

Tema 4.- Esperanza condicionada

Asignatura: PROBABILIDAD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

(3er Curso - 1er semestre)

©Prof. Dr. José Luis Romero Béjar

(Este material está protegido por la Licencia Creative Commons CC BY-NC-ND que permite "descargar las obras y compartirlas con otras personas, siempre que se reconozca su autoría, pero no se pueden cambiar de ninguna manera ni se pueden utilizar comercialmente").



Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias (Despacho 10)

Periodo de docencia: 11/09/2023 a 22/12/2023

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

- 1 **Esperanza condicionada**
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

Definición de esperanza condicionada

Sean X e Y variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad tales que existen $E[X]$ y $E[Y]$. Se consideran las distribuciones condicionadas de Y a X y de X a Y (**ambas distribuciones poseen momento no centrado de orden uno finito** porque existen para las marginales).

Se definen la **esperanza condicionada** de X a Y , denotada por $E[X/Y]$, y la **esperanza condicionada** de Y a X , denotada por $E[Y/X]$, **como las variables aleatorias** que toman el valor, en el caso **discreto** y **continuo**:

- **Caso discreto**

$$E[Y/X = x] = \sum_{y \in \text{Supp}(p_{Y/X=x})} y p_{Y/X=x}(y), \quad \forall x \in E_X,$$

cuando la v.a. X toma el valor x .

- **Caso continuo**

$$E[Y/X = x] = \int_{\text{Supp}(f_{Y/X=x})} y f_{Y/X=x}(y) dy, \quad \forall x \in E_X,$$

donde $\text{Supp}(f)$ denota el soporte de la función f , cuando la v.a. X toma el valor x .

Esperanza condicionada de una función

Del mismo modo, se define la **esperanza condicionada de una función** $g_1 : E_X \rightarrow \mathbb{R}$, medible, de la v.a. X , condicionada a un valor concreto y de Y , denotada por $E[g_1(X)/Y = y]$, así como, para una función medible $g_2 : E_Y \rightarrow \mathbb{R}$, la **esperanza condicionada** de $g_2(Y)$ a un valor concreto x de X , denotada por $E[g_2(Y)/X = x]$.

Más concretamente, por ejemplo, para la esperanza condicionada de $g_2(Y)$, condicionada a un valor concreto x de X , se tiene:

- **Caso discreto**

$$E[g_2(Y)/X = x] = \sum_{y \in \text{Supp}(p_{Y/X=x})} g_2(y) p_{Y/X=x}(y), \quad \forall x \in E_X.$$

- **Caso continuo**

$$E[g_2(Y)/X = x] = \int_{\text{Supp}(f_{Y/X=x})} g_2(y) f_{Y/X=x}(y) dy, \quad \forall x \in E_X.$$

donde $\text{Supp}(f)$ denota el soporte de la función f .

Propiedades de la esperanza condicionada

Se notará, por simplicidad, en lo que sigue, por $E[X/Y]$ y $E[Y/X]$ a las esperanzas condicionadas de X a Y , y de Y a X , respectivamente.

- (i). Si $X \geq 0$ c.s., entonces si existe $E[X/Y]$, se tiene que $E[X/Y] \geq 0$, y $E[X/Y] = 0$, si y sólo si $P(X = 0) = 1$.
- (ii). Si existe la $E[X/Y]$, entonces $|E[X/Y]| \leq E[|X|/Y]$.
- (iii). **Linealidad:** $\forall i = 1, \dots, n, \exists E[X_i/Y]$, entonces $\exists E[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b/Y] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i/Y] + b, \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$.
- (iv). **Conservación del orden** Si $\exists E[X_i/Y], i = 1, 2$, y $X_1 \leq X_2$, c.s., entonces $E[X_1/Y] \leq E[X_2/Y]$.
- (v). Si existe $E[g(X)/Y]$, entonces $E[E[g(X)/Y]] = E[g(X)]$, para cualquier función medible g , y para cualesquiera variables aleatorias, X e Y , sobre el mismo espacio probabilístico base.

Propiedades de la esperanza condicionada

- (vi). Si X e Y son independientes, para cualquier función medible g , tal que existe $E[g(X)]$, se tiene $E[g(X)/Y] = E[g(X)]$, puesto que las distribuciones condicionadas coinciden con las marginales.
- (vii). $E[Xg(Y)/Y] = g(Y)E[X/Y]$, para cualquier función medible g .
- (viii). Para cualquier función h medible $E[h(X)/X] = h(X)$.
- (ix). $E[X/Y] = E[c/Y] = c$, para cualquier variable degenerada X sobre el mismo espacio de probabilidad de Y , con $P(X = c) = 1$.

