



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

RECONSTRUCCIÓN ESPECTRAL: APLICACIÓN A LA FÍSICA DEL SABOR

Presentado por:

D. Daniel Hernández Fernández

Curso Académico 2024/2025

Resumen

Las funciones espectrales hadrónicas son magnitudes de gran relevancia en teorías cuánticas de campos cuyo conocimiento permite el cálculo de observables relevantes para la fenomenología de física de partículas, tales como secciones eficaces o tasas de desintegración. Estas funciones se pueden calcular teóricamente a través de las llamadas funciones de correlación o correladores, cuyos valores se pueden obtener a partir de simulaciones numéricas de la Cromodinámica Cuántica en redes espacio-temporales discretas (simulaciones de *lattice* QCD). La obtención de estas densidades espectrales a partir de correladores obtenidos de simulaciones de *lattice* es un problema de considerable complejidad, debido a la naturaleza discreta de las medidas y al error que estas presentan. El estudio de este problema se encuentra dentro de los llamados problemas inversos.

En este trabajo se realiza un estudio de dos de los métodos utilizados para abordar este tipo de problemas, el método de Backus-Gilbert y el método de Hansen-Lupo-Tantalo. Ambos métodos se ponen a prueba mediante un modelo de prueba con el que se puede estudiar el comportamiento con la variación de los distintos parámetros libres de los métodos, obteniendo ciertas ventajas con el método de Hansen-Lupo-Tantalo. Una vez conocido su comportamiento, se ha aplicado el método de Hansen-Lupo-Tantalo a funciones de correlación obtenidas a partir de simulaciones de *lattice* QCD y se ha estudiado el efecto que provocan los distintos parámetros de las simulaciones en la reconstrucción espectral.

Abstract

Hadronic spectral functions are highly relevant magnitudes in quantum field theories, whose knowledge allows the calculation of phenomenologically relevant observables, such as cross sections or decay rates. These spectral functions can be calculated from the so-called correlation functions or correlators, whose values can be obtained from numerical simulations of Quantum Chromodynamics on a discrete space-time grid (lattice QCD simulations). The extraction of these spectral densities from correlators obtained in lattice simulations is a problem of considerable complexity, due to the discrete nature of the measurements and the uncertainties they present. The study of this problem is found within the so-called inverse problems.

In this work, we examine two methods used to solve such problems: the Backus-Gilbert method and the Hansen-Lupo-Tantalo method. Both methods are tested using a toy model, with the objective of studying their behavior under variations of the different free parameters, demonstrating some advantages with the Hansen-Lupo-Tantalo method. Once their behavior is understood, the Hansen-Lupo-Tantalo method has been applied to correlators obtained from lattice QCD and the effect of different simulations parameters on the spectral reconstruction has been studied.

Índice

1	Introducción	5
2	Marco teórico.	6
2.1	El Modelo Estándar.	6
2.2	Cromodinámica: confinamiento y libertad asintótica.	8
2.3	<i>Lattice</i> QCD.	9
2.4	Funciones espectrales y aplicaciones fenomenológicas.	10
3	Metodología.	12
3.1	Los problemas inversos.	12
3.2	Método de Backus-Gilbert.	14
3.3	Método de Hansen-Lupo-Tantalo (HLT).	14
4	Resultados	16
4.1	Tests de los métodos de reconstrucción espectral.	16
4.1.1	Reconstrucción espectral sin error.	16
4.1.2	Reconstrucción espectral con error.	19
4.2	Reconstrucción espectral a partir de correladores de <i>lattice</i> QCD.	22
4.3	Comparación de la reconstrucción para distintos volúmenes espaciales.	24
4.4	Importancia de las correlaciones en la matriz de covarianza.	26
5	Conclusiones	26
6	Anexos	28
6.1	Cálculo de los coeficientes g_t con el método BG.	28
6.2	Cálculo de los coeficientes g_t en el método HLT.	29
	Referencias	29

1 Introducción

El Modelo Estándar de la física de partículas describe las partículas elementales conocidas, así como tres de sus cuatro interacciones. Como teoría, se ha puesto a prueba con experimentos en incontables ocasiones, y por el momento ha conseguido salir airosa de todos ellos, llegando a alcanzar una gran precisión en sus predicciones teóricas. Entre sus hitos más destacados se encuentran la predicción de la existencia de las partículas mediadoras de la fuerza nuclear débil (bosones W y Z) y fuerte (gluones), y el más reciente y famoso, la predicción del bosón de Higgs, que fue hallado experimentalmente en el gran colisionador de hadrones (LHC) en 2012 [1, 2]. Sin embargo, a pesar de ser una gran teoría, que hasta el momento no se ha podido desmentir, sabemos que está incompleta y hay varios aspectos que no ha podido explicar.

Por ejemplo, el marco de trabajo del Modelo Estándar no incluye a la fuerza de la gravedad. La gravedad actualmente está explicada mediante la Relatividad General, teoría que por el momento no se ha logrado cuantizar ni implementar en teorías cuánticas de campos, que son la base del Modelo Estándar. Teorías más allá del Modelo Estándar sugieren la existencia de una partícula mediadora, el gravitón, sin embargo ésta no se ha podido medir experimentalmente siendo un tema de interés en la actualidad.

Otro aspecto que el Modelo Estándar es incapaz de explicar es la materia oscura, materia que no hemos podido detectar directamente, pero deducimos su existencia debido a sus efectos gravitacionales. Algo similar le ocurre a la energía oscura, de la que conocemos sus efectos por la expansión del universo, pero no qué es ni qué la produce.

Las masas de los quarks tampoco pueden ser explicadas satisfactoriamente con el Modelo Estándar, ya que para este modelo son un parámetro, que se puede fijar a través de la comparación de predicciones teóricas que las involucren y las correspondientes medidas experimentales. En particular, no entendemos la jerarquía de masas, es decir, no entendemos como se organizan las masas, el porqué los quarks u y d tienen masas parecidas, mientras que el resto se diferencian en varios ordenes de magnitud. Las masas de los quarks son parámetros fundamentales de la teoría, por lo que tienen gran importancia a la hora de realizar predicciones teóricas de multitud de observables.

Por último, destacar que también existen las llamadas "tensiones". Estas se refieren a discrepancias entre los experimentos y la teoría, que no son suficientemente significativas como para asegurar que la teoría está fallando. Una de las más famosas se refiere al momento magnético anómalo del muon. El momento magnético anómalo se define como la desviación del momento magnético predicho por la mecánica cuántica relativista ($g=2$), debida a la interacción con partículas virtuales que se producen en el muón. Las predicciones teóricas realizadas por distintos grupos en el marco del Modelo Estándar han sido recientemente compiladas por la *Muon g-2 Theory initiative* [3] obteniendo un promedio de $(g - 2)_{teo}=0.0233184122(82)$, mientras que en el experimento *Muon g-2*, realizado en Fermilab [4] dio un resultado de $(g - 2)_{exp}=0.0233183620(86)$. A pesar de que se observa una discrepancia, esta se halla alrededor de cuatro desviaciones estándar, y por tanto, no podemos asegurar estadísticamente que exista una dife-

rencia entre el experimento y la teoría¹. La importancia de este cálculo reside en que podría señalarnos la existencia de algo aún desconocido, con el que el muón este interaccionando. Algo similar ocurre en las tensiones observadas entre las distintas determinaciones de otros parámetros del Modelo Estándar, como son los elementos de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa V_{cb} o V_{us} [7].

Por tanto, el Modelo Estándar de la física de partículas a pesar de ser una teoría que funciona tan bien, no consigue abarcarlo todo y por ello existe un gran interés por parte de la comunidad en el desarrollo de teorías de nueva física que expliquen, tanto las carencias teóricas del Modelo Estándar, como las tensiones que se observan actualmente. Alternativamente, en vez de intentar desarrollar teorías más allá del Modelo Estándar, podemos establecer dónde falla éste y a partir de ahí buscar las soluciones necesarias. Para ello, existen grandes grupos experimentales intentando mejorar cada vez más la precisión de las medidas, y a la vez se requieren de cálculos cada vez más precisos de la teoría para poder compararlos con los experimentos, poniendo así a prueba a la teoría.

Para el cálculo de muchas de estas cantidades de interés fenomenológico, como secciones eficaces hadrónicas inclusivas o tasas de desintegración no leptónicas, los procesos de hadronización se pueden describir mediante las llamadas densidades espectrales hadrónicas. El estudio de estas cantidades, especialmente su cálculo a partir de simulaciones numéricas de QCD en una red espacio-temporal finita (*lattice*), se ha convertido en un campo en auge debido a su potencial para ayudar a entender las tensiones observadas en algunas de las comparaciones citadas anteriormente. La extracción de densidades espectrales a partir de datos de *lattice* QCD es un problema complicado desde el punto de vista teórico y numérico. Para ello se están desarrollando distintas técnicas, no solo aplicables en este campo, sino a otros donde se afrontan también los denominados *inverse problems* (sec. 3.1). En este trabajo se pretende llevar a cabo el estudio de alguna de estas técnicas, así como su implementación a datos reales obtenidos de simulaciones de *lattice* QCD.

2 Marco teórico.

2.1 El Modelo Estándar.

El Modelo Estándar (ME) es la teoría actual que describe el comportamiento de las partículas que interactúan mediante tres de las cuatro fuerzas conocidas: la nuclear fuerte, la fuerza débil y el electromagnetismo. Cada una de estas fuerzas está asociada a un grupo de Lie, por lo que el ME se construye alrededor del grupo

$$G = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y. \quad (2.1)$$

El estudio de estas interacciones debe separarse en la interacción fuerte por un lado y la electrodébil por otro. La teoría cuántica de campos que describe la primera de estas interacciones en el ME, basada en el grupo $SU(3)_C$, es la Cromodinámica Cuántica (QCD). Esta interacción solo afecta a las partículas con “color”

¹Mientras se realizaba este trabajo han aparecido tanto una nueva compilación teórica [5], como un nuevo resultado experimental [6] que han hecho disminuir sensiblemente dicha tensión. Sin embargo, aún existen aspectos teóricos y experimentales que no se entienden en este observable.

(carga asociada a la simetría $SU(3)_C$), que son los quarks y gluones. Por otro lado, el grupo $U(1)_Y \times SU(2)_L$, describe las interacciones electrodébiles. Todas las interacciones están mediadas por partículas de espín 1 llamadas bosones gauge. Dentro de estos bosones encontramos a los gluones mediando la interacción fuerte, los fotones (γ) para la electromagnética y los bosones masivos $W^\pm$ y Z para la débil.

La materia dentro del ME viene descrita por fermiones de spin 1/2. Estos se pueden clasificar en quarks y leptones. Los quarks son las partículas elementales que interactúan fuertemente, es decir, tienen carga de color. Hasta el momento, se han descubierto seis tipos distintos de quarks, también llamados sabores, y son u, d, c, s, t, b . Debido a las características de la interacción fuerte, todos los quarks se encuentran en estados ligados llamados hadrones. Dentro de estos hadrones se encuentran el protón y neutrón, partículas que junto a los electrones, forman el átomo, la unidad fundamental de los elementos químicos.

Los leptones, al contrario que los quarks, se caracterizan por no interactuar fuertemente. Los leptones se pueden diferenciar entre aquellos con carga, donde se encontraría el electrón e , el muón μ y el tau τ (que interaccionan tanto débilmente como electromagnéticamente), y los que no tienen carga que serían los neutrinos electrónico ν_e , muónico ν_μ y neutrino del tau ν_τ (que solo interaccionan débilmente).

