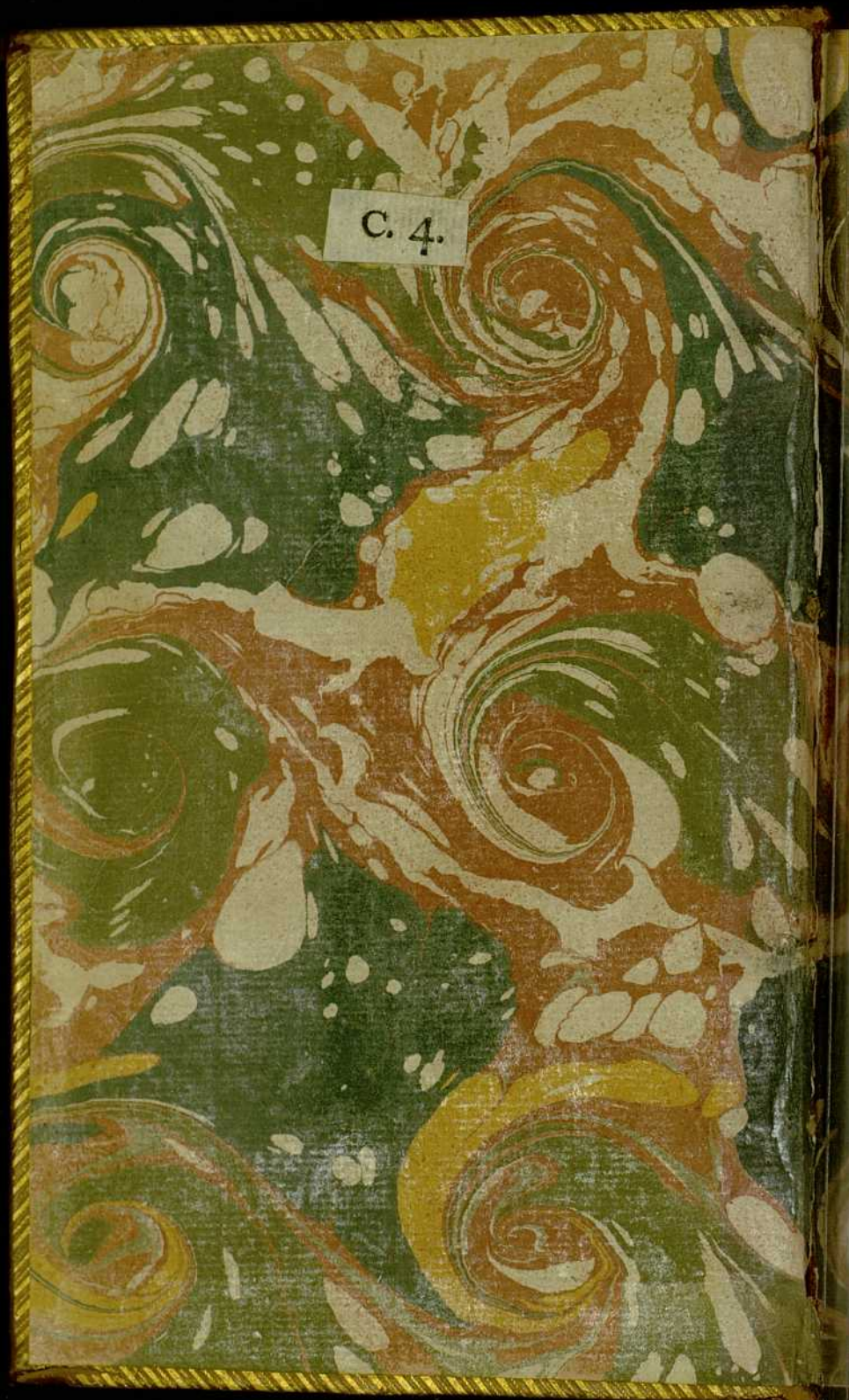


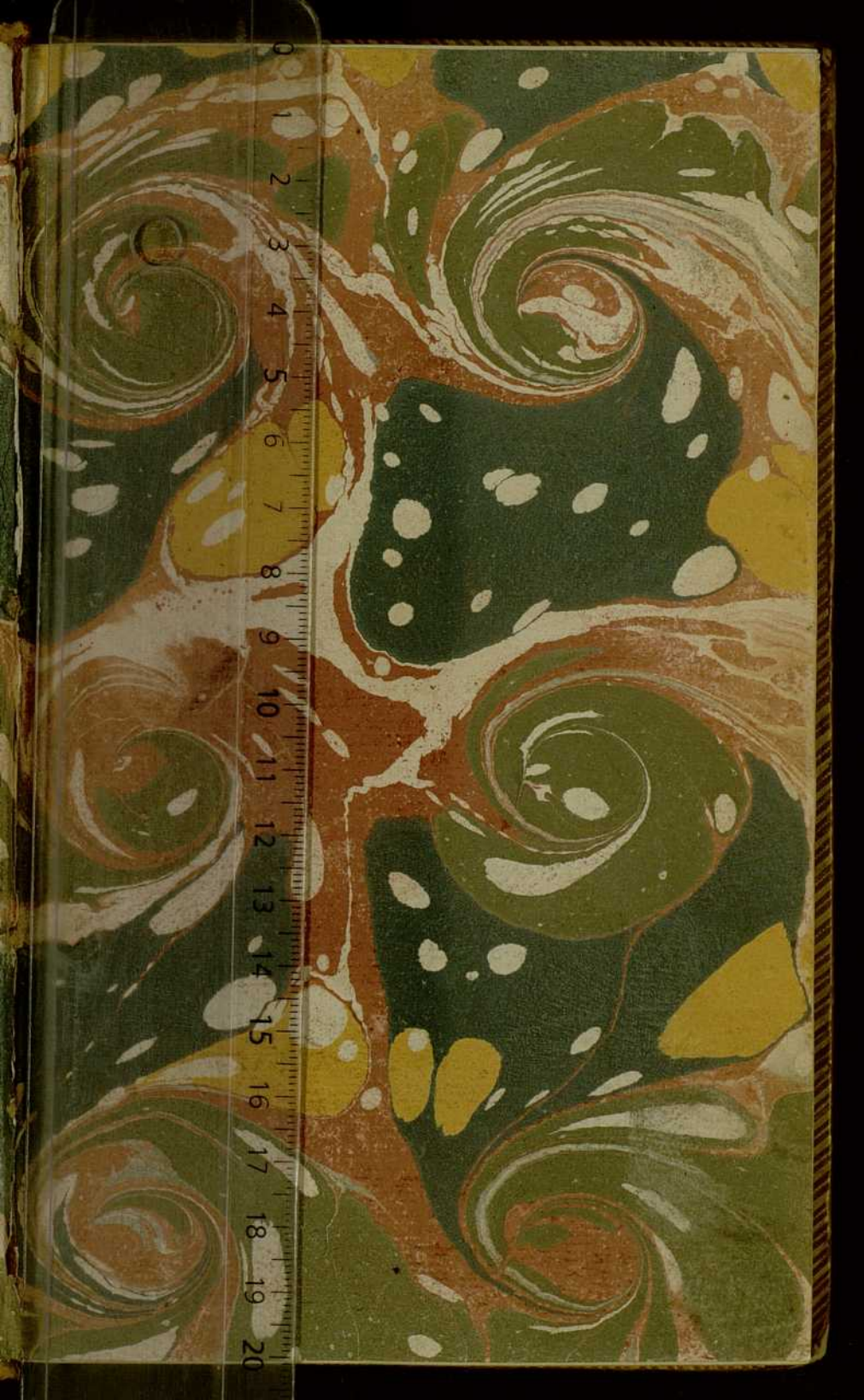
TRATADOS
DE
MATEMAT

A
32
217



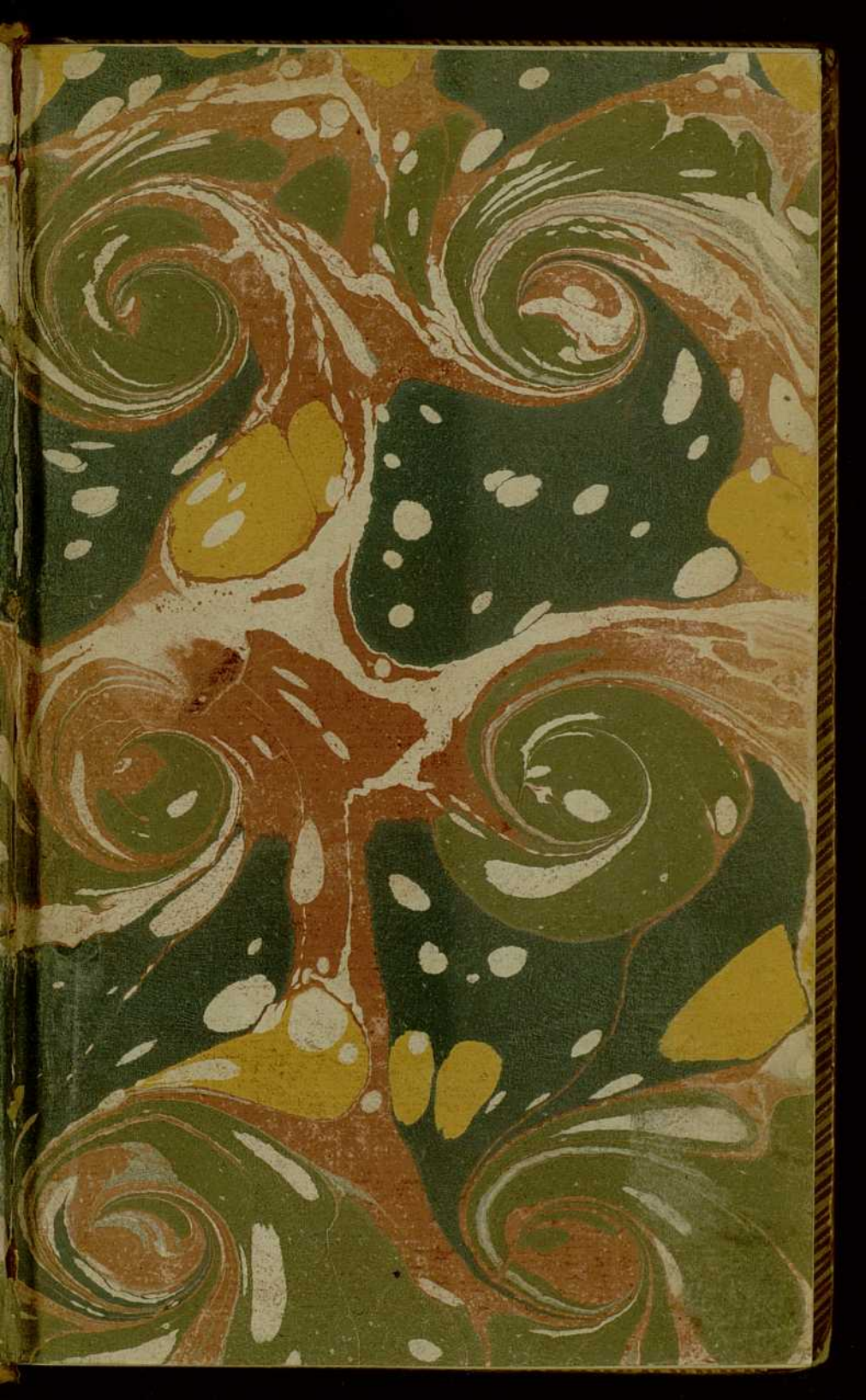
C. 4.





C. 4.

The image shows the front cover of an antique book. The cover is decorated with a traditional marbled paper pattern, featuring large, swirling, organic shapes in shades of green, brown, and cream. The marbling has a fluid, almost cellular appearance. A thin, gold-tooled border runs along the edges of the cover, consisting of a series of small, repeating V-shaped or chevron-like motifs. In the upper center of the cover, there is a small, rectangular, off-white paper label with the handwritten text "C. 4." in dark ink. The book is bound, and the spine is visible on the right side, showing the same marbled pattern and gold-tooled binding.



58-5



BIBLIOTECA HOSPITAL REAL	
C. A.	
Sala:	A
Estante:	32
Numero:	217

~~52-6-6~~

~~4
3-269~~

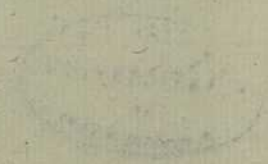
For complete.

VIII. 10. 18. 18. 18.

TRATADOS

DE MATEMÁTICA.

TOMO I.



i 11961788



R-27.578

TRATADOS
DE MATEMÁTICA.

TOMO I.



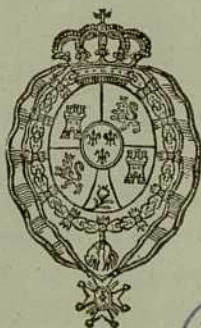
TRATADOS

DE MATEMÁTICA

TOMO I



TRATADOS
DE MATEMÁTICA
PARA LA INSTRUCCION
DE LOS MILITARES.



TOMO I.

CON SUPERIOR PERMISO.

EN MADRID EN LA IMPRENTA REAL.
AÑO DE 1792.

TRATADO
DE MATEMÁTICA

PARA LA INSTRUCCION
DE LOS MILITARES



LIBRARY OF THE
OFFICE OF THE
ADJUTANT GENERAL
WASHINGTON, D. C.
1880

INTRODUCCION.

Matemática , segun la derivacion del Griego , es lo mismo que doctrina ó disciplina : su objeto es todo aquello por lo qual se dice ser una cosa igual, mayor ó menor que otra de su misma especie ; y por consiguiente la Matemática es ciencia que trata de la cantidad inteligible , capaz de aumento y disminucion , como el número , la extension , ó el espacio.

Los Filósofos tratan de la cantidad en quanto impenetrable , los Matemáticos solamente en quanto numerable ó mensurable. Quando se consideran ó señalan sus partes , se llama *cantidad finita ó determinada* ; quando no , *infinita ó indeterminada*.

La cantidad inteligible se divide en continua y discreta. Cantidad continua es aquella cuyas partes se consideran unidas y continuadas , como la extension ó el espacio : la discreta es aquella cuyas partes se consideran separadas ó distintas , como el número.

Considérase tambien la cantidad discreta sobre la extension ó el espacio , como si se dice : una linea de dos pies , una superficie de quatro pies quadrados , un sólido de ocho pies cúbicos ; porque en estos casos se distinguen ó numeran sus partes.

Cantidad es lo mismo que magnitud ; y así la

cantidad en comun se dice magnitud en comun; pero si se habla de ella en particular, á la discreta dan el nombre de cantidad, y á la cantidad continua el de magnitud. Las propiedades que en una y otra se consideran, son la *adicion*, *substraccion*, *multiplicacion*, *division*, *razon*, *proporcion* y *potencia*; pero además de esto se considera la posicion de la magnitud, esto es, si una línea está dentro ó fuera de la superficie superior ó inferior de un sólido.

Divídese la Matemática en varias partes, que se reducen á dos especies, la una de puras, y la otra de impuras: las puramente Matemáticas son la Aritmética y la Geometría, porque tratan de la cantidad en quanto numerable ó mensurable. Las demás son Físico-Matemáticas, porque consideran la cantidad acompañada de algun accidente ó afeccion sensible, propio de la Física, como la Óptica, que trata de la cantidad visible, la Música de la sonora &c.

Las que se consideran útiles para la instruccion de los Militares, son:

- I. La Aritmética, que trata de los números.
- II. La Geometría, que considera la extension, el espacio ó la medida.
- III. La Trigonometría, que se emplea en resolver los triángulos.
- IV. La Fortificacion, que prescribe reglas para la ofensa y defensa de las plazas.
- V. La Artillería, que inventa las máquinas de fuego.

VI. La Cosmografía ó descripción del universo, para el conocimiento de la esfera que habitamos.

VII. La Estática, que determina el peso ó gravedad de los cuerpos.

VIII. La Maquinaria ó Mecánica, que averigua la fuerza en la potencia.

IX. La Hidrostática, que reconoce el equilibrio de las aguas.

X. La Hidráulica, que inventa artificiosas máquinas para mover y levantar las aguas.

XI. La Arquitectura Civil, que construye fuertes y hermosos edificios.

XII. La Perspectiva, que representa las figuras.

FUNDAMENTOS

DE LA MATEMÁTICA.

Sobre tres principios se funda la Ciencia Matemática, y son definiciones, axiomas y peticiones ó postulados.

DEFINICION es la explicacion clara, distinta y adecuada de algun término ó vocablo, que sirve para formar en el entendimiento la idea ó representation de su propio significado, evitando toda equivocacion ó ambigüedad.

AXIOMA ó COMUN SENTENCIA es una verdad tan clara, cierta y evidente, que no necesita de prueba, como el decir que el todo es mayor que su parte.

PETICION ó POSTULADO es una licencia que á todos se concede para executar lo que manifestamen-

te se reconoce puede hacerse , como que de un punto á otro pueda tirarse una linea recta.

EXPLICACION

DE ALGUNOS TÉRMINOS GENERALES.

En el discurso de esta obra se hallarán varios términos , cuya significacion se dará en su lugar , para no confundir al principiante , explicando solamente por ahora los mas freqüentes , que son : proposicion, teorema , problema , lema , corolario , escolio , hipótesi y tese.

PROPOSICION es la conclusion de alguna cosa que se ha de probar ; y es en dos maneras , especulativa y práctica.

TEOREMA es una proposicion especulativa , en que se propone la propiedad de alguna cosa.

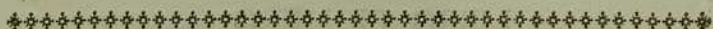
PROBLEMA es una proposicion práctica , en que se propone executar alguna cosa.

LEMA es una proposicion teoremática , y algunas veces problemática , que sirve para facilitar la inteligencia de otras proposiciones.

COROLARIO ó CONSECTARIO es una consecuencia que se infiere de lo ya demostrado.

ESCOLIO es una reflexion , anotacion ó amplificacion de lo que ya se ha dicho.

HIPÓTESI es lo mismo que suposicion : y la afirmacion ó negacion de alguna cosa se llama TESE.



TRATADO PRIMERO DE LA ARITMÉTICA.

Entre las Matemáticas tiene el primer lugar la Aritmética , por ser la puerta (segun Platon) para entrar en el conocimiento de las demás Artes , pues todas necesitan de ella. Es la Aritmética ciencia que trata de la cantidad discreta ó de los números , y se divide en especulativa y práctica. La especulativa considera las pasiones ó propiedades de los números : la práctica se exercita en computarlos recta y compendiosamente. Por razon de las notas , cifras ó caracteres de que se sirve la Aritmética , se divide en vulgar y literal. La primera exercita sus operaciones con las notas vulgares : la segunda con las literales ó letras del alfabeto.

Llámase tambien especiosa , porque su doctrina es aplicable á la Geometría y demás Ciencias Matemáticas.

De una y otra se tratará dividiéndola en seis libros.

En el primero se explicarán las quatro primeras reglas de la Aritmética vulgar.

En el segundo las de la Aritmética literal.

En el tercero la razon y proporcion en comun.

En el quarto las reglas de tres.

En el quinto la composicion de las potencias ó potestades , y extraccion de las raices.

En el sexto las progresiones.

LIBRO PRIMERO
DE LA ARITMÉTICA.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA NUMERACION.

DEFINICIONES.

I. **U**no es lo que de tal suerte es algo, que no puede ser otra cosa, como un angel, un hombre &c. Unidad es el abstracto ó denominacion, por lo qual se dice uno.

II. Número es quanto se refiere ó hace relacion á la unidad.

III. Dos cantidades se dicen homogeneas, ó de una misma especie, quando la una repetida algunas veces, puede exceder á la otra: y heterogeneas, ó de diversa especie, quando la una por muchas veces que se repita, no puede exceder á la otra.

IV. Parte es una cantidad menor respecto de otra mayor homogenea, ó de su misma especie, que se llama todo.

V. La parte se divide en aliquota y aliquanta. Parte aliquota es la que repetida algunas veces, iguala al todo: aliquanta la que por mas que se repita, siempre es mayor ó menor que el todo.

VI. Cantidades conmensurables son las que tienen alguna parte aliquota común. Inconmensurables las que no la tienen.

VII. Número entero es el que se refiere á la unidad, como el todo á la parte. Número quebrado ó fraccion es el que se refiere á la unidad, como la parte al todo.

VIII. Número racional ó efable es el conmensurable con la unidad : irracional , inefable ó geométrico el que con la unidad es incommensurable.

IX. Número racional entero es aquel cuya parte aliquota es la unidad : y número racional quebrado el que es parte ó partes de la unidad. El número racional mixto consta de entero y quebrado.

X. Las voces ó términos generales de la numeracion son uno , dos , tres , quatro , cinco , seis , siete , ocho , nueve y diez. Los nueve primeros se llaman dígitos : y sus significados pueden ser tres , es á saber , unidades , decenas , centenas ; y así se dice una unidad , dos unidades , tres unidades &c. una decena , dos decenas , tres decenas &c. una centena , dos centenas , tres centenas &c. De diez unidades se forma una decena , de diez decenas una centena , de diez centenas un millar : de diez unidades de millar una decena de millar , de diez decenas de millar una centena de millar , de diez centenas de millar un millon ó cuento. De unidades , decenas y centenas se forma una clase : de dos clases una dignidad : las dignidades se llaman cuentos , bicuentos , tricuentos &c.

HIPÓTESI. Las notas numéricas inventadas por los Árabes son las siguientes:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
uno	dos	tres	quatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve	diez.

Con ellas no solo se expresan las unidades , sino tambien las decenas y centenas de las clases y dignidades , á quienes se les da un valor local ; de suerte , que estando solas ó acompañadas en el primer lugar de la derecha denotan unidades , en el segundo decenas , y en el tercero centenas. Los lugares vacíos se ocupan con un cero o , nota que nada significa.

COROLARIO I. De lo dicho se infiere que las partes

de la numeracion guardan el orden siguiente.

Unidad Decena Centena	} Simple.	Unidad Decena Centena	} Millar.	Unidad Decena Centena	} Cuento.
Unidad Decena Centena	} Millar de Cuento.	Unidad Decena Centena	} Bicuento.	Unidad Decena Centena	} Millar de Bicuento.
Unidad Decena Centena	} Tricuen- to.	Unidad Decena Centena	} Millar de Tricuen- to.	Unidad Decena Centena	} Quadri- cuento.

COROLARIO II. Tambien se infiere que la explicacion de las unidades, decenas &c. es la siguiente.

1 Uno.....	10 Diez.....	100 Ciento.....	1000 Mil.....
2 Dos.....	20 Veinte.....	200 Doscientos...	2000 Dos mil...
3 Tres.....	30 Treinta.....	300 Trescientos...	3000 Tres mil...
4 Cuatro.....	40 Quarenta....	400 Quatrocientos.	4000 Quatro mil.
5 Cinco.....	50 Cincuenta...	500 Quinientos...	5000 Cinco mil..
6 Seis.....	60 Sesenta.....	600 Seiscientos...	6000 Seis mil...
7 Siete.....	70 Setenta.....	700 Setecientos...	7000 Siete mil...
8 Ocho.....	80 Ochenta.....	800 Ochocientos..	8000 Ocho mil...
9 Nueve.....	90 Noventa....	900 Novecientos..	9000 Nueve mil..

COROLARIO III. Si á cada decena se le añaden las nueve unidades, se tendrán los demás números enteros hasta llegar á 100, y se expresan poniendo en el primer lugar las unidades, en el segundo las decenas, como sigue.

11 Once.....	15 Quince.....	19 Diez y nueve..	23 Veinte y tres..
12 Doce.....	16 Diez y seis..	20 Veinte.....	24 Veinte y quatro.
13 Trece.....	17 Diez y siete..	21 Veinte y uno..	25 Veinte y cinco..
14 Catorce.....	18 Diez y ocho..	22 Veinte y dos..	26 Veinte y seis..

Del mismo modo si á cada centena se añaden las decenas, y á estas las unidades, se tendrán los demás números desde 100 hasta 1000: y se escriben

poniendo en el primer lugar las unidades , en el segundo las decenas , y en el tercero las centenas ; y así habiendo de escribir quatrocientos setenta y cinco , porque este número se compone de cinco unidades , siete decenas , y quatro centenas , será su expresion 475. El número ochocientos y noventa , que se compone de nueve decenas y ocho centenas , se expresará así 890 , ocupando con un cero el lugar vacío de las unidades. El número ciento y tres se escribe 103 , poniendo el cero en el lugar vacío de las decenas ; y así de otro número.

COROLARIO IV. Entendido el modo de escribir qualquier número , será facil el leer siempre el valor de qualesquiera notas , atendiendo á la significacion de cada una , y al lugar que ocupa ; y así el número 642 , porque la primera nota indica dos unidades , la segunda quatro decenas , y la tercera seis centenas , quiere decir seiscientos quarenta y dos. Si el número fuere 624 , que consta de quatro unidades , dos decenas y seis centenas , se leerá seiscientos veinte y quatro.

ESCOLIO. Quando son muchas las notas , se leerán facilmente dividiéndolas de tres en tres con puntos , y quedarán formadas las clases , poniendo para distinguir las dignidades sobre el segundo punto 1 , sobre el quarto 2 , sobre el sexto 3 ; y así alternativamente. Con esta disposicion se empezarán á leer las notas por la izquierda hasta el primer punto que ocurra ; y si tuviere número encima , y fuese 3 , se dirá tricuentos : si 2 , bicuentos ; y si 1 , cientos ; y en llegando á punto sin número encima , se dirá mil.

En este exemplo $\overset{3}{2}34\overset{2}{5}67\overset{1}{.}891\overset{1}{.}012\overset{1}{.}314\overset{1}{.}008.920$, dispuestos los términos como se ha dicho , se leerá doscientos treinta y quatro tricuentos , quinientos sesenta y siete mil ochocientos noventa y un bicuen-

tos , doce mil trescientos catorce cuentos , ocho mil novecientos y veinte.

AXIOMAS.

I. Las cosas que son iguales á otra , son iguales entre sí.

II. Si á cosas iguales se añaden iguales , los todos serán iguales.

III. Si de cosas iguales se quitan iguales , los residuos quedarán iguales.

IV. Si á cosas iguales se añaden ó quitan desiguales , las sumas ó residuos quedarán desiguales.

V. Si cosas iguales se multiplican ó parten por iguales , esto es , se aumentan ó disminuyen , los productos ó quocientes serán iguales.

VI. Si cosas iguales se multiplican ó parten por desiguales , los productos ó quocientes serán desiguales.

VII. Las cosas que son duplas , triplas &c. de cantidades iguales , son iguales.

VIII. Las cosas que son mitades , tercios &c. de cantidades iguales , son iguales.

IX. El todo es mayor que qualquiera de sus partes.

CAPÍTULO II.

Del algoritmo de los números enteros , esto es , de las quatro primeras reglas de la Aritmética vulgar , que son sumar , restar , multiplicar y partir.

DEFINICION XI.

Adicion es la invencion de un número llamado suma ó agregado , que es igual á otros números homogeneos dados.

COROLARIO. Los números que se han de sumar

deben ser de una misma especie , esto es , reales con reales , arrobas con arrobas &c.

PROPOSICION I. PROBLEMA.

Sumar qualesquiera números.

RESOLUCION. Lo primero: dispónganse las cantidades de suerte que las unidades correspondan á las unidades , decenas á decenas , centenas á centenas &c. y tírese por debaxo una linea , para no confundir con ellas la suma ó agregado.

Lo segundo : añádanse las unidades unas á otras sucesivamente , y escríbase debaxo la suma , haciendo lo mismo con las decenas , centenas &c.

Lo tercero : si la suma de las unidades compusiere exáctamente una ó muchas decenas , se escribirá cero debaxo de las unidades , y se llevarán las decenas para unir las con las del segundo lugar ; y lo mismo se practicará con las centenas y millares &c.

Lo quarto : si sumando las unidades el agregado compusiese algunas decenas y unidades , se escribirán estas debaxo , y se llevarán las decenas para unir las con las del segundo lugar ; y lo propio se practicará con las decenas , centenas &c.

Para sumar las cantidades del exemplo 1, empezando por las unidades , se dirá 3 y 5 son 8 , que se escribe debaxo: 1 y 2 son 3 , y 4 son 7 , que se escribe debaxo : 2 y 4 son 6 , y 3 son 9 , escríbase debaxo ; y será la suma 978.

EXEMPLO I.

$$\begin{array}{r} 213 \\ 425 \\ 340 \\ \hline \text{Suma } 978 \end{array}$$

En el exemplo II dígase 4 y 8 son 12 , y 9 son 21 , y 3 son 24 ; y porque veinte y quatro unidades componen dos decenas y quatro unidades , escríbanse estas debaxo , y llévense las dos decenas para juntarlas con las de su especie , diciendo 2 que llevo , y 3 son 5 , y 7 son 12 , y

EX.II.

$$\begin{array}{r} 2134 \\ 6478 \\ 329 \\ 63 \\ \hline \end{array}$$

Suma 9004

2 son 14, y 6 son 20; y porque veinte decenas son dos centenas justas, se escribe cero debaxo, y se llevan las 2 para unirlas con las centenas, diciendo 2 que llevo y 1 son 3, y 4 son 7, y 3 son 10; y porque diez centenas es un millar, escribo cero, y llevo el millar para unirle con los de la quarta columna, diciendo 1 y 2 son 3, y 6 son 9, que escrito debaxo, será la suma 9004.

DEMOSTRACION. Las partes del número son las unidades, decenas, centenas &c. pero el agregado contiene todas las unidades, decenas &c. de las cantidades dadas: luego (ax. 1) la suma es igual á todas ellas.

ESCOLIO I. Para no fatigar la memoria, quando las cantidades que se han de sumar son muchas, se sumarán las notas, y en llegando á diez unidades, se dexará una señal, y se llevará el exceso que hubiere, uniéndolo á las notas que siguen, y debaxo se escribirá el último exceso, llevando para la segunda columna tantas decenas como señales se dexáron en la primera; y así en las demás, segun se ha dicho.

En el exemplo III se dirá 9 y 5 son 14; y porque llegó á 10, se dexará una señal, y el exceso 4 se unirá á las notas inferiores, diciendo 4 y 3 son 7, y 8 son 15; y dexando señal, se lleva el exceso 5, que añadido á 5, son 10; y dexando señal, se escribirá el exceso debaxo, que es cero

EX. III.

$$\begin{array}{r} 5 \ 8 \ 9 \\ 7 \ 6 \ 5 \\ 2 \ 9 \ 3 \\ 4 \ 7 \ 8 \\ \hline 6 \ 9 \ 5 \end{array}$$

Suma 2820

ó nada: por las tres señales que se dexáron se unirán en la segunda columna 3 al 8, y se tendrán 11: déxese señal, y el exceso 1 junto con el 6 hacen 7, y 9 son 16; y dexando señal, se unirá el exceso 6 al 7, y serán 13: dexando otra señal, el exceso 3 se agregará al 9, y se tendrán 12; y dexando señal, se escribirá debaxo el exceso 2; y por las quatro señales

de la segunda columna se llevarán 4 para la tercera, y continuando la operacion se tendrá la suma 2820.

ESCOLIO II. Habiendo de sumar números denominados, que expresen varias especies, y que en llegando á cierto número, la especie menor pasa á otra mayor, se ha de saber qué número de la especie menor compone la unidad de la mayor inmediata.

Habiendo de sumar varas, pies, pulgadas y lineas, debe saberse que una vara se compone de tres pies, el pie de doce pulgadas, y la pulgada de doce lineas; por lo qual doce lineas es una pulgada, doce pulgadas es un pie, y tres pies una vara; y así para sumar las partidas semejantes, se escribirán por su orden las especies, poniendo á la derecha la menor, y por su orden las demás, de suerte que correspondan lineas á lineas, pulgadas á pulgadas &c.

Para sumar las cantidades

EX. IV.

propuestas en el exemplo iv, empezando por las lineas, siempre que se llegue á 12, se dexará una señal, y se llevará el exceso, esto es, 9 y 11 son 20: dexando una se-

Varas.	Pies.	Pulgadas.	Lineas.
17	2,	5	9
10	4,	3	11,
4	1	2,	7,
33	2	0	3

ñal, se llevan las 8, que añadidas á 7, hacen 15; y dexando señal, se escribirá el exceso 3. Porque se dexáron dos señales, se dirá en la segunda columna 2 y 5 son 7, y 3 son 10, y 2 son 12, y dexando señal, se escribirá cero por no haber ningun exceso. Porque se dexó una señal, se dirá en la tercera columna 1 y 2 son 3; y dexando señal, se dirá 4 y 1 son 5; y dexando señal, se escribirá el exceso 2; y continuando la operacion llanamente, será la suma 33 varas, 2 pies y 3 lineas.

En el exemplo v para sumar libras, sueldos y dineros se ha de notar que una libra vale veinte sueldos, y un sueldo doce dineros; y así se sumarán los

dineros, y en llegando á 12, se dexará una señal, y se llevará el exceso: sumando los sueldos, en llegando á 20 se dexará señal, y se llevará el exceso; y continuando la operacion llanamente, se hallará ser la suma 38 libras, 14 sueldos y 5 dineros.

EX. V.

Libras.	Sueldos.	Dineros.
13	18	8
24	15,	9,
38	14	5-

Para sumar signos, grados, minutos y segundos, se ha de notar que un signo vale treinta grados, un grado sesenta minutos, y un minuto sesenta segun-

EX. VI.

Signos.	Grados.	Minutos.	Segundos.
4	14	38	24
3	27,	43,	59,
8	12	22	23

dos; y así habiendo de sumar las partidas del exemplo vi, se sumarán los segundos, y en llegando á 60 se escribirá el exceso despues de dexada una señal, y lo mismo se hace en los minutos; pero en los grados en llegando á 30 se dexa la señal, y se escribe el exceso; y de esta forma se tendrá la suma de 8 signos, 12 grados, 22 minutos y 23 segundos.

Del mismo modo se suman otras especies, como varas, palmos, dedos &c. arrobas, libras, onzas &c.

DEFINICION XII. Substraccion es la invencion ó averiguacion de un número llamado diferencia ó residuo entre dos números homogneos dados: el que se resta se llama substraendo, aquel de quien se resta minuendo, y el que se busca diferencia ó residuo.

COROLARIO. Para restar una cantidad de otra deben ser ambas de una misma especie, esto es, reales con reales &c.

PROPOSICION II. PROBLEMA.

Restar un número menor de otro mayor.

RESOLUCION. Lo primero: escríbase el número menor debaxo del mayor, de suerte que correspondan unidades á unidades, decenas á decenas &c. y tírese por debaxo una linea.

Lo segundo: empezando por la derecha, réstese la nota inferior de la superior, y escríbase debaxo la diferencia.

Para restar las cantidades del exemplo I dígase de 2 á 5 van 3, de 0 á 9 van 9, de 8 á 8 va 0, y de 4 á 6 van 2, y se hallará ser la diferencia entre los números dados 2093.

EX. I.

De	6895
Restar ...	4802
Diferencia	2093

Lo tercero: quando la nota inferior es mayor que la superior, se añaden á esta diez unidades, sacando la unidad de la nota inmediata, y dexando señal para memoria.

En el exemplo II porque 7 no puede restarse de 3, se tomará del 9 una decena, que son diez unidades, y dexando una señal, se añadirán al 3, y se tendrán 13: hágase despues la resta diciendo de 7 á 13 van 6; y porque el 9 respecto de la señal que tiene vale solamente 8, se dirá de 5 á 8 van 3, y será la diferencia entre los dos números dados 36.

EX. II.

De	9,3
Restar ...	57
Diferencia	36

Lo quarto: si la nota de quien se ha de tomar la unidad es 0, se tomará de la nota significativa que primero se encuentre; y dexando señal para memoria, cada cero de los que siguen valdrá por 9.

En el exemplo III porque 5 no puede restarse de 2, se tomará un millar del 8, y dexando señal para



memoria , valdrá solamente 7, cada o valdrá por 9, y el 2 valdrá 12, y se dirá de 5 á 12 van 7, de 3 á 9 van 6, de 9 á 9 va o, y de 4 á 7 van 3, y será la diferencia hallada 3067.

EX. III.

De 8,002
Restar ... 4 935
Diferencia 3 067

La razon es porque el millar que se toma del 8 vale diez centenas, de las cuales dexando 9 en el primer o, queda 1, que son diez decenas, y dexando 9 en el otro o, se añade la otra al 2 haciendo 12, y queda la misma cantidad.

En el exemplo siguiente se hallan todos los casos que se ofrecen en el restar.

De 47005023848106
Restar 36509345259217
Diferencia 10495678588889

ESCOLIO. Habiendo de restar números denominados, esto es, números que expresan diversas especies, se hará atencion al valor de cada una, y en lo demás se resta segun se ha dicho, comenzando por la especie menor.

Para restar las cantidades del exemplo iv restando 3 lineas de 5, quedan 2: restando 10 pulgadas de

EX. IV.

Varas. Pies. Pulgadas. Lineas.

De	24	2	11	5
Restar ...	15	2	10	3
Diferencia	9	0	1	2

11, queda 1: restando 2 pies de 2, queda nada; y restando 15 varas de 24, quedan 9; y será la diferencia entre las cantidades propuestas 9 varas, 1 pulgada y 2 lineas.

En el exemplo v: para restar 11 lineas de 3, se tomará del 5 una pulgada, que vale 12 lineas, y añadidas á 3, se tendrán 15, de quien restando 11, quedan 4: porque se tomó una del 5 no vale sino 4,

y para restar de estas las 9, se tomará 1 pie de los 2, que vale 12 pulgadas, y se tendrán 16, de las

quales restando 9, quedan 7: para restar 2 pies de 1, se tomará una vara, que vale 3 pies, y se tendrán 4, de que restando 2, quedan 2: finalmente restando las varas, se hallará ser la diferencia entre las cantidades dadas 7 varas, 2 pies, 7 pulgadas y 4 lineas. La razon es porque 24 varas, 2 pies, 5 pulgadas y 3 lineas son iguales á 23 varas, 4 pies, 16 pulgadas y 15 lineas, de cuyas cantidades se hizo la resta.

En el exemplo VI se tomará una vara de las 8, y reduciendo esta á pies, pulgadas y lineas, se tendrá el exemplo en la forma que sigue... y será la diferencia 3 varas, 4 pulgadas y 3 lineas.

Para restar las cantidades del exemplo VII, se dirá de 5 á 34 van 29; porque los 53 minutos no pueden restarse de 28, se tomará un grado de los 47, que son 60 minutos, y se tendrán 88, de quien restando 53, quedan 35: finalmente restando 42 grados de 46, quedan 4; y se tiene que la diferencia que se busca es 4 grados, 35 minutos y 29 segundos.

Si de 180 grados se han de restar 35 grados, 8

EX. V.

Varas. Pies. Pulgadas. Lineas.

De	24	2	5	3
Restar ...	16	2	9	11
Diferencia	7	2	7	4

EX. VI.

Varas. Pies. Pulgadas. Lineas.

De	8	0	0	0
Restar ...	4	2	7	9
Diferencia	3	0	4	3

Varas. Pies. Pulgadas. Lineas.

De	7	2	11	12
Restar ...	4	2	7	9
Diferencia	3	0	4	3

EX. VII.

Grados. Minutos. Segundos.

47	28	34
42	53	5
4	35	29

minutos y 17 segundos, se tomará un grado, y reducido este á minutos y segundos, se tendrán las cantidades como en el exemplo VIII, en donde la diferencia que resulta es 144 grados, 51 minutos y 43 segundos.

EX. VIII.

Grados.	Minutos.	Segundos.
179	59	60
35	8	17
144	51	43

ESCOLIO. Un Soldado sentó plaza en 8 de Septiembre del año de 1683 á las 9 horas, 45 minutos y 32 segundos de la noche; y sirvió hasta las 11 horas, 54 minutos y 49 segundos de la mañana del día 15 de Octubre del año de 1702. Pídesse el tiempo que sirvió.

Escríbase el tiempo completo de los años, meses, días, horas, minutos y segundos que pasaron así al tiempo que sentó plaza, como en el que se retiró del servicio, y la diferencia dará el tiempo que se pide.

Para esto se supone que el año civil empieza en la media noche del día 31 de Diciembre: luego en el momento que se retiró del servicio habian pasado 1701 años, 9 meses, 14 días, 11 horas, 54 minutos y 49 segundos; y en el instante que sentó plaza 1682 años, 8 meses, 7 días, 21 horas, 45 minutos y 32 segundos; y sabiendo que el año tiene 12 meses, el mes comun 30 días, el día 24 horas, la hora 60 minutos, y el minuto 60 segundos, se dispondrá la regla en esta forma.

	Años.	Meses.	Días.	Horas.	Minutos.	Segundos.
y restando el tiempo menor del mayor, se hallará que sirvió 19 años, un mes, 6 días, 14 horas, 9 minutos y 17 segundos.	1701	9	14	11	54	49
	1682	8	7	21	45	32
	19	1	6	14	9	17

DEFINICION XIII. Multiplicacion es la averiguacion de un número llamado producto, que contiene tan-

tas veces á un número dado , como unidades incluye otro por quien se ha multiplicado. Por exemplo : el multiplicar 4 por 3 es buscar el producto 12 , que contiene tres veces al 4 , ó bien quatro veces al 3 : los números que se multiplican , como el 4 y el 3 , se llaman lados , raices ó factores , de los quales el uno se dice multiplicando , y el otro multiplicador.

COROLARIO I. El multiplicar es un sumar abreviado ; porque lo mismo es multiplicar 3 por 4 , ó 4 por 3 para buscar el número 12 , que sumar tres veces al 4 , ó bien quatro veces al 3 , pues siempre resulta el mismo número 12.

COROLARIO II. La unidad no aumenta ni disminuye en la multiplicacion ; porque multiplicar por uno es tomar una vez la misma cantidad que se ha de multiplicar. Tambien el producto de qualquier número por o es o.

ESCOLIO I. Los números que se multiplican pueden ser de diversas especies , como varas por reales , libras por dineros &c.

ESCOLIO II. Para facilitar la práctica de la multiplicacion se han de tener de memoria todos los productos de los números dígitos conforme se contienen en la siguiente tabla , llamada Pitagórica por haber sido su inventor Pitágoras. En la parte superior se tiene el multiplicando , y á la izquierda el multiplicador , y los productos se hallarán enfrente.

TABLA PITAGÓRICA.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

EXEMPLO. Para saber el producto de 6 por 5, se toma en la parte superior el 6, y en la columna de la izquierda el 5, y enfrente de uno y otro número se hallará 30, que es el producto que se pide; y así de los demás.

PROPOSICION III. PROBLEMA.

Multiplicar qualquiera cantidad por otra.

RESOLUCION. Lo primero: escríbase el multiplicador debaxo del multiplicando, de suerte que correspondan unidades á unidades, decenas á decenas &c. y tírese por debaxo una linea.

Lo segundo: empezando por la derecha multiplíquese toda la cantidad del multiplicando por la primera nota del multiplicador, despues por la segunda, luego por la tercera &c. y empiécese á escribir cada producto debaxo de la nota que multiplica.

Lo tercero : súmense los productos parciales , y se tendrá el que se pide.

Habiendo de multiplicar las cantidades del presente ejemplo, empezando por el 6 dígame 6 multiplicado por 5 son 30: escríbase o debaxo ; y llevando 3 , dígame 6 por 7 son 42, y 3 que se llevaron 45 : escríbanse 5, y llévense 4: 6 por o es o ; y se escribirán 4 que

se llevaron : 6 por o es o , que se escribe por no haberse llevado nada : 6 por 4 son 24 , que se escribirán por ser el último producto por 6. Porque la segunda nota del multiplicador es cero , todo el producto será ceros. Porque la tercera nota del multiplicador es 1 , basta escribir debaxo todo el multiplicando. Para multiplicar por 3 se dirá 3 por 5 son 15 : escríbanse 5 , y llévese 1 : 3 por 7 son 21 , y 1 que se llevó son 22 : escríbanse 2 , y llévense 2 : 3 por o es o ; y se escribirán 2 que se llevaron : 3 por o es o , que se escribe por no haber llevado nada : finalmente 3 por 4 son 12 , que se escribirán por último producto ; y sumando los productos parciales, se tendrá el total de 124472950.

ESCOLIO I. Para multiplicar por 10, 100 , 1000 &c. basta añadir al multiplicando tantos ceros como tiene el multiplicador ; y así el producto de 475 por 10 es 4750 , por 100 47500 , y por 1000 475000.

ESCOLIO II. Quando á la derecha de alguna cantidad se hallan algunos ceros , basta multiplicar las notas significativas , y añadir tantos ceros como hay en una y otra cantidad ; y así para multiplicar 4000 por 300 , basta multiplicar 4 por 3 , y añadir al producto 12 cinco ceros , y se tendrá el que se busca, que es 1200000.

	EX.
Multiplicando	40075
Multiplicador	3106
	240450
	00000
	40075
	120225
Producto	124472950

ESCOLIO III. Para multiplicar por uno ó muchos nueves, basta añadir al multiplicando tantos ceros como nueves tiene el multiplicador; y de esta suma que resulta, restar la cantidad dada; y así para multiplicar 423 por 99, se añadirán dos ceros á los 423, y se tendrá la suma 42300; y restando de este número el 423, la diferencia 41877 será el producto del número 423 por 99. La razon es porque añadiendo dos ceros, se toma cien veces la cantidad, y restándola una vez, queda tomada noventa y nueve veces, que es lo mismo que multiplicar el número propuesto por 99.

DEFINICION XIV. Division ó particion es la averiguacion de cuántas veces un número está contenido en otro. El número que se parte se llama dividiendo, aquel por quien se parte divisor ó partidor, y el que se busca quociente.

EXEMPLO. Partir 12 por 4 es buscar un número 3, que exprese las veces que el 4 se contiene en el 12. El dividendo es 12: el divisor 4, y el quociente 3.

ESCOLIO. La particion se considera tambien como una distribucion por igual del dividendo entre las unidades del divisor, y así lo mismo es decir que 4 se contiene en 12 tres veces, que si se diera 12 entre 4 les cabe á 3.

COROLARIO I. El partir es un restar abreviado, por ser lo mismo partir 12 por 4, que restar el 4 del 12 quantas veces se pudiere, pues de una y otra suerte se halla el número 3.

COROLARIO II. La unidad no disminuye en la particion, porque se contiene tantas veces en qualquier número como expresan sus notas propias.

PROPOSICION IV. PROBLEMA.

Partir un número mayor por otro menor.

RESOLUCION. Lo primero: escríbase el divisor al

lado del dividendo, y sepárense de la izquierda de este con un punto tantas notas quantas tuviere el divisor; y si lo separado no fuere igual ó mayor que el divisor, se tomará otra nota mas del dividendo.

Lo segundo: véase cuántas veces se contiene el divisor en las notas separadas del dividendo; y el número que lo indicáre, será el quociente, que se escribirá aparte debaxo del divisor.

Lo tercero: multiplíquese el divisor por el quociente, réstese el producto del dividendo, y se tendrá el residuo primero.

Lo quarto: júntese al residuo la nota que sigue en el dividendo, y véase cuántas veces contiene al divisor; y el número que saliere se pondrá en el quociente á la derecha del primero; y multiplicando el divisor por esta nota, el producto se restará del residuo primero, y se tendrá el residuo segundo.

Lo quinto: se continuará así hasta que se hayan baxado todas las notas del dividendo, y se tendrá concluida la operacion. Quando el divisor no cabe en el residuo, despues de baxada una nota, se pondrá 0 en el quociente, y se baxará otra.

CASO I. Quando el divisor tiene una sola nota.

Habiendo de partir 14184 por 3, se pondrá el divisor 3, como se ve en el exemplo 1, á la derecha del dividendo; y porque no cabe el 3 en la primera nota del dividendo, se apartarán las dos primeras de la izquierda, esto es, 14, y se dirá así: 14 entre 3 les cabe á 4, que se escribe aparte; y multiplicando 4 por 3, se tendrá el producto 12, que restado de 14, quedará 2 por el resi-

Dividendo	EX. I.
14,184	3 divisor.
12	4728 quociente.
21	residuo primero.
21	
08	residuo segundo.
6	
24	residuo tercero.
24	
00	residuo quarto.

duo primero : bájese el 1 del dividendo , y se tendrá 21 : dígase 21 entre 3 les cabe á 7 , que se escribe á la derecha del 4 en el quociente ; y multiplicando 7 por 3 , se tendrá 21 , que restado de 21 , quedará o por el residuo segundo : bájese el 8 , y dígase 8 entre 3 les cabe á 2 , que se escribe en el quociente ; y multiplicando 2 por 3 , se tendrá 6 , que restado de 8 , quedará 2 por el residuo tercero : bájese el 4 , y se tendrá 24 , que partido por 3 , les cabe á 8 ; y escribiéndolo en el quociente , se multiplicará por 3 , y el producto 24 se restará de 24 , quedando o por el residuo quarto : y respecto que no hay mas notas que baxar del dividendo , se dirá que 14184 partido por 3 les cabe á 4728.

CASO II. Quando el divisor consta de algunas notas , se observarán tambien las reglas antecedentes.

Habiendo de partir 144192 por 32 , se escribirá el divisor como en el exemplo II ; y porque 14 no puede partirse por 32 , se tomarán tres notas del dividendo , esto es , 144 : para regular el quociente , ó para saber cuántas veces cabe el 32 en el 144 , porque en el dividendo hay una nota mas que en el divisor , se

EX. II.

144192	32 divisor.
128	4506 quociente.
161	residuo primero.
160	
19	residuo segundo.
00	
192	residuo tercero.
192	
000	residuo quarto.

regulan las dos primeras del dividendo á la primera del divisor , esto es , 14 entre 3 les cabe á 4 , que se escribe en el quociente ; y multiplicando el divisor 32 por 4 , se tendrá 128 , que restado de 144 , queda 16 por el residuo primero : bájese el 1 , y se tendrá 161 ; y dígase 16 entre 3 les cabe á 5 , que multiplicado por 32 , da 160 ; y restando este producto de 161 , queda 1 por el residuo segundo : bájese

el 9, y se tendrá 19; y porque 1 no puede partirse entre 3, ó bien 19 entre 32, se escribe 0 en el quociente: bájese el 2, y se tendrá 192 por el residuo segundo y tercero, y se dirá 19 entre 3, les cabe á 6, que se escribe en el quociente; y multiplicando 32 por 6, se hallará el producto 192, que restado de 192, queda 0 por el residuo quarto, siendo el quociente que se busca 4506.

ESCOLIO I. Si habiendo multiplicado el divisor por el quociente, fuere tan grande el producto, que no pudiere restarse del dividendo, es señal que no le cabe á tanto, y así se hará el quociente menor.

Si habiendo restado el producto del quociente por el divisor, sobrare un número igual ó mayor que el divisor, el quociente deberá ser mayor, pues es señal que le cabe á mas. Esto debe observarse cuidadosamente en cada operacion.

ESCOLIO II. Quando el partidor es 2, puede hacerse la operacion sacando la mitad, si es 3 el tercio, y si es 4 el quarto; y así habiendo de partir 786 por 3, se sacará el tercio diciendo: el tercio de 7 es 2, y sobra 1, que junto con el 8 hace 18: dí-gase el tercio de 18 es 6, y el tercio de 6 es 2, siendo el quociente que se busca 262.

ESCOLIO III. Quando el partidor tiene muchas notas, ó ha de servir para muchas particiones, se hace la operacion con mucho descanso, y sin exponerse á error, ni andar tanteando á cómo les cabe (que es la mayor dificultad y embarazo de los principiantes), formando una tabla del divisor multiplicado por todos los números dígitos. Por exemplo: si se ha de partir 3708147 por 543, multiplicando 543 por 1, se tiene la misma cantidad: multiplicando por 2, se tendrá 1086: multiplicando por 3, será 1629 &c. y así se continuará la multiplicacion hasta 9, poniendo los productos de suerte, que se sigan por su

orden unos á otros, y al lado de cada uno se pondrá el número dígito que sirvió de multiplicador, como se ve en la presente tabla. Hecho esto, sepárense del dividendo las quatro primeras notas 3708, como se ha dicho, y buscándolas en la tabla, respecto que no se encuentran justamente, tómese el número próximo menor, que es 3258, y corresponde á 6: escríbase este en el quociente, y restando 3258 del dividendo, queda 450 por el residuo primero: bájese el 1, y se tendrá 4501, que buscándole en la tabla, se hallará ser su próximo menor 4344, que pertenece á 8:

TABLA.

1		543
2		1086
3		1629
4		2172
5		2715
6		3258
7		3801
8		4344
9		4887

EX. III.

3708147		543	divisor.
3258		6829	quociente.
4501			
4344			
1574			
1086			
4837			
4887			
0000			

escribiendo 8 en el quociente, y hecha la resta, se tendrá 157 por el residuo segundo: bájese el 4, y se tendrá 1574, que buscado en la tabla, solo se halla el próximo menor 1086, que corresponde á 2: escrito este en el quociente, y hecha la resta, será el residuo tercero 488: bájese el 7, y se tendrá 4887, cuyo número buscado en la tabla, corresponde justamente á 9: escríbase este en el quociente, y practicada la resta, quedará 0 por el residuo quarto, siendo el quociente total 6829.

ESCOLIO IV. Otros muchos modos hay de partir mas breves, multiplicando y restando á un tiempo; pero los dos aquí explicados son los mas claros, y menos expuestos á error.

ESCOLIO V. Si en el último residuo sobrare algo, se pondrá sobre una línea, y debaxo el divisor, y se tendrá una fraccion ó quebrado.

Partiendo 26 por 3, el quociente es 8, y sobran 2, cuyo número puesto sobre una línea, y debaxo el divisor 3, se tendrá la expresion $8\frac{2}{3}$, que quiere decir dos tercios, y por consiguiente se dirá que el quociente es 8 y $\frac{2}{3}$, como se ve en el exemplo iv.

EX. IV.

$$\begin{array}{r} 26 \quad | \quad 3 \\ 24 \quad \quad 8\frac{2}{3} \\ \hline 2 \end{array}$$

ESCOLIO VI. Quando el divisor es 10, 100, 1000 &c. bastará quitar de la derecha del dividendo tantas notas como ceros tiene el divisor; y así habiendo de partir 5427 por 10, será el quociente $542\frac{7}{10}$; si el mismo número se parte por 100, será el quociente $54\frac{27}{100}$; y si se parte por 1000, será el quociente $5\frac{427}{1000}$.

ESCOLIO VII. Quando el divisor es producido de dos ó mas raices, si el dividendo se parte por una de ellas, y el quociente por la otra, se tendrá el quociente que se pide, como en los exemplos siguientes.

Queriendo partir 144192 por 32, porque este número se produce de la multiplicacion de 8 por 4, se puede partir la cantidad por 8, y el quociente dividirlo por 4, ó al contrario, partir la cantidad por 4, y el quociente por 8, y así sacando el octavo, se tendrá 18024, y sacando de este el cuarto, será 4506 el quociente que se pide.

EX. V.

$$\begin{array}{r} 144192 \quad | \quad 32 \\ 18024 \text{ octavo.} \\ 4506 \text{ cuarto.} \end{array}$$

Tambien porque 32 se produce de la continua multiplicacion de las notas 2, 2, 2, 2, 2, sacando sucesivamente la mitad, se hallará del mismo modo el quociente 4506, como se ve en el exemplo vi.

EX. VI.

$$\begin{array}{r} 144192 \\ 2 \dots\dots 72096 \\ 2 \dots\dots 36048 \\ 2 \dots\dots 18024 \\ 2 \dots\dots 9012 \\ 2 \dots\dots 4506 \end{array}$$

ESCOLIO VIII. Quando un número menor se parte por otro mayor, el quociente se expresa en forma de fraccion ó quebrado, poniendo sobre una linea el dividendo, y debaxo el divisor; y así habiendo de partir 2 por 3, será el quociente $\frac{2}{3}$, que quiere decir dos tercios.

PROPOSICION V. PROBLEMA.

Exáminar la adición, substracción, multiplicación y división.

El exámen ó prueba de estas prácticas se executa por las operaciones contrarias, de suerte que el sumar se prueba restando, el restar se prueba sumando, el multiplicar partiendo, y el partir multiplicando.

Lo primero: sumadas las partidas 2134, 6478, 329 y 63, para probar si la operacion está bien hecha, se sumarán las columnas de la izquierda, diciendo 2 y 6 son 8, que restados de 9, queda 1: en la segunda columna se dirá 1 y 4 son 5, y 3 son 8, que restados de 10, quedan 2; y en la tercera se dirá 3 y 7 son 10, y 2 son 12, y 6 son 18, que restados de 20, quedan 2: dígase en la última columna 4 y 8 son 12, y 9 son 21, y 3 son 24, que restados de 24, queda 0; y se concluye que la operacion está bien hecha, pues no sobra cosa alguna.

Lo segundo: de 93 restando 57 se halla ser la diferencia 36; pues para la prueba sùmese la diferencia 36 con el substraendo 57; y porque la suma es 93 igual al minuendo, se dirá que la operacion está exácta.

Lo tercero: multiplicando 423 por 3, se halla el

2134
6478
329
63
—
9004
1220
93
57
—
36
93

producto 1269. Para exâminar la operacion se parte el producto 1269 por el multiplicador 3; y porque el quociente 423 es igual al multiplicando, se dirá que está bien la operacion. Si el producto se parte por el multiplicando, dará por quociente el multiplicador

$$\begin{array}{r}
 423 \\
 \underline{3} \\
 1269
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1269 \quad | \quad 3 \\
 \underline{1269} \\
 0000
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1269 \quad | \quad 423 \\
 \underline{1269} \\
 0000
 \end{array}$$

Lo quarto: habiendo de partir 1269 por 3, se hallará el quociente 423. Para exâminar la operacion se multiplica el quociente 423 por el divisor 3; y porque el producto 1269 es igual al dividendo, la operacion está exâcta. Si en la particion sobrare algo, se añadirá al producto; y si la suma fuere igual al dividendo, estará bien la operacion: como si se parten 26 por 3, se hallará el quociente 8, y sobran 2: multiplicando 8 por 3, se tiene 24; y añadiendo 2 que sobraron, se tendrá 26, que es el número igual al dividendo.

CAPÍTULO III.

De las fracciones vulgares.

Aunque la inteligencia de las fracciones ó quebrados depende de la razon y proporcion en comun, que se dará en el libro tercero, para que en los principios no se carezca de su noticia, se explicarán ahora brevemente, omitiendo sus demostraciones, y buscando en lo sucinto la utilidad de la práctica.

HIPÓTESI. La fraccion ó quebrado se expresa por dos números, el uno sobre el otro con una linea intermedia: el inferior llamado denominador indica la unidad ó entero dividido en partes; y el superior llamado numerador numera ó determina las partes dadas en el caso propuesto.

EXEMPLO. Tres quartos de un real se escriben así $\frac{3}{4}$, en donde el denominador 4 declara que el real está dividido en quatro partes iguales; y el numerador 3 determina tres de dichas partes.

ESCOLIO. El quebrado tiene su origen de la particion de un número menor por otro mayor, como si 3 reales se han de partir entre quatro hombres; pues á cada uno le tocan $\frac{3}{4}$, y este quebrado será el quociente: de manera que el numerador es el dividendo, y el denominador el divisor.

Quando el denominador es 2, las partes se llaman medios: si 3, tercios: si 4, quartos: y así en adelante: quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos y décimos; pero desde 11 en adelante, despues de haber nombrado el numerador y denominador, se añade á este la voz avos: y así $\frac{3}{14}$, se leerá 3 catorce avos.

DEFINICION XV. Si el numerador es menor que el denominador, se llama el quebrado propio, como $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{6}$ &c.; porque en este caso es parte ó partes del entero; pero quando es igual ó mayor, como $\frac{4}{4}$, $\frac{6}{2}$ &c., se dice impropio; porque entonces aunque se figure la cantidad como quebrado, incluye uno ó muchos enteros.

DEFINICION XVI. Divídese el quebrado en simple y compuesto. Quebrado simple es el que es parte ó partes de un entero, como $\frac{2}{3}$ de un real, que son dos partes iguales de un real dividido en tres. Quebrado compuesto es el que es parte ó partes del quebrado simple, como $\frac{4}{3}$ de $\frac{3}{8}$, cuya expresion quiere decir, quatro quintos de tres octavos.

DEFINICION XVII. Medir un número á otro, se dice quando le parte exáctamente: y así los números 2, 3, 4, 6 miden ó son medidas del número 12, por partirle exáctamente, ó sin residuo: la

mayor medida es el mayor número que le divide; y así 6 es la mayor medida de dicho número 12.

DEFINICION XVIII. La mayor comun medida de dos ó mas números, es el mayor número que los parte exáctamente; y así 4 es la mayor comun medida de los números 12 y 20, midiendo tres veces al 12, y cinco al 20.

DEFINICION XIX. Número primo es el que no tiene otra medida que la unidad, como 2, 3, 5, 7 &c. Números entre sí primos son aquellos cuya mayor comun medida es la unidad, como 3 y 5, 11 y 13 &c.

DEFINICION XX. Número compuesto es el que á mas de la unidad tiene otra medida, como los números 4, 6, 9 &c.

PROPOSICION VI. PROBLEMA.

Hallar la mayor comun medida de dos ó mas números.

RESOLUCION. Pártase el número mayor por el menor; y si sobrare algo, pártase el menor por lo que sobre; y si en la segunda particion sobrare tambien algo, pártase el residuo primero por el segundo, continuando de esta suerte la operacion hasta que no sobre cosa alguna, en cuyo caso el último divisor ó partidor será la mayor comun medida.

Para hallar la mayor comun medida de 21 y 15, pártase 21 por 15; y porque sobran 6, pártase 15 por 6; y porque todavia sobran 3, pártase 6 por 3; y porque no sobra nada, se dirá que la mayor comun medida de los números 21 y 15 es 3.

EX. I.

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 6} \text{ residuo primero.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 3} \text{ residuo segundo.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \overline{) 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

Para hallar la mayor comun medida de los números 432 y 234, partiendo 432 por 234, sobran 198: partiendo 234 por 198, sobran 36: partiendo 198 por 36, sobran 18: partiendo finalmente 36 por 18, no sobra nada; y

así se dirá, que 18 es la mayor comun medida de los números 432 y 234.

ESCOLIO I. Quando el último partididor es la unidad, entonces los números no tienen mayor medida comun, y por consiguiente se llaman entre sí primos, como sucede en los números 14 y 11, cuya comun medida es la unidad.

ESCOLIO II. Si se busca la mayor comun medida de los tres números 35, 49, 56, hállese primero la mayor comun medida de los números

49 y 35, que es 7, pártase despues por esta el tercer número dado 56; y como en la particion no sobra cosa, se dirá que 7 es la mayor comun medida de los tres números propuestos. Del mismo modo se hallará la mayor comun medida de quatro ó mas números.

EX. II.

	432		234	
	234		I	
234			198	residuo primero.
198			I	
198			36	residuo segundo.
180			5	
36			18	residuo tercero.
36			2	
00				residuo quarto.

EX. III.

	49		35	
	35		I	
35			14	
28			2	
14			7	
14			2	
00				

35, 49, 56

56		7
56		8
00		

PROPOSICION VII. PROBLEMA.

Reducir un quebrado á los mínimos términos.

El mismo valor de un quebrado se puede expresar con infinidad de términos ya mayores ó ya menores, como $\frac{1}{2}$, que es lo mismo que $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ &c.; porque así como la unidad dividida en dos partes, su mitad se dice $\frac{1}{2}$, así dividida en quatro partes, su mitad se dice $\frac{2}{4}$ &c.

RESOLUCION. Para reducir el quebrado á los mínimos términos, búsquese por la proposicion antecedente la mayor comun medida del numerador y denominador; y partiendo entrambos por ella, los quocientes formarán el quebrado que se busca.

EXEMPLO. Pídese reducir á los mínimos términos el quebrado $\frac{15}{21}$. Hállese la mayor comun medida de 15 y 21, que es 3: pártase por ella el número 15, y se tendrá el quociente 5: pártase tambien por la misma el denominador 21, y se hallará el quociente 7; y formando de ambos quocientes el quebrado $\frac{5}{7}$, será este el reducido.

PROPOSICION VIII. PROBLEMA.

Reducir los quebrados á un comun denominador.

RESOLUCION. Para reducir los quebrados de distintos denominadores, como $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ á un comun denominador, lo primero multiplíquense los denominadores 2, 4 y 6 entre sí, y

EX.
 $24, 36, 40$
 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$
 48 comun denominador.
 $\frac{24}{48}, \frac{36}{48}, \frac{40}{48}$

el producto 48 será el comun denominador. Lo segundo : multiplíquese cada numerador por todos los denominadores de los otros, y se tendrán los correspondientes numeradores 24, 36, 40, á los quales poniéndoles el comun denominador 48, resultarán los quebrados $\frac{24}{48}$, $\frac{36}{48}$, $\frac{40}{48}$ reducidos á un comun denominador 48, como se ve en el exemplo.

PROPOSICION IX. PROBLEMA.

