e^{X_{n-1}} = \gamma(t_0)^{-1}\gamma(t_1)\gamma(t_1)^{-1}\gamma(t_2) \dots \gamma(t_n) = A.$$

□

2.2. Producto tensor

Vamos a dar una construcción formal del producto tensor tanto de espacios vectoriales como de aplicaciones lineales. En el contexto de este documento, se usará primero para formar la complexificación de un espacio vectorial real, y, más tarde, para definir el producto tensor de dos representaciones.

El producto tensor hace lineales las aplicaciones bilineales, de acuerdo con la Proposición 2.19. Para espacios vectoriales V, W, U sobre $\mathbb{K}$, por $\text{Lin}(V, W)$ denotamos el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de V a W , en tanto que $\text{Bil}(V \times W, U)$ es el espacio vectorial de las aplicaciones bilineales de $V \times W$ en U .

Existen “definiciones elementales” del producto tensor de espacios vectoriales y de aplicaciones lineales que hacen uso de bases. En estas aproximaciones, se suele obviar que la “definición” dada depende de la base escogida. Para exponer una construcción independiente de bases, necesitaremos la noción de espacio vectorial cociente, que pasamos a recordar.

Dado un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial V , cada subespacio vectorial W de V determina una relación de equivalencia $\sim_W$ en V declarando que

$$v \sim_W v' \Leftrightarrow v - v' \in W.$$

Las clases de equivalencia bajo esta relación de equivalencia forman un conjunto cociente que denotaremos por V/W . Es fácil ver que los elementos de V/W son de la forma

$$v + W = \{v + w : w \in W\},$$

donde $v \in V$. Obviamente, ocurre que $v + W = v' + W$ para distintos $v, v' \in V$. De hecho, eso pasa precisamente cuando $v - v' \in W$.

EJEMPLO 2.18. Una manera de visualizar ese espacio cociente es tomar como V un plano real y como W una recta vectorial. Entonces los elementos de V/W son las rectas vectoriales paralelas a W .

Bien, resulta que el conjunto cociente V/W es un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial con las operaciones

$$(v + W) + (u + W) = v + u + W, \quad \lambda(v + W) = \lambda v + W,$$

para $v, u \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. La demostración de la consistencia de esta afirmación se puede ver en textos suficientemente serios de Álgebra Básica o de Álgebra Lineal.

PROPOSICIÓN 2.19. *Dados $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales V, W, U , existe un espacio vectorial $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ y una aplicación bilineal $b : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} W$ tales que la aplicación*

$$(2.5) \quad b^* : \text{Lin}(V \otimes_{\mathbb{K}} W, U) \rightarrow \text{Bil}(V \times W, U), \quad (f \mapsto f \circ b)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el espacio vectorial $\mathbb{K}[V \times W]$ cuya base es $V \times W$. Así, hemos olvidado momentáneamente que $V \times W$ es un espacio vectorial y lo entendemos como mero conjunto. Sea $\mathcal{T}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{K}[V \times W]$ generado por el conjunto

$$\begin{aligned} &\{(v, w) + (v'w) - (v + v', w), (v, w) + (v, w') - (v, w + w'), \\ &\lambda(v, w) - (\lambda v, w), \lambda(v, w) - (v, \lambda w) : v, v' \in V, w, w' \in W, \lambda \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

Definimos $V \otimes W$ como el espacio vectorial cociente

$$V \otimes_{\mathbb{K}} W = \frac{\mathbb{K}[V \times W]}{\mathcal{T}}.$$

La aplicación $b : V \times W \rightarrow V \otimes_{\mathbb{K}} W$ viene definida $b(v, w) = (v, w) + \mathcal{T}$. Para comprobar que es bilineal, calculamos

$$b(v + v', w) = (v + v', w) + \mathcal{T} = (v, w) + (v', w) + \mathcal{T} = b(v, w) + b(v', w),$$

y análogamente para el resto de las condiciones. Que b sea bilineal da consistencia a la definición de la aplicación b^* en (2.5) para la que, además, es rutinario comprobar que es a su vez lineal.