Atendiendo a sus números cuánticos los fermiones del ME también se pueden organizar en tres familias o generaciones. En la primera generación existen 4 tipos de fermiones con números cuánticos diferentes, y las demás generaciones son copias más masivas de la primera. En la Tabla 1 (izquierda) se puede observar esta clasificación de los fermiones.

Fermiones	I	II	III	Q	Bosones		Responsable de
Quarks	u	c	t	2/3	Spin 1	8 gluones	interacción fuerte
	d	s	b	-1/3		$W^\pm, Z$	interacción débil
Leptones	e	μ	τ	-1		Fotón γ	interacción EM
	ν_e	ν_μ	ν_τ	0	Spin 0	Higgs	masa

Tabla 1: Tablas que muestran las partículas del Modelo Estándar. A la izquierda los fermiones, indicando si son quarks o leptones, las tres generaciones y la carga. A la derecha los bosones junto a la interacción que median.

Aparte de las partículas ya mencionadas, el ME contiene al bosón de Higgs. Este bosón es una partícula escalar (con espín 0) responsable de la ruptura de la simetría de la interacción electrodébil. Además, a través del mecanismo de Higgs [8], aporta la masa en reposo de todas las partículas, incluida la del mismo bosón de Higgs.

También cabe mencionar que el ME contiene a las llamadas antipartículas. Las antipartículas son copias de las partículas que aparecen en las tres familias pero cambiando de signo todos los números cuánticos internos. Así por ejemplo, el antiquark u tendría la misma masa que el quark u pero una carga $Q=-2/3$ y de igual forma con el resto de números cuánticos.

El lagrangiano del ME depende de ciertos parámetros libres², que se determinan con la comparación de la predicción teórica y la medida experimental de un determinado observable. Se pueden llevar a cabo importantes tests de la validez del ME comprobando si los valores obtenidos para dichos parámetros son los mismos independientemente de los observables que usemos para determinarlos. Que esto no ocurriese sería una evidencia de física más allá del ME [9].

2.2 Cromodinámica: confinamiento y libertad asintótica.

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría gauge que describe la interacción fuerte, responsable de mantener unidos a los quarks, permitiendo formar la materia que conocemos [10]. QCD como ya se ha mencionado está basada en la simetría SU(3) y posee una carga asociada a la que se denomina color. Los quarks tienen carga de color, que puede tener tres valores diferentes, mientras que los antiquarks tienen las cargas anticolor correspondientes. Los quarks interactúan entre sí mediante el intercambio de bosones vectoriales de masa nula llamados gluones, que tienen tanto carga de color como de anticolor.

Para realizar un estudio de QCD, de los 19 parámetros del ME, tan solo se requieren las masas de los seis quarks, la constante de acoplamiento fuerte α_s , que nos indica la intensidad de la interacción y el llamado ángulo θ de vacío. Este ángulo θ es el responsable de la violación de la simetría CP en interacciones fuertes, lo que constituye uno de los mayores problemas abiertos en QCD y cuyo estudio está fuera del alcance de este trabajo [11]. A pesar de tener un lagrangiano relativamente simple, las predicciones de QCD no son triviales. Esto se debe a dos propiedades esenciales que complican su estudio.

La primera de estas propiedades es el confinamiento, que se refiere al hecho de que ni los quarks ni los gluones han podido ser detectados de manera aislada. Esto se debe a que en QCD solo los estados neutros de color pueden propagarse asintóticamente. Esto provoca que los únicos estados medibles sean estados ligados de quarks y/o antiquarks con carga de color neutra, los llamados hadrones. En particular, la combinación de quark-antiquark da lugar a los mesones y la combinación de tres quarks a los bariones (que incluye protones y neutrones). De esta forma, si por ejemplo, hay una reacción o desintegración de alguna partícula, que produce un quark, este va a hadronizar, es decir, va a formar estados ligados con otros quarks o antiquarks. Este hecho dificulta la interpretación de resultados experimentales, al solo poder detectar los hadrones que se forman, se deben deducir las interacciones ocurridas entre las partículas elementales a partir de los estados ligados.

La otra propiedad de QCD es la llamada libertad asintótica. Ésta consiste en que la intensidad de la interacción en QCD decrece a cortas distancias (o altas energías) y aumenta a grandes distancias (o bajas energías). Debido a que el acoplamiento es débil a altas energías, se puede utilizar teoría de perturbaciones de forma fiable. Pero, a bajas energías, que son las relevantes para las interacciones

²Los 19 parámetros del ME son: 3 constantes de acoplamiento de los bosones gauge, 3 masas de los leptones, las 6 masas de los quarks, 2 parámetros referidos al Higgs, 4 elementos de la matriz Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM) y el parámetro θ de QCD.

de QCD que producen la hadronización, la constante de acoplamiento es demasiado grande como para poder realizar un tratamiento perturbativo.

2.3 *Lattice QCD*.

El hecho de no poder tratar de manera perturbativa las interacciones a bajas energías de QCD, obligó a desarrollar metodologías no perturbativas para poder estudiar estos procesos. Entre las metodologías desarrolladas destaca *Lattice QCD*, basada en el formalismo de las integrales de camino discretizadas en un retículo espacio-temporal.

El estudio de las técnicas de LQCD va más allá del objetivo de este trabajo (para introducción al tema consultar, por ejemplo, [12, 13, 14]) , pero podemos enumerar los pasos llevados a cabo en una simulación de *lattice* típica de forma resumida:

1. Se escoge tanto el espaciado del retículo, que suele llamarse a , como el volumen del mismo (número de puntos en las direcciones espacial y temporal).
2. Después se elige cómo se discretizan los quarks, el número de sabores de quarks y sus masas.
3. Usando métodos Monte Carlo, se generan diferentes configuraciones del campo de gluones. Para ello se utiliza un muestreo de importancia que va como e^{-S} , donde S es la acción de QCD. Al conjunto de todas las configuraciones se le llama *ensemble*.
4. Los propagadores de los quarks se obtienen invirtiendo el operador de Dirac para cada configuración del campo de gluones.

Una vez que se han obtenido los propagadores de los quarks, se pueden utilizar para crear correladores de hadrones, que típicamente son los valores esperados de operadores dados en términos de fermiones con los mismos números cuánticos que los hadrones que nos interesan, $\mathcal{O}$. La media de todos los correladores obtenidos en un *ensemble*, nos proporcionaría el valor esperado del operador $\mathcal{O}$

$$\langle 0 | \mathcal{O} | 0 \rangle = \langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathcal{O}_{\alpha}, \quad (2.2)$$

donde N es el tamaño del ensemble, con un error estadístico

$$\sigma_{\mathcal{O}}^2 = \frac{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}{N}. \quad (2.3)$$

Los operadores que se van a manejar en este trabajo vienen dados por el producto de dos operadores con los números cuánticos de un hadrón y un antihadrón. Su valor esperado en el vacío está relacionado con lo que se denominan funciones de correlación o correladores de dos puntos, $C(t)$, que describen la creación de un

hadrón en un tiempo $t = 0$ y su destrucción en un tiempo t . En particular, cuando el momento del hadrón es 0, estas funciones vienen dadas por:

$$C(t) = \langle 0 | \sum_x \mathcal{O}(x, t) \mathcal{O}^\dagger(0) | 0 \rangle = \sum_n \frac{\langle 0 | \mathcal{O} | n \rangle \langle n | \mathcal{O}^\dagger | 0 \rangle}{2M_n} e^{-M_n t} \quad (2.4)$$

donde para obtener la segunda igualdad, la llamada descomposición espectral, se ha introducido un conjunto completo de autoestados de energía de $\mathcal{O}$ con masas M_n .

Por tanto, si se selecciona un correlador con los mismos números cuánticos que los del estado que queremos estudiar, se pueden calcular las masas de estos estados realizando un ajuste del valor esperado del correlador con la parte derecha de la expresión (2.4). Por ejemplo, para crear un mesón pseudoescalar se puede usar el operador $\mathcal{O} = \bar{\psi}(\vec{x}, t) \gamma_5 \psi(\vec{x}, t)$ y se estudia la dependencia temporal de la función de correlación de dos puntos. En la práctica, si el tiempo es suficientemente grande, la suma en (2.4) se ve dominada por el estado fundamental y basta con añadir unos pocos estados excitados para describir los datos obtenidos de las simulaciones de *lattice*. Los parámetros de estos estados excitados son realmente difíciles de obtener, pero, normalmente, se tiene mayor interés en el estado fundamental.

2.4 Funciones espectrales y aplicaciones fenomenológicas.

Las funciones espectrales en teorías cuánticas de campos contienen la información sobre los posibles estados de energía en los que se puede hallar un sistema. En general, son funciones de la energía $\rho(E)$ o, equivalentemente, de la masa invariante del sistema. Para observables con hadrones, su cálculo requiere describir las interacciones entre las partículas elementales de nuestra teoría que dan lugar a los estados ligados que medimos experimentalmente, es decir, necesitamos describir la física de QCD a bajas energías, como discutimos en la sección 2.2. La Figura 1 muestra un ejemplo, en el que estado de energía más bajo es un estado de una partícula de masa m , que corresponde a un único pico de la función espectral en $M^2 = m^2$, ya que siempre podemos irnos al sistema de referencia en el que esta se halla en reposo. Por el contrario, si por ejemplo tenemos estados de dos partículas, la energía del centro de masas puede tomar cualquier valor desde $2m$ (considerando ambas idénticas) hasta infinito y en algunos casos pueden existir estados ligados de energía menor.

A su vez, las funciones espectrales, se pueden relacionar con las funciones de correlación a dos puntos definidas en (2.4) mediante transformadas de Fourier. Es por ello que, en realidad, ambas funciones contienen la misma información, pero $C(t)$ en el espacio temporal, mientras que $\rho(E)$ en el de las energías. En los experimentos, los observables medidos están relacionados con las energías, por tanto, es más sencillo relacionarlos con la función espectral del sistema que con los correladores. Otra ventaja de las funciones espectrales es que permiten realizar cálculos de más observables, como cocientes de desintegración o secciones eficaces, que se pueden comparar con las correspondientes medidas experimentales. Por ello es importante desarrollar métodos que nos permitan calcular funciones espectra-

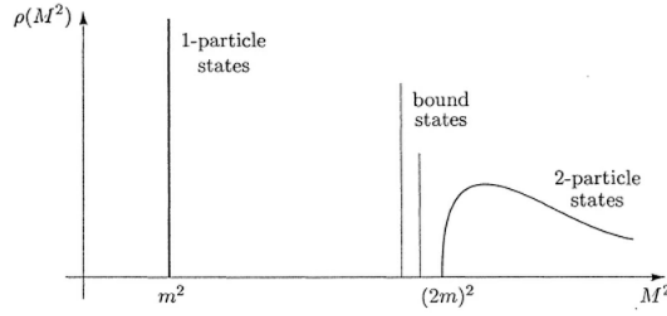


Figura 1: Representación esquemática de las funciones espectrales para estados de una sola partícula y estados con dos partículas [15].

les con precisión a partir de funciones de correlación calculadas mediante *lattice* QCD.