Reducir el quebrado compuesto á simple.

RESOLUCION. Sea el quebrado compuesto $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{6}$: para reducirle á simple multiplíquense continuamente los numeradores 2, 1 y 5, y el producto 10 será el numerador : multiplíquense asimismo los denominadores 3, 4, 6, y el producto 72 será el denominador : fórmese de ambos productos el quebrado $\frac{10}{72}$, y este será el simple que se pide.

PROPOSICION X. PROBLEMA.

Reducir los enteros á quebrados.

RESOLUCION. Para que los enteros tengan forma de quebrados, basta ponerles por denominador la unidad, como $\frac{12}{1}$, que es lo mismo que doce enteros ; pero si se han de reducir á la especie de quartos, multiplíquese 12 por 4, y el producto 48 será el numerador ; y así $\frac{48}{4}$, es lo mismo que doce enteros.

Si se hubiesen de reducir los enteros á la especie de quintos, esto es, á un quebrado cuyo denominador sea 5, se multiplicarán por 5 dichos

enteros : si á la especie de sextos , se multiplicarán los enteros por 6 &c.

Si un entero y quebrado como $6\frac{4}{5}$, se ha de reducir á la especie de su quebrado , esto es , á la de quintos , multiplíquese el entero 6 por el denominador 5 , y al producto 30 añádase el numerador 4 , y se tendrá el quebrado $\frac{34}{5}$, que es lo mismo que $6\frac{4}{5}$.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

Reducir los quebrados á enteros.

RESOLUCION. Si el numerador fuere mayor que el denominador , se partirá por este , y el quociente expresará el entero. Por exemplo : habiendo de reducir el quebrado $\frac{30}{5}$ á entero , se partirá el numerador 30 por el denominador 5 , y el quociente 6 indicará el entero.

Quando en la particion sobra alguna cosa , se dexa por quebrado. Como si se han de reducir $\frac{39}{5}$, que partiendo 39 por 5 , se tendrá el quociente 7 , y sobran 4 , en cuyo caso se dirá que el quebrado $\frac{39}{5}$ es lo mismo que 7 y $\frac{4}{5}$.

PROPOSICION XII. PROBLEMA.

Hallar el valor de un quebrado.

RESOLUCION. Conocido el valor del entero , multiplíquese por el numerador , pártase el producto por el denominador , y el quociente será el valor del quebrado.

Queriendo saber el valor de $\frac{3}{20}$ de libra , porque una libra vale 20 sueldos , multiplíquese por estos

el numerador 2, y el producto 40 pártase por el denominador 8, que dará 5 sueldos por el valor de los $\frac{2}{8}$ de libra.

Quando en la particion sobra algo, se forma el quebrado, y se le halla el valor del mismo modo. Por exemplo: si se pide el valor de $\frac{5}{8}$ de libra, multiplíquese el numerador 5 por los 20 sueldos que tiene la libra, y el producto 100 partido por 8, dará el quociente 12 sueldos y $\frac{4}{8}$ de sueldo; y porque un sueldo vale 12 dineros, multiplíquese 12 por 4, y el producto 48 se partirá por el denominador 8, y dará el quociente 6, que son los dineros correspondientes á $\frac{4}{8}$ de sueldo; y por consiguiente se dirá que $\frac{5}{8}$ de libra valen 12 sueldos y 6 dineros.

PROPOSICION XIII. PROBLEMA.

Sumar quebrados.

RESOLUCION. Si los quebrados fueren de distintos denominadores, redúzcanse primero á un comun denominador, y súmense despues los numeradores.

Sean los quebrados que se han de sumar $\frac{3}{7}$ y $\frac{2}{5}$: reducidos á un comun denominador (por la prop. VIII), serán $\frac{15}{35}$ y $\frac{14}{35}$; sumando los numeradores 15 y 14, y poniéndole á la suma 29 el comun denominador 35, se tendrá el quebrado $\frac{29}{35}$ por la suma de los propuestos.

EX.		
15	14	
$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	15
7	5	$\frac{14}{35}$
	35	29
$\frac{15}{35}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{29}{35}$

Si se hubieren de sumar quebrados que sean compuestos, se reducirán primero á simples (por la proposicion IX), y despues se obrará como se ha dicho.

Si son enteros y quebrados, se sumarán los que-

brados, como se ha dicho; y si compusieren algunos enteros, se agregarán á los otros, y estos se sumarán llanamente.

PROPOSICION XIV. PROBLEMA.

Restar quebrados.

Tres casos pueden ocurrir, y son: el primero restar un quebrado de otro: el segundo restar entero y quebrado de entero; y el tercero restar entero, y quebrado de entero y quebrado.

RESOLUCION. Para lo primero se reducirán los quebrados á un comun denominador, si le tuvieren diverso; y despues se restará el numerador menor del mayor, poniendo á la diferencia el denominador comun.

Sea el quebrado $\frac{3}{4}$ el que se ha de restar de $\frac{5}{6}$; reducidos $\frac{5}{6}$ y $\frac{3}{4}$ á un comun denominador (prop. VIII), serán $\frac{20}{24}$, $\frac{18}{24}$; y restando 18 de 20, quedará 2 por numerador del residuo, al que poniendo el comun denominador 24, se tendrá el quebrado $\frac{2}{24}$ por la diferencia que se pide, como se ve en el exemplo I.

EX. I.

$$\begin{array}{r} 20 \quad 18 \\ \frac{5}{6}, \quad \frac{3}{4} \\ \hline 24 \\ \frac{20}{24}, \quad \frac{18}{24} \quad \frac{2}{24} \text{ diferencia.} \end{array}$$

Por esta regla se sabe qual de los dos quebrados es mayor.

Lo segundo: si de 8 se han de restar 2 y $\frac{3}{4}$, tómesese del 8 la unidad, que reducida á la especie de su quebrado (pr. x), será $\frac{4}{4}$, igual á la misma unidad, y se tendrán 7 y $\frac{4}{4}$, de cuya cantidad restando 2 y $\frac{3}{4}$, será la diferencia 5 y $\frac{1}{4}$, como se ve en el exemplo II.

EX. II.

$$\begin{array}{r} 8 \quad 7 \frac{4}{4} \\ 2 \frac{3}{4} \quad 2 \frac{3}{4} \\ \hline \text{diferencia } 5 \frac{1}{4} \end{array}$$

PROPOSICION XV. PROBLEM.

Multiplicar quebrados.

RESOLUCION. Lo primero: multiplíquense entre sí los numeradores, y el producto será el numerador: multiplíquense despues los denominadores, y el producto será el denominador.

Si se han de multiplicar $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, el producto de 2 por 4 es 8: el producto de 3 por 5 es 15: fórmese de ambos productos el quebrado $\frac{8}{15}$, y será el que se pide, como se ve en el exemplo I.

EX. I.

$$\frac{2}{3} \frac{4}{5}, \frac{8}{15}$$

Lo segundo: si se han de multiplicar enteros por quebrados, como 12 por $\frac{3}{4}$, póngase á los enteros la unidad por denominador para tenerlos en forma de quebrados, y multiplicándolos despues segun se ha dicho, se tendrá $\frac{36}{4}$, como se ve en el exemplo II.

EX. II.

$$\frac{12}{1} \frac{3}{4}, \frac{36}{4}$$

Lo tercero: si se han de multiplicar enteros y quebrados por enteros y quebrados, como $14\frac{2}{3}$ por $9\frac{4}{5}$, se reducirán los enteros á la especie de sus quebrados (prop. x), y serán $\frac{44}{3}$, $\frac{49}{5}$: despues se obrará como se ha dicho, y manifiesta el exemplo III.

EX. III.

$$14\frac{2}{3} \frac{44}{3} \frac{49}{5}, \frac{2156}{15}$$

PROPOSICION XVI. PROBLEMA.

Partir quebrados.

RESOLUCION. Lo primero: escríbase el quebrado que se ha de partir, y despues el partidor: luego multiplíquese el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y el producto será el numerador del quociente: multiplíquese tambien el nu-

merador del divisor por el denominador del dividendo, y el producto será el denominador del quociente.

Si se han de partir $\frac{2}{3}$ por $\frac{5}{6}$, esto es, EX. I.
siendo $\frac{2}{3}$ el dividendo, y $\frac{5}{6}$ el divisor, $\frac{2}{3} \frac{5}{6}, \frac{12}{15}$
se multiplicará el numerador 2 por el denominador 6, y el producto 12 será el numerador del quociente; y multiplicando el numerador 5 por el denominador 3, el producto 15 será el denominador del quociente, siendo el quebrado $\frac{12}{15}$ el quociente que se pide, segun se ve en el exemplo I.

Lo segundo: si se han de partir enteros por quebrados, ó al contrario, se pone á los enteros la unidad por denominador para tenerlos en forma de quebrados, y luego se obra segun se ha dicho.

En el exemplo II: si se han de partir EX. II.
6 por $\frac{3}{4}$, poniendo la unidad al 6, se $\frac{6}{1} \frac{3}{4}, \frac{24}{3}$
tendrá $\frac{6}{1}, \frac{3}{4}$, y obrando como se ha dicho, se concluirá la operacion, hallando por quociente el quebrado $\frac{24}{3}$.

Lo tercero: si se han de partir enteros y quebrados por enteros y quebrados, se reducen los enteros á la especie de sus quebrados (prop. x), y se obra despues segun se ha dicho.

Si se han de partir 16 y $\frac{2}{7}$ EX. III.
por 7 y $\frac{3}{4}$, reducidos los enteros á la especie de sus quebrados, serán $\frac{82}{5}$ y $\frac{31}{4}$: despues se $16\frac{2}{7} \frac{82}{5} \frac{31}{4}, \frac{328}{155}$
hará la operacion como queda enseñado, y se ve en el exemplo III.

PROPOSICON XVII. PROBLEMA.

Exáminar la logística de los quebrados.

El sumar se exámina por el restar; y así sumando

dos ó mas quebrados , si de la suma se resta uno de ellos , y el residuo fuere igual al otro , ó á la suma de los otros , la operacion estará exácta.

El restar se exâmina por el sumar : y así si sumando la diferencia con el quebrado menor , la suma fuere igual al quebrado mayor , la resta estará bien hecha.

El multiplicar se exâmina por el partir : por lo que si partiendo el producto por uno de los quebrados , el quociente fuere igual al otro , la operacion estará bien hecha.

El partir se exâmina por el multiplicar : á vista de lo qual , si multiplicando el quociente por el divisor , el producto fuere igual al dividendo , la operacion estará exácta.

ESCOLIO I. Causa no poca admiracion á los principiantes ver que si se multiplican dos quebrados propios , el producto sale menor que qualquiera de ellos , como si se multiplica $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{3}$, que el producto es $\frac{1}{6}$. La razon es porque , como consta de la definicion XIII , el producto debe contener tantas veces al número dado ó multiplicando , como unidades contiene el multiplicador ; y como $\frac{1}{3}$ contiene solamente la tercera parte de la unidad , así tambien el producto $\frac{1}{6}$ debe contener la tercera parte de $\frac{1}{2}$: luego será menor.

ESCOLIO II. Causa tambien no poca admiracion ver que partiendo un quebrado por otro , el quociente es mayor que el dividendo , como si $\frac{1}{2}$ se parte por $\frac{1}{4}$, que el quociente es 2 enteros : la razon es porque el quociente (por la definicion XIV) ha de contener tantas unidades como veces el divisor se contiene en el dividendo : y como $\frac{1}{4}$ se contiene dos veces en $\frac{1}{2}$, tambien el quociente debe contener dos unidades.



LIBRO SEGUNDO.

DEL ALGORITMO LITERAL.

CAPÍTULO I.

*De la adición, substracción, multiplicación y división
de las cantidades literales.*

HIPÓTESI.

La Aritmética literal se sirve en sus operaciones de las letras del alfabeto, ya sean mayúsculas, como *A, B, C, D &c.*, ó ya minúsculas, como *a, b, c, d &c.*

ESCOLIO. Francisco Vieta, inventor de esta logística, usó de las mayúsculas; pero Cartesio, y comunmente los modernos, se sirven de las minúsculas, y con ellas se expresa qualquiera especie de cantidad, ya sea continua ó ya discreta, llamando por esto á las letras números indeterminados: de suerte que por ellas se entiende algun número, línea, superficie ó sólido, pues qualquier número puede expresarse por las letras *a, b, c*, ó por qualquiera otra del alfabeto.

Para evitar muchas voces se sirven los Matemáticos de varios signos, con los quales expresan la suma ó agregado, la diferencia ó residuo, el producto, el quociente, la igualdad, desigualdad, semejanza, proporcion, potencia y raiz de la cantidad, que se enseñarán en su propio lugar, explicando por ahora los mas comunes, que son los siguientes.

HIPÓTESI II. Este signo $+$ quiere decir *mas*: es propio de la adición, y sirve para expresar el agregado ó suma de dos cantidades.

EXEMPLO. $4 + 2$, se lee quatro mas dos, indicando la suma de ambos números, que es 6; $a + b$, se lee a mas b , y es la suma de a con b .

HIPÓTESI III. Este signo $-$, quiere decir *menos*: es propio de la substraccion ó resta; y puesto entre dos números indica que el siguiente está restado del precedente, y lo mismo si está entre qualesquiera otras dos cantidades.

EXEMPLO. $6 - 2$, se lee seis menos dos, expresando la diferencia entre dichos números, esto es, que 2 está restado de 6; $a - b$, se lee a menos b , y quiere decir que b está restado de a .

HIPÓTESI IV. Este signo $\times$ quiere decir *multiplicado*: y así 6×3 , se lee seis multiplicado por tres, y sirve para indicar el producto 18; $a \times b$, quiere decir a multiplicado por b ; este producto se expresa mejor así ab , juntando simplemente las letras. Tambien abc quiere decir $a \times b \times c$, esto es, a multiplicado por b , y el producto por c .

HIPÓTESI V. El signo de la particion se hace poniendo sobre una linea el dividendo, y debaxo el divisor; y así para expresar el quociente de 9 partido por 3, se pone $\frac{9}{3}$, que quiere decir 9 partido por 3: si a se divide por b , será el quociente $\frac{a}{b}$.

HIPÓTESI VI. El signo de igualdad es $=$, y quiere decir *igual*: y así $6 = 6$, se lee seis igual seis: $a = b$, se lee a igual b ; $a = 4$, se lee a igual 4.

HIPÓTESI VII. Este signo $>$ quiere decir *mayor*, y así $6 > 3$, se lee seis mayor que tres: $a > b$, se lee a mayor que b .

HIPÓTESI VIII. Este signo $<$ quiere decir *menor*, y así $3 < 6$, se lee tres menor que seis; $a < b$ se lee a menor que b .

DEFINICION I. La cantidad es en dos maneras, positiva y negativa: cantidad positiva es aquella á

quien precede el signo de $+$, ó bien aquella que no está afecta á signo alguno, como a , ó bien $+ a$. Llámase tambien cantidad afirmativa, ó mayor que nada.

DEFINICION II. Cantidad negativa, privativa ó defectiva es aquella á quien precede el signo de menos, como $- a$, y es menor que nada.

ESCOLIO. Las cantidades negativas no son verdaderas, sino falsas; pues siendo menores que nada, repugna su real existencia: con todo se expresa bien por ellas el defecto de las positivas; y así supuesto que al número 6 le falten dos unidades, será bien expresado el defecto por $6 - 2$; y en este sentido se suman, restan, multiplican y parten, ya sea con otras positivas, ó bien con otras negativas.

Para hacer concepto de estas cantidades falsas, supóngase que Juan no tiene caudal alguno: se dirá bien que su caudal es nada; y si no teniendo cosa alguna, debiere quatro reales, se dirá que su caudal es menor que nada, y se expresará por $- 4$; pero si debiendo 4, adquiriese 7, se expresaria su caudal por $7 - 4 = 3$; porque satisfecha la deuda le quedarían tres reales.

COROLARIO I. Si dos cantidades son iguales, y la una es positiva, y la otra negativa, la suma será igual á cero; porque siendo tanto mayor que nada la una, quanto menor la otra, se destruyen enteramente; y así $4 - 4 = 0$, $8 - 8 = 0$.

COROLARIO II. Si dos cantidades son desiguales, y la una es positiva, y la otra negativa, la menor destruye quanto puede á la mayor; y así $5 - 2 = 3$, porque $2 - 2 = 0$. Tambien $5 - 7 = - 2$, porque $5 - 5 = 0$.

DEFINICION III. Coeficiente es el número que precede á la letra, y la multiplica, como en la cantidad $3 a$, que el coeficiente es 3, y quiere decir

que a está multiplicada por 3, ó sumada tres veces; y así $3 a = a + a + a$. Tambien $2 a b = a b + a b$, ó bien $2 a b = 2 \times a \times b = a \times b + a \times b$.

DEFINICION IV. Exponente es el número que sigue á la letra, y sirve para evitar su repetición; y así $a^2 = a a = a \times a$; $a^2 b = a a b = a \times a \times b$.

ESCOLIO I. Un coeficiente sirve para todas las letras que siguen; pero el exponente solo se refiere á la letra que antecede; y así en la cantidad $2 a^3 b^2$, el coeficiente es 2, y sirve para todas las letras, indicando que $a^3 b^2$ está multiplicado por 2; pero el exponente 3 solo sirve para la letra a , como tambien el exponente 2 para la letra b ; y así queriendo expresar dicha cantidad $2 a^3 b^2$ sin coeficientes ni exponentes, se escribiría $a a a b b + a a a b b$.

ESCOLIO II. Quando no hay coeficiente en las letras, se entiende que tienen la unidad; y así a es lo mismo que $1 a$. Tambien quando las letras no tienen exponente, se les considera siempre la unidad; y así a es lo mismo que a^1 , y tambien $a b c$, que $a^1 b^1 c^1$.

DEFINICION V. Caracteres semejantes son los que tienen unas mismas letras y exponentes, aunque los signos y coeficientes sean diversos, como $3 a^2 + a^2$, $5 a b - 3 a b$. Quando las letras ó exponentes no son unos mismos, los caracteres son diferentes, como a , $a^2 b$, $a b^2$.

ESCOLIO. No es del caso que las letras esten de qualquier modo ordenadas, por ser lo mismo $a b c d$ que $c d b a$; pero conviene disponerlas segun el orden del alfabeto, á fin de reconocer prontamente la semejanza ó desemejanza de los caracteres.

DEFINICION VI. Cantidad complexa es la que se compone de dos ó mas cantidades unidas ó ligadas con algun signo intermedio, ya sea de $+$ ó de $-$, como $a - b$, $a + b - c b$. Incomplexa es la que no está ligada ó unida á otra, como $a b$, $- a b c$; de

suerte que el complexô se compone de dos ó mas incomplexôs. Quando consta de dos , se llama binomio : si de tres , trinomio &c. : si son muchos , se dice polinomio.

ESCOLIO. El primer término de qualquier complexô ordinariamente es positivo , y así se omite el signo de +.

COROLARIO. Si dos cantidades son positivas ó negativas , se aumentan en su propia clase , esto es, $5 + 3 = 8$, y $-6 - 2 = -8$.

ESCOLIO. En las cantidades literales se han de observar cuidadosamente quatro cosas , que son signo , coeficiente , letra y exponente.

PROPOSICION I. PROBLEMA.

Reducir un complexô de caracteres semejantes á la menor expresion.

RESOLUCION. Lo primero: si los términos incomplexôs semejantes tienen un mismo signo , se sumarán los coeficientes , y á la suma se pondrá su propio signo , ya sea de + , ó ya de - . Por exemplo: si se han de reducir los términos del complexô $2a + 3bc + 6a + 4bc$, se sumarán los coeficientes de los semejantes , y se tendrá la reduccion $8a + 7bc$.

Lo segundo : si los caracteres semejantes tienen diversos signos , se restarán los coeficientes , y á la diferencia se pondrá el signo del término mayor.

EXEMPLO. Habiendo de reducir el complexô $6z + x - 2z - 4x$, réstese $2z$ de $6z$, y se tendrá $4z$: réstese asimismo x de $4x$; y porque el coeficiente mayor es negativo , se tendrá $-3x$: luego el complexô reducido será $4z - 3x$.

Lo tercero : si los caracteres son iguales , seme-

jantes, y de signos contrarios, se destruyen enteramente, y se reducen á nada; y así este complexô $6z + x - 6z$, será reducido x , porque $6z - 6z = 0$, y solo queda x .

PROPOSICION II. TEOREMA.

En la adición las cantidades conservan sus propios signos, esto es, las positivas se quedan positivas, y las negativas negativas.

DEMOSTRACION. Si 7

EX.

$-4 = 3$ se añaden á 9, Si con... $9 = 9$
 serán 12; pero si á 9 se Se suman $7 - 4 = 3$
 añaden 7, se tendrán 16, Será $16 - 4 = 12$
 siendo menester quitar 4 para tener la suma 12: luego el positivo 7 se queda positivo, y el negativo 4 negativo; y por consiguiente en la adición las cantidades conservan sus propios signos.

PROPOSICION III. PROBLEMA.

Sumar qualesquiera cantidades ya esten afectas con un mismo signo, ó ya con diverso.

RESOLUCION. Lo primero: pónganse las cantidades sucesivamente en una linea con sus propios signos, y se tendrá de todas un complexô. Lo segundo: redúzcanse á la menor expresion, si fuere necesario, ó tuvieren caracteres semejantes.

EXEMPLO.

Sumar	$3a + 4b - 5c + d + g - b$
Con	$2a - b - 3c - 5d - g - b$
Suma	$3a + 4b - 5c + d + g - b + 2a - b - 3c - 5d - g - b$
Suma reducida	$5a + 3b - 8c - 4d - 2b$

PROPOSICION IV. TEOREMA.

En la substraccion las cantidades que se restan mudan los signos en sus contrarios, esto es, las positivas se hacen negativas, y las negativas positivas.

DEMOSTRACION. Si 7

EX.

$-4 = 3$ se restan de 9, será la diferencia 6; pero si de 9 se restan 7, la diferencia

Si de 9 $= 9$

Se restan $7 - 4 = 3$

Diferencia $9 - 7 + 4 = 6$

es 2, y es menester añadir 4 para tener la diferencia 6: luego el positivo 7 se hace negativo, y el negativo 4 positivo; y por consiguiente en la substraccion las cantidades que se restan mudan los signos en sus contrarios, como se ve en el exemplo.

PROPOSICION V. PROBLEMA.

Restar qualesquiera cantidades ya esten afectas con un mismo signo, ó ya con diverso.

RESOLUCION. Lo primero: escríbanse todas las cantidades sucesivamente en una linea, mudando los signos á las que se han de restar.

Lo segundo: hágase la reduccion de los caracteres, si los hubiere semejantes, y se tendrá la diferencia.

EXEMPLO.

De	$5a + 3b - 8c - 4d + b - g - f$
Restar	$2a + 2b - 3c - 5d - f$
Diferencia	$5a + 3b - 8c - 4d + b - g - f - 2a - 2b + 3c + 5d + f$
Diferencia reducida	$3a + b - 5c + d - g + b$

Escritos los dos complexôs sucesivamente, y mudados los signos del restador, se tendrá la diferencia, que reducida á la menor expresion (por la propos. 1), será $3a + b - 5c + d - g + b$.

PROPOSICION VI. TEOREMA.

En la multiplicacion y particion los signos semejantes dan mas, y los contrarios dan menos, esto es, mas multiplicado ó partido por mas, da mas: menos multiplicado ó partido por menos, da mas; pero mas multiplicado ó partido por menos, y tambien menos multiplicado ó partido por mas, da menos en el producto ó quociente.

DEMOSTRACION. Lo primero: es evidente que mas multiplicado ó partido por mas, da en el producto ó quociente mas.

Lo segundo digo, que mas multiplicado por menos, da en el producto menos; porque si $7 - 2 = 5$ se multiplica por 3, el producto será 15; pero si todo el 7 se multiplica por 3, el producto 21 es mayor que lo justo, siendo preciso por lo mismo quitar las seis unidades de exceso, que son el producto de -2 por $+3$, para tener $21 - 6 = 15$: luego el producto del menos por mas, ó bien el mas por menos, es negativo, como se ve en el exemplo I.

EX. I.

$$\begin{array}{r} 7 - 2 = 5 \\ \underline{3 = 3} \\ 21 - 6 = 15 \end{array}$$

COROLARIO I. Si $+3$ multiplicado por -2 da el producto negativo -6 , es evidente que -6 partido por -2 dará el quociente positivo $+3$.

Lo tercero digo, que menos multiplicado por menos, da mas;

EX. II.

porque siendo $6 - 2 = 4$, y $5 - 3 = 2$, si se multiplican estas dos cantidades, el producto debe ser 8; pero $6 - 2$ multiplicado por 5 es $30 - 10 = 20$; y tambien 6 multiplicado por -3 es -18 , teniendo se $20 - 18 = 2$: luego para tener 8 es necesario

$$\begin{array}{r} 6 - 2 = 4 \\ \underline{5 - 3 = 2} \\ -18 + 6 \\ \underline{30 - 10} \\ 30 - 28 + 6 = 8 \end{array}$$

añadir 6, que es el producto de -3 por -2 ; y por consiguiente menos multiplicado por menos, da en el producto mas, como se ve en el exemplo II.

COROLARIO II. Si -2 multiplicado por -3 , da en el producto $+6$: partiendo $+6$ por -3 , será el quociente -2 .

PROPOSICION VII. PROBLEMA.

Multiplicar qualesquiera cantidades ya tengan un mismo signo, ó ya diverso.

RESOLUCION. Lo primero: si los caracteres tienen un mismo signo, se pondrá el de $+$ en el producto; y si lo tienen contrario, el de $-$.

Lo segundo: multiplíquense los coeficientes, y escribáse el producto.

Lo tercero: júntense todas las letras con sus exponentes; y si hubiere algunas semejantes, basta escribir una vez la letra, y sumar sus exponentes. Todo se halla practicado en los quatro exemplos siguientes.

EX. I.	
Multiplicar	a
Por	a
Producto	a^2

EX. II.	
Multiplicar	ab
Por	b^2
Producto	ab^3

EX. III.	
Multiplicar .	$-6 x p$
Por	$8 z m$
Producto . .	$-48 x p z m$

EX. IV.	
Multiplicar ..	$-6 a^2 b^3$
Por	$-8 a^3 b$
Producto	$48 a^5 b^4$

ESCOLIO. En las cantidades complexás se observa lo mismo: solo que cada uno de los incomplexôs del multiplicador se ha de multiplicar por todos los

incomplexôs del multiplicando ; y sumando despues los productos parciales , se tendrá el total , que se reducirá á la menor expresion si fuere necesario, como se ve en los tres exemplos siguientes.

EXEMPLO V.

$$\begin{array}{r}
 a + b \quad \text{Multiplicando.} \\
 a + b \quad \text{Multiplicador.} \\
 \hline
 ab + b^2 \\
 a^2 + ab \\
 \hline
 a^2 + ab + ab + b^2 \quad \text{Producto.} \\
 a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{Producto reducido.}
 \end{array}$$

EXEMPLO VI.

$$\begin{array}{r}
 a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{Multiplicando.} \\
 a + b \quad \text{Multiplicador.} \\
 \hline
 a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 \hline
 a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \quad \text{Producto.} \\
 a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{Producto reducido.}
 \end{array}$$

EXEMPLO VII.

$$\begin{array}{r}
 a^2 + ab + b^2 \quad \text{Multiplicando.} \\
 a - b \quad \text{Multiplicador.} \\
 \hline
 -a^2b - ab^2 - b^3 \\
 a^3 + a^2b + ab^2 \\
 \hline
 a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 \quad \text{Producto.} \\
 a^3 - b^3 \quad \text{Producto reducido.}
 \end{array}$$

PROPOSICION VIII. PROBLEMA.

Partir qualesquiera cantidades ya tengan un mismo signo , ó ya contrario.

RESOLUCION. Lo primero : si los signos son seme-

jantes, se pondrá el de + en el quociente; y si son contrarios, el de —.

Lo segundo: pártase el coeficiente del dividendo por el del divisor, y el quociente escríbase en su propio lugar.

Lo tercero: quítense del dividendo todas las letras semejantes del divisor, ó bien de los exponentes del dividendo réstense los exponentes de las letras semejantes del divisor, y escríbase en el quociente cada letra con la diferencia de los exponentes; pero si esta diferencia fuere cero, se omitirá escribir la letra.

En los cinco exemplos siguientes se manifiesta lo dicho respecto de las cantidades incomplexas, observándose al mismo tiempo las reglas dadas en la Aritmética vulgar, y advirtiéndose que el producto del quociente por el divisor se pone con signo contrario debaxo del dividendo para tener la resta.

$$\begin{array}{r} \text{EX. I.} \\ \text{Dividendo } 6ab \quad | \quad 2a \text{ Divisor.} \\ -6ab \quad 3b \text{ Quociente.} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{EX. II.} \\ \text{Dividendo } a \quad | \quad a \text{ Divisor.} \\ -a \quad 1 \text{ Quociente.} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{EX. III.} \\ ax \quad | \quad x \\ -ax \quad -a \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{EX. IV.} \\ -10a^2b^2 \quad | \quad 2a \\ 10a^2b^2 - 5ab^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{EX. V.} \\ -8ab^2 \quad | \quad -2ab^2 \\ +8ab^2 \quad 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

ESCOLIO. Si en la particion de los coeficientes el quociente no fuere número entero, ó si algun exponente del divisor no pudiere restarse del exponente de la letra semejante del dividendo, ó bien si hubiere alguna letra en el divisor que no se halle en el dividendo, en qualquiera de estos

tres casos se expresa el quociente por una fraccion, esto es, poniendo sobre una linea el dividendo, y debaxo el divisor, conforme se ve en los tres exemplos siguientes.

EX. VI. $\begin{array}{r} 2a^2 \overline{) 3a} \\ 2a^2 \\ \hline \end{array}$ Quociente $\frac{2a^2}{3a}$	EX. VII. $\begin{array}{r} 4a^2b \overline{) -2ab^2} \\ 4a^2b \\ \hline \end{array}$ Quociente $\frac{4a^2b}{-2ab^2}$	EX. VIII. $\begin{array}{r} a \overline{) ab} \\ a \\ \hline \end{array}$ Quociente $\frac{a}{ab}$
--	--	---

ESCOLIO II. Quando el dividendo y divisor son complexôs, y todas las letras del divisor se hallan en el dividendo, pudiéndose restar el exponente de cada letra del divisor del exponente de la letra semejante del dividendo, se hará la division como en la Aritmética vulgar, observando las reglas dadas de los signos, coeficientes, letras y exponentes.

EX. IX.

Dividendo $a^2 + 2ab + b^2$ $\begin{array}{r} - a^2 - ab. \\ \hline \circ \quad ab + b^2 \\ - ab - b^2 \\ \hline \circ \end{array}$	$a + b$ divisor. $a + b$ quociente.
---	---

EX. X.

Divid. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $\begin{array}{r} - a^3 - a^2b. \\ \hline \circ \quad 2a^2b + 3ab^2 \\ - 2a^2b - 2ab^2 \\ \hline \circ \quad ab^2 + b^3 \\ - ab^2 - b^3 \\ \hline \circ \end{array}$	$a + b$ divis. $a^2 + 2ab + b^2$ quoc.
---	--

EX. XI.

$$\begin{array}{r|l}
 \text{Dividendo } a^4 - b^4 & a + b \text{ divisor.} \\
 - a^4 - a^3 b & a^3 - a^2 b + a b^2 - b^3 \text{ quociente.} \\
 \hline
 0 - a^3 b - b^4 & \\
 + a^3 b + a^2 b^2 & \\
 \hline
 0 a^2 b^2 - b^4 & \\
 - a^2 b^2 - a b^3 & \\
 \hline
 0 - a b^3 - b^4 & \\
 + a b^3 + b^4 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Para evitar la molestia de tan penosa operacion, se indican estos quocientes por la figura de una fraccion, poniendo sobre una linea el dividendo, y debaxo el divisor, que es lo que freqüentemente se usa en el Álgebra.

ESCOLIO III. El exámen de estas quatro reglas se executa como en la Aritmética vulgar.

CAPÍTULO II.

De las fracciones literales.

PROPOSICION I. PROBLEMA.

Reducir las fracciones literales á la menor expresion.

OPERACION. Quando en todos los incomplexôs del numerador y denominador se halla comun medida, se reduce el quebrado partiendo por ella así el numerador como el denominador.

Esta mayor comun medida se halla facilmente, reconociendo en todos los términos de la fraccion qual es la mayor magnitud que se halla en cada

uno; y partiendo por ella así el numerador como el denominador, segun se ha dicho, se tendrá el quebrado reducido.

En la fraccion $\frac{a^2 b^2}{a c}$ la mayor comun medida es a , pues se halla en el numerador y denominador: luego partiendo uno y otro por ella, se tendrá el quebrado reducido $\frac{a b^2}{c}$.

EX. I.

$$\frac{a^2 b^2}{a c} = \frac{a b^2}{c} \text{ reducido.}$$

Se ha de reducir el que-

EX. II.

brado $\frac{2 a^3 b^2 c}{3 a^3 b d}$. La mayor comun medida que se halla en el numerador y denominador es $a^3 b$; luego partiendo ambos por ella, se tendrá el quebrado reducido $\frac{2 b c}{3 d}$.

$$\frac{2 a^3 b^2 c}{3 a^3 b d} = \frac{2 b c}{3 d} \text{ reducido.}$$

En la fraccion

EX. III.

$\frac{a^3 c^2 + 5 b^2 c}{7 b c f + b^4 c^3}$ la mayor comun medida es $b c$; y así partiendo por esta numerador y denominador, será el quebrado reducido $\frac{a b^2 c + 5 b}{7 f + b^3 c^2}$.

Se ha de reducir el quebrado $\frac{a b}{a}$; la mayor comun medida es a ; partiendo pues $a b$ por a , el quociente es b ; y partiendo a por a , el quociente es 1; luego el quebrado reducido será $\frac{b}{1}$.

PROPOSICION II. PROBLEMA.

Reducir los quebrados literales á un comun denominador.

OPERACION. Lo primero: multiplíquense entre sí

los denominadores, y se tendrá el comun denominador.

Lo segundo: multiplíquese el numerador del uno por todos los denominadores de los otros, y se tendrá el nuevo numerador; y executando lo mismo con los demás, se tendrá la reduccion.

Habiendo de reducir los quebrados $\frac{2a}{bc}$, $\frac{5c}{a}$ y $\frac{cd}{a^2}$; multipliquados los denominadores entre sí, se tendrá $a^5 b c x$ por comun denominador: para hallar el numerador del primero multiplíquese $2a$ por a^3 , y el producto por $a^2 x$, y se tendrá $2a^6 x$ por numerador; para el segundo multiplíquese $5c$ por bc , y el producto por $a^2 x$, y se tendrá $5c^2 b a^2 x$; para el tercero multiplíquese cd por bc , y el producto por a^3 , y se tendrá $b c^2 a^3 d$; luego los quebrados reducidos, serán co-

mo en el exemplo, $\frac{2a^6 x}{a^5 b c x}$, $\frac{5c^2 b a^2 x}{a^5 b c x}$, $\frac{b c^2 a^3 d}{a^5 b c x}$.

PROPOSICION III. PROBLEMA.

Sumar quebrados literales.

OPERACION. Redúzcanse á un comun denominador, si le tuvieren diverso; súmense los numeradores, y póngase á la suma el comun denominador.

Habiendo de sumar los quebrados $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, reducidos á un comun denominador por la proposicion antecedente, serán $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$; súmense los numeradores, y se

EX.

$$ad, bc \quad \frac{ad}{bd}, \frac{bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \quad \frac{ad+bc}{bd}$$

tendrá $a d + b c$; y puesto debaxo el comun denominador $b d$, será $\frac{a d + b c}{b d}$ la suma que se pide, como se ve en el exemplo.

PROPOSICION IV. PROBLEMA.

Restar quebrados literales.

OPERACION. Redúzcanse á un comun denominador, si le tuvieren diverso; y restando los numeradores, póngase á la diferencia el comun denominador.

Sean los quebrados $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$; reducidos á un comun denominador (prop. II), serán $\frac{a d}{b d}, \frac{b c}{b d}$; réstense los numeradores, y se tendrá $a d - b c$, y puesto debaxo el comun denominador $b d$, será $\frac{a d - b c}{b d}$ la diferencia que se pide, y se ve en el exemplo.

EX.

$$\begin{array}{r} a d, b c \quad \frac{a d}{b d}, \frac{b c}{b d} \\ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \quad \frac{a d - b c}{b d} \end{array}$$

PROPOSICION V. PROBLEMA.

Multiplicar quebrados literales.

OPERACION. Multiplíquense entre sí los numeradores, y se tendrá el numerador del producto: multiplíquense despues los denominadores, y se tendrá el denominador del producto.

Habiendo de multiplicar el quebrado $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$, el producto de los numeradores es $a c$, y el de los denominadores es $b d$; luego $\frac{a c}{b d}$ es el producto que se pide, como en el exemplo I.

EX. I.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a c}{b d}$$

Habiendo de multiplicar el complexô $\frac{a b + a c}{b c + d e}$ por el incomplexô $\frac{x}{z}$, se multiplicará $a b + a c$ por x , y se tendrá $a b x + a c x$ por numerador; y multiplicando

$bc + de$ por z , se tendrá
 $bcz + dez$; luego el pro-
 ducto de los dos quebra-
 dos será $\frac{abx+acx}{bcz+dez}$, como en el exemplo II.

EX. II.

$$\frac{ab+ac}{bc+de} \cdot \frac{x}{z} = \frac{abx+acx}{bcz+dez}$$

Si algun quebrado se ha de multiplicar por un entero; se pondrá á este la unidad por denominador, como se ha enseñado.

Se ha de multiplicar $\frac{a}{b}$ por b : poniendo la unidad debaxo del entero b , se tendrá $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1}$; luego multiplicando los numeradores entre sí, y tambien los denominadores, será el producto $\frac{ab}{b}$, que reducido es lo mismo que a , como en el exemplo III.

EX. III.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{b} = a$$

COROLARIO. De aquí se sigue, que para multiplicar un quebrado por un entero igual al denominador, basta borrar este, ó escribir solamente el numerador por producto.

PROPOSICION VI. PROBLEMA.

Partir quebrados literales.

OPERACION. Lo primero: multiplíquese el numerador del dividendo por el denominador del divisor, y se tendrá el numerador del quociente.

Lo segundo: multiplíquese el numerador del divisor por el denominador del dividendo, y el producto será el denominador del quociente.

Se ha de partir el quebrado $\frac{ab+ac}{bc+de}$ por $\frac{m}{n}$: multiplicando $ab+ac$ por n , se tendrá $abn+acn$; y multiplicando tambien $bc+de$ por m , se tendrá $bcm+dem$; luego el quociente que se busca será $\frac{abn+acn}{bcm+dem}$, como en el exemplo I.

EX. I.

$$\frac{ab+ac}{bc+de} \cdot \frac{m}{n} = \frac{abn+acn}{bcm+dem}$$

Si se ha de partir el quebrado $\frac{a}{b}$ por el entero b , póngase á este la unidad por denominador; y obrando luego conforme se ha enseñado, será el quociente que se pide $\frac{a}{b^2}$, como en el exemplo II.

EX. II.

$$\frac{a}{b}, \frac{b}{1} \quad \frac{a}{b^2}$$

Si se ha de partir el quebrado $\frac{a}{b}$ por el entero a , poniendo á este la unidad por denominador, y haciendo la misma operacion que en los exemplos antecedentes, se tendrá el quociente $\frac{a}{ab}$, que reducido á la menor expresion es lo mismo que $\frac{1}{b}$, como en el exemplo III.

EX. III.

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{1} \quad \frac{a}{ab} = \frac{1}{b}$$

COROLARIO. De aquí se sigue, que habiendo de partir un quebrado por un entero igual al numerador, basta borrar este, y poner en su lugar la unidad.

PROPOSICION VII. PROBLEMA.

Hallar las partes de un quebrado literal.

RESOLUCION. Multiplíquese el quebrado literal por el numérico que expresa las partes que se piden, y el producto será el valor de lo que se busca.

EXEMPLO. Pídense los $\frac{3}{4}$ del quebrado $\frac{a+b}{c+d}$: multiplíquese este quebrado por $\frac{3}{4}$, y se tendrá $\frac{3a+3b}{4c+4d}$ por el valor que se busca de los $\frac{3}{4}$.

Sabiendo hallar las partes que se piden de una fraccion, será facil sumar, restar, multiplicar &c. las partes de un quebrado por otras del mismo, ó de otro quebrado.

LIBRO TERCERO.

DE LA RAZON Y PROPORCION.

En este libro, que es el quinto de Euclides, se trata de la razon y proporcion en comun, cuya doctrina conviene á toda especie de cantidad, ya sea discreta, ó ya continua, esto es, para los números, líneas, superficies y sólidos, siendo llave universal para entrar en el conocimiento de quantas partes componen la Matemática. Sus proposiciones guardan el orden de Euclides, para que puedan citarse quando convenga: omítense las menos principales, y solo se dan las de mas utilidad, las que se demostrarán por letras, y se explicarán por números para facilitar su comprehension.

DEFINICION I. Múltiplice es el todo respecto á su parte aliquota.

EXEMPLO. 6 es múltiplice de 2, porque $2 \times 3 = 6$. Tambien $b p$ es múltiplice de p , porque $b \times p = b p$.

Submúltiplice es la parte aliquota respecto á su todo.

EXEMPLO. 2 es submúltiplice de 6; p es submúltiplice de $b p$.

DEFINICION II. Equimúltiples son los todos que incluyen igual número de veces á sus partes aliquotas.

EXEMPLO. 15 y 12 son equimúltiples de 5 y 4, porque tantas veces incluye el 15 al 5, como el 12 al 4; por la misma razon $a b$, $a c$ son equimúltiples de las partes b y c .

COROLARIO. De aquí se sigue, que los equimúltiples partidos por sus partes aliquotas, dan los quocientes iguales; porque $\frac{15}{5} = 3$, y $\frac{12}{4} = 3$. Tambien $\frac{ab}{b} = a$, y $\frac{ac}{c} = a$.

DEFINICION III. Razon es la relacion , respecto ó habitud que tiene una cantidad á otra de su misma especie : prodúcese de la comparacion de dos cantidades homogeneas , como de la que se hace entre dos números , dos lineas , dos superficies &c. Estas cantidades se llaman términos de la razon : el que se compara se dice antecedente , y aquel á quien se compara conseqüente.

EXEMPLO. Si se compara 4 á 3 , será 4 el antecedente , y 3 el conseqüente : si a se compara con b , será a el antecedente , y b el conseqüente.

ESCOLIO. La comparacion se puede hacer en quanto el antecedente excede al conseqüente , ó este al antecedente ; en cuyo caso la razon se llama aritmética , y se expresa por la substraccion , restando la cantidad menor de la mayor. Por exemplo : si se compara 8 con 3 en quanto el 8 excede en 5 al 3 , esta razon se llama aritmética , y se expresa por la substraccion , restando el conseqüente 3 del antecedente 8 , de este modo $8 - 3$. Tambien la razon aritmética entré a y b se expresa $a - b$.

Si la comparacion se hace en quanto el antecedente contiene ó está contenido en el conseqüente , la razon se llama geométrica , de la qual se tratará por ahora , y se expresa bien por la division del antecedente por el conseqüente en forma de quebrado. Por exemplo : si se compara 6 á 2 en quanto el 6 contiene tres veces al 2 , se expresa bien partiendo el antecedente 6 por el conseqüente 2 , de este modo $\frac{6}{2}$; ó tambien $6 : 2$. La razon geomé-

trica entre a y b se expresa por $\frac{a}{b}$, ó bien $a : b$.

DEFINICION IV. Divídese la razon en racional é irracional : la racional es la que puede expresarse por números racionales , como la de $4 : 3$; y la irracional la que no puede expresarse por números.

DEFINICION V. Exponente de la razon es el quociente que resulta dividiendo el antecedente por el conseqüente. Por exemplo : si en la razon de $6:2$ se divide el antecedente 6 por el conseqüente 2 , el quociente 3 es el exponente , pues declara el número de veces que el 6 contiene al 2 , ó bien la razon en que está 6 á 2 , y se escribe $\frac{6}{2}$. En la razon $2:6$ el quociente $\frac{2}{6}$ es el exponente que declara que el 2 contiene la tercera parte de 6 , ó que se contiene tres veces en el 6 , y se llama denominador de la razon.

COROLARIO. Siendo el antecedente dividendo , el conseqüente divisor , y el exponente quociente , será el producto del exponente por el conseqüente igual al antecedente ; porque el producto del quociente por el divisor es igual al dividendo.

EXEMPLO. En la razon de $6:2$ el exponente es 3 ; luego $3 \times 2 = 6$; en la razon de $a:b$ el exponente es $\frac{a}{b}$; luego $\frac{a}{b} \times b = a$. Tambien suponiendo que el exponente de la razon de $a:b$ es p , será $a = b p$.

DEFINICION VI. Razon de igualdad se dice quando el antecedente es igual al conseqüente , como la razon de $6:6$. Quando los términos son desiguales , se llama razon de desigualdad. Si el antecedente es mayor que el conseqüente , se dice razon de mayor desigualdad , como la de $4:3$. Si el antecedente es menor que el conseqüente , se dice razon de menor desigualdad , como la de $3:4$.

ESCOLIO. La razon tiene once especies , una de igualdad , cinco de mayor desigualdad , y cinco de menor desigualdad.

Las de mayor desigualdad son superparticular , superparciente , múltiplice , múltiplice superparticular , y múltiplice superparciente.

Las de menor desigualdad son subsuperparticular, subsuperparciente, submúltiple, submúltiple superparticular, y submúltiple superparciente; cuya explicacion de voces solo sirve para entender á los Autores que tratan de ella, y se omite por ahora para no confundir al principiante.

DEFINICION VII. Razones iguales, semejantes ó unas mismas son las que tienen los exponentes iguales; y si los exponentes son iguales, lo serán tambien las razones.

EXEMPLO. La razon de $8:4$ es igual á la de $6:3$, por ser 2 el exponente de una y otra. Tambien la razon de $a:b$ será igual á la de $c:d$, si á ambas se les supone un mismo exponente p .

DEFINICION VIII. Razones desiguales, desemejantes ó diversas son las que tienen los exponentes desiguales.

EXEMPLO. La razon de $12:4$ es desigual á la de $6:3$; porque el exponente de la primera es 3, y el de la segunda es 2.

COROLARIO I. Entre dos magnitudes desiguales la razon que la mayor tiene á la menor, es distinta de la que la menor tiene á la mayor.

EXEMPLO. La razon de $4:3$ no es la misma que la de $3:4$; porque el exponente de la primera es $\frac{4}{3}$, y el de la segunda es $\frac{3}{4}$.

COROLARIO II. De las razones desiguales la que tiene mayor exponente es la mayor; y así la razon de $12:4$ es mayor que la de $6:3$; porque el exponente de la primera es 3, y el de la segunda es 2.

ESCOLIO. Quando se comparan dos razones desiguales, se pone entre ellas el signo de $>$ ó $<$; y así para expresar que la razon de $12:4$ es mayor que la de $6:3$, se escribe $12:4 > 6:3$; y para expresar que la de $6:3$ es menor que la de $12:4$, se escribe $6:3 < 12:4$.

DEFINICION IX. Proporción ó analogía es la comparación de dos razones iguales.

EXEMPLO. Si la razón de $8:4$ se compara con la de $6:3$, harán una proporción que se figurará así $8:4::6:3$; y se lee 8 es á 4, como 6 es á 3: si la razón de $a:b$ es igual á la de $c:d$, se formará la proporción $a:b::c:d$, y se lee a es á b , como c es á d : los términos ó magnitudes a, b, c, d , ó bien 8, 4, 6, 3, se dicen proporcionales.

DEFINICION X. Divídese la proporción en continua y discontinua. Proporción continua es quando el conseqüente de la primera razón sirve de antecedente en la segunda, como en la proporción $8:4::4:2$, ó tambien $a:b::b:c$. Tambien se expresa la proporción continua de este modo $+:8, 4, 2$, con esta señal $+:.$ La no continua es quando el conseqüente de la primera razón no es igual al antecedente de la segunda, como la proporción $8:4::6:3$.

En la proporción continua $8:4::4:2$, el término 4 se llama medio geométrico, proporcional entre 8 y 2.

DEFINICION XI. Si de dos ó mas razones se multiplican los antecedentes y conseqüentes, se tendrá una razón compuesta de todas las razones simples.

Si de las razones $a:b, c:d, e:f$ se multiplican los antecedentes, se tendrá el producto ace ; y multiplicando los conseqüentes, el producto será bdf , y se dirá que la razón de $ace:bdf$ es compuesta de las tres razones dichas $a:b, c:d, e:f$.

EX.

 $a:b$ $c:d$ $e:f$ $ace:bdf$

Tambien si de las razones $8:5, 3:7$ se multiplican los antecedentes, y asimismo los conseqüentes, se tendrán los productos 24 y 35, y se dirá que la razón de $24:35$ es compuesta de las razones $8:5$ y $3:7$.

DEFINICION XII. Razon duplicada es la compuesta de dos razones iguales: triplicada la de tres: quadruplicada la de quatro &c.

EXEMPLO. Si de las razones iguales $3:2$, $3:2$ se hace la compuesta $9:4$, se dirá que $9:4$ tiene la razon duplicada de $3:2$. Si de las tres razones iguales $3:2$, $3:2$, $3:2$ se hace la compuesta $27:8$, se dirá que es triplicada de la de $3:2$.

ESCOLIO. Nótese que no es lo mismo razon dupla que duplicada; porque la razon dupla es quando el antecedente contiene dos veces á su conseqüente; y la duplicada es la compuesta de dos razones iguales.

Razon subduplicada es la que interviene dos veces para formar la duplicada, y así la razon de $3:2$ es subduplicada de la de $9:4$, y subtriplicada de la de $27:8$.

DEFINICION XIII. Términos homólogos ó semejantes en la proporcion son los antecedentes con los antecedentes, y los conseqüentes con los conseqüentes.

EXEMPLO. En la proporcion $a:b::c:d$, los antecedentes a y c son términos homólogos, como tambien los conseqüentes b y d : asimismo en la proporcion $8:4::6:3$ los antecedentes 8 y 6 son términos homólogos, como tambien los conseqüentes 4 y 3.

ESCOLIO. Los términos así dispuestos forman la proporcion directa, esto es, $a:b::c:d$, y suelen variarse de distintas maneras, que llaman modos de argüir, siendo los principales alternando, invirtiendo, componiendo, dividiendo, convirtiendo, por razon de igualdad ordenada, y por razon de igualdad perturbada.

DEFINICION XIV. Proporcion alterna ó permutada es quando el antecedente se compara al antecedente, y el conseqüente al conseqüente.

EX. Sean directamente pro- } $a:b::c:d$,
 porcionales }
 serán alternando $a:c::b:d$.
 Tambien siendo directamen- } $8:4::6:3$,
 te proporcionales }
 serán alternando $8:6::4:3$.

ESCOLIO. Este modo de argüir alternando solo tiene lugar en las cantidades homogeneas.

DEFINICION XV. Proporcion inversa es quando el conseqüente se compara al antecedente en una y otra razon.

EX. Siendo directamente proporcionales $a:b::c:d$,
 serán invirtiendo $b:a::d:c$.
 Tambien siendo directamen- } $8:4::6:3$,
 te proporcionales }
 serán invirtiendo $4:8::3:6$.

DEFINICION XVI. Proporcion compuesta es quando la suma del antecedente y conseqüente se compara al conseqüente en una y otra razon.

EX. Siendo directamente } $a:b::c:d$,
 proporcionales }
 serán componiendo $a+b:b::c+d:d$.
 Tambien siendo proporcio- } $8:4::6:3$,
 nales }
 serán componiendo $8+4:4::6+3:3$,
 esto es $12:4:9:3$.

DEFINICION XVII. Proporcion dividida es quando la diferencia entre antecedente y conseqüente se compara al conseqüente en una y otra razon.

EX. Siendo directamente } $a:b::c:d$,
 proporcionales }
 serán dividiendo $a-b:b::c-d:d$.
 Tambien siendo proporcio- } $8:4::6:3$,
 nales }
 serán dividiendo $8-4:4::6-3:3$,
 esto es $4:4::3:3$.

ESCOLIO. Quando el antecedente se compara á la diferencia entre antecedente y conseqüente, se llama la proporcion conversa; y así siendo directamente proporcionales $a:b::c:d$, serán convirtiendo $a:a-b::c:c-d$.

Tambien siendo proporcio- } $8:4::6:3$,
nales }
serán convirtiendo $8:8-4::6:6-3$.

DEFINICION XVIII. Si algunas mag- } a, b, c ,
nitudes de una parte, como }
son proporcionales á otras tantas de } d, e, f ,
otra }
ordenadamente, esto es $a:b::d:e$,
y tambien $b:c::e:f$,

se dirá que por razon de igualdad or- }
denada es la primera á la última en } $a:c::d:f$.
la una parte, como la primera á la }
última en la otra, esto es }

Tambien si las cantidades $8, 4, 3$,
son ordenadamente proporcionales } $24, 12, 9$,
á las }

esto es $8:4::24:12$;
y asimismo $4:3::12:9$

se dirá que por razon de igualdad } $8:3::24:9$.
ordenada es }

DEFINICION XIX. Si algunas cantidades de una parte a, b, c

son proporcionales á otras tantas de } d, e, f ,
otra }

desordenadamente ó perturbada- } $a:b::e:f$,
mente, esto es }

y tambien $b:c::d:e$

se dirá que por razon de igualdad }
perturbada es la primera á la últi- } $a:c::d:f$.
ma en la una parte, como la prime- }
ra á la última en la otra, esto es .. }

Tambien si las cantidades 8, 4, 3
 son desordenadamente proporcio- } 16, 12, 6
 nales á las
 esto es 8 : 4 :: 12 : 6
 y asimismo 4 : 3 :: 16 : 12
 se dirá que por razon de igualdad } 8 : 3 :: 16 : 6
 perturbada es

En adelante se demostrará este y otros modos de argüir, cuya inteligencia, como tambien la de todas las proposiciones de este libro, será facil si se comprehenden los siguientes lemas.

LEMA I.

Si quatro cantidades son proporcionales, el producto de las extremas es igual al de las medias; y si el producto de las extremas fuere igual al de las medias, las quatro cantidades serán proporcionales.

EXPLICACION. Lo primero: supues- } $a : b :: c : d$,
 to que son proporcionales
 digo que el producto de las extremas ad }
 es igual al producto de las medias bc } $\therefore ad = bc$.

DEMOSTRACION. Por suponerse las razones iguales, tendrán (def. vii) un mismo exponente, y sea este p ; luego (cor. def. v) el exponente multiplicado por el conseqüente, será igual al antecedente; y por consiguiente en la primera razon se tendrá $a = b p$, y multiplicando por $d = d$, será (ax. v) $ad = b p d$; por lo mismo en la segunda razon $c = d p$ y multiplicando por $b = b$, será (ax. cit.) $bc = b p d$, siendo pues por lo demostrado $ad = b p d$, y tambien $bc = b p d$, será (ax. i) $ad = bc$, esto es, el producto de las extremas igual al de las medias, que es lo primero.

Lo segundo : supuesto que el producto de las extremas es igual al de las medias $a d = b c$
 digo que son proporcionales $a : b :: c : d$

DEMOSTRACION. Sea p el exponente de la primera razon , será en ella (cor. def. v) $a = b p$
 y multiplicando por $d = d$
 será (ax. v) $a d = b d p$
 Sea q el exponente de la segunda razon , será en ella (cor. def. v) $c = d q$
 y multiplicando por $b = b$
 se tendrá (ax. v) $b c = b d q$
 siendo pues por lo demostrado $a d = b d p$
 como tambien $b c = b d q$
 y por lo supuesto $a d = b c$
 será (ax. i) $b d p = b d q$
 y partiendo por $b d = b d$
 se tendrá (ax. v) $p = q$

esto es , el exponente de la primera razon igual al de la segunda : luego (def. vii) las razones serán iguales , y por consiguiente proporcionales $a : b :: c : d$
 que es lo segundo.

EXPLICACION EN NÚMEROS. Siendo } $8 : 4 :: 6 : 3$
 proporcionales
 el producto de los términos extremos
 será 24
 y el de los medios 24
 Tambien porque $24 = 24$
 serán proporcionales $8 : 4 :: 6 : 3$

Demuéstrase el mismo lema de otro modo.

Sean proporcionales $a : b :: c : d$
 digo lo primero : que el producto de los términos extremos será igual al de los medios $a d = b c$

DEMOSTRACION. Por suponerse las razones iguales, tendrán (def. vii) un mismo exponente, sea este p , y será en la primera razon (cor. def. v)..... } $a = b p$
 y por el mismo en la segunda..... } $d p = c$
 luego multiplicando iguales por iguales será (ax. v)..... } $a d p = b c p$
 y por el mismo, partiendo por } $p = p$
 se tendrá } $a d = b c$
 esto es, el producto de los extremos igual al de los medios, que es lo primero.

Lo segundo: sea el producto de los extremos igual al de los medios } $a d = b c$
 digo que serán proporcionales } $a : b :: c : d$

DEMOSTRACION. Siendo p el exponente de la primera razon, será en ella (cor. def. v)..... } $a = b p$
 Suponiendo q el de la segunda, será } $d q = c$
 por el mismo }
 luego multiplicando iguales por iguales, será (ax. v)..... } $a d q = b c p$
 y por el mismo partiendo por } $a d = b c$
 se tendrá } $q = p$
 esto es, el exponente de la segunda razon igual al de la primera: luego las razones serán iguales y proporcionales } $a : b :: c : d$
 que es lo segundo.

ESCOLIO. Esta proposicion aplicada á los números es la 19 del lib. 7 de Euclides, y aplicada á las líneas es la 16 del lib. 6 del mismo.

COROLARIO I. De aquí se sigue que el producto, el multiplicando, el multiplicador y la unidad son quatro cantidades proporcionales, porque el producto de las extremas es igual al de las medias.

Tambien lo son el dividendo, el divisor, el quociente y la unidad.

Asimismo lo son el antecedente, el conseqüente, el exponente y la unidad.

Finalmente lo son el numerador el denominador, la fraccion y la unidad.

COROLARIO II. Tambien se infiere que dos quebrados serán iguales si el numerador al denominador en el uno tiene la misma razon que el numerador al denominador en el otro, esto es, si $2:4::3:6$; será $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

COROLARIO III. Tambien se infiere que si á tres números dados se busca un quarto proporcional, se ha de multiplicar el tercero por el segundo, y el producto partirlo por el primero.

EXEMPLO. Si á los tres números dados 8, 4, 6 se pide un quarto proporcional, se multiplicará 6 por 4, y el producto 24 partido por 8 dará el quociente 3, y serán proporcionales $8:4::6:3$
Tambien siendo proporcionales $a:b::c:d$
será (lema I) $a d = b c$
y partiendo por $a = \frac{bc}{d}$
se tendrá (ax. V). $d = \frac{bc}{a}$
cuya expresion quiere decir que si el tercer término c se multiplica por el segundo b , y el producto bc se parte por el primero a , se tendrá el valor del quarto d , siendo este el fundamento de la regla de tres simple.

COROLARIO IV. Si quatro cantidades proporcionales se multiplican por otras quatro proporcionales, los productos serán tambien proporcionales.

Sean proporcionales las cantidades . . . $a:b::c:d$

y multiplíquense por las pro- }
porcionales $e:f::g:h$

digo que los productos son pro-

porcionales, esto es, que $ae:bf::cg:dh$

porque siendo $a : b :: c : d$, será } ... $a d = b c$
 (lem. 1)
 y siendo tambien $e : f :: g : h$, será ... $e h = f g$
 luego multiplicando iguales por
 iguales, será (ax. v) $a e d h = b f c g$
 y proporcionales (II part. lem. 1) .. $a e : b f :: c g : d h$
 POR NÚMEROS. Sean propor-
 cionales. $8 : 4 :: 6 : 3$
 y tambien $5 : 7 :: 10 : 14$
 serán los productos proporcio-
 nales, esto es $40 : 28 :: 60 : 42$
 porque el producto de los extre-
 mos es igual al de los medios $1680 = 1680$

LEMA II.

Si de quatro cantidades la primera á la segunda tiene mayor razon que la tercera á la quarta, el producto de las extremas será mayor que el de las medias; y si el producto de las extremas es mayor que el de las medias, de las quatro cantidades la primera á la segunda tendrá mayor razon que la tercera á la quarta.

EXPLICACION. Sea la razon de ... $a : b > c : d$
 digo lo primero: que el producto de
 las extremas es mayor que el de las
 medias $a d > b c$

DEMOSTRACION. Sea p el exponente de la prime-
 ra razon, será en ella (cor. def. v) $a = b^p$
 y multiplicando por $d = d$
 se tendrá (ax. v) $a d = b^p d$
 Sea q el exponente de la segunda
 razon, será $c = d^q$
 y multiplicando por $b = b$
 se tendrá $b c = b d^q$

y siendo (cor. II def. VIII) el exponente . . . $p > q$
 si se multiplica uno y otro por . . . $b d = b d$
 será (ax. VI) . . . $b d p > b d q$
 y siendo por lo demostrado . . . $a d = b d p$
 como tambien . . . $b c = b d q$
 será . . . $a d > b c$
 esto es, el producto de las extremas mayor que
 el de las medias, que es lo primero.

Lo segundo: sea . . . $a d > b c$
 digo que la razon de . . . $a : b > c : d$

DEMOSTRACION. Suponiendo p el exponente de la
 primera razon, será en ella (cor. def. V) $a = b p$
 y multiplicando por . . . $d = d$
 se tendrá (ax. V) . . . $a d = b p d$

Suponiendo q el exponente de la se-
 gunda razon, será . . . $c = d q$
 y multiplicando por . . . $b = b$
 se tendrá . . . $b c = b q d$
 y siendo por lo supuesto . . . $a d > b c$
 será tambien . . . $b p d > b q d$
 y partiendo por . . . $b d = b d$
 se tendrá (ax. VI) . . . $p > q$

esto es, el exponente de la primera
 razon mayor que el de la segunda:
 luego (cor. II def. VIII) la razon de . . . $a : b > c : d$
 que es lo segundo.

POR NÚMEROS. Si la razon de . . . $3 : 2 > 4 : 6$
 será el producto de los términos ex-
 tremos mayor que el de los medios . . . $18 > 8$
 Asimismo porque . . . $18 > 8$
 tambien la razon . . . $3 : 2 > 4 : 6$

Demuéstrase el mismo lema de otro modo.

Sea la razon de . . . $a : b > c : d$
 digo lo primero: que el producto de los términos

extremos es mayor que el de los medios.. $ad > bc$

DEMOSTRACION. Supuesto p el exponente de la primera razon, será en ella (cor. def. v) .. $a = bp$ y suponiendo q el de la segunda, será .. $dq = c$ luego multiplicando iguales por igua-

les, se tendrá (ax. v) $adq = bcp$

y partiendo por $q < p$

será (ax. vi) $ad > bc$

esto es, el producto de los extremos mayor que el de los medios, que es lo primero.

Lo segundo: digo que si $ad > bc$

tambien la razon de $a : b > c : d$

porque suponiendo p el exponente

de la primera razon, será $a = bp$

y suponiendo q el de la segunda, será .. $dq = c$

y multiplicando iguales por iguales,

se tendrá (ax. v) $adq = bcp$

luego partiendo por $ad > bc$

será (ax. vi) $q < p$

esto es, el exponente de la segunda

razon menor que el de la primera, y

por consiguiente la razon de $a : b > c : d$

que es lo segundo.

ESCOLIO. Por este lema se demuestran todos los modos de argüir con las razones desiguales.

Las seis primeras proposiciones de este libro se omiten comunmente por su poca utilidad.

PROPOSICION VII. TEOREMA.

Las cantidades iguales tienen la misma razon á otra tercera, y esta tiene la misma razon á las cantidades iguales.

EXPLICACION. Sean a y b dos cantidades iguales que se comparen á otra tercera c .

digo lo primero: que la razon de $a : c :: b : c$
 y lo segundo: que $c : b :: c : a$

DEMOSTRACION. Siendo por lo supuesto $a = b$
 si se multiplica por $c = c$
 se tendrá (ax. v) $a c = b c$
 y por consiguiente (II part. lem. I) . . $a : c :: b : c$
 POR NÚMEROS. Sea $4 = 4$
 y la tercera cantidad 2

digo que $4 : 2 :: 4 : 2$
 porque el producto de los extremos es igual al de los
 medios.