Para comprobar que b^* es biyectiva, vamos a construir directamente su inversa. Dada una aplicación bilineal $B : V \times W \rightarrow U$, definimos la aplicación lineal $f : \mathbb{K}[V \times W] \rightarrow U$ asignando el valor $f(v, w) = B(v, w)$ para cada vector $(v, w) \in V \times W$ de la base. Afirmamos que f se anula sobre $\mathcal{T}$. Para comprobar esto, basta con que lo hagamos con el conjunto de generadores de $\mathcal{T}$. Así, por ejemplo,

$$f((v + v', w) - (v, w) - (v', w)) = B(v + v') - B(v, w) - B(v', w) = 0.$$

por ser B bilineal. Esta misma razón da cuenta del resto de los generadores de $\mathcal{T}$.

Así que f se anula sobre $\mathcal{T}$, lo que da consistencia a la definición de la aplicación lineal $\alpha(B) : V \otimes_{\mathbb{K}} W \rightarrow U$ declarando

$$\alpha(B)((v, w) + \mathcal{T}) = f(v, w) = B(v, w).$$

Que α es la inversa de b^* es casi obvio. Tenemos que $b^* \circ \alpha(B) = \alpha(B) \circ b = B$, ya que $b(v, w) = (v, w) + \mathcal{T}$. Por último, dada $L : V \otimes_{\mathbb{K}} W \rightarrow U$ lineal, tenemos

$$\alpha \circ b^*(L)((v, w) + \mathcal{T}) = b^*(L)(v, w) = L(p(v, w)) = L((v, w) + \mathcal{T}).$$

□

Algunas cuestiones de notación. En primer lugar, cuando el contexto no admita ambigüedad sobre quién es $\mathbb{K}$, usaremos la notación $V \otimes W$ en lugar de $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. En segundo lugar, dado $(v, w) \in V \times W$, usaremos la notación $v \otimes w = b(v, w)$. Es de notar que un elemento $V \otimes W$ es de la forma

$$\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i \quad (v_i, w_i) \in V \times W.$$

Los elementos representables como un sólo sumando ($n = 1$) se llaman tensores puros.

Supongamos ahora aplicaciones lineales $f : V \rightarrow V'$ y $g : W \rightarrow W'$. Entonces tenemos la aplicación

$$f \bullet g : V \times W \rightarrow V' \otimes W' \quad (f \bullet g)(v, w) = f(v) \otimes g(w),$$

que, mediante una comprobación rutinaria, resulta ser bilineal. En virtud de la Proposición 2.19, $f \bullet g$ da lugar a una aplicación lineal

$$f \otimes g : V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$$

que verifica

$$f \otimes g(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w).$$

EJERCICIO 16. Para dos espacios vectoriales V, W , tomamos una base B de V . Demostrar que cada elemento $x \in V \otimes W$ admite una única expresión de la forma

$$x = \sum_{b \in B} b \otimes w_b.$$

Demostrar que si B es una base de V y C es una base de W , entonces $\{b \otimes c : b \in B, c \in C\}$ es una base de $V \otimes W$.

Vamos a hacer uso del producto tensorial para construir la complexificación de un espacio vectorial real. Sea, pues, V un espacio vectorial real. Dado que $\mathbb{C}$ es también un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, tenemos el espacio vectorial real $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$, que admite la estructura de espacio vectorial complejo determinada por

$$(2.6) \quad z(z' \otimes v) = zz' \otimes v, \quad (z, z' \in \mathbb{C}, v \in V).$$

La consistencia de la definición (2.6) reposa en que cada aplicación

$$\mathbb{C} \times V \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V, \quad ((z', v) \mapsto zz' \otimes v)$$

es $\mathbb{R}$ -bilineal.