Veamos un ejemplo de como se usan las funciones espectrales en el cálculo de un observable relevante para la fenomenología, la amplitud de desintegración del leptón τ a hadrones. Debido a su gran masa es el único leptón que puede decaer débilmente tanto a leptones $\tau \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\tau$ como a hadrones. En particular, puede desintegrarse a hadrones con extrañeza $\tau \rightarrow X_{us} \nu_\tau$ donde X_{us} representa cualquier estado hadrónico con antiquark u y quark s . El módulo al cuadrado de la amplitud del proceso de desintegración del leptón τ a un estado X_{us} se puede expresar de la forma [16]

$$|\mathcal{A}|^2 = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 |V_{us}|^2 L^{\alpha\beta}(p_\tau, p_\nu) \rho_{us}^{\alpha\beta}(q), \quad (2.5)$$

donde V_{us} es el elemento de la matriz CKM proporcional a la intensidad de la interacción débil entre los quarks u y s , $L^{\alpha\beta}(p_\tau, p_\nu)$ se conoce como tensor leptónico que depende del momento del tau p_τ y del neutrino emitido p_ν , y $\rho_{us}^{\alpha\beta}(q)$ es la función espectral que depende del momento transferido $q = p_\tau - p_\nu$. Esta función describe la conexión entre los quarks $\bar{u}$ y s , y los estados hadrónicos X_{us} . De la amplitud al cuadrado se pueden obtener distintos observables como la anchura de desintegración de estos procesos:

$$\Gamma_{us}^{(\tau)} = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{4m_\tau} \int \frac{d^3 p_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu} 2L^{\alpha\beta}(p_\tau, p_\nu) \rho_{us}^{\alpha\beta}(q). \quad (2.6)$$

La función espectral original, que es un tensor de orden 2 se puede separar en dos funciones espectrales escalares $\rho_T(q^2)$ y $\rho_L(q^2)$, que parametrizan las componentes longitudinal y transversal del tensor de la siguiente forma

$$\rho_{us}^{\alpha\beta}(q) = (q^\alpha q^\beta - q^2 g^{\alpha\beta}) \rho_T(q^2) + q^\alpha q^\beta \rho_L(q^2). \quad (2.7)$$

Con esta descomposición, la expresión (2.6) se puede simplificar realizando el cambio de variable $s=q^2/m_\tau^2$, obteniendo

$$\Gamma_{us}^{(\tau)} = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2 m_\tau^5}{32\pi^2} \int_0^1 ds (1-s)^2 [(1+2s)\rho_T(s) + \rho_L(s)]. \quad (2.8)$$

El interés en este caso reside en que, si se conoce la función espectral y se han hecho medidas experimentales de $\Gamma_{us}^{(\tau)}$, se puede extraer el valor de V_{us} . Este es uno de los parámetros fundamentales del ME mencionados en la sección 2.1 para los cuales actualmente no se obtiene el mismo valor cuando se usan procesos diferentes en su extracción. De manera que, su obtención de diferentes formas, minimizando en la medida de lo posible el error cometido, puede ser clave para resolver esta tensión y de forma similar otras existentes.

3 Metodología.

3.1 Los problemas inversos.

Se les llama problemas inversos, o *inverse problems* en inglés, a los problemas que aparecen cuando se quiere reconstruir información sobre un determinado objeto a partir de un conjunto de observaciones indirectas [17]. Aquellos que nos interesan en este trabajo son los que surgen cuando tenemos un proceso físico, descrito por una función espectral $\rho(E)$ que depende de la energía, que se relaciona con un conjunto de medidas de un correlador $C(t)$ que depende de la variable temporal que puede tomar valores desde $t=0$ hasta $t=T$. Esta relación viene descrita por

$$C(t) \equiv \int b(t, E) \rho(E) dE, \quad (3.1)$$

donde a $b(t, E)$ se le conoce como núcleo o *kernel* y depende del proceso físico particular que estemos considerando. En nuestro caso $C(t)$ suele ser una función periódica con periodo T que es la extensión de la dimensión temporal de las simulaciones de *lattice*, por lo que el núcleo suele tener la siguiente forma

$$b_T(t, E) = e^{-tE} + e^{-(T-t)E}. \quad (3.2)$$

Si nos fijamos en la ecuación (3.1) y en las funciones base, podemos darnos cuenta de que en realidad se trata de una transformada de Laplace (si $T \rightarrow \infty$), por lo que se podría pensar que el problema se reduciría a realizar una transformada inversa para obtener la función espectral buscada. Sin embargo, esto no es tan sencillo, debido a que nuestro correlador $C(t)$, son medidas, y por tanto un conjunto discreto de puntos, mientras que la función espectral es una función continua. Este hecho provoca que el problema no esté bien definido, obligando a recurrir a técnicas numéricas y aproximaciones para poder abordarlo.

Debido a la naturaleza de los problemas inversos no es posible reconstruir las funciones espectrales de forma exacta por lo que se debe encontrar el valor de la llamada la función espectral *smeared* que sí es posible reconstruirla y se define como

$$\hat{\rho}(E_*) = \int_0^\infty \Delta_\sigma(E, E_*) \rho(E) dE, \quad (3.3)$$

donde $\Delta_\sigma(E, E_*)$ es la llamada función de *smearing* que se define con soporte en una región alrededor de E_* con una anchura σ . Los métodos que se estudian en este trabajo son denominados métodos lineales cuya idea principal es obtener la función de *smearing* a través de un desarrollo en el espacio de las funciones base $b_T(t, E)$

$$\Delta(E_*, E) = \sum_{t=0}^{t_{max}} g_t(E_*) b_T(t+1, E), \quad (3.4)$$

siendo $g_t(E_*)$ los coeficientes del desarrollo que se deben obtener y t_{max} el número máximo de puntos temporales que se pueden usar del correlador $C(t)$. Debido a la simetría del correlador $C(t)$ respecto al centro del retículo en la coordenada temporal se debe cumplir $t_{max} < T/2$. Si a continuación se sustituye (3.4) en (3.3) y se utiliza la relación entre el correlador y la función espectral descrita en (3.1), la función espectral *smeared* se puede expresar como

$$\hat{\rho}(E_*) = \sum_{t=0}^{t_{max}} g_t(E_*) C(t+1). \quad (3.5)$$

Mediante esta expresión podemos relacionar las medidas con la función espectral *smeared* $\hat{\rho}$, utilizando los coeficientes g_t , que se obtienen mediante la aplicación de cada método.

Como ejemplo se puede pensar en el límite en el que $\sigma \rightarrow 0$, en el que se obtiene

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \Delta_\sigma(E, E_*) = \delta(E - E_*). \quad (3.6)$$

En este límite la función *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ reconstruye a la perfección a la función espectral $\rho(E)$ para la energía $E = E_*$, pero esto solo sucede cuando se conoce el valor de $C(t)$ en todos los instantes temporales y con precisión infinita. A pesar de esto, una posible idea para realizar la reconstrucción consiste en crear un funcional $\mathcal{A}$, que depende de la función de *smearing*, de tal forma que al minimizarlo respecto a los coeficientes $g_t(E_*)$ se reduzca el ancho de la función de *smearing*. Esta es la filosofía que sigue el método de Backus-Gilbert [18], el más famoso en reconstrucción espectral y que se explicará en la sección 3.2.

En general, a la hora de resolver un problema inverso con este tipo de métodos se debe usar análisis funcional. Se escoge un funcional $\mathcal{A}[g_t]$ que se encarga de medir el acuerdo entre la reconstrucción y los datos medidos, de manera que al minimizarlo respecto los coeficientes $g_t(E_*)$ se obtiene una gran afinidad entre las medidas y la reconstrucción. Por otro lado, hay que tener en cuenta que las medidas poseen errores, por lo que una reconstrucción totalmente ajustada a estas no daría buenos resultados. Para contrarrestar este efecto se debe introducir otro funcional $\mathcal{B}[g_t]$, que nos permita estabilizar la solución ante pequeñas variaciones de las medidas. Por lo tanto para obtener una buena solución a partir de nuestros datos, requerimos de dos funcionales uno que aporte correlación con los datos medidos y otro que aporte estabilidad. De esta forma se puede crear el funcional

$$W[g_t, \lambda] = (1 - \lambda)\mathcal{A}[g_t] + \lambda\mathcal{B}[g_t]. \quad (3.7)$$

El problema inverso se reduce a minimizar el funcional W respecto g_t , es decir, minimizar una combinación de ambos funcionales, utilizando un parámetro λ para relacionarlos. Este parámetro es libre, y permite obtener diversas soluciones según sea el objetivo. Si por ejemplo, se quiere una solución que se ajuste muy bien a los datos, quitándole importancia a la estabilidad, se usa un valor de λ pequeño, de manera que el funcional $\mathcal{A}$ tome una mayor importancia. Si por el contrario se busca una función más suave y con menos picos, este parámetro se escogerá más alto para dar mayor importancia al funcional $\mathcal{B}$. La minimización de un funcional similar es común a algunos de los métodos más eficaces para tratar los problemas inversos y es la clave para poder resolverlos, cada uno con sus distintos funcionales [19].

3.2 Método de Backus-Gilbert.

El método de Backus-Gilbert, como se ha mencionado, busca obtener la función *smeared* $\hat{\rho}^{BG}(E_*)$ óptima a partir de la variación de los coeficientes $g_t(E)$. Para ello, en ausencia de errores estadísticos, el método minimiza un funcional que se puede interpretar como una medida del ancho de la función de *smearing* $\Delta^{BG}(E_*, E)$, de manera que se aproxime lo máximo posible a una función delta, lo que provoca que las funciones espectrales, la real y la *smeared*, sean lo más parecidas posibles. Este funcional se puede escribir como

$$A_{BG}[g_t] = \int_0^\infty (E - E_*)^2 [\Delta^{BG}(E_*, E)]^2 dE. \quad (3.8)$$

De la minimización de este funcional bajo ciertas restricciones de normalización de la función de *smearing*, se puede obtener un resultado para los coeficientes $g_t(E_*)$ con los que obtener la reconstrucción espectral.

Si además se quiere añadir la presencia de error en los datos medidos, hay que tener en cuenta el funcional

$$B[g_t] = \mathbf{g}^T \cdot Cov \cdot \mathbf{g}, \quad (3.9)$$

donde Cov es la matriz de covarianza asociada al error estadístico de $C(t)$ y $\mathbf{g}$ es el vector que contiene los coeficientes $g_t(E_*)$. Minimizando el funcional $W[\lambda, \mathbf{g}]$ (3.7), se obtienen los coeficientes g_t a partir de los cuales se puede calcular $\hat{\rho}(E_*)$ con la ecuación (3.5). El resultado que se obtiene de los coeficientes g_t tras realizar la minimización puede expresarse de forma general como se muestra en el anexo 6.1. De esta manera se calcula el valor de la reconstrucción espectral para un cierto valor de energía E_* , por tanto si queremos obtener la reconstrucción en varios valores de energía deberemos repetir el proceso para cada energía.

3.3 Método de Hansen-Lupo-Tantalo (HLT).

El método de Hansen-Lupo-Tantalo (HLT) [20] es una variación del método de Backus-Gilbert ya que, al igual que antes, se obtiene el valor de la función espec-

tral *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ mediante un desarrollo en el espacio de las funciones base. La diferencia entre ambos está en la forma de hallar los coeficientes $g_t(E_*)$ al considerar funcionales distintos.