Todas las propiedades enunciadas anteriormente **se obtienen de forma directa, a partir de las definiciones** proporcionadas sobre esperanza condicionada.

Esperanza condicionada de vectores aleatorios

Sean $X = (X_1, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ dos vectores aleatorios sobre el mismo espacio de probabilidad. Se define, suponiendo que **las sumas e integrales, correspondientes al caso discreto y continuo, respectivamente, son absolutamente convergentes,**

$$E[X/Y] = (E[X_1/Y], \dots, E[X_n/Y])$$

- Caso **discreto**, es decir, para (X_i, Y) un vector aleatorio discreto:

$$E[X_i/Y = y] = \sum_{x_i \in \text{Supp}(p_{X_i/Y=y})} x_i p_{X_i/Y=y}(x_i), \quad \forall y \in E_Y, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Caso **continuo**, es decir, si (X_i, Y) es un vector aleatorio continuo,

$$E[X_i/Y = y] = \int_{\text{Supp}(f_{X_i/Y=y})} x_i f_{X_i/Y=y}(x_i) dx_i, \quad \forall y \in E_Y \quad i = 1, \dots, n.$$

Esperanza condicionada de una función unidimensional medible de un vector aleatorio

- Caso **discreto**: para E_X tal que $P(X \in E_X) = 1$, y E_Y tal que $P(Y \in E_Y) = 1$, y $g : E_X \rightarrow \mathbb{R}$, una función medible,

$$E[g(X)/Y = y] = \sum_{x \in \text{Supp}(p_{X/Y=y})} g(x)P(X = x/Y = y), \quad \forall y \in E_Y,$$

donde (X, Y) es un vector aleatorio **discreto**.

- Caso **continuo**: para (X, Y) un vector aleatorio **continuo**, y $g : E_X \rightarrow \mathbb{R}$, medible,

$$E[g(X)/Y = y] = \int_{\text{Supp}(f_{X/Y=y})} g(x)f_{X/Y=y}(x)dx, \quad \forall y \in E_Y.$$

Se supone, como en el apartado anterior, que **las sumatorias e integrales anteriores son absolutamente convergentes**.

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados**
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

Momentos condicionados no centrados

Nótese que las expresiones que a continuación se formulan, se obtienen de forma directa del apartado anterior considerando $n = m = 1$, $g(X) = X^k$, y $k \in \mathbb{N}$.

Momentos condicionados no centrados de orden $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{Caso discreto} \quad E[X^k / Y = y] = \sum_{x \in \text{Supp}(p_{X/Y=y})} x^k p_{X/Y=y}(x) \\ \forall y \in E_Y$$

$$\text{Caso continuo} \quad E[X^k / Y = y] = \int_{\text{Supp}(f_{X/Y=y})} x^k f_{X/Y=y}(x) dx \\ \forall y \in E_Y.$$

Momentos condicionados centrados

Nótese que las expresiones que a continuación se formulan, se obtienen de forma directa del apartado anterior considerando $n = m = 1$, y $g(X) = [X - E(X/Y)]^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Momentos condicionados centrados, respecto a la media, de orden $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{Caso discreto} \quad & E \left[(X - E[X/Y])^k / Y = y \right] \\ &= \sum_{x \in \text{Supp}(p_{X/Y=y})} (x - E[X/Y])^k p_{X/Y=y}(x) \\ &\quad \forall y \in E_Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Caso continuo} \quad & E \left[(X - E[X/Y])^k / Y = y \right] \\ &= \int_{\text{Supp}(f_{X/Y=y})} (x - E[X/Y])^k f_{X/Y=y}(x) dx \\ &\quad \forall y \in E_Y. \end{aligned}$$

Caso especial: varianza condicionada

Supongamos que X , tal que $\exists E[X^2]$, e Y son dos variables aleatorias sobre el mismo espacio de probabilidad, entonces:

- (i). $\exists \text{Var}(X/Y)$, y $\text{Var}(X/Y) \geq 0$.
- (ii). $\text{Var}(X/Y) = E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2$.
- (iii). **Descomposición de la varianza:** si $\exists \text{Var}(E[X/Y])$, y $\exists E[\text{Var}(X/Y)]$, entonces:

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(E[X/Y]) + E[\text{Var}(X/Y)].$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X) &= E[(X - E[X])^2] = E[E[(X - E[X])^2/Y]] \quad (\text{Prop. (v)}) \\
 &= E[E[X^2 + (E[X])^2 - 2XE[X]/Y]] \\
 &= E[E[X^2/Y] + (E[X])^2 - 2E[X]E[X/Y]] \quad (\text{Linealidad}) \\
 &= E[E[X^2/Y] - (E[X/Y])^2 + (E[X/Y])^2 + (E[X])^2 - 2E[X]E[X/Y]] \\
 &= E[\text{Var}(X/Y)] + E[(E[X/Y] - E[X])^2] \\
 &= E[\text{Var}(X/Y)] + \text{Var}(E[X/Y]). \quad (\text{Prop. (v) y def. momento centrado condicionado de orden dos.})
 \end{aligned}$$

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática**
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

Regresión mínimo cuadrática bidimensional

El **problema de regresión** consiste en **aproximar una v.a. Y mediante una función de otra variable X** , es decir,

$$Y \simeq \varphi(X),$$

donde Y es la variable dependiente, explicada o endógena; X es la variable independiente, explicativa o exógena y φ es la función de regresión.

Consideramos la aproximación óptima de Y mediante la v.a. $\varphi(X)$, que proporciona la solución al problema de optimización, definido a partir de la **función de pérdida** $E[(Y - \varphi(X))^2]$, conocida como el **error cuadrático medio** (E.C.M) asociado a la estimación $\hat{Y} = \varphi(X)$ de la v.a. Y .

Es decir, se considera φ_{opt} , donde

$$\varphi_{\text{opt}}(X) = \min_{\varphi} E[(Y - \varphi(X))^2].$$

La **función φ_{opt} , que minimiza el E.C.M.**, en la aproximación de Y mediante una función de X **viene dada** por:

$$\varphi_{\text{opt}}(X) = E[Y/X].$$

Regresión mínimo cuadrática bidimensional

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{E.C.M.}(\varphi(X)) &= E \left[(Y - E[Y/X])^2 \right] \\ &= E \left[E \left[(Y - E[Y/X])^2 / X \right] \right] = E [\text{Var}(Y/X)] . \end{aligned}$$

Calculando

$$\begin{aligned} E \left[(Y - E[Y/X])^2 \right] &= E[Y^2] + E[(E[Y/X])^2] - 2E[YE[Y/X]] \\ &= E[Y^2] + E[(E[Y/X])^2] - 2E[E[YE[Y/X]/X]] \\ &= E[Y^2] + E[(E[Y/X])^2] - 2E[(E[Y/X])^2] \\ &= E[Y^2] - E[(E(Y/X))^2] \end{aligned}$$

Regresión mínimo cuadrática bidimensional

Alternativamente,

$$\begin{aligned} \text{E.C.M.}(\varphi(X)) &= E[\text{Var}(Y/X)] \\ &= E[E[Y^2/X] - (E(Y/X))^2] = E[Y^2] - E[(E(Y/X))^2] \end{aligned}$$

Según lo que se vio, en el apartado anterior, considerando la fórmula de descomposición de la varianza, se tiene

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y/X)] + \text{Var}(E[Y/X]) = \text{E.C.M.}(\varphi(X)) + \text{Var}(\varphi_{\text{opt}}(X)).$$

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión**
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

Curvas de regresión mínimo cuadrática de Y sobre X

Se consideran, para diferentes valores x de la variable X , los correspondientes valores estimados de la v.a. Y , mediante la función φ_{opt} , es decir,

$$y = \varphi_{\text{opt}}(x) = E[Y/X = x], \quad \forall x \in E_X; \quad P(X \in E_X) = 1,$$

que recibe el nombre de **curva de regresión de Y sobre X** .

- El **E.C.M** asociado a la curva de regresión de Y sobre X es $E[\text{Var}(Y/X)]$.
- Para un **valor concreto**, el **E.C.M.** asociado a $E[Y/X = x]$ es $\text{Var}(Y/X = x)$.

Curvas de regresión mínimo cuadrática de X sobre Y

De forma análoga, para diferentes valores y de la variable Y , los correspondientes valores estimados de la v.a. X , mediante la función φ_{opt} , es decir,

$$x = \varphi_{\text{opt}}(y) = E[X/Y = y], \quad \forall y \in E_Y; \quad P(Y \in E_Y) = 1,$$

que recibe el nombre de **curva de regresión de X sobre Y** .