Lo segundo: digo que $c : b :: c : a$
 porque el producto de los extremos es
 igual al de los medios $a c = b c$

POR NÚMEROS. $2 : 4 :: 2 : 4$
 porque el producto de los extremos es igual al de los
 medios.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

*De dos cantidades desiguales, la mayor tiene mayor
 razon á otra tercera, y esta tiene mayor razon
 á la menor, que á la mayor.*

EXPLICACION. Sean a y b dos cantidades desigua-
 les, que se comparen á otra tercera c .

digo lo primero: que si $a > b$, será . . . $a : c > b : c$
 y lo segundo: que la razon de $c : b > c : a$

DEMOSTRACION. Por lo supuesto $a > b$
 multiplicándolo todo por $c = c$
 será (ax. VI) $a c > b c$
 luego (II part. lem. II) la razon de . . $a : c > b : c$

POR NÚMEROS. Digo que $8 : 2 > 4 : 2$
 porque el producto de los extremos
 es mayor que el de los medios $16 > 8$

Lo segundo $c : b > c : a$
 porque el producto de los extremos es
 mayor que el de los medios $a c > b c$

Tambien la razon de $2:4 > 2:8$
 porque el producto de los extremos
 es mayor que el de los medios $16 > 8$

PROPOSICION IX. TEOREMA.

Si dos magnitudes tienen la misma razon á otra tercera, serán iguales; y si la tercera tiene la misma razon á dichas magnitudes, tambien serán iguales.

EXPLICACION. Sean a y b dos magnitudes que tengan la misma razon á otra tercera c , esto es, $a:c::b:c$
 digo lo primero: que $a=b$
 lo segundo: si $c:b::c:a$
 tambien $a=b$

DEMOSTRACION. Por lo supuesto son
 proporcionales $a:c::b:c$
 luego (1 part. lem. 1) $ac=bc$
 y partiendo por $c=c$
 se tendrá (ax. v) $a=b$
 Lo segundo: siendo proporcionales ... $c:b::c:a$
 será $a=b$
 pues por el lema citado se tendrá $ac=bc$
 y partiendo por $c=c$
 será (ax. v) $a=b$

POR NÚMEROS. Siendo por lo supuesto $4:2::4:2$
 será el producto de los extremos igual
 al de los medios $8=8$
 y dividiendo por 2, será (ax. v) $4=4$

PROPOSICION X. TEOREMA.

De dos magnitudes, la que á otra tercera tiene mayor razon, es la mayor; y aquella á quien la tercera tiene menor razon, es la mayor.

EXPLICACION. Sean a y b dos magnitudes que se com-

paren á otra tercera c , y sea la razon de $a : c > b : c$
 digo lo primero ; que $a > b$
 y lo segundo : que si $c : a < c : b$
 asimismo $a > b$

DEMOSTRACION. Lo primero : se
 tiene por lo supuesto $a : c > b : c$
 luego (1 part. lem. II) $a c > b c$
 y dividiéndolo todo por $c = c$
 será (ax. VI) $a > b$
 Lo segundo : siendo por lo supuesto .. $c : a < c : b$
 ó bien $c : b > c : a$
 será (1 part. lem. II) $a c > b c$
 y dividiendo por $c = c$
 será (ax. VI) $a > b$

POR NÚMEROS. Si la razon de $6 : 2 > 4 : 2$
 será el producto de los extremos ma- }
 yor que el de los medios } $12 > 8$
 y dividiendo por 2 , será $6 > 4$

PROPOSICION XI. TEOREMA.

*Las razones que son iguales á otra tercera,
 son iguales entre sí.*

Es evidente; porque siendo propor- } $a : b :: c : d$
 cionales }
 y tambien $c : d :: e : f$
 tendrán iguales exponentes , y por
 consiguiente la razon de $a : b :: e : f$

PROPOSICION XII. TEOREMA.

*Dadas algunas magnitudes proporcionales en qual-
 quier número , la razon que un antecedente tiene
 á su conseqüente , esa misma tendrán todos los ante-
 cedentes juntos á todos los conseqüentes juntos.*

EXPLICACION. Sean proporcionales $a : b :: c : d$

digo que tambien lo serán... $a:b::a+c:b+d$

DEMOSTRACION. Sien- } $a:b::c:d$
do por lo supuesto... }

será (I part. lem. I) $ad = bc$

y añadiendo á una y } $ab = ab$
otra parte..... }

se tendrá (ax. II) $ab + ad = ab + bc$

esto es, extractados } $a \times \overline{b+d} = b \times \overline{a+c}$
los productos..... }

y (II part. lem. I) se- } $a:b::a+c:b+d$
rán proporcionales... }

POR NÚMEROS. Sien- } $8:4::6:3$
do proporcionales... }

lo serán tambien $8:4::8+6:4+3$

esto es $8:4::14:7$

porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

Tambien siendo pro- } $a:b::c:d::e:f$
porcionales..... }

lo serán igualmente... $a:b::a+c+e:b+d+f$

DEMOSTRACION. Sien- } $a:b::c:d$
do por lo supuesto... }

será (lema I) $ad = bc$

Tambien siendo $a:b::c:d$ }
y $c:d::e:f$ } luego $af = be$

será (prop. XI) $a:b::e:f$ }

y por consiguiente (a- } $ad + af = bc + be$
xioma II)..... }

y añadiendo á ambas } $ab = ab$
partes..... }

será por el mismo $ab + ad + af = ab + bc + be$

ó bien $a \times \overline{b+d+f} = b \times \overline{a+c+e}$

luego (II part. lem. I) .. $a:b::a+c+e:b+d+f$

POR NÚMEROS. Sien- } $8:4::6:3::2:1$
do proporcionales... }

lo serán tambien $8:4::8+6+2:4+3+1$
 esto es $8:4::16:8$
 porque el producto de los extremos es igual al de los
 medios.

PROPOSICION XIII. TEOREMA.

*Si de dos razones iguales la segunda es mayor que otra
 tercera, tambien lo será la primera.*

Es claro; porque si el exponente de la segunda
 razon es mayor que el de la tercera, tambien el ex-
 ponente de la primera razon será mayor que el de
 la tercera.

esto es, si $a:b::c:d$
 y tambien $c:d > x:z$
 será $a:b > x:z$

DEMOSTRACION. En la primera pro- } $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 porcion es el exponente }

y en la segunda (cor. II def. VIII) ... } $\frac{c}{d} > \frac{x}{z}$

luego el exponente $\frac{a}{b} > \frac{x}{z}$

y por consiguiente la razon de $a:b > x:z$

PROPOSICION XIV. TEOREMA.

*De quatro cantidades proporcionales si la primera es
 igual, mayor ó menor que la tercera, tambien la se-
 gunda será igual, mayor ó menor que la quarta.*

EXPLICACION. Sean proporcionales ... $a:b::c:d$
 Digo que si $a=c$
 tambien $b=d$
 y si $a > c$, tambien $b > d$; por fin si $a < c$, tambien $b < d$.

DEMOSTRACION. Siendo por lo supu- } $a:b::c:d$
 esto }

será (I part. lem. I) $ad = bc$
 y (II parte del mismo) $a:c::b:d$
 luego si en la primera razon $a = c$
 tambien en la segunda será $b = d$
 y si en la primera $a > c$
 tambien en la segunda $b > d$
 y por último si en la primera $a < c$
 tambien en la segunda $b < d$

POR NÚMEROS. Sean proporcionales $8:4::6:3$
 luego si $8 > 6$, tambien $4 > 3$.

PROPOSICION XV. TEOREMA.

*Los equimúltiples tienen la misma razon
 que sus partes aliquotas.*

EXPLICACION. Sean los equimúltiples a, b
 y sus partes c, d
 digo que son proporcionales $a:b::c:d$

DEMOSTRACION. Los equimúltiples divididos por
 sus partes aliquotas, dan los quocientes } $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$
 iguales (cor. def. II), esto es
 y multiplicándolos por $cd = cd$
 se tendrá (ax. V) } $\frac{acd}{c} = \frac{bcd}{d}$

que reducido á la menor expresion será $ad = bc$
 luego (II part. lem. I) proporcionales $a:b::c:d$

POR NÚMEROS. Si las cantidades $8, 6$
 son equimúltiples de las partes $4, 3$
 serán proporcionales $8:6::4:3$
 porque el producto de los extremos es igual al de
 los medios.

COROLARIO I. Si dos cantidades como 4 y 3 se
 multiplican por otra tercera 2 , los productos 8 y
 6 estarán en la misma razon, esto es, serán propor-
 cionales $8:6::4:3$.

COROLARIO II. Si dos cantidades como 8 y 6 se parten por otra tercera 2, los quocientes 4 y 3 estarán en la misma razon, esto es, serán proporcionales $4 : 3 :: 8 : 6$.

COROLARIO III. Dada una serie de cantidades como a, b, c, d , la razon que la primera a tiene á la última d , se compone de todas las razones intermedias $a:b, b:c, c:d$; porque multiplicando los antecedentes y los conseqüentes, se tendrá la razon compuesta $a b c : b c d$, que es lo mismo que la razon de $a : d$, esto es, son proporcionales $a : d :: a b c : b c d$; porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

COROLARIO IV. Si tres cantidades $+: a, b, c$ son continuas proporcionales, la primera a á la tercera c tiene la razon duplicada de la primera a á la segunda b , por componerse de las dos razones intermedias, que se suponen iguales.

COROLARIO V. Si quatro cantidades $+: a, b, c, d$ son continuas proporcionales, la razon que la primera a tiene á la quarta d , es triplicada de la que tiene la primera a á la segunda b , por componerse de las tres razones intermedias, que se suponen iguales.

ESCOLIO. En esta proposicion se funda la reduccion de los quebrados á un comun denominador; porque el ser los quebrados iguales consiste en que los numeradores tengan la misma razon á sus denominadores: luego si el numerador y denominador de $\frac{2}{3}$ se multiplican por 5, se tendrá $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; y si el numerador y denominador de $\frac{4}{5}$ se multiplican por 3, se tendrá $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

Tambien se infiere de esta proposicion la reduccion de los quebrados á los mínimos términos; porque el numerador y denominador se parten por una misma cantidad, que es la mayor comun medida.

PROPOSICION XVI. TEOREMA.

Si quatro cantidades de una misma especie son directamente proporcionales, tambien lo serán alternando.

EXPLICACION. Sean proporcionales... $a:b::c:d$
digo que lo serán alternando... $a:c::b:d$

DEMOSTRACION. Por lo supuesto son } $a:b::c:d$
proportionales

luego (I part. lem. I) $ad = bc$

y (II part. del mismo) $a:c::b:d$

POR NÚMEROS. Siendo proporcionales . $8:4::6:3$

tambien lo serán alternando $8:6::4:3$

porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

ESCOLIO. Tambien se demuestra la proporcion

inversa ; porque siendo directamente proporcio-

les $a:b::c:d$

lo serán invirtiendo $b:a::d:c$

porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

Tambien siendo proporcionales $8:4::6:3$

lo serán invirtiendo $4:8::3:6$

porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

PROPOSICION XVII. TEOREMA.

Si quatro cantidades son directamente proporcionales, tambien lo serán dividiendo.

EXPLICACION. Sean directa- }
mente proporcionales } $a:b::c:d$

digo que lo serán dividiendo .. $a-b:b::c-d:d$

DEMOSTRACION. Siendo por }
lo supuesto proporcionales ... } ... $a:b::c:d$

será (1 part. lem. 1) $a d = b c$
 y quitando de ambas partes $b d = b d$
 se tendrá (ax. III) $a d - b d = b c - b d$
 ó bien $d \times \overline{a - b} = b \times \overline{c - d}$

y (II part. lem. 1) proporcio- } $a - b : b :: c - d : d$
 nales..... }

POR NÚMEROS. Siendo pro- } .. $12 : 3 :: 8 : 2$
 porcionales }

lo serán dividiendo $12 - 3 : 3 :: 8 - 2 : 2$
 esto es $9 : 3 :: 6 : 2$
 porque el producto de los extremos es igual al de los
 medios.

PROPOSICION XVIII. TEOREMA.

*Si quatro cantidades son directamente proporcionales,
 tambien lo serán componiendo.*

EXPLICACION. Sean di- } $a : b :: c : d$
 rectamente proporcionales }
 digo que lo serán compo- } .. $a + b : b :: c + d : d$
 niendo }

DEMOSTRACION. Siendo por lo supuesto proporcio-
 nales $a : b :: c : d$
 será (1 part. lem. 1) $a d = b c$
 y añadiendo á ambas partes $b d = b d$
 se tendrá (ax. II) $a d + b d = b c + b d$
 ó bien $d \times \overline{a + b} = b \times \overline{c + d}$

luego (II part. lem. 1) pro- } .. $a + b : b :: c + d : d$
 porcionales }

POR NÚMEROS. Siendo pro- } $8 : 4 :: 6 : 3$
 porcionales }

serán componiendo $8 + 4 : 4 :: 6 + 3 : 3$
 esto es $12 : 4 :: 9 : 3$
 porque el producto de los extremos es igual al de
 los medios.

PROPOSICION XIX. TEOREMA.

Si el todo es al todo como la parte á la parte, tambien será el residuo al residuo como el todo al todo.

EXPLICACION. Sean los todos a, b
 y las partes c, d
 serán los residuos $a - c, b - d$
 digo que siendo proporcionales $a : b :: c : d$
 tambien lo serán $a - c : b - d :: a : b$

DEMOSTRACION. Por lo su- } $a : b :: c : d$
 puesto son proporcionales ... }
 luego (1 part. lem. 1) $ad = bc$
 y restando ambos productos de $ab = ab$
 se tendrá (ax. III) $ab - ad = ab - bc$
 ó bien $a \overline{b - d} = b \overline{a - c}$

y (II part. lem. 1) proporcio- } $a - c : b - d :: a : b$
 nales }

POR NÚMEROS. Sean los todos 12 y 9
 y las partes 8 y 6
 serán los residuos 4 y 3
 digo que siendo proporcionales $12 : 9 :: 8 : 6$
 tambien lo serán $4 : 3 :: 12 : 9$
 porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

PROPOSICION XX. TEOREMA.

Dadas algunas cantidades a, b, c de una parte, y otras en igual número d, e, f de otra, en proporcion ordenada: si la primera a es mayor que la última c en la una parte, tambien la primera d será mayor que la última f en la otra; y si igual, igual; y si menor, menor. Se inferirá de la prop. XXII.

PROPOSICION XXI. TEOREMA.

Dadas algunas cantidades a, b, c de una parte, y otras d, e, f en igual número de otra, en proporcion perturbada: si la primera a es mayor que la última c en la una parte, tambien la primera d es mayor que la última f en la otra; y si igual, igual; y si menor, menor. Se inferirá de la prop. XXIII.

PROPOSICION XXII. TEOREMA.

Dadas algunas cantidades de una parte, y otras en igual número de otra en proporcion ordenada, tambien por igualdad de razon serán proporcionales la primera á la última en la una parte, como la primera á la última en la otra.

EXPLICACION. Sean las cantidades a, b, c
ordenadamente proporcionales á las d, e, f
esto es, sean a : b :: d : e
y b : c :: e : f
digo que por igualdad de razon ordenada será } ... a : c :: d : f

DEMOSTRACION. Por lo supuesto }
se tiene a : b :: d : e; luego (lem. I) } .. a e = b d
tambien b : c :: e : f; luego b f = c e
y multiplicando iguales por iguales,
será (ax. v) a e b f = b d c e
y por el mismo partiendo por b e = b e
se tendrá a f = c d
luego (II part. lem. I) a : c :: d : f

POR NÚMEROS. Sean las cantidades 8, 4, 3
proporcionales ordenadamente á las 24, 12, 9
esto es, sean 8 : 4 :: 24 : 12
y tambien 4 : 3 :: 12 : 9

digo que por igualdad de razon } $8:3::24:9$
 ordenada será }
 porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

COROLARIO. De aquí se infiere la proposicion xx; porque siendo por lo demostrado $a:c::d:f$
 lo será tambien alternando. $a:d::c:f$
 y (prop. xiv) si $a > c$
 tambien será $d > f$
 si igual, igual; y si menor, menor.

PROPOSICION XXIII. TEOREMA.

Dadas algunas cantidades de una parte, y otras en igual número de otra en proporcion perturbada, tambien por igualdad de razon serán proporcionales la primera á la última en la una parte, como la primera á la última en la otra.

EXPLICACION. Sean las cantidades a, b, c
 desordenadamente proporcionales á las d, e, f
 esto es, sean $a:b::e:f$
 y $b:c::d:e$
 digo que por igualdad de razon per- }
 turbada será } $a:c::d:f$

DEMOSTRACION. Por lo supuesto son proporcionales $a:b::e:f$; luego (lem. i) $af = be$
 tambien $b:c::d:e$, luego $be = cd$
 y por consiguiente (ax. i) $af = cd$
 luego (II part. lem. cit.) $a:c::d:f$

POR NÚMEROS. Sean las cantidades $8, 4, 3$
 perturbadamente proporcionales á las ... $16, 12, 6$
 esto es, sean $8:4::12:6$
 y tambien $4:3::16:12$
 digo que por igualdad de razon per- }
 turbada será } $8:3::16:6$

porque el producto de los extremos es igual al de los medios.

COROLARIO. De aquí se infiere la proposicion XXI; porque siendo por lo demostrado $a : c :: d : f$ será alternando $a : d :: c : f$ y (prop. XIV) si $a > c$ tambien $d > f$ si igual, igual; y si menor, menor.

EN NÚMEROS. Siendo $8 > 3$ tambien $16 > 6$

La proposicion XXIV se omite.

PROPOSICION XXV. TEOREMA.

Si quatro cantidades son proporcionales, la suma de la máxima y de la mínima es mayor que la suma de las otras dos.

EXPLICACION. Sean proporcionales .. $a : b :: c : d$ y sea a la máxima, y d la mínima;

digo que será $a + d > b + c$

DEMOSTRACION. Por lo supuesto .. $a : b :: c : d$

luego (lem. I) $ad = bc$

y restando ambos pro-
ductos de } $ac = ac$

se tendrá (ax. III.) $ac - ad = ac - bc$

ó bien $a \times \overline{c - d} = c \times \overline{a - b}$

y (II part. lem. cit.) $a : a - b :: c : c - d$

pero por lo supuesto $a > c$

luego (prop. XIV) $a - b > c - d$

y añadiendo á ambas partes ... $b + d = b + d$

se tendrá (ax. IV) $a - b + b + d > c - d + b + d$

que reducido á la me-
nor expresion será ... } $a + d > b + c$

luego si quatro cantidades son proporcionales &c.

ESCOLIO I. En esta proposicion queda demostrada la proporcion conversa, esto es, que son proporcionales $a : a - b :: c : c - d$

ESCOLIO II. Si a es la máxima, se prueba que d sea la mínima; porque siendo proporcionales . . . $a : b :: c : d$

y $a > c$

tambien (prop. xiv) $b > d$

asimismo por ser proporcionales $a : b :: c : d$

lo serán alternando $a : c :: b : d$

y siendo por la suposicion $a > b$

tambien (prop. xiv) $c > d$

Luego si a es la máxima, d es la mínima.

LIBRO CUARTO.

DE LAS REGLAS DE PROPORCION.

DEFINICION I.

Regla de proporcion es la que enseña el modo de hallar un quarto proporcional á tres números dados ó conocidos, y por eso se llama vulgarmente regla de tres. Dícese tambien regla de oro por su mucha utilidad, y se divide en directa y recíproca.

DEFINICION II. Regla de tres directa es quando los términos son directamente proporcionales, esto es, quando el primero al segundo tiene la misma razon que el tercero al quarto, ó bien quando el producto de los extremos es igual al de los medios. Por exemplo: si en 4 meses se ganan 20 doblones, en 8 meses se ganarán 40. Tambien se conoce que la proporcion es directa, si quando el término tercero es igual, mayor ó menor que el primero, resulta el quarto igual, mayor ó menor que el segundo, como en el presente caso, en el qual porque el número de meses 8 es mayor que 4, tambien la ganancia 40 es mayor que 20.

DEFINICION III. Regla de tres indirecta , recíproca ó inversa es quando los términos de la proporcion estan dispuestos de suerte que el producto del primero y segundo es igual al producto del tercero y quarto , como en la proporcion $6 : 4 :: 8 : 3$, en la qual $6 \times 4 = 8 \times 3 = 24$, y proviene de haberse mudado los antecedentes en la proporcion directa $8 : 4 :: 6 : 3$, de que se sigue que para restituir á directa la proporcion inversa $6 : 4 :: 8 : 3$, se han de mudar los antecedentes á fin de tener $8 : 4 :: 6 : 3$.

Se conoce que la proporcion es recíproca , si aumentando el término tercero respecto al primero, disminuye el quarto respecto al segundo , ó si disminuyendo el tercero respecto al primero , aumenta el quarto respecto al segundo.

EXEMPLO. Si 100 hombres hacen un foso en 12 dias , 50 hombres en cuántos dias le harán? Es evidente que disminuyéndose el número de hombres, ha de aumentarse el de los dias ; porque menos hombres necesitan mas tiempo para hacer el mismo foso.

DEFINICION IV. Así la proporcion directa como la recíproca se divide en simple y compuesta. La proporcion simple es la que se compone de quatro términos, ó bien de dos razones iguales , como si en 8 meses se ganan 40 , en 4 se ganarán 20.

La compuesta es la que consta de tres , quatro, cinco ó mas razones , y por consiguiente de seis , ocho , diez ó mas términos , como si 10 hombres en 5 dias ganan 100 reales , 25 hombres en 15 dias ganarán 750.

Quando todas las razones son directas , la proporcion se llama compuesta directa ; pero si alguna de las razones fuere recíproca , se llamará compuesta recíproca.

CAPÍTULO I.

De la regla de tres simple.

Tres cosas se han de observar en la regla de proporcion simple.

Primera. Disponer los términos de suerte que las especies guarden el mismo orden.

Segunda. Exáminar si la proporcion es inversa para reducirla á directa.

Tercera. Hallar el término que se busca.

Para lo primero se escribirán los términos de suerte que el primero y tercero sean de una misma especie, y el segundo y cuarto de otra, poniendo x en lugar del término que se busca.

EXEMPLO I. Si con 8 de caudal se ganan 4, con 6 cuánto se ganará? Porque se busca la ganancia, se escribirá esta especie en el segundo y cuarto lugar, y el caudal en el primero y tercero, del modo siguiente.

Caudal.	Ganancia.	Caudal.	Ganancia.
8	4	6	$x = 3$

Lo segundo: dispuestos los términos se reconocerá si la proporcion es directa ó inversa (atendiendo á lo que se dixo en la def. II y III); y respecto de que disminuyéndose el caudal debe disminuirse la ganancia, se verá que la proporcion es directa, y que no necesita de reducirse.

Lo tercero: para hallar el término que se busca se multiplicará el tercero por el segundo, y partiendo el producto por el término primero, el quociente será el cuarto proporcional que se pide: así multiplicando 4 por 6, y partiendo 24 por 8, el quociente 3 será el valor de x .

EXEMPLO II. Si 100 hombres hacen un foso en 12 días, 50 hombres en cuántos días harán la misma excavacion?

Porque se busca el número de los días, se pondrá en el segundo y cuarto lugar, y el de los hombres en el primero y tercero, del modo siguiente.

Hombres.	Días.	Hombres.	Días.
100	12	50	x

Dispuestos los términos se reconocerá que la proporcion es inversa; porque disminuyéndose el número de hombres, ha de aumentarse el de los días; y para reducirla á directa se mudarán los antecedentes, esto es, el término primero se hará tercero, y al contrario, y se tendrá la proporcion reducida.

Hombres.	Días.	Hombres.	Días.
50	12	100	$x = 24$

Finalmente, multiplicando 100 por 12, se tendrá el producto 1200, que partido por 50, dará el quociente 24 por el valor de x , y se dirá que 50 hombres harán en 24 días la misma excavacion que 100 hombres en 12 días. Con esto se resolverán las cuestiones siguientes.

QUESTION I. Se quiere saber cuántos pies de París harán 1260 de Castilla.

RESOLUCION. Sabiendo que 7 pies de Castilla hacen 6 de París, se dispondrán los términos de esta manera.

Pies de Castilla.	Pies de París.	Pies de Castilla.	Pies de París.
7	6	1260	$x = 1080$

Dígame: si 7 dan 6, 1260 qué darán? Multiplicando 1260 por 6, dará el producto 7560, que partido por 7 dará 1080; y se dirá que 1260 pies de Castilla, hacen 1080 de París.

QUESTION II. En una plaza que tiene 3000 hombres de guarnicion, hay víveres para 8 meses, y re- celándose de sitió, han entrado 1500 hombres de au- mento: se quiere saber para cuánto tiempo tendrá víveres toda la guarnicion.

RESOLUCION. Juntos los 1500 hombres que en- traron con los 3000 que estaban, habrá 4500 hom- bres en la plaza; y porque se busca el número de meses, se pondrá este en segundo y último lugar, en la disposicion siguiente.

Hombres.	Meses.	Hombres.	Meses.
3000	8	4500	$x =$

Respecto de que aumentándose el número de los hombres, tendrán víveres para menos tiempo, la proporcion es inversa, y se reducirá á directa mu- dando los antecedentes, de este modo.

Hombres.	Meses.	Hombres.	Meses.
4500	8	3000	$x = \frac{3000 \times 8}{4500} = 5 \frac{1}{3}$

Multiplicando 3000 por 8, y el producto 24000 partiéndolo por 4500, se hallará el quociente $5 \frac{1}{3}$ por el valor de x , esto es, tendrán víveres para 5 meses y 10 días.

QUESTION III. Si para hacer una tienda de cam- paña se necesitan 150 varas de tela de 5 palmos de ancho, cuántas varas serán menester de otra tela que solo tenga 3 palmos de ancho.

RESOLUCION. Porque se busca el número de las varas, se pondrá esta especie en el segundo y últi- mo lugar, disponiendo la regla en esta forma.

Palmos.	Varas.	Palmos.	Varas.
5	150	3	$x =$

Y respecto de que disminuyéndose lo ancho de la tela se necesitan mas varas, la proporcion es inversa;

y mudando los antecedentes, se tendrá la directa, del modo siguiente.

Palmos.	Varas.	Palmos.	Varas.
3	150	5	$x = \frac{150 \times 5}{3} = 250$

Multiplíquese 150 por 5, y el producto 750 partiéndolo por 3, dará el quociente 250 por el valor de x , esto es, de las varas que se necesitan.

QUESTION IV. Habiéndose puesto á ganancia 1600 doblones á razon de 5 por 100 al año, se desea saber la total ganancia que corresponde.

RESOLUCION. Porque se busca la ganancia, se pondrá este término en el segundo y quarto lugar, en la disposicion siguiente.

Caudal.	Ganancia.	Caudal.	Ganancia.
100	5	1600	$x = \frac{5 \times 1600}{100} = 80$

Y porque aumentándose el caudal, debe aumentarse la ganancia, la proporcion es directa; y así multiplicando 5 por 1600, y el producto 8000 partiéndolo por 100, se hallará el quociente 80 por el valor de x , y se dirá que 1600 doblones darán 80 de ganancia cada año.

CAPÍTULO II.

De la regla de tres compuesta.

Para resolver las quëstiones de la proporcion compuesta, se observarán las reglas siguientes.

Primera. La proporcion se divide en dos partes, poniendo en el último lugar el término que se busca, y ordenando las especies de una y otra parte, de suerte que la primera corresponda á la primera, la segunda á la segunda, la tercera á la tercera &c.

Segunda. Ordenados los términos, se exâminará

cada una de las proporciones simples , comparando con la especie que se busca cada una de las otras ; y si alguna proporcion se hallare inversa , se reducirá á directa mudando los antecedentes.

Tercera. Teniendo ya la proporcion directa , si los términos de toda la proporcion son seis , se multiplicarán entre sí el tercero , cuarto y quinto , y se tendrá el dividendo : despues se multiplicará el primero por el segundo , y se tendrá el divisor ; y hecha la particion , será el quociente el sexto término que se busca.

QUESTION 1. Si 10 hombres en 5 dias ganan 100 reales , 25 hombres en 15 dias cuántos ganarán ?

RESOLUCION. Porque se buscan reales , se pondrá este término en el último lugar ; y ordenados los términos en una y otra parte de la proporcion , se atenderá á que correspondan hombres á hombres , dias á dias , y reales á reales , conforme se dixo en la regla primera , y se tendrá en la forma siguiente.

Hombres. Dias. Reales. Hombres. Dias. Reales.

$$10 \dots 5 \dots 100 \dots 25 \dots 15 \dots x = \frac{100 \times 25 \times 15}{10 \times 5} = 750$$

Ordenados los términos , se exâminarán las proporciones , comparando primero hombres con reales , diciendo : si 10 hombres ganan 100 reales , 25 hombres cuántos reales ganarán ? Y porque aumentándose el número de los hombres , debe tambien aumentarse el de los reales , esta proporcion es directa.

Comparando en la segunda proporcion dias con reales , se dirá : si en 5 dias se ganan 100 reales , en 15 dias qué se ganará ? Se ve claro que por aumentarse el número de los dias , se aumentará la ganancia , y por consiguiente que esta proporcion es tambien directa. Multiplicando , pues , el tercero , cuarto y quinto término entre sí , esto es , 100 , 25 y 15 , se tendrá el producto 37500 , que será el dividendo ;

y multiplicando el primero y segundo término, esto es, 10 por 5, se tendrá el divisor 50: y partiendo 37500 por 50, se hallará el quociente 750 por el valor de x ; y se dirá que si 10 hombres en 5 días ganan 100 reales, 25 hombres en 15 días ganarán 750.

QUESTION II. Si 10 hombres en 5 días ganan 100 reales, 25 hombres en cuántos días ganarán 750?

RESOLUCION. Dispónganse los términos según se ha dicho, poniendo en el último lugar el número de los días, por ser la especie que se busca, y se tendrá en la forma siguiente.

Hombres.	Reales.	Días.	Hombres.	Reales.	Días.
10	100	5	25	750	x

Examinando la proporcion que se forma de hombres y dias, se dirá: si 10 hombres hacen cierta ganancia en 5 dias, 25 hombres en cuántos dias la harán? Y porque mas hombres harán la misma ganancia en menos tiempo, esta proporcion es inversa: y mudando los antecedentes, esto es, poniendo 25 en lugar de 10, y 10 en el de 25, se tendrá reducida á directa.

Exámínesse ahora la proporcion de reales y dias, diciendo: si 100 reales se ganan en 5 dias, 750 reales en cuántos dias se ganarán? Y porque mas reales necesitan mas dias para ganarse, esta proporcion es directa, y no necesita reducirse, disponiendo la regla en la forma siguiente.

Hombres.	Reales.	Días.	Hombres.	Reales.	Días.
25	100	5	10	750	x

$$= \frac{5 \times 10 \times 750}{25 \times 100} = 15$$

Multiplíquense los números 5, 10 y 750, y se tendrá el dividendo 37500: multiplíquese tambien 25 por 100, y se tendrá el divisor 2500; y hecha la particion, se hallará el quociente 15 por el valor de x .

QUESTION III. Si 10 hombres en 5 dias ganan 100 reales , para ganar en 15 dias 750 reales cuántos hombres serán menester?

RESOLUCION. Lo primero: porque se busca el número de hombres , se pondrá este en el último lugar , y ordenados los términos , se tendrá como sigue.

Dias.	Reales.	Hombres.	Dias.	Reales.	Hombres.
5	100	10	15	750	$x =$

Lo segundo : hágase el exâmen diciendo : si en 5 dias hacen cierta ganancia 10 hombres , en 15 dias harán la misma ganancia menos hombres: luego esta proporcion es recíproca , y mudando los antecedentes 5 y 15 , se tendrá reducida á directa. Dígase tambien : si 100 reales se ganan por 10 hombres , para ganar 750 se necesitarán mas hombres: luego es directa , y lo será toda la proporcion del modo siguiente.

Dias.	Reales.	Hombres.	Dias.	Reales.	Hombres.
15	100	10	5	750	$x = 25$

Lo tercero : multiplicando 750 por 5 , y el producto por 10 , se tendrá el dividendo 37500 : multiplicando 100 por 15 , se tendrá el divisor 1500 ; y hecha la particion , se hallará el quociente 25 por el valor de x que se buscaba.

La razon de esta práctica es que los términos se reducen á quatro , haciendo de las razones simples una compuesta ; y así interviniendo en este exemplo tres razones , que son de dias á dias , de reales á reales , y de hombres á hombres , esto es , $\frac{15}{5}$, $\frac{100}{750}$ y $\frac{10}{x}$, si de las dos primeras $\frac{15}{5}$ y $\frac{100}{750}$ se forma la compuesta $\frac{15 \times 100}{5 \times 750}$, se tendrá la proporcion $15 \times 100 : 5 \times 750 :: 10 : x$; luego $x = \frac{5 \times 750 \times 10}{15 \times 100}$ (cor. III lem. I lib. III)

Quiere decir esta expresion , que para hallar el valor de x quando los términos son seis , deben multiplicarse tercero , quarto y quinto término entre sí, y que el producto partido por el que resulta de la multiplicacion del primero por el segundo , dará por quociente el valor del sexto término que se busca.

La prueba está en que el producto del primero, segundo y sexto sea igual al producto de tercero, quarto y quinto , esto es , $25 \times 15 \times 100 = 5 \times 750 \times 10$, ó bien $37500 = 37500$.

ESCOLIO. Si en la cuestión intervienen dos ó mas términos iguales de una misma especie , se quitarán de la proporcion.

EXEMPLO. Si 40 hombres en 15 dias hacen 50 varas de excavacion , 30 hombres en 15 dias cuántas harán?

Porque el número de dias es el mismo , se quitará, y será lo mismo que si se dixese : si 40 hombres hacen 50 varas de excavacion , 30 hombres cuántas harán?

A este modo se resuelven otras cuestiones de ocho , diez ó mas términos.

REGLA GENERAL. Reducidos todos los términos á directos , para hallar el valor de x (que se supone el último) , se hará como indica la siguiente tabla.

Términos.	Quo- ciente.	Divisor.	Dividendo.
Para quatro.	4 ^o	1 ^o	2 ^o 3 ^o
Para seis.	6 ^o	1 ^o 2 ^o	3 ^o 4 ^o 5 ^o
Para ocho.	8 ^o	1 ^o 2 ^o 3 ^o	4 ^o 5 ^o 6 ^o 7 ^o
Para diez.	10 ^o	1 ^o 2 ^o 3 ^o 4 ^o . . .	5 ^o 6 ^o 7 ^o 8 ^o 9 ^o . . .
Para doce.	12 ^o	1 ^o 2 ^o 3 ^o 4 ^o 5 ^o	6 ^o 7 ^o 8 ^o 9 ^o 10 ^o 11 ^o

En la qual se ve que quando la proporcion es de ocho términos, se ha de multiplicar el quarto, quinto, sexto y séptimo para tener el dividendo, y el primero, segundo y tercero para el divisor; y hecha la particion, se hallará el quociente, que es el octavo término que se busca. Tambien servirá de regla general, despues de dividida la proporcion en dos partes, el multiplicar entre sí los términos conocidos de la segunda parte, y último de la primera para tener el dividendo, y multiplicar asimismo los demás de la primera para tener el divisor, concluyendo luego la operacion como se ha dicho.

CAPÍTULO III.

De la regla de compañía.

La regla de compañía no es otra cosa que distribuir la ganancia ó pérdida entre los compañeros á proporcion de lo que cada uno puso: lo que se hace de este modo.

QUESTION I. Tres hiciéron compañía, el primero puso 600 pesos, el segundo 800, y el tercero 1100. Despues de algun tiempo halláron 1000 pesos de ganancia: pídesse lo que corresponde á cada uno.

RESOLUCION. En el exemplo 1: súmense los caudales, y se tendrá 250; y para hallar lo correspondiente al primero, se dirá: si todo el caudal 2500 gana 1000 pesos, qué ganarán 600 pesos? Hecha la regla se hallará, que la ganancia del primero fue 240 pesos.

Para saber la del segundo se dirá: si 2500 dan 1000, qué darán 800? Y hecha la regla, se hallará que ganó 320 pesos.

EX. I.	
Caudales.	Ganancias.
1. ^o .. 600	240
2. ^o .. 800	320
3. ^o .. 1100	1000
Suma 2500	1000

Para averiguar la ganancia del tercero, se hará otra regla de proporcion diciendo: si 2500 dan 1000, qué darán 1100? Y se hallará que ganó 440, cuyas tres ganancias sumadas componen la total 1000.

Esta cuestión se propone tambien de otro modo, que es dividir el número 1000 en tres partes que guarden la proporcion de 600, 800, 1100: luego sumando los tres números, se tendrá 2500, y se dirá: como el todo es al todo, así la parte es á la parte, esto es, 2500 : 1000 :: 600 : 240, y así en las demás proporciones.

Quando en la compañía hay tiempo desigual, se llama regla de compañía compuesta con tiempo, y se reduce á simple multiplicando el caudal de cada uno por su respectivo tiempo; y luego se hacen las reglas de proporcion segun se ha dicho.

QUESTION II. Tres hicieron compañía: el primero puso 480 pesos por tiempo de 4 años, el segundo puso 320 pesos por tiempo de 5 años, y el tercero puso 240 pesos por tiempo de 6 años, y han de repartir 400 pesos que tuvieron de ganancia. Pídesse la que pertenece á cada uno.

RESOLUCION. Dispónganse los términos segun se hallan en el exemplo II: y multiplicando el caudal de cada uno por su respectivo tiempo, se tendrán los pro-

EX. II.

Caudales.	Años.	Productos.	Ganancias.
1. ^o ...	480	$\times 4 = 1920$	... $154\frac{16}{496}$
2. ^o ...	320	$\times 5 = 1600$	... $129\frac{16}{496}$
3. ^o ...	240	$\times 6 = 1440$	... $116\frac{64}{496}$
Suma			$4960 \dots 400$

ductos 1920, 1600, 1440, cuya suma es 4960, y quedará la regla compuesta reducida á simple: luego se dirá: si 4960 ganan 400, qué ganarán 1920? Y hecha la operacion se hallará corresponder al primero $154\frac{16}{496}$: del mismo modo se hallará que al

segundo le corresponden $129\frac{16}{496}$, y al tercero $116\frac{64}{496}$; y sumando los enteros y quebrados, compondrá la ganancia total 400.

QUESTION III. Dos hicieron compañía por tiempo de 8 años: el primero puso 20 doblones, y al fin del tercer año sacó 12: el segundo puso 30 doblones, y al fin del quinto año añadió 10: hallaron de ganancia 120 doblones, y se pide la que corresponde á cada uno.

RESOLUCION. Multiplíquese el caudal del primero por 3, que es el número de años que estuvo empleado, y se tendrá 60; y porque al fin de los 3 años

EX. III.

Caudales.	Años.	Productos.	Ganancias.
1. ^o	$\left\{ \begin{array}{l} 20 \times 3 = 60 \\ 8 \times 5 = 40 \end{array} \right\}$	100	$32\frac{16}{37}$
2. ^o	$\left\{ \begin{array}{l} 30 \times 5 = 150 \\ 40 \times 3 = 120 \end{array} \right\}$	270	$87\frac{21}{37}$
		370	120

sacó 12 doblones, le quedaron solamente 8 en los 5 años siguientes; y así multiplicando 8 por 5, se tendrá 40, y la suma de los dos productos será 100. Porque el segundo puso al principio 30 doblones por todo el tiempo, y al fin del quinto año añadió 10, resulta que en los 5 primeros años tuvo 30 doblones, cuyo producto de 30 por 5 es 150, y que en los 3 últimos años tuvo 40, cuyo producto de 40 por 3 es 120; y añadido al antecedente, componen 270. Reducida ya la regla compuesta á simple, se resuelve diciendo: si la suma de los productos 370 da 120, qué dará 100? Y se hallará $32\frac{16}{37}$ por la ganancia del primero: luego al segundo le corresponde el resto hasta 120, que son $87\frac{21}{37}$, como se ve en el exemplo III.

CAPÍTULO IV.

De la regla de aligacion.

EXPLICACION.

Aligacion es la mezcla que se hace de muchas especies para que resulte otra media, como si se mezclase pólvora fina con basta, que resultaria otra especie de pólvora de menos potencia que la fina, y de mas fuerza que la basta. Las especies se expresan por su valor, y así en las de pólvora son los grados de su fuerza; pues suponiendo la pólvora fina de 8 grados, la que no es tan fina será de 7, y otra menos fina de 6 &c: de suerte que se puede mezclar pólvora de 8 grados con otra de 5, para que resulte un mixto de pólvora de 7 grados, que es menos poderosa que la de 8, y mas que la de 5.

A este modo las especies del oro se expresan por sus quilates: el mas puro y fino se dice de 24 quilates, el que no lo es tanto de 23 &c.

En qualquiera aligacion concurren necesariamente tres especies, mayor, menor y media, y las tres cantidades correspondientes cada una á su especie.

Fundamentos de la regla de aligacion.

Si las tres especies se restan entre sí, y la diferencia de las extremas se toma como todo, las otras dos diferencias serán las partes recíprocas del mixto.

EXPLICACION. Supóngase que de pólvora de 8 y de 5 grados se quiere hacer una mezcla que resulte de 7. La diferencia de las especies extremas 8 y 5, es 3: la diferencia entre la especie mayor 8 y la media 7, es 1; y la diferencia entre la especie media 7 y la menor 5, es 2.

Digo, pues, que de las tres partes del mixto se pondrán dos de la especie mayor 8, y una de la menor 5, para que resulte el mixto de 7 grados.

La razon es, porque lo que falta á la especie menor 5 para igualar á la media 7, dimana precisamente de la porcion de pólvora que hay en el mixto de la especie mayor 8, respecto de que si no hubiera porcion alguna de dicha especie mayor, seria el mixto ó especie media la misma especie menor, sin diferencia alguna. Luego la diferencia 2 que hay de la especie menor 5 á la media 7, resulta de la pólvora que ha entrado en el mixto de la especie mayor 8; y por consiguiente se ha de poner en él tanta pólvora de 8 grados, quanta expresa la diferencia 2.

Por la misma razon el exceso 1 que hay de la especie mayor 8 á la media 7, proviene de la cantidad que ha entrado en el mixto de la especie menor 5: luego ha de ponerse en él tanta pólvora de 5 grados, quanta expresa dicho exceso 1; y por consiguiente de tres partes iguales del mixto (que es la diferencia de las extremas), las dos han de ser de la especie mayor, y la otra de la menor, que son las diferencias recíprocas.

COROLARIO I. De aquí se sigue, que las cantidades que componen un mixto, guardan la razon de las diferencias recíprocas de las especies, y por consiguiente habiendo de componer 36 libras de pólvora de 7 grados, mezclando para esto pólvora de 8 grados con otra de 5, se pondrán 24 libras de 8 grados, y 12 de 5, cuyas cantidades estan en la razon de 2:1, diferencias recíprocas de las especies.

COROLARIO II. Dadas las tres especies 8, 7 y 5, se tienen sus diferencias; porque $8 - 5 = 3$, $8 - 7 = 1$, y $7 - 5 = 2$: y al contrario, dadas las diferencias y qualquiera especie, se tienen las demás especies.

COROLARIO III. Dadas las cantidades 24 y 12 de las especies extremas, se tiene la cantidad del mixto, que es la suma, esto es, $24 + 12 = 36$. También dada la suma 36, y qualquiera cantidad extrema 24, se tiene la otra 12; porque $36 - 24 = 12$; ó bien dadas las cantidades 36 y 12, se tendrá la otra 24; porque $36 - 12 = 24$.

Disposiciones de la regla de aligacion.

Lo primero: se han de dar conocidas dos especies y dos cantidades, ó bien las tres especies, y una de las cantidades.

Lo segundo: se escribirán por su orden las tres especies mayor, media y menor, despues sus diferencias recíprocas, esto es, la diferencia entre la especie mayor y media se pondrá enfrente de la menor: la diferencia entre la especie menor y media enfrente de la mayor; y debaxo la suma, que es la diferencia de las extremas:

finalmente se escribirán las cantidades correspondientes á las especies extremas, y debaxo la suma, que es la cantidad del mixto, como se ve en el presente exemplo.

EX.		
Espec.	Difer.	Cantid.
8 ^o		2 ... 24
7 ^o		
5 ^o		1 ... 12
		3 ... 36

Lo tercero: en lugar de la especie, diferencia ó cantidad que se busca, se pone x , y los demás términos no conocidos se escriben segun lo dicho en los corolarios II y III.

Lo quarto: para formar la regla de proporcion se tomarán dos diferencias con sus dos cantidades correspondientes, entre las quales se hallarán tres términos conocidos; y buscando un quarto proporcional, se tendrá el valor de x , y con él los demás términos.

Todo esto se verá practicado en los quatro casos siguientes, á los quales se reducen las quëstiones determinadas de aligacion.

CASO I.

Dadas las tres especies y la cantidad del mixto, ballar las cantidades de las especies extremas.

QUESTION. Se quiere hacer una mezcla de pólvora de 7 grados en cantidad de 126 libras, compuesta de pólvora de 8 grados y de 5, y se pide la cantidad que se ha de poner de cada una de estas especies.

RESOLUCION. Escritos los términos dados ó conocidos, como se ve en el exemplo 1 (que en este caso son las tres especies, sus diferencias, y la cantidad del mixto), para escribir los términos incógnitos, esto es, las cantidades que se piden de las especies extremas, siendo la cantidad del mixto 126: si se supone que la cantidad correspondiente á la especie mayor 8 es x , será (corol. III.) $126 - x$ la cantidad que pertenece á la especie menor 5, con lo qual se tendrán los nueve términos, como en la regla segunda, y segun la quarta, se hará la proporcion $3 : 126 :: 2 : x = 84$, y por consiguiente $126 - x = 42$; luego se dirá, que se han de poner 84 libras de pólvora de 8 grados, y 42 de 5 para componer el mixto de 126 libras de pólvora de 7 grados.

EX. I.

Esp.	Difer.	Cantid.
8 ^o .. 2		$x = 84$ lib.
7 ^o		
5 ^o .. 1 ..	126 - x	$= 42$ lib.
3		126 lib.

CASO II.

Dadas las tres especies y la cantidad de qualquiera de las extremas, hallar la otra cantidad extrema y la del mixto.

QUESTION. Se quiere hacer una mezcla de pólvora de 7 grados, que tenga 84 libras de 8 grados, y las restantes de 5, y se pide la cantidad de esta especie y la del mixto.

EX. II.

RESOLUCION. Si se supone x por la cantidad de la especie menor, será la cantidad del mixto $84 + x$; y escritos

Espec.	Difer.	Cantid.
8 ^o	2	84 lib.
7 ^o		
5 ^o	1	$x = 42$ lib.
	3	$84 + x = 126$ lib.

los términos como en el exemplo II, se hará la proporcion $2 : 84 :: 1 : x = 42$; luego $84 + x = 126$; y por consiguiente se dirá, que se han de poner 42 libras de pólvora de 5 grados, que con las 84 de 8, harán 126 libras de 7 grados.

CASO III.

Dadas las tres cantidades y las especies extremas, hallar la especie media.

QUESTION. Se han mezclado 84 libras de pólvora de 8 grados con 42 de 5, y se quiere saber de quantos grados saldrán las 126 libras del mixto.

EX. III.

RESOLUCION.

Espec.	Difer.	Cantid.
8 ^o	$x = 2$	84 lib.
5 + $x = 7$ ^o		
5 ^o	$3 - x = 1$	42 lib.
	3	126 lib.

Sea x la diferencia entre la especie menor y media: luego siendo

la menor 5, será la media $5 + x$, y la diferencia entre la mayor y media $3 - x$; y dispuestos los términos como en el exemplo III, se hará la proporción $126 : 3 :: 84 : x = 2$; luego $5 + x = 7$ es el valor de la especie media que se busca.

CASO IV.

Dadas las cantidades y la especie media, con una de las extremas hallar la otra extrema.

QUESTION. Se tiene un mixto de 126 libras de pólvora de 7 grados, en el qual han entrado 84 libras de 8 grados, y se pide la especie de las otras 42.

RESOLUCION.

Sea x la diferencia entre la especie menor y media: luego siendo 7 la media, se-

rá la menor $7 - x$, y la diferencia entre las extremas será $1 + x$; y dispuestos los términos como en el exemplo IV, se hará la proporción $42 : 1 :: 84 : x = 2$; luego $7 - x = 5$ es el valor de la especie menor que se busca.

ESCOLIO I. La prueba en todos los casos es que la especie media multiplicada por la cantidad del mixto, ha de ser igual á la suma de los productos de las especies multiplicadas por sus respectivas cantidades, esto es, $7 \times 126 = 8 \times 84 + 5 \times 42$, ó bien $882 = 672 + 210$.

ESCOLIO II. Hay muchas quëstiones que son indeterminadas, en las quales se elige á discrecion una cantidad ó una especie.

EXEMPLO I. En 126 libras de un mixto entráron

		EX. IV.	
		Espec.	Cantid.
Sea x la diferencia entre la especie menor y media: luego siendo 7 la media, se-	8º	 $x = 2$	 84 lib.
	7º		
	$7 - x = 5$	 1	 42 lib.
		$1 + x = 3$	 126 lib.

84 libras de 8 grados, y se pide la especie de las otras 42, y la del mixto: en este caso se puede suponer la menor de 5 grados, y por el cas. III se hallará la del mixto de 7 grados.

EXEMPLO II. En 126 libras de un mixto de 7 grados entraron 84 libras de la especie mayor, y 42 de la menor, y se pide el valor de las especies: en este caso se puede suponer la especie mayor de 8 grados, y por el cas. IV se hallará la menor de 5 grados, ó bien al contrario; y así en los demás casos.

ESCOLIO III. Quando las especies son muchas, se hacen dos ó mas aligaciones, tomando siempre una especie mayor y otra menor, y repitiendo si fuere necesario una misma especie algunas veces. Por exemplo: si de pólvora de 8 grados, de 5 y de 3 se quieren hacer 114 libras de un mixto de 7 grados, se dividirá á discrecion 114 en dos partes, como 84 y 30, y se hará aligacion de 8 grados con 5, dada la cantidad 84 de la especie media 7; y por el cas. I se hallarán 56 libras de 8 grados, y 28 de 5. Despues se hará otra aligacion de la especie mayor 8 con la menor 3, dada la cantidad del mixto 30 libras de pólvora de 7 grados, y se hallarán por el cas. I 24 libras de 8 grados, y 6 de 3; luego siendo las dos cantidades 56 y 24 de pólvora de 8 grados, se dirá que entraron en la mezcla 80 libras de pólvora de 8 grados, 28 de 5, y 6 de 3, que todas forman 114 libras de 7 grados.

Si el mismo número de libras 114 se hubiera dividido de otra suerte, resultarían otras cantidades, que tambien satisfacen la cuestión.

A este modo si de las especies 8, 5, 3 se quisiera un mixto de 4, se ligaría 8 con 3, y despues 5 con 3, tomando siempre una especie mayor y otra menor.

Si de las especies 8, 7, 5, 3 se quiere un mixto

de 6, se ligará 8 con 3, despues 7 con 5, ó bien 8 con 5, y luego 7 con 3.

ESCOLIO IV. Si las especies 8, 5 y 3 se multiplican por sus respectivas cantidades 80, 28, 6, y la suma de los productos 798 se parte por la suma de las cantidades 114, el quociente dará 7, que es la especie del mixto, como se ve en el siguiente..... EXEMPLO.

Especies.	Cantidades.	Productos.
7 ... {	8 ... x ... 80 ... =	640
	5 ... x ... 28 ... =	140
	3 ... x ... 6 ... =	18
	114	798

798	114
798	
000	7 especie media.

ESCOLIO V. Lo que se ha dicho en la aligacion de la pólvora, se entiende en qualquiera otro mixto, como del oro. Por exemplo: de oro de 22 quilates y de 15 se quiere hacer una mezcla de 63 onzas de oro de 18 quilates, y se piden las onzas que han de entrar de cada especie.

Sea x el número de las onzas de oro de 22 quilates, serán las onzas de 15 quilates $63 - x$; y por el cas. 1 se hallará $x = 27$, que son las onzas de la especie mayor: luego $63 - x = 36$ son las onzas de la especie menor; y así en los demás casos.

ESCOLIO VI. Puede una especie no tener valor, como quando se liga oro con cobre, en cuyo caso se pone cero por la especie menor ó cobre; y en todo lo demás se obrará segun se ha dicho.

EXEMPLO. Se quieren componer 92 onzas de oro

de 20 quilates, mezclando cobre con oro de 23 quilates, y se pide la cantidad de una y otra especie.

Suponiendo x las onzas de oro de 23 quilates, serán las de cobre $92 - x$; y poniendo cero por la especie menor, se tendrán dispuestos los términos, y se hallarán por el cas. 1 80 onzas de la especie mayor, y 12 de la menor ó cobre, que juntas componen las 92 del mixto que se pide.

Espec.	EX.		Cantid.
	Difer.		
23	.. 20		$x = 80$
20			
0	 3		$92 - x = 12$
	32		92

LIBRO QUINTO.

DE LAS POTENCIAS Y RAICES.

CAPÍTULO I.

De la síntesis ó composición de las potencias.

Para la inteligencia de la extracción de las raíces importa mucho el conocimiento de la formación de las potencias, pues por los mismos grados que sube la raíz á la potencia, por los mismos se desciende de la potencia á la raíz.

DEFINICION I. Número quadrado ó potencia quadrada es el producto de dos números iguales, ó bien el de un número multiplicado por sí mismo; y así multiplicando los números 2, 2, el producto 4 será el quadrado, cuya raíz es 2; si se multiplica a por a , el producto $a a$, ó bien a^2 es el quadrado, y su raíz a .

DEFINICION II. Número cúbico ó potencia cúbica es el producto de tres números iguales, y así multiplicando los tres números 2, 2, 2, será el producto 8 la potencia cúbica, y su raíz 2.

Si se multiplican las tres cantidades iguales a, a, a , el producto $a a a$, ó bien a^3 , será la potencia cúbica, y su raíz a .

DEFINICION III. Potencias en general son los productos de la multiplicacion de un número por sí mismo una ó muchas veces. Las potencias se llaman tambien dignidades ó potestades, y son infinitas, por serlo las veces que la raíz puede multiplicarse por sí misma.

Á la raíz se le da el nombre de potencia 1^a , al quadrado el de potencia 2^a , al cubo el de potencia 3^a , y así en adelante, como parece en la siguiente tabla.

Potencias de a .	Potencias.	Potencias de 2.	Potencias de 3.
... a ...	... 1^a ...	... 2 ...	... 3 ...
... a^2 ...	... 2^a ...	... 4 ...	... 9 ...
... a^3 ...	... 3^a ...	... 8 ...	... 27 ...
... a^4 ...	... 4^a ...	... 16 ...	... 81 ...
... a^5 ...	... 5^a ...	... 32 ...	... 243 ...
... a^6 ...	... 6^a ...	... 64 ...	... 729 ...
... a^7 ...	... 7^a ...	... 128 ...	... 2187 ...
... a^8 ...	... 8^a ...	... 256 ...	... 6561 ...
... a^9 ...	... 9^a ...	... 512 ...	... 19683 ...
... a^{10} ...	... 10^a ...	... 1024 ...	... 59049 ...

Tambien se dice potencia del primer grado, segundo, del tercero &c.

LOS ÁRABES.		DIOFANTO Y VIETA.	
a	Raiz.....	Lado ó raiz.....	
a^2	Quadrado.....	Quadrado.....	
a^3	Cubo.....	Cubo.....	
a^4	Quadrado quadrado.....	Quadrado quadrado.....	
a^5	Supersólido primero.....	Quadrado cubo.....	
a^6	Quadrado de cubo.....	Cubo cubo.....	
a^7	Supersólido segundo.....	Quadrado quadrado cubo.....	
a^8	Quadrado de quadrado de quadrado.....	Quadrado cubo cubo.....	
a^9	Cubo de cubo de cubo.....	Cubo cubo cubo.....	
a^{10}	Quadrado de supersólido.....	Quadrado quadrado cubo cubo.....	
a^{11}	Supersólido tercero.....	Quadrado cubo cubo cubo.....	

Los antiguos diéron diversos nombres á las potencias : los que les diéron los Árabes , Diofanto y Vieta se contienen en la tabla antecedente , y en la siguiente estan los que les han dado otros autores.

NOMBRES.	CARACTERES.	
Lado.....	a	2
Plano.....	a^2	4
Sólido.....	a^3	8
Plano plano.....	a^4	16
Plano sólido.....	a^5	32
Sólido sólido.....	a^6	64
Plano plano sólido.....	a^7	128
Plano sólido sólido.....	a^8	256
Sólido sólido sólido.....	a^9	512
Plano plano sólido sólido.....	a^{10}	1024
Plano sólido sólido sólido.....	a^{11}	2048

DEFINICION IV. Exponente de la potencia es el número que indica su lugar ó grado, ó bien quantos factores iguales la producen; y así el exponente de la 1^a es 1, el de la 2^a ó del quadrado es 2, el de la 3^a ó cubo es 3 &c.

DEFINICION V. Subir una cantidad numérica á qualquiera potencia, es multiplicarla por sí misma tantas veces, menos una, como unidades tiene el exponente de la potencia.

EXEMPLO. Cubicar el número 2 es hallar el número 8 que resulta de la multiplicacion de la raiz 2, 2, 2, esto es, $2 \times 2 = 4$, y $2 \times 4 = 8$. Cubicar la cantidad ab es hallar el producto $aaabbb$, ó bien $a^3 b^3$, que proviene de la multiplicacion de ab por ab , y del producto $a^2 b^2$ por ab .

ESCOLIO. Si la raiz se multiplica por sí misma, se tendrá la potencia 2^a : si esta se multiplica por la raiz, se tendrá la potencia 3^a : si esta se multiplica por la raiz, se tendrá la potencia 4^a &c. como se ve en el exemplo.

EX.

$$\begin{array}{ll} 2 \times 2 = 4 & \text{potencia } 2^a \\ 4 \times 2 = 8 & \text{potencia } 3^a \\ 8 \times 2 = 16 & \text{potencia } 4^a \end{array}$$

PROPOSICION I. PROBLEMA.

Levantar una cantidad á qualquier potencia.

EXEMPLO. Se ha de subir á la potencia quadrada el número 34.

RESOLUCION. Multiplíquese el número 34 por 34, y el producto 1156 será el quadrado.

Si el mismo número 34 se hubiere de subir á la potencia cúbica, se multiplicará 34 por 34, y se tendrá el quadrado 1156, que multiplicado por 34, dará el cubo 39304; y continuando la multiplicacion por 34, se hallarán todas las potencias de dicho número.

En las cantidades literales incomplexas se hallan las potencias multiplicando los coeficientes por sí mismos (def. xv), y el exponente de cada letra por el exponente de la potencia que se pide.

EXEMPLO. Si la cantidad $3 a b$ se ha de subir al segundo grado, será $9 a^2 b^2$: si al tercer grado, será $27 a^3 b^3$: si al cuarto grado ó potencia quarta, será $81 a^4 b^4$ &c.

Si la raíz $a b^2$ se quiere subir á la potencia segunda ó al quadrado, se multiplicará cada exponente por dos, y será $a^2 b^4$: si se pide la potencia tercera ó cúbica, se multiplicará cada exponente por 3, y se tendrá $a^3 b^6$ &c. Si la raíz es un complexo, como $a + b$, se hallarán sus potencias por su continua multiplicacion, como parece en el siguiente EXEMPLO.

$$\begin{array}{r}
 \text{Raíz} \dots\dots\dots a + b \\
 \qquad \qquad \qquad a + b \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad ab + b^2 \\
 \qquad a^2 + \quad ab \\
 \hline
 \text{Quadrado} \dots\dots a^2 + 2ab + b^2 \\
 \qquad \qquad \qquad a + b \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
 \qquad a^3 + 2a^2b + \quad ab^2 \\
 \hline
 \text{Cubo} \quad a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
 \end{array}$$

Obrando como se ha dicho se tendrán todas las potencias de $a + b$, con las cuales se hará la tabla Sintético-Analítica, que servirá de formulario para la extraccion de qualquiera raíz; pues en ella se encuentran todos los productos de que se compone qualquiera potencia quando la raíz se divide en dos partes a y b .

a	b	TABLA SINTÉTICO-ANALÍTICA.									
a^2	$2ab$	b^2									
a^3	$3a^2b$	$3ab^2$	b^3								
a^4	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	b^4							
a^5	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	b^5						
a^6	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	b^6					
a^7	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	b^7				
a^8	$8a^7b$	$28a^6b^2$	$56a^5b^3$	$70a^4b^4$	$56a^3b^5$	$28a^2b^6$	$8ab^7$	b^8			
a^9	$9a^8b$	$36a^7b^2$	$84a^6b^3$	$125a^5b^4$	$125a^4b^5$	$84a^3b^6$	$36a^2b^7$	$9ab^8$	b^9		
a^{10}	$10a^9b$	$45a^8b^2$	$120a^7b^3$	$210a^6b^4$	$252a^5b^5$	$210a^4b^6$	$120a^3b^7$	$45a^2b^8$	$10ab^9$	b^{10}	

ESCOLIO I. Suponiendo la primera parte de la raíz $= a$, y la segunda $= b$, se hallará que la potencia segunda es $a^2 + 2ab + b^2$; y quiere decir que el quadrado de toda la raíz se compone del quadrado de la primera parte, mas dos productos de la primera parte, por la segunda mas del quadrado de la segunda.

$$\begin{array}{rcl}
 a+b & = & 30+4 \\
 a+b & = & 30+4 \\
 \hline
 ab+b^2 & = & 120+16 \\
 a^2+ab & = & 900+120 \\
 \hline
 a^2+2ab+b^2 & = & 900+240+16=1156
 \end{array}$$

EXEMPLO. Sea la raíz 34 dividida en dos partes:

la primera de las quales sea 30, y la segunda 4; será $a = 30$, $b = 4$, y por consiguiente $a + b = 30 + 4$; y hecha la multiplicacion, se hallará que toda la suma es 1156; porque siendo la raíz $30 + 4$, multiplicándola por sí misma, esto es, por $30 + 4$, será $a^2 = 900$ quadrado de 30, $2ab = 240$ duplo producto de 30×4 , $b^2 = 16$ quadrado de 4, cuyos productos componen el quadrado total 1156, igual al quadrado de $a + b$, esto es, al quadrado de 34; porque el quadrado de la primera parte es 900, el de la segunda 16, y el duplo producto de las partes es 240, que hacen los 1156 quadrado de $30 + 4$.

ESCOLIO II. Los productos que corresponden á la potencia tercera son $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, cuya expresion quiere decir que si la raíz se halla dividida en dos partes, como a y b , el cubo de la toda se compone de los productos siguientes, esto es:

de a^3 cubo de la primera parte.

de $3a^2b$ { triplo del quadrado de la primera parte
multiplicado por la segunda.

de $3ab^2$ { triplo de la primera parte multiplicado por
el quadrado de la segunda.

y de b^3 cubo de la segunda.

EXEMPLO. Sea la raíz 34 dividida en dos partes, la primera de las quales sea 30, y la segunda 4, será $30 + 4 = a + b$, y por consiguiente será $a^3 = 27000$ cubo de 30.

$3a^2b = 10800$ triplo quadrado de 30×4 .

$3ab^2 = 1440$ triplo de 30×16 quadrado de 4.

$b^3 = 64$ cubo de 4.

total . . . 39304 cubo de $30 + 4 = 34$.

A este modo se hallarán los productos de que se compone qualquiera potencia.

ESCOLIO III. Cada potencia se compone de un término mas de lo que indica su exponente; y así

los de la potencia segunda son $a^2 + 2ab + b^2$. La potencia tercera se compone de quatro términos, que son $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. La potencia quarta consta de cinco términos, que son $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ &c.

ESCOLIO IV. Los términos extremos de qualquiera potencia tienen el mismo exponente que la potencia; y así en la segunda sus términos extremos son a^2, b^2 , en la tercera a^3, b^3 , y en la quarta a^4, b^4 &c.

ESCOLIO V. Los términos intermedios son los productos de las potencias de a por las potencias de b , y la suma de sus exponentes es igual al de la misma potencia; y así en la potencia quarta los términos intermedios son $4a^3b, 6a^2b^2, 4ab^3$, y la suma de los exponentes en cada término siempre es 4.

ESCOLIO VI. Si á todos los términos de qualquiera potencia se quitan los coeficientes, quedarán dichos términos continuos proporcionales en la razon de $a : b$.

EXEMPLO. En la potencia tercera quitados los coeficientes, se tendrá a^3, a^2b, ab^2, b^3 , que son continuos proporcionales; esto es $\dots a^3 : a^2b :: a : b$ porque (lem. 1) $\dots a^3b = a^3b$ tambien $\dots a^2b : ab^2 :: a : b$ porque (lem. cit.) $\dots a^2b^2 = a^2b^2$ asimismo $\dots ab^2 : b^3 :: a : b$ porque $\dots ab^3 = ab^3$ luego a^3, a^2b, ab^2, b^3 son continuos proporcionales en la razon de $a : b$.

COROLARIO. De aquí se sigue que entre dos cuadrados a^2, b^2 hay un medio geométrico ab ; y entre dos cubos a^3, b^3 hay dos medios geométricos, que son a^2b, ab^2 .

ESCOLIO VII. Los coeficientes de todas las potencias se pueden hallar sumándolos como se sigue.