En este método se propone una función de *smearing* llamada función de *smearing* objetivo, que en nuestro caso será una función Gaussiana con anchura σ , centrada en E_* y normalizada

$$\bar{\Delta}_\sigma(E_*, E) = \frac{e^{-\frac{(E-E_*)^2}{2\sigma^2}}}{\int_0^\infty dE e^{-\frac{(E-E_*)^2}{2\sigma^2}}}. \quad (3.10)$$

Por otro lado, se tiene también la función de *smearing* a partir de un desarrollo en el espacio de las funciones base

$$\Delta_\sigma(E_*, E) = \sum_{t=0}^{t_{max}} g_t(E_*) b_T(t+1, E), \quad (3.11)$$

pero esta vez los coeficientes se obtienen de forma distinta. El objetivo del método es que la función de *smearing* realizada con el desarrollo se aproxime lo máximo posible a la función de *smearing* objetivo. Para lograr esto el funcional $A[g]$ pasa a ser

$$A[g_t] = \int_{E_0}^\infty dE |\bar{\Delta}_\sigma(E_*, E) - \Delta_\sigma(E_*, E)|^2. \quad (3.12)$$

Definir así el funcional $A[g]$ no minimiza el ancho de la función de *smearing* como en BG, sino que minimiza la distancia entre ambas funciones de *smearing*. Es decir, se quiere conseguir en el espacio de las funciones base, una aproximación de la función objetivo que se ha elegido.

La principal ventaja de este método respecto al Backus-Gilbert es que, al tener una función propuesta que depende de un parámetro σ que regula la anchura de esta, es posible regular la precisión de la reconstrucción según nuestras necesidades. En BG el único modo de regular la anchura es variando el valor de t_{max} , que es un parámetro que en la realidad viene dado por las simulaciones de *lattice*.

Otro detalle a tener en cuenta es que el limite inferior del funcional no es nulo, sino que es un valor de energía E_0 . Este valor se elige de tal forma que cumpla $\rho(E_0)=0$, y en todos los casos de este trabajo se ha utilizado $E_0=0$.

Para obtener los coeficientes g_t se realiza, al igual que en el método anterior, la minimización del funcional (3.7) con el nuevo funcional A y el mismo funcional B del método de Backus-Gilbert definido en (3.9). La expresión general de los coeficientes g_t para este método puede encontrarse en el anexo 6.2.

Este método tiene también una ventaja respecto a BG, y es que permite calcular un error sistemático asociado al método. Gracias a que se propone una función de *smearing* (3.10), se puede definir

$$\delta_\sigma(E_*, E) = 1 - \frac{\Delta_\sigma(E_*, E)}{\bar{\Delta}_\sigma(E_*, E)}. \quad (3.13)$$

Este parámetro es una medida de lo que se ha desviado la reconstrucción respecto al valor que debería obtenerse con la función de *smearing* propuesta en (3.10). Con

este valor se calcula el error sistemático del método

$$\Delta = |\delta_\sigma(E_*, E)|\hat{\rho}(\sigma, E_*). \quad (3.14)$$

La reducción del error de este método a cero solo se consigue cuando ambas funciones de *smearing* coinciden, lo cual solo sucedería si $t_{max} \rightarrow \infty$.

4 Resultados

4.1 Tests de los métodos de reconstrucción espectral.

Para comprobar el funcionamiento de los métodos descritos en la sección anterior se crea un modelo de prueba. Es decir, se considera una función espectral $\rho(E)$ simplificada, pero con propiedades comunes con las funciones espectrales que nos interesan, y se integra con funciones base mediante la ecuación (3.1) lo que permite obtener los correladores $C(t)$ asociados a esa función espectral. Una vez obtenidos los correladores se usan los métodos para obtener la función espectral *smear*ed $\hat{\rho}(E_*)$ definida en la ecuación (3.3), asociada a la función espectral considerada. De esta forma se puede comparar el resultado obtenido con los métodos que queremos analizar con la función espectral real, estudiando a su vez los efectos que tienen la modificación de los distintos parámetros en la reconstrucción.

La función espectral artificial elegida para llevar a cabo este estudio se compone de tres deltas de Dirac equiespaciadas en un rango de energías

$$\rho(E) = \delta(E - 0.2) + \delta(E - 0.5) + \delta(E - 0.8). \quad (4.1)$$

Esta se integra usando las funciones base $b_\infty(t, E)$ definida en la sección 3.1, obteniendo así los coeficientes $C(t)$ que se usan en la reconstrucción. A partir de aquí se estudiará por un lado el resultado de realizar una reconstrucción sin error (donde el parámetro λ de (3.7) es nulo) y por otro la reconstrucción con un error ficticio que se añadirá a través de una matriz de covarianza.

4.1.1 Reconstrucción espectral sin error.

En esta sección se considera que las funciones de correlación $C(t)$ se han obtenido de manera exacta, sin ningún tipo de error. Esto es imposible de obtener en la realidad, pero es de utilidad para comprender como funcionan ciertos parámetros de los métodos de reconstrucción espectral.

En la Figura 2 se muestra el resultado de la reconstrucción espectral para los dos métodos explicados, sin considerar error en los datos. Ambos métodos presentan tres picos para energías $E_* = 0.2, 0.5$ y 0.8 , que se corresponden con las energías en las que la función espectral (4.1) tiene centradas las deltas de Dirac.

En el caso de HLT, se debe distinguir entre los puntos azules de la línea roja continua. Los puntos son los valores obtenidos con el método, mientras que la línea roja representa el valor exacto de la función espectral *smear*ed calculada con la función de *smearing* $\tilde{\Delta}_\sigma$ propuesta en (3.10). Esto implica que los puntos azules tienden a acercarse lo máximo posible a la línea roja, ya que el método de HLT

minimiza la diferencia entre la función objetivo $\bar{\Delta}_\sigma$ respecto de la calculada con una expansión en las funciones base Δ_σ definida en (3.11). Podemos ver como en este caso el acuerdo es excelente.

Por otro lado, los cuadrados verdes representan la reconstrucción con BG, que tiende a minimizar el ancho de los picos. Así se generan picos mucho más altos y estrechos, pero con el efecto colateral de perder precisión a medida que la energía sube, dando la sensación de que el primer pico posee más importancia que el segundo.

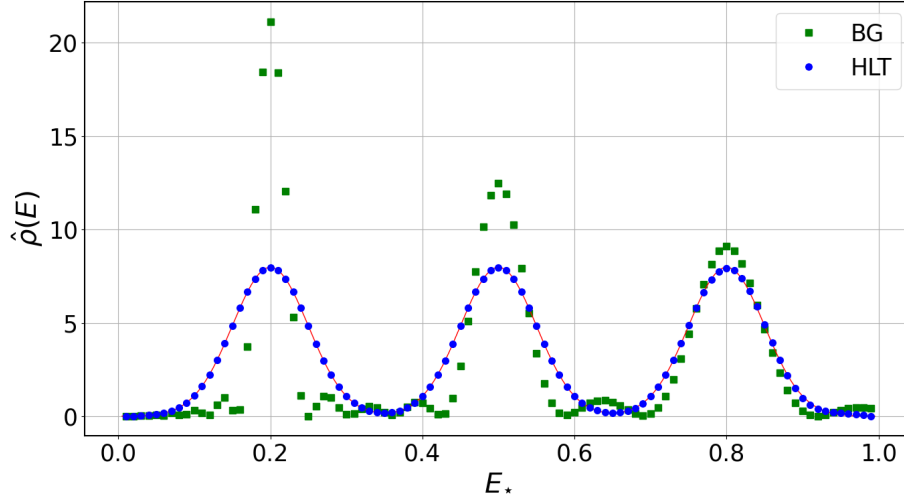


Figura 2: Reconstrucción de la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ asociada a la función espectral definida en (4.1) con los dos métodos descritos. En azul el método de HLT en verde BG y la línea roja continua es la reconstrucción obtenida mediante la función *smearing* objetivo $\bar{\Delta}_\sigma$ en el método HLT. Los parámetros son para ambas $t_{max}=60$ y en HLT se usa $\sigma=0.05$.

Tras introducir el funcionamiento y los resultados ideales que deben obtenerse de ambos métodos se procede al estudio de la dependencia de los métodos con las variables libres que poseemos.

La primera variable que se va a modificar es el valor de t_{max} que es un parámetro presente en el desarrollo de la función de *smearing* descrito en la sección 3.1. Este valor no sería una variable en los casos reales, ya que depende la cantidad de puntos donde se conoce el correlador $C(t)$ que se obtienen de las simulaciones de *lattice*. Sin embargo, en este ejemplo, al calcular nosotros los valores de los correladores a partir de la función espectral, podemos obtener cuantos queramos, por lo que sí podemos tratarlo como un parámetro libre.

De esta forma en la Figura 3 se tiene el resultado de la reconstrucción con el método de HLT para $t_{max}=40$ y $t_{max}=20$. Se aprecia como al disminuir t_{max} la precisión de la reconstrucción disminuye, lo que se traduce en una mayor discrepancia entre la función de *smearing* objetivo $\bar{\Delta}_\sigma$ y la función de *smearing* Δ_σ obtenida con el desarrollo en el espacio de las funciones base. Este hecho encaja con la teoría al tener en cuenta que t_{max} indica también el número de funciones base que se usan en el desarrollo, por lo que es esperable que si este número aumenta, la función de *smearing* Δ_σ consiga una mejor aproximación.

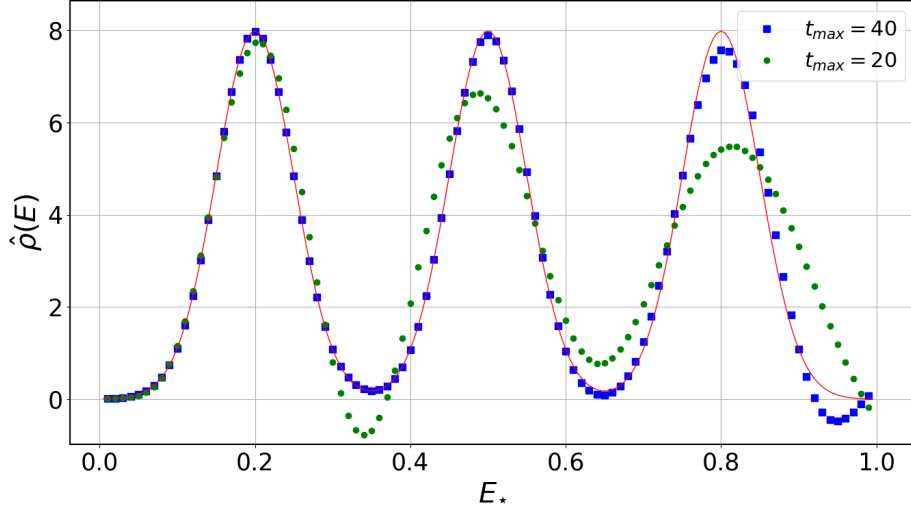


Figura 3: Reconstrucción de la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ asociada a la función espectral (4.1) con el método de HLT para distintos valores de t_{max} . Los cuadrados azules para $t_{max} = 40$ y los círculos verdes para $t_{max} = 20$. La línea roja es la reconstrucción obtenida mediante la función de *smearing* objetivo $\bar{\Delta}_\sigma$. Se ha usado un valor de $\sigma=0.05$.

En el caso del método de BG el comportamiento es un poco distinto. En la Figura 4 se tiene la comparación de la reconstrucción para distintos valores de t_{max} y se observa como a medida que este parámetro disminuye, el ancho de los picos aumenta. Esto se debe a que la filosofía del método de BG consistía en minimizar la anchura de los picos de $\hat{\rho}^{BG}(E_*)$, por lo que una peor aproximación de la función de *smearing* Δ^{BG} implica una mayor anchura en los picos como se ha obtenido.