Observemos que, en virtud del Ejercicio 16, cada elemento de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ se expresa de manera única como $1 \otimes v + i \otimes v'$, para $v, v' \in V$. Esto da pie a escribir

$$1 \otimes v + i \otimes v' = v + iv',$$

siempre que no haya riesgo de confusión (por ejemplo, porque en V hubiese otra estructura compleja). Esto da consistencia a expresiones como

$$(x + iy)(v + iv') = xv - yv' + i(xv' + yv), \quad (x + iy \in \mathbb{C}, v + iv' \in V_{\mathbb{C}}).$$

DEFINICIÓN 2.20. El espacio vectorial complejo $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ se llama *complexificado* del espacio vectorial real V .

Supongamos ahora un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ con corchete $[-, -]$. Definimos la aplicación

$$[-, -]_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_{\mathbb{C}},$$

declarando

$$[X + iY, X' + iY']_{\mathbb{C}} = [X, X'] - [Y, Y'] + i([X, Y'] + [Y, X']), \quad (X + iY, X' + iY' \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).$$

EJERCICIO 17. Demostrar que $[-, -]_{\mathbb{C}}$ dota a $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de estructura de álgebra de Lie compleja es una sucesión de comprobaciones rutinarias. Este álgebra de Lie se llama *complexificada* de $\mathfrak{g}$.

EJERCICIO 18. Vamos a calcular $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}}$ y $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}}$. Para la primera, demostrar que la aplicación $f : \mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(n)_{\mathbb{C}}$ definida por

$$f(1 \otimes X + i \otimes Y) = X + iY, \quad (X, Y \in \mathfrak{u}(n)),$$

es un isomorfismo de álgebras de Lie complejas. Se sugiere, para hallar la inversa de f , descomponer adecuadamente cada matriz de $\mathfrak{gl}(n)$ como suma de dos matrices en $\mathfrak{u}(n)$. La demostración de que existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\mathfrak{su}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}(n)_{\mathbb{C}}$ se deduce fácilmente del isomorfismo $\mathfrak{u}(n)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{gl}(n)_{\mathbb{C}}$ recién demostrado.

Seguidamente, vamos a discutir cómo se relacionan las representaciones complejas de un álgebra de Lie real y las de su complexificada. Para ello, usaremos el siguiente artificio: dada un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ y un álgebra de Lie compleja $\mathfrak{h}$, puedo ver ésta también como real y, así, considerar un homomorfismo de álgebras de Lie reales $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Defino entonces

$$\phi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad (\phi_{\mathbb{C}}(X + iY) = \phi(X) + i\phi(Y)),$$

que resulta ser un homomorfismo de álgebras de Lie complejas. De esta manera, si parto de una representación compleja $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, podemos considerar la representación compleja

$$\pi_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

que llamamos *complexificada* de π .

PROPOSICIÓN 2.21. Sea (π, V) una representación compleja de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$, y $(\pi_{\mathbb{C}}, V)$ su complexificada.

1. Un subespacio vectorial complejo W de V es π -invariante si, y sólo si, W es $\pi_{\mathbb{C}}$ -invariante.
2. (π, V) es irreducible si, y sólo si, $(\pi_{\mathbb{C}}, V)$ es irreducible.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $w \in W$. Para cada $X + iY \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, tenemos

$$\pi_{\mathbb{C}}(X + iY)w = (\pi(X) + i\pi(Y))w = \pi(X)w + i\pi(Y)w.$$

Igualdad de la que se deduce (1). Y (2) se sigue inmediatamente de (1). $\square$

Concluimos de nuestra discusión el siguiente resultado fundamental.

TEOREMA 2.22. *Sea (Π, V) una representación compleja de un grupo de Lie conexo G , y (π, V) la representación correspondiente de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Entonces los subespacios Π -invariantes de V son, exactamente, los espacios $\pi_{\mathbb{C}}$ -invariantes de V . Como consecuencia, Π es irreducible si, y sólo si, $\pi_{\mathbb{C}}$ es irreducible.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia del Teorema 2.17 y la Proposición 2.21. $\square$

2.3. Representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $SU(2)$ y $SO(3)$.

Vamos a utilizar la teoría desarrollada para clasificar las representaciones irreducibles aludidas en el título de esta sección.