Potencia 1. ^a	1 + 1	
	1 + 1	
Potencia 2. ^a	1 + 2 + 1	
	1 + 2 + 1	
Potencia 3. ^a	1 + 3 + 3 + 1	
	1 + 3 + 3 + 1	
Potencia 4. ^a	1 + 4 + 6 + 4 + 1	
	1 + 4 + 6 + 4 + 1	
Potencia 5. ^a	1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1	

COROLARIO. De aquí y lo dicho antecedentemente se infiere la facilidad de encontrar todos los términos de qualquier potencia con sus coeficientes, letras y exponentes, sin la molestia de multiplicar continuamente $a + b$.

ESCOLIO VIII. Las sumas de todos los coeficientes de los términos de las potencias son continuos proporcionales, como 2, 4, 8 &c.

Potencias	{	1. ^a .. 1 + 1	2	} Sumas.
		2. ^a .. 1 + 2 + 1	4	
		3. ^a .. 1 + 3 + 3 + 1	8	
		4. ^a .. 1 + 4 + 6 + 4 + 1	16	
		5. ^a .. 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 ..	32	

PROPOSICION II. TEOREMA.

Si á un número quadrado se añade el duplo de su raíz mas la unidad, se tendrá el quadrado próximo mayor.

EXPLICACION. Sea el quadrado a^2 , y añadiéndole $2a + 1$ duplo de su raíz a mas la unidad, se tendrá $a^2 + 2a + 1$, que será el quadrado próximo mayor.

DEMOSTRACION. Siendo la raíz del quadrado
TOM. I.

dado a , si se le añade 1, se tendrá $a + 1$ por la raíz del próximo mayor, respecto de excederse en la unidad las dos raíces; pero el cuadrado de $a + 1$ es $a^2 + 2a + 1$, el mismo que a^2 junto con el duplo de su raíz mas la unidad: luego si á un número cuadrado &c.

EN NÚMEROS. Sea la raíz 3, cuyo cuadrado es 9; y añadiéndole 6 duplo de la raíz, se tendrá 15; y añadiendo la unidad, se tendrá 16, que es el cuadrado próximo mayor.

Tambien si á 16 se añade 8, duplo de su raíz 4, se tendrá 24, y junto con la unidad será 25, que es el cuadrado próximo mayor; y así de los demás.

PROPOSICION III. TEOREMA.

Si á un número cúbico se añade el triplo del cuadrado de la raíz mas el triplo de la raíz mas la unidad, se tendrá el cubo próximo mayor.

EXPLICACION. Sea el cubo a^3 , y añadiéndole $3a^2 + 3a + 1$ triplo del cuadrado de su raíz a , mas el triplo de la misma raíz, mas la unidad, se tendrá $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, que será el cubo próximo mayor.

DEMOSTRACION. Siendo la raíz del cubo dado a , si se le añade 1, se tendrá $a + 1$ por la del próximo mayor, respecto de excederse en la unidad las dos raíces; pero el cubo de $a + 1$ es $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, el mismo que a^3 junto con el triplo del cuadrado de su raíz, mas el triplo de la raíz, mas la unidad: luego si á un número cúbico &c.

EN NÚMEROS. Sea 8 el número cúbico, será su raíz 2, y el cuadrado 4, cuyo triplo es 12; el triplo de la raíz 2 es 6; y sumando 8, 12, 6 y 1, se tendrá 27, que es el cubo próximo mayor.

ESCOLIO. Por la continua multiplicacion de $a + 1$ se hallarán todas las potencias, cuyas raices se exceden en la unidad.

PROPOSICION IV. TEOREMA.

Los quadrados estan en razon duplicada de la de sus raices, los cubos en triplicada &c.

DEMOSTRACION. La razon de $aa : bb$ es compuesta de las dos razones iguales $a : b, a : b$; luego (def. XII lib. III) es duplicada de qualquiera de ellas, y por consiguiente los quadrados a^2, b^2 estan en la razon duplicada de sus raices a, b .

Tambien la razon de $a^3 : b^3$ es compuesta de las tres razones iguales $a : b, a : b, a : b$; luego es triplicada de qualesquiera de ellas, y por consiguiente los cubos a^3, b^3 estan en razon triplicada de sus raices a, b ; y á este modo en las demás potencias.

EN NÚMEROS. La razon de $16 : 9$ es compuesta de las dos razones iguales $4 : 3, 4 : 3$; luego es duplicada de qualesquiera de ellas, y por consiguiente los quadrados 16 y 9 estan en razon duplicada de sus raices 4 y 3 .

Tambien los cubos 64 y 27 estan en razon triplicada de sus raices 4 y 3 ; porque está compuesta de las tres razones iguales $4 : 3, 4 : 3, 4 : 3$.

ESCOLIO. Si tres cantidades son continuas proporcionales, el quadrado de la primera al quadrado de la segunda tendrá la misma razon que la primera á la tercera.

EXPLICACION. Sean continuas pro- }
porcionales } $+: a, b, c$
esto es $a : b :: b : c$
digo que será $a^2 : b^2 :: a : c$

DEMOSTRACION. Siendo por lo su- } .. $a : b :: b : c$
 puesto }
 será (lem. I lib. III) $a c = b^2$
 y multiplicando por $a = a$
 será (ax. v) $a^2 c = a b^2$
 luego (II part. lem. cit.) $a^2 : b^2 :: a : c$
 Tambien si se tienen quatro cantidades continuas
 proporcionales , será, el cubo de la primera al cubo
 de la segunda como la primera á la quarta , esto es,
 sean continuas proporcionales $+: a, b, c, d$
 será $a^3 : b^3 :: a : d$
 porque siendo por lo supuesto $a : b :: b : c$, } .. $a c = b^2$
 será (lem. I lib. III) }
 tambien $b : c :: c : d$; y (prop. XI lib. III)
 $a : b :: c : d$; luego (lem. cit.) $a d = b c$
 y (ax. v) $a^2 c d = b^3 c$
 Partiendo por $c = c$
 se tendrá (ax. cit.) $a^2 d = b^3$
 y multiplicando por $a = a$
 será $a^3 d = a b^3$
 luego (II part. lem. cit.) proporcionales .. $a^2 : b^3 :: a : d$

PROPOSICION V. TEOREMA.

*Si las raices son proporcionales , tambien lo serán
 las potencias del mismo grado.*

EXPLICACION. Sean proporcionales } .. $a : b :: c : d$
 las raices }
 si se multiplican por las mismas $a : b :: c : d$
 se tendrán proporcionales las potencias $a^2 : b^2 :: c^2 : d^2$
 EN NÚMEROS. Si las raices $8 : 4 :: 6 : 3$
 se multiplican por las raices $8 : 4 :: 6 : 3$
 se tendrán proporcionales los qua- } .. $64 : 16 :: 36 : 9$
 drados }

La demostracion consta del cor. IV lem. I lib. III.

CAPÍTULO II.

De la analisis ó resolucion de las potencias , esto es, de la extraccion de las raices.

DEFINICION VI. **S**acar la raiz de una cantidad ó potencia , es hallar el número que la produce por su continua multiplicacion ; y así extraer la raiz cúbica del número 8 , es buscar el número 2.

ESCOLIO. Para facilitar las operaciones deben tenerse muy presentes ó de memoria las potencias de los números dígitos , singularmente de los quadrados y cubos , que contiene la siguiente tabla.

Raices	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrados	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubos	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Tambien se han de tener presentes los formularios de la tabla Sintético-Analítica , á lo menos los del quadrado y cubo , que son los siguientes.

Quadrado $a^2 + 2 a b + b^2$

Cubo $a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$

PROPOSICION VI. PROBLEMA.

Sacar la raiz quadrada de qualquier incomplexo literal.

RESOLUCION. Lo primero : sáquese la raiz del coeficiente ; y lo segundo , escríbase cada letra con la mitad de su exponente.

EXEMPLO I. Pídese la raiz quadrada de $4 a^6$.

La raíz del coeficiente 4 es 2, y la mitad del exponente 6 es 3; luego la raíz que se busca es $2a^3$.

EXEMPLO II. Pídesse la raíz quadrada de $a^2 b^8$. Porque el coeficiente es 1, basta sacar la mitad de cada exponente, y se tendrá $a b^4$ por la raíz que se busca.

ESCOLIO. Si el coeficiente no tiene raíz justa, ó algun exponente no tiene mitad, se indica la raíz anteponiéndola el signo radical $\sqrt{}$; y así la raíz de las cantidades $5a^2$, $4a^3$, $a^2 b$, será $\sqrt{5a^2}$, $\sqrt{4a^3}$, $\sqrt{a^2 b}$; cuyas expresiones quieren decir raíz de $5a^2$, raíz de $4a^3$, y raíz de $a^2 b$.

PROPOSICION VII. PROBLEMA.

Sacar la raíz quadrada de qualquier complexô literal.

RESOLUCION. Habiendo de sacar la raíz quadrada de $a^2 + 2ab + b^2$; lo primero, sáquese la raíz quadrada del primer tér-

mino a^2 , que es a : escríbase aparte; y formando el quadrado de ella, réstese del quadrado dado, y quedará $2ab + b^2$ por el residuo primero.

Lo segundo: dóblese la raíz hallada, y se tendrá $2a$ por divisor: pártase $2ab$ por $2a$, y se hallará el quociente b , que se pondrá en la raíz, por ser la segunda parte de ella: multiplíquese $2a$ por b , y se tendrá $2ab$; y añadiendo el quadrado de b , que es b^2 , será el substraendo $2ab + b^2$, que restado del residuo primero, dará 0 por el residuo segundo; y se dirá que la raíz quadrada de la cantidad propuesta es $a + b$.

	EX.	
	$a^2 + 2ab + b^2$	$\overline{)a + b}$
	$- a^2$	
Res. 1. ^o ...	$0 \quad 2ab + b^2$	$\overline{)2a \text{ div.}}$
	$- 2ab - b^2$	$\quad b$
Res. 2. ^o ...	0	

PROPOSICION VIII. PROBLEMA.

Sacar la raíz quadrada de qualquier número.

RESOLUCION. Lo primero ; porque el exponente del quadrado es 2 , divídase de dos en dos las notas del número que sea propuesto , empezando por la derecha , y tendrá la raíz tantas notas como hubiere casillas ó divisiones.

Lo segundo : sáquese la raíz quadrada de la cantidad de la primera casilla de la izquierda ; y si no la tuviere justa , tómese la del número próximo menor , escribiendo aparte la raíz hallada : réstese su quadrado de la cantidad de dicha casilla , y se tendrá la diferencia , á cuya derecha escribiendo las notas que se baxarán de la casilla siguiente , se tendrá el residuo primero.

Lo tercero: dóblese la raíz hallada , y añadiendo un o por regla general , se tendrá el divisor , por el qual se partirá el residuo primero ; y el quociente será la parte segunda de la raíz , que se pondrá al lado de la primera : multiplíquese el quociente por el divisor , añádase al producto el quadrado del quociente , y la suma réstese del residuo primero para tener el segundo.

EXEMPLO. Pídese la raíz quadrada de 1156.

RESOLUCION. Divídase las notas del número dado de dos en dos , y se tendrán dos casillas , en la primera de las quales se halla 11 , cuya raíz quadrada próxima es 3 , que se escribe aparte (ex. 1) : el quadrado de 3 es 9 , que restado de 11 , quedan 2 , y baxando las notas de la casilla siguiente , se tendrá 256 por el residuo primero : dóblese la raíz hallada , y añadiendo un o por

EX. I.		
	11,56	34
	9	
Res. 1.º . . .	256	60
	240	4
	16	
	256	
Res. . 2.º . . .	0	

regla general , se tendrá el divisor 60 : pártase 256 por 60 , y se hallará el quociente 4 , segunda parte de la raíz , que se pondrá al lado de la primera : multiplíquese 60 por 4 , y añádase al producto 240 , el quadrado de 4 , que es 16 , y se tendrá 256 , cuyo número restado del residuo primero , dará 0 ; y por consiguiente se dirá que la raíz quadrada de 1156 es 34.

El fundamento de esta operacion consiste en considerar la raíz que se busca , como si fuese $a + b$, cuyo quadrado es $a^2 + 2ab + b^2 = 1156$; luego si de esta cantidad se resta $a^2 = 900$, quedará 256 por el valor del duplo producto de las partes : mas el quadrado de la segunda , cuya práctica se manifiesta en el formulario literal de este modo.

Porque tres decenas , ó bien 30 unidades es la primera parte a , su quadrado $a^2 = 900$, el divisor

a^2	=	900
$2ab$	=	240
b^2	=	16
$a^2 + 2ab + b^2$	=	1156

$2a = 60$, y el quociente $4 = b$; será $2ab = 240$, $b^2 = 16$, y la suma $a^2 + 2ab + b^2 = 900 + 240 + 16 = 1156$.

Lo quarto : quando las casillas fueren mas de dos , se repite la operacion baxando las notas de la casilla siguiente , y doblando la raíz hallada , se añadirá el 0 para tener el divisor.

Si al quociente viniere 0 , se escribe en la raíz , y se baxan las notas de la otra casilla , todo lo qual se verá practicado en el exemplo siguiente.

EXEMPLO II. Pídese la raíz quadrada del número 1163219236.

RESOLUCION. Empezando por la primera casilla , porque 11 no tiene raíz justa , se tomará la del número próximo menor , que es 3 , y su quadrado 9 restado de 11 dará la diferencia 2 : bájese 63 de la segunda casilla , y será el residuo primero 263 : dó-

blese la raíz hallada, y añadiendo un 0, se tendrá el divisor 60; y partiéndolo 263 por 60, dará al quociente 4, segunda parte de la raíz: multiplíquese 60 por 4, y al producto 240 añádase 16 quadrado de 4, y se tendrá 256, que restado de 263, será la diferencia 7, la qual junta con 21 que

EX. II.

$$\begin{array}{r}
 11,63,21,92,36 \quad | \quad 34106 \\
 \underline{9} \\
 \text{Res. 1.º} \dots 263 \quad | \quad 60 \text{ div. 1.º} \\
 \underline{240} \quad 4 \\
 \underline{16} \\
 256 \\
 \text{Res. 2.º} \dots 721 \quad | \quad 680 \text{ div. 2.º} \\
 \underline{680} \quad 1 \\
 \underline{1} \\
 681 \\
 \text{Res. 3.º y 4.º} \dots 409236 \quad | \quad 68200 \text{ div. 3.º} \\
 \underline{409200} \quad 6 \quad \text{y 4.º} \\
 \underline{36} \\
 409236 \\
 \text{Res. 5.º} \dots 0
 \end{array}$$

se baxará de la tercera casilla, compondrá 721 por el residuo segundo: dóblese 34 de la raíz hallada, y añadiendo un 0, se tendrá 680 por el divisor del residuo segundo: pártase 721 por 680, y el quociente 1 será la tercera parte de la raíz: multiplicando 680 por la raíz hallada 1, y añadiendo el quadrado de 1, se tendrá 681, que restado de 721, dará la diferencia 40; báxese 92 de la quarta casilla, y se tendrá 4092 por el residuo tercero: dóblese la raíz hallada 341, y se tendrá 682, á que añadiendo un 0, compondrá 6820 por el divisor del residuo tercero; y porque dicho divisor es mayor que el dividendo, se pondrá un 0 en la raíz; y baxando 36 de la quinta casilla, se tendrá 409236 por el residuo quarto: dóblese la raíz hallada 3410, y se tendrá 6820, á que añadiendo un 0, compondrá 68200 por el divisor del residuo quarto; y partiendo el residuo tercero y

quarto por el nuevo divisor , se hallará el quociente 6; multiplíquese 68200 por el quociente 6, y al producto 409200 añádase 36 quadrado de la raíz 6 , cuya suma 409236 se restará del residuo quarto , resultando o por el residuo quinto ; y se dirá que la raíz del número propuesto es 34106.

ESCOLIO I. De otros modos se puede sacar la raíz quadrada mas brevemente ; pero en este se procede con mas claridad , y menos contingencia de errar.

ESCOLIO II. Si concluida la operacion sobrare algo , se hará una fraccion , poniendo por numerador el residuo , y por denominador el duplo de la raíz hallada mas la unidad.

EXEMPLO. Pídese la raíz quadrada de 629 : la raíz quadrada del número propuesto es 25 , y sobran 4 ; luego doblando 25 , y añadiendo la unidad , se tendrá 51 , que se pondrá por denominador de la fraccion , cuyo numerador será el residuo 4 ; y se dirá que la raíz próxima de 629 es $25\frac{4}{51}$.

629	25 ⁴ ₅₁
4	
292	40
200	5
25	
225	
4	

ESCOLIO III. En qualquiera operacion se ha de observar que nunca sobre el duplo de la raíz mas la unidad ; porque á suceder esto , el quociente seria pequeño , y por lo mismo deberia aumentarse.

ESCOLIO IV. Para la prueba se ha de quadrar toda la raíz , y añadir lo que sobró ; y si la suma fuere igual á la cantidad que se propuso , la operacion estará buena ; y así (en el último exemplo) multiplicando 25 por 25 , se tendrá 625 ; y añadiéndole el residuo 4 , será la suma 629 igual al número dado : luego la operacion está bien hecha.

PROPOSICION IX. PROBLEMA.

Sacar la raíz cúbica de qualquier número.

EXEMPRO I. Pídese la raíz cúbica de 13824.

RESOLUCION. Lo primero: EX. I.
 porque el exponente del cubo 13,824 | 24
 es 3, divídanse las notas del nú- 8
 mero propuesto de tres en tres, Res. 1.^o 5824 | 1260
 empezando por la derecha; y 5824 4
 siendo en el presente exemplo Res. 2.^o 0000
 dos las casillas, serán dos las operaciones que deben hacerse, y por consiguiente dos las notas de la raíz.

Lo segundo: la raíz cúbica de 13 es 2, y su cubo es 8, que restado de 13, quedan 5, y baxando las notas de la casilla siguiente, se tendrá 5824 por el residuo primero.

Lo tercero: para la segunda operacion se formarán aparte cinco clases: la primera será de los coeficientes: la segunda de la raíz hallada, y sus potencias: la tercera de los divisores: la quarta del quociente y sus potencias; y la quinta de los restadores, como en la siguiente tabla.

Coef.	Pot. de a	Divisores.	Pot. de b	Restadores.
3.....	² a = 400	² 3 a = 1200	b = 4	² 3 a b = 4800
3.....	a = 20	3 a = 60	² b = 16	² 3 a b = 960
		² 3 a + 3 a = 1260	³ b = 64	³ b = 64
				² 3 a b + 3 a b + ³ b = 5824
Potencia cúbica..... ³ a + 3 a b + 3 a b + b = 13824.				

Puestos los coeficientes de los términos intermedios de la potencia cúbica, que son 3 y 3, se pondrá en la segunda clase a , y en la parte superior de la misma a^2 ; enfrente de a la raíz hallada 2 con un 0, que será 20; y enfrente de a^2 su quadrado, que es 400; y multiplicando las cantidades de las dos clases, se tendrán las de la tercera, esto es, $3 \times a^2 = 3 a^2 = 3 \times 400 = 1200$, y $3 \times a = 3 a = 3 \times 20 = 60$, y la suma de los dos divisores será $3 a^2 + 3 a = 1200 + 60 = 1260$; pártase 5824 por 1260, y el quociente 4 se pondrá en la raíz. Para la quarta clase se escribirá en la parte superior b , y debaxo sus potencias b^2 , b^3 , y enfrente de b se pondrá el quociente 4; enfrente de b^2 su quadrado 16, y enfrente de b^3 su cubo 64, y se tendrá la quarta clase: multiplicando las cantidades de la tercera clase por las de la quarta, se tendrán los productos que componen la quinta, esto es, $3 a^2 \times b = 3 a^2 b = 1200 \times 4 = 4800$, $3 a \times b^2 = 3 a b^2 = 60 \times 16 = 960$; escribase tambien en esta quinta clase $b^3 = 64$; porque no tiene con quien multiplicarse; y sumando las partidas de dicha clase, se tendrá $3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3 = 4800 + 960 + 64 = 5824$, que restado del residuo primero, quedará 0 por el segundo, y se dirá que la raíz cúbica del número propuesto es 24.

Esta disposicion conviene con el formulario del cubo, pues en la linea superior de las clases se halla $3 a^2 b$, en la media $3 a b^2$, y en la inferior b^3 ; y es general para todas las raices.

Si la raíz tuviere mas de dos notas, se hará la tercera operacion del mismo modo que la segunda, formando las cinco clases, y añadiendo á toda la raíz hallada un 0 para tener el valor de a , y en todo lo demás se procede como en la operacion segunda.

EXEMPLO II. Pídese la raíz cúbica de 80621568.

RESOLUCION. Hecha la division de tres en tres notas, como se ha dicho, se hallará que la raíz cúbica de la primera parte es 4, y su cubo 64, que restado de 80, quedan 16, y baxando las notas de la casilla

EX. II.

$$\begin{array}{r}
 80,621,568 \quad | 432 \\
 \underline{64} \\
 \text{Res. I.}^{\circ} \quad 16621 \quad | 4920 \text{ div. I.}^{\circ} \\
 \underline{15507} \quad 3 \\
 \text{Res. 2.}^{\circ} \quad 1114568 \quad | 555990 \text{ div. 2.}^{\circ} \\
 \underline{1114568} \quad 2 \\
 \text{Res. 3.}^{\circ} \quad 0000000
 \end{array}$$

siguiente 621, se tendrá 16621 por el residuo primero. Hechas las cinco clases, como en el exemplo antecedente, se hallará el partidor 4920, y será el quociente 3, y continuando la operacion, se hallará el restador 15507: hecha la resta, se tendrá 1114, y baxando las notas de la tercera casilla, se tendrá 1114568 por el residuo segundo.

Coef.	Pot. de a	Divisores.	Pot. de b	Restadores.
3....	$a^2 = 1600$	$3a^2 = 4800$	$b = 3$	$3a^2b = 14400$
3....	$a = 40$	$3a = 120$	$b^2 = 9$	$3ab^2 = 1080$
			$b^3 = 27$	$b^3 = 27$
		$3a^2 + 3a = 4920$		$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 15507$
3....	$a^2 = 184900$	$3a^2 = 554700$	$b = 2$	$3a^2b = 1109400$
3....	$a = 430$	$3a = 1290$	$b^2 = 4$	$3ab^2 = 5160$
			$b^3 = 8$	$b^3 = 8$
		$3a^2 + 3a = 555990$		$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1114568$

Para la tercera operacion se harán las cinco clases

tomando la raiz hallada 43, y añadiendo un o para tener el valor de $a = 430$, cuyo quadrado 184900 será el valor de a^2 : hecha despues la multiplicacion por los coeficientes, se tendrá el partidior 555990; el quociente 2 por el valor de b , su quadrado 4 por el valor de b^2 , y el cubo 8 por el valor de b^3 ; y prosiguiendo la operacion segun se ha dicho, se hallará el restador 1114568, que restado del residuo segundo, dará o por el tercero, y será toda la raiz cúbica del número propuesto 432.

ESCOLIO I. Si haciendo la particion, el quociente fuere o, se pondrá en la raiz, y se baxarán las notas de la casilla siguiente.

ESCOLIO II. Si la suma de los restadores fuere mayor que el residuo, el quociente se hará menor, y dexando los números de las otras clases antecedentes, solo habrá que corregir los de la quarta y quinta.

ESCOLIO III. Si concluida la última operacion, sobrare algo, se hará una fraccion poniendo sobre una linea lo que sobró, y debaxo el triplo del quadrado de la raiz mas el triplo de la raiz mas la unidad.

EXEMPLO. Pídesse la raiz cúbica de 47468.

La raiz cúbica del número propuesto es 36, y sobran 812; luego el triplo del quadrado de la raiz es 3888, el triplo de la raiz es 108, y añadiendo la unidad, se tendrá 3997; y se dirá que la raiz cúbica próxima es $36\frac{812}{3997}$.

EX.

$$\begin{array}{r|l}
 47468 & 36\frac{812}{3997} \\
 27 & \\
 \hline
 20468 & 2790 \\
 19656 & 6 \\
 \hline
 & 812
 \end{array}$$

ESCOLIO IV. En qualquiera operacion sacando la raiz cúbica, no puede sobrar el triplo del quadrado de la raiz mas el triplo de la raiz mas la unidad.

ESCOLIO V. La prueba de esta regla es subir á la

potencia cúbica lo que hubiere salido de raíz, y añadir lo que sobró.

EXEMPLO. La raíz cúbica de 47468 es 36, y sobran 812; súbase 36 á la tercera potencia, y añadiendo 812 que sobraron, será la suma igual al número propuesto.

ESCOLIO VI. Algunas veces se indica la raíz anteponiéndola el signo radical $\sqrt{}$ con el exponente de la misma potencia; y así para indicar la raíz cúbica de 7, se escribe $\sqrt[3]{7}$; y á este modo en las demás potencias, poniéndola su propio exponente.

PROPOSICION X. PROBLEMA.

Sacar la raíz quadrada quadrada de qualquier número.

EXEMPLO. Pídesese la raíz quadrada quadrada del número 279841.

RESOLUCION. Porque el exponente de la quarta potencia es 4, se dividirá el número propuesto de quatro en quatro notas empezando por

	EX.	
	27,9841	23
	16	
Res. 1.º	119841	34480 div. 1.º
	119841	3
Res. 2.º	000000	

la derecha, y sacando la raíz quadrada quadrada de 27, se hallará 2, y sobran 11; y baxando la casilla siguiente, se tendrá 119841 por el residuo primero.

Para la segunda operacion se formarán las cinco clases, atendiendo al formulario de la potencia quarta $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; en donde los coeficientes de los términos intermedios son 4, 6, 4, que se pondrán en la primera clase. Por haber quitado a^4 en la primera operacion, quedarán para la segunda clase a^3, a^2, a , y para la quarta b, b^2, b^3, b^4 .

Coef.	Pot. de a	Divisores.	Pot. de b	Restadores.
4.....	$a^3 = 8000$	$4 a^3 = 32000$	$b^3 = 3$	$4 a^3 b^3 = 96000$
6.....	$a^2 = 400$	$6 a^2 = 2400$	$b^2 = 9$	$6 a^2 b^2 = 21600$
4.....	$a = 20$	$4 a = 80$	$b^3 = 27$	$4 a^3 b^3 = 2160$
			$b^4 = 81$	$b^4 = 81$
		34480		119841
Potencia quarta..... $a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 a b^3 + b^4$				

Con esta disposicion, la raiz hallada es 2, y añadiéndole un 0, será 20 por el valor de a , su quadrado 400 valor de a^2 , y su cubo 800 valor de a^3 ; multiplicando las cantidades de la primera clase por las de la segunda, se tendrán las de la tercera, cuya suma 34480 es el divisor, y haciendo la particion, se hallará el quociente 3, cuyas potencias son 9, 27, 81; multiplicando las cantidades de la tercera y quarta clase, se tendrán las de la quinta, cuya suma 119841 es el restador, que quitado del residuo primero, dará 0 por el segundo, y por consiguiente la raiz quadrada quadrada del número propuesto es 23.

De este modo es facil sacar la raiz de otra qualquiera potencia mayor, como del grado quinto, sexto &c. usando del formulario correspondiente á la potencia de la raiz que se hubiere de extraer: sí bien que para la práctica basta tener los coeficientes, pues con solos ellos se pueden formar las cinco clases.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

Aproximar qualquiera raiz irracional.

Quando el número no es quadrado perfecto, la raiz es irracional, y no puede expresarse en núme-

ros, pero sí aproximarse al infinito, de este modo.

Añádanse al último residuo tantos ceros como unidades tenga el exponente de la raíz que se hubiere de sacar, esto es, dos ceros para la quadrada, tres para la cúbica &c.; y continuando otra vez la operacion, se hallará otra nota de raíz: si esta se quiere mas próxima, se añadirán otros tantos ceros al último residuo, y prosiguiendo la operacion, se encontrará otra nota; y así al infinito.

La primera nota en la aproximacion expresará décimas, la segunda centésimas, la tercera milésimas, la quarta diez milésimas &c.

EXEMPLO. Aproximar la raíz quadrada de 1815.

RESOLUCION. Sacando la raíz quadrada de 1815, se hallará que la próxima menor en números enteros es 42, y sobran 51; añadiendo dos ceros se tendrá 5100; y continuando la operacion, se hallará otra nota 6, y el residuo tercero 24, que añadiéndole dos ceros, será 2400; y prosiguiendo de este modo, se verá que despues de seis operaciones se tiene de raíz 42.6028, que será un entero y quebrado, el en-

	EX.	
	18,15	42.6028
	16	
Res. 1. ^o ..	215	80
	160	2
	4	
	164	
Res. 2. ^o ...	5100	840
	5040	6
	36	
	5076	
Res. 3. ^o y 4. ^o ..	240000	85200
	170400	2
	4	
	170404	
Res. 5. ^o	6959600	852040
	5816320	
	64	
	6816384	
Res. 6. ^o	143216	&c.

tero 42, y las notas siguientes el numerador de un quebrado, cuyo denominador es la unidad con otros tantos ceros como notas tiene el numerador; y por consiguiente se dirá que la raíz próxima menor del número propuesto es $42.\frac{6028}{10000}$.

PROPOSICION XII. PROBLEMA.

Sacar la raíz que se quiera de un quebrado.

RESOLUCION. Sáquese la raíz del numerador y la del denominador: fórmese de ambas un quebrado, y este será la raíz que se pide.

EXEMPLO. Pídese la raíz quadrada de $\frac{4}{9}$. Sacando la raíz del numerador 4, que es 2, y la del denominador 9, que es 3, se tendrá $\frac{2}{3}$ por la raíz quadrada que se pide de $\frac{4}{9}$.

Si se quiere la raíz cúbica de $\frac{27}{64}$, sacando la raíz de 27, que es 3, y la de 64, que es 4, se tendrá $\frac{3}{4}$ por la raíz cúbica de $\frac{27}{64}$; y así de qualquiera potencia.

Si se pide la raíz quadrada de un entero y quebrado, como de $6\frac{1}{4}$, se reducirá el entero á la especie de su quebrado, y se tendrá $\frac{25}{4}$, y sacando la raíz de 25, que es 5, y la de 4, que es 2, será $\frac{5}{2}$, ó bien $2\frac{1}{2}$ la raíz quadrada de $6\frac{1}{4}$.

Si el numerador ó denominador no tuviere raíz justa, como en los quebrados $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{10}$, &c., se indicará con el signo radical de este modo $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{\frac{9}{10}}$, que quiere decir raíz quadrada, cúbica, ó de otra potencia, de $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{10}$, añadiendo al signo el exponente de la raíz que se ha de sacar; y así si fuere quadrada, será el signo radical con el exponente 2, si fuere cúbica el signo radical con el exponente 3 &c.

LIBRO SEXTO.

DE LAS PROGRESIONES.

Progresion es una serie de cantidades, en que la primera á la segunda tiene la misma razon que la segunda á la tercera, que la tercera á la quarta, y que esta á la quinta &c. Divídese en aritmética y geométrica.

CAPÍTULO I.

De la progresion aritmética.

DEFINICION I. Progresion aritmética es una serie de cantidades crecientes ó decrecientes con igual exceso, como 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c. que es creciente, ó bien 16, 13, 10, 7, 4, 1, que es decreciente; y así en las demás. El exceso ó diferencia de un término á otro, se llama denominador ó exponente de la progresion.

Tambien es progresion aritmética $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d$ &c., cuyo denominador ó exceso es d .

COROLARIO. En la progresion aritmética creciente ó ascendente el término segundo es la suma del primero y del exceso; el tercero es la suma del segundo y del exceso; el quarto la suma del tercero y del exceso &c.

Para manifestar que quatro números son aritméticamente proporcionales, se expresan de este modo $2 \cdot 4 \therefore 8 \cdot 10$, y para los aritméticamente continuos proporcionales se antepone este signo $\div$ de esta suerte $\div 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21$, esto es, $3 \cdot 5 \therefore 5 \cdot 7 \therefore 7 \cdot 9 \therefore 9 \cdot 11 \therefore 11 \cdot 13$ &c.

DEFINICION II. Quatro cantidades se dicen aritméticamente proporcionales si la diferencia de la

primera á la segunda es igual á la diferencia de la tercera á la quarta, y se expresan de este modo $8.14 \therefore 6.12$, ó bien $a.a+d \therefore c.c+d$.

COROLARIO I. En quatro cantidades aritméticamente proporcionales, siendo crecientes, la suma de la primera y del exceso es igual á la segunda, y la suma de la tercera y del exceso es igual á la quarta.

EXEMPLO. Siendo aritméticamente proporcionales $2.4 \therefore 8.10$, la suma del primer término 2 y del exceso 2 es igual al segundo 4, y el tercero 8 mas el exceso 2 es igual al quarto término 10.

En la proporcion decreciente ó descendente es al contrario.

EXEMPLO. En la proporcion $17.13 \therefore 11.7$ el exceso es 4; luego el primer término 17 menos el exceso 3 es igual al segundo 13, y el tercero 11 menos el exceso 4 es igual al quarto término 7.

En adelante supondremos ser la progresion ascendente, pues lo mismo se verifica que en la descendente.

COROLARIO II. Se podrán transformar los términos de una progresion aritmética $\div a, b, c, f$, pues suponiendo el exceso d , si se añade al primer término, se tendrá el segundo $a+d=b$, y si á este se añade el exceso, se tendrá el tercero $a+2d=c$; y por último si á este se añade el exceso, se tendrá el quarto $a+3d=f$, y será la progresion transformada $\div a, a+d, a+2d, a+3d$. Consta del cor. de la def. 1.

ESCOLIO. La proporcion aritmética $a.b \therefore c.f$, cuyo exceso es d , será transformada $a.a+d \therefore c.c+d$.

PROPOSICION I. TEOREMA.

En la progresion aritmética la suma de los términos extremos es igual á la suma de qualesquiera otros dos términos equidistantes.

EXPLICACION. Sea la progresion $\div a, b, c, f, g, h, i$; digo que $a + i = b + h$.

DEMOSTRACION. Suponiendo el exceso ó denominador d , y transformados los términos (cor. II def. II), será la progresion $\div a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d$: la suma del primero y último será $2a + 6d = a + i$
tambien la suma del segundo y sexto $2a + 6d = b + h$

luego (ax. I) $a + i = b + h$
Sea tambien la progresion $\div 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$
luego será $3 + 15 = 5 + 13 = 18$

COROLARIO I. De aquí se sigue } $b + h = c + g$
que tambien
porque siendo $b + h = 2a + 6d$
y asimismo $c + g = 2a + 6d$
será (ax. I) $b + h = c + g$

En la progresion numérica será $5 + 13 = 7 + 11$

COROLARIO II. El duplo de un término medio es igual á la suma de qualesquiera otros dos términos equidistantes, esto es $2f = c + g$
porque siendo $f = a + 3d$
será su duplo $2f = 2a + 6d$
pero tambien $c + g = 2a + 6d$
luego (ax. I) $2f = c + g$

En la progresion numérica el duplo del término medio 9 es igual á la suma de qualesquiera otros dos equidistantes, esto es $18 = 7 + 11 = 5 + 13$

ESCOLIO. En la proporcion aritmética la suma

de los extremos es igual á la suma de los medios,
 esto es, siendo aritmética-
 mente proporcionales } $\dots a . b \therefore c . f$
 será } $a + f = b + c$
 porque suponiendo el exceso d ,
 será la proporcion transfor-
 mada } $\dots a . a + d \therefore c . c + d$
 y la suma de los extremos } $a + c + d = a + c + d$
 igual á la de los medios }
 Sea tambien la proporcion $7 . 10 \therefore 15 . 18$
 será la suma de los extremos } $\dots 7 + 18 = 10 + 15$
 igual á la de los medios }

PROPOSICION II. TEOREMA.

En la progresion aritmética la suma de todos los términos es igual á la suma del primero y último, multiplicada por la mitad del número de los términos.

EXPLICACION. Sea la progresion $\dots \div a, b, c, f, g, h$, cuyo número de términos es 6, y su mitad 3, que multiplicada por $a + b$, será $3 a + 3 b$
 digo que $a + b + c + f + g + h = 3 a + 3 b$.

DEMOSTRACION. Suponiendo el denominador d , y transformados los términos (cor. II def. II), será la progresion $a, a + d, a + 2 d, a + 3 d, a + 4 d, a + 5 d$; y la suma
 de todos los términos } $6 a + 15 d = a + b + c + f + g + h$
 tambien la suma de }
 primero y último... } $2 a + 5 d = a + b$

y multiplicando por 3, será .. $6 a + 15 d = 3 a + 3 b$
 luego (ax. I) $a + b + c + f + g = 3 a + 3 b$

Sea tambien la progresion $\div 2, 5, 8, 11, 14, 17$:
 La suma del primero y último término es 19, que multiplicada por 3 mitad del número de los términos, será 57 igual á la suma de todos los de la progresion.

COROLARIO I. El duplo de la suma de todos los términos es igual á la suma de los extremos multiplicada por el número de los términos.

HIPÓTESI. Sea el primer término a
 el último b
 el denominador ó exponente d
 el número de los términos n
 y la suma de todos los de la progresion s
 Digo que $2s = an + bn$
 porque siendo por el teorema $s = \frac{an + bn}{2}$
 multiplicado todo por 2 será $2s = an + bn$
 En la progresion numérica $114 = 19 \times 6$

COROLARIO II. El número de los términos es igual al duplo de la suma de todos, partido por el agregado de los extremos, esto es $n = \frac{2s}{a+b}$
 porque teniendo (cor. I) $an + bn = 2s$
 partiéndolo todo por $a + b$, se tendrá $n = \frac{2s}{a+b}$
 En la progresion numérica $6 = \frac{114}{19}$

COROLARIO III. El agregado de los extremos es igual al duplo de la suma de todos, partido por el número de los términos, esto es $a + b = \frac{2s}{n}$
 porque siendo (cor. I) $an + bn = 2s$
 partiéndolo todo por n , se tendrá $a + b = \frac{2s}{n}$
 En la progresion numérica $19 = \frac{114}{6}$

COROLARIO IV. El término primero es igual al duplo de la suma de todos, partido por el número de los términos, quitando del quociente el último,

esto es $a = \frac{2s}{n} - b$

porque siendo (cor. III) $a + b = \frac{2s}{n}$

quitando de ambas partes b , será $a = \frac{2s}{n} - b$

En la progresion numérica $2 = \frac{114}{6} - 17$

COROLARIO V. El último término es igual al duplo de la suma de todos, partido por el número de los términos, quitando del quociente el primero, esto es $b = \frac{2s}{n} - a$

porque siendo (cor. III) $a + b = \frac{2s}{n}$

quitando de ambas partes a , será $b = \frac{2s}{n} - a$

En la progresion numérica $17 = \frac{114}{6} - 2$

PROPOSICION III. TEOREMA.

Si á la diferencia de los extremos se añade el exponente, la suma será igual al producto del número de los términos por el exponente.

EXPLICACION. Sea la progresion $\div a, b, c, f, g, h$, cuyo número de términos es 6; y la diferencia de los extremos $b - a$, suponiendo d el exponente de la progresion, digo que $b - a + d = 6d$

DEMOSTRACION. Transformados los términos (cor. II def. II), será la progresion $\div a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d$.

La diferencia de los extremos será .. $5d = b - a$
 y añadiendo á ambas partes el ex- } $6d = b - a + d$
 ponente d , será

pero $6d$ es el producto del número de los términos 6 por el exponente d ; luego &c.

Suponiendo el primer término a , el último b , el denominador d , y el número de los términos n , será $b - a + d = nd$.

Sea tambien la progresion $\div 2, 5, 8, 11, 14, 17$, la diferencia de los extremos es 15, y añadiendo el exponente 3, será 18, que es el producto del número de los términos 6 por el exponente 3.

COROLARIO I. El primer término es igual á la suma del último y del exponente, menos el producto del número de los términos por el exponente, esto es $a = b + d - nd$

porque siendo por el teorema ... $nd = b - a + d$ añadiendo á ambas partes a , } $nd + a = b + d$
será }

y quitando de las mismas nd , } ... $a = b + d - nd$
se tendrá }

En la progresion numérica $2 = 20 - 18$

COROLARIO II. Si al producto del número de los términos por el exponente, se añade el término primero, y de la suma se resta el exponente, se tendrá el último término, esto es $b = nd + a - d$

porque siendo por el teorema .. $b - a + d = nd$ añadiendo á entrambas par- }
tes a , será } ... $b + d = nd + a$

y quitando d , se tendrá $b = nd + a - d$
esto es, en números $18 + 2 - 3 = 17$

COROLARIO III. Si la diferencia de los extremos se parte por el exponente, y al quociente se añade la unidad, se tendrá el número de los términos, esto es

..... $\frac{b - a}{d} + 1 = n$

porque siendo por el teorema $b - a + d = nd$

partiéndolo todo por d , se tendrá .. $\frac{b - a}{d} + 1 = n$

En la progresion numérica $\frac{15}{3} + 1 = 6$

COROLARIO IV. Si la diferencia de los extremos se parte por el número de los términos menos 1, el

quociente será el exponente, esto es.. $\frac{b-a}{n-1} = d$

porque siendo por el teorema ... $b - a + d = n d$

quitando de ambas partes d , será .. $b - a = n d - d$

y partiéndolo todo por $n - 1$, será .. $\frac{b-a}{n-1} = d$

En la progresion numérica $\frac{15}{5} = 3$

ESCOLIO. En las proposiciones antecedentes se funda la resolucion de los problemas de la progresion aritmética, en que ocurren cinco principales cosas, que son el término primero, el último, el número de los términos, el denominador, y la suma de los términos; y conocidas tres cosas de las cinco dichas, se hallarán las otras dos, de que resultan veinte quæstiones, como contiene y expresa la siguiente tabla.

TABLA DE LAS VEINTE QUESTIONES.	Términos que se bus- can.	Términos conocidos.
$a = b + d - n d$	...a....	b, d, n
$a = \frac{2s}{n} - b$	...a....	b, n, s
$a = \frac{2s + d n - d n n}{2 n}$	...a....	d, n, s
$a = \pm \sqrt{\frac{b b + b d + d d - 2 s d + \frac{d}{2}}{4}}$	...a....	b, d, s
$b = d n + a - d$	...b....	a, d, n
$b = \frac{2s}{n} - a$	...b....	a, n, s
$b = \frac{2s + d n n - d n}{2 n}$	...b....	d, n, s
$b = \pm \sqrt{\frac{2 s d + a a + d d - a d - \frac{d}{2}}{4}}$	...b....	a, d, s
$d = \frac{b - a}{n - 1}$	...d....	a, b, n
$d = \frac{2s - 2 a n}{n n - n}$	...d....	a, n, s
$d = \frac{2 b n - 2 s}{n n - n}$	...d....	b, n, s
$d = \frac{b b - a a}{2 s - b - a}$	...d....	a, b, s
$n = \frac{b - a}{d} + 1$	...n....	a, b, d
$n = \frac{2 s}{a + b}$	...n....	a, b, s
$n = \frac{2 b + d \mp \sqrt{4 b b + 4 b d + d d - 8 d s}}{2 d}$	...n....	b, d, s
$n = \frac{d - 2 a \pm \sqrt{8 d s + 4 a a - 4 a d + d d}}{2 d}$	...n....	a, d, s
$s = \frac{a n + b n}{2}$	...s....	a, b, n
$s = \frac{2 b n + d n - d n n}{2}$	...s....	b, d, n
$s = \frac{2 a n - d n + d n n}{2}$	...s....	a, d, n
$s = \frac{b b + a d + b d - a a}{2 d}$	...s....	a, b, d

PROPOSICION IV. PROBLEMA.

Entre dos números dados hallar un medio aritmético.

RESOLUCION. Suponiendo que sean los números dados 5 y 9, súmense estos, y se tendrá 14, cuya mitad 7 es el medio aritmético que se pide, esto es, los números 5, 7, 9 formarán una progresion aritmética.

PROPOSICION V. PROBLEMA.

Entre dos números dados hallar quantos medios aritméticos se quisieren.

RESOLUCION. Si se piden dos medios entre 5 y 14, se restarán los extremos, y se tendrá 9, cuyo número partido por 3, da por quociente el exponente 3, que añadido á 5, se tendrá 8, y añadido á 8, se tendrá 11, y los números 5, 8, 11, 14 compondrán una progresion aritmética, en la qual 8 y 11 serán los dos medios que se piden entre 5 y 14; de suerte que quando se piden dos medios, se considera una progresion de quatro términos, y hallando el exponente (cor. IV teor. III) se añadirá este al término primero, y se tendrá el segundo, y añadiéndole despues á este, se tendrá el tercero.

Si se piden tres medios aritméticos entre 2 y 14, se considera la progresion de cinco términos, y se restará 2 de 14, cuya diferencia 12 se partirá por 4 (por ser los términos cinco), y el quociente 3 será el exponente, que añadido á 2, se tendrá 5, y añadiendo 3 á 5, se tendrá 8, y añadiendo 3 á 8, se tendrá 11; y así los números 2, 5, 8, 11, 14 son aritméticamente proporcionales, y los medios que se piden son 5, 8, 11.

Si se piden quatro medios aritméticos entre 10 y 12, se considera la progresion de seis términos: y la diferencia entre 10 y 12 es 2, que partida por 5 (por ser los términos seis) dará el exponente $\frac{2}{5}$, que añadiéndole continuamente, como se ha dicho, serán los medios que se piden $10\frac{2}{5}$, $10\frac{4}{5}$, $11\frac{1}{5}$, $11\frac{3}{5}$, y la progresion será $\div 10$, $10\frac{2}{5}$, $10\frac{4}{5}$, $11\frac{1}{5}$, $11\frac{3}{5}$, 12.

ESCOLO. Sin buscar el exponente se hallarán quantos medios aritméticos se quisieren entre a y b , de este modo.

Para un medio se tomará la mitad de la suma de a y b , esto es, $\frac{a+b}{2}$.

Para dos medios se sumará b con el duplo de a , y sacando el tercio, se tendrá el medio primero $\frac{2a+b}{3}$: sumando despues a con el duplo de b , y sacando el tercio, se tendrá el segundo medio $\frac{a+2b}{3}$.

Para tres medios se sumará b con el triplo de a , y sacando el quarto, se tendrá el medio primero $\frac{3a+b}{4}$: sumando despues el duplo de a con el duplo de b , se tendrá el segundo medio $\frac{2a+2b}{4}$: finalmente sumando a con el triplo de b , y sacando el quarto, se tendrá el medio tercero $\frac{a+3b}{4}$, como en la siguiente tabla.

Para 1 .. a , $\frac{a+b}{2}$, b

Para 2 .. a , $\frac{2a+b}{3}$, $\frac{a+2b}{3}$, b

Para 3 .. a , $\frac{3a+b}{4}$, $\frac{2a+2b}{4}$, $\frac{a+3b}{4}$, b

Para 4 .. a , $\frac{4a+b}{5}$, $\frac{3a+2b}{5}$, $\frac{2a+3b}{5}$, $\frac{a+4b}{5}$, b

Sirve la progresion aritmética para resolver muchas quëstiones , como son hallar el número de balas de que se compone una pirámide triangular ó quadrangular , asimismo para los transportes de tierra , en donde las distancias al paso que se aumentan , crecen en progresion aritmética , y para otras muchas que pertenecen á excavaciones de pozos , á deudas , correos , molinos &c.

CAPÍTULO II.

De la progresion geométrica.

DEFINICION III. **P**rogresion geométrica es una serie de cantidades continuas proporcionales en razon geométrica. Llámase ascendente quando crecen los términos , ó bien quando la razon geométrica es de menor desigualdad , como 1 , 2 , 4 , 8 , 16 &c. ó bien 2 , 6 , 18 , 54 &c. : en la progresion primera la razon geométrica es subdupla , y en la segunda subtripla. Llámase descendente quando los términos de la progresion se disminuyen , ó bien quando la razon geométrica es de mayor desigualdad , como 16 , 8 , 4 , 2 , 1 , ó bien 54 , 18 , 6 , 2 : en la progresion primera la razon geométrica es dupla , y en la segunda tripla ; de manera que la progresion ascendente se puede hacer descendente tomando los términos al contrario , de derecha á izquierda.

DEFINICION IV. Denominador de la progresion geométrica es el número que indica las veces que el término menor se contiene en el próximo mayor , ya sea la progresion ascendente ó ya descendente. Este signo $:+$ indica que los términos que siguen son continuos proporcionales en la razon geométrica. En la progresion ascendente $:+$ 2 , 6 , 18 , 54 el denominador es 3 ; porque 2 se contiene 3 veces en el 6 ,

el 6 se contiene tres veces en el 18 &c.; y lo mismo en la descendente $+: 54, 18, 6, 2$. El denominador sirve para dar el nombre á la progresion; de suerte que por ser 3 el de las dos progresiones que anteceden, una y otra se llama tripla; con esta distincion, que la primera es tripla ascendente, y la segunda tripla descendente.

En la progresion $+: a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, aq^6$ &c. el denominador ó exponente es q .

ESCOLIO. No se ha de confundir el exponente de la razon con el denominador de la progresion; porque solo quando esta es descendente es una misma cosa, como en la progresion $+: 54, 18, 6, 2$, cuyo denominador y exponente es 3; pero en la progresion ascendente $+: 2, 6, 18, 54$ el denominador es 3, y el exponente de cada razon $\frac{1}{3}$; sin embargo al denominador de la progresion llaman comunmente exponente de la progresion.

COROLARIO I. De aquí se sigue que en la progresion geométrica ascendente, si el término primero se multiplica por el denominador, se tiene el segundo, que este multiplicado por el denominador da el tercero; y así al infinito.

EXEMPLO. Si el término primero es 2, y el exponente es 3, será el término segundo $2 \times 3 = 6$; el tercero $6 \times 3 = 18$; el quarto $18 \times 3 = 54$; y la progresion $+: 2, 6, 18, 54$.

Si el término primero es a , y el denominador q , será el término segundo $a \times q = aq$; el tercero $aq \times q = aq^2$; el quarto $aq^2 \times q = aq^3$; y el quinto $aq^3 \times q = aq^4$ &c., y la progresion será $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5$.

En la progresion descendente el término primero partido por el exponente da el segundo; el segundo partido por el exponente da el tercero; y así de los demás.

EXEMPLO. Si el término primero es 54, y el denominador es 3, será el segundo $\frac{54}{3} = 18$, el tercero $\frac{18}{3} = 6$, y el cuarto $\frac{6}{3} = 2$.

En adelante se supondrá la progresion ascendente, pues se verifica lo mismo que en la descendente.

COROLARIO II. Si el denominador y sus potencias se multiplican por el término primero, se tendrán todos los demás.

EXEMPLO. Sea el denominador 3, serán sus potencias 9, 27, 81 &c., sea tambien el término primero 2, digo que $2 \times 3 = 6$, $2 \times 9 = 18$, $27 \times 2 = 54$ &c. Si el término primero a se multiplica por q , y sus potencias, esto es, por q , q^2 , q^3 , q^4 &c., se tendrá la progresion $+: a, aq, aq^2, aq^3, aq^4$ &c.

COROLARIO III. Si todos los términos de la progresion se parten por el término primero, resultará otra progresion, cuyo primer término es la unidad, el segundo el denominador, y los demás sus potencias.

EXEMPLO. Si los términos de la progresion $+: 2, 6, 18, 54$ se parten por el primer término 2, resultará la progresion $1, 3, 9, 27$.

Tambien si los términos de la progresion $+: a, aq, aq^2, aq^3$ se parten por el primer término a , resultará la progresion $1, q, q^2, q^3$.

COROLARIO IV. Los términos de una progresion geométrica se pueden transformar multiplicando el término primero por el denominador y sus potencias.

EXEMPLO. Sea la progresion $+: a, b, c, d, e$, cuyo denominador sea q , será transformada $+: a, aq, aq^2, aq^3, aq^4$; porque $b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$, $e = aq^4$. Consta del cor. II.

COROLARIO V. La unidad, la raíz y sus potencias formarán una progresion, cuyo denominador es la misma raíz, como $+: 1, 3, 9, 27$ &c.

COROLARIO VI. Conocido el término primero y el denominador de la progresion, se hallan todos los demás, y se pueden continuar al infinito.

EXEMPLO. Si el primer término es a , y el denominador q , será la progresion $+: a, a q, a q^2, a q^3, a q^4, a q^5, a q^6 \&c.$

Tambien si el primer término es 2, y el denominador es 3, será la progresion $+: 2, 6, 18, 54 \&c.$

COROLARIO VII. Conocidos dos términos inmediatos, y partido el mayor por el menor, el quociente será el denominador, y se hallarán los demás términos.

EXEMPLO. Conocidos los dos términos inmediatos 5 y 6, será el denominador $\frac{6}{5} = 3$.

Las principales propiedades de la progresion geométrica se contienen en los teoremas siguientes.

PROPOSICION VI. TEOREMA.

En la progresion geométrica el producto de qualesquiera dos términos es igual al producto de qualesquiera otros dos equidistantes.

EXPLICACION. Sea la progresion $\begin{cases} +: a, b, c, d, e \\ +: 2, 6, 18, 54, 162 \end{cases}$
digo que $a e = b d$

ó bien $2 \times 162 = 6 \times 54$

DEMOSTRACION. Suponiendo el denominador q , y transformados los términos (cor. IV def. IV), será la progresion $+: a, a q, a q^2, a q^3, a q^4$
y el producto del primero y quinto $a^2 q^4 = a e$
como tambien el producto del segundo } $a^2 q^4 = b d$
y quarto }

luego (ax. I) $a e = b d$
ó bien $2 \times 162 = 6 \times 54$

PROPOSICION VII. TEOREMA.

En la progresion geométrica el quadrado de un término medio es igual al producto de qualesquiera otros dos equidistantes.

EXPLICACION. Sea la progresion $\begin{cases} :+ : a, b, c, d, e \\ :+ : 2, 6, 18, 54, 162 \end{cases}$
 digo que $b^2 = a c$
 ó bien $6 \times 6 = 36 = 2 \times 18$

DEMOSTRACION. Suponiendo el denominador q ,
 y transformados los términos (cor. IV def. IV), será
 la progresion $:+ : a, a q, a q^2, a q^3, a q^4$
 y el quadrado del segundo término } $a^2 q^2 = b^2$
 $a q = b$ será }

tambien el producto del primero } $a^2 q^2 = a c$
 y tercero }

luego (ax. 1) $b^2 = a c$

ó bien $6 \times 6 = 2 \times 18$

Tambien $c^2 = b d$

porque el quadrado de $a q^2$ es ... $a^2 q^4 = a q \times a q^3$

ó bien el quadrado de 18, que es ... $324 = 6 \times 54$

producto del segundo término por el quarto.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

En qualquiera progresion geométrica el último término es igual á la suma de los términos antecedentes, multiplicada por el denominador menos 1, y al producto añadiendo el término primero.

EXPLICACION. Sea la misma progresion $:+ : a, b, c, d, e$
 que transformada será ... $:+ : a, a q, a q^2, a q^3, a q^4$
 digo que si la suma de los quatro primeros términos
 se multiplica por $q - 1$, y al producto se añade el
 término primero a , se tendrá el último $a q^4$.

DEMOSTRACION. La suma de los términos antecedentes es $a + a q + a q^2 + a q^3$
 y multiplicada por $q - 1$
 da el producto $a q^4 + a q^3 + a q^2 + a q - a - a q - a q^2 - a q^3$
 que reducido será $a q^4 - a$
 y añadiendo el término prime- } $a q^4 - a + a = a q^4$
 ro a , será
 que es el último de la progresion.

En la progresion numérica .. :+ : 2, 6, 18, 54, 162
 la suma de todos los términos menos el último es .. 80
 que multiplicada por $3 - 1 = 2$, será 160
 y añadiendo 2, que es el primer término, } 162
 se tendrá
 que es el último.

PROPOSICION IX. TEOREMA.

En qualquiera progresion geométrica son proporcionales el segundo término menos el primero al primero, como el último menos el primero á la suma de los términos antecedentes.

EXPLICACION. Sea la progresion .. :+ : a, b, c, d, e
 digo que son proporcionales $b - a : a :: e - a : a + b + c + d$

DEMOSTRACION. Suponiendo el denominador q ,
 y transformados los términos (cor. IV def. IV), será
 la progresion :+ : $a, a q, a q^2, a q^3, a q^4$
 y substituyendo se tendrá la

proporcion .. $a q - a : a :: a q^4 - a : a + a q + a q^2 + a q^3$
 porque el producto de los extremos es igual al de
 los medios, esto es, $a^2 q^4 + a^2 q^3 + a^2 q^2 + a^2 q - a^2$
 $- a^2 q - a^2 q^2 - a^2 q^3 = a^2 q^4 - a^2$

En la progresion numérica .. :+ : 2, 6, 18, 54, 162
 será la proporcion .. $6 - 2 : 2 :: 162 - 2 : 2 + 6 + 18 + 54$
 esto es, reducida $4 : 2 :: 160 : 80$
 porque el producto de los extremos }
 es igual al de los medios } $320 = 320$

Todos los problemas y cuestiones que pertenecen á la progresion geométrica y cantidades continuas proporcionales, se fundan en los teoremas antecedentes; para lo qual se han de notar cinco principales cosas, que son el término primero, el último, el denominador, el número de los términos, y la suma de todos ellos; y conocidas qualesquiera tres cosas de las cinco dichas, se hallarán las otras dos.

PROPOSICION X. PROBLEMA.

A dos números dados hallar un tercero proporcional.

RESOLUCION. Suponiendo los números dados 2 y 6, porque el primero al segundo ha de tener la misma razon que el segundo al tercero, se hará la proporcion $2:6::6:x$ luego (lem. I lib. III) $2x=36$ y partiéndolo todo por 2, se tendrá $x=18$

Esto es lo mismo que dados el primero y segundo término de una progresion, hallar el tercero; y así partiendo 6 por 2, se tendrá el denominador 3, que multiplicado por 6, dará 18. Consta del cor. VII def. IV. Tambien se hallará (esc. prop. IV lib. V) haciendo esta proporcion, el quadrado de 2, que es 4, al quadrado de 6, que es 36, como el término primero 2 á un quarto proporcional, que es 18, esto es, $4:36::2:x=\frac{36 \times 2}{4}=18$.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

Entre dos números dados hallar un medio geométrico.

RESOLUCION. Suponiendo los números dados 6 y 54, multiplíquese 54 por 6, y del producto 324

sáquese la raíz quadrada, y se tendrá 18 por el medio que se pide.

DEMOSTRACION. Porque de tres continuos proporcionales se busca el medio, se hará la proporcion $6 : x :: x : 54$; luego (lem. I lib. III) $324 = x^2$, y sacando la raíz quadrada, se tendrá .. $18 = x$. Tambien se hallará (esc. prop. IV lib. V) haciendo la proporcion } $36 : x^2 :: 6 : 54$, porque (lem. I lib. III) será $6 x^2 = 1944$, y partiéndolo todo por 6, se tendrá ... $x^2 = 324$, y sacando la raíz quadrada será $x = 18$, que es el término medio que se pide.

PROPOSICION XII. PROBLEMA.

Entre dos números dados hallar dos medios geométricos.

RESOLUCION. Suponiendo los números dados 3 y 24, multiplíquese el quadrado del primero, que es 9, por el último 24, y del producto 216 sacando la raíz cúbica, se tendrá 6 por el medio primero, ó término segundo de la progresion. Conocido este, se buscará el tercero (prop. X) diciendo: si 3 dan 6, 6 darán 12 por el otro medio, ó término tercero, y serán continuos proporcionales ... $3, 6, 12, 24$.

DEMOSTRACION. Sea $3 = a$, $24 = b$; y porque se piden dos medios proporcionales, se tendrá una progresion de quatro términos, cuyos extremos son conocidos, y suponiendo el segundo $= x$, y el tercero $= z$, será la progresion $3 : a, x, z, b$, y se tendrá (esc. prop. IV lib. V) ... $a^3 : x^3 :: a : b$; luego (lem. I lib. III) $a^3 b = a x^3$, y partiendo por a , será (ax. V) $a^2 b = x^3$, cuya raíz cúbica es $\sqrt[3]{a^2 b} = x$.



Y esta expresion quiere decir , que el quadrado del primer término a se multiplique por el último b , y que del producto se saque la raiz cúbica.

PROPOSICION XIII. PROBLEMA.

Entre dos números dados hallar tres medios geométricos.

RESOLUCION. Suponiendo los números dados 2 y 32 , sea $2 = a$, $32 = b$, el término medio primero $= x$, el segundo $= z$, y el tercero $= u$, será la progresion de cinco términos $+: a, x, z, u, b$, y por consiguiente (esc. prop. iv lib. v) $a^4 : x^4 :: a : b$; luego (lem. i lib. iii) $a^4 b = a x^4$, y partiendo por a , será (ax. v) $a^3 b = x^4$, y sacando la raiz quadrada quadrada será $\sqrt[4]{a^3 b} = x$.

Cuya expresion quiere decir , que el cubo del primer término a se multiplique por el último b , y del producto se saque la raiz quadrada quadrada para tener el valor de x , ó término segundo , esto es , que el cubo de 2 , que es 8 , se multiplique por 32 , y del producto 256 se saque la raiz quadrada quadrada 4 , y esta será el medio primero x , ó término segundo de la progresion. Los demás términos se hallarán fácilmente haciendo las analogías $2 : 4 :: 4 : z = 8$, y $2 : 4 :: 8 : u = 16$, y será la progresion $+: 2, 4, 8, 16, 32$.

ESCOLIO. Si de la tabla Sintético-Analítica de $a + b$, que se halla en el libro antecedente , se quitan los coeficientes , y de todos los términos se saca la raiz correspondiente del mismo grado , se tendrán los formularios para hallar quantos medios geométricos se quisieren entre dos números dados a y b , como se manifiesta en la siguiente tabla.

Para 1 . . . $a, \sqrt[2]{a b}, b$

Para 2 . . . $a, \sqrt[3]{a^2 b}, \sqrt[3]{a b^2}, b$

Para 3 . . . $a, \sqrt[4]{a^3 b}, \sqrt[4]{a^2 b^2}, \sqrt[4]{a b^3}, b$

Para 4 . . . $a, \sqrt[5]{a^4 b}, \sqrt[5]{a^3 b^2}, \sqrt[5]{a^2 b^3}, \sqrt[5]{a b^4}, b$

Para 5 . . . $a, \sqrt[6]{a^5 b}, \sqrt[6]{a^4 b^2}, \sqrt[6]{a^3 b^3}, \sqrt[6]{a^2 b^4}, \sqrt[6]{a b^5}, b$

Puede continuarse esta tabla facilmente quanto se quisiere, y su demostracion es facil; porque (como consta del esc. vi prop. 1 del libro antecedente) son continuas proporcionales $a^3, a^2 b, a b^2, b^3$: luego sus raices $a, \sqrt[3]{a^2 b}, \sqrt[3]{a b^2}$ son tambien proporcionales; y así el formulario para hallar un medio geométrico entre a y b , será $\sqrt[2]{a b}$: del mismo modo se demuestran los demás formularios contenidos en dicha tabla.

Tambien quando se piden muchos medios, se hallará facilmente el que se quiera, sin necesidad de hallar antes el primero. Como si entre 2 y 32 se quieren tres medios geométricos, y tambien se quiere saber el último: el formulario para los tres medios es $a, \sqrt[4]{a^3 b}, \sqrt[4]{a^2 b^2}, \sqrt[4]{a b^3} b$; y queriendo buscar el último, servirá la expresion $\sqrt[4]{a b^3}$, que indica que el término primero se multiplique por el cubo del último, y que del producto se saque la raiz quadrada quadrada; y así el cubo de 32, que es 32768 multiplicado por 2 (término primero), da el producto 65536, cuya raiz quadrada quadrada 16 es el valor del tercer término medio que se pide.

Si se quiere el segundo medio que corresponde en el formulario á la expresion $\sqrt[4]{a^2 b^2}$, se multiplicará el quadrado del término primero por el quadrado

del último, y del producto sacando la raíz quadrada quadrada, se tendrá el segundo medio; y así el quadrado de 2 es 4, y el de 32 es 1024; y multiplicando 1024 por 4, se tendrá 4096, cuya raíz quadrada quadrada 8 es el medio que se busca; y a de los demás.

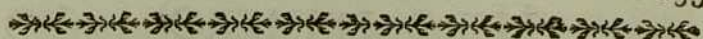
QUESTION.

Un negociante puso á ganancia 1000 pesos por espacio de tres años, dexando las ganancias para que ganasen como el principal: al fin de los tres años halló 1331 pesos: pídese quanta fue la ganancia al fin del primer año, y quanta al fin del segundo.

RESOLUCION. Segun el tenor de la questão se tiene una progresion de quatro términos, en la qual está conocido el primero 1000, y el último 1331, y se piden los dos medios, que son el caudal y ganancia del primer año y del segundo: luego será el formulario a , $\sqrt[3]{a^2 b}$, $\sqrt[3]{a b^2}$, b , y para el primero se tendrá la expresion $\sqrt[3]{a^2 b}$, que indica que se quadre 1000, y que su quadrado 1000000 se multiplique por 1331, y se tendrá 1331000000, cuya raíz cúbica 1100 es el caudal y ganancia al fin del primer año: el caudal y ganancia del segundo año se hallará por una regla de tres, esto es, 1000 : 1100 :: 1100 : $x = 1210$, y se verá que ganó á razon de 10 por 100.