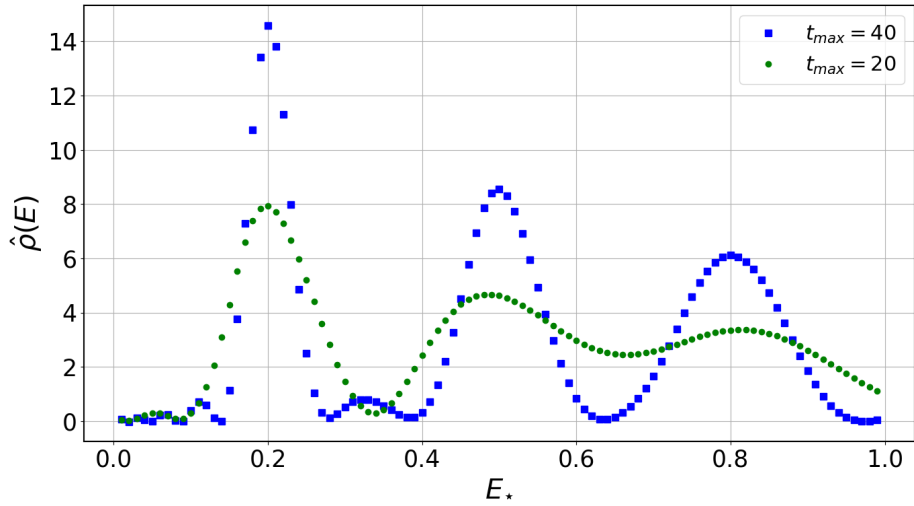


Figura 4: Reconstrucción de la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ asociada a la función espectral (4.1) con el método de BG para distintos valores de t_{max} . Los cuadrados azules para $t_{max} = 40$ y los círculos verdes para $t_{max} = 20$.

El otro parámetro que se va a modificar, es el valor de la constante de *smearing* σ , que solo afecta a HLT y es una de las principales ventajas de este método respecto a BG. En BG la única forma de modificar la anchura de los picos, ya sea para obtener una mejor resolución o un menor error, es variando t_{max} , que como ya se ha explicado, este parámetro no es totalmente libre y depende de las simulaciones de *lattice*. Al contrario, en HLT sí tenemos la posibilidad de modificarlo según nuestras necesidades gracias a la introducción del parámetro σ .

En la Figura 5 se tiene la comparación entre la elección de distintos parámetros de *smearing* σ a la hora de realizar la reconstrucción espectral. En esta se ve como para sigmas grandes los picos son más anchos y, a medida que se reduce el valor de este parámetro, se consiguen picos más definidos y estrechos a costa de una pérdida de precisión sobre todo a altas energías. Por tanto, si se quiere una buena definición de los picos a pesar de obtener mayores imprecisiones se debe poner un valor de σ pequeño. Si por el contrario se quiere maximizar la precisión a costa de una peor definición de los picos hay que poner un valor de σ mayor.

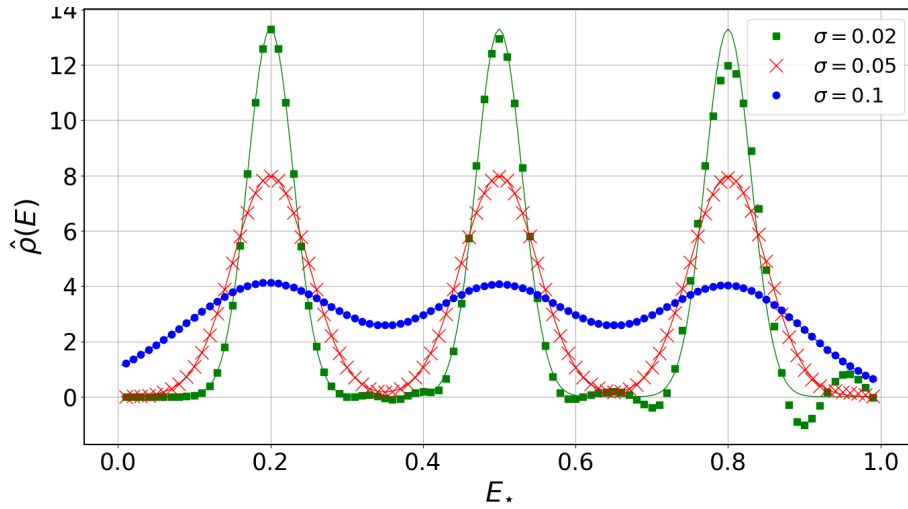


Figura 5: Reconstrucción de la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ asociada a la función espectral definida en (4.1) con el método de HLT. Los círculos azules indican la reconstrucción con parámetro de *smearing* $\sigma=0.1$, las cruces rojas $\sigma=0.05$ y los cuadrados verdes $\sigma = 0.02$. Las líneas continuas son las reconstrucciones realizadas con la función de *smearing* objetivo $\bar{\Delta}_\sigma$ para cada uno de los valores de σ mencionados. Se ha utilizado $t_{max} = 60$.

4.1.2 Reconstrucción espectral con error.

Como ya se ha mencionado, en la realidad el correlador $C(t)$ siempre posee error, por lo que las reconstrucciones anteriores deben tener en cuenta las fluctuaciones estadísticas de los datos. Por tanto en esta sección se estudia la reconstrucción cuando poseemos error en el correlador $C(t)$. Para simular este error, se mueven aleatoriamente los valores de el correlador obtenidos dentro de un rango de error, recreando una medida inexacta. El método exacto del apartado anterior es incapaz de reconstruir algo razonable si los errores son demasiado grandes, por lo que se exige añadir el funcional B definido en (3.9) y un parámetro $\lambda \neq 0$ al funcional W que tenemos que minimizar, tal y como se vio en la ecuación (3.7). La matriz

de covarianza debe relacionarse con el rango posible de variación de los valores del correlador. Así por ejemplo, si el correlador puede desplazarse en un 2 % de su valor real debido a las fluctuaciones estadísticas, en la diagonal de la matriz de covarianza debe ponerse el error de estos valores, en este caso un 2 % de su valor al cuadrado.

El resultado de este procedimiento se puede ver en la Figura 6. En esta se observa como, en ambos métodos, el primer pico de la función espectral consigue ser reconstruido, pero no más allá. En el caso de BG no hay un segundo ni tercer pico. Por otro lado, en HLT sí se observa un segundo pico, pero no se encuentra donde debería. Aunque el error es tan grande que el resultado es compatible con la reconstrucción exacta para este segundo pico, la amplificación del error indica que la reconstrucción no es fiable más allá del primer pico.

Un detalle a comentar es que en el método de BG no se ha calculado el error de la reconstrucción. Esto se debe a que este método no tiene una forma sencilla para calcular este error como sí le sucede a HLT. El error en HLT se calcula como una medida de la diferencia entre la función reconstruida y la función objetivo como se mencionó en la sección 3.3, pero en BG no podemos realizar un tratamiento similar ya que en este caso no se tiende a la función objetivo. Aún así existen maneras de calcular los errores de la reconstrucción a través de un tratamiento estadístico, como puede ser el uso de un *bootstrap* [21]. En este trabajo no se han realizado para el método de BG debido al alto costo computacional, por lo que a partir de aquí se continuará solo con el método de HLT.

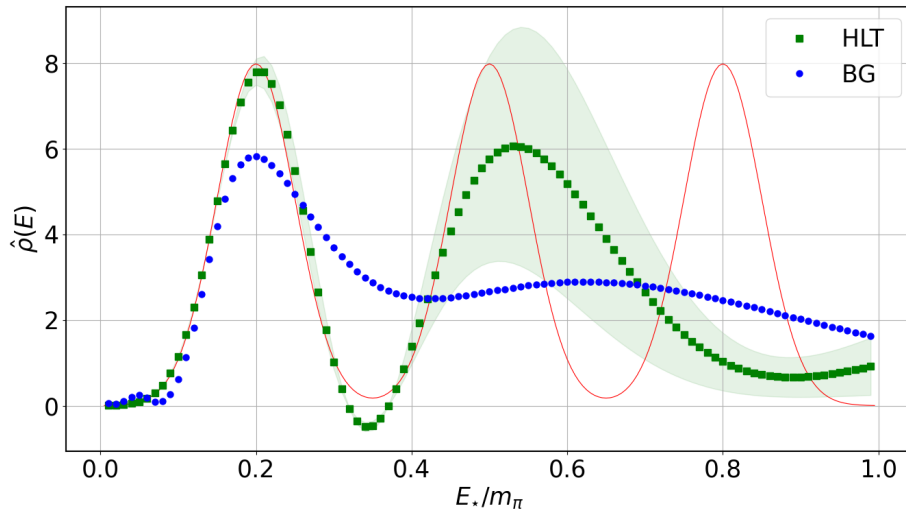


Figura 6: Reconstrucción de la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E_*)$ asociada a la asociada a la función espectral (4.1) con un error del 0.2 % en el correlador $C(t)$. Los cuadrados verdes representan la reconstrucción con HLT y la banda verde el error de este método. Los puntos azules son la reconstrucción con BG. La línea roja es la reconstrucción realizada con la función de *smearing* objetivo $\bar{\Delta}_\sigma$ de HLT. Se ha usado $t_{max} = 60$, $\lambda = 0.1$ y $\sigma = 0.05$.

La poca fiabilidad de las reconstrucción más allá del primer pico es uno de los hechos más limitantes que poseen los métodos de reconstrucción espectral. Esto se debe a que nuestras funciones base son exponenciales que dependen de la energía, por lo que a medida que aumenta esta, la reconstrucción es más sensible

y pierde precisión. Para lograr una mejor reconstrucción se requiere que nuestras medidas del correlador $C(t)$ posean un error extremadamente bajo. En la Figura 7 se estudia el comportamiento del método HLT para valores muy bajos del error. Cuando tenemos un error relativo del $10^{-4}\%$ ya se aprecia una mejora de la reconstrucción aunque los picos siguen sin encajar como deberían. En el caso de un error relativo del orden de $10^{-6}\%$ la reconstrucción mejora considerablemente, obteniendo los tres picos de forma bastante precisa. Sin embargo, obtener tanta precisión en los datos no es viable en la realidad, por lo que en las reconstrucciones de datos reales obtendremos solamente el primer pico, que se corresponde con el estado fundamental del sistema que se quiere estudiar.

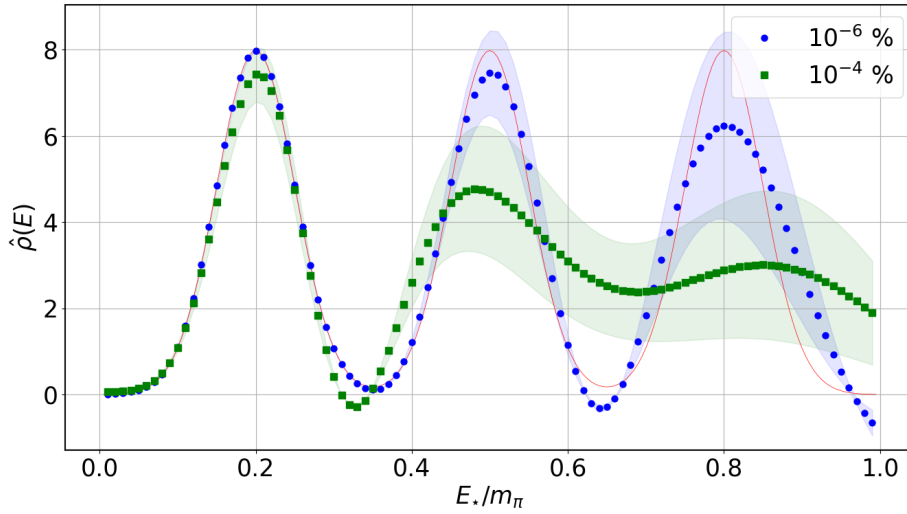


Figura 7: Reconstrucción de la función espectral *smeared* asociada a la función espectral (4.1) para dos errores distintos. Los cuadrados verdes representan la reconstrucción con un porcentaje de error del $10^{-4}\%$ en las medidas $C(t)$, mientras que los círculos azules se corresponden con un porcentaje de error del $10^{-6}\%$. Se ha usado en ambas reconstrucciones $t_{max} = 60$, $\lambda = 0.1$ y $\sigma = 0.05$.