2.3.1. Representaciones irreducibles de $SL_2(\mathbb{C})$. Consideremos la base $\{H, X, Y\}$ de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ como espacio vectorial complejo, donde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los siguientes conmutadores van a ser utilizados:

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Tomemos una representación compleja (π, V) de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Si $V \neq 0$, el operador lineal $\pi(H) : V \rightarrow V$ ha de tener algún vector propio u , con valor propio $\alpha \in \mathbb{C}$. Usando que

$$[\pi(H), \pi(X)] = 2\pi(X),$$

demostramos, por inducción sobre $j \geq 0$, que

$$(2.7) \quad \pi(H)\pi(X)^j u = (\alpha + 2j)\pi(X)^j u.$$

La igualdad (2.7) muestra que, siempre que $\pi(X)^j u \neq 0$, éste es un vector propio de $\pi(H)$ con valor propio $\alpha + 2j$. Como la dimensión de V es finita, y vectores propios asociados a valores propios distintos son linealmente independientes, ha de existir $N \geq 0$ tal que $\pi(X)^N u \neq 0$ pero $\pi(X)^{N+1} u = 0$.

Llamemos $u_0 = \pi(X)^N u$, $\lambda = \alpha + 2N$ y definamos recursivamente

$$u_k = \pi(Y)^k u_0, \quad (k \geq 0).$$

Usando la igualdad

$$[\pi(H), \pi(Y)] = -2\pi(Y),$$

es fácil demostrar por inducción sobre k que

$$\pi(H)u_k = (\lambda - 2k)u_k,$$

para todo $k \geq 0$. De nuevo, la dimensión finita de V asegura que existe $n \geq 0$ tal que $\{u_0, \dots, u_n\}$ es linealmente independiente pero $u_{n+1} = 0$.

Otra inducción sobre k , haciendo uso del conmutador $[X, Y] = H$, muestra que

$$\pi(X)u_k = [k\lambda - k(k-1)]u_{k-1},$$

para todo $k \geq 1$. Deducimos, en particular, que

$$0 = \pi(X)u_{n+1} = (n+1)(\lambda - n)u_n.$$

Al ser $u_n \neq 0$, deducimos que $\lambda = n$ y, así, $\alpha = n - 2N \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 2.23. *Con las notaciones anteriores, los vectores*

$$\{u_0, \dots, u_n\}$$

forman una base de un subespacio π -invariante irreducible de V .

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que $u_{n+1} = 0$. Poniendo $u_{-1} = 0$, tenemos que

$$(2.8) \quad \begin{cases} \pi(H)u_k &= (n - 2k)u_k \\ \pi(X)u_k &= k(n + 1 - k)u_{k-1} \\ \pi(Y)u_k &= u_{k+1}, \end{cases}$$

para $k = 0, \dots, n$. De estas igualdades se deduce que el subespacio W con base $\{u_0, \dots, u_n\}$ es π -invariante. Para ver que es irreducible, vamos a definir una equivalencia $T : W \rightarrow P_n$, para la representación diferencial irreducible σ_n . Tenemos que (ver Ejemplo 2.16)

$$(2.9) \quad \begin{cases} \sigma_n(H)z^k &= (2k - n)z^k, \\ \sigma_n(X)z^k &= (n - k)z^{k+1}, \\ \sigma_n(Y)z^k &= kz^{k-1}, \end{cases}$$

para $k = 0, \dots, n$. Con tal propósito, tomamos números α_k , $k = 0, \dots, n$, tales que

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k(n - k), \quad (k = 0, \dots, n),$$

con $\alpha_0 \neq 0$. El isomorfismo lineal T está determinado sobre las bases por la asignación

$$T(u_k) = \alpha_k z^{n-k}, \quad (k = 0, \dots, n).$$

Unos sencillos cálculos, basados en (2.8) y (2.9), muestran que T es entrelazante y, por tanto, una equivalencia de representaciones. $\square$

TEOREMA 2.24. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe representación irreducible de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, única salvo equivalencias, de dimensión $n + 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que cada representación (σ_n, P_n) es irreducible de dimensión $n + 1$. Si ahora (π, V) es una representación irreducible de dimensión $n + 1$, ésta ha de ser equivalente a (σ_n, P_n) de acuerdo con la Proposición 2.23. $\square$

2.3.2. Representaciones irreducibles de $SU(2)$. Para cada m , consideramos la restricción al subgrupo $SU(2)$ de la representación (Σ_m, P_m) , que denotaremos igual. En virtud del Teorema 2.22, puesto que $\mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, tenemos que $\text{Irr}(SU(2)) = \{(\Sigma_m, P_m) : m \in \mathbb{N}\}$.

