

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Volatilidad

La **volatilidad** es un concepto fundamental en el análisis de riesgos en contextos financieros.

Se refiere a la **medida de la variabilidad o dispersión de los rendimientos** de un activo financiero (como acciones, bonos, o índices) **a lo largo del tiempo**.

En las siguientes diapositivas se comentan **algunos puntos clave sobre la volatilidad** en el análisis de riesgos financieros.

i. Medida de riesgo

La **volatilidad** se utiliza como una medida de riesgo.

Cuanto **mayor** sea la **volatilidad** de un activo, **mayor** será su **riesgo percibido**, ya que existe una mayor probabilidad de que los rendimientos reales difieran significativamente de los rendimientos esperados.

ii. Cálculo e interpretación

La **volatilidad** se puede calcular de varias maneras, siendo **una de las más comunes** la **desviación estándar** de los rendimientos históricos de un activo.

Una **volatilidad alta** indica que el valor del activo puede **fluctuar considerablemente** en un **corto período de tiempo**, mientras que una **volatilidad baja** sugiere **movimientos más estables y predecibles**.

iii. Impacto en la evaluación de riesgos

En el contexto de la gestión de inversiones, **la volatilidad influye en decisiones** como la selección de activos y la construcción de carteras.

Los inversores suelen buscar un **equilibrio entre rendimientos potenciales y riesgos**, teniendo en cuenta la volatilidad esperada de sus inversiones.

iv. Modelado de riesgos

Los **modelos de valoración de riesgos**, como el Valor en Riesgo (VaR) o la simulación de Monte Carlo, **utilizan la volatilidad** como un parámetro clave.

Estos modelos intentan **estimar la pérdida máxima potencial** que una cartera podría sufrir en un período de tiempo dado, considerando **diferentes niveles de volatilidad**.

v. Factores que influyen en la volatilidad

Varios factores pueden **influir en la volatilidad** de un activo, como eventos económicos, políticos o corporativos, condiciones del mercado, cambios en las tasas de interés, y noticias inesperadas.

Por ejemplo, los anuncios de resultados financieros, cambios en la política monetaria o crisis geopolíticas suelen desencadenar movimientos bruscos en los mercados financieros.

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica**
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Obtención de la volatilidad a partir de datos históricos

La **volatilidad de una serie financiera** se refiere a la **medida de la dispersión de los rendimientos de dicha serie a lo largo del tiempo**. Formalmente, la volatilidad se puede definir de la siguiente manera.

Dada una serie de precios P_t para un activo financiero, donde $t \in \{1, 2, \dots, T\}$ representa los distintos periodos de tiempo, la **volatilidad se puede calcular como la desviación estándar de los rendimientos logarítmicos diarios** r_t , es decir:

$$\text{Volatilidad} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2},$$

donde:

- $r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ es el **rendimiento logarítmico diario** del activo en el periodo t .
- $\bar{r}$ es el **promedio de los rendimientos logarítmicos diarios** en el periodo de tiempo T .

Observaciones

- La volatilidad muestra cuánto **fluctúan los precios de un activo con respecto a su tendencia media histórica**.
- Proporciona una **medida de la incertidumbre o el riesgo** asociado con ese activo.

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- **Modelos GARCH**
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Estimación de la volatilidad mediante modelos GARCH

La **estimación de la volatilidad mediante modelos GARCH** (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) es un enfoque común y efectivo utilizado en el análisis financiero para capturar la naturaleza cambiante de la volatilidad en series temporales de datos financieros.

Definición básica de modelos GARCH

Los **modelos GARCH** son una extensión de los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) que se utilizan para modelar y predecir la volatilidad en series temporales financieras.

Estos modelos reconocen que **la volatilidad en los datos financieros no es constante a lo largo del tiempo**, sino que exhibe **patrones de persistencia y cambios en su nivel**.

Componentes de un modelo GARCH

Dada una serie temporal $\{X_t\}_{t \geq 0}$ que modela los precios de un determinado activo financiero en cada instante de tiempo t , un modelo GARCH se compone de los siguientes elementos:

i. **Componente ARMA para la media.**

Un modelo GARCH generalmente incluye un componente ARMA (Autoregressive Moving Average) para modelar la media de la serie temporal. Este componente **captura las relaciones de dependencia temporal** en los rendimientos de los activos.

ii. **Componente GARCH para la Volatilidad.**

El componente clave de un modelo GARCH es el término GARCH, que modela la volatilidad condicional. En un modelo $GARCH(p, q)$, la volatilidad condicional σ_t^2 en el periodo t se modela como una combinación lineal de:

- Un término constante.
- Los cuadrados de los errores, $\epsilon_{t-i}^2 = \frac{X_{t-i} - \mu_{t-i}}{\sigma_{t-i}^2}$, hasta el orden q .
- Los valores pasados de la volatilidad, σ_{t-j}^2 , hasta el orden p .

Expresión matemática de un modelo GARCH

Matemáticamente, la **volatilidad condicional** se puede expresar como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

- ω es el **término constante**.
- α_i y β_j son coeficientes que determinan la **importancia** de los **términos de error pasado** y **volatilidad pasada** respectivamente.

Estimación y uso en la práctica

La estimación de un modelo GARCH implica ajustar los parámetros ω , α_i y β_j a los datos históricos de la serie financiera utilizando técnicas de optimización, como la máxima verosimilitud.

Una vez estimado, un modelo GARCH se puede utilizar para:

- **Predecir la volatilidad futura.**
- **Calcular medidas de riesgo**, como el Valor en Riesgo (VaR), que requieren proyecciones precisas de la volatilidad.
- **Investigar** la persistencia y la naturaleza de los choques de volatilidad en los mercados financieros.

Ventajas y limitaciones

- Ventajas.

Los modelos GARCH **capturan eficazmente la naturaleza cambiante y persistente de la volatilidad** en los mercados financieros.

- Inconvenientes.

La **complejidad computacional y la elección adecuada de los parámetros** pueden ser desafíos en la estimación de modelos GARCH.

Además, estos modelos **asumen una estructura específica para la volatilidad condicional**, que puede no capturar completamente la complejidad real de los mercados financieros en todos los casos.

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Planteamiento

En el siguiente ejemplo se realiza una **estimación de la volatilidad** usando unos activos financieros disponibles en el paquete *quantmod* de R para disponer de datos históricos de precios.