FIN

DEL TRATADO DE LA ARITMÉTICA.



TRATADO SEGUNDO

DE LA

GEOMETRÍA ESPECULATIVA.

INTRODUCCION.

Una de las partes mas principales de la Matemática es la Geometría, que segun su etimología quiere decir ciencia que trata de la medida de la tierra; pero aunque vulgarmente se le da este nombre, su objeto es mas universal; porque no solo se extiende á la medida de la tierra, ó de las partes que la componen, sino tambien á todas las magnitudes ó cuerpos que se consideran en la naturaleza. Divídese en especulativa y práctica: la especulativa manifiesta la verdad de sus proposiciones, demostrando en sus teoremas las propiedades y atributos de la magnitud: y la práctica da reglas para dirigir con acierto las operaciones de sus problemas.

La Geometría especulativa se comprehende en los quince libros de Euclides, que ordenó este Filósofo en Alexandría de Egipto por los años 311 antes de la venida de Christo; y como sea mas conveniente emplear el tiempo en lo mas util, se explicarán en este tratado los seis primeros libros, que pertenecen al conocimiento de las superficies, y el xi y xii, que corresponden al de los sólidos.

LIBRO PRIMERO

DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

DEFINICIONES.

I. **P**unto es el que no tiene parte alguna.

EXPLICACION. Dícese que el punto matemático no tiene partes; porque solo existe por consideracion del entendimiento, que le concibe indivisible: á distincion del punto físico, de quien se duda si existe, ó si puede existir: de que se sigue que el punto matemático no tiene dimension alguna, y por consiguiente no es magnitud; pero se considera como principio de la magnitud, ó de la cantidad continua, así como el instante lo es del tiempo, y el unísono lo es de la Música. Para expresar el punto se hace una pequeña señal *A* con la punta sutil de un compás ó pluma, por cuyo medio se concibe dentro de ella el punto indivisible.

Las especies de la cantidad continua son tres: línea, superficie, y cuerpo ó sólido.

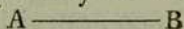
II. Línea es una longitud sin latitud ni profundidad.

ESCOLIO. Si un punto *A* se *A* ————— *B* moviese ácia *B*, produciria con su movimiento la línea *A B*; y como el punto no tiene latitud ni profundidad, se sigue que la línea producida por el movimiento, es solamente una longitud sin latitud ni profundidad; y por consiguiente es una magnitud de la primera especie, pues tiene solamente una dimension. La expresion de la línea se hace por el movimiento de compás ó pluma, dexando alguna señal ó rastro de su curso, en el qual se concibe la línea matemática.

III. Los extremos de la línea son puntos.

Divídese la línea en recta y curva.

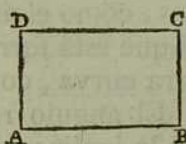
IV. Línea recta es aquella que está igualmente extendida entre sus puntos extremos, ó bien (según Archímedes) la mas breve distancia que hay de un punto á otro, como A B.



Línea curva es qualquiera otra, como C D.



V. Superficie es una cantidad continua, ó magnitud, que tiene longitud y latitud sin profundidad, como el espacio A B C D, de que se sigue que la superficie es una magnitud de la segunda especie, por constar únicamente de las dos dimensiones longitud y latitud.

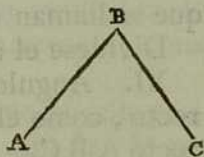


VI. Los extremos de la superficie son líneas, por razón de las cuales se divide en plana y curva.

VII. Superficie plana es la que está igualmente extendida entre sus líneas extremas, ó bien es aquella á quien por todas partes se puede ajustar una línea recta; y qualquiera otra superficie se llama curva.

La superficie curva se divide en cóncava y convexa: la cóncava es aquella que puesta sobre otra plana, encierra espacio; y la convexa la que puesta sobre otra plana, no encierra espacio, y solo la toca en un punto.

VIII. Ángulo plano es la inclinación de dos líneas que concurren en un punto indirectamente, como las dos líneas A B, C B, que concurren en B sobre un mismo plano, y la inclinación de la una sobre la otra, se llama el ángulo plano A B C.



Nómbrese el ángulo con tres letras, poniendo en el medio la letra B del concurso, y se dice el ángulo

A B C, ó bien se nombra con la letra del concurso solamente, diciendo el ángulo B.

Por razon de las líneas que forman el ángulo, se divide en rectilíneo, curvilíneo y mixtilíneo.

IX. Ángulo rectilíneo es el que está formado de dos líneas rectas, como el ángulo B: curvilíneo el que está formado de dos líneas curvas, como el ángulo X: mixtilíneo el que está formado de una recta y otra curva, como el ángulo Z.

El ángulo rectilíneo por razon de la inclinacion ó abertura de sus líneas, se divide en recto y obliquo.

X. Quando una recta cayendo sobre otra, forma los ángulos de una y otra parte iguales, estos se llaman rectos, y la línea perpendicular sobre la otra, como si la recta A B cae sobre C D, de suerte que los ángulos A B D, A B C sean iguales entre sí, cada uno de ellos es recto, y la línea A B se llama perpendicular sobre C D.

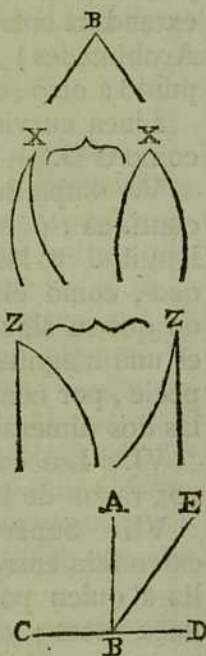
Quando la recta E B no cae perpendicular sobre C D, se forman dos ángulos desiguales E B C, E B D, que se llaman obliquos.

Divídese el ángulo obliquo en obtuso y agudo.

XI. Ángulo obtuso es aquel que es mayor que el recto, como el ángulo E B C, que es mayor que el recto A B C.

XII. Ángulo agudo es el menor que el recto, como el ángulo E B D, que es menor que el recto A B D.

ESCOLIO. El ser un ángulo mayor que otro no consiste en que las líneas que le forman sean ma-

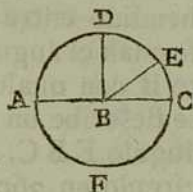


yores , sino en que su abertura sea mayor , de suerte que un ángulo siempre será el mismo , aunque las líneas que le forman se alarguen al infinito , porque siempre tendrán la misma inclinacion ó abertura.

XIII. Término es el fin ó extremo de una cantidad.

XIV. Figura es la que está cerrada con uno ó muchos términos ; y así el ángulo no es figura por estar abierto.

XV. Círculo es una figura plana A D E C F , contenida de una sola línea llamada circunferencia periferia ó perimetro , equidistante por todas partes de un punto que tiene en medio , desde el qual todas las rectas tiradas hasta la circunferencia son iguales entre sí.



XVI. El punto B del medio se llama centro , y las rectas iguales B D , B E , B C &c. que salen del centro hasta la circunferencia , se llaman radios ó semidiámetros.

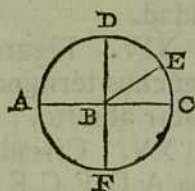
XVII. Diámetro del círculo es una recta que pasando por el centro , se termina de ambas partes en la circunferencia , como la recta A B C , y divide al círculo en dos partes iguales : de que se sigue que en el círculo hay infinitos diámetros , y todos son iguales , por componerse cada uno de dos radios iguales.

XVIII. Semicírculo es una figura contenida del diámetro y de la mitad de la circunferencia , como A D E C.

ESCOLIO I. La definicion real de un círculo es de este modo : si una recta A B , teniendo fixa la una extremidad B , se moviese hasta volver á su primera situacion , produciria un círculo , y el punto A describiria la circunferencia A D E C F : de que se infiere el modo de formar el círculo con una misma

abertura de compás, moviendo uno de sus pies, y teniendo fixo el otro como centro; y asimismo consta que todas las rectas BA , BE , BC , que salen del centro B , son entre sí iguales, por ser una misma recta AB la que forma el círculo.

ESCOLIO II. La medida del ángulo rectilineo es el arco del círculo descrito desde el punto del concurso como centro, y comprendido entre las dos rectas que forman el ángulo, como si del punto B con qualquier intervalo BC se describe un círculo, el arco EC será medida del ángulo $EB C$. A este fin dividen los Matemáticos el círculo en 360 partes iguales, que llaman grados: cada grado en 60 partes, que llaman minutos: cada minuto en 60 segundos, cada segundo en 60 tercetos; y así al infinito. Estos grados, minutos &c. son los que determinan el valor del ángulo, como si el arco DE es de 46 grados y 50 minutos, se dirá que el ángulo $EB D$ es de 46 grados y 50 minutos: tambien como el círculo consta de 360 grados, el semicírculo ADC será de 180 grados; y la quarta parte del círculo DC , ó bien AD , será de 90 grados: de que se infiere que el ángulo recto $AB D$ vale 90 grados, el ángulo obtuso $AB E$ vale mas de 90, y el ángulo agudo $CB E$ vale menos de 90.



XIX. Figura rectilinea es la que está comprendida de líneas rectas; y segun el número de lados que la forman, así toma el nombre.

XX. Figura rectilinea trilátera es la comprendida de tres líneas rectas.

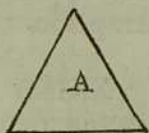
XXI. Cuadrilátera es la comprendida de quatro rectas.

XXII. Multilátera la que se contiene de mas de quatro rectas.

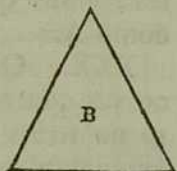
ESCOLIO. Qualquiera figura rectilínea tiene tantos ángulos quantos son los lados que la forman ; y así la trilátera tiene tres ángulos , y por esta razon se llama triángulo : la quatrilátera tiene quatro , y se llama cuadrángulo ; y generalmente la que tiene muchos ángulos se llama polígono.

De los triángulos rectilíneos hay tres especies respecto á sus lados , y se dicen equilátero , isósceles y escaleno ; y otras tres respecto á sus ángulos , y se dice rectángulo , obtusángulo y acutángulo.

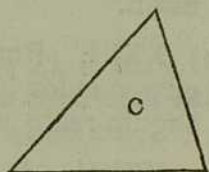
XXIII. Triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales , como A.



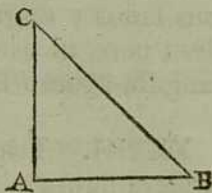
XXIV. Triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales , y el otro desigual , como B.



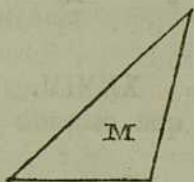
XXV. Triángulo escaleno es el que tiene sus tres lados desiguales , como C.



XXVI. Triángulo rectángulo es el que tiene uno de sus ángulos recto , como A ; y el lado C B opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa.



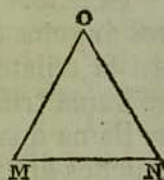
XXVII. Triángulo obtusángulo es el que tiene un ángulo obtuso , como M.



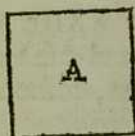
XXVIII. Triángulo acutángulo ú oxígonio es el que tiene sus tres ángulos agudos, como M N O.

ESCOLIO. El triángulo obtusángulo y el acutángulo se dicen obliquángulos, porque todos sus ángulos son obliquos, y por consiguiente el triángulo se reduce á rectángulo y obliquángulo.

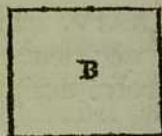
De las figuras quadriláteras hay cinco especies, y son quadrado, quadrilongo, rombo, romboide y trapecio.



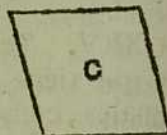
XXIX. Quadrado es una figura que tiene sus quatro lados iguales, y sus quatro ángulos rectos, como A.



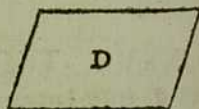
XXX. Quadrilongo la que tiene sus quatro ángulos rectos; pero no todos sus lados iguales, sí únicamente cada dos opuestos, como B.



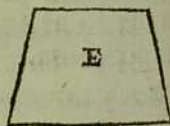
XXXI. Rombo la que tiene sus quatro lados iguales, pero ningun ángulo recto, como C.



XXXII. Romboide la que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales; pero ni es equilátera ni equiángula, como D.

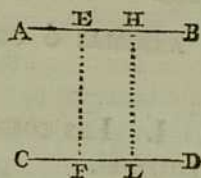


XXXIII. Trapecio es otra qualquiera figura quadrilátera, como E.



XXXIV. Lineas rectas paralelas son aquellas que estando en un mismo plano, y alargadas al

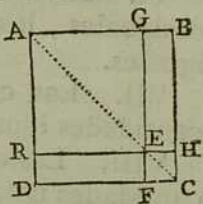
infinito por una y otra parte, se conservan siempre equidistantes, y por consecuencia nunca pueden concurrir, como las rectas AB, CD .



La equidistancia se mide por la perpendicular EF , que desde cualquier punto E de la una AB cae sobre la otra CD : de suerte que si de qualesquiera dos puntos E, H se baxan las perpendiculares EF, HL , si estas fueren iguales, se dirá que las líneas AB, CD son equidistantes, y por consiguiente paralelas.

XXXV. Paralelogramo es una figura quadrilátera, cuyos lados opuestos son paralelos, como el cuadrado, el quadrilongo, el rombo y el romboide.

XXXVI. Quando en un paralelogramo BD se tira el diámetro ó diagonal AC , y por cualquier punto E de esta pasan dos paralelas á los lados, esto es, RH paralela á DC , y FG paralela á BC , quedará dividido en quatro paralelogramos GR, RF, BE, HF , de los quales los dos GR, FH por donde pasa la diagonal, se llaman al rededor del diámetro, y los otros dos sus complementos.



PETICIONES Ó POSTULADOS.

- I. Pídese poder tirar una línea recta de un punto á otro.
- II. Alargar una línea recta quanto se quiera.
- III. Describir un círculo desde cualquier centro, y con cualquier intervalo ó abertura de compás.

AXIOMAS Ó COMUNES SENTENCIAS DE ARITMÉTICA
Y GEOMETRÍA.

I. Las cosas que son iguales á otra , son iguales entre sí.

II. Si á cosas iguales se añaden iguales , los todos serán iguales.

III. Si de cosas iguales se quitan iguales , los residuos quedarán iguales.

IV. Si á cosas iguales se añaden ó quitan desiguales , las sumas ó residuos quedarán desiguales.

V. Si cosas iguales se multiplican ó parten por iguales , esto es , si se aumentan ó disminuyen igualmente los productos ó quocientes , serán iguales.

VI. Si cosas iguales se multiplican ó parten por desiguales , los productos ó quocientes serán desiguales.

VII. Las cosas que son duplas , triplas &c. de cantidades iguales , son iguales.

VIII. Las cosas que son mitades , tercios &c. de cantidades iguales , son tambien iguales.

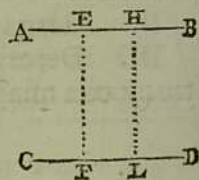
IX. El todo es igual á todas sus partes juntas , y por consiguiente mayor que qualquiera de ellas.

X. Las cosas que se ajustan exáctamente , son totalmente iguales ; y si son totalmente iguales , se ajustarán exáctamente.

XI. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

XII. Todas las rectas terminadas entre dos paralelas , siendo perpendiculares á ellas , son iguales entre sí.

EXPLICACION. Sean dos paralelas AB , CD : si de qualesquiera puntos E , H se baxan las rectas EF , HL perpendiculares sobre CD , estas serán iguales ; porque siendo AB , CD paralelas , han de ser equi-



distantes, y las perpendiculares $E F$, $H L$ son las que miden la equidistancia entre ellas.

XIII. Dos líneas rectas no encierran espacio.

XIV. Dos líneas rectas no tienen un segmento común, sí que se cortan en un punto.

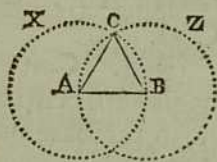
PROPOSICION I. PROBLEMA.

Sobre una recta dada y terminada formar un triángulo equilátero.

EXPLICACION. Sea dada la recta $A B$ terminada, y se pide formar sobre ella un triángulo equilátero.

OPERACION. Con el intervalo de la recta $A B$, haciendo centro en el punto A , descríbese el círculo $B C X$ (post. III), y con el mismo intervalo, haciendo centro en B , descríbese el círculo $A C Z$, que cortará al primero en el punto C : tírense las rectas $A C$, $B C$ (post. I), y el triángulo $A B C$ será equilátero.

DEMOSTRACION. Las rectas $A C$, $A B$ son iguales (def. xv) por ser radios de un mismo círculo $B C X$: asimismo lo son las $B C$, $B A$ por ser radios del círculo $A C Z$: luego $A C$ y $C B$ son tambien iguales (ax. I), y por consiguiente todas tres rectas son iguales entre sí: luego (def. xxiii) el triángulo $A B C$ es equilátero, que era lo que se habia de demostrar.

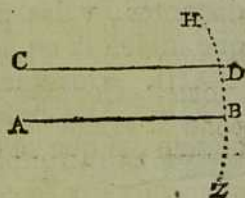


PROPOSICION II. PROBLEMA.

De un punto dado tirar una recta igual á otra dada.

EXP. Sea dado el punto A y la recta $C D$: pí-dese que del punto A se tire una recta igual á la $C D$.

OPER. Con el intervalo de la recta CD , haciendo centro en A , descríbase un arco de círculo ZBH , y tirando á qualquier punto de su circunferencia una recta AB , será igual á la dada CD . Consta de la def. xv.

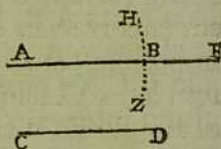


PROPOSICION III. PROBLEMA.

Dadas dos rectas desiguales, cortar de la mayor una parte igual á la menor.

EXP. Sean las rectas AF , CD desiguales, y la mayor AF : pídesese cortar de esta una parte igual á CD .

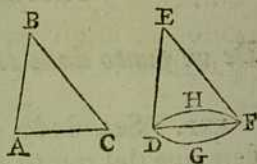
OPER. Con el intervalo CD , haciendo centro en el extremo A , descríbase un arco de círculo ZBH , que cortará á la AF en el punto B , y la parte AB será igual á la dada CD . Consta de la def. xv.



PROPOSICION IV. TEOREMA.

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, cada uno al suyo, y los ángulos comprendidos entre dichos lados fueren iguales, los triángulos serán totalmente iguales, esto es, la base será igual á la base, y cada uno de los otros ángulos será igual á su correspondiente.

EXP. Sean los triángulos ABC , DEF , y en ellos el lado $AB = DE$, el lado $BC = EF$, y el ángulo $B = E$: digo que dichos triángulos son



totalmente iguales, esto es, que la base $AC = DF$, el ángulo $BAC = EDF$, y el ángulo $BCA = EFD$.

DEM. Concíbase que el triángulo ABC se sobrepone al triángulo DEF : luego siendo el lado $AB = DE$ por lo supuesto, se ajustarán ambos exáctamente (ax. x), cayendo el punto A sobre el punto D , y el punto B sobre el punto E : tambien por suponerse el ángulo $B = E$, se ajustarán estos exáctamente, cayendo el lado BC sobre el lado EF , y el punto C sobre el punto F , por haberse supuesto dichos lados iguales: luego tambien la base AC se ajustará sobre la base DF , respecto haberse demostrado que se ajustan sus extremos, pues de lo contrario caeria mas arriba, como DHF , ó mas abaxo, como DGF ; y en qualquiera de estos casos encerrarian espacio dichas dos rectas: lo que es imposible (ax. xiii), y por consiguiente serán iguales (ax. x). Asimismo ajustándose el ángulo A sobre el ángulo D , y el ángulo C sobre el ángulo F , será el ángulo $A = D$, y el ángulo $C = F$, y por consiguiente todo el triángulo ABC igual á todo el triángulo DEF : que era &c.

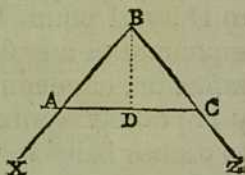
COROLARIO. De aquí se sigue, que si dos triángulos son totalmente iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales, y á ángulos iguales se oponen lados iguales.

NOTA. Adviértase que no es lo mismo igualdad absoluta que igualdad total, pues para que dos figuras sean absolutamente iguales, basta que sus areas ó espacios sean iguales: mas para que sean totalmente iguales es preciso que todos los lados y ángulos de la una sean iguales á todos los lados y ángulos de la otra, cada uno á su correspondiente.

PROPOSICION V. TEOREMA.

En el triángulo isósceles los ángulos sobre la base son iguales, como tambien los que se forman debaxo de ella alargando los dos lados iguales.

EXP. Sea el triángulo isósceles $A B C$, cuyos lados iguales $A B, B C$ se alarguen hasta los puntos X, Z : digo que los ángulos $B A C, B C A$ sobre la base son iguales, como tambien los ángulos $A C Z, C A X$ formados debaxo de ella.



PREPARACION. Concíbese la recta $B D$, que divide por medio al ángulo B .

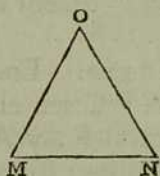
DEM. Los triángulos $A B D, C B D$ tienen el lado $A B = B C$ por suposicion, el lado $B D$ comun, y el ángulo $A B D = D B C$ por suposicion: luego (prop. iv) son totalmente iguales, y por consiguiente (cor. de la misma) el ángulo $B A D = B C D$. Asimismo por ser dichos triángulos totalmente iguales, se ajustarán exáctamente (ax. x) cayendo $A B$ sobre $B C$, y $A D$ sobre $D C$: luego el ángulo $X A D$ se ajustará sobre $D C Z$, y por consiguiente estos serán iguales: que era &c.

COROLARIO I. De lo dicho se infiere, que en el triángulo isósceles la recta $B D$, que divide por medio al ángulo vertical B , divide tambien á la base $A C$ en dos partes iguales, y es perpendicular sobre ella; porque resulta de la demostracion que el lado $A D = D C$, y el ángulo $B D A = B D C$: luego estos son rectos (def. x), y $B D$ perpendicular sobre $A C$.

COROLARIO II. En el triángulo isósceles si la recta $B D$ divide por medio á la base $A C$, será perpendicular á ella, y dividirá por medio al ángulo del vértice; porque en este caso los triángulos $A B D,$

$D B C$ tienen el lado $A D = D C$ por suposicion, $A B = B C$ por ser el triángulo $A B C$ isósceles, y por la misma razon el ángulo $B A D = B C D$: luego (prop. iv) serán totalmente iguales, los ángulos en D iguales, y el ángulo $A B C$ dividido en dos iguales.

COROLARIO III. Tambien se infiere que el triángulo $M O N$ equilátero es equiángulo, esto es, que todos sus ángulos son iguales entre sí; porque siendo $M O = O N$, será el ángulo $M = N$, y por ser $M O = M N$, será el ángulo $O = N$: luego (ax. i) los tres ángulos serán iguales.



PROPOSICION VI. TEOREMA.

Si dos ángulos de un triángulo son iguales, tambien los lados opuestos á dichos ángulos serán iguales entre sí.

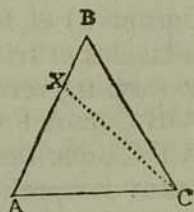
EXP. En el triángulo $A B C$ sea el ángulo $A = A C B$: digo que tambien el lado $A B = B C$.

PREP. Si se negáre, sea el lado $A B > B C$: córtese $A X = B C$ (prop. iii), y tírese $C X$ (post. i).

DEM. Los dos triángulos $X C A$, $B C A$ tienen el lado $A X$ del primero igual al lado $B C$ del segundo por construccion, el lado $A C$ comun, y el ángulo $A = A C B$ por lo supuesto: luego (prop. iv) dichos triángulos son totalmente iguales: pero esto es imposible (ax. ix) por ser el uno parte del otro: luego $A B$ no puede ser mayor ni menor que $B C$: y por consiguiente será igual: que era &c.

COROLARIO. De lo dicho se infiere que todo triángulo equiángulo es equilátero.

La proposicion vii se omite.



PROPOSICION VIII. TEOREMA.

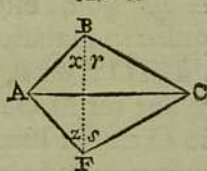
Si dos triángulos tienen los tres lados del uno iguales á los tres del otro, cada uno á su correspondiente, dichos triángulos serán totalmente iguales.

EXP. En los triángulos ABC , AFC sea el lado $AB = AF$, $BC = CF$, y AC igual ó comun á ambos: digo que el ángulo $ABC = AFC$, el ángulo $BAC = FAC$, y el ángulo $BCA = FCA$.

PREP. Tírese la recta BF , la qual ó caerá dentro de los triángulos, ó fuera, ó coincidirá con los lados AB , AF .

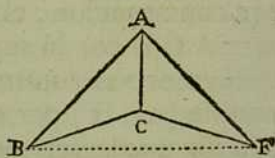
DEM. Caiga BF dentro (caso I): el triángulo BAF es isósceles por suponerse $AB = AF$: luego (prop. v) el ángulo $x = z$: por la misma razon es isósceles el triángulo BCF : luego el ángulo $r = s$, y (ax. II) será $x + r = z + s$, esto es, el ángulo $ABC = AFC$: luego los dos triángulos ABC , AFC , que tienen $AB = AF$, $BC = CF$, y los ángulos comprendidos iguales serán (prop. IV) totalmente iguales, y por consiguiente (cor. de la misma) el ángulo $BAC = CAF$, y el ángulo $BCA = FCA$.

CASO I.



CASO II. Caiga fuera la recta BF , y se verificará lo mismo; porque si de los ángulos ABF , AFB iguales (prop. v) se quitan los ángulos CBF , CFB iguales

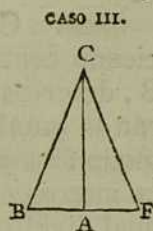
CASO II.



(prop. cit.), quedarán los ángulos ABC , AFC iguales (ax. III): luego los dos triángulos AFC , ACB son totalmente iguales (prop. IV).

CASO III. Coincida la recta BF con los lados

B A y A F, ó bien formen estos una misma recta B F: en este caso el triángulo B C F será isósceles, y (prop. v) el ángulo B = F: luego (prop. iv) los triángulos B C A, A C F son totalmente iguales.

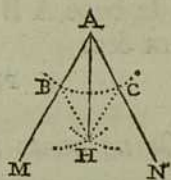


PROPOSICION IX. PROBLEMA.

Dividir un ángulo rectilíneo dado, en dos partes iguales.

EXP. Sea el ángulo rectilíneo M A N, y háyase de dividir en dos partes iguales.

OPER. Con qualquier intervalo A B, haciendo centro en A, describáse el arco B C, que de los lados A M, A N cortará las partes iguales A B, A C; y con el mismo intervalo desde los puntos B, C, como centros, describanse dos arcos, que harán la intersección H: tírese la recta A H, y se tendrá dividido el ángulo en dos partes iguales H A M, H A N.



PREP. Tírense las rectas B H, C H.

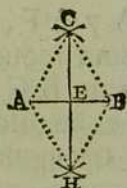
DEM. Los triángulos A B H, A C H tienen por la construcción el lado A B = A C, B H = C H, y A H común: luego (prop. viii) son totalmente iguales, y (cor. prop. iv) el ángulo B A H = C A H: que era &c.

PROPOSICION X. PROBLEMA.

Dividir una recta dada y terminada en dos partes iguales.

EXP. Sea dada la recta A B terminada, y háyase de dividir en dos partes iguales.

OPER. Con el intervalo AB , haciendo centro en los extremos A y B , describanse dos arcos, que harán la intersección C , y del mismo modo fórmese ácia la parte opuesta la intersección H : tírese CH , la qual dividirá á la recta AB por medio en el punto E .



PREP. Tírense las rectas AC , CB , AH , HB .

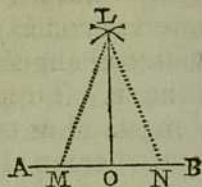
DEM. Los triángulos CAH , CBH tienen por la construcción el lado $AC = CB$, $AH = BH$, y CH comun: luego (prop. viii) son totalmente iguales, y (cor. prop. iv) el ángulo $ACH = HCB$: luego en el triángulo isósceles ACB la recta CE , que divide por medio al ángulo vertical C , divide también á la base AB por medio en E (cor. i prop. v): que era &c.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

De un punto dado en una linea recta levantar sobre ella una perpendicular.

EXP. Sea la recta AB , y en ella dado el punto O , desde el qual se pide levantar una perpendicular.

OPER. Desde el punto O en la recta AB con qualquier intervalo córtense las partes iguales OM , ON (prop. iii), y con un intervalo igual ó mayor que MN , desde los puntos M y N hágase la intersección L : tírese la recta LO , y será perpendicular sobre AB .



PREP. Tírense las rectas LM , LN .

DEM. Los triángulos LMO , $LO N$ tienen por la construcción el lado $ML = LN$, $OM = ON$, y LO comun: luego (prop. viii) son totalmente iguales, y (cor. prop. iv) el ángulo $LOM = LON$: luego

estos son rectos (def. x), y LO perpendicular sobre AB : que era &c.

PROPOSICION XII. PROBLEMA.

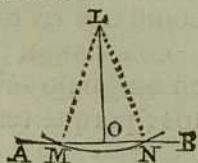
De un punto dado fuera de una recta baxar á ella una perpendicular.

EXP. Sea dado el punto L , desde el qual se pide baxar una perpendicular sobre la recta AB .

OPER. Desde L , con qualquier intervalo á discrecion, describase un arco, de suerte que corte á la recta dada (prolongada, si fuere necesario) en los puntos M, N : divídase MN por medio en O (prop. x): tírese OL , y esta será perpendicular sobre AB en el punto O .

PREP. Tírense las rectas LM, LN .

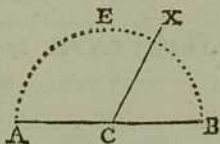
DEM. Los triángulos LMO, LNO tienen el lado $LM = LN$ (def. xv) $MO = ON$ por construccion, y LO comun: luego (prop. viii) son totalmente iguales, y (cor. prop. iv) el ángulo $OLM = OLN$: luego en el triángulo isósceles MLN la recta LO , que divide por medio al ángulo vertical L , es perpendicular la base (cor. i prop. v), y por consiguiente sobre la recta AB : que era &c.



PROPOSICION XIII. TEOREMA.

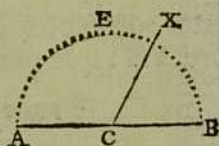
Quando una recta cae sobre otra, forma con ella dos ángulos, que ó serán rectos, ó juntos valdrán tanto como dos rectos.

EXP. Sobre AB caiga de qualquier modo la recta XC : digo que los ángulos XCA, XCB ó serán rectos, ó juntos valdrán tanto como dos rectos.



PREP. Haciendo centro en C describese el semicírculo A E B.

DEM. Si la recta X C cae perpendicular sobre A B, es evidente que formará dos ángulos rectos; pero si cae obliquamente, formará dos ángulos, que tienen por medida el semicírculo A E B; y siendo este medida de dos ángulos rectos (esc. II def. XVIII), los dos ángulos X C A, X C B juntos valdrán tanto como dos rectos: que era &c.



COROLARIO. Todos los ángulos que se formaren en un punto sobre una recta, juntos valdrán dos rectos; porque tendrán por medida un semicírculo.

PROPOSICION XIV. TEOREMA.

Si dos rectas concurren en un mismo punto de otra recta, formando con ella dos ángulos iguales á dos rectos, las dos harán una linea recta (fig. prop. XIII)

EXP. Sean dos rectas A C, B C, que concurren en el punto C de la C X, de tal suerte que los ángulos X C A, X C B juntos valgan tanto como dos rectos: digo que las dos líneas A C, B C formarán una misma linea A B, encontrándose directamente.

DEM. Por suponerse que los dos ángulos X C A, X C B valen dos rectos, su medida A E B será un semicírculo: luego los radios A C, B C se encontrarán directamente formando el diámetro A B; y por consiguiente harán una linea recta: que era &c.

PROPOSICION XV. TEOREMA.

Si dos rectas se cortan, harán los ángulos verticalmente opuestos iguales.

EXP. Córtense las dos rectas A B y C D en el

punto E: digo que los ángulos verticalmente opuestos $\angle BEC$, $\angle AED$ son iguales.

DEM. Porque DE cae sobre AB , los ángulos $\angle AED$, $\angle DEB$ juntos valen dos rectos (prop. XIII): también porque BE cae sobre CD , los ángulos $\angle DEB$ y $\angle BEC$ juntos valen dos rectos: luego (ax. I) los ángulos $\angle AED$ y $\angle DEB$ valen tanto como los $\angle DEB$, $\angle BEC$, y quitando de ambas partes el ángulo común $\angle BED$, quedará el ángulo $\angle AED = \angle BEC$: del mismo modo se demuestra que el ángulo $\angle AEC = \angle BED$ su vertical opuesto: que era &c.

COROLARIO. De aquí se sigue que quantos ángulos se forman en un punto sobre un plano, valen quatro rectos; porque todos juntos tendrán por medida toda la circunferencia de un círculo.

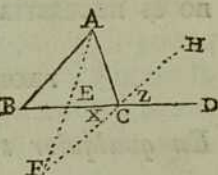
PROPOSICION XVI. TEOREMA.

En qualquier triángulo prolongado un lado, el ángulo externo es mayor que qualquiera de sus dos internos y opuestos.

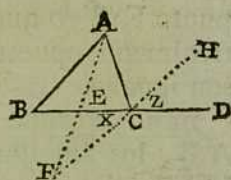
EXP. Sea el triángulo ABC , y en él prolongúese el lado BC ácia D : digo que el ángulo externo $\angle ACD$ será mayor que qualquiera de los dos internos opuestos $\angle ABC$, $\angle BAC$.

PREP. Lo primero: para demostrar que el ángulo externo $\angle ACD$ es mayor que el interno B , divídase el lado BC por medio en E (prop. x): tírese AE alargada á discrecion: córtese $EF = EA$, y tírese FC alargada ácia H .

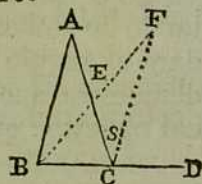
DEM. Los triángulos AEB , CEF tienen el lado



$AE = EF$, $BE = EC$ por construcción, y el ángulo $BEA = CEF$ (prop. xv): luego dichos triángulos (prop. iv) son totalmente iguales, y (cor. de la misma) el ángulo $B = X$; pero el ángulo $X = Z$ (prop. xv): luego (ax. i) el ángulo $B = Z$; y siendo el ángulo externo $ACD > Z$ (ax. ix), también será $ACD > B$: que es lo primero.



Lo segundo: para demostrar que el ángulo externo ACD es mayor que el interno A , se dividirá AC por medio en E , y tirando BE alargada, córtese $EF = BE$, y tírese FC . Los triángulos BEA , FEC tienen el lado $AE = EC$, $BE = EF$ por construcción, y los ángulos en E verticalmente opuestos iguales (prop. xv): luego (prop. iv) son totalmente iguales, y (cor. de la misma) el ángulo $A = S$; pero el ángulo externo $ACD > S$ (ax. ix): luego también será $ACD > A$: que era &c.



PROPOSICION XVII. TEOREMA.

En qualquier triángulo dos de sus ángulos son menores que dos rectos.

Se demostrará en la prop. xxxii, y hasta entonces no es necesaria.

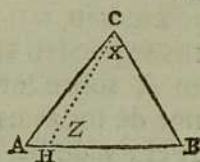
PROPOSICION XVIII. TEOREMA.

En qualquier triángulo el ángulo opuesto á mayor lado es mayor.

EXP. En el triángulo ACB sea el lado $AB > BC$:

digo que el ángulo $A C B$ opuesto al mayor lado $A B$, es mayor que el ángulo A opuesto al menor lado $B C$.

PREP. Del mayor lado $A B$ córtese $B H = B C$ (prop. III), y tírese $C H$.



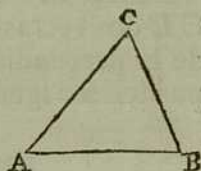
DEM. El triángulo $C B H$ es isósceles por construcción: luego (prop. V) los ángulos X, Z sobre la base $C H$ son iguales; y siendo (prop. XVI) el ángulo externo Z mayor que el interno A , también lo será el ángulo X ; pero el ángulo $A C B$ (ax. IX) es mayor que el ángulo X : luego el ángulo $A C B$ será mucho mayor que el ángulo A : que era &c.

COROLARIO. El triángulo escaleno tiene sus tres ángulos desiguales.

PROPOSICION XIX. TEOREMA.

En qualquier triángulo el lado opuesto á mayor ángulo es mayor.

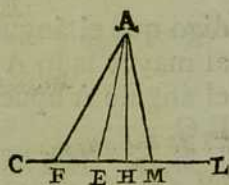
EXP. En el triángulo $A C B$ sea el ángulo $C > A$: digo que el lado $A B$ opuesto al mayor ángulo C es mayor que el lado $C B$ opuesto al menor ángulo A .



DEM. Si el lado $A B$ no es mayor que $B C$, será igual ó menor: no puede ser igual, porque si fuese $A B = B C$, sería el ángulo $C = A$ (prop. V), contra lo supuesto: tampoco $A B$ puede ser menor que $B C$; porque (prop. XVIII) el ángulo A sería mayor que el ángulo C , también contra lo supuesto: luego no pudiendo ser igual ni menor, será mayor: que era &c.

COROLARIO. El triángulo que tiene todos sus ángulos desiguales, es escaleno.

ESCOLIO I. De quantas rectas se pueden tirar desde un punto A sobre otra C L, la menor de todas es la perpendicular A H, y de las otras la mas próxima á ella A E es menor que la mas apartada A F; porque en el triángulo rectángulo A H E el ángulo externo A H L recto es mayor que el interno A E H (prop. xvi): luego este será agudo, y (def. xii) menor que el recto A H E: y por consiguiente el lado A E opuesto al ángulo recto es mayor que A H opuesto al ángulo agudo: tambien A E es menor que A F; porque siendo el ángulo externo A E H mayor que el interno A F E, y aquel agudo por lo demostrado, será este mas agudo, y el ángulo A E F obtuso (prop. xiii): luego en el triángulo A E F el lado A F opuesto al ángulo obtuso, es mayor que A E opuesto al agudo: por esto se dice que el punto A dista de la recta C L el valor de la perpendicular A H.



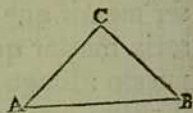
ESCOLIO II. De un punto A solo pueden caer sobre C L dos rectas iguales A M, A E, una de cada lado de la perpendicular A H; porque todas las demás no pueden ser iguales entre sí, como queda demostrado.

PROPOSICION XX. TEOREMA.

En todo triángulo qualesquiera dos lados juntos son mayores que el tercero.

EXP. Sea el triángulo A C B: digo que qualesquiera dos lados A C y C B juntos son mayores que A B.

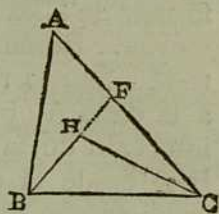
DEM. La recta A B es la mas breve distancia entre los puntos A y B (def. iv): luego qualquiera otra A C B será mayor que A B: que era &c.



PROPOSICION XXI. TEOREMA.

Si de los extremos de un lado de un triángulo se tiran dos rectas que se encuentren dentro de él, estas serán menores que los otros dos lados del triángulo, pero contendrán mayor ángulo.

EXP. En el triángulo B A C salgan de los extremos del lado B C las rectas B H, C H, que concurren dentro en qualquier punto H: digo lo primero, que B H y H C juntas son menores que B A y A C juntas: y lo segundo, que el ángulo B H C es mayor que el ángulo A.



PREP. Alárguese B H hasta cortar el lado A C en el punto F.

DEM. Lo primero: en el triángulo B A F los dos lados B A, A F juntos son mayores que B F (prop. xx), y añadiendo á ambas partes F C, los dos lados A B y A C son mayores que B F y F C (ax. iv): tambien en el triángulo H F C los dos lados H F, F C juntos son mayores que H C (prop. cit.), y añadiendo á ambas partes B H, serán los lados B F y F C mayores que B H y H C: luego los dos lados A B, A C juntos son mucho mayores que B H y H C: que es lo primero.

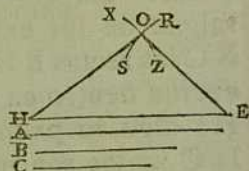
Lo segundo: en el triángulo F H C el ángulo externo B H C es mayor que el interno H F C (prop. xvi), y en el triángulo B A F el ángulo externo H F C es mayor que el interno A: luego el ángulo B H C es mucho mayor que el ángulo A: que era &c.

PROPOSICION XXII. PROBLEMA.

Formar un triángulo cuyos tres lados sean iguales á tres rectas dadas, con tal que cada dos de ellas juntas sean mayores que la tercera.

EXP. Sean las tres rectas dadas A, B, C: pídesse formar de ellas el triángulo H O E.

OPER. Desde qualquier punto H tírese la recta H E igual á la dada A (prop. II): con el intervalo de la recta B descríbase desde H el arco X Z, y



tambien con el intervalo de la recta C descríbase desde E el arco S R, y al punto O, en que se cortan los dos arcos, tírense las rectas E O, H O, y el triángulo H O E será el que se pide.

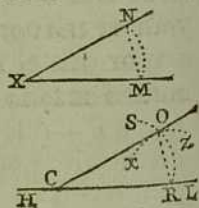
DEM. Por la construccion se tiene el lado H E = A, el lado H O = B, y el lado O E = C: luego el triángulo H O E está formado de tres rectas iguales á las dadas A, B, C: que era &c.

PROPOSICION XXIII. PROBLEMA.

En un punto dado en una recta, hacer un ángulo igual á otro dado.

EXP. En la recta H L sea dado el punto C, y se pide formar en él un ángulo igual al ángulo X.

OPER. Desde X con qualquier intervalo X M descríbase un arco M N, que cortará los lados del ángulo en los puntos N, M: desde C con el mismo intervalo X M descríbase el arco R S, y desde R con



el intervalo de $M N$ describase el arco $x z$, que cortará al primero en el punto O : tírese la recta CO , y el ángulo OCR será igual al dado X .

PREP. Tírense las rectas $M N$, RO .

DEM. Los triángulos XNM , COR tienen los tres lados del uno iguales á los tres del otro por construcción: luego (prop. VIII) son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $OCR = X$: que era &c.

PROPOSICION XXIV. TEOREMA.

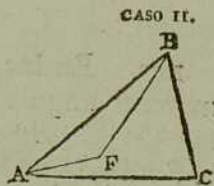
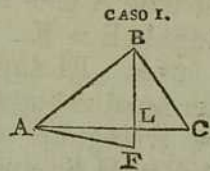
Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, cada uno á su correspondiente, y los ángulos comprendidos fueren desiguales, el que tuviere mayor ángulo comprendido, tendrá mayor base.

EXP. En los triángulos ABC , ABF sea el lado AB igual ó común á ambos, el lado $BC = BF$, y el ángulo $ABC > ABF$: digo que la base AC será mayor que la base AF .

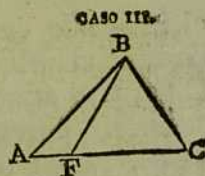
DEM. El punto F puede caer fuera del triángulo ABC , ó dentro, ó en la misma base AC .

CASO I. Si cae fuera el punto F , la recta AC cortará á la BF en el punto L , y en el triángulo BLC los lados $BL + LC$ (prop. xx) son mayores que BC , ó que su igual BF : luego quitando el segmento común BL , quedará $LC > LF$, y añadiendo á ambas partes AL , será $AC > AL + LF$; pero $AL + LF > AF$ (prop. cit.): luego AC es mucho mayor que AF .

CASO II. Si el punto F cae dentro, serán los lados $BC + CA$ mayores que $BF + AF$ (prop. xxi), y quitando de una parte BC , y de la otra su igual BF , quedará $AC > AF$.



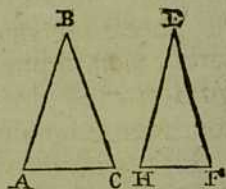
CASO III. Si el punto F cae en la recta A.C, es evidente que el lado $AC > AF$, esto es, el todo mayor que la parte: luego si dos triángulos &c.



PROPOSICION XXV. TEOREMA.

Si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, cada uno á su correspondiente, el que tuviere mayor base, tendrá mayor ángulo vertical.

EXP. Sean los triángulos ABC, HEF, y en ellos el lado $AB = HE$, y el lado $BC = EF$: digo que si la base $AC > HF$, también el ángulo $B > E$.



DEM. El ángulo B no puede ser igual al ángulo E; porque en este caso (prop. iv) los triángulos serían totalmente iguales, y la base $AC = HF$, que es contra lo supuesto: tampoco el ángulo B puede ser menor que el ángulo E; porque entonces sería la base $AC < HF$ (prop. xxiv), que también es contra lo supuesto: luego no pudiendo ser igual ni menor, será el ángulo $B > E$: que era &c.

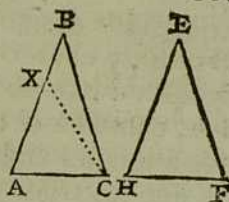
PROPOSICION XXVI. TEOREMA.

Si dos triángulos tienen dos ángulos del uno iguales á dos del otro, y un lado igual á un lado, cada cosa á su correspondiente, los dos triángulos serán totalmente iguales.

EXP. En los triángulos ABC, HEF sea lo primero el ángulo $A = H$, el ángulo $ACB = F$, y el lado AC adyacente á estos ángulos igual al lado HF: digo que los triángulos son totalmente iguales.

PREP. Si se negare, sea el lado $AB > HE$: córtese $AX = HE$, y tírese XC .

DEM. Los triángulos AXC , HEF tienen el lado $AX = HE$ por construcción, $AC = HF$ por lo supuesto, y el ángulo $A = H$: luego (prop. iv) son totalmente iguales, y el ángulo $ACX = F$; pero el ángulo $F = ACB$ por lo supuesto: luego el ángulo $ACX = ACB$, esto es, la parte igual al todo, lo que es imposible (ax. ix); y por consiguiente AB no puede ser mayor ni menor que HE : luego es igual. Siendo pues $AB = HE$, $AC = HF$, y el ángulo $A = H$, los dos triángulos ABC , HEF son totalmente iguales (prop. iv).



Lo segundo: si se supone $AC = HF$, el ángulo $A = H$, y el ángulo $B = E$, también se verifica que los dos triángulos son totalmente iguales; porque si se dice que AB es mayor que HE , córtese $AX = HE$, y tírese XC . En los triángulos AXC , HEF se tiene $AX = HE$ por construcción, $AC = HF$, y el ángulo $A = H$: luego (prop. iv) dichos triángulos son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $AXC = E$; pero el ángulo $E = B$ por lo supuesto: luego el ángulo $AXC = B$: lo que es imposible (prop. xvi), por ser el uno externo respecto del otro: y así el lado AB no pudiendo ser mayor ni menor que HE , será igual. Siendo pues $AB = HE$, $AC = HF$, y el ángulo $A = H$, los dos triángulos ABC , HEF serán totalmente iguales (prop. iv): que era &c.

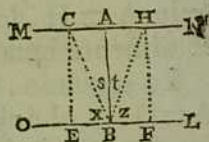
ESCOLIO. Se ha dicho que cada cosa ha de ser igual á su correspondiente; porque pueden tener dos ángulos y un lado iguales los triángulos, y ser desiguales, esto es, puede ser el ángulo $A = H$, el ángulo $ACB = F$, y el lado $AC = EF$, y ser los

triángulos desiguales, ó bien ser el ángulo $A = H$, $B = E$, y el lado $AC = EF$; de suerte que los lados iguales ó han de ser adyacentes á los ángulos iguales, como en el caso primero, ó han de ser opuestos á iguales ángulos, como en el caso segundo, para que los triángulos sean totalmente iguales.

LEMA.

Entre dos paralelas la recta perpendicular á la una es perpendicular á la otra; y si una recta es perpendicular á otras dos, estas serán paralelas.

EXP. Lo primero: sean las rectas MN , OL paralelas, y la AB perpendicular sobre OL : digo que tambien será perpendicular sobre MN .



PREP. En la recta OL con qualquier intervalo desde el punto B córtese $BE = BF$: levántense en los puntos E, F las perpendiculares EC, FH sobre OL (prop. xi), y tírense las rectas BC, BH .

DEM. Los triángulos ECB, BHF tienen el lado $EC = FH$ (ax. xii), $BE = BF$ por construccion, y los ángulos en E y F rectos é iguales (ax. xi): luego (prop. iv) son totalmente iguales, y por consiguiente el lado $CB = BH$, y los ángulos X, Z iguales, que quitados de los rectos é iguales ABE, ABF , quedará (ax. iii) el ángulo $s = t$: luego los triángulos CAB, HAB , que tienen por lo demostrado $CB = HB$, el ángulo $s = t$, y el lado AB comun, son totalmente iguales (prop. iv), y por consiguiente el ángulo $BAC = BAH$: luego estos son rectos (def. x), y AB perpendicular sobre MN .

Lo segundo: sea AB perpendicular á las rectas MN, OL : digo que estas serán paralelas; porque

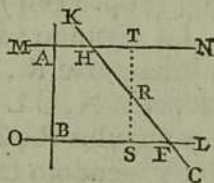
cortando $AC = AH$, baxando las perpendiculares CE, HF sobre OL , y tiradas las rectas CB, HB , se tendrán los triángulos CAB, HAB , en los cuales los ángulos en A son rectos por suposicion, el lado AB comun, y $AC = AH$ por construccion: luego (prop. iv) serán totalmente iguales, y por consiguiente el lado $CB = HB$, y los ángulos s, t iguales, que quitados de los rectos ABE, ABF , quedará (ax. iii) el ángulo $X = Z$: tambien los triángulos CBE, HBF , que tienen los ángulos en E y F rectos por construccion, el ángulo $X = Z$ por lo demostrado, y el lado $CB = HB$, serán totalmente iguales (prop. xxvi), y por consiguiente $CE = HF$: luego siendo estas perpendiculares é iguales, las rectas MN, OL serán equidistantes y paralelas: que era &c.

PROPOSICION XXVII. TEOREMA.

Si una recta corta á otras dos, haciendo con ellas los ángulos alternos iguales, dichas dos rectas serán paralelas.

EXP. Corte la recta CK á las MN, OL , haciendo los ángulos alternos NHC, KFO iguales: digo que MN, OL serán paralelas.

PREP. Supuesto que los ángulos alternos sean obliquos, divídase FH por medio en R (prop. x): báxese desde el punto R la RS perpendicular sobre OL (prop. xii), y alárguese hasta cortar á MN en el punto T .



DEM. Los triángulos RHT, RFS tienen por la construccion el lado $RH = RF$, los ángulos en R verticalmente opuestos iguales (prop. xv), y el ángulo $THR = RFS$ por lo supuesto: luego (prop. xxvi)

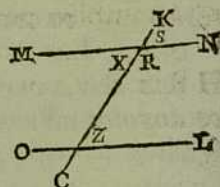
son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $HTR = RSF$; pero este por la construcción es recto: luego también lo será el ángulo HTR , y (II part. del lem.) siendo TS perpendicular á las rectas MN, OL , estas serán paralelas: que era &c.

Si los ángulos alternos MAB, ABL fuesen rectos, sería AB perpendicular á las rectas MN, OL y (II part. del lem.) estas serían paralelas.

PROPOSICION XXVIII. TEOREMA.

Si una recta corta á otras dos, haciendo con ellas el ángulo externo igual á su interno y opuesto, ó bien los dos internos de una misma parte iguales á dos rectos, dichas dos rectas serán paralelas.

EXP. Corte la recta CK como quiera á las MN, OL , haciendo lo primero el ángulo externo S igual á su interno y opuesto Z : digo que las MN, OL serán paralelas.



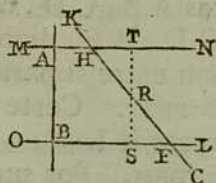
DEM. Por lo supuesto se tiene el ángulo $S = Z$, y siendo también el ángulo $S = X$ (prop. xv), será (ax. I) el ángulo $X = Z$; pero estos son alternos: luego (prop. xxvii) las rectas MN, OL son paralelas.

Lo segundo: sean los dos ángulos internos de una misma parte R, Z iguales á dos rectos: digo que las rectas MN, OL son paralelas; porque siendo dichos dos ángulos R, Z iguales á dos rectos por lo supuesto, y siéndolo también (cor. prop. xiii) los dos ángulos X, R , estos serán iguales á aquellos, esto es, se tendrá $X + R = Z + R$, y quitando de una y otra parte el ángulo R , quedará (ax. iii) el ángulo $X = Z$; pero estos son alternos: luego (prop. xxvii) las rectas MN, OL son paralelas: que era &c.

PROPOSICION XXIX. TEOREMA.

Si una recta cortare á dos paralelas, hará los ángulos alternos iguales, el externo igual á su interno y opuesto, y los dos internos de una misma parte iguales á dos rectos.

EXP. Sean las rectas MN , OL paralelas, y cortadas por la KC obliquamente: digo lo primero, que los ángulos alternos NHC , KFO serán iguales.



PREP. Divídase HP por medio en R (prop. x): báxese desde el punto R la RS perpendicular sobre OL , y continúese hasta cortar á la MN en el punto T , á la qual será tambien perpendicular (por el lem.).

DEM. Los triángulos RHT , RFS tienen el lado $HR = RF$ por construccion, los ángulos en T y S rectos é iguales, y los verticalmente opuestos en R iguales (prop. xv): luego son totalmente iguales (prop. xxvi), y por consiguiente el ángulo $THR = RFS$ su alterno.

Lo segundo digo: que el ángulo externo KHM es igual á su interno y opuesto KFO ; porque el ángulo $KHM = NHC$ (prop. xv); pero $NHC = KFO$ por lo demostrado: luego (ax. 1) $KHM = KFO$.

Lo tercero digo: que los dos internos de una misma parte MHC y KFO son iguales á dos rectos; porque los dos ángulos NHC , MHC valen dos rectos (prop. xiii); pero $NHC = KFO$ por lo demostrado: luego los dos ángulos MHC , KFO juntos valen dos rectos: que era &c.

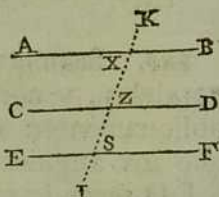
Si las paralelas son cortadas por la recta AB perpendicular á ambas, es evidente la proposicion, por ser todos los ángulos en A y B rectos é iguales.

PROPOSICION XXX. TEOREMA.

Las lineas rectas paralelas á otra, son tambien paralelas entre sí.

EXP. Sean paralelas las rectas AB, CD , como tambien las CD, EF : digo que AB y EF son entre sí paralelas.

PREP. Corte á las paralelas la recta KI .



DEM. Por suponerse AB, CD paralelas, será el ángulo X igual á su alterno Z (prop. xxix), y por suponerse CD, EF paralelas, será el ángulo externo Z igual á su interno y opuesto S (prop. cit.): luego (ax. 1) el ángulo $X = S$; y siendo estos alternos, serán las rectas AB, EF paralelas entre sí (prop. xxvii): que era &c.

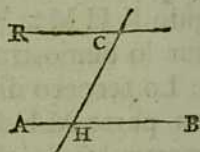
PROPOSICION XXXI. PROBLEMA.

Á una recta dada tirar una paralela que pase por un punto dado.

EXP. Sea la recta dada AB , y se pide tirar á ella una paralela que pase por el punto C .

OPER. Desde el punto dado C tírese la recta CH á qualquier punto H de la recta AB : fórmese el ángulo $HCR = CHB$ (prop. xxiii), y será RC paralela á AB .

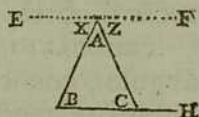
DEM. Por la construccion el ángulo $RCH = CHB$; pero estos son alternos: luego RC y AB son paralelas (prop. xxvii): que era &c.



PROPOSICION XXXII. TEOREMA.

En qualquier triángulo los tres ángulos son iguales á dos rectos, y alargando uno de sus lados, el ángulo externo es igual á los dos internos y opuestos.

EXP. Sea el triángulo B A C: digo lo primero, que sus tres ángulos A, B, C son iguales á dos rectos.



PREP. Por el punto A del vértice tírese E F paralela á B C (prop. xxxi).

DEM. Porque á las paralelas E F, B C las corta la recta A B, será el ángulo $B = X$ su alterno (prop. xxix): tambien porque la recta A C corta á las mismas paralelas, será el ángulo $C = Z$ su alterno (prop. cit.): luego (ax. ii) se tendrá $B + C = X + Z$; y añadiendo á ambas partes el ángulo A, serán los tres ángulos $A + B + C$ iguales á los tres $X + A + Z$; pero estos son iguales á dos rectos (cor. prop. xiii): luego tambien lo son los tres ángulos del triángulo B A C: que era lo primero.

Lo segundo digo: que alargando el lado B C ácia H, el ángulo externo A C H es igual á los dos internos y opuestos A y B; porque siendo el ángulo $X = B$ por lo demostrado, añadiendo á uno y otro el ángulo A, se tendrá (ax. ii) el ángulo X junto con el ángulo A, ó bien el ángulo E A C igual á los dos A y B; pero el ángulo E A C $=$ A C H su alterno (prop. xxix): luego (ax. i) el ángulo externo A C H es igual á los dos internos opuestos A y B: que era &c.

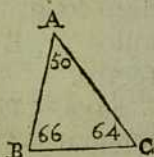
COROLARIO I. Siendo los tres ángulos de un triángulo iguales á dos rectos, se sigue que qualquiera dos ángulos de un triángulo son menores que dos rectos (que es la prop. xvii).

COROLARIO II. Los tres ángulos juntos de un triángulo son iguales á los tres de otro ; porque así los unos como los otros valen dos rectos ó 180 grados.

COROLARIO III. Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro , el tercero será igual al tercero.

COROLARIO IV. Si un triángulo tiene un ángulo recto ú obtuso , los otros dos serán agudos.

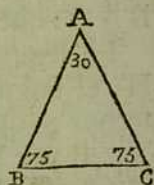
COROLARIO V. En qualquier triángulo , conocido el valor de dos ángulos , se tendrá el tercero , por ser el complemento á dos rectos ó á 180 grados. Por exemplo : en el triángulo B A C sea el ángulo $A = 50$, y el ángulo $B = 66$, será la suma de ambos 116 , que restados de 180 , quedan 64 por el valor del ángulo C.



COROLARIO VI. En el triángulo equilátero cada uno de sus ángulos vale 60 grados , que es el tercio de dos rectos.

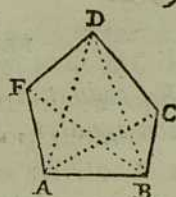
COROLARIO VII. En el triángulo isósceles rectángulo cada ángulo sobre la base es semirecto , esto es , vale 45 grados.

COROLARIO VIII. En qualquier triángulo isósceles conocido un ángulo , se tiene el valor de cada uno de los otros. Por exemplo : en el triángulo isósceles B A C sea el ángulo vertical $A = 30$ grados : restando 30 de 180 , se tendrá 150 por el valor de los dos ángulos B y C , y como son iguales , cada uno valdrá 75 : si se da un ángulo á la base $B = 75$, tambien será $C = 75$, cuya suma es 150 , que restados de 180 , dará el ángulo vertical A de 30 grados.



COROLARIO IX. En qualquier rectilineo si del número de sus lados se quitan 2 , y se duplica el residuo , se tendrán los ángulos rectos á que equivalen

todos los ángulos del rectilíneo. Por exemplo: en el rectilíneo $A B C D F$ sean los lados 5: quitando 2, quedan 3, cuyo duplo 6 indica que los 5 ángulos del rectilíneo valen 6 rectos; porque si de qualquier ángulo B ó A se tiran rectas á los demás ángulos, resultarán tres triángulos; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos, se sigue que los ángulos de todos los triángulos juntos, ó bien del rectilíneo, valen seis rectos. Si los lados del rectilíneo fueren seis, quitando 2, quedarán 4, cuyo duplo 8 expresará que los ángulos de este rectilíneo valen 8 rectos; y así de los demás.

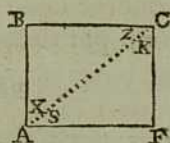


PROPOSICION XXXIII. TEOREMA.

Las rectas que unen dos paralelas é iguales de una misma parte, son tambien iguales y paralelas.

EXP. Sean las rectas $A F$, $B C$ iguales y paralelas: digo que las rectas $A B$, $F C$ que las unen, son tambien iguales y paralelas.

PREP. Tírese la diagonal $A C$.

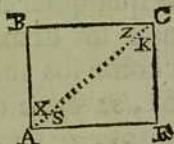


DEM. Porque á las paralelas $A F$, $B C$ las corta la recta $A C$, los ángulos alternos Z , S son iguales (prop. xxix): tambien $A F = B C$ por lo supuesto, y $A C$ comun á los dos triángulos $A B C$, $A F C$: luego son totalmente iguales (prop. iv), y por consiguiente $A B = F C$. Asimismo por la total igualdad de los triángulos será el ángulo $K = X$; y porque á las rectas $A B$, $F C$ las corta $A C$ haciendo los ángulos alternos iguales K y X , serán paralelas (prop. xxvii): luego las rectas $A B$, $F C$ son iguales y paralelas.

PROPOSICION XXXIV. TEOREMA.

En todo paralelogramo los lados y ángulos opuestos son iguales, y la diagonal le divide en dos partes iguales.

EXP. Sea BF un paralelogramo: digo que el lado $AB = CF$, $BC = AF$, el ángulo $B = F$, y el ángulo $BAF = BCF$, y que la diagonal AC divide al paralelogramo en dos triángulos totalmente iguales.

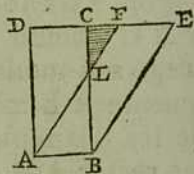


DEM. Porque á las paralelas BC , AF las corta AC , será el ángulo $Z = S$ (prop. xxix), y porque á las paralelas BA , CF las corta tambien AC , será el ángulo $K = X$: luego los triángulos ABC , $AF C$ por tener el lado AC comun, el ángulo $Z = S$, y $X = K$, serán totalmente iguales (prop. xxvi), y por consiguiente será el lado $BA = CF$, $BC = AF$, el ángulo $B = F$, y el ángulo $BAF = BCF$, por componerse cada uno de dos ángulos iguales: luego en todo paralelogramo &c.

PROPOSICION XXXV. TEOREMA.

Los paralelogramos que tienen una misma base, y estan entre unas mismas paralelas, son iguales.

EXP. Sean los paralelogramos DB , FB , que tengan una misma base AB , y esten entre las mismas paralelas AB , DE : digo que será el paralelogramo $DB = FB$.



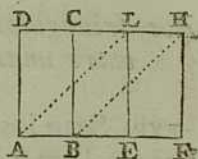
DEM. El lado $DC = AB$ (prop. xxxiv), y por la misma $FE = AB$: luego (ax. i) $DC = FE$; y añadiendo á ambas rectas CF , se tendrá (ax. ii) $DF = CE$: tambien (prop. xxxiv) $AD = BC$, y $AF = BE$: luego (prop. viii) los triángulos

ADF y BCE son totalmente iguales; y quitando el comun CLF , quedará (ax. III) el trapecio $ADCL = BLFE$; y añadiendo á uno y otro el comun triángulo ALB , resultará (ax. II) el paralelogramo $DB = FB$: que era &c.

PROPOSICION XXXVI. TEOREMA.

Si dos paralelogramos tienen iguales bases, y estan entre unas mismas paralelas, serán iguales.

EXP. Sean dos paralelogramos AC , EH , que tengan iguales bases AB , EF , y estén entre las mismas paralelas DH , AF : digo que será el paralelogramo $AC = EH$.



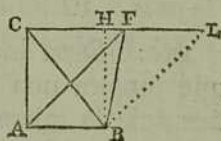
PREP. Tírense las rectas AL , BH .

DEM. Por lo supuesto se tiene $AB = EF$, y (prop. XXXIV) $EF = LH$: luego (ax. I) $AB = LH$, y siendo estas paralelas, serán tambien iguales y paralelas las rectas que las unen AL , BH (prop. XXXIII), y por consiguiente AH es un paralelogramo (def. XXXV); pero el paralelogramo $AC = AH$ (prop. XXXV), y por la misma el paralelogramo $AH = EH$: luego (ax. I) el paralelogramo $AC = EH$: que era &c.

PROPOSICION XXXVII. TEOREMA.

Los triángulos que tienen una misma base, y estan entre las mismas paralelas, son iguales.

EXP. Sean los triángulos ACB , AFB , que tengan una misma base AB , y estén entre las paralelas AB , CL : digo que será el triángulo $ACB = AFB$.



PREP. Por el punto B tírese B H paralela á A C y B L paralela á A F (prop. xxxi).