La introducción del error lleva consigo la introducción del parámetro λ , cuyo significado ya ha sido discutido en la sección 3.1. Para comprobar como afecta este parámetro se han realizado distintas reconstrucciones modificando su valor, obteniendo la Figura 8. En esta se observa como para valores de λ cercanos a 1 apenas se puede distinguir un pico, siendo prácticamente una línea horizontal. Al poner un valor muy cercano a 1 se le da más importancia al funcional B , encargado de la “suavidad” de la reconstrucción y muy poca al que reproduce los datos con exactitud. A medida que disminuimos el valor de λ la reconstrucción se va pareciendo más a la exacta. Sin embargo, si se alcanza un valor excesivamente pequeño de λ , la reconstrucción dará valores erróneos causados por el error de las funciones de correlación. Es por ello que se debe mantener un balance entre los funcionales, y aunque existen criterios para elegir el valor de λ como el descrito en la sección 3 de [20], en este trabajo se ha tomado $\lambda=0.1$ en la mayoría de casos, que suele ser suficiente para asegurar una buena reconstrucción.

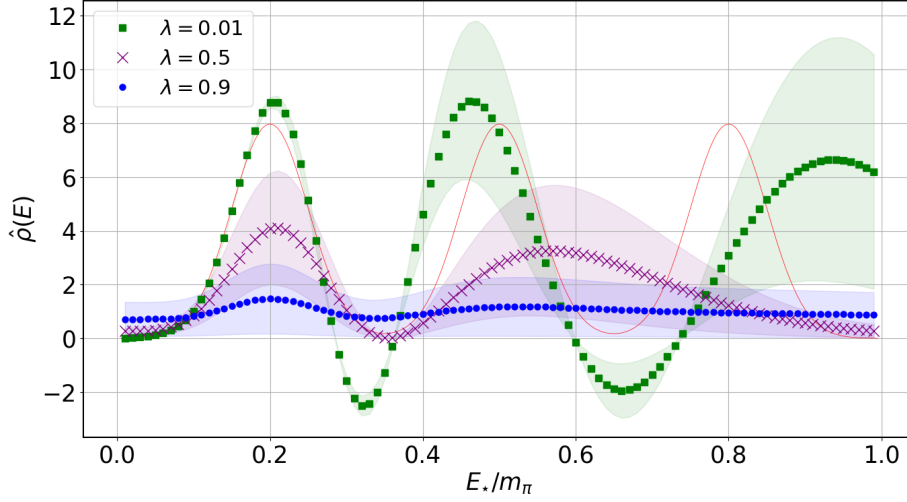


Figura 8: Reconstrucción de la función espectral *smeared* asociada a la función espectral (4.1) para distintos valores de λ . Los cuadrados verdes para $\lambda=0.01$, las cruces moradas para $\lambda=0.5$ y los círculos azules para $\lambda=0.9$. Para el resto de parámetros se usa $t_{max} = 60$ y $\sigma = 0.05$.

4.2 Reconstrucción espectral a partir de correladores de *lattice* QCD.

Una vez se conoce el funcionamiento del método se va a proceder a reconstruir funciones espectrales a partir de correladores obtenidos en simulaciones de *lattice* y se va a estudiar el efecto de los distintos parámetros de las simulaciones en las reconstrucciones. Para ello se van usar datos de varios *ensembles* obtenidos por la colaboración *Fermilab Lattice-MILC* para estudiar constantes de desintegración de mesones [22].

Los datos utilizados corresponden a funciones de correlación de dos puntos, $C(t)$, como las definidas en la ecuación (2.4). En todos los casos los números cuánticos de los operadores de creación y destrucción corresponden a los de un pión, que se simula con momento 0. El primero de estos *ensembles* está generado en un retículo con una extensión espacio-temporal $L^3 \times T = 64^3 \times 96$ y un espaciado de la red $a = 0.09$ fm. Los valores usados para la simulación de los quarks en este *ensemble* son aproximadamente iguales a los físicos. Con los valores obtenidos del correlador se puede realizar un ajuste a la descomposición espectral (2.4) como se explicó en la sección 2.3 para obtener la masa del pión en unidades de *lattice*, $am_\pi \approx 0.057$ ³. Para obtener la masa del pión en unidades físicas se debe dividir por el espaciado de la red y multiplicar por $\hbar c$ obteniendo así $m_\pi \approx 125$ MeV, que se encuentra ligeramente por debajo de la masa física.

La reconstrucción espectral realizada con el método de HLT para dos valores distintos del parámetro de *smearing* se puede observar en la Figura 9. Para facilitar su comparación se ha normalizado la energía por el valor de la masa del pión que se obtiene con el ajuste, y se ha modificado la altura de los picos de las funciones

³Los valores obtenidos para am_π en los distintos *ensembles* que vamos a usar han sido proporcionados por la colaboración *Fermilab Lattice-MILC*. Estos valores se obtienen con errores estadísticos muchos menores de los que necesitamos en este trabajo (del orden del 0.1 %), por lo que vamos a tomar valores aproximados y a despreciar dichos errores en todos los *ensembles* estudiados.

espectrales para que se cumpla $\hat{\rho}(m_\pi) = 1$. Como se esperaba, los picos de ambas reconstrucciones, que señalan el estado fundamental del pión, coinciden con el valor de la masa del pión obtenida mediante el ajuste. A medida que se sobrepasa el primer máximo la reconstrucción pierde mucha precisión al igual que en el modelo de prueba estudiado. Es por ello que los estados excitados del pión no son visibles y en el caso de que se observara algún otro pico, este no sería realmente un resultado fiable.

Otro detalle a comentar sobre esta reconstrucción es la diferencia observada para los distintos valores de σ . Para $\sigma = 0.04$ se observa como el error obtenido es mucho menor comparado con el de $\sigma = 0.02$, especialmente en la zona del pico. Sin embargo, el valor elevado de σ realiza una reconstrucción con demasiada anchura, lo que puede perjudicar la resolución del máximo.

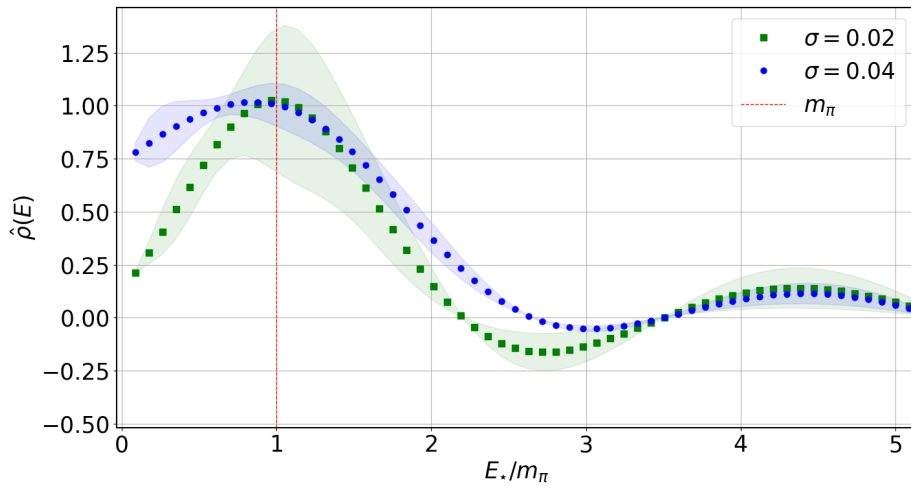


Figura 9: Reconstrucciones espectrales de funciones de correlación a dos puntos $C(t)$ obtenidas en un retículo de *lattice* de espaciado $a = 0.09$ fm y extensión temporal $T=96$. La energía está dividida entre el valor de la masa del pión obtenida con el ajuste de los datos y la línea roja vertical marca el valor que debe tener la masa del pión. Los puntos azules indican la reconstrucción para $\sigma = 0.04$, mientras que los cuadrados verdes tienen $\sigma = 0.02$. Para ambas reconstrucciones se ha escogido $t_{max}=46$ para que cumpla la condición $t_{max} < T/2$ y $\lambda=0.8$.

A continuación, se realiza el mismo procedimiento pero para un *ensemble* con $a = 0.12$ fm y con las masas de los quarks aproximadamente iguales a las físicas como en el caso anterior. Una consecuencia directa de elegir un parámetro de red mayor es que la extensión temporal y espacial debe disminuir si estamos a volumen fijo, por lo que $L^3 \times T = 48^3 \times 64$. Para este caso se obtiene un valor de $am_\pi \approx 0.0815$ ajustando los datos para $C(t)$ a la expresión (2.4), que en unidades de energía es $m_\pi \approx 134$ MeV.

Esta nueva reconstrucción se puede ver en la Figura 10 donde se obtiene, al igual que antes, que los picos coinciden con la masa del pión. Sin embargo, existen algunas diferencias entre las reconstrucciones para distintos parámetros de red, por ejemplo se obtiene que cuando σ es muy bajo el pico se halla ligeramente desplazado respecto a la masa, lo que no ocurría con el otro *ensemble*. También se aprecia como el error para ambos valores de σ aumenta considerablemente

respecto a la reconstrucción con $a=0.09\text{fm}$. La explicación de estas diferencias se encuentra en el valor de la extensión temporal T . Un valor de T más elevado implica un mayor número de puntos temporales t donde se conoce el correlador y por tanto una mayor precisión. En este caso, al tener un T menor que antes, la reconstrucción es menos precisa lo que aumenta considerablemente el error. En la Tabla 2 se muestra el porcentaje de error de la reconstrucción cuando $E_\star = m_\pi$ en los dos *ensembles* utilizados. De esta forma se puede cuantificar numéricamente el error obtenido en cada una de las reconstrucciones.

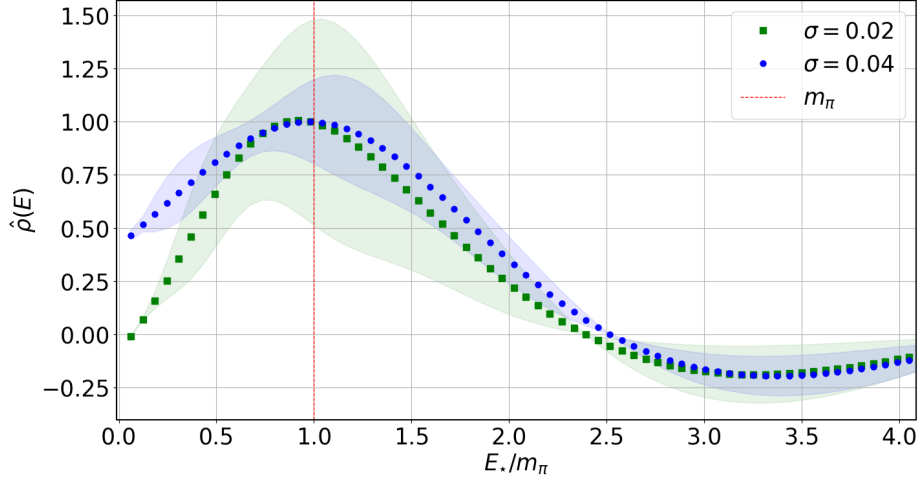


Figura 10: Reconstrucciones espectrales de funciones de correlación a dos puntos $C(t)$ obtenidas en un retículo de *lattice* de espaciado $a = 0.12\text{ fm}$ y extensión temporal $T=64$. La energía está normalizada por el valor de la masa del pión que en este *ensemble* es $am_\pi \approx 0.0815$. Los puntos azules indican la reconstrucción para $\sigma = 0.04$, mientras que los cuadrados verdes tienen $\sigma = 0.02$. Para ambas reconstrucciones se ha escogido $t_{\max}=30$ y $\lambda=0.8$.