A continuación se aplicará un modelo $GARCH(1,1)$ para estimar la volatilidad mediante funciones disponibles en el paquete *rugarch* del lenguaje R.

Pasos

Se realizarán los siguientes pasos:

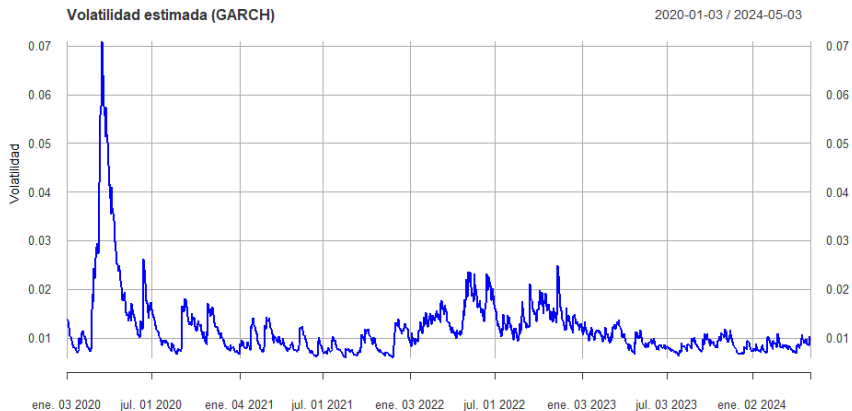
1. Se instalarán, si no lo están ya, y se cargarán los paquetes *quantmod* y *rugarch*.
2. Se **obtendrán datos históricos de precios de algunos activos financieros** utilizando la función *getSymbols* del paquete *quantmod*. En este ejemplo, utilizaremos los precios de cierre diarios del índice S&P 500 (SPY) como un activo de referencia.
3. Se **calcularán los rendimientos logarítmicos diarios** a partir de los datos de precios obtenidos. Los rendimientos logarítmicos se calculan como la diferencia logarítmica entre los precios de cierre diarios.
4. Se **estimaré un modelo $GARCH(1,1)$ a los rendimientos logarítmicos diarios** mediante funciones disponibles en el paquete *rugarch*.
5. Se **obtendrá la volatilidad condicional** estimada una vez que el modelo GARCH anterior ha sido ajustado a los datos.
6. Se **visualizará la serie temporal de la volatilidad** para entender como ha variado a lo largo del tiempo.

Código fuente en lenguaje R

```
1 # Paso 1: carga de paquetes necesarios
2 library(quantmod)
3 library(rugarch)
4 # Paso 2: carga de datos de historicos de precios
5 getSymbols("SPY",from="2020-01-01", to=Sys.Date())
6 # Paso 3: calculamos los rendimientos logartimicos
7 # Precios de cierre ajustados
8 prices<-Cl(SPY)
9 # Rendimientos logaritmicos diarios
10 returns<-diff(log(prices),lag=1)
11 # Se eliminan datos perdidos (NA)
12 returns<-na.omit(returns)
13 # Paso 4: estimar un modelo GARCH(1,1)
14 # Especificacion del modelo
15 garch_spec<-ugarchspec(mean.model = list(armaOrder=c(0,0)),
16                         variance.model=list(model="sGARCH",garchOrder=c(1,1)))
17 # Estimacion del modelo
18 garch_fit<-ugarchfit(data=returns,spec=garch_spec)
19 # Paso 5: obtencion de la volatilidad condicional estimada
20 estimated_volatility<-sigma(garch_fit)
21 # Paso 6: visualizacion de la volatilidad estimada
22 plot(estimated_volatility,type="l",col="blue",
23      main="Volatilidad estimada (GARCH)",ylab="Volatilidad")
```

Visualización y discusión

El gráfico siguiente permite **entender como ha variado la volatilidad a lo largo del tiempo** para los precios de cierre diarios del índice S&P 500 (SPY).



Especificación del modelo

El objeto `garch_fit` del código fuente anterior almacena mucha información relativa al modelo GARCH ajustado.

Si se visualiza en la consola de R salida que ofrece este objeto, la primera parte incluye la descripción del modelo especificado en la variable `garch_spec`. Justo debajo aparecen los parámetros óptimos estimados (*Optimal parameters*), que en este caso son:

- $\mu = 0.000771$.
- $\omega = 0.000005$.
- $\alpha_1 = 0.157349$.
- $\beta_1 = 0.810979$.

Con estos datos el modelo GARCH que estima la volatilidad condicionada tiene la siguiente expresión:

$$\sigma_t^2 = 0.000005 + 0.157349 \cdot \epsilon_{t-1}^2 + 0.810979 \cdot \sigma_{t-1}^2,$$

donde $\epsilon_{t-1}^2 = \frac{X_{t-1} - \mu_{t-1}}{\sigma_{t-1}^2}$ y dado que la media ha sido estimada por un modelo $ARMA(0, 0)$, se tiene que $\mu_{t-1} = 0.000771$ más un ruido blanco.

Predicción de la volatilidad a futuro

Si se quieren hacer **predicciones de la volatilidad a futuro** tan solo habría que obtener datos con el modelo anterior, es decir:

$$- \sigma_t^2 = 0.000005 + 0.157349 \cdot \epsilon_{t-1}^2 + 0.810979 \cdot \sigma_{t-1}^2$$

$$- \epsilon_{t-1}^2 = \frac{X_{t-1} - 0.000771}{\sigma_{t-1}^2}$$

Comentarios finales

- Como se ha dicho anteriormente, los modelos GARCH son modelos de heterocedasticidad condicionada, de modo que habría que hacer un exploratorio previo de la serie temporal para **comprobar que la varianza de la serie no es constante en el tiempo**.
- La **serie no debería estar correlacionada o, como mucho, tener un orden de correlación muy bajo**, pero sí **ser dependiente a lo largo del tiempo**. Test de hipótesis como el de Box-Ljung, justificarían que las correlaciones de muchos tiempos son 0, y test de hipótesis como el de Deckey-Fuller informarían de la estacionariedad de la serie.
- Los **errores deberían seguir una distribución normal**. Esto se puede justificar con gráficos qqplots, etc.
- En el ejemplo ilustrado anteriormente se ha considerado que **la media se estima mediante un modelo autoregresivo de medias móviles**. Pero al considerar un modelo $ARMA(0,0)$ realmente no hay ni parte autoregresiva ni de medias móviles. Es importante realizar un estudio de la serie temporal para considerar un modelo adecuado para la función de medias del proceso.