DEM. El triángulo A C B es mitad del paralelogramo A H (prop. xxxiv), y por la misma el triángulo A F B mitad del paralelogramo A L; pero dichos paralelogramos son iguales (prop. xxxv): luego los triángulos A C B, A F B, que son sus mitades, serán tambien iguales (ax. viii): que era &c.

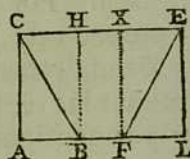
PROPOSICION XXXVIII. TEOREMA.

Los triángulos que tienen iguales bases, y estan entre unas mismas paralelas, son iguales.

EXP. Sean los triángulos A C B, F E L, que tengan la base $A B = F L$, y esten entre las mismas paralelas C E, A L: digo que será el triángulo $A C B = F E L$.

PREP. Por los puntos B, F tírense las rectas B H, F X paralelas á las A C, E L.

DEM. Los paralelogramos A H, L X son iguales (prop. xxxvi): luego sus mitades, que son los triángulos A C B, F E L, serán tambien iguales (ax. viii): que era &c.



PROPOSICION XXXIX. TEOREMA.

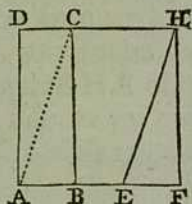
Si dos triángulos iguales tienen una misma base, y estan constituidos ácia una misma parte, estarán entre unas mismas paralelas.

EXP. Sean los triángulos iguales A C B, A F B, que tengan una misma base A B, y esten constituidos ácia la misma parte: digo que estarán entre las mismas paralelas A B, C F.

PROPOSICION XLI. TEOREMA.

Si un paralelogramo y un triángulo tienen una misma ó igual base, y estan entre unas mismas paralelas, el paralelogramo será duplo del triángulo.

EXP. Sea el paralelogramo DB , y el triángulo EHF , que tengan la base $AB = EF$: digo que el paralelogramo DB es duplo del triángulo EHF .



PREP. En el paralelogramo DB tírese la diagonal AC .

DEM. Los triángulos ACB , EHF son iguales (prop. xxxviii); pero el paralelogramo DB es duplo del triángulo ACB (prop. xxxiv): luego tambien lo es del triángulo EHF : que era &c.

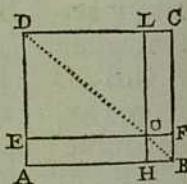
COROLARIO. Si un paralelogramo y un triángulo estan entre unas mismas paralelas, y el triángulo tiene dupla base, será igual al paralelogramo.

La proposicion XLII es problema que se demostrará mas facilmente en la Geometría Práctica.

PROPOSICION XLIII. TEOREMA.

En todo paralelogramo los complementos son iguales.

EXP. Sea el paralelogramo AC : su diagonal DB , y por un punto O de ella pasen las rectas EF , HL paralelas á los lados: digo que los complementos AO , OC serán iguales.



DEM. Los triángulos ADB , DBC son iguales (prop. xxxiv), y por la misma lo son tambien los

triángulos DEO , DLO , y los triángulos $HO B$, OFB : luego si del triángulo ADB se quitan los triángulos DEO , OHB , y del triángulo DBC , los triángulos DLO , OFB , quedará (ax. III) el complemento $AO = OC$: que era &c.

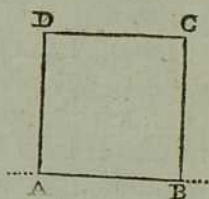
Las proposiciones XLIV y XLV son problemas que se reservan para la Geometría Práctica.

PROPOSICION XLVI. PROBLEMA.

Sobre una recta dada y terminada formar un quadrado.

EXP. Sea dada la recta AB terminada, y se pide formar sobre ella un quadrado.

OPER. Sobre AB en los puntos A y B levántense perpendiculares é iguales á AB las rectas AD , BC , y tirando DC , quedará formado el quadrado.



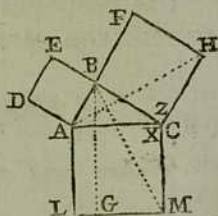
DEM. Las rectas AD , BC son iguales por construcción, y (prop. xxviii) paralelas: luego las rectas AB , DC , que las unen, son también iguales y paralelas (prop. xxxiii), y por consiguiente AC es un paralelogramo equilátero; y siendo los ángulos en A y B rectos, lo serán igualmente D y C sus opuestos (prop. xxxiv): luego (def. xxix) es un quadrado: que era &c.

COROLARIO. Si dos rectas son iguales, también lo serán sus quadrados; y si dos quadrados son iguales, también lo serán sus lados ó raíces.

PROPOSICION XLVII. TEOREMA.

En todo triángulo rectángulo el quadrado formado sobre la hipotenusa es igual á los quadrados formados sobre los otros dos lados.

EXP. Sea el triángulo ABC rectángulo en B : digo que el quadrado AM formado sobre la hipotenusa AC , es igual á los otros dos quadrados juntos AE , CF hechos sobre los otros dos lados AB , BC .



PREP. Tírense las rectas AH , BM , y por el punto B la BG paralela á CM .

DEM. Los triángulos ACH , BCM tienen el lado AC del primero igual al lado CM del segundo (def. xxix), por ser lados del quadrado AM ; y asimismo el lado CH del primero igual al lado CB del segundo, por ser lados del quadrado CF : tambien por ser el ángulo $X = Z$ (ax. xi), si á uno y otro se añade el ángulo ACB , se tendrá (ax. ii) el ángulo $ACH = BCM$, y por consiguiente dichos triángulos son totalmente iguales (prop. iv); pero el triángulo ACH es mitad del quadrado CF (prop. xli), y el triángulo BCM mitad del paralelogramo CG por la misma: luego (ax. vii) el quadrado CF es igual al paralelogramo CG . Del mismo modo se prueba que el quadrado AE es igual al paralelogramo AG : luego el quadrado AM formado sobre la hipotenusa AC es igual á la suma de los quadrados de los otros dos lados AB , BC , y por consiguiente en todo triángulo rectángulo &c.

COROLARIO I. En todo triángulo rectángulo el quadrado de un lado AB adyacente al ángulo recto es igual á la diferencia entre el quadrado de la hipotenusa AC , y el del otro lado BC ,

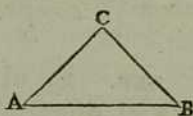
esto es $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$

porque siendo por lo demostrado $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

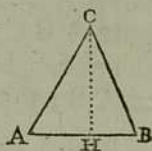
si de una y otra parte se quita $\overline{BC}^2 = \overline{BC}^2$

se tendrá (ax. III) $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$

COROLARIO II. En todo triángulo isósceles rectángulo A C B, el quadrado de la hipotenusa A B es duplo del quadrado de qualquiera de los otros dos lados A C, C B, esto es .. $\overline{AB}^2 = 2 \overline{AC}^2$ ó bien $\overline{AB}^2 = 2 \overline{CB}^2$



ESCOLIO I. En qualquier triángulo A C B si desde el ángulo C se baxa la perpendicular C H sobre la base A B, la diferencia entre los quadrados de los lados A C, C B será igual á la diferencia entre los quadrados de los segmentos A H, H B de la base hechos por la perpendicular, esto es $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{HB}^2$



porque siendo los ángulos en } $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$
H rectos, será (prop. XLVII) }
y $\overline{CB}^2 = \overline{HB}^2 + \overline{HC}^2$

luego (ax. III) $\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{HB}^2$

ESCOLIO II. Tambien el quadrado de un lado A C junto con el quadrado del segmento alterno H B es igual al quadrado del otro lado C B junto con el quadrado del segmento alterno A H, esto es $\overline{AC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AH}^2$

porque siendo (prop. XLVII) $\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2$

si se añade á entrambas partes $\overline{HB}^2 = \overline{HB}^2$

se tendrá (ax. II) .. $\overline{AC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 + \overline{HB}^2$

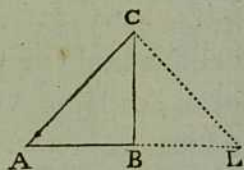
y siendo (prop. XLVII) $\overline{CB}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{HB}^2$

será substituyendo $\overline{AC}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{HA}^2$

PROPOSICION XLVIII. TEOREMA.

Si el quadrado de un lado de un triángulo es igual á los quadrados de los otros dos lados, el ángulo comprehendido por estos será recto.

EXP. En el triángulo A B C sea el quadrado descrito sobre el lado A C igual á los quadrados descritos sobre los otros dos lados A B, B C: digo que el ángulo A B C será recto.



PREP. Levantese sobre B C la perpendicular B L $\perp$ A B, y tírese C L.

DEM. Por lo supuesto se tiene $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
 tambien por ser A B $\perp$ B L, } $\overline{AB}^2 = \overline{BL}^2$
 será (cor. prop. XLVI) }
 y substituyendo se tendrá $\overline{AC}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{BC}^2$
 tambien (prop. XLVII) $\overline{CL}^2 = \overline{BL}^2 + \overline{BC}^2$
 luego (ax. I) $\overline{AC}^2 = \overline{CL}^2$
 y (cor. prop. XLVI) A C = C L:
 por consiguiente los triángulos A B C, C B L serán (prop. VIII) totalmente iguales, y el ángulo A B C = C B L; pero este es recto por construcción: luego tambien lo será el ángulo A B C: que era &c.

LIBRO SEGUNDO.

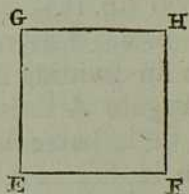
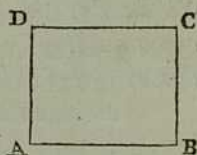
En este libro se consideran los rectángulos y cuadrados que se forman sobre una línea recta dividida en partes: su inteligencia es de grande utilidad en la Matemática, especialmente para el Álgebra; y aunque sus teoremas son oscuros, se facilitarán sus demostraciones, así por líneas, como por el cálculo literal, explicándolas también por números.

DEFINICIONES.

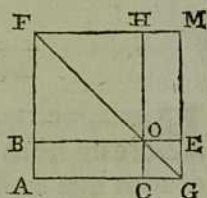
I. Potencia de dos líneas es el rectángulo que se forma ó puede formar de ellas, como si se considera que la recta $A D$ se mueve por la $A B$, conservándose siempre perpendicular: en llegando el punto A al punto B , y el punto D al punto C , habrán formado las dos líneas $A B$, $A D$ el rectángulo $A D C B$ y esta superficie es la potencia de dichas líneas, de las cuales la una, como $A B$, determina la longitud, y la otra $A D$ la latitud, y una y otra se llaman lados ó raíces.

Si la línea $A B$ se expresa por el número 6, y la $A D$ por el número 4, el producto 24 será la potencia de los dos números 6 y 4, y estos se llaman raíces.

Si las dos líneas fueren iguales, formarán un cuadrado, y se llamará potencia de dos líneas iguales: como si de las líneas iguales $E F$, $E G$ se forma el cuadrado $E H$; y así siendo $E F$, ó bien $E G = 6$, el cuadrado $E H = 36$ es la potencia de dichas dos líneas, ó del número 6.



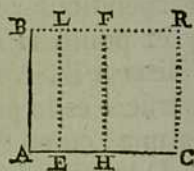
II. Si en un paralelogramo rectángulo, como AM , se tira la diagonal FG , y por un punto de ella O se tiran las rectas BE , HC paralelas á los lados del paralelogramo rectángulo, quedará este dividido en quatro rectángulos, de los cuales los dos complementos AO , OM juntos con el rectángulo CE componen la figura que se llama esquadra ó gnomon.



PROPOSICION I. TEOREMA.

Si de dos lineas rectas la una se divide en partes como quiera, y la otra no, el rectángulo hecho de las dos es igual á los rectángulos hechos de la no dividida en cada una de las partes de la dividida.

EXP. Sea la linea AC dividida como quiera en los puntos E y H , y la no dividida AB : digo que el rectángulo hecho de AC en AB es igual á los rectángulos hechos de la AB en cada una de las partes AE , EH y HC de la recta AC .



PREP. Levántese AB perpendicular sobre AC (prop. xi lib. i): perfecciónese el rectángulo AR , y tírense las rectas EL , HF paralelas á AB (prop. xxxi lib. i).

DEM. Las rectas EL , HF y CR son iguales á la no dividida AB (prop. xxxiv lib. i): luego el rectángulo AL está contenido de la no dividida AB , y de la parte AE : el rectángulo EF está contenido de la $EL = AB$, y de la parte EH ; y el rectángulo HR está contenido de la $HF = AB$, y de la parte HC ; pero estos tres rectángulos componen

el total AR , que se ha formado de la dividida AC , y de la no dividida AB : luego si de dos líneas rectas la una se divide en partes &c.

POR LETRAS. Sea la no dividida $AB = a$
la dividida $AC = d$

los segmentos $\begin{cases} AE = e \\ EH = q \\ HC = b \end{cases}$

será (ax. ix) $AC = d = e + q + b$

y multiplicando por $AB = a = a$

se tendrá (ax. v) $AC \times AB = ad = ae + aq + ab$

también $AB \times AE + AB \times EH + AB \times HC = ae + aq + ab$

luego (ax. i) $AC \times AB = AB \times AE + AB \times EH + AB \times HC$

POR NÚMEROS. Sea la no dividida $AB = 8$

la dividida $AC = 10$

los segmentos $\begin{cases} AE = 2 \\ EH = 3 \\ HC = 5 \end{cases}$

será (ax. ix) $AC = 10 = 2 + 3 + 5$

y multiplicando por $AB = 8 = 8$

se tendrá (ax. v) $AC \times AB = 80 = 16 + 24 + 40$

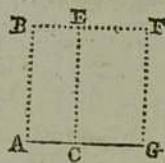
también $AB \times AE + AB \times EH + AB \times HC = 16 + 24 + 40$

luego (ax. i) $AC \times AB = AB \times AE + AB \times EH + AB \times HC$

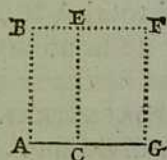
PROPOSICION II. TEOREMA.

Si una recta se divide como quiera en dos partes, el cuadrado de la toda es igual á los rectángulos hechos de la misma en cada una de sus partes.

EXP. Sea la recta AG dividida como quiera en el punto C : digo que el cuadrado de AG es igual á los rectángulos hechos de AG en AC , y de AG en CG .



PREP. Fórmese sobre la dada A G el quadrado A F (prop. XLVI lib. I), y tírese por el punto C la C E paralela á A B (prop. XXXI lib. cit.).



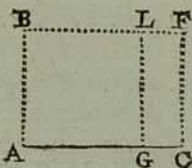
DEM. Por ser A F un quadrado, los lados A B y G F son iguales á la dada A G: tambien (prop. XXXIV lib. I) $C E = A B$: luego será (ax. I) $C E$ igual á la dada A G: el rectángulo A E está contenido de la recta $A B = A G$, y de la parte A C y el rectángulo C F está tambien contenido de la $C E = A B = A G$, y de la parte C G; pero dichos rectángulos componen el quadrado A F: luego si una recta se divide &c.

POR LETRAS. Sea $A G = a$
 los segmentos $\begin{cases} A C = c \\ C G = d \end{cases}$
 será (ax. IX) $A G = a = c + d$
 y multiplicando por .. $A G = a = a$
 se tendrá (ax. V) $\overline{A G}^2 = a^2 = a c + a d$
 tambien $A G \times A C + A G \times C G = a c + a d$
 luego (ax. I) $\overline{A G}^2 = A G \times A C + A G \times C G$
 POR NÚMEROS. Sea $A G = 8$
 los segmentos $\begin{cases} A C = 3 \\ C G = 5 \end{cases}$
 será (ax. IX) $A G = 8 = 3 + 5$
 y multiplicando por $A G = 8 = 8$
 se tendrá (ax. V) $\overline{A G}^2 = 64 = 24 + 40$
 tambien $A G \times A C + A G \times C G = 24 + 40$
 luego (ax. I) $\overline{A G}^2 = A G \times A C + A G \times C G$

PROPOSICION III. TEOREMA.

Si una recta se divide como quiera en dos partes, el rectángulo hecho de la toda en una de sus partes es igual al quadrado de esta parte, mas al rectángulo hecho de las mismas partes.

EXP. Sea la recta AC dividida como quiera en el punto G : digo que el rectángulo hecho de la toda AC en el segmento AG , es igual al quadrado de AG , mas al rectángulo hecho de la parte AG en GC .



PREP. Sobre la recta AG fórmese el quadrado AL (prop. XLVI lib. I): alárguese BL ácia F , de suerte que sea $BF = AC$; y tirando la FC , quedará formado el rectángulo AF .

DEM. El rectángulo AF está contenido de toda la linea AC , y de la AB igual á la parte AG : luego es el rectángulo de la toda en esta parte: tambien el rectángulo AL es el quadrado de la parte AG , y el rectángulo GF está contenido de $GL = AG$, y de la parte GC , y por consiguiente es el rectángulo de las partes AG y GC ; pero este rectángulo junto con el quadrado AL componen el rectángulo AF : luego si una recta se divide &c.

POR LETRAS. Sea $AC = d$

los segmentos $\begin{cases} AG = a \\ GC = b \end{cases}$

será (ax. IX) $AC = d = a + b$

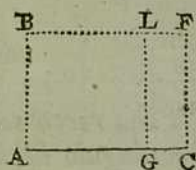
y multiplicando por $AG = a = a$

se tendrá (ax. V) ... $AC \times AG = ad = a^2 + ab$

tambien $\overline{AG}^2 + AG \times GC = a^2 + ab$

luego (ax. I) $AC \times AG = \overline{AG}^2 + AG \times GC$

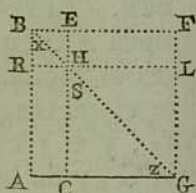
POR NÚMEROS. Sea ... $AC = 8$
 los segmentos $\begin{cases} AG = 6 \\ GC = 2 \end{cases}$
 será (ax. ix) $AC = 8 = 6 + 2$
 y multiplicando por $AG = 6 = 6$
 se tendrá (ax. v) $AC \times AG = 48 = 36 + 12$
 tambien $\overline{AG}^2 + AG \times GC = 36 + 12$
 luego $AC \times AG = \overline{AG}^2 + AG \times GC$



PROPOSICION IV. TEOREMA.

Si una recta se divide como quiera en dos partes, el quadrado de la toda es igual á los quadrados de las partes, mas á dos rectángulos hechos de las mismas partes.

EXP. Sea la recta AG dividida como quiera en el punto C : digo que el quadrado de AG es igual al quadrado de AC , mas al quadrado de CG , mas á dos rectángulos de AC en CG .



PREP. Sobre AG fórmese el quadrado AF (prop. XLVI lib. I): tírese la diagonal BG , y por el punto C la CE paralela á AB (prop. xxxi lib. cit.), que cortará á la diagonal en el punto H : tírese por este la recta RL paralela á BF , y estará el quadrado dividido en quatro paralelogramos, que son RC , RE , EL y CL .

DEM. El triángulo BAG es isósceles (def. xxix lib. I) por ser el lado $AB = AG$: luego (prop. v lib. cit.) los ángulos X , Z sobre la base son iguales; y siendo el ángulo A recto, cada uno de los otros dos será semirrecto (cor. vii prop. xxxii lib. I): el trián-

gulo $H C G$ tiene el ángulo C recto (prop. xxix lib. cit.); y siendo el ángulo Z semirrecto por lo demostrado, lo será tambien el ángulo S (prop. xxxii lib. i): luego (prop. vi lib. cit.) el lado $H C = C G$, y por consiguiente dicho triángulo es isósceles rectángulo, y (prop. xxxiv lib. i) el paralelogramo $C L$ es equilátero: asimismo por ser los ángulos $H C G$, $L G C$ rectos, lo serán los otros dos opuestos, de que se sigue que tambien es equiángulo: luego es quadrado (def. xxix lib. i), y de la parte $C G$. Del mismo modo se demuestra que el paralelogramo $R E$ es el quadrado de la parte $A C$, siendo el lado $R H = A C$ (prop. xxxiv lib. cit.). El rectángulo $E L$ está contenido del lado $H L = C G$, y del lado $H E = H R = A C$: luego es un rectángulo de las partes $A C$ y $C G$: tambien el rectángulo $R C$ está contenido del lado $H C = C G$, y de la $A C$: luego es rectángulo de las partes $A C$, $C G$. Pero estos dos rectángulos, y los dos quadrados componen el quadrado total $A F$ de la recta $A G$: luego si una recta se divide &c.

POR LETRAS. Sea $A G = a$

los segmentos $\begin{cases} A C = b \\ C G = c \end{cases}$

será (ax. ix) $A G = a = b + c$

y multiplicando por $A G = a = b + c$

se tendrá (ax. v) $\overline{A G}^2 = a^2 = b^2 + 2 b c + c^2$

tambien ... $\overline{A C}^2 + 2 A C \times C G + \overline{C G}^2 = b^2 + 2 b c + c^2$

luego (ax. i) ... $\overline{A G}^2 = \overline{A C}^2 + 2 A C \times C G + \overline{C G}^2$

POR NÚMEROS. Sea $A G = 6$

los segmentos $\begin{cases} A C = 2 \\ C G = 4 \end{cases}$

será (ax. ix) $A G = 6 = 2 + 4$

y multiplicando por $A G = 6 = 2 + 4$

se tendrá (ax. v) .. $\overline{AG}^2 = 36 = 4 + 16 + 16$

tambien $\overline{AC}^2 + 2 AC \times CG + \overline{GC}^2 = 4 + 16 + 16$

luego (ax. i) ... $\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + 2 AC \times CG + \overline{GC}^2$

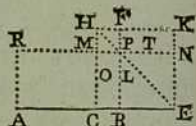
COROLARIO I. De lo dicho se infiere que los paralelogramos por donde pasa la diagonal de un quadrado, son quadrados.

COROLARIO II. Tambien se infiere que el quadrado de una linea es quadruplo del de su mitad.

PROPOSICION V. TEOREMA.

Si una recta se divide en dos partes iguales, y en dos desiguales, el rectángulo de las partes desiguales junto con el quadrado de la parte intermedia, es igual al quadrado de la mitad de la propuesta.

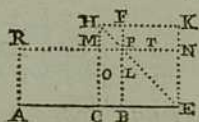
EXP. Sea la recta A E dividida en dos partes iguales A C, C E, y en dos desiguales A B, B E: digo que el rectángulo de A B en B E junto con el quadrado de C B, será igual al quadrado de C E.



PREP. Fórmese sobre C E, mitad de la propuesta, el quadrado C K (prop. XLVI lib. i): tírese la diagonal H E, y por el punto B la recta B F paralela á C H (prop. xxxi lib. cit.), que cortará á la diagonal en el punto P: tírese por este la M N paralela á A E, y por el punto A la A R paralela á C H, que cortará la N M alargada en el punto R.

DEM. Porque C K es un quadrado, los paralelogramos M F y B N, por quienes pasa la diagonal, son tambien quadrados (cor. i prop. iv); pero M P = C B (prop. xxxiv lib. i): luego M F es el quadrado de la parte intermedia C B; y porque el lado B P = B E, el rectángulo A P estará contenido de las

partes desiguales AB y BE : los complementos CP y PK son iguales (prop. XLIII lib. I); y añadiendo á ambos el quadrado BN , el rectángulo CN será igual al rectángulo BK : tambien (prop. xxxvi lib. cit.) el rectángulo $AM = CN$: luego (ax. I) el rectángulo $AM = BK$; y añadiendo á uno y otro el rectángulo CP , será (ax. II) el rectángulo AP igual al gnomon OLT : añádase á entrambas partes el quadrado MF , y será el rectángulo AP contenido de las partes desiguales junto con el quadrado MF , hecho de la parte intermedia igual al quadrado CK , formado de la mitad de la propuesta: que era &c.



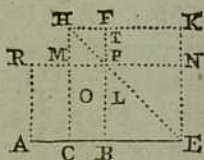
POR LETRAS. Sea $AC = CE = a$
 la parte intermedia $CB = b$
 será $AB = a + b$
 y $BE = a - b$
 multiplicando iguales por }
 iguales, se tendrá (ax. V) } $AB \times BE = a^2 - b^2$
 y añadiendo $\overline{CB}^2 = b^2$
 se tendrá (ax. II) $AB \times BE + \overline{CB}^2 = a^2$
 pero por ser $CE = a$, será $\overline{CE}^2 = a^2$
 luego (ax. I) $AB \times BE + \overline{CB}^2 = \overline{CE}^2$

POR NÚMEROS. Sea $AC = CE = 6$
 la parte intermedia $CB = 2$
 será $AB = 6 + 2$
 y $BE = 6 - 2$
 multiplicando iguales por }
 iguales, se tendrá (ax. V) } $AB \times BE = 36 - 4$
 y añadiendo $\overline{CB}^2 = 4$
 se tendrá (ax. II) $AB \times BE + \overline{CB}^2 = 36$
 pero por ser $CE = 6$, será $\overline{CE}^2 = 36$
 luego (ax. I) $AB \times BE + \overline{CB}^2 = \overline{CE}^2$

PROPOSICION VI. TEOREMA.

Si una recta se divide en dos partes iguales, y directamente se le añade otra qualquiera, el rectángulo de toda la compuesta en la añadida junto con el quadrado de la mitad de la propuesta, es igual al quadrado que se forme de la mitad de la dada, y de la añadida como de una.

EXP. Sea la recta AB dividida por medio en C , y directamente añadida la BE : digo que el rectángulo hecho de AE en BE junto con el quadrado de CB , es igual al quadrado de CE .



PREP. Sobre CE fórmese el quadrado CK (prop. XLVI lib. I): tírese la diagonal HE , y por el punto B la BF paralela á CH (prop. xxxi lib. cit.), que cortará á la diagonal en el punto P : tírese por este la MN paralela á AE , y por A la AR paralela á CH , que cortará á la MN prolongada en el punto R .

DEM. Por lo dicho en la prop. iv BN es un quadrado: luego $BE = EN$, y por consiguiente el rectángulo AN está contenido de la compuesta AE , y de la EN igual á la añadida BE , y MF es el quadrado de la mitad de la propuesta CB , por ser el lado $MP = CB$: el rectángulo $RC = CP$ (prop. xxxvi lib. I): tambien el complemento $CP = PK$ (prop. XLIII lib. cit.): luego (ax. I) $CR = PK$; y añadiendo á ambas partes CN , se tendrá el rectángulo AN igual al gnomon OLT : añádase tambien á una y otra parte el quadrado MF , y se tendrá el rectángulo AN , mas el quadrado MF igual al quadrado CK : luego si una recta &c.

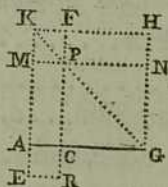
POR LETRAS. Sea $AC = CB = a$,
 y la añadida $BE = b$,
 será $CE = a + b$, y (ax. ix) $AE = 2a + b$,
 y multiplicando iguales por }
 iguales, se tendrá (ax. v) } $AE \times BE = 2ab + b^2$,
 añádese á ambas partes $\overline{CB}^2 = a^2$,
 y será (ax. ii) ... $AE \times BE + \overline{CB}^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
 tambien por ser $CE = a + b$, será $\overline{CE}^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
 luego (ax. i) $AE \times BE + \overline{CB}^2 = \overline{CE}^2$.

POR NÚMEROS. Sea $AC = CB = 3$,
 y la añadida $BE = 4$,
 será $CE = 3 + 4$, y (ax. ix) $AE = 6 + 4$,
 y multiplicando iguales por }
 iguales, se tendrá (ax. v) } $AE \times BE = 24 + 16$,
 añádase á ambas partes $\overline{CB}^2 = 9$,
 y será (ax. ii) $AE \times BE + \overline{CB}^2 = 9 + 24 + 16$;
 tambien por ser $CE = 3 + 4$, será $\overline{CE}^2 = 9 + 24 + 16$;
 luego (ax. i) $AE \times BE + \overline{CB}^2 = \overline{CE}^2$.

PROPOSICION VII. TEOREMA.

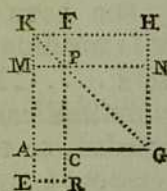
Si una recta se divide como quiera en dos partes, el quadrado de la toda junto con el quadrado de una de sus partes, es igual á dos rectángulos hechos de la toda en esta parte, mas al quadrado de la otra parte.

EXP. Sea la recta AG dividida como quiera en el punto C : digo que el quadrado de la dada AG junto con el quadrado de la parte AC , es igual á dos rectángulos hechos de AG en AC , mas al quadrado de la otra parte CG .



PREP. Sobre AG fórmese el quadrado AH (prop. XLVI lib. i): tírese la diagonal KG , y por el punto C la recta CF paralela á AK (prop. xxxi lib. cit.), que

cortará á la diagonal en el punto P, y por él tírese la MN paralela á AG: alárguese la KA, y cortando AE=AC (prop. III lib. I), perfecciónese el quadrado AR.



DEM. Los rectángulos MF y CN son quadrados (cor. I prop. IV), como tambien AR por construcción, y siendo CP=CG y AM=CP (prop. XXXIV lib. I), será (ax. I) AM=CG: tambien AE=AC: luego (ax. II) ME=AG: asimismo siendo MK=MP y MP=AC, será MK=AC, y por consiguiente el rectángulo MH está contenido de KH=AG y de MK=AC, y el rectángulo EP está contenido de ME=AG y de MP=AC; pero estos dos rectángulos juntos con el quadrado CN, que lo es de la parte CG, son iguales á los quadrados AH y AR, que estan formados de la toda AG y de la parte AC: luego si una recta &c.

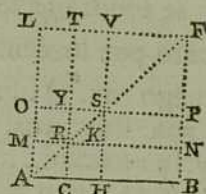
POR LETRAS. Sea $AG = a$, y $AC = b$,
 será $CG = a - b$,
 y $\overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = a^2 + b^2$;
 tambien $2 AG \times AC = 2ab$,
 y añadiendo $\overline{CG}^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
 se tendrá (ax. II) $2 AG \times AC + \overline{CG}^2 = a^2 + b^2$;
 pero por lo demostrado $\overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = a^2 + b^2$;
 luego (ax. I) ... $\overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = 2 AG \times AC + \overline{CG}^2$.

POR NÚMEROS. Sea ... $AG = 6$, y $AC = 2$,
 será $CG = 6 - 2$,
 y $\overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = 36 + 4$;
 tambien $2 AG \times AC = 24$;
 y añadiendo $\overline{CG}^2 = 36 - 24 + 4$,
 se tendrá (ax. II) $2 AG \times AC + \overline{CG}^2 = 36 + 4$;
 pero por lo demostrado $\overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = 36 + 4$;
 luego (ax. I) ... $\overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = 2 AG \times AC + \overline{CG}^2$.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

Si una recta se divide por medio, y directamente se le añade otra qualquiera, el quadrado de toda la compuesta es igual á quatro rectángulos hechos de la mitad de la dada en la compuesta de la otra mitad, y la añadida como una, mas al quadrado de la añadida.

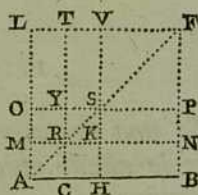
EXP. Sea la recta AH dividida por medio en el punto C , y añadida directamente la HB : digo que el quadrado de la toda AB es igual á quatro rectángulos hechos de AC , mitad de la dada, en la CB compuesta de la otra mitad CH , y de la añadida HB , mas al quadrado de esta.



PREP. Sobre AB fórmese el quadrado LB (prop. XLVI lib. I): tírese la diagonal AF , y por los puntos C, H las rectas CT, HV paralelas á AL (prop. XXXI lib. I), como tambien por los puntos R, S en que se corta la diagonal, las rectas MN, OP paralelas á AB .

DEM. Los tres rectángulos CN, RP, LR , cada uno está contenido de lados iguales á las rectas AC, CB , y siendo el rectángulo $MC = YK$, por ser quadrados de lados iguales, el rectángulo TS junto con el quadrado MC compondrá un rectángulo igual á MT : luego el gnomon $VLABPS$ es igual á los quatro rectángulos hechos de AC en CB ; y añadiendo PV , que es el quadrado de $SP = HB$, se tendrá el quadrado de AB igual á los quatro rectángulos de AC en CB , mas al quadrado de HB : luego si una recta &c.

POR LETRAS. Sea $AC=CH=a$ y la añadida $HB=b$
 será $CB=a+b$, y (ax. ix) $AB=2a+b$
 luego $\overline{AB}^2=4a^2+4ab+b^2$;
 tambien si $AC=a$
 se multiplica por $CB=a+b$
 se tendrá (ax. v) $AC \times CB=a^2+ab$,
 y multiplicado por 4 será .. $4AC \times CB=4a^2+4ab$;
 añádase..... $\overline{HB}^2=b^2$,



y se tendrá (ax. ii) $4AC \times CB + \overline{HB}^2=4a^2+4ab+b^2$;
 pero por lo demostrado ... $\overline{AB}^2=4a^2+4ab+b^2$;
 luego (ax. i) $\overline{AB}^2=4AC \times CB + \overline{HB}^2$

POR NÚMEROS. Sea $AC=CH=2$,
 y la añadida $HB=5$,
 será $CB=2+5$, y (ax. ix) $AB=4+5$;
 luego $\overline{AB}^2=16+40+25$;
 tambien si $AC=2$
 se multiplica por $CB=2+5$
 se tendrá (ax. v) $AC \times CB=4+10$,
 y multiplicado por 4 será .. $4AC \times CB=16+40$,
 añádase $\overline{HB}^2=25$,

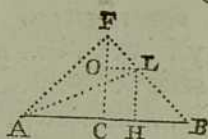
y será (ax. ii) .. $4AC \times CB + \overline{HB}^2=16+40+25$;
 pero por lo demostrado $\overline{AB}^2=16+40+25$;
 luego (ax. i) $\overline{AB}^2=4AC \times CB + \overline{HB}^2$

PROPOSICION IX. TEOREMA.

Si una recta se divide en dos partes iguales y en dos desiguales, los quadrados de las partes desiguales juntos son el duplo del quadrado de la mitad de la dada, mas del quadrado del segmento intermedio.

EXP. Sea la recta AB dividida en dos partes iguales en el punto C , y en dos desiguales en H : digo que los quadrados de AH y HB juntos son iguales al

duplo de los quadrados de AC y CH , esto es, $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CH}^2$.



PREP. Levántese sobre AB en el punto C la perpendicular $CF = AC$: tírense las rectas AF , FB , y por el punto H la HL paralela á CF , como tambien por el punto L la LO paralela á AB , y tírese AL .

DEM. Por ser $CF = AC$, el triángulo ACF es isósceles, y siendo el ángulo en C recto, será dicho triángulo isósceles rectángulo: luego (cor. vii prop. xxxii lib. i) el ángulo AFC es semirrecto: por la misma razon el ángulo CFB es semirrecto: luego el ángulo AFB es recto por componerse de dos semirrectos: tambien por ser OL , CB paralelas, será el ángulo $FOL = FCB$, y el ángulo $FLO = FBC$ (prop. xxix lib. cit.): luego el triángulo FOL es isósceles rectángulo: asimismo por ser CF , HL paralelas resulta el triángulo LHB isósceles rectángulo: esto supuesto en el triángulo rectángulo AHL , será}..... $\overline{AL}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HL}^2$
(prop. xlvii lib. i)....

y siendo $HL = HB$, será}..... $\overline{HL}^2 = \overline{HB}^2$
(cor. prop. xlvi lib. i)....

luego substituyendo, será $\overline{AL}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$
tambien en el triángulo rectángulo AFL }..... $\overline{AL}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FL}^2$

luego (ax. i) $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FL}^2$
pero (corol. ii prop. xlvii lib. i)} $\overline{AF}^2 = 2\overline{AC}^2$, y $\overline{FL}^2 = 2\overline{OL}^2 = 2\overline{CH}^2$

luego substituyendo,} $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CH}^2$
será

POR LETRAS. Sea $AC = CB = a$

y $CH = b$

será $AH = a + b$

y $HB = a - b$

luego $\overline{AH}^2 = a^2 + 2ab + b^2$

y $\overline{HB}^2 = a^2 - 2ab + b^2$

por consiguiente (ax. II) .. $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = 2a^2 + 2b^2$

tambien $2\overline{AC}^2 = 2a^2$

y $2\overline{CH}^2 = 2b^2$

luego (ax. II) $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CH}^2 = 2a^2 + 2b^2$

y por consiguiente (ax. I) $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CH}^2$

POR NÚMEROS. Sea ... $AC = CB = 5$

y $CH = 2$

será $AH = 5 + 2$

y $HB = 5 - 2$

luego $\overline{AH}^2 = 25 + 20 + 4$

y $\overline{HB}^2 = 25 - 20 + 4$

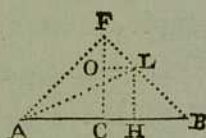
por consiguiente (ax. II) $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = 50 + 8$

tambien $2\overline{AC}^2 = 50$

y $2\overline{CH}^2 = 8$

luego (ax. II) $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CH}^2 = 50 + 8$

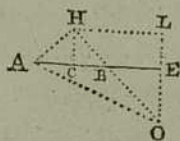
y por consiguiente (ax. I) $\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CH}^2$



PROPOSICION X. TEOREMA.

Si una recta se divide por medio, y directamente se le añade otra qualquiera, el quadrado de toda la compuesta junto con el quadrado de la añadida, son el duplo del quadrado de la mitad de la dada, mas del quadrado de la compuesta de la otra mitad y la añadida como una.

EXP. Sea la recta AB dividida por medio C , y directamente añadida la BE : digo que los quadrados de AE y BE juntos son iguales al duplo de los quadrados de



AC y CE , esto es, $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = 2 \overline{AC}^2 + 2 \overline{CE}^2$.

PREP. Levántese sobre AE desde el punto C la perpendicular $CH = AC$: tírese por el punto E la OL paralela á CH , y por H la HL paralela á AE , hasta que corte á la OL en un punto L : tírese tambien AH , y por los puntos H, B la HB prolongada hasta cortar á la OL en el punto O : finalmente tírese la AO .

DEM. Por la construccion los triángulos ACH , HCB , $BE O$, HLO son isósceles rectángulos: luego el ángulo AHO es recto, y en el triángulo rectángulo AEO se tiene (prop. XLVII lib. I) $\overline{AO}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EO}^2$ y siendo (cor. prop. XLVI lib. I) $\overline{EO}^2 = \overline{BE}^2$

será substituyendo $\overline{AO}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$ tambien en el triángulo rectángulo AHO $\overline{AO}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HO}^2$ luego (ax. I) $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HO}^2$

pero (cor. I prop. XLVII lib. I) $\overline{AH}^2 = 2 \overline{AC}^2$ y del mismo modo $\overline{HO}^2 = 2 \overline{HL}^2 = 2 \overline{CE}^2$ luego substituyendo será $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = 2 \overline{AC}^2 + 2 \overline{CE}^2$ que era &c.

POR LETRAS. Sea... $AC = CB = a$

y $BE = b$

será $AE = 2a + b$

y $CE = a + b$

luego $\overline{AE}^2 = 4a^2 + 4ab + b^2$

y $\overline{BE}^2 = b^2$

por consiguiente (ax. II) $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = 4a^2 + 4ab + 2b^2$

tambien $2\overline{AC}^2 = 2a^2$

y $2\overline{CE}^2 = 2a^2 + 4ab + 2b^2$

luego (ax. II) $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CE}^2 = 4a^2 + 4ab + 2b^2$

y (ax. I) $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CE}^2$

POR NÚMEROS. Sea... $AC = CB = 2$

y $BE = 3$

será $AE = 4 + 3$

y $CE = 2 + 3$

luego $\overline{AE}^2 = 16 + 24 + 9$

y $\overline{BE}^2 = 9$

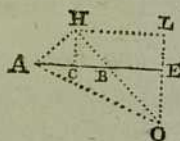
por consiguiente $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = 16 + 24 + 18$

tambien $2\overline{AC}^2 = 8$

y $2\overline{CE}^2 = 8 + 24 + 18$

luego (ax. II) $2\overline{AC}^2 + 2\overline{CE}^2 = 16 + 24 + 18$

y (ax. I) $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = 2\overline{AC}^2 + 2\overline{CE}^2$

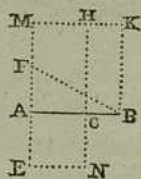


PROPOSICION XI. PROBLEMA.

Dividir una recta en dos partes tales, que el rectángulo hecho de la toda en una de sus partes, sea igual al cuadrado de la otra parte.

OPER. Dada la recta AB , fórmese sobre ella el cuadrado AK (prop. XLVI lib. I): divídase el lado MA por medio en F (prop. X lib. cit.), y tírese la

recta FB : prolonguese la FA , y córtese $FE = FB$, como tambien $AC = AE$: digo que la linea AB estará dividida en el punto C como se pide, esto es, que $AB \times CB = AC^2$.



PREP. Perfecciónese el quadrado AN , y alárguese NC hasta H .

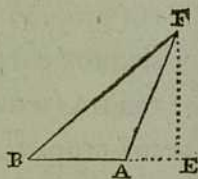
DEM. Porque la recta MA está dividida por medio en F , y tiene directamente añadida la AE , será (prop. VI) $ME \times AE + FA^2 = FE^2$ y siendo (cor. prop. XLVI lib. I) $FE^2 = FB^2$ se tendrá (ax. I) $ME \times AE + FA^2 = FB^2$ pero (prop. XLVII lib. I) $FB^2 = FA^2 + AB^2$ luego (ax. I) $ME \times AE + FA^2 = FA^2 + AB^2$ y quitando de ambas partes FA^2 , se tendrá (ax. II) } $ME \times AE = AB^2$ esto es, el rectángulo MN igual al quadrado AK , y quitando de ambas partes el rectángulo MC , quedará el quadrado AN igual al rectángulo HB ; pero el rectángulo HB está contenido de $BK = AB$, y de la parte CB ; y el quadrado AN lo es de la parte AC : luego la recta AB está dividida en el punto C , como se pide.

La division de una linea en esta forma se llama linea dividida en media y extrema razon, cuyo problema no puede explicarse en números racionales.

PROPOSICION XII. TEOREMA.

En qualquier triángulo obtusángulo, el quadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á los quadrados de los otros dos lados, mas á dos rectángulos hechos del lado, sobre quien cae la perpendicular, en la parte comprehendida entre dicha perpendicular y el ángulo obtuso.

EXP. Sea el triángulo B F A, que tenga el ángulo obtuso B A F, y sobre el lado B A prolongado caiga la perpendicular F E: digo que el quadrado de B F es igual á los quadrados de B A y A F, mas á dos rectángulos hechos de B A en A E, esto es, $\overline{BF}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AF}^2 + 2 BA \times AE$.



DEM. En el triángulo B F E se } $\overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2$
tiene (prop. XLVII lib. I) }

y siendo (prop. IV) .. $\overline{BE}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AE}^2 + 2 BA \times AE$
será substi- } $\overline{BF}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 + 2 BA \times AE$
yendo }

pero (prop. XLVII lib. I) $\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 = \overline{AF}^2$
luego substituyen- } $\overline{BF}^2 = \overline{BA}^2 + \overline{AF}^2 + 2 BA \times AE$
do será }

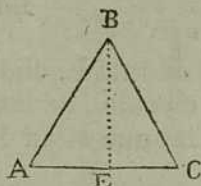
Sirve esta proposicion para hallar la altura F E del triángulo A B F dados sus tres lados: lo que se hace de este modo: del quadrado de B F réstese la suma de los dos quadrados de B A y A F, y la diferencia será igual á dos rectángulos hechos de B A en A E: tómese la mitad, y se tendrá el valor de un rectángulo, que partido por el valor de B A, el quociente será el valor de A E: réstese el quadrado de A E del quadrado de A F, y se tendrá el quadrado

de FE , cuya raíz quadrada será el valor de la perpendicular FE . Si se quiere dar valor á las lineas, supóngase $BF = 20$, $BA = 11$, y $AF = 13$; y haciendo la operacion como se ha dicho, se hallará la perpendicular $FE = 12$.

PROPOSICION XIII. TEOREMA.

En el triángulo acutángulo, el quadrado de qualquier lado junto con dos rectángulos hechos por uno de los otros dos lados, sobre quien se baxe la perpendicular, en la parte comprendida entre esta y el otro lado, es igual á los quadrados de este lado y del dividido por la perpendicular.

EXP. Sea el triángulo acutángulo ABC , y desde B báxese la perpendicular BE sobre AC : digo que el quadrado de AB junto con dos rectángulos de AC en EC , es igual á los quadrados de AC y

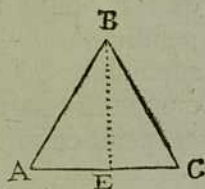


BC , esto es, $\overline{AB}^2 + 2AC \times EC = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

DEM. Porque la linea AC está dividida en el punto E , se tiene } $2AC \times EC + \overline{AE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2$
 (prop. VII) }
 añádase á una y otra parte $\overline{BE}^2 = \overline{BE}^2$
 y se ten- } $2AC \times EC + \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{EC}^2 + \overline{BE}^2$
 drá (ax. II) }
 pero (prop. XLVII. lib. I) } $\overline{AB}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{BE}^2$, y $\overline{BC}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{BE}^2$
 luego substituyendo se tendrá } $\overline{AB}^2 + 2AC \times EC = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$
 Lo mismo se demuestra de qualquier otro lado del triángulo.

Esta proposicion sirve tambien para hallar el valor de la perpendicular BE , conocidos los tres lados del triángulo; porque si de la suma de los dos

quadrados de AC y EB se resta el quadrado de AB , el residuo será los dos rectángulos hechos de AC en EC , y su mitad será un rectángulo, que partido por el valor de AC , el quociente dará el valor de EC , y restando el quadrado de la parte EC del quadrado de BC , el residuo será el quadrado de BE , cuya raíz quadrada es la perpendicular BE .



Si se quiere dar valor á las líneas sea $AC = 21$, $AB = 20$, $BC = 13$, y haciendo la operacion como se ha dicho, se hallará $BE = 12$.

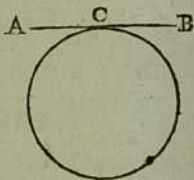
LIBRO TERCERO.

Trata Euclides en este libro de las propiedades del círculo, de las rectas que le tocan y le cortan, y de las que estan dentro de él.

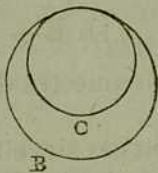
DEFINICIONES.

I. Círculos iguales son aquellos cuyos diámetros ó semidiámetros son iguales.

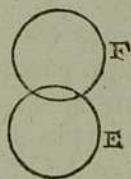
II. Línea tangente es la recta que tocando al círculo y alargada no le corta, como la línea AB que toca al círculo en el punto C , y no le corta.



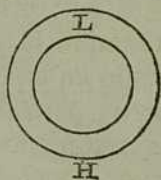
III. Círculos tangentes son aquellos que tocándose sus circunferencias, ya sea exteriormente ó ya interiormente, no se cortan, como se ve, lo primero en los círculos B , X , y lo segundo en los círculos B , C .



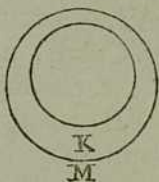
Círculos secantes son los que de cualquier modo se cortan, como los círculos F, E.



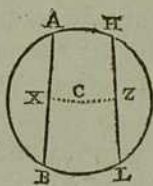
Círculos concéntricos son los que tienen un mismo centro como los círculos L, H, y el espacio comprendido entre las dos circunferencias se llama corona ó anillo.



Círculos excéntricos son aquellos en quienes aunque el mayor comprende al menor, el centro no es uno mismo, como los círculos M, K.

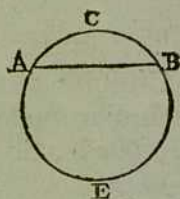


IV. Cuerda ó subtensa es qualquiera recta dentro del círculo, terminada por una y otra parte en la circunferencia, como las rectas A B, H L, las cuales se dice que distan igualmente del centro, si las perpendiculares C X, C Z, que desde dicho centro caen sobre ellas, son iguales; pero si alguna como C X, es menor, se dirá que la cuerda A B dista menos del centro, que la cuerda H L.



Linea secante de un círculo es qualquiera recta que le corta, y así toda cuerda es tambien secante del círculo. En la Trigonometría se explicará qué cosa sea tangente ó secante especial de un arco.

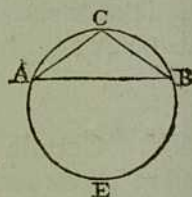
V. Segmento de círculo es una figura contenida de una cuerda y de la parte de circunferencia que subtende, como la figura ABC , formada por la cuerda AB , y su arco ACB , ó bien la figura ABE , formada de la misma cuerda AB , y del otro arco AEB que subtende.



Quando la cuerda pasa por el centro, divide al círculo en dos segmentos iguales, y entonces es diámetro; pero si no pasa por el centro, le divide en dos segmentos desiguales, llamándose segmento mayor aquel en quien se halla el centro, y el otro menor.

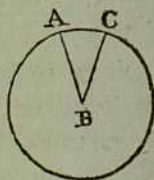
VI. Ángulo del segmento es el ángulo mixtilíneo CAB , que forma la circunferencia con la cuerda, ó tambien el ángulo CBA .

VII. Ángulo en el segmento es el que se forma de dos líneas rectas, que saliendo de las extremidades de la cuerda concurren en un punto de su circunferencia, como si de las extremidades de la cuerda AB salen las dos rectas AC , BC , que concurren en el punto C de la circunferencia, se dice que el ángulo rectilíneo ACB , es ángulo en el segmento ABC .

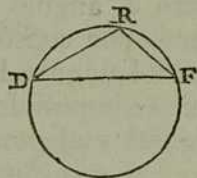
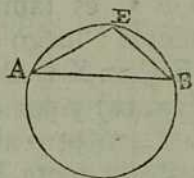


VIII. Este mismo ángulo se dice que insiste sobre la circunferencia AEB , de suerte que está en el segmento ABC , é insiste sobre el arco AEB .

IX. Sector de un círculo es una figura contenida de dos semidiámetros, y del arco comprendido entre ellos, como ABC .



X. Semejantes segmentos de círculos son aquellos en quienes los ángulos son iguales, como si en los seg-



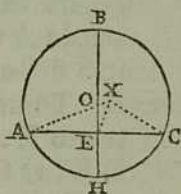
mentos ABE , DFR los ángulos E , R son iguales, entonces se dirá que dichos segmentos son semejantes. De la semejanza de los segmentos no se infiere su igualdad, sino quando los círculos son iguales.

PROPOSICION I. PROBLEMA.

Hallar el centro de un círculo.

EXP. Sea el círculo ABC , y háyase de hallar su centro

OPER. Tírese qualquiera cuerda AC , y divídase por medio en E : levántese en este punto la perpendicular EB (prop. xi lib. i), y alár-guese hasta que toque de una y otra parte en la circunferencia: divídase BH por medio en O , y este punto

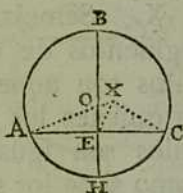


será el centro: lo que es evidente; porque si el centro está en la perpendicular BH , no puede ser otro que el punto O , que la divide por medio; pero si se dixerá que el centro estaba fuera de dicha recta, sea qualquier otro punto, como X .

PREP. Tírense las rectas AX , XE , XC .

DEM. En los triángulos AEX , CEx , siendo X el centro, los radios AX , XC serán iguales (def. xv lib. i): tambien por la construccion $AE = EC$, y EX comun; luego (prop. viii lib. i) los dos triángulos son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $AEX = CEx$, y (def. x lib. i) ambos rectos;

pero el ángulo $B E C$ es tambien recto por construccion: luego (ax. xi) el ángulo $B E C = X E C$; lo que es imposible (ax. ix) y por consiguiente el punto X , ni otro alguno que esté fuera de la recta BH , puede ser el centro: luego solamente lo es el punto O : que era &c.

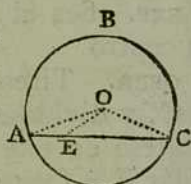


COROLARIO. De lo dicho se infiere, que si una cuerda se divide por medio, y en el punto de la division se levanta una perpendicular, esta pasará por el centro.

PROPOSICION II. TEOREMA.

La cuerda cae toda dentro del círculo.

EXP. En el círculo $A B C$ por cualesquiera dos puntos A y C tírese la cuerda $A C$: digo que caerá toda dentro del círculo.



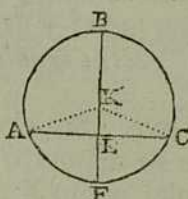
PREP. Tómese en la cuerda cualquier punto E , y tírense desde el centro las rectas $O A$, $O E$, $O C$.

DEM. Por ser $O A$, $O C$ radios de un círculo, son iguales (def. xv lib. i): luego el triángulo $A O C$ es isósceles, y (prop. v lib. cit.) el ángulo $A = C$; y siendo el ángulo $A E O$ mayor que el ángulo C (prop. xvi lib. i), tambien será mayor que su igual el ángulo A ; por consiguiente en el triángulo $A E O$ el lado $O A$ opuesto al mayor ángulo E es mayor que el lado $E O$ opuesto al menor A (prop. xix. lib. i); pero $A O$ es radio: luego $E O$ es menor que el radio, y el punto E estará dentro del círculo: lo mismo se demuestra de cualquier otro punto de la cuerda $A C$: luego está toda dentro del círculo: que era &c.

PROPOSICION III. TEOREMA.

La recta que pasando por el centro de un círculo divide por medio á qualquiera cuerda, es perpendicular á ella; y si es perpendicular á ella, la divide por medio, como tambien al arco.

EXP. Sea en el círculo A B C la recta B F que pase por el centro K, y corte á la cuerda A C por medio en E: digo lo primero, que será perpendicular á ella.



PREP. Desde el centro K tírense los radios K A, K C.

DEM. Los triángulos A E K, C E K tienen el lado $KA = KC$ (def. xv lib. i), $AE = EC$ por suposición, y el lado K E comun: luego (prop. viii lib. cit.) son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $A E K = K E C$: luego estos son rectos (def. x lib. cit.), y B E perpendicular sobre A C.

Lo segundo digo: que si la recta B E forma ángulos rectos con la cuerda A C en el punto E, la cortará por medio, y tambien al arco A F C; porque en el triángulo isósceles A K C los ángulos A y C sobre la base son iguales, como tambien los ángulos en E por rectos, y el lado E K es comun á los dos triángulos A E K, C E K: luego estos son totalmente iguales (prop. xxvi lib. i), y por consiguiente $AE = EC$: luego la cuerda A C está dividida por medio en el punto E. Asimismo el ángulo $AKF = CKF$ por la total igualdad de los triángulos A K E, C K E: y por consiguiente los arcos A F, F C, que son medidas de dichos ángulos (esc. ii def. xviii lib i), son tambien iguales: luego la recta que pasando por el centro &c.

Las proposiciones iv, v y vi se omiten.

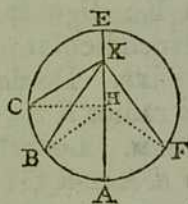
TOM. I.

o

PROPOSICION VII. TEOREMA.

Si en el diámetro de un círculo se toma un punto que no sea el centro, y desde él se tiran rectas á la circunferencia, la mayor es la parte del diámetro que contiene al centro, el residuo la menor; y de las otras la mas próxima al centro es mayor que la mas apartada; y de dicho punto solo se pueden tirar dos rectas iguales, una á cada lado del diámetro.

EXP. Sea el círculo A B E F, y en su diámetro A E tómese qualquier punto X, que no sea el centro; tírense desde X á la circunferencia las rectas X C, X B: digo lo primero, que X A es la mayor.



PREP. Tírense los radios H C, H B.

DEM. En el triángulo B X H se tiene (prop. xx lib. i) $BH + HX > BX$; pero $AH = BH$ (def. xv lib. cit.): luego $AH + HX > BX$, esto es, $AX > BX$; del mismo modo se demuestra que AX es mayor que qualquiera otra recta tirada desde X á la circunferencia: que era lo primero.

Lo segundo digo: que X E es la menor; porque en el triángulo C X H se tiene $HX + XC > HC$ (prop. xx lib. i), y siendo $HC = HX + XE$, será $HX + XC > HX + XE$, y quitando la parte comun HX , quedará $XC > XE$; del mismo modo se demuestra que X E es menor que qualquiera otra recta tirada desde X á la circunferencia: que era lo segundo.

Lo tercero digo: que X B mas próxima al centro, es mayor que X C mas apartada; porque en los triángulos B H X, C H X los dos lados B H, H X del primero son iguales á los dos C H, H X del segundo; pero el ángulo B H X del primero es mayor que

el ángulo CHX del segundo (ax. ix): luego (prop. xxiv lib. i) la base BX será mayor que la base CX : que era lo tercero.

Lo quarto digo: que desde dicho punto X solo se pueden tirar dos rectas iguales, una á cada lado del diámetro; porque formando en el punto H el ángulo $XHF = XHB$, y tirando XF , resultará el triángulo $BHX = FHX$ (prop. iv lib. i), y por consiguiente $XB = XF$, siendo esta recta la única que puede ser igual á XB ; porque si se determina otra entre A y F , ó bien entre F y E , será mayor ó menor por lo demostrado: luego &c.

La proposicion viii se omite.

PROPOSICION IX. TEOREMA.

Si de un punto dentro de un círculo salen mas de dos rectas iguales hasta la circunferencia, dicho punto será el centro.

Consta de la proposicion vii.

Las proposiciones x, xi, xii y xiii se omiten.

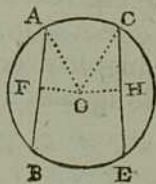
PROPOSICION XIV. TEOREMA.

En un círculo las cuerdas iguales distan igualmente del centro, y las que distan igualmente del centro son iguales.

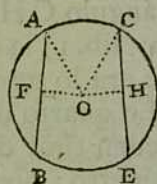
EXP. En el círculo $ACEB$ lo primero sean iguales las cuerdas AB, CE : digo que distan igualmente del centro O .

PREP. Desde el centro O báxense (prop. xii lib. i) las perpendiculares OF, OH , y tírense los radios OA, OC .

DEM. Las cuerdas AB, CE estan divididas en dos partes iguales en los puntos F, H con las perpen-



diculares OF , OH (prop. III), y siendo por suposición las cuerdas AB , CE iguales, lo serán también sus mitades AF , CH (ax. VIII): luego en los triángulos rectángulos AFO , COH



se tendrá (prop. XLVII lib. I) $\overline{AO}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FO}^2$

y también $\overline{CO}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2$

pero por ser $AO = OC$ } $\overline{AO}^2 = \overline{CO}^2$
(def. XV lib. I), también }

luego (ax. I) $\overline{AF}^2 + \overline{FO}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2$

y quitando de ambas partes $\overline{AF}^2 = \overline{CH}^2$

quedará (ax. III) $\overline{FO}^2 = \overline{HO}^2$

y (cor. prop. XLVI lib. I) $FO = HO$

luego (def. IV) las cuerdas AB , CE distan igualmente del centro.

Lo segundo sean las distancias FO , HO iguales: digo que también lo son las cuerdas AB , CE , pues por lo demostrado anteriormente

se tiene $\overline{AF}^2 + \overline{FO}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HO}^2$

y quitando de ambas partes $\overline{FO}^2 = \overline{HO}^2$

se tendrá (ax. III) $\overline{AF}^2 = \overline{CH}^2$

luego (cor. prop. XLVI lib. I) ... $AF = CH$

y (ax. VII) $AB = CE$

que era &c.

COROLARIO. De lo dicho se infiere que si dos triángulos rectángulos tienen las hipotenusas y un lado iguales, son también iguales.

PROPOSICION XV. TEOREMA.

La mayor cuerda de un círculo es el diámetro, y de las otras la mas próxima al centro es mayor que la mas apartada.

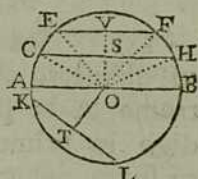
EXP. En el círculo $K E F L$, cuyo centro es el punto O , esten tiradas las cuerdas $A B$, $C H$, $E F$: digo lo primero, que el diámetro $A B$ es la mayor.

PREP. Tírense desde el centro los radios $O C$, $O H$, $O E$, $O F$.

DEM. En el triángulo $C O H$ los lados $O C$, $O H$ juntos son mayores que $C H$ (prop. xx lib. I); pero los dos semidiámetros $O C$, $O H$ son iguales al diámetro $A B$: luego $A B$ es mayor que $C H$: que es lo primero.

Lo segundo digo: que la cuerda $C H$ mas próxima al centro, es mayor que $E F$ mas apartada; porque en los triángulos $C O H$, $E O F$ los dos lados $C O$, $H O$ son iguales á los dos $E O$, $O F$ (def. xv lib. I); pero el ángulo $C O H > E O F$ (ax. ix): luego (prop. xxiv lib. I) $C H > E F$.

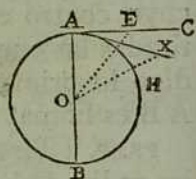
Si las cuerdas se proponen en distintos semicírculos, como lo estan $K L$, $C H$, báxense sobre ellas desde el centro las perpendiculares $O T$, $O S$, y alargando $O S$, córtese $O V = O T$, y por el punto V tírese $E F$ perpendicular sobre $O V$. Porque las cuerdas $K L$, $E F$ distan igualmente del centro por construcción, serán iguales (prop. xiv), y siendo por lo demostrado $C H > E F$, tambien será $C H > K L$: que era &c.



PROPOSICION XVI. TEOREMA.

La perpendicular á la extremidad del diámetro cae toda fuera del círculo, y es tangente, y entre ella y el círculo no se puede tirar otra recta al punto del contacto sin que corte al círculo.

EXP. Sea el círculo AHB , su diámetro AB , y en su extremo A la perpendicular CA : digo lo primero, que esta caerá fuera del círculo, y será tangente.



PREP. Desde qualquier punto E de la recta AC tírese al centro la recta EO .

DEM. El triángulo AOE tiene el ángulo A recto por construcción: luego el ángulo E será agudo (cor. iv prop. xxxii lib. i), y por consiguiente (prop. ix del mismo) el lado EO opuesto al mayor ángulo A es mayor que el lado AO opuesto al menor ángulo E ; pero AO es radio: luego EO es mayor que el radio, y por consiguiente el punto E está fuera del círculo: lo mismo se verifica de qualquier otro punto de la recta AC : luego esta cae toda fuera del círculo, y es tangente: que es lo primero.

Lo segundo digo: que entre la recta AC y el círculo no se puede tirar otra sin que corte á la circunferencia; porque si es posible tírese AX , y báxese á ella desde el centro la perpendicular OX : en el triángulo OXA rectángulo en X el ángulo OAX será agudo (cor. iv prop. xxxii lib. i), y por la prop. xix del mismo el lado $OA > OX$; pero $OA = OH$ (def. xv lib. i): luego $OH > OX$, esto es, la parte mayor que el todo; lo que es imposible (ax. ix): luego no se puede tirar AX sin cortar la

circunferencia, y por consiguiente la perpendicular á la extremidad del diámetro &c.

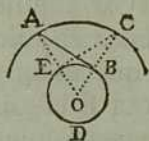
COROLARIO I. La tangente toca al círculo en un solo punto, pues queda demostrado que toda la recta AC cae fuera.

COROLARIO II. El ángulo de la contingencia ó del contacto, esto es, el mixtilíneo CAH no se puede dividir con líneas rectas, pues ninguna se puede tirar sin cortar el arco; pero se podrá disminuir describiendo círculos con mayor intervalo que el radio OA haciendo centro en este prolongado.

PROPOSICION XVII. PROBLEMA.

Tirar á un círculo una tangente desde un punto dado fuera de él.

EXP. Sea el círculo EBD , al qual se pide tirar una tangente desde el punto dado A .



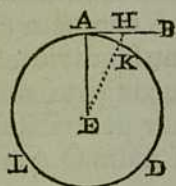
OPER. Hállese el centro O (prop. i): tírese á él desde el punto dado A la recta AO , que cortará á la circunferencia en el punto E : con el intervalo OA descríbase el arco AC : levántese sobre AO en el punto E la perpendicular EC hasta que corte al arco en el punto C : tírese CO , y al punto B en que corta al círculo la recta CO , tírese la AB , y será la tangente que se pide.

DEM. En los triángulos AOB , CEO los lados AO , OB del uno son iguales á los lados CO , OE del otro (def. xv lib. i), y el ángulo O comun á ambos: luego (prop. iv lib. i) dichos triángulos son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $OBA = OEC$, pero este es recto por construcción: luego tambien lo será OBA , y por consiguiente la recta AB tangente (prop. xvi): que era &c.

PROPOSICION XVIII. TEOREMA.

Si una recta es tangente á un círculo , y desde el centro al punto del contacto se tira un radio , este será perpendicular á la tangente.

EXP. Sea la recta AB tangente al círculo ALD , y desde el centro E tírese el radio EA al punto del contacto: digo que será perpendicular á la tangente AB .



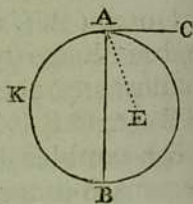
PREP. Si la linea EA no es perpendicular á la tangente, tírese si es posible otra recta EH perpendicular á ella.