Constante de red a	<i>smearing</i> σ	Error
0.09 fm	0.04	7 %
	0.02	26 %
0.12 fm	0.04	16 %
	0.02	47 %

Tabla 2: Porcentaje de error de las reconstrucciones mostradas en las Figuras 9 y 10 cuando $E_\star = m_\pi$.

4.3 Comparación de la reconstrucción para distintos volúmenes espaciales.

En las simulaciones de *lattice* QCD, como ya se ha mencionado, se debe elegir el volumen espacio-temporal del retículo en el que se realiza la simulación. Ya se ha estudiado la dependencia de la reconstrucción respecto a la extensión temporal T , y a continuación se va a estudiar el comportamiento cuando la extensión temporal es la misma, pero cambia la extensión espacial. Para ello, se han escogido dos *ensembles* uno con $L = 24$ y otro con $L = 40$, ambos con una extensión temporal

de $T = 64$, espaciado de red $a = 0.12$ fm y las mismas masas de los quarks. La masa del pión es en este caso $am_\pi \approx 0.134$, que si la pasamos a unidades de energía se tiene $m_\pi = 220$ MeV, valor considerablemente superior a la masa real del pión⁴.

La comparación de la reconstrucción para ambos volúmenes que se encuentra en la Figura 11, nos muestra como no existe una diferencia significativa a la hora de reconstruir el pico para distintos volúmenes espaciales. La mayor diferencia apreciable es una leve variación del error que parece ser inversamente proporcional a L . Para cuantificar esta diferencia se calcula el porcentaje de error en el punto $E_* = m_\pi$, obteniendo $\varepsilon_{L=24} = 24\%$ y $\varepsilon_{L=40} = 20\%$. La diferencia entre ambos errores es notablemente menor que las diferencia observadas para los otros parámetros. Si se calcula el error estadístico de las medidas del correlador $C(t)$ para ambos *ensembles* se obtiene que el para $L=24$ los datos tienen un porcentaje de error alrededor del 4 %, mientras que para $L=40$ está cerca de un 2 %. Esto explica la diferencia entre ambas reconstrucciones, por lo que a este nivel de precisión la calidad de la reconstrucción depende únicamente del error de las medidas y no de posibles efectos de volumen finito que afectan a $C(t)$ y que deberían ser apreciables para volúmenes menores.

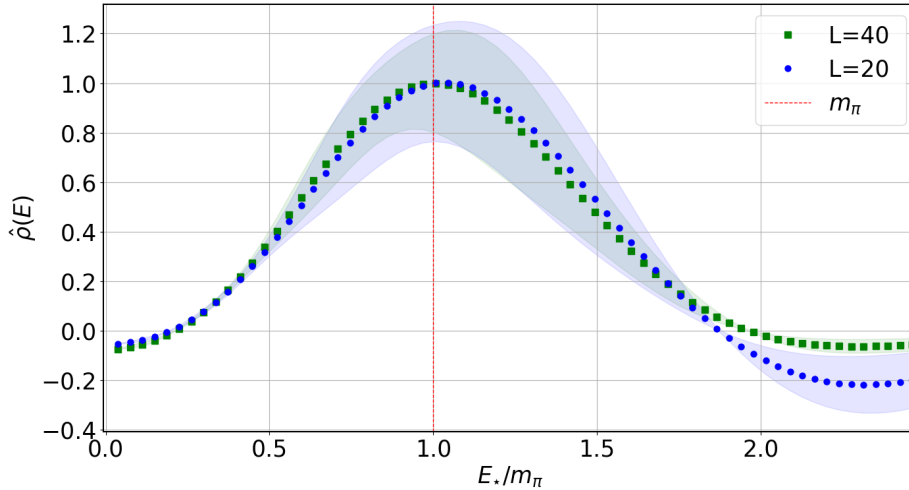


Figura 11: Reconstrucciones espectrales de funciones de correlación a dos puntos $C(t)$ obtenidas en un retículo de *lattice* de espaciado $a = 0.12$ fm y extensión temporal $T=64$, los cuadrados verdes representan la reconstrucción para una extensión espacial $L=40$, mientras que los círculos azules representan una reconstrucción para $L=24$. La energía está dividida entre el valor de la masa del pión, que para estos *ensembles* es $am_\pi \approx 0.134$. Los parámetros utilizados en la reconstrucción son $\sigma = 0.04$, $\lambda = 0.8$ y $t_{max} = 30$

⁴En LQCD el tiempo de computación es inversamente proporcional a la masa de los quarks, por lo que para estudiar la dependencia de la simulaciones con parámetros independientes de la masa, como puede ser el volumen espacial, se suelen usar este tipo de configuraciones con masas no físicas. En nuestro caso lo importante es que el método de reconstrucción nos de un pico en el valor de la masas de las partículas simuladas, aunque estas no coincidan con las físicas.

4.4 Importancia de las correlaciones en la matriz de covarianza.

En la sección 4.1.2 se introdujo una matriz de covarianza ficticia donde la diagonal principal contenía los errores de las medidas mientras que fuera de ésta la matriz de covarianza tomaba un valor nulo. En aquel ejemplo el error se introducía de manera ficticia y estaba justificado el no considerar correlaciones entre los valores del correlador para distintos valores de t . Sin embargo, en las medidas obtenidas a partir de las simulaciones de *lattice* no es correcto realizar esta consideración. Esto se debe a que en las simulaciones, los valores de $C(t)$ para distintos valores de t sí están relacionados y esta relación es más fuerte para valores de t cercanos, como por ejemplo $C(1)$ y $C(2)$.

El hecho de no considerar las correlaciones en la matriz de covarianza puede generar imprecisiones en la reconstrucción como se ve en la Figura 12. En ella se observa como, para la reconstrucción realizada en la sección anterior con $L=40$ pero sin tener en cuenta las correlaciones, el pico está ligeramente desplazado a la derecha. Aunque en este caso ambas reconstrucciones son muy similares, a la hora de tratar con datos reales, es importante tener las correlaciones en cuenta para obtener un buen resultado de nuestra reconstrucción y minimizar lo máximo posible los errores cometidos.

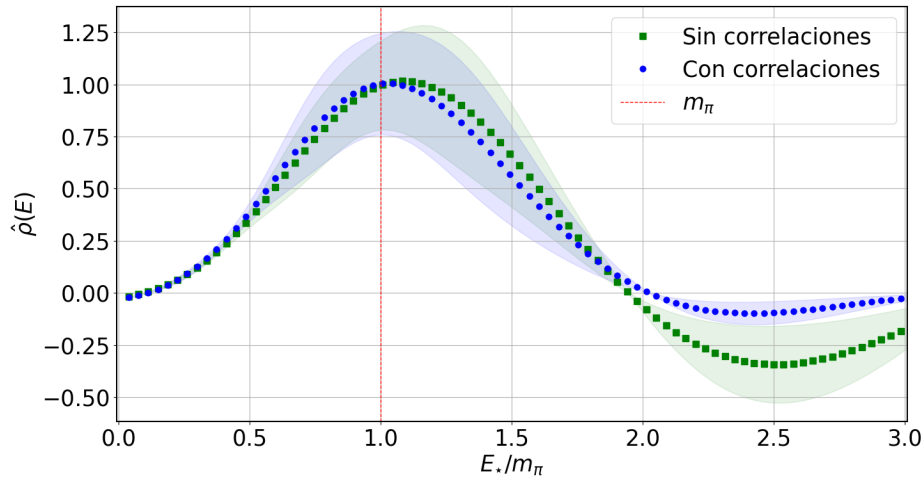


Figura 12: Reconstrucciones espectrales de una funciones de correlación a dos puntos $C(t)$ obtenidas en un retículo de *lattice* de espaciado $a = 0.12$ fm, extensión temporal $T=64$ y espacial $L=40$. Los cuadrados verdes representan la reconstrucción sin tener en cuenta las correlaciones entre las medidas, mientras que los círculos azules representan la reconstrucción teniendo en cuenta todas las correlaciones. La energía está dividida entre el valor de la masa del pión, que para estos *ensembles* es $am_\pi \approx 0.134$. Los parámetros utilizados en la reconstrucción son $\sigma = 0.04$, $\lambda = 0.8$ y $t_{max} = 30$

5 Conclusiones

En este trabajo se ha realizado un estudio de algunos de los denominados métodos para la reconstrucción de funciones espectrales. Las funciones espectrales permiten realizar cálculos de observables como anchuras de desintegración o sec-

ciones eficaces, por lo que su obtención a partir de las funciones de correlación $C(t)$ que se obtienen mediante las simulaciones de *lattice*, tiene una gran importancia a la hora de realizar comparaciones entre el experimento y la teoría. Los métodos estudiados en este trabajo son el método de Backus-Gilbert y principalmente el método de Hansen-Lupo-Tántalo. Estos han sido programados con el objetivo de realizar diversas pruebas para estudiar su comportamiento y los resultados que se obtienen de ellos.

Para el estudio del comportamiento de los métodos se ha utilizado un modelo de prueba, que nos ha permitido realizar variaciones de los distintos parámetros, viendo cómo afectan estos a la función espectral reconstruida $\hat{\rho}$. Primero se ha realizado la reconstrucción de forma exacta, es decir, sin añadir ningún tipo de error a nuestro correlador $C(t)$. En este caso, la reconstrucción espectral permite obtener la función espectral *smeared* $\hat{\rho}$ con bastante precisión. Después se ha encontrado el efecto de la variación de los distintos parámetros. Por ejemplo, cuando se disminuye el valor de t_{max} , al indicar este el número de funciones base que se pueden usar, se obtiene una menor precisión con ambos métodos. En el caso de BG se traduce en mayor anchura de los picos, mientras que en HLT la función reconstruida se aleja del valor objetivo.

Por otro lado, el método de HLT depende del parámetro de *smearing* σ que nos permite modificar la anchura de los picos según se requiera de mayor o menor resolución en nuestra reconstrucción. Este parámetro es una de las principales ventajas de HLT frente a BG, ya que en este último la única manera de variar la anchura, es indirectamente mediante t_{max} , lo que afecta directamente a la precisión de la reconstrucción. Por tanto, el nuevo grado de libertad que aporta HLT nos permite realizar reconstrucciones según nuestras necesidades, sumado a que requiere de un menor tiempo de computación que BG como se menciona en el anexo 6.2, hacen de HLT una mejor opción a la hora de realizar reconstrucciones espectrales.