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Comentarios preliminares

A lo largo del tema 3 ha quedado patente **como de complicado puede resultar estimar el cuantil** de algunas distribuciones y, en particular, el **Valor en Riesgo**.

Se ha justificado que en algunas distribuciones, como la **distribución normal**, es posible **obtener este cuantil de forma analítica**, por lo que se suele admitir que los rendimientos y diferencias diarias en los valores de una cartera siguen esta distribución a lo largo del tiempo.

Desafortunadamente esta **hipótesis de normalidad no siempre**, más bien difícilmente, es **admisible**, debido a la curtosis y asimetría que suelen presentar las series temporales.

En otras ocasiones se suele recurrir a la **simulación**, ya sea **histórica** o **Montecarlo**.

En la sección anterior se ha justificado el **uso de la volatilidad como medida de riesgo** en ciertos ambientes y **se ha estimado su valor a futuro** mediante modelos de heterocedasticidad condicionada.

Estimación del *VaR* mediante modelos *GARCH* para horizontes futuros

Dada X_t una serie temporal financiera. El Valor en Riesgo (*VaR*) al nivel de confianza $1 - \alpha$ es definido como el cuantil $1 - \alpha$ de la distribución de pérdidas futuras condicionales dada la información disponible en el tiempo t . Bajo un modelo GARCH, **podemos estimar** el *VaR* de la siguiente manera:

- **Simulación de Futuras Pérdidas.** Dado el modelo GARCH ajustado, podemos simular futuras trayectorias de la serie temporal. Esto implica simular valores futuros de los errores estándar (volatilidad) basados en la distribución condicional especificada por el modelo GARCH.
- **Cálculo del *VaR*.** Para cada trayectoria simulada de X_t , calculamos las pérdidas futuras como: $\text{pérdida}_{t+1} = -y_t$, donde y_t es el valor simulado de la serie temporal. Luego ordenamos estas pérdidas simuladas y tomamos el percentil $1 - \alpha$ como el *VaR* al nivel de confianza $1 - \alpha$.

Estimación del VaR con modelos GARCH en lenguaje R

El siguiente código fuente de R, basado en el mismo ejemplo de la diapositiva 21, simula el VaR a 100 tiempos futuros aprovechando la estimación de la volatilidad mediante un modelo *GARCH*.

```

1 #####
2 # En una primera etapa se estima la volatilidad con un modelo GARCH #
3 #####
4 # Paso 1: carga de paquetes necesarios
5 library(quantmod)
6 library(rugarch)
7 # Paso 2: carga de datos de historicos de precios y rendimientos logaritmicos
8 getSymbols("SPY",from="2020-01-01", to=Sys.Date())
9 # Precios de cierre ajustados
10 prices<-Cl(SPY)
11 # Rendimientos logaritmicos diarios
12 returns<-diff(log(prices),lag=1)
13 # Se eliminan datos perdidos (NA)
14 returns<-na.omit(returns)
15 # Paso 3: estimar un modelo GARCH(1,1)
16 # Especificacion del modelo
17 garch_spec<-ugarchspec(mean.model = list(armaOrder=c(0,0)),
18                          variance.model=list(model="sGARCH",garchOrder=c(1,1)))
19 # Estimacion del modelo
20 garch_fit<-ugarchfit(data=returns,spec=garch_spec)
21 # Paso 4: obtener la proyeccion de volatilidad futura
22 forecast <- ugarchforecast(garch_fit, n.ahead = 100) # Proyectar un periodo hacia
               adelante

```

```

23 # Obtener la volatilidad condicional proyectada
24 forecast_vol <- sigma(forecast)
25 plot(forecast_vol,type="l",col="red",
26      main="Volatilidad proyectada a un tiempo futuro (GARCH)",ylab="Volatilidad")
27 #####
28 # Calcular el VaR en la segunda etapa #
29 #####
30 horizon <- 100 # Horizonte de tiempo (100 dia en este caso)
31 alpha <- 0.05 # Nivel de confianza del 95%
32 # Obtener el ultimo precio de cierre
33 last_price <- as.numeric(prices[length(prices)])
34 # Calcular el VaR usando la volatilidad condicional estimada sobre los precios
35 VaR_prices <- last_price * forecast_vol * qnorm(alpha)*horizon
36 # Imprimir el VaR calculado
37 plot(VaR_prices,type="l",col="red",
38      main="VaR prices estimado (GARCH)",ylab="VaR")

```

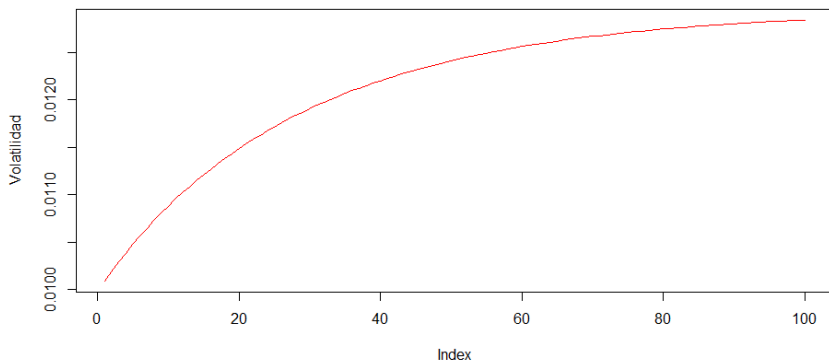
Observación

Se recomienda al lector ejecutar el código fuente e inspeccionar cada uno de los objetos creados en el mismo (garch_fit, forecast, etc.), a través de la consola de R.