- El **E.C.M** asociado a la **curva de regresión** de X sobre Y es $E[\text{Var}(X/Y)]$.
- Para un **valor concreto**, el **E.C.M.** asociado a $E[X/Y = y]$ es $\text{Var}(X/Y = y)$.

Curvas de regresión mínimo cuadrática: algunas propiedades

- (i). Si Y **depende funcionalmente** de X , es decir, $Y = f(X)$, la **curva de regresión** de Y sobre X , $E[Y/X = x]$, $x \in E_X$, **coincide con la curva de dependencia** $y = f(x)$, $x \in E_X$.
- (ii). Si hay **dependencia funcional recíproca** entre X e Y , es decir, $Y = f(X)$ y $X = f^{-1}(Y)$, ambas **curvas de regresión coinciden con las curvas de dependencia**: $y = f(x)$, $x \in E_X$, y $x = f^{-1}(y)$, $y \in E_Y$.
- (iii). Si X e Y son **independientes**, las curvas de regresión **son rectas paralelas** a los ejes: $y = E[Y]$ y $x = E[X]$.
En este caso **estimamos una variable, sin observar la otra, mediante su esperanza y el E.C.M. es su varianza.**

Cuadro resumen para predecir Y (equivalentemente para predecir X)

	Sin observar X	Observando X	Para valor concreto $X = x$
Predicción para Y	$E[Y]$	$E[Y/X]$	$E[Y/X = x]$
E.C.M.	$Var[Y]$	$E[Var[Y/X]]$	$Var[Y/X = x]$

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación**
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

Razones de correlación

La **correlación** estudia la bondad del ajuste de la función de regresión encontrada mediante el método de mínimos cuadrados, esto es, **en qué medida la función de regresión explica a una variable a partir de la otra.**

Se definen las **razones de correlación** de X sobre Y , $\eta^2_{X/Y}$ y de Y sobre X , $\eta^2_{Y/X}$, como sigue:

$$\eta^2_{X/Y} = \frac{\text{Var}(E[X/Y])}{\text{Var}(X)} = 1 - \frac{E[\text{Var}(X/Y)]}{\text{Var}(X)}$$

$$\eta^2_{Y/X} = \frac{\text{Var}(E[Y/X])}{\text{Var}(Y)} = 1 - \frac{E[\text{Var}(Y/X)]}{\text{Var}(Y)}$$

Observaciones:

- La razón de correlación es una **medida adimensional** que representa la **proporción de varianza de la variable dependiente que queda explicada** por la función de regresión.
- En este sentido se puede interpretar como una **medida de la bondad del ajuste** de la distribución a la curva de regresión correspondiente.

Propiedades

- (i). Para cualquier $a > 0$, se tiene $\eta_{aX/Y}^2 = \eta_{X/Y}^2$
- (ii). Para cualquier $a > 0$, se tiene $\eta_{aY/X}^2 = \eta_{Y/X}^2$
- (iii). $0 \leq \eta_{X/Y}^2 \leq 1$ y $0 \leq \eta_{Y/X}^2 \leq 1$ (Ejercicio voluntario)
- (iv). Si $\eta_{X/Y}^2 = 0$ y $\eta_{Y/X}^2 = 0$, entonces las curvas de regresión de X/Y e Y/X coinciden respectivamente con las rectas $x = E[X]$ e $y = E[Y]$.
- (v). Recíprocamente, si las curvas de regresión de X/Y e Y/X coinciden con las rectas $x = E[X]$ e $y = E[Y]$, respectivamente, entonces $\eta_{X/Y}^2 = 0$ y $\eta_{Y/X}^2 = 0$.
- (vi). $\eta_{X/Y}^2 = 1 \Leftrightarrow X$ dependen funcionalmente de Y .
- (vii). $\eta_{Y/X}^2 = 1 \Leftrightarrow Y$ dependen funcionalmente de X .
- (viii). $\eta_{Y/X}^2 = \eta_{X/Y}^2 = 1 \Leftrightarrow$ hay dependencia funcional recíproca entre X e Y .