Consideremos la representación irreducible (Σ_m, P_m) de $SU(2)$ cuya dimensión es $m + 1$. Puesto que este grupo es compacto, sabemos que existe un producto interno $\langle -, - \rangle$ en P_m de manera que Σ_m es unitaria. Vamos a identificar dicho producto, salvo producto por un real positivo.

Con tal fin, consideremos que cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo 1 da lugar a

$$q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2).$$

Dado que $\Sigma_m(q)$ es un operador unitario, tenemos, para cada $j, k = 0, \dots, m$, que

$$\begin{aligned} \langle z^j, z^k \rangle &= \langle \Sigma_m(z^j), \Sigma_m(z^k) \rangle = \langle \bar{\alpha}^{m-j} \alpha^j z^j, \bar{\alpha}^{m-k} \alpha^k z^k \rangle \\ &= \bar{\alpha}^{m-j+k} \alpha^{m-k+j} \langle z^j, z^k \rangle = \alpha^{2(j-k)} \langle z^j, z^k \rangle, \end{aligned}$$

lo que no es posible, para $j \neq k$, salvo que $\langle z^j, z^k \rangle = 0$. Deducimos, pues, que la base

$$\{1, z, z^2, \dots, z^m\}$$

es ortogonal. Para ortonormalizarla, hemos de calcular cada $\langle z^k, z^k \rangle$. Para ello, tenemos en cuenta que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$(2.10) \quad 0 = \langle \Sigma_m(e^{t(Y-X)})z^k, \Sigma_m(e^{t(Y-X)})z^{k+1} \rangle,$$

para $k = 0, \dots, m-1$.

Diferenciando con respecto de t y evaluando en $t = 0$, obtenemos de (2.10) que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \sigma_m(Y-X)z^k, z^{k+1} \rangle + \langle z^k, \sigma_m(Y-X)z^{k+1} \rangle \\ &= \langle \sigma_m(Y)z^k, z^{k+1} \rangle - \langle \sigma_m(X)z^k, z^{k+1} \rangle + \langle z^k, \sigma_m(Y)z^{k+1} \rangle - \langle z^k, \sigma_m(X)z^{k+1} \rangle \\ &= -(m-k)\langle z^{k+1}, z^{k+1} \rangle + (k+1)\langle z^k, z^k \rangle. \end{aligned}$$

Obtenemos, pues, la relación recursiva

$$(m-k)\langle z^{k+1}, z^{k+1} \rangle = (k+1)\langle z^k, z^k \rangle, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

Calibrando por $\langle 1, 1 \rangle = m!$, obtenemos

$$\langle z^k, z^k \rangle = k!(m-k)!, \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

Hemos demostrado, pues, el siguiente teorema.

TEOREMA 2.25. *Las representaciones irreducibles de $SU(2)$ son, salvo equivalencias, $\text{Irr}(SU(2)) = \{(\Sigma_m, P_m) : m \in \mathbb{N}\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, la representación (Σ_m, P_m) es unitaria con respecto del producto interno que tiene como base ortonormal*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{k!(m-k)!}} z^k : k = 0, 1, \dots, m \right\}.$$

EJERCICIO 19. Sea G un grupo de Lie y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Consideremos la *representación adjunta* $Ad : G \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ definida por $Ad_A(X) = AXA^{-1}$, para $A \in G, X \in \mathfrak{g}$. Demostrar que su representación diferencial $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \text{gl}(\mathfrak{g})$ viene dada por $ad_Y(X) = [Y, X]$ para $X, Y \in \mathfrak{g}$.