DEM. El ángulo EHA es recto: luego será mayor que el ángulo A (cor. iv prop. xxxii lib. i), y por la prop. xix del mismo el lado EA opuesto al mayor ángulo H mayor que el lado EH opuesto al menor ángulo A ; pero $EA = EK$: luego $EK > EH$; lo que es imposible (ax. ix): y por consiguiente la recta EH , ni otra tirada desde el centro puede ser perpendicular á la tangente AC , sino el radio EA : que era &c.

PROPOSICION XIX. TEOREMA.

Si en la tangente de un círculo se levanta en el punto del contacto una perpendicular , el centro del círculo estará en ella.

EXP. Sea la recta AC tangente al círculo AKB , y en el punto del contacto A levántese la perpendicular AB : digo que el centro del círculo estará en ella.



PREP. Si el centro no está en la

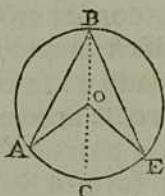
perpendicular AB , este (si es posible) fuera en qualquier punto E , y tírese desde este la recta EA .

DEM. La recta EA tirada del centro al punto del contacto es perpendicular á la tangente (prop. XVIII): luego el ángulo EAC es recto; pero el ángulo BAC lo es tambien por construccion: luego $EAC = BAC$; lo que es imposible (ax. IX): por consiguiente el centro no puede estar fuera de la perpendicular AB : que era &c.

PROPOSICION XX. TEOREMA.

El ángulo formado en el centro de un círculo es duplo del ángulo formado en la circunferencia, quando ambos insisten sobre un mismo arco.

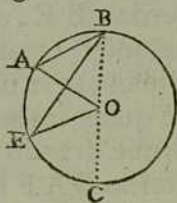
EXP. En el círculo $ABEC$ sea el ángulo AOE formado en el centro, y ABE en la circunferencia, insistiendo uno y otro sobre el mismo arco AE : digo que el ángulo AOE es duplo de ABE .



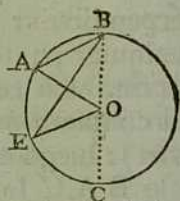
PREP. Tírese por el punto B el diámetro BC .

DEM. El triángulo AOB es isósceles: y (prop. v lib. I) los ángulos BAO , ABO son iguales por estar sobre la base AB , y el externo AOC igual á ambos (prop. xxxii lib. cit.): luego es duplo del ángulo ABC . Del mismo modo se demuestra que el ángulo COE es duplo del ángulo CBE : luego todo el ángulo AOE es duplo del ángulo ABE .

Quando se forman los ángulos de suerte que se corten un lado, tambien el ángulo AOE formado en el centro es duplo del ángulo ABE formado en la circunferencia; porque tirando el diámetro

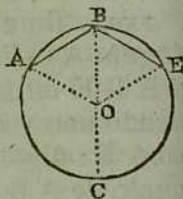


BC , se tiene por lo demostrado que el ángulo AOC es duplo del ángulo ABC , y que el ángulo EOC es duplo del ángulo ECB : luego si del total AOC se quita EOC , y del total ABC se quita ECB , será tambien el residuo AOE duplo del residuo ABE : luego el ángulo formado en el centro &c.

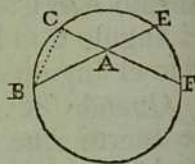


COROLARIO I. El ángulo ABE formado en la circunferencia tiene por medida la mitad del arco AE sobre quien insiste; porque el ángulo ABE formado en la circunferencia es mitad del ángulo AOE formado en el centro; pero á este le mide todo el arco AE sobre quien insiste: luego al ángulo ABE le mide la mitad de dicho arco.

COROLARIO II. Lo mismo se verifica quando el ángulo ABE formado en la circunferencia insiste sobre un arco mayor que el semicírculo; porque tirado el diámetro BC , y los radios OA , OE , el ángulo AOC es duplo del ángulo ABC : luego este tiene por medida la mitad del arco AC : por la misma razon el ángulo CBE tiene por medida la mitad del arco CE : luego todo el ángulo B tiene por medida la mitad del arco ACE .

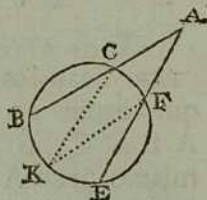


ESCOLIO I. Si dentro de un círculo se toma un punto A , que no sea el centro, y por él se tiran dos cuerdas BE , CF , la medida de qualquier ángulo BAF de los que forman, es la mitad del arco BF sobre quien insiste mas la mitad del arco opuesto CE ; porque tirando CB , en el triángulo ABC el ángulo externo BAF es igual á los internos opuestos B , C



(prop. xxxii lib. i); pero el ángulo B tiene por medida la mitad del arco C E, y el ángulo C la mitad del arco B F: luego el ángulo B A F tiene por medida la mitad del arco B F sobre quien insiste, mas la mitad del arco opuesto C E.

ESCOLIO II. Si de un punto A fuera de un círculo se tiran dos secantes A B, A E, la medida del ángulo A que forman, es la semidiferencia entre los arcos B E, C F que cortan; porque tirando F K paralela á C B, y asimismo la recta C K: por ser las C B, F K paralelas, y cortadas por la C K, el ángulo B C K es igual á su alterno C K F (prop. xxix lib. i); pero el ángulo C K F tiene por medida la mitad del arco C F, y el ángulo B C K la mitad del arco B K: luego estos dos arcos son iguales, y por consiguiente K E es la diferencia entre ellos. Tambien por razon de las mismas paralelas el ángulo externo K F E es igual á su interno A; pero el ángulo K F E tiene por medida la mitad del arco K E, semidiferencia entre los arcos C F, B E: luego el ángulo A tiene tambien la misma medida, y por consiguiente si de un punto A fuera de un círculo &c.

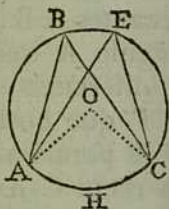


COROLARIO. De lo dicho se infiere que si en un círculo se tiran dos cuerdas B C, K F paralelas, cortarían arcos iguales, como queda demostrado.

PROPOSICION XXI. TEOREMA.

Los ángulos que estan en un mismo segmento de círculo, ó que insisten sobre un mismo arco, son iguales.

EXP. Sean los ángulos ABC, AEC , que esten en un mismo segmento $ABEC$, ó que insistan sobre el mismo arco AHC : digo que serán iguales.

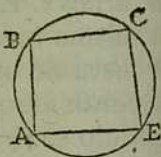


DEM. Tirados los radios AO, OC , el ángulo AOC es duplo del ángulo B (prop. xx), y tambien lo es del ángulo E : luego (ax. viii) dichos ángulos son iguales: que era &c.

PROPOSICION XXII. TEOREMA.

Los ángulos opuestos de las figuras quadriláteras inscriptas en un círculo, son iguales á dos rectos.

EXP. Sea el círculo $AECB$, y en él inscripto el quadrilátero $BAEC$, esto es, que todos sus ángulos esten en la circunferencia: digo que cada dos opuestos, como B, E , valen dos rectos.



DEM. La medida del ángulo B es la mitad del arco AEC sobre quien insiste, y la medida del ángulo E es la mitad del arco ABC ; pero estos dos arcos son iguales á toda la circunferencia: luego la medida de dichos ángulos es la mitad de la circunferencia, esto es, 180 grados, y por consiguiente los dos juntos valen dos rectos: del mismo modo se demuestra que los dos ángulos opuestos A, C juntos

valen dos rectos: luego los ángulos opuestos de las figuras quadriláteras &c.

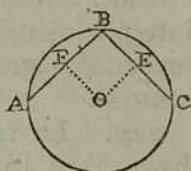
Las proposiciones xxiii y xxiv se omiten.

PROPOSICION XXV. TEOREMA.

Acabar un círculo, dado un segmento de él.

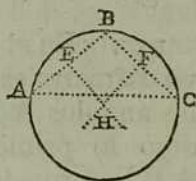
EXP. Sea ABC el segmento dado, y háyase de acabar el círculo.

OPER. Tírense qualesquiera dos cuerdas AB , BC : divídanse por medio en los puntos E y F (prop. x lib. i): levántense en estos las perpendiculares EO , FO (prop. xi lib. i), y el punto O en que se corten, será el centro desde el qual con el intervalo OB se perfeccionará el círculo.



DEM. El centro del círculo está en la perpendicular OE , y tambien en la perpendicular OF (cor. prop. i): luego el punto O , que es comun á las dos perpendiculares, será el centro, y desde él se podrá perfeccionar el círculo.

COROLARIO. De esta proposicion se infiere el modo de describir un círculo que pase por tres puntos dados, como A , B , C , que no esten en linea recta, lo que se hace de este modo: tiradas las rectas AB , BC , AC , quedará formado un triángulo, y dividiendo qualesquiera dos lados AB , BC por medio en los puntos E , F , se levantarán las perpendiculares EH , FH , y el punto en que se corten será el centro desde el qual con el intervalo AH , describiendo un círculo, pasará tambien por los puntos B , C .



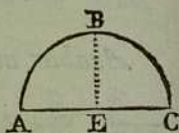
Las proposiciones xxvi, xxvii, xxviii y xxix se omiten.

PROPOSICION XXX. PROBLEMA.

Dividir un arco de círculo en dos partes iguales.

EXP. Sea el arco dado A B C, y háyase de dividir en dos partes iguales.

OPER. Tírese la recta A C: divídase por medio en E, y levantando en este punto la perpendicular E B, cortará al arco por medio en el punto B.

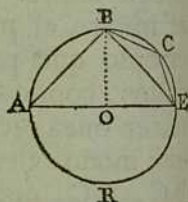


DEM. La recta B E corta por medio y en ángulos rectos á la cuerda A C: luego (prop. III) divide también al arco: que era &c.

PROPOSICION XXXI. TEOREMA.

En qualquier círculo el ángulo formado en el semicírculo es recto: el ángulo formado en el segmento mayor es agudo, y el formado en el segmento menor es obtuso.

EXP. En el círculo A B E R, cuyo diámetro es A E, esten formados los ángulos A B E, B A E, B C E: digo lo primero, que el ángulo A B E formado en el semicírculo, es recto.



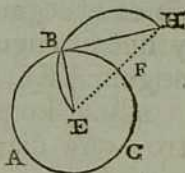
DEM. El ángulo A B E tiene por medida la mitad del semicírculo A R E (prop. xx); pero este es medida de dos ángulos rectos (esc. II def. XVIII lib. I): luego su mitad es la medida de un ángulo recto, y por consiguiente siéndolo del ángulo A B E, será este recto: que es lo primero.

Lo segundo digo: que el ángulo A formado en el

segmento $B E R A$ mayor que el semicírculo, es agudo; porque en el triángulo $A E B$ los tres ángulos son iguales á dos rectos (prop. xxxii lib. i), y siendo el ángulo $A B E$ recto por lo demostrado, qualquiera de los otros dos, como A , será agudo: que era &c.

Lo tercero digo: que el ángulo $B C E$ formado en el segmento $B E C$ menor que el semicírculo, es obtuso; porque en el quadrilátero $A B C E$ inscripto en el círculo, los dos ángulos opuestos A y C juntos son iguales á dos rectos (prop. xxii); pero el ángulo A es agudo por lo demostrado: luego el ángulo C será obtuso: que era &c.

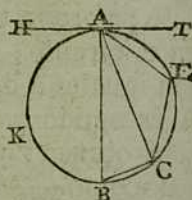
ESCOLIO. Á un círculo dado $A B C$ se puede tirar una tangente desde un punto H fuera de él, de este modo: desde el punto dado H al centro E del círculo tírese la recta $H E$, y dividiéndola por medio en F , descríbase con la distancia $F H$ un semicírculo, que cortará á la circunferencia del círculo dado en el punto B : tírese desde este la recta $B H$, y esta será la tangente; porque tirando el radio $B E$, el ángulo $E B H$ formado en el semicírculo, es recto (prop. xxxi): luego $H B$ es perpendicular á la extremidad del diámetro, y (prop. xvi) tangente.



PROPOSICION XXXII. TEOREMA.

Si una recta es tangente á un círculo, y del punto del contacto sale una secante, los ángulos que la tangente hiciere con la secante son iguales á los que se forman en los segmentos alternos.

EXP. Sea la recta HT tangente al círculo $AEBK$, y por el punto del contacto A tírese qualquiera secante AC : digo que el ángulo TAC es igual al ángulo ABC formado en el segmento alterno $AKBC$, y que el ángulo HAC es igual al ángulo AEC formado en el segmento alterno ACE .



DEM. Lo primero: si la secante pasa por el centro, será diámetro, y los segmentos alternos dos semicírculos en quienes los ángulos serán rectos (prop. xxxi), y siéndolo tambien (prop. xviii) los que forma la tangente con la secante por pasar esta por el centro, serán iguales á los formados en los segmentos alternos.

Lo segundo: si la recta AC no pasa por el centro, tírese por él AB : digo que el ángulo $CAT = ABC$; porque los ángulos HAB, BAT son iguales á dos rectos (prop. xiii lib. i), y tambien lo son los tres ángulos del triángulo BAC (prop. xxxii lib. i): luego estos tres son iguales á los otros dos HAB, BAT , y por consiguiente quitando de estos el ángulo recto HAB , y de los tres del triángulo BAC el ángulo BAC , que tambien es recto (prop. xxxi), quedará el ángulo BAT igual á los dos BAC y B , y quitando asimismo de ambas partes el ángulo comun BAC , quedará $CAT = ABC$.

Lo tercero digo: que el ángulo HAC es igual al

ángulo $A E C$ formado en el segmento alterno $A C E$; porque el ángulo $H A C$ es suplemento á dos rectos del ángulo $C A T$ (prop. XIII lib. I): tambien en el quadrilátero inscripto $A B C E$ el ángulo E es suplemento á dos rectos del ángulo B (prop. XXII); pero los ángulos $C A T$, $A B C$ son iguales por lo demostrado: luego tambien lo serán $H A C$, $A E C$.

COROLARIO. Siendo la mitad del arco $A E C$ medida del ángulo B (prop. XX), tambien lo será del ángulo $C A T$ su igual formado de la tangente y de la secante.

PROPOSICION XXXIII. PROBLEMA.

Sobre una recta dada describir un segmento de círculo capaz de contener un ángulo igual á un ángulo rectilineo dado.

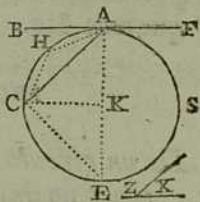
EXP. Sea dada la recta $A C$, y el ángulo rectilineo X , y háyase de describir sobre dicha recta un segmento de círculo capaz de contener un ángulo igual á X .

OPER. En el punto A de la recta $A C$ hágase (prop. XXIII lib. I) el ángulo $B A C$ igual al dado X : levántese en el mismo punto A la perpendicular $A E$ sobre la recta $B F$: hágase el ángulo $A C K = C A K$, y el punto K en que se cortan las rectas $A E$, $C K$, será el centro, desde el qual con el intervalo $K C$ describiendo un círculo, pasará por los puntos C , A : tírese $C E$, y el segmento $C E S A$ será capaz de contener al ángulo X .

DEM. En el triángulo $C K A$ los ángulos $C A K$, $A C K$ son iguales: luego (prop. VI lib. I) $A K = C K$,

TOM. I.

R



lib. I), y el segmento A E C B será el que se pide; de modo que eligiendo en él qualquier punto E, y tirando las rectas E A, E B, el ángulo E será igual al dado X.

DEM. La recta A L es tangente, y la A B secante: luego (prop. xxxii) el ángulo L A B = E; pero el ángulo L A B = X por construcción: luego (ax. I) el ángulo E = X, y por consiguiente del círculo dado se ha cortado un segmento &c.

Las proposiciones xxxv, xxxvi y xxxvii de este libro se dexan hasta el fin del libro vi para facilitar su inteligencia.

LIBRO SEXTO.

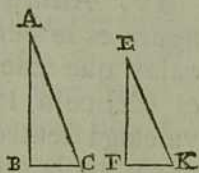
Trata Euclides en este libro de la razon y proporcion de las figuras planas: materia muy importante para la inteligencia de la Geometría y Trigonometría, por cuya utilidad es llamado libro de oro.

DEFINICIONES.

I. Figuras rectilíneas semejantes son aquellas que tienen todos sus ángulos iguales cada uno á su correspondiente, y los lados que comprehenden iguales ángulos proporcionales; y así se dirá que los triángulos B A C, F E K son semejantes si el ángulo B = F, el ángulo C = K, el ángulo A = E, y al mismo tiempo si son

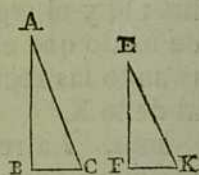
$$\left\{ \begin{array}{l} A B : B C :: E F : F K \\ B C : C A :: F K : K E \\ C A : A B :: K E : E F \end{array} \right.$$

proporcionales

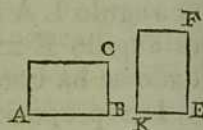


Lo mismo se entiende de las figuras quadriláteras

y multiláteras. En las figuras semejantes los lados que se oponen á iguales ángulos, se llaman homólogos; y así los lados AB , EF son homólogos, por oponerse á los ángulos iguales C , K .



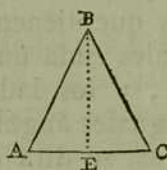
II. Figuras recíprocas son aquellas que tienen recíprocos los lados que comprehenden iguales ángulos, esto es, aquellas en las cuales el primero y quarto término de la proporcion son lados de una figura, y el segundo y tercero lados de otra; y así se dirá que los paralelogramos AC , KF son recíprocos si tienen el ángulo $B = E$, y son proporcionales $AB:KE::EF:BC$. Lo mismo se entiende de los triángulos y figuras multiláteras.



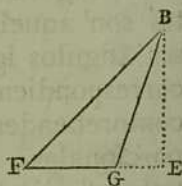
III. Línea dividida en media y extrema razon se llama aquella que lo está en dos partes desiguales, de tal suerte que la toda al segmento mayor tenga la misma razon que este al menor: y así la recta AB se dirá que está dividida en media y extrema razon en el punto C si son proporcionales $AB:AC::AC:CB$.

IV. Altura de una figura es la perpendicular que cae desde el vértice á la base, ya caiga dentro ó fuera; y así la altura de los triángulos ABC ,

CASO I.

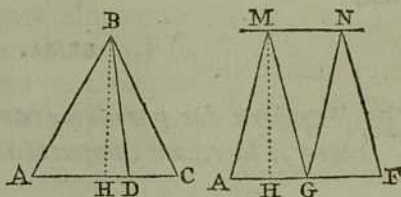


CASO II.



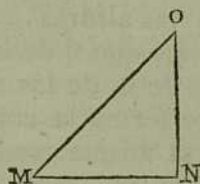
FBG es la perpendicular BE , ya caiga dentro (CASO I), ó fuera (CASO II), prolongando la base FG . En el triángulo qualquier lado se puede tomar por base, y su altura es la perpendicular baxada desde el ángulo opuesto.

Si dos triángulos ABD , DBC tienen un vértice común B , tendrán una misma altura BH ; y lo mismo se entiende quando estan entre unas

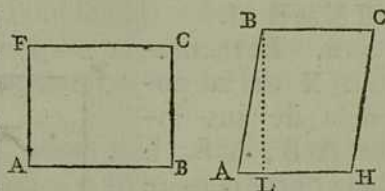


mismas paralelas, como los triángulos AMG , GNF , porque su altura será MH perpendicular entre las paralelas MN , AF .

En el triángulo MON rectángulo en N , si MN se toma como base, será NO la altura; y al contrario si NO se toma como base, será MN la altura.



Tambien en el rectángulo AC , si la recta AB se toma por base, será BC la altura; y si BC se toma por base, será AB la altura.



Finalmente la altura de qualquier paralelogramo AC será BL perpendicular á la base AH , entre las paralelas BC , AH .

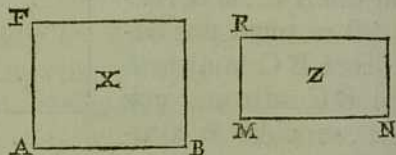
V. Semejantes arcos de círculo son aquellos que tienen igual razon á sus respectivas circunferencias, como si cada uno fuera el tercio, quarto, quinto &c. de su correspondiente circunferencia. Para facilitar la inteligencia de las proposiciones de este libro servirá el siguiente lema.

LEMA.

Qualesquiera dos paralelogramos ó triángulos tienen entre sí la razon compuesta de bases y alturas.

EXP. Lo primero sean dos paralelogramos rectángulos X, Z
cuyas bases son A B, M N
y las alturas A F, M R
digo que si de la razon de las bases A B : M N
y de la de las alturas A F : M R
se forma la compuesta A B $\times$ A F : M N $\times$ M R
esa misma tendrá la superficie X á la superficie Z,
esto es, serán proporcionales X : Z :: A B $\times$ A F : M N $\times$ M R.

DEM. El rectángulo X es la potencia de sus lados A B, A F; ó bien el producto de ellos (def. 1 lib. 11),

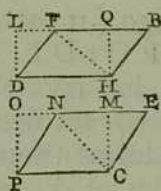


esto es X = A B $\times$ A F
y por la misma razon Z = M N $\times$ M R
luego (ax. v) } $\frac{X}{Z} = \frac{A B \times A F}{M N \times M R}$

esto es, los exponentes
iguales, y por consiguiente proporcionales } X : Z :: A B $\times$ A F : M N $\times$ M R
que es lo que se habia de demostrar.

EXP. POR NÚMEROS. Sea A B = 4, M N = 5, A F = 3, M R = 2, será el rectángulo X = 12, y el rectángulo Z = 10: luego X : Z :: 12 : 10; pero siendo las bases como 4 : 5, y las alturas como 3 : 2, la razon compuesta será tambien como 12 : 10; luego los rectángulos tienen la razon compuesta de bases y alturas.

Lo segundo: si los paralelogramos fueren oblicuángulos, como DB, PE , siendo estos iguales á los rectángulos LH, OC (prop. xxxv lib. i), la razon que tengan los rectángulos, tendrán asimismo los oblicuángulos; pero aquellos tienen la razon compuesta de bases y alturas: luego la misma tendrán los oblicuángulos.

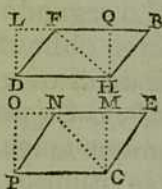


Lo tercero: si fueren dos triángulos DFH, PNC , siendo estos mitades de los paralelogramos DB, PE , y por consiguiente de sus iguales los rectángulos LH, OC , la razon que tuvieren dichos rectángulos, esa misma tendrán sus mitades (prop. xv lib. v); pero los rectángulos tienen la razon compuesta de bases y alturas: luego tambien los triángulos, y por consiguiente qualesquiera dos paralelogramos ó triángulos tienen la razon compuesta de bases y alturas.

COROLARIO I. Si las bases y alturas fueren recíprocas, los paralelogramos ó triángulos serán iguales, esto es, si en los rectángulos LH, OC se supone que la base DH á la base PC es como la altura PO á la altura DL , los rectángulos serán iguales, porque el producto de los extremos $DH \times DL = PC \times PO$ producto de los medios (lem. i lib. v): lo mismo se dice de los paralelogramos oblicuángulos DB, PE , por ser iguales á los rectángulos, como tambien de los triángulos DFH, PNC por ser sus mitades.

COROLARIO II. Si los paralelogramos ó triángulos fueren iguales, tendrán bases y alturas recíprocas, esto es, si se supone el rectángulo $LH = OC$, serán recíprocamente proporcionales $DH:PC::PO:DL$, porque el producto de los extremos $DH \times DL = PC \times PO$ producto de los medios (lem. i lib. v):

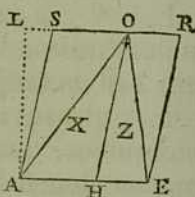
luego (II part. lem. cit.) $DH : PC :: PO : DL$. Lo mismo se entiende de los paralelogramos oblicuángulos por ser iguales á los rectángulos, y de los triángulos por ser sus mitades.



PROPOSICION I. TEOREMA.

Los paralelogramos ó triángulos de una misma ó igual altura tienen la misma razon que sus bases.

EXP. Sean los paralelogramos X, Z, que tengan una misma altura AL: digo que tienen la razon de sus bases, esto es, que el paralelogramo $X : Z :: AH : HE$.



DEM. Siendo los paralelogramos ó las superficies de ellos los productos de las bases y alturas, será el paralelogramo $X = AH \times AL$ y el paralelogramo $Z = HE \times AL$ luego son proporcionales. $X : Z :: AH \times AL : HE \times AL$ pero (prop. xv lib. v) $AH \times AL : HE \times AL :: AH : HE$ luego (prop. xi lib. cit.) $X : Z :: AH : HE$. Lo mismo se entiende de los triángulos AOH, HOE por ser mitades de los paralelogramos X, Z (prop. xxxiv lib. i).

COROLARIO. De aquí se infiere que si dos paralelogramos ó triángulos tienen iguales bases, y alturas desiguales, tendrán la razon de sus alturas; y que si las bases y alturas son iguales, los paralelogramos ó triángulos serán iguales.

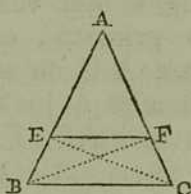
PROPOSICION II. TEOREMA.

En qualquier triángulo la paralela á un lado corta en segmentos proporcionales á los otros dos lados; y la recta que corta proporcionalmente á dos lados de un triángulo, es paralela al otro lado.

EXP. En el triángulo ABC sea EF paralela á BC : digo que los lados AB , AC estan cortados proporcionalmente en los puntos E , F , esto es, que son proporcionales. $AE:EB::AF:FC$.

PREP. Tírense las rectas BF , EC .

DEM. Las rectas EF , BC son paralelas por suposición: luego (prop. xxxvii lib. i) los dos triángulos BEF , CEF son iguales, y por consiguiente comparados con el triángulo AEF , tendrán con él la misma razon (prop. vii lib. v), esto es, serán proporcionales el triángulo . . . $AEF:BEF::AEF:CEF$ tambien lo son (prop. i) . . . $AEF:BEF::AE:EB$ y asimismo el triángulo . . . $AEF:CEF::AF:FC$ luego (prop. xi lib. v) $AE:EB::AF:FC$; que es lo primero.

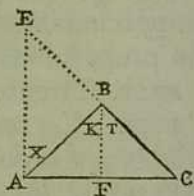


Lo segundo: sean proporcionales $AE:EB::AF:FC$; digo que la recta EF es paralela á BC , porque siendo por lo supuesto. $AE:EB::AF:FC$ y por lo demostrado. $AEF:BEF::AE:EB$ como tambien. $AEF:CEF::AF:FC$ se tendrá (prop. xi lib. v) $AEF:BEF::AEF:CEF$ y (prop. ix lib. cit.) $BEF=CEF$. Luego estos dos triángulos iguales, que tienen una misma base EF , y estan constituidos de una misma parte, estarán entre unas mismas paralelas (prop. xxxix lib. i), y por consiguiente la recta EF será paralela á BC : que es lo segundo.

PROPOSICION III. TEOREMA.

En qualquier triángulo la recta que divide por medio al ángulo del vértice, divide á la base en segmentos proporcionales á los lados; y la recta que divide á la base en segmentos proporcionales á los lados, divide tambien por medio al ángulo del vértice.

EXP. En el triángulo ABC divida la recta BF por medio al ángulo del vértice ABC : digo lo primero, que dividirá á la base AC en segmentos proporcionales á los otros lados, esto es, que $AF:FC::AB:BC$.



PREP. Alárguese CB hasta cortar $BE = BA$, y tírese AE .

DEM. Por ser $BE = BA$, el triángulo ABE es isósceles, y (prop. v lib. i) el ángulo $X = E$; pero el ángulo externo ABC es igual á los dos X y E (prop. xxxii lib. i): luego el ángulo X es igual á la mitad del ángulo ABC , esto es, el ángulo $X = K$; y siendo estos alternos, las rectas AE, FB son paralelas (prop. xxvii lib. i); pero (prop. ii) son proporcionales $EB:BC::AF:FC$ y por la construccion $EB = AB$ luego será substituyendo. $AB:BC::AF:FC$; que es lo primero.

Lo segundo: supuesto que sean proporcionales $AB:BC::AF:FC$, digo que el ángulo ABC estará dividido en dos partes iguales; porque siendo. $AB:BC::AF:FC$ y por la construccion. $AB = EB$ se tendrá substituyendo. $EB:BC::AF:FC$; luego (prop. ii) las rectas AE, BF son para-

lelas, y (prop. xxix lib. 1) el ángulo externo $T = E$ su interno, y el ángulo $K = X$ su alterno; pero el ángulo $X = E$ (prop. v lib. 1): luego (ax. 1) el ángulo $K = T$, y por consiguiente el ángulo del vértice ABC está dividido por medio: que es lo segundo.

PROPOSICION IV. TEOREMA.

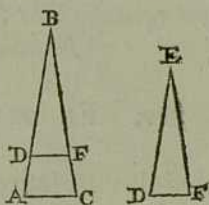
En los triángulos equiángulos los lados que comprenden iguales ángulos, son proporcionales; y los que se oponen á iguales ángulos, son homólogos.

EXP. Sean los triángulos ABC , DEF equiángulos, esto es, sea el ángulo $B = E$, $C = F$, $A = D$; digo que son proporcionales

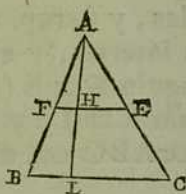
$$\begin{cases} CA : AB :: FD : DE \\ AB : BC :: DE : EF \\ BC : CA :: EF : FD \end{cases}$$

DEM. Si el ángulo E se ajusta á su igual el ángulo B , los lados ED , EF caerán sobre los lados BA , BC , y por suponerse el ángulo externo $EDF = BAC$ su interno, serán DF , AC paralelas (prop. xxviii lib. 1): luego (prop. 11) son proporcionales..... $AD : DB :: CF : FB$ y (prop. xviii lib. v)..... $AB : DB :: CB : FB$ luego (prop. xvi lib. cit.)... $AB : CB :: DB : FB$. Ajustándose los ángulos F y C , que se suponen iguales, se demuestra del mismo modo que son proporcionales..... $CB : CA :: EF : FD$; y por último ajustándose los ángulos iguales D , A , se demuestra que son proporcionales $CA : AB :: FD : DE$; luego en los triángulos equiángulos &c.

COROLARIO I. De aquí se sigue que los triángulos equiángulos son semejantes.



COROLARIO II. Si en un triángulo ABC se tira una recta FE paralela á uno de sus lados BC , resultarán dos triángulos ABC , FAE equiángulos, y por consiguiente semejantes.



COROLARIO III. Si en un triángulo ABC se tira una recta FE paralela á uno de sus lados BC , y desde el ángulo opuesto A qualquiera otra recta AL , esta cortará á las paralelas en segmentos proporcionales, esto es $FH:HE::BL:LC$; porque en los triángulos semejantes FAH , BAL son proporcionales (prop. iv) $FH:HA::BL:LA$ y en los semejantes $HA E$, LAC son proporcionales... } $HA:HE::LA:LC$ luego (prop. xxii lib.v) $FH:HE::BL:LC$.

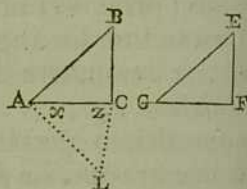
PROPOSICION V. TEOREMA.

Los triángulos que tienen los lados proporcionales, son equiángulos; y los ángulos que se oponen á lados homólogos, son iguales entre sí.

EXP. En los triángulos ABC , GEF sean proporcionales los lados, esto es $\begin{cases} AB:BC::GE:EF \\ AC:CB::GF:FE \\ AB:AC::GE:GF \end{cases}$ digo que el ángulo $B=E$, el ángulo $C=F$, y el ángulo $A=G$.

PREP. Hágase el ángulo $x=G$, el ángulo $z=F$, y será el tercero $L=E$.

DEM. En los triángulos ALC , GEF , siendo equiángulos por construcción, son proporcionales (prop. iv) $AL:AC::GE:GF$ tambien lo son por lo supuesto $AB:AC::GE:GF$ luego (prop. xi lib. v) $AL:AC::AB:AC$



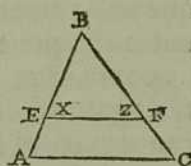
y (prop. ix lib. cit.) $AL = AB$,
 del mismo modo se prueba que $CL = CB$;
 y siendo la base AC comun á los dos triángulos
 ABC, ALC , son totalmente iguales (prop. viii lib. i);
 y por consiguiente el ángulo $BAC = x$, y el ángulo
 $ACB = z$; pero el ángulo $x = G$ por construccion,
 el ángulo $z = F$, y el tercero $L = E$: luego los tres
 ángulos del triángulo ABC son iguales á los tres
 del triángulo GEF , y por consiguiente los triángu-
 los que tienen los lados proporcionales, son equián-
 gulos: que era &c.

COROLARIO. De aquí se infiere que los triángulos
 que tienen los lados proporcionales, son semejantes.

PROPOSICION VI. TEOREMA.

*Si dos triángulos tienen un ángulo igual, y los lados
 que le comprehenden proporcionales, son equi-
 ángulos.*

EXP. Sean los triángulos ABC ,
 BEF , que tengan el ángulo B co-
 mun, y proporcionales los lados
 $AB : CB :: EB : FB$; digo que será
 el ángulo $X = A$, y el ángulo $Z = C$.



DEM. Por lo supuesto son pro-
 porcionales..... $AB : CB :: EB : FB$
 tambien lo serán alternando.. $AB : EB :: CB : FB$
 y dividiendo..... $AE : EB :: CF : FB$;
 luego (prop. ii) las rectas EF, AC son paralelas,
 y por consiguiente (prop. xxix lib. i) el ángulo ex-
 terno X igual á su interno A , y el externo Z igual á
 su interno C : que era &c.

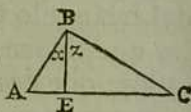
COROLARIO. De aquí se sigue que los triángulos
 que tienen un ángulo igual, y proporcionales los la-
 dos que le comprehenden, son semejantes.

La proposicion vii se omite.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

En qualquier triángulo rectángulo, si del ángulo recto se baxa una perpendicular sobre la hipotenusa, dividirá al triángulo en dos triángulos semejantes al total y entre sí.

EXP. Sea el triángulo ABC rectángulo en B , y desde este punto báxese sobre la hipotenusa AC la perpendicular BE ; digo que los triángulos ABE , ECB son semejantes al total ABC y entre sí.



DEM. Los triángulos ABE , ABC tienen el ángulo A comun, y los ángulos AEB , ABC rectos: luego (prop. xxxi lib. i) el ángulo $X = C$, y por consiguiente dichos triángulos son semejantes (cor. i prop. iv): tambien son semejantes los triángulos ABC , ECB ; luego los dos triángulos ABE , ECB , que son semejantes al total ABC , son semejantes entre sí: que era &c.

COROLARIO I. De aquí se sigue que en todo triángulo rectángulo la perpendicular BE , que cae desde el ángulo recto B á la hipotenusa ó base AC , es media proporcional entre los segmentos AE , EC de dicha base, porque en los triángulos semejantes AEB , CEB son proporcionales (prop. iv) $AE:EB::EB:EC$.

COROLARIO II. Tambien se sigue que qualquier lado de los que comprehenden al ángulo recto B , es medio proporcional entre la base y el segmento adyacente á dicho lado, esto es, que AB será medio proporcional entre AC , AE , y BC medio proporcional entre AC , CE ; porque en los triángulos semejantes ABC , ABE son proporcionales $AC:AB::AB:AE$;

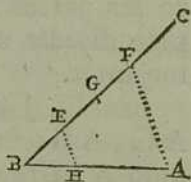
y en los semejantes ABC , CBE lo son también..... $AC:CB::CB:CE$.

PROPOSICION IX. PROBLEMA.

De una recta dada cortar la parte que se quisiere.

EXP. Sea la recta dada BA , y háyase de cortar de ella la tercera parte.

OPER. Térese la recta BC indeterminada, formando qualquier ángulo ABC con la recta dada BA , y porque se pide la tercera parte de esta, tómense en la recta BC tres partes iguales BE , EG , GF de qualquiera magnitud: térese la recta FA , y por el punto E la EH paralela á FA (prop. xxxi lib. i), y la recta BH será la tercera parte de BA , que se pide.



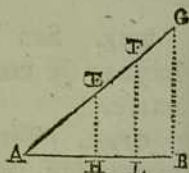
DEM. En el triángulo FBA las rectas EH , FA son paralelas: luego (prop. ii) son proporcionales..... $FE:EB::AH:HB$, y componiendo (prop. xviii lib. v) $FB:EB::AB:HB$; pero EB es la tercera parte de FB : luego HB es también la tercera parte de BA . Si se pidiera la quinta sexta ú otra parte de BA , se tomaria desde el punto B cinco ó seis partes iguales sobre AC , y se haria la misma operacion.

PROPOSICION X. PROBLEMA.

Dividir una recta dada en partes semejantes á las en que esté dividida otra recta dada.

EXP. Sea la recta AG dividida en las partes AE , EF , FG , y se pide dividir otra AB en partes semejantes.

OPER. Júntense las dos rectas AG , AB , formando qualquier ángulo A , tírese BG , y (prop. xxxi lib. I) las FL , EH paralelas á BG ; digo que las partes AH , HL , LB son semejantes á las AE , EF , FG .



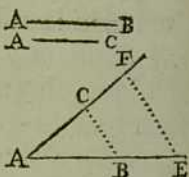
DEM. Por ser FL y GB paralelas, en el triángulo AGB son proporcionales (prop. II) $AF:FG::AL:LB$; asimismo lo son en el triángulo AFH proporcionales..... $AE:EF::AH:HL$; luego la recta AB está dividida como se pide.

Por esta proposicion se reduce una escala mayor á otra menor, y al contrario.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

A dos rectas dadas hallar una tercera proporcional.

EXP. Sean las dos rectas AB , AC , á las que se pide hallar una tercera proporcional.



OPER. Júntense las dos rectas AB , AC , formando qualquier ángulo A , y alargadas á discrecion, hágase $BE = AC$: tírese BC , y por el punto E la recta EF paralela á BC ; digo que CF es la tercera proporcional que se pide.

DEM. En el triángulo AEF, por ser BC, EF paralelas, son proporcionales (prop. II) $AB:BE::AC:CF$; pero $BE=AC$ por construcción: luego substituyendo será $AB:AC::AC:CF$, y por consiguiente CF es la tercera proporcional que se pide.

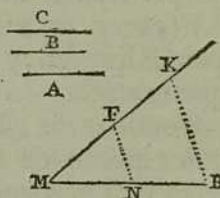
PROPOSICION XII. PROBLEMA.

A tres rectas dadas hallar una quarta proporcional.

EXP. Sean las tres rectas A, B, C, á las que se pide hallar una quarta proporcional.

OPER. Fórmese qualquier ángulo M, y hágase $MN=A$, $NB=B$ y $MF=C$: tírese FN, y por el punto B la BK paralela á FN, que cortará á la MF alargada en el punto K; digo que FK es la quarta proporcional que se pide.

DEM. En el triángulo MBK las rectas FN, KB son paralelas: luego (prop. II) son proporcionales $MN:NB::MF:FK$; pero $MN=A$, $NB=B$ y $MF=C$; luego substituyendo será $A:B::C:FK$, y por consiguiente FK es la quarta proporcional que se pide.



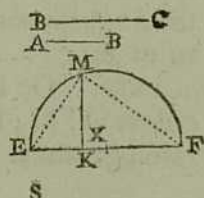
PROPOSICION XIII. PROBLEMA.

A dos rectas dadas hallar una media proporcional.

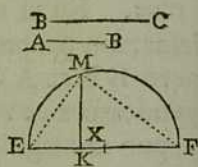
EXP. Sean las dos rectas AB, BC, á las que se pide hallar una media proporcional.

OPER. Tírese á discrecion una recta EF, y en ella tómese $EK=AB$

TOM. I.



y $KF = BC$: divídase EF por medio en X , y con el intervalo EX ó XF describáse un semicírculo: en el punto K levántese una perpendicular hasta que toque á la circunferencia en M , y la KM será la media proporcional que se pide.



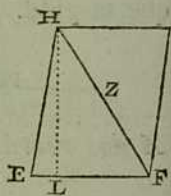
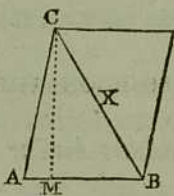
DEM. Tiradas las rectas ME, MF , el ángulo EMF en el semicírculo es recto (prop. xxxi lib. iii), y la perpendicular MK media proporcional entre EK y KF (cor. prop. viii): luego $..... EK:KM::KM:KF$; pero $EK = AB$, y $KF = BC$; luego $AB:KM::KM:BC$; que era &c.

COROLARIO. De aquí se infiere que si de cualquier punto de la circunferencia de un círculo se baxa una perpendicular al diámetro, esta es media proporcional entre los segmentos de dicho diámetro.

PROPOSICION XIV. TEOREMA.

Los paralelogramos iguales, que tienen un ángulo igual, tienen recíprocos los lados que comprehenden iguales ángulos; y si tienen recíprocos los lados que comprehenden iguales ángulos, los paralelogramos serán iguales.

EXP. Sean los paralelogramos iguales X, Z , y tengan el ángulo $A = E$; digo lo primero, que los lados que comprehenden estos ángulos son recíprocamente proporcionales, es-



to es, que $..... AB:EF::EH:AC$.

PRÉP. De los puntos C, H báxense las perpendiculares CM, HL , que serán las alturas de los paralelogramos.

DEM. Los triángulos EHL , ACM tienen el ángulo $E = A$ por lo supuesto, y los ángulos en L , M rectos por construcción: luego son equiángulos, y (prop. iv) serán proporcionales $HE:HL::CA:CM$, y alternando (prop. xvi lib. v) $HE:CA::HL:CM$; también por suponerse los paralelogramos iguales, tendrán (cor. ii del lema) bases y alturas recíprocas, esto es, serán proporcionales... $AB:EF::HL:CM$; luego (prop. xi lib. v)..... $AB:EF::HE:CA$: que era lo primero.

Lo segundo: sea el ángulo $A = E$, y proporcionales..... $AB:EF::HE:CA$; digo que el paralelogramo $X = Z$, porque siendo por lo demostrado..... $HL:CM::HE:CA$, y por lo supuesto..... $AB:EF::HE:CA$, será (prop. xi lib. v)..... $AB:EF::HL:CM$, esto es, las bases y alturas de los paralelogramos son recíprocas: luego (cor. i del lema) dichos paralelogramos serán iguales: que era lo segundo.

PROPOSICION XV. TEOREMA.

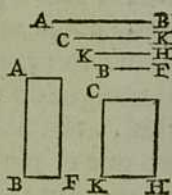
Los triángulos iguales, que tienen un ángulo igual, tienen recíprocos los lados que le comprehenden; y si los lados que comprehenden iguales ángulos son recíprocos, los triángulos serán iguales.

Se infiere de la proposicion antecedente por ser mitades de los paralelogramos.

PROPOSICION XVI. PROBLEMA.

Si quatro rectas son proporcionales, el rectángulo hecho de las extremas es igual al rectángulo hecho de las medias; y si el rectángulo hecho de las extremas es igual al de las medias, las quatro rectas serán proporcionales.

EXP. Sean las quatro rectas proporcionales... $AB : CK :: KH : BF$; digo lo primero, que si de las extremas AB , BF se forma el rectángulo AF , y de las medias CK , KH el rectángulo CH , dichos rectángulos serán iguales.



DEM. Por lo supues- } ... $AB : CK :: KH : BF$;
to son proporcionales... }
luego (lem. i lib. v) $AB \times BF = CK \times KH$,
esto es, el rectángulo $AF = CH$.

Lo segundo: sea el rectángulo $AF = CH$; digo que son proporcionales..... $AB : CK :: KH : BF$, porque el rectángulo $AF = AB \times BF$, y el rectángulo $CH = CK \times KH$; luego (ax. i) $AB \times BF = CK \times KH$, y por consiguiente (ii part.) } $AB : CK :: KH : BF$.
lem. i lib. v) }

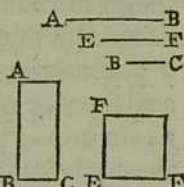
PROPOSICION XVII. PROBLEMA.

Si tres rectas son continuas proporcionales, el rectángulo hecho de las extremas es igual al quadrado hecho de la media; y si el rectángulo de las extremas es igual al quadrado de la media, las tres rectas serán continuas proporcionales.

EXP. Sean las tres rectas AB , EF , BC , esto es,

sean continuas proporcionales... $AB:EF::EF:BC$;
 digo que $AB \times BC = EF^2$

DEM. Por lo supuesto son proporcionales $AB:EF::EF:BC$;
 luego (lem. i lib. v) $AB \times BC = EF \times EF$,
 esto es, el rectángulo AC igual al
 quadrado de EF.



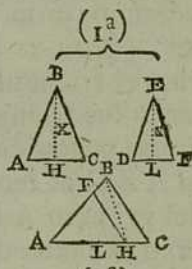
Lo segundo: sea el rectángulo AC
 igual al quadrado de EF; digo que son proporcio-
 nales $AB:EF::EF:BC$,
 porque el rectángulo $AC = AB \times BC$,
 y $EF^2 = EF \times EF$;
 luego (ax. i) $AB \times BC = EF \times EF$,
 y (ii part. lem. i lib. v) $AB:EF::EF:BC$.

La proposicion xviii se omite.

PROPOSICION XIX. TEOREMA.

*Los triángulos semejantes tienen la razon duplicada
 de la de sus lados homólogos.*

EXP. Sean los triángulos X, Z (1.^a)
 semejantes, esto es, el ángulo $A=D$,
 el ángulo $C=F$, y el ángulo $B=E$,
 serán AC, DF lados homólogos:
 digo que el triángulo X al triángulo
 Z tiene la razon duplicada de la que
 tiene el lado AC al lado DF.

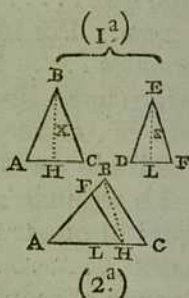


PREP. De los ángulos iguales B, E
 báxense las perpendiculares BH, EL.

(2.^a)

DEM. Los triángulos ABH, DEL tienen el án-
 gulo $A=D$ por lo supuesto, y los ángulos en H y L
 rectos é iguales por construccion: luego son equián-
 gulos, y (prop. iv) proporcionales $BH:BA::EL:ED$;
 tambien por la semejanza de } $BA:AC::ED:DF$;
 los triángulos X, Z lo son ... }

luego (prop. xxii lib. v) ... $BH:AC::EL:DF$,
 y (prop. xvi lib. cit.) ... $BH:EL::AC:DF$;
 luego la razon de las bases AC, DF
 es igual á la de las alturas BH, EL ,
 y por consiguiente la compuesta de
 ambas será duplicada de qualquie-
 ra de ellas; pero dichos triángulos
 tienen la razon compuesta de bases
 y alturas por el lema: luego el tri-
 ángulo X al triángulo Z tiene la ra-
 zon duplicada de la que tiene el la-
 do homólogo AC al lado homólogo DF .



DE OTRO MODO. Sean los triángulos ABC, AFH (2^a)
 semejantes, que tengan el ángulo A comun, el án-
 gulo $A FH = A BC$, y el ángulo $F H A = C$;
 digo que tienen la razon duplicada de sus la-
 dos homólogos AC, AH , porque tirada la rec-
 ta BH , serán proporcionales (prop. i) el trián-
 gulo ... $ABC:ABH::AC:AH$;
 tambien lo son por la } $ABH:AFH::AB:AF$;
 misma el triángulo ... }
 y siendo (prop. xviii lib. v) .. $AC:AH::AB:AF$;
 será (prop. xi lib. } $ABC:ABH::ABH:AFH$;
 cit.) el triángulo. .. }
 luego los triángulos ABC, ABH, AFH son con-
 tinuos proporcionales, y por consiguiente el prime-
 ro ABC al tercero AFH tiene la razon duplicada
 del primero ABC al segundo ABH , esto es, ten-
 drán la razon duplicada de $AC:AH$.

COROLARIO I. Si á los dos lados homólogos AC, AH se busca una tercera proporcional AL , serán AC, AH, AL tres magnitudes continuas propor-
 cionales, y por consiguiente la razon de la primera
 AC á la tercera AL será duplicada de la de $AC:AH$;
 luego el triángulo ABC al triángulo AFH tendrá
 la misma razon que $AC:AL$.

COROLARIO II. Teniendo los quadrados la razon duplicada de sus lados ó raíces (prop. iv lib. v Arit.), los triángulos semejantes serán como los quadrados de sus lados homólogos, esto es, el triángulo A B C al triángulo A F H como $\overline{A C^2} : \overline{A H^2}$.

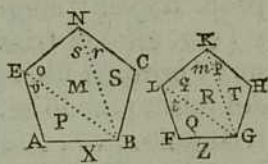
COROLARIO III. Siendo los triángulos semejantes mitades de los paralelogramos semejantes (prop. xli lib. i), tambien estos tendrán la razon duplicada de sus lados homólogos, ó bien serán como los quadrados de sus lados homólogos.

COROLARIO IV. Igualmente se infiere que en los triángulos y paralelogramos semejantes las alturas son proporcionales á las bases, porque se ha demostrado que B H : E L :: A C : D F.

PROPOSICION XX. TEOREMA.

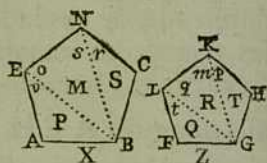
Los polígonos semejantes se dividen en igual número de triángulos semejantes, que son proporcionales á sus todos, y tienen la razon duplicada de sus lados homólogos, ó bien son como los quadrados de sus lados homólogos.

EXP. Sean los polígonos semejantes X, Z, y en ellos el ángulo $A = F$, $E = L$, $N = K$, $C = H$ y $B = G$, y sean proporcionales los lados que comprehenden iguales ángulos: digo lo primero, que se dividen en igual número de triángulos semejantes.



PREP. Desde los ángulos iguales B, G tírense á los demás las rectas B E, B N, G L, G K, y quedarán divididos los polígonos en igual número de triángulos semejantes.

DEM. Por lo supuesto el ángulo $A = F$, y proporcionales $EA : AB :: LF : FG$; luego (prop. vi) los triángulos EAB, LFC son equiángulos, y por consiguiente el ángulo



$v = t$: por la misma razon los triángulos NCB, KHG son equiángulos, y por consiguiente el ángulo $r = p$; y si de los ángulos iguales E, L se quitan los iguales v, t , quedará el ángulo $o = q$: asimismo si de los ángulos iguales N, K se quitan los iguales r, p , quedarán los residuos s, m iguales: luego (cor. iii prop. xxxii lib. i) los triángulos EBN, LGK son equiángulos, y (prop. iv) semejantes: luego todos los triángulos del polígono X son semejantes á todos los del polígono Z .

Lo segundo digo: que dividiéndose los polígonos en igual número de triángulos semejantes, la misma razon tendrá un triángulo del polígono X á su correspondiente del polígono Z , que todos los triángulos del polígono X á todos los triángulos del polígono Z , esto es, serán proporcionales el triángulo..... $P : Q :: P + M + S : Q + R + T$ porque siendo (cor. ii) prop. xix) el triángulo..... $P : Q :: \overline{EB}^2 : \overline{LG}^2$ y (cor. cit.) el triángulo..... $M : R :: \overline{EB}^2 : \overline{LG}^2$ será (prop. xi lib. v) el triángulo ... $P : Q : M :: R$; del mismo modo se prueba que el } ... $M : R : S : T$; luego el triángulo $P : Q :: M : R :: S : T$, y (prop. xii lib. v) } $P : Q :: P + M + S : Q + R + T$; el triángulo } que es lo segundo.

Lo tercero digo: que dichos polígonos X, Z tienen la razon duplicada de sus lados homólogos AB, FG , ó bien que son como los quadrados de dichos

lados, esto es, que el polígono $X : Z :: \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$
 porque siendo por } $P : Q :: P + M + S : Q + R + T$,
 lo demostrado ... }
 esto es $P : Q :: X : Z$;
 y tambien (cor. II prop. XIX) }
 el triángulo } $P : Q :: \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$
 será (prop. XI lib. V) el polígono $X : Z :: \overline{AB}^2 : \overline{FG}^2$
 que es lo tercero.

PROPOSICION XXI. TEOREMA.

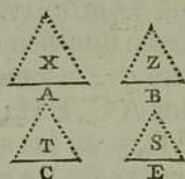
Los poligonos semejantes á otro, son semejantes entre sí.

Esta proposicion consta del ax. I, y prop. XI del lib. V.

PROPOSICION XXII. TEOREMA.

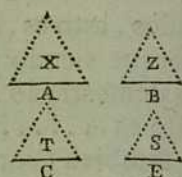
Si quatro rectas son proporcionales, los rectilineos semejantes descriptos sobre ellas semejantemente, serán proporcionales; y si los rectilineos fueren proporcionales, tambien lo serán las rectas.

EXP. Sean las quatro rectas proporcionales $A : B :: C : E$; digo que los rectilineos semejantes X, Z descriptos sobre A y B son proporcionales á otros qualesquiera semejantes T, S descriptos sobre C y E , esto es, $X : Z :: T : S$.



DEM. Siendo por lo supuesto } $A : B :: C : E$,
 proporcionales. }
 lo serán tambien sus quadrados $\overline{A}^2 : \overline{B}^2 :: \overline{C}^2 : \overline{E}^2$,
 y teniendo por la prop. XX }
 que el rectilineo. } $X : Z :: \overline{A}^2 : \overline{B}^2$,

y por la misma que el rectilíneo $T:S::\bar{C}^2:\bar{E}^2$,
 será (prop. xi lib. v) } $X:Z::T:S$;
 el rectilíneo }
 que es lo primero.

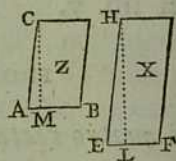


Lo segundo se infiere de lo primero, porque si los cuadrados son proporcionales, también lo serán sus raíces, como consta de la prop. v lib. v Arit.

PROPOSICION XXIII. TEOREMA.

Los paralelogramos equiángulos tienen entre sí la razon compuesta de las de sus lados.

EXP. Sean los paralelogramos equiángulos Z, X: digo que la razon que tienen entre sí, es compuesta de las razones de los lados $AB:EF$, y $AC:EH$, esto es... $Z:X::AB \times AC:EF \times EH$.



PREP. De los ángulos iguales C, H báxense las perpendiculares CM, HL sobre los lados AB, EF.

DEM. Los triángulos ACM, EHL son equiángulos, y (prop. iv) proporcionales $AC:CM::EH:HL$; luego también lo son alternando $AC:EH::CM:HL$, esto es, la razon de las alturas igual á la de los lados AC, EH; luego la compuesta de las bases AB, EF, y de las alturas CM, HL, será igual á la compuesta de las mismas bases y de los lados AC, EH; pero dichos paralelogramos tienen la razon compuesta de bases y alturas por el lema: luego también tendrán la razon compuesta de sus lados, esto es, serán proporcionales $Z:X::AB \times AC:EF \times EH$.

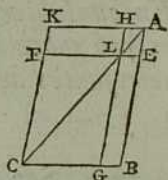
COROLARIO. Los triángulos que tienen un ángulo igual, tienen la razon compuesta de los lados que

le comprehenden por ser mitades de los paralelogramos equiángulos.

PROPOSICION XXIV. TEOREMA.

En todo paralelogramo los paralelogramos á quienes corta el diámetro, son semejantes entre sí y al total.

EXP. Sea el paralelogramo KB , y su diagonal AC , que pase por los paralelogramos HE , FG : digo que estos son semejantes entre sí y al total KB .



DEM. Los triángulos CFL , CKA son semejantes: luego son }
 proporcionales } $CK:KA::CF:FL$;
 y siendo (prop. xxxiv lib. I) $KA=CB$, y $FL=CG$;
 será substituyendo $CK:CB::CF:CG$;
 luego los paralelogramos FG , KB , que tienen el ángulo C comun, y los lados que le comprehenden proporcionales, serán (def. I) semejantes: por la misma razon los paralelogramos HE , KB son semejantes: luego los paralelogramos FG , HE , que son semejantes al total, lo son entre sí: que era &c.

Las proposiciones xxv, xxvi, xxvii, xxviii y xxix se omiten.

PROPOSICION XXX. PROBLEMA.

Dividir una recta en media y extrema razon.

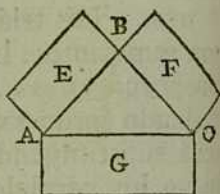
OPER. Dada la recta AB , divídase $A \xrightarrow{C} B$ en el punto C (prop. xi lib. II), de suerte que el rectángulo de la toda AB en la parte CB sea igual al quadrado de AC , y se tendrá dicha recta dividida en media y extrema razon.

DEM. Por la construccion se tie- $A \xrightarrow{\quad C \quad} B$
 ne $AB \times CB = AC \times AC$;
 luego (prop. xvii) son pro- } .. $AB : AC :: AC : BC$,
 porcionales. }
 y (def. iii) dividida la recta AB como se pide.

PROPOSICION XXXI. TEOREMA.

En qualquier triángulo rectángulo el rectilineo descripto sobre la hipotenusa, es igual á los rectilineos semejantes descriptos semejantemente sobre los otros dos lados.

EXP. Sea el triángulo ABC rectángulo en B : digo que el rectilineo G hecho sobre la hipotenusa AC , es igual á los rectilineos semejantes E, F hechos sobre los otros dos lados AB y BC .



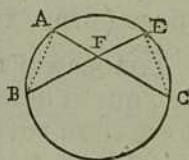
DEM. Por ser los rectilineos E, F semejantes, serán proporcionales (prop. xx) .. $E : F :: \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2$ y componiendo (prop. } $E + F : F :: \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 : \overline{BC}^2$
 xviii lib. v) }
 pero (prop. XLVII lib. i) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$
 luego substituyendo se tendrá $E + F : F :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$;
 tambien son proporcionales } .. $G : F :: \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$
 (prop. xx) }
 luego (prop. xi lib. v) $E + F : F :: G : F$
 y por la ix del mismo $E + F = G$
 esto es, el rectilineo G formado sobre la hipotenusa AC igual á los rectilineos semejantes E, F formados sobre los otros dos lados : que era &c.

Las proposiciones siguientes xxxv, xxxvi, xxxvii son las del lib. iii, que se reservaron para este lugar por ser mas fáciles sus demostraciones.

PROPOSICION XXXV. TEOREMA.

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el rectángulo hecho de los segmentos de la una, es igual al rectángulo de los segmentos de la otra.

EXP. Córtese las dos cuerdas AC, BE en el punto F dentro del círculo BAEC: digo que $AF \times FC = BF \times FE$.



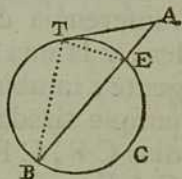
PREP. Tírense las rectas AB, EC.

DEM. Los triángulos AFB, CFE son semejantes: luego (prop. iv) serán proporcionales. } $AF : BF :: FE : FC$,
y (prop. xvi) } $AF \times FC = BF \times FE$;
que era &c.

PROPOSICION XXXVI. TEOREMA.

Si de un punto fuera de un círculo se tiran dos rectas, una tangente, y otra secante, el rectángulo hecho de la secante en su segmento externo es igual al cuadrado de la tangente.

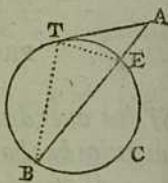
EXP. Desde el punto A fuera del círculo TBCE tírese la recta AT tangente, y la AB secante: digo que $AB \times AE = AT^2$.



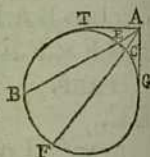
PREP. Tírense las rectas BT, TE.

DEM. En los triángulos ABT, AET el ángulo A es comun, y el ángulo ATE formado de la tangente AT, y de la secante TE es igual

al ángulo B formado en el segmento alterno (prop. xxxii lib. iii): luego (cor. prop. xxxii lib. i) el ángulo $AET = ATB$, y por consiguiente dichos triángulos son equiángulos, y (prop. iv) proporcionales $AB : AT :: AT : AE$; luego (prop. xvii) $AB \times AE = AT^2$.



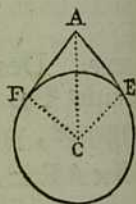
COROLARIO I. De lo dicho se infiere, que si del punto A fuera del círculo se tiran varias secantes AB, AF, el rectángulo hecho de la una en su segmento externo, será igual al rectángulo hecho de la otra en su segmento externo, esto es $AB \times AE = AF \times AC$; porque tanto el un rectángulo como el otro es igual al cuadrado de la tangente AT.



COROLARIO II. Se infiere también, que si de dicho punto A se tiran dos tangentes AT, AG al círculo, serán iguales, porque cada uno de sus cuadrados es igual al rectángulo de AB en AE: luego los lados serán iguales (cor. prop. xlvi lib. i).

COROLARIO III. De un punto fuera de un círculo solo se pueden tirar dos tangentes al mismo círculo.

COROLARIO IV. Si de un punto fuera de un círculo cayeren á la circunferencia de este dos rectas iguales, y la una, como AF, fuere tangente, también lo será la otra AE, porque tirada la recta CA y los radios CF, CE, los triángulos CAF, CAE serán totalmente iguales (prop. viii lib. i) respecto de ser $AF = AE$ por suposición, AC común, y $CF = CE$ (def. xv lib. i): luego el ángulo $CFA = CEA$; pero aquel es recto (prop. xviii

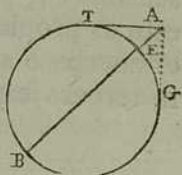


lib. III): luego tambien lo es el ángulo C E A, y por consiguiente la recta A E tangente (prop. XVI lib. III): luego si de un punto fuera &c.

PROPOSICION XXXVII. TEOREMA.

Si de un punto fuera de un círculo se tiran dos rectas, una secante, y otra que toque á la circunferencia, y el rectángulo de toda la secante en su segmento externo fuere igual al quadrado de la recta que toca á la circunferencia, esta será tangente al círculo.

EXP. Del punto A fuera del círculo T E G B tírese la secante A B y la recta A T, que toque á la circunferencia, y sea el rectángulo de B A en A E igual al quadrado de A T: digo que esta será tangente.



PREP. Del punto A tírese (prop. XVII lib. III) la tangente A G.

DEM. Por lo supuesto se tiene que $AB \times AE = AT^2$ tambien (prop. XXXVI) $AB \times AE = AG^2$ luego (ax. I) $AT^2 = AG^2$ y (cor. prop. XLVI lib. I) $AT = AG$; pero A G es tangente por construccion: luego (cor. IV prop. XXXVI) lo es tambien la recta A C: que era &c.

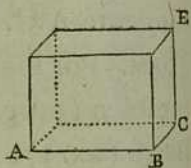
LIBRO UNDÉCIMO.

En los libros VII, VIII, IX y X trata Euclides de la razon y proporcion de los números y de las cantidades inconmensurables, cuyos libros se omiten comunmente por su poca utilidad: en los XI y XII trata de los sólidos, que se reducen á seis especies, y son: prisma, paralelepípedo, pirámide, cono, cilindro y esfera. De los dos primeros se habla en este libro, y de los otros quatro en el siguiente.

Los Matemáticos no consideran al cuerpo ó sólido en quanto es impenetrable, ni con otra afeccion sensible, ó pasion de la materia corporea, porque esto es propio de la Física: sí solamente en quanto el cuerpo ó sólido es una magnitud mensurable de la tercera especie.

DEFINICIONES.

I. Sólido ó cuerpo es una magnitud que consta de tres dimensiones, longitud, latitud, y profundidad ó altura, como el sólido A E, que tiene longitud A B, latitud B C, y profundidad ó altura C E. Divídese el cuerpo en regular é irregular: cuerpo regular



es el que está terminado de planos regulares é iguales entre sí; y qualquier otro se dice irregular. Llámense tambien los cuerpos regulares Platónicos, por haberlos descubierto Platon, y se reducen á cinco especies, que son las siguientes.

Tetaedro, que se compone de quatro triángulos equiláteros é iguales.

Octaedro, de ocho triángulos equiláteros é iguales.

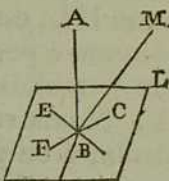
Icosaedro, de veinte triángulos equiláteros é iguales.

Dodecaedro , de doce pentágonos regulares é iguales.

Exâedro ó cubo , de seis quadrados iguales.

II. Los extremos del sólido son superficies.

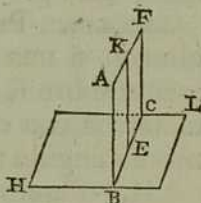
III. Una linea recta se dice perpendicular á un plano , si no inclina mas á una parte que á otra ; ó bien si es perpendicular á todas las rectas , que estando en el mismo plano , pasan por el punto en que ella toca al plano.



EXP. Si la recta AB es perpendicular á las BC , BE , BF , que estan en el plano HL , y pasan por el extremo B , se dirá que AB es perpendicular al plano HL , ó bien que no está mas inclinada á una parte que á otra respecto á dicho plano : y qualquiera otra recta MB entre la perpendicular y el plano , se llama inclinada.