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática**
- 7 Coeficientes de determinación y correlación

Planteamiento de la regresión lineal de Y sobre X (equivalentemente para X sobre Y)

Intentamos resolver el problema de predecir, por mínimos cuadrados, los valores de una variable Y a partir de una función lineal de otra X . En este sentido se busca una función $\varphi_{\text{opt}}^L(X)$ que minimice el E.C.M.

$$\varphi_{\text{opt}}^L(X) = \min_{a,b} E[(Y - aX - b)^2].$$

El problema se reduce a obtener a y b que minimicen $L = E[(Y - aX - b)^2]$.

$$L = E[(Y - aX - b)^2] = E[Y^2] + a^2 E[X^2] + b^2 + 2abE[X] - 2aE[XY] - 2bE[Y]$$

Derivando respecto a a y b e igualando a cero, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones denominado sistema de **Ecuaciones Normales**:

$$\begin{aligned} aE[X^2] + bE[X] &= E[XY] \\ b + aE[X] &= E[Y] \end{aligned}$$

cuya solución es $a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\text{Var}(X)}$ y $b = E[Y] - aE[X]$.

Regresión mínimo-cuadrática, cuando φ^L es una recta ($R_{Y/X}$)

A partir de las soluciones de las ecuaciones normales anteriores se tiene lo siguiente.

En la regresión lineal mínimo cuadrática de Y sobre X ,

$$Y \approx \varphi_{\text{opt}}^L(X) = \min_{a,b} E[(Y - aX - b)^2] = E[Y] + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(X - E[X]).$$

Esta expresión recibe el nombre de **Recta de Regresión de Y sobre X** .

$$y - E[Y] = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}(x - E[X]).$$

El **E.C.M** asociado viene dado por: [\(Ejercicio voluntario\)](#)

$$E.C.M.(\varphi_{\text{opt}}^L(X)) = \text{Var}(Y) - \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(X)}$$

$$\text{Por tanto, } \text{Var}(Y) = \text{Var}(\varphi_{\text{opt}}^L(X)) + E.C.M.(\varphi_{\text{opt}}^L(X)).$$

Regresión mínimo-cuadrática, cuando φ^L es una recta ($R_{X/Y}$)

En la regresión lineal mínimo cuadrática de X sobre Y , de forma similar, se calcula $\varphi_{\text{opt}}^L(Y)$,

$$X \approx \varphi_{\text{opt}}^L(Y) = \min_{a,b} E[(X - aY - b)^2] = E[X] + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(Y - E[Y]).$$

Esta expresión recibe el nombre de **Recta de Regresión de X sobre Y** .

$$x - E[X] = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}(y - E[Y]).$$

El **E.C.M asociado** viene dado por:

$$E.C.M.(\varphi_{\text{opt}}^L(Y)) = \text{Var}(X) - \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(Y)}$$

$$\text{Por tanto, } \text{Var}(X) = \text{Var}(\varphi_{\text{opt}}^L(Y)) + E.C.M.(\varphi_{\text{opt}}^L(Y)).$$

Coeficientes de regresión

Suponiendo la existencia de $E[X^2]$ y $E[Y^2]$, se definen los **coeficientes de regresión** de Y/X , $\gamma_{Y/X}$, y de X/Y , $\gamma_{X/Y}$, como sigue:

$$\gamma_{Y/X} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)}$$

$$\gamma_{X/Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)}$$

Algunas propiedades

- (i). Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, entonces las rectas de regresión de Y/X y de X/Y vienen respectivamente dadas por $y = E[Y]$ y $x = E[X]$ (son rectas paralelas a los ejes).
- (ii). Si la curva de regresión es una recta, coincide con la correspondiente recta de regresión.
- (iii). Si X e Y están linealmente relacionadas, las rectas de regresión coinciden con la recta de dependencia (sólo en este caso, obtenida una recta de regresión, la otra se puede obtener despejando).
- (iv). Las rectas de regresión se cortan en el punto $(E[X], E[Y])$.
- (v). Los coeficientes de regresión tienen el mismo signo que la covarianza.
- (vi). Los coeficientes de regresión cuantifican cuanto se incrementa la variable dependiente por aumentos unitarios en la variable independiente.

- 1 Esperanza condicionada
- 2 Momentos condicionados
- 3 Regresión mínimo cuadrática
- 4 Curvas de regresión
- 5 Razones de correlación
- 6 Regresión lineal mínimo cuadrática
- 7 Coeficientes de determinación y correlación**

Coeficiente de determinación lineal

Una medida de la asociación lineal de las variables viene determinada por el **coeficiente de determinación lineal** $\rho_{X,Y}^2$, se define como:

$$\rho_{X,Y}^2 = \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \left(= \frac{\text{Var}(\varphi_{\text{opt}}^L(X))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\varphi_{\text{opt}}^L(Y))}{\text{Var}(X)} \right).$$

Observación:

Tal y como los razones de correlación, el coeficiente de determinación lineal **es una medida de la bondad del ajuste lineal**, o lo que es lo mismo, mide la proporción de varianza de explicada por el modelo de regresión lineal.