Interpretación de las salida gráfica de la volatilidad a futuro

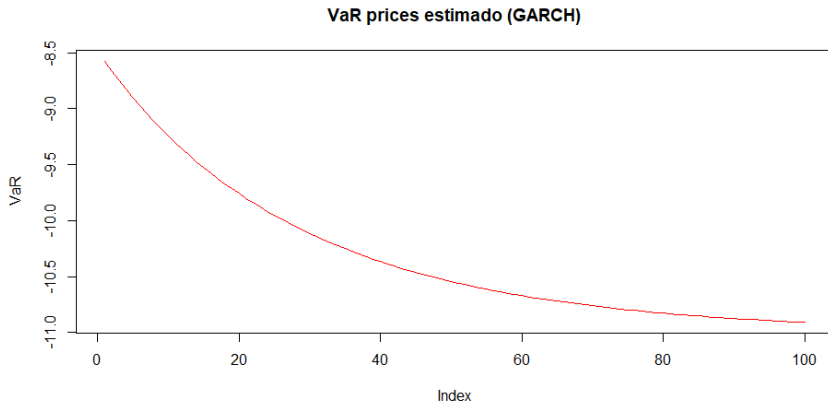
El gráfico siguiente permite **anticiparse a la variabilidad de la volatilidad a lo largo de los próximos 100 días** para los precios de cierre diarios del índice S&P 500 (SPY).

Volatilidad proyectada a un tiempo futuro (GARCH)



Interpretación de la salida gráfica del VaR a futuro

El gráfico siguiente permite **anticiparse a la variabilidad del valor en riesgo a lo largo de los próximos 100 días** para los precios de cierre diarios del índice S&P 500 (SPY).



1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

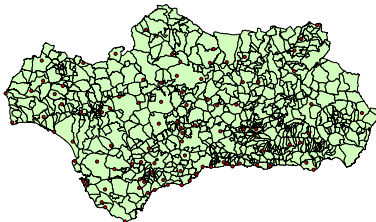
2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Motivación



Red de estaciones meteorológicas de Andalucía.

Fuente: AEMET. <http://www.datosclima.es>; <http://www.aemet.es>

- La dinámica de una amplia variedad de fenómenos físicos (ciencias medioambientales, hidrología, epidemiología, etc.) queda representada de forma adecuada por modelos de campos aleatorios.
- El análisis de comportamientos extremos está estrechamente relacionado con la valoración de situaciones de peligro en escenarios concretos.
- Es habitual tener información en una **red de medición formada por nodos a lo largo del territorio**.
- Asumida una estructura de covarianzas se hace necesaria la realización de **simulación condicionada** para conocer el comportamiento del fenómeno en una región espacial de interés.
- Distintas medidas de riesgo tales como el **Valor en Riesgo (VaR)** y el **Valor en Riesgo Promedio** o Déficit Esperado (AVaR) proporcionan una fácil interpretación de lo que se entiende por riesgo según el contexto, así como una sencilla implementación computacional.

Objetivos

Con el objetivo subyacente de llevar de la mano el **análisis de comportamientos extremos** en contextos espaciales y las **medidas de riesgo** mencionadas, en este seminario se pretende:

- Dar una visión general de todos los aspectos implicados en la valoración de riesgos en contextos espaciales.
- Estimación de distintos modelos de covarianzas espaciales y espacio temporales.
- Simulación no condicionada y condicionada.
- Selección de umbrales de riesgo y computación de los conjuntos de excedencia de umbrales.
- Estimación del VaR y AVaR en nodos puntuales del sistema.
- Ilustración metodológica para la estimación del VaR y AVaR para distintos indicadores aleatorios por encima de umbrales de riesgo.

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- **Campos Aleatorios**
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Procesos espaciales

Un **campo aleatorio escalar** o **proceso espacial** es una *colección de variables aleatorias sobre todas las localizaciones espaciales* de un subconjunto del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^d$.

Denotamos por:

$$X = \{X(s) : s \in S \subseteq \mathbb{R}^d\},$$

donde $X(s)$, $\forall s \in S$, es una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Realización de un proceso espacial

Una **realización** de un campo aleatorio es el *resultado conjunto de una observación del experimento aleatorio en todas las localizaciones*. Denotaremos por $x = x(s)$ a las realizaciones del campo.

Al resultado de la realización en una localización concreta, s , lo denominaremos **estado** del campo aleatorio en esa ubicación espacial.

Observaciones:

- Si $d = 1$ nos referimos a este concepto como **proceso estocástico**.
- Si en cada localización se analizan distintas características aleatorias mediante un *vector aleatorio* decimos que el **campo aleatorio es vectorial**.
- La **distribución de un campo aleatorio** queda determinada por la función de distribución conjunta de todas las variables aleatorias en cada localización espacial del territorio. Esto se refiere a todas las distribuciones conjuntas bidimensionales, tridimensionales, etc.
- A partir de la distribución anterior se podrían deducir la **función de densidad conjunta** (campo aleatorio continuo) o la **función masa de probabilidad** (campo aleatorio discreto).

Tipos de procesos espaciales

Dependiendo de las suposiciones sobre el conjunto S distinguimos:

- **Procesos geoestadísticos.** El índice espacial es continuo, es decir, el conjunto S tiene un conjunto infinito no numerable de localizaciones observables.
- **Procesos regionales.** El proceso solo puede ser observado en un conjunto numerable de localizaciones.
- **Procesos o patrones puntuales.** Las posiciones en las que se observa el proceso son aleatorias.

Características de un campo aleatorio: función de covarianzas

Desde este momento, consideramos procesos geoestadísticos con espacio de localizaciones infinito no numerable (denso en $\mathbb{R}^d$), $X = \{X(s) : s \in S \subseteq \mathbb{R}^d\}$.

- Se pueden definir los conceptos de **esperanza** y **varianza** del campo aleatorio $E[X(s)] = \mu(s)$ y $Var[X(s)] = \sigma^2(s)$ a partir de las definiciones para variables aleatorias.
- La **función de covarianzas** del campo referida a dos localizaciones diferentes también se obtiene a partir de la definición clásica de este concepto,

$$C(s, s') = C_X(s, s') = Cov[X(s), X(s')] = E[X(s)X(s')] - \mu(s)\mu(s').$$

- Los conceptos introducidos anteriormente **dependen**, en general, de la **localización** $s \in S$.

Campos aleatorios homogéneos e isotrópicos

Un campo aleatorio se dice **homogéneo** o **estacionario** si todas las funciones de distribución conjuntas permanecen sin cambios cuando se aplica una traslación en el espacio de parámetros referido a las localizaciones $s_1, s_2, \dots$.

Un campo aleatorio se dice **isotrópico** si todas las funciones de distribución conjuntas se mantienen invariantes frente a rotaciones en el espacio de parámetros referido a las localizaciones.