2.3.3. Representaciones irreducibles de $SO(3)$. Recordemos que tenemos un homomorfismo sobreyectivo de grupos de Lie

$$T : SU(2) \rightarrow SO(\mathcal{V}),$$

donde $\mathcal{V}$ tiene como base ortonormal

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

que son matrices de $\mathfrak{su}(2)$. Vemos, así, que $\mathfrak{su}(2) = \mathcal{V}$ y, de hecho, si recordamos cómo se define T , resulta que el mismo no es sino la representación adjunta de $SU(2)$ sobre su álgebra de Lie. Por tanto, su diferencial

$$\tau : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(\mathcal{V})$$

viene dada por la representación adjunta de $\mathfrak{su}(2)$, que es inyectiva. Como tanto $\mathfrak{su}(2)$ como $\mathfrak{so}(\mathcal{V}) \cong \mathfrak{so}(3)$ tienen dimensión real tres, resulta que τ es un isomorfismo.

Sea (Σ, U) una representación compleja irreducible de $SO(\mathcal{V})$. Tenemos entonces que la composición

$$SU(2) \xrightarrow{T} SO(\mathcal{V}) \xrightarrow{\Sigma} GL(U)$$

proporciona una representación de $SU(2)$. Diferenciando, tenemos la representación de $\mathfrak{su}(2)$ dada por la composición

$$\mathfrak{su}(2) \xrightarrow{\tau} \mathfrak{so}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\sigma} \text{gl}(U).$$

Puesto que $SU(2)$ es conexo y Σ es irreducible, así lo es σ , de donde, siendo τ un isomorfismo, obtenemos que $\sigma \circ \tau$ es irreducible. De donde $\Sigma \circ T$ es irreducible, de modo que es equivalente a (Σ_m, P_m) para algún $m \in \mathbb{N}$.

Observemos que $\Sigma \circ T(-1) = id_U$, por lo que $\Sigma_m(-1) = id_{P_m}$. Ahora bien,

$$\Sigma_m(-1)(z^k) = (-1)^{m-k}(-1)^k z^k = (-1)^m z^k,$$

para todo $k = 0, 1, \dots, m$. Deducimos, pues, que m ha de ser par. Hemos demostrado, pues, que $\Sigma \circ T$ es equivalente a Σ_m con m par.

Veamos que, de hecho, cada Σ_m con m par da lugar a una representación irreducible Σ de $SO(\mathcal{V})$ tal que $\Sigma \circ T = \Sigma_m$. Pero esto es consecuencia de que cada rotación $R \in SO(\mathcal{V})$ puede representarse como $R = T(q)$ para cierto $q \in SU(2)$. Así, podemos definir

$$\Sigma(R) = \Sigma_m(q).$$

El problema es que la representación $R = T(q)$ no es única, así que esa definición adolece, en principio, de ambigüedad. No obstante, si $T(q) = T(q')$, entonces $T(q'q^\dagger) = T(1) = id_{\mathcal{V}}$, lo que implica que $q'q^\dagger = \pm 1$ y, así, $q' = \pm q$. La paridad de m resuelve la ambigüedad. Hemos demostrado, pues, el siguiente teorema.

TEOREMA 2.26. *Para cada m par, existe una representación irreducible de $SO(3)$ de dimensión $m+1$, única salvo equivalencias, que puede obtenerse a partir de la representación irreducible Σ_m de igual dimensión de $SU(2)$. Además, $Irr(SO(3)) = \{(\Sigma_m, P_m) : m \text{ par}\}$.*

Bibliografia

1. B. C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*. Springer, 2004.
2. B. C. Hall, *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*. 2nd ed. Springer, 2015.
3. G. P. Hochschild, *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras*. Springer, 1981.
4. V. Kadets, *A course in Functional Analysis and Measure Theory*. Springer, 2018.
5. V. S. Varadarajan, *Harmonic analysis on semisimple Lie groups*. Cambridge University Press, 1989.
6. N. Vilenkin, *Special functions and the theory of group representations*. Translations of mathematical monographs, vol. 22. AMS, 1968.