Tras esto se ha pasado a realizar un análisis de la reconstrucción cuando se añade un error en los datos. La diferencia principal respecto al caso sin error es que la reconstrucción no es fiable más allá del primer pico. Al haber añadido este error el único pico que se reconstruye correctamente es el primero, aunque se ha comprobado que si nuestras medidas poseen errores extremadamente bajos se consigue reproducir la función espectral *smeared* $\hat{\rho}$ correctamente. El problema es que en la realidad no es posible alcanzar tal magnitud en el error, por suerte, para la mayoría de análisis nos interesa el estado fundamental del sistema, es decir, el estado posible con energía más baja que es exactamente el que se obtiene en ese primer máximo.

También, el hecho de introducir el error lleva consigo la introducción de un parámetro λ que realiza un balance entre la suavidad de la función reconstruida y el ajuste con los datos del correlador. Se ha obtenido que si el valor de λ es cercano a 1, la reconstrucción tiende a una línea horizontal, llegando a suavizar los picos hasta que no puedan apreciarse, ya que se pierde la correlación con las medidas. Por otro lado, si el valor de λ es muy cercano a 0, se pueden llegar a reconstrucciones incoherentes y fallos ya que no se tiene en cuenta el error de los datos por lo que se está llevando a cabo una reconstrucción que se ajusta plenamente a las medidas, lo cual no es razonable.

Una vez se conoce el comportamiento de los métodos de reconstrucción se han utilizado para reconstruir funciones espectrales con las medidas de correladores $C(t)$ obtenidos de simulaciones de *lattice* QCD. Se ha visto que para todos los correladores utilizados, los métodos de reconstrucción espectral han podido resolver la masa del estado fundamental asociada a los correladores. En el estudio de la influencia de los parámetros de *lattice*, se ha obtenido que el valor de la extensión temporal del retículo T tiene una gran influencia a la hora de realizar la reconstrucción, aumentando considerablemente el error de esta cuando T disminuye. Por otro lado, también se ha estudiado el efecto de una distinta extensión espacial L , llegando a la conclusión de que a los niveles de precisión en los que se ha trabajado, no es posible apreciar los efectos de considerar un volumen finito.

El siguiente paso en el estudio de estas funciones espectrales sería intentar extraer las energías tanto del estado fundamental como de estados excitados de manera más precisa a partir de las funciones reconstruidas. Pero eso es algo que va mucho más allá del nivel de este trabajo, ver por ejemplo [23].

Para concluir, mencionar que la obtención de funciones espectrales a partir de datos de *lattice* QCD es un campo de estudio cada vez más activo. Es por ello que se espera que estas técnicas consigan una gran mejoría del error en los cálculos de algunos observables del Modelo Estándar, relevantes para resolver las tensiones mencionadas, como las de los elementos de la matriz CKM $|V_{us}|$ y $|V_{ud}|$. Además, la optimización y la aplicación de estas técnicas al cálculo de masas de mesones permite también estudiar teorías más allá del Modelo Estándar [23], lo que contribuye a realizar nuevos avances hacia una teoría física más completa.

6 Anexos

Para poder reproducir los métodos de reconstrucción espectral se han programado siguiendo las fórmulas que se verán en los anexos 6.1 y 6.2. El código se ha escrito en el lenguaje de programación *Python 3* y se ha utilizado la biblioteca *mpmath* para llevar a cabo los cálculos numéricos con alta precisión. Es necesario utilizar una alta precisión numérica a la hora de realizar los cálculos debido a que, al estar tratando con exponenciales como funciones base, pequeñas variaciones pueden llevar a reconstrucciones inexacta sobre todo a altas energías.

6.1 Cálculo de los coeficientes g_t con el método BG.

Realizando la minimización del funcional $W[\lambda, g]$ que nos aporta el método de BG se pueden obtener los valores para los coeficientes g_t de la siguiente manera [20]:

$$g(\lambda, E_\star) = \frac{W^{-1}(\lambda, E_\star)\mathbf{R}}{\mathbf{R}^T W^{-1}(\lambda, E_\star)\mathbf{R}} \quad (6.1)$$

donde el vector $\mathbf{R}$ viene dado por

$$R_t = \int_0^\infty b_T(t+1, E) dE \quad (6.2)$$

y la matriz $W(\lambda, E_*)$ viene dada por

$$W_{tr}(\lambda) = (1 - \lambda)A_{tr} + \lambda Cov_{tr} \quad (6.3)$$

siendo

$$A_{tr} = \int_0^\infty (E - E_*)^2 b_T(t + 1, E) b_T(r + 1, E) dE \quad (6.4)$$

y Cov_{tr} la matriz de covarianza relacionada con el correlador $C(t)$.

Para poder programar el método se deben calcular los valores de los vectores y matrices que aparecen en la ecuación (6.1). Una vez calculados el vector de coeficientes $\mathbf{g}$ se puede calcular la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E)$ para un valor concreto de E_* . Para obtener la reconstrucción espectral para más valores de energía se debe repetir el procedimiento cambiando los valores de E_* .

6.2 Cálculo de los coeficientes g_t en el método HLT.

Realizando la minimización del funcional $W[\lambda, g]$ que nos aporta el método de Hansen-Lupo-Tantalo se pueden obtener los valores para los coeficientes g_t de la siguiente manera [20]

$$g(\lambda, E_*) = W^{-1}(\lambda) \mathbf{f}(\lambda, E_*) + W^{-1}(\lambda) \mathbf{R} \frac{1 - \mathbf{R}^T W^{-1}(\lambda) \mathbf{f}(\lambda, E_*)}{\mathbf{R}^T W^{-1}(\lambda) \mathbf{R}} \quad (6.5)$$

donde los vectores $\mathbf{R}$ y $\mathbf{f}$ vienen dados por

$$R_t = \int_0^\infty dE b_T(t + 1, E) \quad (6.6)$$

$$f_t(\lambda, E_*) = (1 - \lambda) \int_{E_0}^\infty dE b_T(t + 1, E) \Delta_\sigma(E_*, E) \quad (6.7)$$

y la matriz $W(\lambda)$ viene dada por

$$W_{tr}(\lambda) = (1 - \lambda)A_{tr} + \lambda \frac{Cov_{tr}}{C(0)^2} \quad (6.8)$$

siendo Cov_{tr} la matriz de covarianza relacionada con el correlador, $C(0)$ el valor del correlador a tiempo 0 y

$$A_{tr} = \int_{E_0}^\infty dE b_T(t + 1, E) b_T(r + 1, E). \quad (6.9)$$

Para poder programar el método se deben calcular los valores de los vectores y matrices que aparecen en la ecuación (6.5). Una vez calculado el vector de coeficientes $\mathbf{g}$ se puede calcular la función espectral *smeared* $\hat{\rho}(E)$ para un valor concreto de E_* . Para obtener la reconstrucción espectral para más valores de energía se debe repetir el procedimiento cambiando los valores de E_* .

Una de las mayores ventajas del método HLT es que al no depender la matriz W de la energía E_* , solo hace falta calcularla una vez. Esto supone un gran ahorro del tiempo de computación respecto a BG, especialmente cuando t_{max} es elevado.

Referencias

- [1] “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC”. En: *Physics Letters B* 716.1 (sep. de 2012), págs. 1-29. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.020](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.020>.
- [2] “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC”. En: *Physics Letters B* 716.1 (sep. de 2012), págs. 30-61. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/j.physletb.2012.08.021](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.021). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2012.08.021>.
- [3] T. Aoyama et al. “The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model”. En: *Physics Reports* 887 (dic. de 2020), págs. 1-166. ISSN: 0370-1573. DOI: [10.1016/j.physrep.2020.07.006](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2020.07.006>.
- [4] D. P. Aguillard et al. “Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm”. En: *Physical Review Letters* 131.16 (oct. de 2023). ISSN: 1079-7114. DOI: [10.1103/physrevlett.131.161802](https://doi.org/10.1103/physrevlett.131.161802). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.131.161802>.
- [5] R. Aliberti et al. *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model: an update*. 2025. arXiv: [2505.21476](https://arxiv.org/abs/2505.21476) [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2505.21476>.
- [6] The Muon $g - 2$ Collaboration et al. *Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 127 ppb*. 2025. arXiv: [2506.03069](https://arxiv.org/abs/2506.03069) [hep-ex]. URL: <https://arxiv.org/abs/2506.03069>.
- [7] Y. Aoki et al. *FLAG Review 2024*. 2025. arXiv: [2411.04268](https://arxiv.org/abs/2411.04268) [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/2411.04268>.
- [8] José Ignacio Illana y Alejandro Jiménez Cano. *Quantum field theory and the structure of the Standard Model*. 2022. arXiv: [2211.14636](https://arxiv.org/abs/2211.14636) [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/2211.14636>.
- [9] Jure Zupan. *Introduction to flavour physics*. 2019. arXiv: [1903.05062](https://arxiv.org/abs/1903.05062) [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/1903.05062>.
- [10] *Lattice QCD, el estudio numérico de la interacción fuerte*. 2016. URL: <https://webific.ific.uv.es/web/content/lattice-qcd-el-estudio-num%C3%A9rico-de-la-interacci%C3%B3n-fuerte..>
- [11] Dan-di Wu. “A Brief Introduction to the Strong CP Problem”. En: *Z. Naturforsch. A* 52 (1997). Ed. por B. G. Englert y G. Sussmann, págs. 179-181.
- [12] Christine Davies. *Lattice QCD*. 2002. arXiv: [hep-ph/0205181](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0205181) [hep-ph]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0205181>.
- [13] Rajan Gupta. *Introduction to Lattice QCD*. 1998. arXiv: [hep-lat/9807028](https://arxiv.org/abs/hep-lat/9807028) [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-lat/9807028>.
- [14] G. Peter Lepage. *Lattice QCD for Novices*. 2005. arXiv: [hep-lat/0506036](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0506036) [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/hep-lat/0506036>.
- [15] Michael E. Peskin y Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1995. Cap. 7. Radiative corrections: Some fromal development. ISBN: 978-0201503975.

- [16] Antonio Evangelista et al. *Inclusive hadronic decay rate of the τ lepton from lattice QCD*. 2023. arXiv: 2308.03125 [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/2308.03125>.
- [17] Luigi Del Debbio et al. *Approaches to the Inverse Problem*. 2024. arXiv: 2410.09944 [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/2410.09944>.
- [18] Freeman Gilbert George Backus. "The Resolving Power of Gross Earth Data". En: *Geophysical Journal International, Volume 16* (October 1968). URL: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1968.tb00216.x>.
- [19] WH Press Saul A Teukolsky Brian P Flannery y W Vetterling. *Numerical recipes in C*. 1992. Cap. 18. Integral Equations and Inverse Theory.
- [20] Martin Hansen, Alessandro Lupo y Nazario Tantalo. "Extraction of spectral densities from lattice correlators". En: *Physical Review D* 99.9 (mayo de 2019). ISSN: 2470-0029. DOI: 10.1103/physrevd.99.094508. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.99.094508>.
- [21] Bradley Efron. "Bootstrap methods: Another look at the jackknife". En: *The Annals of Statistics* 7.1 (1979), págs. 1-26. DOI: 10.1214/aos/1176344552.
- [22] A. Bazavov et al. "Charmed and light pseudoscalar meson decay constants from four-flavor lattice QCD with physical light quarks". En: *Physical Review D* 90.7 (oct. de 2014). ISSN: 1550-2368. DOI: 10.1103/physrevd.90.074509. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.074509>.
- [23] Ed Bennett et al. *Meson spectroscopy from spectral densities in lattice gauge theories*. 2024. arXiv: 2405.01388 [hep-lat]. URL: <https://arxiv.org/abs/2405.01388>.