Comentarios:

- En el caso de **campo aleatorio homogéneo** los momentos **no dependerán** de la **posición** y por tanto $E[X(s)] = \mu$ y $Var[X(s)] = \sigma^2$ y la función de covarianzas solo dependerá de la posición relativa de las localizaciones, $C(s, s') = C(\tau)$ donde $\tau = s - s'$.
- Si el campo es además **isotrópico**, la función de covarianzas tan solo dependerá de la distancia entre las localizaciones, $C(\tau) = C(|\tau|) = C(|s - s'|)$.

Campos aleatorios Gaussianos

Un campo aleatorio, $X = \{X(s) : s \in S \subseteq \mathbb{R}^d\}$, se dice **gaussiano** o **estacionario**, si $\forall M > 0$ y $\forall s_1, s_2, \dots, s_M$, el vector aleatorio $(X(s_1), \dots, X(s_M))^t$ sigue una distribución **normal multivariante** con vector de medias μ y matriz de covarianzas $\Sigma = (\sigma_{ij})$ con $\sigma_{ij} = C(s_i, s_j)$, $\forall i, j \in \{1, \dots, M\}$.

Algunos comentarios

- **Propiedad fundamental.** En el caso gaussiano, el sólo **conocimiento de las funciones de media**, $\mu(s)$, y **covarianzas**, $C(s, s')$, de estos vectores **determina completamente la distribución** del campo aleatorio X .
- Si además el campo gaussiano es **homogéneo**, $\mu(s) = \mu$ (constante), se suele suponer que está **centrado** asumiendo que $\mu = 0$.
- En el caso de **homogeneidad** del campo gaussiano, también suele escribirse la **función de covarianzas como una función de una sola variable**, $C(s) = E[X(s)X(s + s_0)]$, considerando un punto s_0 del espacio fijo y $\mu = 0$.

Características estructurales de campos aleatorios

- El **comportamiento extremal de un campo aleatorio** se puede analizar en términos de las propiedades geométricas de conjuntos de excedencias de umbrales.
- La **valoración del riesgo** está con frecuencia relacionada con **funciones de pérdida** basadas en características geométricas de conjuntos de excedencia de umbrales.

Notación

- $X = \{X(s) : s \in S \subseteq \mathbb{R}^d\}$ campo aleatorio (RF) espacial.
- $A_u(X, D) = \{s \in D : X(s) \geq u\}$ **conjunto de excursión** de X en $D \subseteq S$ sobre el nivel $u \in \mathbb{R}$.
- $I_u^X(s) = 1_{\{X(s) \geq u\}}$ es el RF indicador de u -excedencia.
- $X_u(s) = \max\{0, X(s) - u\}$ es el RF de u -exceso.
- λ **medida de Lebesgue** sobre $\mathbb{R}^d$.
- $X_u^D(s) = \max\{0, X^D(s) - u\}$ con X^D la v.a. **mixtura o compuesta** con CDF F_X^D .
- $F_X^D(x) = \int_D F_{X(s)}(u) \lambda^D(ds)$ **CDF de la distribución de probabilidad de la v.a. mixtura** basada en las CDFs $F_{X(s)}$ respecto de la medida normalizada λ^D sobre el espacio de parámetros D .
- $S_X^D(x) = 1 - F_X^D(x)$ la correspondiente **DDF**.

AREAS de excedencia

Indicador de área	Notación	Expresión
Absoluta	$\lambda(A_u(X, D))$	$\int_D I_u^X(s) ds$
Relativa	$\lambda^D(A_u(X, D))$	$\lambda(A_u(X, D)) / \lambda(D)$
Esperada (absoluta)	$E[\lambda(A_u(X, D))]$	$\lambda(D) S_X^D(u)$
Esperada (relativa)	$E[\lambda^D(A_u(X, D))]$	$S_X^D(u)$

VOLÚMENES de excedencia

Indicador de volúmen	Notación	Expresión
Absolute	$V(A_u(X, D))$	$\int_u^{+\infty} \lambda(A_{u'}(X, D))(s) ds$
Relativo (w.r.t. D)	$V^D(A_u(X, D))$	$V(A_u(X, D)) / \lambda(D)$
Relativo (w.r.t A_u)	$V^{A_u}(A_u(X, D))$	$V(A_u(X, D)) / \lambda(A_u)$
Esperado (absoluto)	$E[V(A_u(X, D))]$	$\lambda(D) E[X_u]$
Esperado (w.r.t D)	$E[V^D(A_u(X, D))]$	$\lambda(D) E[X_u^D]$

Relevancia de la función de distribución compuesta CDF

De acuerdo con **Romero et al. (2018)**, dado un campo aleatorio espacial X en $S \in \mathbb{R}^d$ satisfaciendo ciertas condiciones de regularidad, $D \subseteq S$ un dominio acotado, y $u \in \mathbb{R}$ un umbral fijado, se tiene que:

- i. $\lambda(A_u(X, D)) = \int_D I_u^X(s) ds$
- ii. $E[\lambda(A_u(X, D))] = \lambda(D) S_X^D(u)$
- iii. $E[\lambda^D(A_u(X, D))] = S_X^D(u)$
- iv. $V(A_u(X, D)) = \int_u^{+\infty} \lambda(A_{u'}(X, D)) du' = \int_D X_u(s) ds$
- v. $E[V(A_u(X, D))] = \lambda(D) \int_u^{+\infty} S_X^D(u') du' = \lambda(D) E[X_u^D]$
- vi. $E[V^D(A_u(X, D))] = \int_u^{+\infty} S_X^D(u') du' = E[X_u^D]$

donde $X_u^D = \max\{0, X^D - u\}$.

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Origen e interés actual

- La *teoría de medidas de riesgo* es una disciplina científica **motivada por áreas de aplicación tales como Finanzas, Seguros, Medioambiente, etc.**
- Hay un creciente **interés en medidas de riesgo que tengan en cuenta las características espaciales** del entorno con el fin de detectar áreas de riesgo.

¿Qué es una medida de riesgo?

Una **medida de riesgo** es una función

$$\rho : \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$$

que satisface **ciertas propiedades**. **Observaciones:**

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de probabilidad.
- $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espacio de las funciones reales Borel-medibles (variables aleatorias) definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
- Usualmente, $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P) = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $p \in [1, \infty]$.

¿Qué propiedades debe satisfacer una medida de riesgo?