Propiedades del coeficiente de determinación lineal

- (i). $\rho_{aX+b, cY+d}^2 = \rho_{X,Y}^2$
- (ii). $\rho_{X,Y}^2 = \gamma_{X/Y} \gamma_{Y/X}$
- (iii). $0 \leq \rho_{X,Y}^2 \leq 1$
- (iv). $\rho_{X,Y}^2 = 0 \Leftrightarrow$ Las rectas de regresión de Y/X y de X/Y son respectivamente $y = E[Y]$, $y = E[X]$.
- (v). $\rho_{X,Y}^2 = 1 \Leftrightarrow$ Existe dependencia funcional lineal entre las variables X e Y .
- (vi). $\rho_{X,Y}^2 \leq \eta_{Y/X}^2$ y $\rho_{X,Y}^2 \leq \eta_{X/Y}^2$.

Las desigualdades anteriores (prop. (vi).) se convierten en igualdades si y sólo si **las curvas de regresión coinciden con las correspondientes rectas de regresión.**

Coeficiente de correlación lineal

Independientemente de que el coeficiente de determinación lineal ofrece información acerca de la bondad del ajuste del modelo lineal, la **medida de correlación por excelencia** es el **coeficiente de correlación lineal**, ya que también proporciona información, no sólo de la **fuerza de asociación**, sino también de **su sentido**.

Se define el coeficiente de correlación lineal $\rho_{X,Y}$, como:

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

Propiedades del coeficiente de correlación lineal

- (i). $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
- (ii). $\rho_{aX+b,cY+d} = \pm \rho_{X,Y}$
- (iii). $\rho_{X,Y} = 0$ (variables incorreladas linealmente) $\Leftrightarrow$ Las rectas de regresión de Y/X y de X/Y son respectivamente $y = E[Y]$, y $x = E[X]$.
- (iv). Si X e Y son independientes, entonces $\rho_{X,Y} = 0$ (el recíproco no es cierto)
- (v). $|\rho_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow$ Existe dependencia funcional lineal (positiva o negativa, en función del signo) entre X e Y .
- (vi). $|\rho_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow$ Las dos rectas de regresión coinciden entre sí y con la recta de dependencia, además de con las curvas de regresión.
- (vii). Si $\rho_{X,Y} = 1$ la dependencia lineal es exacta y positiva (las dos v.a. crecen o decrecen de forma simultánea).
- (viii). Si $\rho_{X,Y} = -1$ la dependencia lineal es exacta y negativa (cuando una v.a. crece la otra decrece y viceversa).

- [1] Ash, R.B. (2008). Basic Probability Theory. Dover Publications Inc., New York.
- [2] Canavos, G. (2003). Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos. McGraw-Hill Interamericana, México.
- [3] Casas Sánchez, J.M. (2000). Estadística I. Probabilidad y Distribuciones. Ed. Centro de estudios Ramón Areces, S.A.
- [4] Chung, K.L., AitSahlia, F. (2003). Elementary Probability Theory with Stochastic Processes and an Introduction to Mathematical Finance. Springer-Verlag, New York.
- [5] DeGroot, M.H., Schervish, M.J. (2002). Probability and Statistics. Addison-Wesley, Boston.
- [6] García-Ligero, M.J., Hermoso Carazo, A., Maldonado Jurado, J.A., Román Román, P., Torres Ruíz, F. (2007). Curso Básico de Probabilidad con CDPYE (CD). Copicentro Editorial, Universidad de Granada.
- [7] Haigh, J. (2002). Probability Models. Springer-Verlag, London.
- [8] Mukhopadhyay, N. (2000). Probability and Statistical Inference. Marcel Dekker, New York.
- [9] Rohatgi, V.K., Saleh, A.K. (2008). An Introduction to Probability and Statistics. John Wiley and Sons, New York.
- [10] Ruiz-Camacho, M., Morcillo-Aixelá, M.C., García Galisteo, J., Del Castillo Vázquez, C. (2000). Curso de Probabilidad y Estadística. Universidad de Málaga/Manuales.
- [11] Vélez, R., Hernández, V. (1995). Cálculo de Probabilidades 1. UNED, Madrid.