Principalmente motivados por problemas y aplicaciones en el ámbito financiero y actuarial, diferentes conjuntos de '**propiedades deseables**' son consideradas '**principios**' para la definición de **clases de medidas de riesgo**.

Medidas de riesgo **Coherentes**

A1 Invarianza por traslaciones

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a, \text{ para } a \in \mathbb{R}$$

A2 Monotonicidad

$$X \leq Y \text{ a.s.} \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

A3 Homogeneidad positiva

$$\rho(aX) = a\rho(X), \text{ para } a > 0$$

A4 Sub-aditividad

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

Medidas de riesgo **Convexas**

A1 Invarianza por traslaciones

$$\rho(X + a) = \rho(X) + a, \text{ for } a \in \mathbb{R}$$

A2 Monotonicidad

$$X \leq Y \text{ a.s.} \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

A5 Convexidad

$$\rho(aX + (1 - a)Y) \leq a\rho(X) + (1 - a)\rho(Y), \text{ para } a \in [0, 1]$$

Construcción de medidas de riesgo

- Las medidas de riesgo son formuladas de forma habitual en **términos de momentos o cuantiles** de la distribución de la variable aleatoria.
- En esta charla adoptamos el convenio de que las medidas de riesgo son calculadas sobre variables aleatorias que **representan 'pérdida' en algún sentido**.

Value-at-Risk

$$VaR_{1-\alpha}(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 1 - \alpha\}$$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces:

$$VaR_{1-\alpha}(X) = F_X^{-1}(1 - \alpha)$$

- $VaR_{1-\alpha}(X)$ representa la **mínima pérdida** que ocurre en los $100\alpha\%$ peores escenarios ($1 - \alpha$ cuantil superior de la distribución de X).
- $VaR_{1-\alpha}(X)$ no es coherente (usualmente no sub-aditiva).

Déficit Esperado (Expected Shortfall)

$$AVaR_{1-\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha} \int_{1-\alpha}^1 VaR_p(X) dp$$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces:

$$E[X | X > VaR_{1-\alpha}(X)]$$

$AVaR_{1-\alpha}(X)$ representa la **pérdida promedio** que ocurre en los $100\alpha\%$ peores escenarios.
 $AVaR_{1-\alpha}(X)$ es coherente.

Medidas espectrales

$$M_\phi(X) = \int_0^1 VaR_p(X) \phi(p) dp$$

- $AVaR_\alpha$ es un ejemplo de medida espectral.
- VaR_α se puede ver como valor límite de medidas espectrales por medio de la distribución de Dirac, i.e.

$$VaR_\alpha(X) = \int_0^1 VaR_p(X) \delta_\alpha(p) dp,$$

donde δ_α denota la distribución de Dirac.

$M_\phi(X)$ es una medida de riesgo coherente para funciones peso monótonas no decrecientes (e.g. $AVaR_{1-\alpha}(X)$).

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- **Aspectos Metodológicos**
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Motivación

- En la práctica, modelos basados en **simulación condicional** pueden ser utilizados para el estudio de características estructurales globales y locales y sus medidas de riesgo relacionadas.
- Diferentes **mapas de riesgo** se pueden dibujar en base a un análisis global y local de características estructurales de excedencia de umbrales y medidas de riesgo relacionadas.
- En el caso espacio-temporal, el análisis de **medidas transversales espaciales en diferentes horizontes temporales** provee un medio para construir mapas de riesgo dinámicos y valorar en el espacio-tiempo la evolución de excedencias regionales.

Metodología

Basado en la función de distribución compuesta empírica CDF, F_X^D , desde n realizaciones simuladas, para el modelo subyacente al fenómeno de estudio y con los valores estimados de los parámetros, estudiamos las distribuciones empíricas de varias características, así como **VaR** y **AVaR**, para umbrales (percentiles) dados:

- AREAS:

- Area
- Promedio de área por componente conexas

- VOLUMENES:

- Volúmen
- Promedio de volúmen por componente conexas
- Volúmen/Area
- Promedio Volúmen/Area por componente conexas

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- **Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)**
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

Precipitación en Andalucía (espacial)

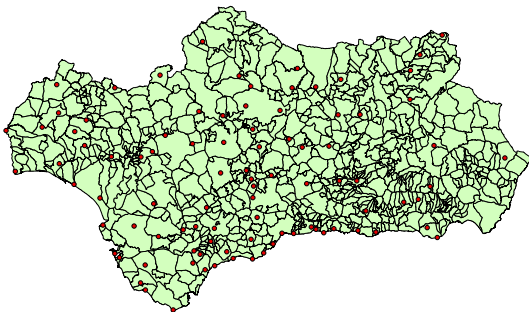
- **Datos** de precipitaciones medidos en 93 estaciones de **Andalucía** en el mes de Abril de 2014 y 2015.
- **Valores:** *Logaritmos de los valores centrados* para el ajuste del modelo y simulación condicional y valores reales de la magnitud para el análisis de riesgo espacial.
- El **modelo de Cauchy** se define por la función de covarianza homogénea e isotrópica:

$$C(h) = \sigma^2(1 + |h|^\alpha)^{-\beta/\alpha}, \quad \alpha \in (0, 2] \text{ and } \beta > 0.$$

Esta clase proporciona una caracterización separada de la variabilidad local y de los rangos de dependencia. Para un campo aleatorio sobre $\mathbb{R}^d$:

- El parámetro α determina la **dimensión fractal** de las realizaciones, $D = d + 1 - \alpha/2$.
- Si $\beta \in (0, 1)$, el proceso tiene **larga memoria**.
- $n = 200$ **realizaciones** sobre el rectángulo $[0, 531] \times [0, 271]$ (173.901 pixels escala 3km; localizaciones identificadas con centroides de pixels).

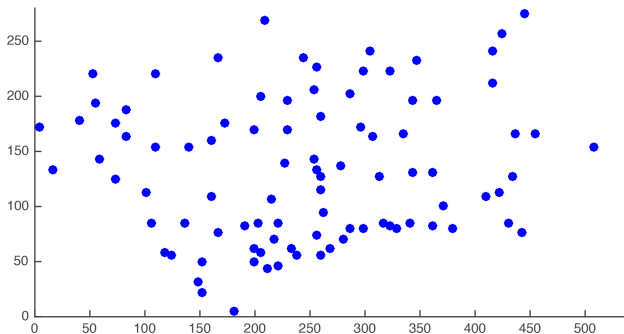
Estaciones meteorológicas



Red de estaciones meteorológicas de Andalucía.

Fuente: AEMET. <http://www.datosclima.es>; <http://www.aemet.es>

Estaciones meteorológicas en el grid



Estaciones meteorológicas en el grid $[0, 175] \times [0, 93]$ de pixeles.

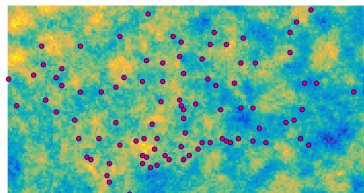
Ajuste del modelo. R syntax para el modelo de Cauchy generalizado

```
RMgencauchy(alpha, beta, var, scale)
```

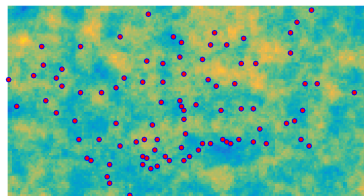
Parámetros estimados

	Abr. 2014	Abr. 2015
<i>alpha</i>	0.83	1.93
<i>beta</i>	0.11	0.10
<i>var</i>	1.55	0.68

Primera realización ($n = 1$) del campo condicional simulado

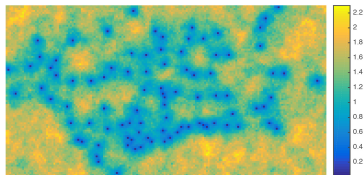


(a) Abril 2014

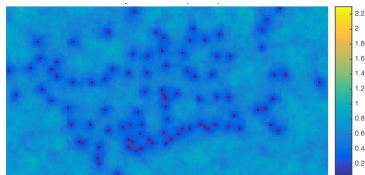


(a) Abril 2015

Mapa de varianzas



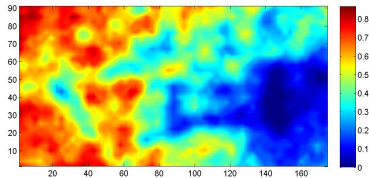
(a) Abril 2014



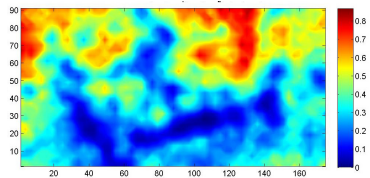
(a) Abril 2015

Análisis del riesgo

- Los percentiles son fijados desde la distribución de la v.a. **mixtura** basada en realizaciones condicionadas para cada modelo.
- Se derivan y comparan resultados para áreas, volúmenes, y volúmenes relativos a áreas, globalmente y localmente por componentes conexas.
- Se realiza un estudio local, **basado en ventanas deslizantes**, para valorar la variación regional del riesgo. La escala de análisis y grado de interpolación se determinan por el tamaño de la ventana y el paso de deslizamiento.
- Aquí se utilizan 1829 ventanas cuadradas de tamaño 9, y paso 3 unidades (píxeles).
- Dibujamos mapas de riesgo para diferentes indicadores y percentiles.



(a) $VaR_{0.95}(\lambda^D(A_{0.9}(X, D)))$, Abril 2014



(a) $VaR_{0.95}(\lambda^D(A_{0.9}(X, D)))$, Abril 2015

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

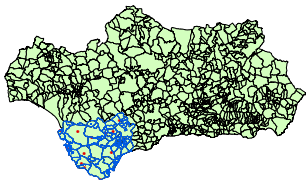
Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

- **Datos** de precipitación medida en 13 estaciones en **Cádiz** durante 7 meses consecutivos (Octubre 2014 to Abril 2015).
- **Valores:** *Logaritmos de los valores centrados* para el ajuste del modelo y simulación condicional y valores reales de la magnitud para el análisis de riesgo espacial
- El modelo de **Gneiting**. Modelado espacio-temporal, donde la componente espacial es isotrópica, definido por la función de covarianza

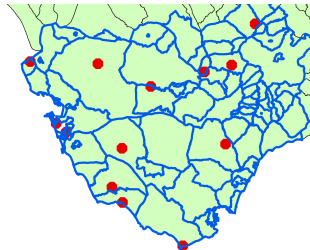
$$C(h, u) = (\psi(u) + 1)^{\frac{-d}{2}} \phi \left(\frac{h}{\sqrt{\psi(u) + 1}} \right)$$

- $n = 200$ **realizaciones** sobre el rectángulo $[0, 111] \times [0, 104]$ (11544 píxeles escala 1km; localizaciones identificadas con centroides de píxel).

Estaciones meteorológicas



(a) Área de estudio



(a) Estaciones de medición en Cádiz

Estaciones meteorológicas en el grid

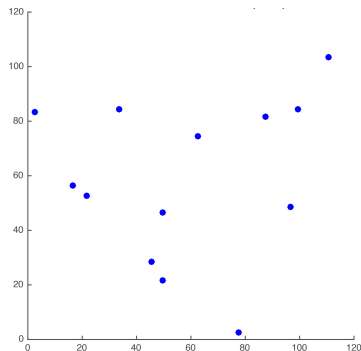


Figure 9: Estaciones meteorológicas en el grid de píxeles.

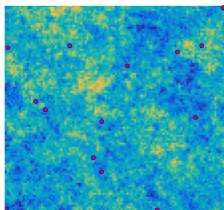
Ajuste del modelo. R syntax for Gneiting's model

- Simulación condicional utilizando los últimos tres meses (Febrero, Marzo y Abril 2015) para el grid rectangular considerado, y para los mismos meses y dos después (Mayo y Junio 2015).
- R syntax para el modelo de Gneiting: $RMnsst(phi, psi, delta = 2, var = var)$, donde $phi = RMgencauchy(alpha, beta, var, scale)$ es un modelo de covarianzas de **Cauchy generalizado** y $psi = RMstable(alpha)$ es un modelo **Exponencial**.

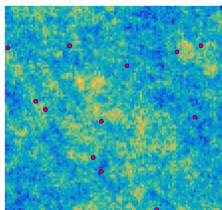
Parametros estimados

	Estimación
$alpha$ (<i>Cauchy</i>)	1.04
$beta$ (<i>Cauchy</i>)	0.68
$alpha$ (<i>Powered Exponential</i>)	0.35
var	1.24

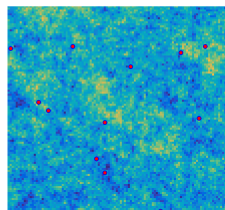
Primera realización ($n = 1$) del campo condicional simulado



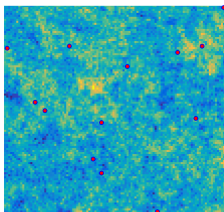
(a) Feb. 2015 ($T=1$)



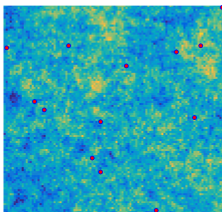
(a) Mar. 2015 ($T=2$)



(a) Abr. 2015 ($T=3$)

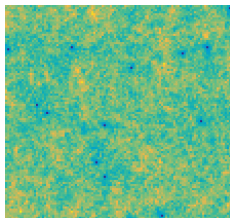


(a) May. 2015 ($T=4$)

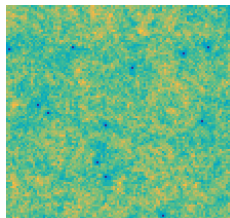


(a) Jun. 2015 ($T=5$)

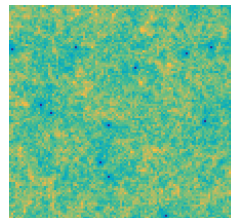
Mapa de varianzas



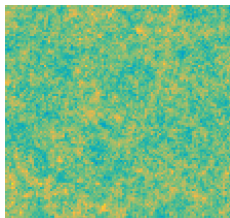
(a) Feb. 2015 (T=1)



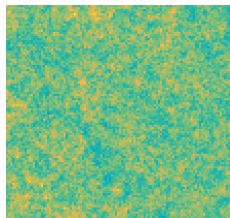
(a) Mar. 2015 (T=2)



(a) Abr. 2015 (T=3)



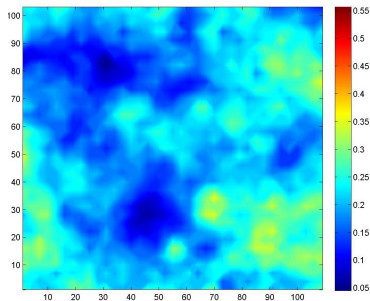
(a) May. 2015 (T=4)



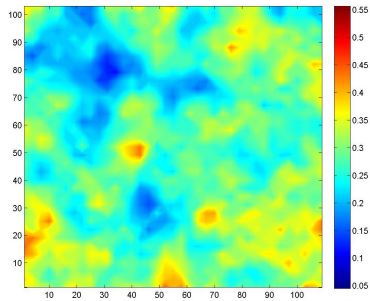
(a) Jun. 2015 (T=5)

Análisis del riesgo

- Los percentiles son fijados desde la distribución de la v.a. mixtura basada en realizaciones condicionadas para cada modelo.
- Se derivan y comparan resultados para distintos indicadores de área y volumen.
- Estudio local, **basado en ventanas deslizantes**, para la variación regional del riesgo.
- Aquí utilizamos 1295 ventanas cuadradas de tamaño 9, y paso 3 unidades (píxeles).
- Dibujamos mapas de riesgo para diferentes indicadores y percentiles.



(a) $VaR_{0.95}(\lambda^D(A_{0.9}(X, D)))$, Abr. 2015



(b) $VaR_{0.95}(\lambda^D(A_{0.9}(X, D)))$, May. 2015

1 Volatilidad y modelos GARCH

- Preliminares
- Volatilidad histórica
- Modelos GARCH
- Estimación de la volatilidad en el lenguaje R

2 VaR condicional mediante modelos GARCH

3 Análisis de riesgos en contextos espaciales

- Campos Aleatorios
- Medidas de Riesgo
- Aspectos Metodológicos
- Ilustración 1. Precipitación en Andalucía (espacial)
- Ilustración 2. Precipitación en Cádiz (espacio-temporal)

4 Bibliografía

- [1] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit (2008, 2ª ed.) Modern Actuarial Risk Theory, Using R. Springer.
- [2] P. Embrechts, C. Klüppelberg, T. Mikosch (1997) Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer.
- [3] Y. Haimes (2009, 3ª ed.) Risk Modeling, Assessment, and Management. Wiley.
- [4] M. Kriele, J. Wolf (2014) Value-Oriented Risk Management of Insurance Companies. Springer.
- [5] H. Kumamoto, E.J. Henley (1996, 2ª ed.) Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists. IEEE Press.
- [6] Gan, G., Ma, C. y Xie, H. (2014). Measure, Probability, and Mathematical Finance. Wiley.
- [7] F. Liese, K.-J. Miescke (2009) Statistical Decision Theory: Estimation, Testing and Selection. Springer.
- [8] Y. Malevergne, D. Sornette (2006) Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management. Springer.
- [9] A.J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts (2005) Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools. Princeton University Press.
- [10] S. Albeverio, V. Jentsch, H. Kantz (eds.) (2006) Extreme Events in Nature and Society. Springer.
- [11] T. Aven (2003) Foundations of Risk Analysis. A Knowledge and Decision-Oriented Perspective.
- [12] T. Aven, R. Ortwin (2010) Risk Management and Governance: Concepts, Guidelines and Applications. Springer.
- [13] T. Bedford, R. Cooke (2001) Probabilistic Risk Analysis. Cambridge University Press.
- [14] P. Best (1998) Implementing Value at Risk. Wiley.
- [15] G. Casella, R.L. Berger (2002, 2ª ed.) Statistical Inference. Duxbury.

- [16] E. de Rocquigny (2012) *Modelling Under Risk and Uncertainty: An Introduction to Statistical, Phenomenological and Computational Methods*. Wiley.
- [17] T.L. Lai, H. Xing (2008) *Statistical Models and Methods for Financial Markets*. Springer.
- [18] R.-D. Reiss, M. Thomas (2007, 3^a ed.) *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser.
- [19] I. Rychlik, J. Rydén (2006) *Probability and Risk Analysis*. Springer.
- [20] F. García Garzón (2013) *Problemas resueltos de teoría de la decisión*. OmniaScience.
- [21] Romero, J. L., Madrid, A. E., Angulo, J. M. (2018). Quantile-based spatiotemporal risk assessment of exceedances. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 32, 2275-2291.