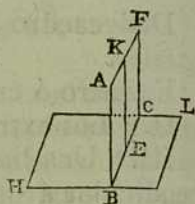
COROLARIO. El ángulo ABM comprehendido entre la perpendicular AB y la inclinada BM , es agudo.

IV. Un plano AC se dice perpendicular á otro HL quando las rectas KE , AB &c. perpendiculares á la comun seccion BC , son tambien perpendiculares al mismo plano.

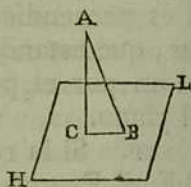


ESCOLIO. Si una recta AB es perpendicular al plano HL , y se mueve sobre este , llevando su extremidad B por la recta BC , conservándose siempre perpendicular al plano , producirá con su movimiento igual y paralelo el rectángulo AC , cuyo plano es perpendicular sobre el plano HL , y por consiguiente las perpendiculares AB , FC á la comun seccion BC , son tambien perpendiculares al plano HL .

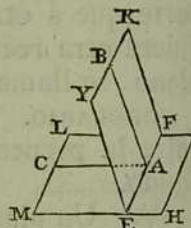
COROLARIO. Por esta produccion del plano recto ó plano perpendicular á otro, se infiere que si dos rectas AB , FC son perpendiculares á un plano HL , estarán en un mismo plano recto ó perpendicular AC , ó bien que por ellas podrá pasar un plano recto AC .



V. Si una recta AB no es perpendicular á un plano HL , y de qualquier punto A cae otra recta AC perpendicular sobre dicho plano, y en este se tira BC , el ángulo B comprendido de la elevada AB y de la CB , es la inclinacion de dicha recta AB sobre el plano.



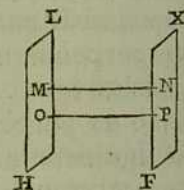
VI. La inclinacion de dos planos EK , HL es el ángulo agudo comprendido de dos perpendiculares AB , AC , que de un punto A de la comun seccion EF se levantan en uno y otro plano.



ESCOLIO. Prodúcese el plano inclinado si una recta EY se mueve perpendicularmente sobre EF , conservando siempre la misma inclinacion con el plano HL , esto es, conservando el mismo ángulo agudo YEM .

VII. Planos semejantemente inclinados son aquellos cuyos ángulos de inclinacion son iguales.

VIII. Planos paralelos son aquellos que por mas que se alarguen á qualquiera parte, siempre son equidistantes, y por consecuencia jamás pueden concurrir como los planos HL , FX .



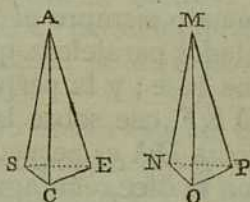
ESCOLIO. La equidistancia entre dos planos paralelos se mide por las perpendiculares

MN , OP , que desde qualesquiera puntos del uno caen sobre el otro; y así si los planos son paralelos, las perpendiculares MN , OP entre ellos, serán iguales; y si las perpendiculares son iguales, los planos serán paralelos.

IX. Sólidos rectilíneos semejantes son los que estan contenidos de igual número de planos semejantes.

X. Sólidos iguales y semejantes son los que estan contenidos de igual número de superficies iguales y semejantes.

XI. Ángulo sólido rectilíneo es el que se compone de mas de dos ángulos planos que concurren en un punto, y las rectas que le forman estan en distintos planos, como el ángulo sólido A formado de los ángulos planos SAC , CAE , SAE .

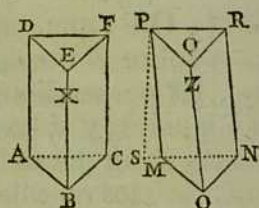


ESCOLIO. Qualquier ángulo sólido puede formarse de muchos ángulos planos; pero todos juntos han de valer menos de quatro rectos; porque en llegando á valer 360 grados, compondrian una superficie plana: y así como el ángulo plano es la inclinacion de dos rectas, tambien el ángulo sólido es la inclinacion que tienen entre sí diversos ángulos planos que concurren en un punto.

XII. Ángulos sólidos iguales son los que se componen de igual número de ángulos planos, iguales cada uno á su correspondiente, y dispuestos en el mismo orden, como si el ángulo plano SAC es igual al ángulo plano NMO , el ángulo $CAE = OMP$, y el ángulo $SAE = NMP$, serán los ángulos sólidos A , M iguales, y por consecuencia se ajustarán exáctamente.

XIII. Prisma es un sólido contenido de muchos planos, de los quales los dos opuestos son iguales

semejantes y paralelos, y los restantes paralelogramos, como el sólido $ABC FED$ contenido de los planos ABC , DEF iguales semejantes y paralelos, y de los paralelogramos AE , BF , AF : si los dos planos se-



mejantes iguales y paralelos son triángulos, el prisma se dice triangular: si dos quadriláteros, quadrangular: si dos pentágonos, pentagonal &c., tomando siempre el nombre de la figura de dichos planos paralelos: qualquiera de estos ABC se llama base; y la perpendicular que del plano opuesto DEF cae sobre la base, es la altura: quando la recta DA es perpendicular á la base ABC , el prisma se dice rectángulo; pero si es obliqua como PM á la base MNO , el prisma se dice obliquángulo.

ESCOLIO. Si se concibe que el plano MNO se mueve por la recta MP con movimiento igual y paralelo, describirá el prisma Z ; y si el plano generatriz es triángulo, se dice el prisma triangular: si quadrilátero, quadrangular. Tambien si la recta PM es perpendicular á dicho plano, se dice el prisma rectángulo; y si es obliqua, obliquángulo: y de esta definicion real se infiere, que los dos planos opuestos MNO , PQR son iguales semejantes y paralelos, y que los otros son paralelogramos, porque la recta MN producirá al paralelogramo MR , la recta NO al paralelogramo NQ , y la recta MO al paralelogramo MQ .

COROLARIO. El prisma Z se puede concebir compuesto de tantos planos iguales semejantes y paralelos á la base MNO quantos pueden pasar por la altura, y por consiguiente la solidez del prisma será el producto de la base MNO por la altura PS .

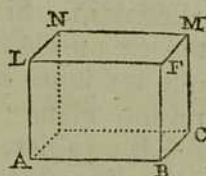
XIV. Paralelepípedo es un sólido contenido de

seis planos, de los quales cada dos opuestos son paralelos, como el sólido AM contenido de los quadriláteros AC, AN, BM, AF, CN, LM .

ESCOLIO. Si un paralelogramo AC se moviese por una recta AL con movimiento igual y paralelo, produciria un paralelepípedo AM ; y de esta definicion real se infiere, que los planos opuestos AC, LM son paralelogramos iguales y semejantes: si la recta AL es perpendicular á la base AC , el paralelepípedo se dice rectángulo; y si es obliqua, se dice obliquángulo.

COROLARIO. El paralelepípedo es una especie de prisma, y se puede concebir compuesto de tantos planos iguales y semejantes á la base AC quantos pueden pasar por la altura AL , y por consiguiente la solidez del paralelepípedo es el producto de la base por la altura.

XV. Cubo es un paralelepípedo terminado por seis planos quadrados iguales.

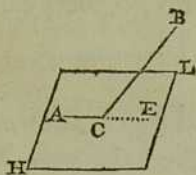


PROPOSICION I. TEOREMA.

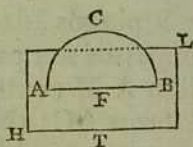
De una recta no puede haber parte en un plano, y otra parte elevada ó fuera de él.

PREP. Si fuese posible, esté una parte AC de la recta ACB en el plano HL , y en él prolónguese AC hasta E .

DEM. Por suponerse ACB una linea recta, se tendrán dos rectas AB, AE con un segmento comun AC ; pero esto es imposible (ax. xiv): luego tambien lo es que una recta pueda estar parte en un plano &c.



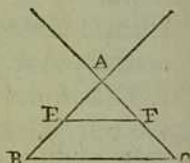
ESCOLIO. Si dos puntos A, B estan en un plano HL , la recta AB que los junta estará tambien en el mismo plano; porque si la recta ACB estubiese fuera, tirando en el plano la recta AFB , las dos rectas ACB, AFB encerrarian espacio: lo que es imposible (ax. XIII).



PROPOSICION II. TEOREMA.

Si dos rectas se cortan, estarán en un mismo plano, como tambien todas las partes de qualquier triángulo.

EXP. Córtese mutuamente en el punto A las dos rectas AB, AC : digo que estarán en un mismo plano, como tambien todas las partes del triángulo ABC .

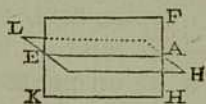


DEM. Si alguna parte del triángulo estubiese fuera del plano, como $A EF$, tendria la recta AB la parte BE en el plano, y la EA elevada, ó fuera de él; y asimismo CF estaria en el plano, y FA elevada, ó fuera de él; pero esto es imposible (prop. I): luego todo el triángulo está en el mismo plano, y por consiguiente por qualesquiera dos rectas que se cortan puede pasar un plano, ó bien estan en un mismo plano.

PROPOSICION III. TEOREMA.

Si dos planos se cortan en dos puntos, la comun seccion es una linea recta.

EXP. Córtese los dos planos LH, KF en los puntos E, A: digo que la comun seccion EA será una linea recta.

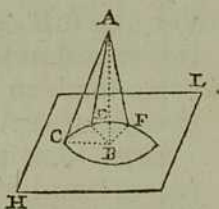


DEM. Los puntos E, A se suponen en el plano LH: luego la recta EA que los junta está con ellos en el mismo plano LH (esc. prop. 1): por la misma razon estando los puntos E, A en el plano FK, la recta EA estará tambien en dicho plano: luego la comun seccion de ambos planos es la linea recta EA.

LEMA.

Si de un punto fuera de un plano caen rectas sobre dicho plano inclinadas é iguales entre sí, todos sus extremos, se hallarán en la circunferencia de un mismo círculo.

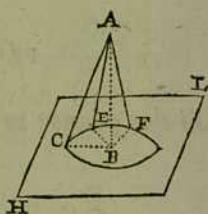
EXP. Desde el punto A caigan sobre el plano HL las rectas AC, AF, AE inclinadas é iguales entre sí: digo que sus extremos C, E, F &c. se hallarán en la circunferencia del círculo CEF.



PREP. Caiga AB perpendicular sobre el plano, y tírense en él las rectas BC, BF, BE.

DEM. Siendo AB perpendicular al plano HL, lo será tambien á las rectas BC, BF, BE (def. III), y los triángulos ABC, ABF, ABE rectángulos en B, que tienen las hipotenusas AC, AF, AE iguales

por suposición, y el lado AB común, tendrán los lados BC , BF , BE iguales (cor. prop. xiv lib. iii): luego el círculo descrito con el intervalo BC pasará por los puntos F y E : lo mismo se verifica de quantas rectas iguales cayeren desde el punto A sobre el plano HL ; y por consiguiente si de un punto fuera de un plano &c.



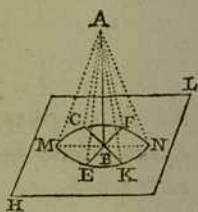
PROPOSICION IV. TEOREMA.

Si una recta es perpendicular á otras dos en el punto en que se cortan, será tambien perpendicular al plano en que se hallan.

EXP. Sea la recta AB perpendicular á las CK , EF en el punto B en que se cortan: digo que será perpendicular al plano HL en que se hallan.

PREP. En el plano HL tírese por el punto B qualquiera recta MN , y desde A con qualquier intervalo AC mayor que AB , córtese CK en los puntos C , K : córtese con el mismo intervalo EF en los puntos E , F , como tambien la recta MN en los puntos M , N , y tírense las rectas AC , AM , AE , AK , AN , AF .

DEM. Los puntos C , M , E , K &c. estan todos (por el lema) en la circunferencia de un mismo círculo $EMCFNK$, y siendo (cor. prop. xiv lib. iii) los triángulos rectángulos ABC , ABE , ABK totalmente iguales, lo serán tambien las rectas BC , BE , BK : luego (prop. ix lib. cit.) el punto B es centro del círculo $MCNE$, y (def. xv lib. i) $MB = BN$: luego en el triángulo isósceles MAN la recta AB ,



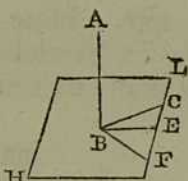
que divide por medio á la base MN , es perpendicular á ella (cor. II prop. V lib. I): lo mismo se verifica de qualquiera otra recta que pase por el punto B : luego (def. III) la recta AB es perpendicular al plano HL : que era &c.

PROPOSICION V. TEOREMA.

Si una recta es perpendicular á otras tres en el punto en que se cortan, las tres rectas estarán en un mismo plano.

EXP. Sea la recta AB perpendicular á las tres BC , BE , BF en el punto B en que se cortan: digo que estarán en un mismo plano HL .

DEM. Porque las dos rectas BC , BE se cortan, estarán en un mismo plano HL (prop. II), y siendo AB perpendicular á ambas, lo será tambien al plano en que se hallan (prop. IV): tambien estará en el mismo plano la recta BF , pues de lo contrario estaria elevada, formando el ángulo agudo ABF , ó debaxo del plano, formando el ángulo obtuso ABF : luego suponiéndose dicho ángulo ABF recto, las tres lineas BC , BE , BF estarán en un mismo plano HL : que era &c.

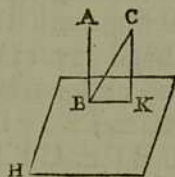


PROPOSICION VI. TEOREMA.

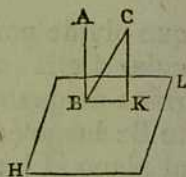
Si dos rectas son perpendiculares á un plano, serán entre sí paralelas.

EXP. Sean las dos rectas AB , CK perpendiculares al plano HL : digo que serán entre sí paralelas.

DEM. Por suponerse las rectas AB , CK perpendiculares al plano



H L, estarán en un mismo plano recto ó perpendicular A K (cor. def. iv), siendo B K la comun seccion de ambos planos (prop. iii); pero el ángulo A B K es recto (def. iii), como tambien el ángulo C K B: luego (prop. xxviii lib. i) las rectas A B, C K son paralelas: que era &c.



PROPOSICION VII. TEOREMA.

La recta que junta dos puntos de dos paralelas, está en el plano de las mismas.

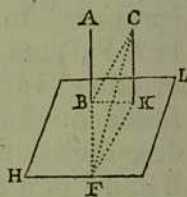
EXP. Junte la recta B C los dos puntos C, B de las paralelas A B, C K: digo que se hallará en el plano de estas. Consta del escolio de la prop. i.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

De dos paralelas si la una es perpendicular á un plano, tambien lo será la otra.

EXP. Sean las dos paralelas A B, C K, y la una, como C K, perpendicular al plano H L: digo que tambien lo será la otra A B.

PREP. Tírense las rectas B C, B K, y fórmese sobre B K en el plano H L el triángulo B F K, de suerte que sea $B F = C K$, y $F K = B C$, y tírese C F.



DEM. En los triángulos C K B, K B F se tiene por construccion $B F = C K$, $F K = B C$, y B K comun: luego (prop. viii lib. i) son totalmente iguales, y el ángulo $F B K = C K B$; pero este es recto (def. iii): luego (ax. i) tambien lo es el ángulo $F B K$: asimismo en los triángulos C K F, C B F se tiene $C K = B F$, $B C = F K$, y C F comun: luego (prop. cit.) el ángulo $C B F = C K F$; pero este es recto (def. iii): luego

(ax. i) tambien lo es el ángulo CBF: siendo pues BF perpendicular á las rectas BC, BK, y estando estas (prop. vii) en el plano AK de las paralelas AB, CK, será (prop. iv) perpendicular al plano AK: luego el ángulo ABF es recto (def. iii): asimismo por ser AB y CK paralelas, y el ángulo CKB recto, lo será tambien el ángulo ABK (prop. xxix lib. i): luego siendo los ángulos ABF, ABK rectos, será AB perpendicular al plano HL (prop. iv), y por consiguiente de dos paralelas, si la una &c.

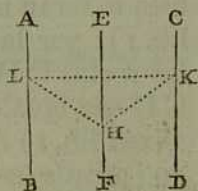
PROPOSICION IX. TEOREMA.

Las rectas paralelas á otra, son paralelas entre sí, aunque esten en diversos planos.

EXP. Sean las rectas AB, CD paralelas á la EF, y no esten las tres en un mismo plano: digo que AB será paralela á CD.

PREP. Tírese en el plano de las AB, EF la recta LH perpendicular sobre EF, que tambien lo será á la AB (lem. lib. i): tírese asimismo en el plano de las CD, EF la HK perpendicular sobre EF, como tambien la recta LK en el plano de las AB, CD.

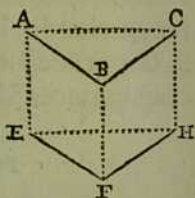
DEM. Por ser EH perpendicular á las rectas HL, HK, será tambien perpendicular al plano LHK en que se hallan (prop. iv), y siendo AL, EH paralelas, tambien AL será perpendicular al mismo plano LHK (prop. viii): por la misma razon CK es perpendicular á dicho plano LHK: luego siendo las rectas AB, CD perpendiculares al plano LHK, serán entre sí paralelas (prop. vi): que era &c.



PROPOSICION X. TEOREMA.

Si dos rectas que concurren en un punto, son paralelas á otras dos que concurren en otro, aunque esten en diversos planos, los ángulos comprendidos serán iguales.

EXP. Sean las dos rectas AB , BC , que concurren en el punto B , paralelas á otras dos EF , FH , que concurren en el punto F de diverso plano: digo que el ángulo $ABC = EFH$.



PREP. Córtese $EF = AB$, $FH = BC$, y tírense las rectas AE , BF , CH , AC , EH .

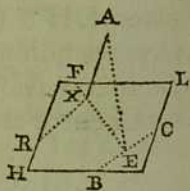
DEM. Por ser AB , EF iguales y paralelas, tambien lo serán las AE , BF que las juntan (prop. xxxiii lib. i): por la misma razon son iguales y paralelas las rectas CH , BF : luego (prop. ix y ax. i) las AE , CH son iguales y paralelas entre sí: tambien (prop. xxxiii lib. i) AC , EH son iguales y paralelas: luego (prop. viii lib. i) los triángulos ABC , EFH son totalmente iguales, y por consiguiente el ángulo $ABC = EFH$: que era &c.

PROPOSICION XI. PROBLEMA.

Baxar una perpendicular á un plano desde un punto dado fuera de él.

EXP. Desde el punto A fuera del plano HL pídesse baxar á él una perpendicular.

OPER. Tírese en el plano qualquiera recta BC : báxese AE perpendicular sobre CB (prop. xii lib. i),



y por la xi del mismo desde E tírese en el plano la recta E F perpendicular sobre B C : desde A báxese la perpendicular A X sobre E F , y dicha perpendicular A X lo será tambien al plano H L como se pide.

PREP. En el plano H L tírese X R paralela á B C.

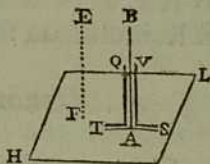
DEM. Por ser B E perpendicular á las E F , E A , será perpendicular al plano X E A (prop. iv), y siendo R X y B E paralelas , tambien R X será perpendicular á dicho plano (prop. viii) : luego será perpendicular á la recta X A (def. iii), y por consiguiente siendo A X perpendicular á las rectas X R , X E , será (prop. iv) perpendicular al plano H L en que se hallan : que era &c.

PROPOSICION XII. PROBLEMA.

Dado un punto en un plano , levantar una perpendicular á dicho plano.

EXP. Sea dado en el plano H L el punto A , desde el qual se pide levantar una perpendicular.

OPER. Desde qualquier punto E fuera del plano báxese E F perpendicular á él (prop. xi) : tírese A B paralela á E F , y será perpendicular al plano H L. Consta de la proposicion viii.

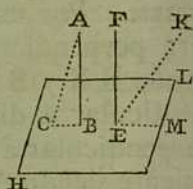


ESCOLIO. Prácticamente se hace aplicando en A dos esquadras T A Q , S A V , de suerte que los dos brazos A Q , A V , se junten en el punto A , y los otros dos A T , A S formen en el plano qualquier ángulo T A S.

PROPOSICION XIII. TEOREMA.

De un mismo punto no se puede baxar ni levantar mas que una perpendicular á un plano.

DEM. Lo primero: desde un punto A no se puede baxar mas que una perpendicular A B al plano H L, y si se pudiese tirar qualquiera otra A C: tírese tambien C B. En el triángulo A B C, siendo el ángulo B recto, el ángulo C será agudo (cor. iv prop. xxxii lib. i), y por consiguiente la recta A C inclinada.



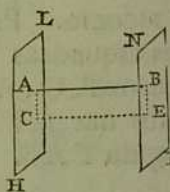
Lo segundo: desde un punto E solo puede elevarse la perpendicular E F al plano H L, porque tirando otra qualquiera, como E K, pasará un plano por ellas, que harán en plano H L la comun seccion E M, y siendo el ángulo F E M recto, el ángulo K E M será agudo, y por consiguiente la recta E K inclinada: luego de un mismo punto &c.

PROPOSICION XIV. TEOREMA.

Si una recta es perpendicular á dos planos, estos serán paralelos.

EXP. Sea la recta A B perpendicular á los planos H L, N M: digo que estos serán paralelos.

PREP. Tírese en el plano H L qualquiera recta A C, y en el plano de las A B, A C tírese C E paralela á A B, como tambien B E.



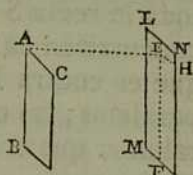
DEM. Por ser las rectas A B, C E paralelas, y la

AB perpendicular á ambos planos, tambien lo será CE (prop. viii): luego los ángulos A, B, E, C son rectos (def. iii), y (prop. xxviii lib. i) las rectas AC, BE paralelas: luego (def. xxxv del mismo) CB es un paralelogramo, y (prop. xxxiv lib. cit.) $AB = CE$: luego los planos HL, MN son equidistantes (esc. def. viii) y paralelos: que era &c.

PROPOSICION XV. TEOREMA.

Si dos rectas que concurren en un plano son paralelas á otras dos que concurren en otro, dichos planos serán paralelos.

EXP. En el plano CB concurren las rectas AB, AC en un punto A , y sean paralelas á las LM, LN , que en otro plano MN concurren en el punto L : digo que los planos BC, MN serán paralelos.



PREP. Desde A tírese AE perpendicular al plano NM (prop. xi), y asimismo EF, EH paralelas á LM, LN .

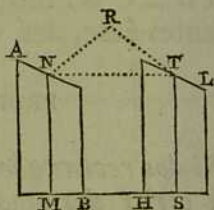
DEM. Por ser AB, EF paralelas á ML , son paralelas entre sí (prop. ix): luego los ángulos BAE, AEF son iguales á dos rectos (prop. xxix lib. i); pero el ángulo AEF es recto (def. iii) por ser AE perpendicular al plano NM : luego tambien es recto el ángulo BAE . Del mismo modo se demuestra que lo es el ángulo CAE , y por consiguiente siendo AE perpendicular á las rectas BA, AC , lo será al plano BC (prop. iv); pero AE es tambien perpendicular al plano NM por construccion: luego (prop. xiv) dichos planos son paralelos: que era &c.

PROPOSICION XVI. TEOREMA.

Si un plano corta á dos planos paralelos, las comunes secciones serán paralelas.

EXP. Corte el plano MT á los AB, HL paralelos: digo que las comunes secciones NM, TS son paralelas.

DEM. Si no son paralelas, prolongadas en el plano MT concurrirán en un punto R, y estando (prop. I) toda la recta MNR en el plano BA, y toda la recta STR en el plano HL, dichos planos concurrirán en el punto R, y no serán paralelos: lo que es contra lo supuesto: luego siendo los planos paralelos, las comunes secciones NM, ST serán paralelas: que era &c.



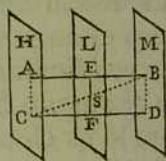
PROPOSICION XVII. TEOREMA.

Si dos rectas son cortadas por planos paralelos, lo serán en segmentos proporcionales.

EXP. Córtese las dos rectas AB, CD por los planos paralelos H, L, M en los puntos A, E, B, C, F, D: digo que serán proporcionales $AE:EB::CF:FD$.

PREP. Térense las rectas AC, EF, BD, CB.

DEM. Porque el plano del triángulo ABC corta á los dos planos paralelos H, L, las comunes secciones AC, ES serán paralelas (prop. XVI), y por la misma lo serán las BD, SF: luego (prop. II lib. VI)



serán proporcionales $AE:EB::CS:SB$,
 y $CS:SB::CF:FD$;
 luego (prop. xi lib. v) $AE:EB::CF:FD$.

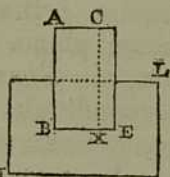
PROPOSICION XVIII. TEOREMA.

Si una recta es perpendicular á un plano, todos los planos que pasen por ella serán perpendiculares al mismo plano.

EXP. Sea la recta AB perpendicular al plano HL : digo que será tambien perpendicular al mismo qualquier plano que pase por ella, como AE .

PREP. Supuesto que el plano AE haga en el plano HL la comun seccion BE , por qualquier punto X de esta tírese en el plano AE la XC paralela á AB .

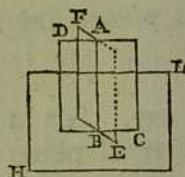
DEM. Las rectas AB, CX son paralelas por construccion: luego siendo AB perpendicular al plano HL , tambien lo será CX (prop. viii): lo mismo se demuestra de qualquiera otra recta, que de otro qualquier punto de la comun seccion se tire en el plano AE paralela á AB , y por consiguiente dicho plano AE es perpendicular al plano HL (def. iv): lo propio se verifica de qualesquiera otros planos que pasen por la recta AB : luego si una recta es perpendicular &c.



PROPOSICION XIX. TEOREMA.

Si dos planos que se cortan son perpendiculares á otro plano, la comun seccion será tambien perpendicular al mismo plano.

EXP. Córtese los dos planos DC , FE , y sean perpendiculares al plano HL : digo que la comun seccion AB será perpendicular al mismo plano.



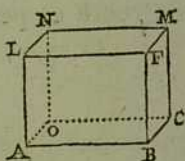
DEM. Por suponerse el plano FE perpendicular al plano HL , la perpendicular AB , que se levante en el punto B , estará en el plano FE : por la misma razon estará en el plano DC ; pero dicha perpendicular en B es única (prop. XIII): luego habiendo de estar en ambos planos FE , DC , será la comun seccion AB ; y por consiguiente si dos planos se cortan &c.

Las proposiciones xx , xxi , $xxii$ y $xxiii$ se omiten.

PROPOSICION XXIV. TEOREMA.

Los seis planos que contienen á un paralelepípedo, son paralelogramos, y cada dos opuestos semejantes é iguales.

EXP. Sea el paralelepípedo AM : digo lo primero, que los planos que le contienen AF , FC , OM , LO , AC y NF son paralelogramos.



DEM. Lo primero: son paralelogramos porque siendo el plano AC cortado por los planos paralelos LO , FC , las comunes secciones AO , BC son paralelas: tambien

porque el mismo plano AC es cortado por los planos paralelos AF , OM , las comunes secciones AB , OC son paralelas (prop. xvi): luego AC (def. xxxv lib. i) es un paralelogramo: del mismo modo se demuestra que son paralelogramos los otros planos.

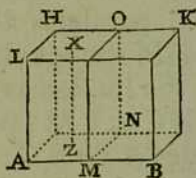
Lo segundo: cada dos opuestos AC , NF son semejantes é iguales, porque siendo las rectas AB , BC paralelas á las LF , FM , los ángulos ABC , LFM son iguales (prop. x), y por la misma razon lo son los demás ángulos. Tambien porque $AB=LF$, y $BC=FM$ (prop. xxxiv lib. i), serán proporcionales $AB:BC::LF:FM$; y lo mismo se demuestra de los demás lados que comprehenden iguales ángulos: luego los planos AC , LM son semejantes (def. i lib. vi), y tambien iguales por ser todos los lados y ángulos del uno iguales á los del otro. Del mismo modo se demuestra que los paralelogramos LO , FC son iguales y semejantes, como tambien los opuestos AF , OM .

DE OTRO MODO. Produciéndose el paralelepípedo AM por el movimiento igual y paralelo del paralelogramo AC por la recta AL , los planos opuestos AC , LM serán paralelogramos iguales y semejantes (esc. def. iv). Tambien si el mismo sólido se concibe producido por el movimiento del paralelogramo LO por la recta AB , los planos AN , BM serán paralelogramos iguales y semejantes. Finalmente puede concebirse producido del paralelogramo AF moviéndose por la recta AO : y los planos AF , OM serán tambien paralelogramos iguales y semejantes: luego los seis planos &c.

PROPOSICION XXV. TEOREMA.

Si un paralelepípedo se corta por un plano paralelo á los opuestos, quedará dividido en dos paralelepípedos que tendrán la misma razon que sus bases.

EXP. Sea el paralelepípedo A K cortado por el plano M O paralelo á los A H, B K: digo que estará dividido en dos paralelepípedos A O, M K, que tendrán la misma razon que sus bases A N, N B.



DEM. Por ser el plano secante M O paralelo á los opuestos A H, B K, serán los sólidos A O, M K paralelepípedos (def. xiv), y por estar entre unos mismos planos paralelos, tendrán ambos una misma altura X Z: luego (cor. def. xiv) el sólido $A O = A N \times X Z$, y el sólido $M K = N B \times X Z$, por consiguiente serán proporcionales } $A O : M K :: A N \times X Z : N B \times X Z$; pero (prop. xv lib. v) $A N \times X Z : N B \times X Z :: A N : N B$: luego (prop. xi lib. cit.) } $\therefore A O : M K :: A N : N B$; el paralelepípedo } lo mismo se verifica de qualquier prisma.

COROLARIO I. De aquí se sigue que el sólido total A K al sólido parcial M K es como la recta A B á la recta M B, porque siendo por lo demostrado el sólido $A O : M K :: A N : N B$, y (prop. i lib. vi) el paralelogramo } $A N : N B :: A M : M B$, será (prop. xi lib. v) el sólido } $A O : M K :: A M : M B$, y (prop. xviii del mismo) } $A K : M K :: A B : M B$. el sólido

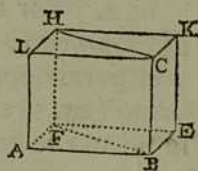
COROLARIO II. En qualquier prisma la seccion paralela á los planos opuestos, es igual y semejante á ellos, se demuestra del mismo modo que el caso segundo de la proposicion xxiv.

Las proposiciones xxvi y xxvii se omiten.

PROPOSICION XXVIII. TEOREMA.

Si un paralelepípedo es cortado por un plano diagonal, quedará dividido en dos prismas triangulares totalmente iguales.

EXP. Sea el paralelepípedo A K cortado diagonalmente por el plano H C B F: digo que quedará dividido en dos prismas triangulares ABFLCH, BEFCKH totalmente iguales.



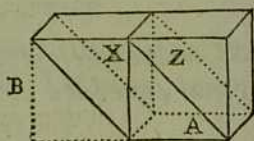
DEM. Los planos paralelos A E, L K son paralelogramos iguales y semejantes (prop. xxiv), y porque los cortan las diagonales F B, H C, quedarán divididos en los quatro triángulos totalmente iguales A B F, F E B, L H C, H K C (prop. xxxiv lib. i). Tambien los paralelogramos opuestos A H, B K son iguales y semejantes, como asimismo los paralelogramos L B, H E. Tambien porque el plano secante B H corta á los planos paralelos A E, L K, las comunes secciones F B, H C son paralelas (prop. xvi); y por cortar el mismo plano á los planos paralelos A H, B K, las comunes secciones F H, B C son igualmente paralelas: luego (prop. xxxv lib. i) el plano H B es un paralelogramo; y siendo comun á ambos sólidos, serán estos dos prismas (def. xiii), é iguales (def. x), por contenerse de igual número de planos iguales y semejantes: luego si un paralelepípedo A K &c.

COROLARIO. El prisma triangular es la mitad del paralelepípedo.

PROPOSICIONES XXIX Y XXX. TEOREMAS.

Los paralelepípedos que tienen una misma base y altura, son iguales.

EXP. Sean los paralelepípedos X, Z , que tengan una misma base A , y una misma altura B : digo que el paralelepípedo $X = Z$.



DEM. Por el corolario de la definición xiv el paralelepípedo $X = A \times B$,
y el paralelepípedo $Z = A \times B$;
luego (ax. I) el paralelepípedo $X = Z$;
lo mismo se entiende de los prismas.

PROPOSICION XXXI. TEOREMA.

Los paralelepípedos que tienen iguales bases y alturas, son iguales.

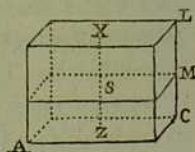
Consta de la antecedente; y lo mismo se entiende de los prismas.

PROPOSICION XXXII. TEOREMA.

Los paralelepípedos que tienen una misma altura, tienen la propia razon que sus bases.

Consta de la prop. xxv: y lo mismo se entiende de los prismas.

COROLARIO I. Los paralelepípedos AL, AM , que tienen una misma ó igual base AC , tienen la razon de sus alturas XZ, SZ , esto es,



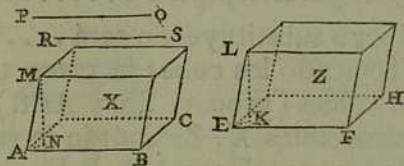
son proporcionales $AL : AM :: XZ : SZ$,
 porque el paralelepípedo $AL = AC \times XZ$,
 y el paralelepípedo $AM = AC \times SZ$;
 luego $AL : AM :: AC \times XZ : AC \times SZ$;
 pero (prop. xv lib. v) } $AC \times XZ : AC \times SZ :: XZ : SZ$,
 luego (prop. xi lib. cit.) $AL : AM :: XZ : SZ$;
 lo mismo se entiende de los prismas.

COROLARIO II. Qualesquiera dos paralelepípedos ó prismas tienen la razon compuesta de bases y alturas, porque qualesquiera dos productos tienen la razon compuesta de sus lados ó raíces; y siendo los prismas ó paralelepípedos los productos de sus bases y alturas (cor. def. xiv), tendrán la razon compuesta de dichas bases y alturas.

PROPOSICION XXXIII. TEOREMA.

Los paralelepípedos semejantes tienen la razon triplicada de sus lados homólogos.

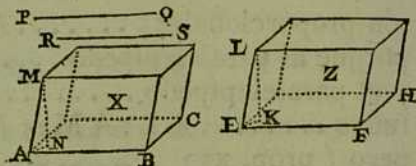
EXP. Sean los paralelepípedos X, Z semejantes, y sus lados homólogos AB, EF: digo que el paralelepípedo X al paralelepípedo Z tiene la razon triplicada de la que tiene el lado homólogo AB al lado homólogo EF.



PREP. Si los sólidos son obliquángulos, báxense de los ángulos iguales M, L las perpendiculares MN, LK á las bases, y tírense en estas las rectas AN, EK.

DEM. Por suponerse los sólidos semejantes, estarán contenidos de igual número de planos semejantes (def. ix), y los ángulos sólidos A, E estarán formados de igual número de ángulos planos, cada uno igual á su correspondiente, por lo qual serán iguales

(def. xii), y se ajustarán exáctamente, y las rectas AM , EL coincidirán teniendo iguales inclinaciones



sobre las bases, esto es, el ángulo MAN será igual al ángulo LEK . También por ser las rectas MN , LK perpendiculares á los planos de las bases, los ángulos en N y K serán rectos (def. iii); por consiguiente los triángulos MAN , LEK serán semejantes (prop. iv lib. vi), y proporcionales alternando $MN:LK::MA:LE$. También por la semejanza de los planos MB , LF serán (def. i lib. vi y prop. xvi lib. v) $MA:LE::AB:EF$; luego (prop. xi lib. cit.) ... $MN:LK::AB:EF$; asimismo (cor. iii prop. xix lib. vi) $AC:EH::\overline{AB}^2:\overline{EF}^2$, y (cor. iv lem. i lib. v) $MN \times AC:LK \times EH::\overline{AB}^3:\overline{EF}^3$, pero (cor. def. xiv) el paralelepípedo $X = MN \times AC$, y el paralelepípedo $Z = LK \times EH$; luego substituyendo será $X:Z::\overline{AB}^3:\overline{EF}^3$. Teniendo los cubos la razon triplicada de sus lados ó raíces (prop. iv lib. v Arit.), los paralelepípedos semejantes X , Z tendrán la razon triplicada de sus lados homólogos AB , EF : que era &c.

Si los sólidos fueren rectángulos, las líneas MA , LE serian perpendiculares á las bases; y siendo (prop. xvi lib. v) $MA:LE::AB:EF$, y (cor. iii prop. xix lib. vi) .. $AC:EH::\overline{AB}^2:\overline{EF}^2$, será (cor. iv lem. i lib. v) } $MA \times AC:LE \times EH::\overline{AB}^3:\overline{EF}^3$, esto es, el paralelepípedo $X:Z::\overline{AB}^3:\overline{EF}^3$.

COROLARIO I. En los paralelepípedos semejantes las alturas son proporcionales á cualesquiera lados homólogos.

COROLARIO II. Los paralelepípedos semejantes tienen la razón triplicada de sus alturas, ó bien son como los cubos de sus alturas.

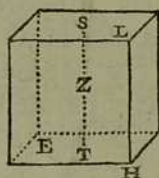
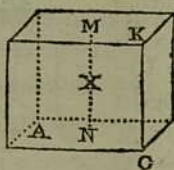
COROLARIO III. Si á las dos rectas AB , EF se hallan dos continuas proporcionales PQ , RS , el sólido X al sólido Z tendrá la misma razón que la recta AB á la recta RS , porque siendo las quatro cantidades AB , EF , PQ , RS continuas proporcionales, la primera AB á la quarta RS tiene triplicada razón de la que tiene á la segunda EF (esc. prop. IV lib. V Arit.)

COROLARIO IV. Los prismas semejantes tienen la razón triplicada de sus lados homólogos ó de sus alturas, ó bien son como los cubos de sus lados homólogos ó de sus alturas.

PROPOSICION XXXIV. TEOREMA.

Los paralelepípedos iguales tienen las bases y alturas recíprocas; y si las bases y alturas son recíprocas, los paralelepípedos serán iguales entre sí.

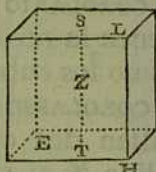
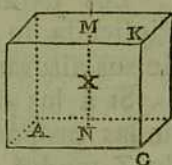
EXP. Sean iguales los paralelepípedos X , Z : digo lo primero, que sus bases serán recíprocamente proporcionales á las alturas, esto es



$AC : EH :: ST : MN$.

DEM. Por lo supuesto }
 el paralelepípedo } $X = Z$;
 pero (cor. def. XIV) el pa- }
 ralelepípedo } $X = AC \times MN$,
 y el paralelepípedo } $Z = EH \times ST$;
 luego (ax. I) } $AC \times MN = EH \times ST$,
 y (II part. lem. I lib. V) pro- }
 porcionales } $AC : EH :: ST : MN$.

Lo segundo : si las bases y alturas son recíprocas, los paralelepípedos serán iguales , porque siendo por lo supuesto



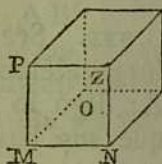
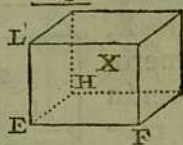
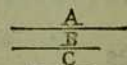
será (1 part. lem. 1 lib. v) .. $AC \times MN = EH \times ST$; pero (cor. def. xiv) el paralelepípedo $X = AC \times MN$, y el paralelepípedo $Z = EH \times ST$; luego (ax. 1) el paralelepípedo $X = Z$; y lo mismo se entiende de cualesquiera dos prismas.

La proposicion xxxv se omite.

PROPOSICION XXXVI. TEOREMA.

Si tres rectas son continuas proporcionales , el paralelepípedo hecho de las tres es igual al paralelepípedo equiángulo hecho de la media.

EXP. Sean continuas proporcionales las tres rectas A, B, C, y hágase de todas el paralelepípedo X, de suerte que sea $EF = A$, $EL = B$,



y $EH = C$, formando qualquier ángulo sólido E: hágase tambien el paralelepípedo Z, de suerte que las tres rectas MN , MP , MO sean iguales á la media B, y el ángulo sólido $M = E$: digo que los paralelepípedos X y Z serán iguales.

DEM. Siendo por lo supuesto $A : B :: B : C$, esto es, $EF : MN :: MO : EH$, y el ángulo $HEF = OMN$ por construccion, los paralelogramos HF , ON son iguales (prop. xiv lib. vi). Tambien por ser los án-

gulos sólidos E, M iguales, se ajustarán (def. xii), coincidiendo las rectas E L, M P, que por ser iguales á la recta B, serán iguales entre sí, y los puntos L, P convendrán: luego las perpendiculares que de ellos cayeren sobre las bases, serán iguales; y siéndolo tambien las bases H F, O N por lo demostrado, los paralelepípedos tendrán bases y alturas iguales, y por consiguiente (prop. xxxi) serán iguales: lo mismo se verifica de los prismas triangulares por ser mitades de los paralelepípedos.

PROPOSICION XXXVII. TEOREMA.

Si quatro rectas son proporcionales, los paralelepípedos semejantes formados sobre ellas, serán tambien proporcionales; y si los paralelepípedos semejantes son proporcionales tambien lo serán las rectas.

EXP. Sean proporcionales $A : B :: C : D$

$\frac{A}{B}$
$\frac{C}{D}$

 :: $C : D$; digo lo primero, que el sólido formado sobre A al semejante formado sobre B, es como el sólido formado sobre C al semejante formado sobre D.

DEM. Siendo por lo supuesto $A : B :: C : D$, tambien serán proporcionales sus cubos, esto es, $\bar{A}^3 : \bar{B}^3 :: \bar{C}^3 : \bar{D}^3$ (prop. v lib. v Arit.); pero los sólidos semejantes son como los cubos de sus lados homólogos (prop. xxxiii): luego los paralelepípedos serán tambien proporcionales. Lo segundo: si los sólidos semejantes son proporcionales, lo serán los cubos de sus lados homólogos, esto es, $\bar{A}^3 : \bar{B}^3 :: \bar{C}^3 : \bar{D}^3$; y por consiguiente lo serán tambien sus raíces cúbicas $A : B :: C : D$: que era &c.

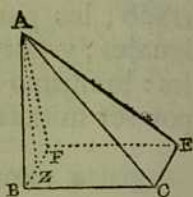
Lo que se dice de los paralelepípedos, se entiende de qualesquiera prismas semejantes.

LIBRO DUODÉCIMO.

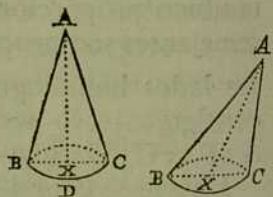
Trata Euclides en este libro de las quatro especies de sólidos, pirámide, cono, cilindro y esfera.

DEFINICIONES.

I. Pirámide es un sólido $ABCEF$ comprehendido de los triángulos ABC , ACE , AEF , ABF , que saliendo de los lados de un plano BE , concurren todos en un punto A : el plano BE se dice la base, y puede ser triángulo, quadrilátero, ó qualquiera otra figura, de la qual la pirámide toma el nombre; de suerte, que si la base es triángulo, la pirámide se llama triangular: si quadrilátero, quadrangular &c., y generalmente se dice polígona si la base es un polígono. Los triángulos que forman la pirámide son tantos quantos son los lados de la base de donde salen, y el punto A del concurso se llama vértice ó cúspide. La altura de la pirámide es la perpendicular AZ que cae desde el vértice sobre la base, ya caiga dentro ó fuera de ella. También si dos pirámides tienen sus bases en un mismo plano, y el vértice es comun, tendrán una misma altura, ó bien si las bases y los vértices estan entre dos planos paralelos, pues la perpendicular entre ellos será la altura.



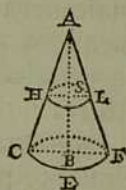
II. Si una recta indeterminada AB , teniendo fixa la extremidad A , se moviese por toda la circunferencia de un círculo BDC , describiria una superficie cónica, y el sólido comprehendido de ella y del círculo se llama cono: el punto fixo A se dice vértice ó cúspide: la recta AB



lado; y la recta $A X$ tirada al centro del círculo ó base, se llama el *exe*: quando el *exe* $A X$ es perpendicular al plano del círculo, el cono se dice *recto*; y si es obliquo, se llama *escaleno*.

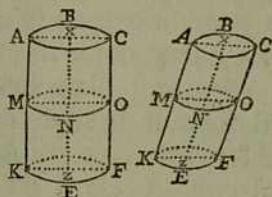
El cono recto se produce si el triángulo $A B C$ rectángulo en B se mueve sobre el lado $A B$, como *exe* inmóvil, dando una vuelta entera al rededor de él.

La perpendicular que del vértice cae sobre el plano de la base, es la altura del cono.

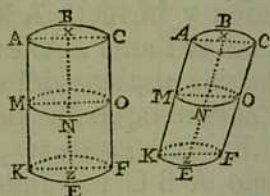


ESCOLIO. Si del centro B del círculo $B E F$ sale elevada la recta $B A$, y por ella se mueve el círculo con movimiento paralelo, de tal suerte, que á proporcion del ascenso se disminuya el radio, hasta que llegando al extremo A , quede reducido á un punto, se producirá el cono; y si la recta $A B$ es perpendicular al círculo, se tendrá el cono recto; y si es obliquo, el escaleno. De esta produccion se sigue, que qualquiera seccion $H L$ paralela á la base $C F$, es tambien círculo, y que los radios $B C$, $S H$ son proporcionales con las rectas $B A$, $S A$: finalmente, que el cono es un agregado de tantos círculos paralelos al de la base, quantos pueden pasar por la altura, y que sus rayos se disminuyen á proporcion del ascenso, hasta desvanecerse en el vértice A .

III. Si por la circunferencia de dos círculos $A B C$, $K E F$ iguales y paralelos se mueve una recta $A K$, dando una revolucion entera, producirá la superficie cilíndrica; y el sólido contenido de esta y de los dos círculos paralelos, se llama *cilindro*: la recta $X Z$, que junta los centros, se llama *exe*, y la recta $A K$ lado del cilindro: si el *exe* $X Z$ es perpendi-

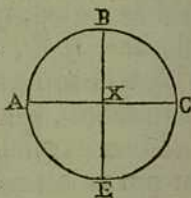


cular entre los dos planos paralelos, el cilindro se dice recto; y si es obliquia, escaleno: qualquiera de dichos círculos paralelos se llama base, y la perpendicular entre ellos es la altura.



ESCOLIO. Si un círculo KEF ascendiese con movimiento paralelo, llevando el centro Z por la recta ZX, produciria el cilindro. Si dicha recta ZX es perpendicular al plano del círculo, el cilindro será recto; y si es obliquia, escaleno. De esta produccion se infiere, que los planos opuestos ABC, KEF son dos círculos iguales y paralelos; y que qualquiera seccion MNO paralela á la base, será tambien círculo. Finalmente puede concebirse el cilindro compuesto de tantos círculos paralelos á la base, quantos pueden pasar por su altura.

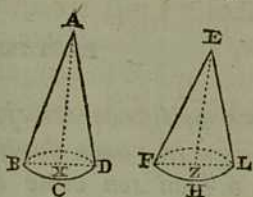
IV. Esfera es un sólido ABCEX comprehendido de una superficie curva, equidistante por todas partes de un punto X, que tiene dentro, llamado centro, desde el qual todas las rectas XA, XE &c. tiradas á la superficie curva, son iguales, y se llaman radios: qualesquiera rectas que pasan por el centro, y se terminan en la superficie, son iguales entre sí, por componerse de dos radios iguales.



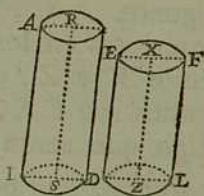
ESCOLIO. Si un semicírculo ABC diese una vuelta al rededor de su diámetro AC inmobile, produciria la esfera: el diámetro AC se dice exe de ella, y la semicircunferencia ABC produce la superficie esférica.

V. Conos y cilindros semejantes son aquellos cuyos exes y diámetros de las bases son proporcionales, y los ángulos que forman los exes con las bases, son iguales.

EXP. Sean dos conos ABCD, EFHL, por cuyos exes AX, EZ pasen los planos BAD, FEL perpendiculares á las bases, serán los ángulos AXD, EZL las inclinaciones de los exes sobre las bases: y si estos ángulos son iguales, y proporcionales $AX:BD::EZ:FL$, se dirá que los conos son semejantes.



Del mismo modo si por los exes RS, XZ de los cilindros pasan los planos AD, EL perpendiculares á las bases, y los ángulos RSD, XZL son iguales, y son tambien proporcionales $RS:BD::XZ:DL$, se dirá que los cilindros son semejantes.

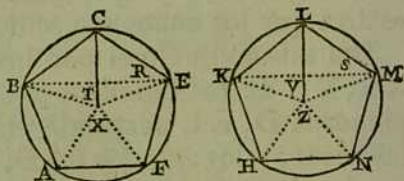


VI. Una magnitud se dice degenerar en otra quando la diferencia entre ellas es menor que qualquiera cantidad assignable: por esto un círculo se puede tomar por un polígono regular de infinitos lados infinitamente pequeños, respecto de que la diferencia entre el círculo y el polígono, es insensible ó menor que qualquiera cantidad dada, por mínima que sea; ó bien porque la diferencia entre dicho círculo y el polígono puede tenerse por cero. Tambien considerando al círculo como un polígono de infinitos lados infinitamente pequeños, el cono será una pirámide infinitángula, y el cilindro un prisma infinitángulo; de suerte, que todo lo que se verifica de la pirámide y del prisma, se entiende tambien del cono y del cilindro.

PROPOSICION I. TEOREMA.

Los polígonos semejantes inscriptos en los círculos, tienen la razon duplicada de sus radios ó diámetros; ó bien son como los quadrados de sus radios ó diámetros.

EXP. Sean los polígonos A C, H L inscriptos en los círculos X y Z, cuyos radios son C X, L Z: digo que serán pro-



porcionales el polígono $AC:HL::\overline{CX}^2:\overline{LZ}^2$

PREP. De los centros tírense radios á los ángulos, y quedarán divididos los polígonos en igual número de triángulos isósceles; y suponiendo el ángulo $BCE = KLM$, tírense las cuerdas BE, KM.

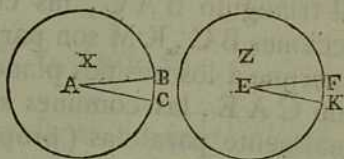
DEM. Los triángulos BCE, KLM son semejantes (prop. xx lib. vi), y por consiguiente el ángulo $R = S$; pero (prop. xx lib. iii) el ángulo R es mitad del ángulo T, y el ángulo S mitad del ángulo V: luego (ax. vii) el ángulo $T = V$, y los triángulos isósceles BXC, KZL, que tienen los ángulos en el vértice iguales, tendrán (cor. vii prop. xxxii lib. i) los ángulos sobre la base iguales, y (prop. iv lib. vi) serán semejantes: del mismo modo se demostrará que los triángulos CXE, LZM son semejantes, y así de todos los demás; pero (prop. xix lib. vi) el triángulo..... $BXC:KZL::\overline{XC}^2:\overline{ZL}^2$,
y por la misma el } .. $CXE:LZM::\overline{XC}^2:\overline{ZL}^2$,
triángulo }
luego (prop. xi lib. v) } $BXC:KZL::CXE:LZM$;
el triángulo }

y así de los demás: luego (prop. xii lib. v) todos los triángulos del polígono AC á todos los del polígono HL serán como un triángulo BXC á otro KZL, esto es, el polígono AC:HL::BXC:KZL; pero por lo demostrado } .. BXC:KZL:: $\overline{XC}^2$: $\overline{ZL}^2$;
 el triángulo..... }
 luego (prop. xi lib. v) } .. AC:HL:: $\overline{XC}^2$: $\overline{ZL}^2$.
 el polígono..... }

PROPOSICION II. TEOREMA.

Los círculos tienen la razon duplicada de sus diámetros ó radios, ó bien son como los quadrados de sus diámetros ó radios.

EXP. Sean los círculos X, Z, y sus radios AC, EK: digo que son proporcionales $X:Z::\overline{AC}^2:\overline{EK}^2$.



DEM. Concibiendo los círculos (def. iii) como polígonos regulares y semejantes de lados BC, FK infinitamente pequeños, y que de los centros salen radios á todas las divisiones, cada superficie quedará dividida en igual número de triángulos isósceles sensiblemente rectilíneos; y siendo (prop. xx lib. vi) los del círculo X en igual número y semejantes á los del círculo Z, la razon que un triángulo ABC tenga á otro EFK, esa misma tendrán (prop. xii lib. v) todos los triángulos que componen el círculo X, á todos los que componen el círculo Z; pero el triángulo ABC al triángulo EFK es como $\overline{AC}^2$ á $\overline{EK}^2$ (prop. xix lib. vi): luego (prop. xi lib. v) el círculo $X:Z::\overline{AC}^2:\overline{EK}^2$: que era &c.

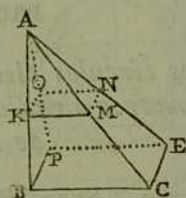
Las proposiciones III y IV se omiten porque son prolixas, y sirven únicamente para demostrar la quinta, que con mas facilidad se consigue por el siguiente

LEMA.

En qualquiera pirámide la seccion paralela á la base es semejante á ella.

EXP. Sea la pirámide ABCEP, y en ella la seccion KMNO paralela á la base BCEP: digo que será semejante á ella.

DEM. Porque á los planos paralelos BE, KN los corta el plano del triángulo BAC, las comunes secciones BC, KM son paralelas (prop. XVI lib. XI); y porque á los mismos planos los corta el del triángulo CAE, las comunes secciones CE, MN son igualmente paralelas (prop. cit.); y así de los demás lados. Tambien porque las rectas BC, CE son paralelas á las KM, MN por lo demostrado, será el ángulo $BCE = KMN$ (prop. X lib. XI), y por la misma razon el ángulo $CEP = MNO$, $EPB = NOK$ y $PBC = OKM$: luego la seccion KN es equiángula á la base BE. Tambien por razon de las paralelas KM, BC los triángulos AKM, ABC son semejantes (cor. II prop. IV lib. VI), y proporcionales $KM : MA :: BC : CA$; asimismo por razon de las paralelas MN, CE será... $MA : MN :: CA : CE$; luego (prop. XXII lib. V)... $KM : MN :: BC : CE$; y así de los demás lados: luego siendo la seccion KN equiángula á la base BE; y teniendo sus lados proporcionales á los de esta, será semejante á ella (def. I lib. VI): que era &c.



ESCOLIO. Si un rectilíneo BE se mueve por la recta BA con movimiento paralelo, disminuyéndose cada lado á proporcion del ascenso, hasta desvanecerse todos en el extremo A , producirá una pirámide; y por consiguiente esta se puede concebir compuesta de tantos planos semejantes y paralelos á la base, quantos pueden pasar por su altura.

COROLARIO. En la pirámide qualquiera seccion KN paralela á la base cortará una pirámide $AKMNO$ semejante á la total, porque está terminada de igual número de planos semejantes (def. ix lib. xi); y lo mismo se verifica en el cono respecto de degenerar este en una pirámide infinitángula (def. vi).

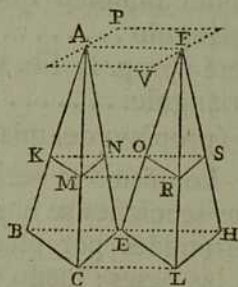
PROPOSICION V. TEOREMA.

Las pirámides triangulares de igual altura, tienen la misma razon que sus bases.

EXP. Sean las pirámides triangulares $ABCE$, $FELH$ de igual altura: digo que estarán en la razon de sus bases $BCE:ELH$.

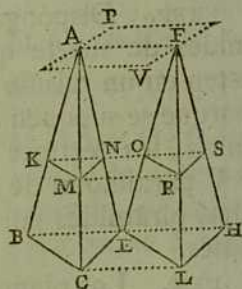
PREP. Dispónganse las pirámides de suerte que sus bases esten en un mismo plano BL ; y porque se suponen de iguales alturas, los vértices A , F estarán en un mismo plano PV paralelo al de la base BL (def. i): córtense dichas pirámides por un plano KR paralelo al de las bases.

DEM. Los planos BCE , KMN son semejantes



por el lema : luego (prop. xix lib. vi) el triángulo $BCE : KMN :: \overline{CE}^2 : \overline{MN}^2$
 tambien por razon de las paralelas CE, MN } .. $CE : MN :: EA : NA$,
 son proporcionales ... }
 y (prop. xxii lib. vi) $\overline{CE}^2 : \overline{MN}^2 :: \overline{EA}^2 : \overline{NA}^2$;
 luego (prop. xi lib. v) el } $BCE : KMN :: \overline{EA}^2 : \overline{NA}^2$;
 triángulo }
 del mismo modo se demuestra que el triángulo } $ELH : ORS :: \overline{EF}^2 : \overline{OF}^2$;
 tambien porque á las rectas EA, EF las cortan los tres planos paralelos PV, KR, BL , será (prop. xvii lib. xi) .. } $EN : NA :: EO : OF$,
 y (prop. xviii lib. v) $EA : NA :: EF : OF$;
 luego (prop. xxii lib. vi) ... $\overline{EA}^2 : \overline{NA}^2 :: \overline{EF}^2 : \overline{OF}^2$;
 y teniendo por lo demostrado que el triángulo } $BCE : KMN :: \overline{EA}^2 : \overline{NA}^2$;
 como tambien que el } $ELH : ORS :: \overline{EF}^2 : \overline{OF}^2$;
 triángulo }
 será (prop. xi lib. v) el } $BCE : KMN :: ELH : ORS$,
 triángulo }
 y (prop. xvi del mismo) .. $BCE : ELH :: KMN : ORS$.

Lo mismo se verifica de quantas secciones se hagan en ambas pirámides por planos paralelos á las bases : luego suponiendose las alturas iguales, las secciones ó planos serán en igual número, esto es, cada pirámide se compondrá de igual número de planos semejantes á su base ; y por



consiguiente (prop. XII lib. V) la razon que tiene un plano BCE á su correspondiente ELH , esa misma tendrán todos los planos que componen la pirámide $ABCE$ á todos los que componen la pirámide $FELH$: luego las pirámides de una misma altura tienen la misma razon que sus bases: que era &c.

COROLARIO. Si las bases y alturas son iguales, las pirámides serán iguales; porque se ha probado que la pirámide es á la pirámide como la base á la base; y por consiguiente si la base es igual á la base, la pirámide ha de ser igual á la pirámide, esto es, si la una razon es de igualdad, tambien lo ha de ser la otra.

PROPOSICION VI. TEOREMA.

Qualesquiera pirámides de igual altura tienen la misma razon que sus bases.

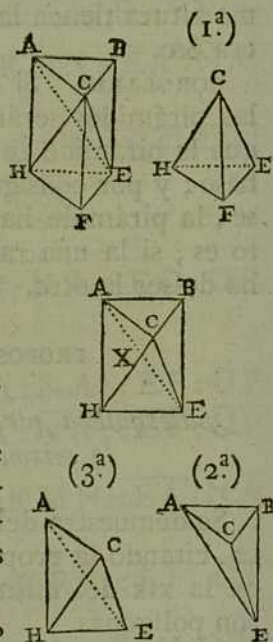
Se demuestra del mismo modo que la antecedente, citando la proposicion XX del libro VI, en lugar de la XIX del mismo, quando las bases y secciones son polígonas.

PROPOSICION VII. TEOREMA.

Qualquiera pirámide es la tercera parte de un prisma de la misma base y altura.

EXP. Sea el prisma triangular AHFEBC, cuyas bases iguales y paralelas son los triángulos HFE, ACB: tírense en los paralelogramos las diagonales CH, CE, AE; y concíbese que el plano HCE corta al prisma separando la pirámide (1.^a) CHF E; concíbese también que al sólido residuo X le corta el plano ACE, separando la pirámide (2.^a) CABE, y la (3.^a) CAHE, que tienen el vértice común C: digo que estas tres pirámides son iguales, y por consiguiente que qualquiera de ellas es la tercera parte del prisma.

DEM. Las pirámides CABE, CAHE tienen el vértice común C, y las bases ABE, AHE iguales (prop. xxxiv lib. i), por ser mitades del paralelogramo BH: luego (cor. prop. v) son iguales. También las pirámides CHF E, CABE tienen por bases la primera al triángulo HFE, y la segunda al triángulo ACB, que son iguales y paralelos (def. xiii lib. xi), y teniendo una misma altura por estar entre dos planos paralelos, dichas dos pirámides son iguales (cor. prop. v): luego las tres pirámides son iguales entre sí (ax. i), y por consiguiente qualquiera de ellas es la tercera parte del prisma.



Del mismo modo se demuestra que la pirámide polígona es el tercio del prisma polígono de la misma base y altura; porque dividiéndose este en tantos prismas triangulares como la pirámide en pirámides triangulares cuyas bases y alturas son iguales á las de los prismas correspondientes, cada pirámide será el tercio de su prisma: luego todas juntas ó la pirámide polígona será el tercio de todos los prismas, ó del prisma polígono.

ESCOLIO. Todo lo que se ha dicho en el lib. xi de la igualdad y proporcion de los prismas, se entiende de las pirámides por ser la tercera parte de los prismas; y siendo los conos (def. vi) pirámides infinitángulas, y los cilindros prismas infinitángulos, la igualdad y proporcion de los prismas y pirámides conviene á los conos y cilindros, de suerte que las proposiciones siguientes son corolarios de la doctrina ya dada.

PROPOSICION VIII. TEOREMA.

Las pirámides semejantes tienen la razon triplicada de sus lados homólogos.

DEM. Las pirámides semejantes son el tercio de los prismas semejantes de la misma base y altura (prop. vii); pero estos tienen la razon triplicada de sus lados homólogos (cor. iv prop. xxxiii lib. xi): luego tambien la tendrán las pirámides (prop. xv lib. v); y así las pirámides semejantes por tener las alturas proporcionales á sus lados homólogos, serán como los cubos de las alturas.

PROPOSICION IX. TEOREMA.

Las pirámides iguales tienen bases y alturas recíprocas; y si tienen bases y alturas recíprocas, serán iguales.

DEM. Las pirámides son el tercio de los prismas de una misma base y altura; pero los prismas iguales tienen bases y alturas recíprocas (prop. xxxiv lib. xi): luego tambien las pirámides (prop. xv lib. v); y si las bases y alturas son recíprocas, las pirámides serán iguales.

PROPOSICION X. TEOREMA.

Qualquier cono es la tercera parte del cilindro de la misma base y altura.

DEM. El cono es pirámide infinitángula, y el cilindro prisma infinitángulo (def. vi): luego siendo la pirámide la tercera parte del prisma de la misma base y altura (prop. vii), será tambien el cono la tercera parte del cilindro de la misma base y altura.

PROPOSICION XI. TEOREMA.

Los conos de igual altura tienen la razon de sus bases, y lo mismo los cilindros.

DEM. El cono es pirámide infinitángula; pero las pirámides de igual altura son como sus bases (prop. vi): luego tambien los conos: lo mismo se dice de los cilindros por ser prismas infinitángulos.

PROPOSICION XII. TEOREMA.

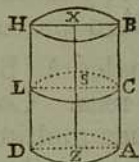
Los conos y cilindros semejantes tienen la razon triplicada de los diámetros de sus bases, ó bien son como los cubos de los diámetros ó radios de las bases.

DEM. Los cilindros semejantes son prismas infinitángulos semejantes; pero los prismas semejantes tienen la razon triplicada de sus lados homólogos: luego los cilindros semejantes tendrán la razon triplicada de sus lados homólogos; y siendo los diámetros de las bases como los lados homólogos, tendrán los cilindros semejantes la razon triplicada de los diámetros ó radios de las bases: lo mismo se entiende de los conos.

PROPOSICION XIII. TEOREMA.

Si un cilindro se corta por un plano paralelo á las bases, los segmentos sólidos son como los segmentos del exe.

EXP. Sea el cilindro HA cortado por un plano LC paralelo á las bases: digo que los segmentos del cilindro son proporcionales á los segmentos del exe, esto es, $LA:LB::ZS:ZX$.



DEM. El cilindro HA es prisma infinitángulo; pero (prop. xxv lib. xi) el prisma } $LA:LB::AC:CB$,
y (prop. xvii lib. cit.) } $AC:CB::ZS:SX$;
luego (prop. xi lib. v) el segmen- } $LA:LB::ZS:SX$.
to sólido }

PROPOSICION XIV. TEOREMA.

Los cilindros de iguales bases son como sus alturas.

DEM. Los prismas de iguales bases son como sus

alturas; pero los cilindros son prismas infinitángulos (def. xi): luego los cilindros de iguales bases son como sus alturas.

PROPOSICION XV. TEOREMA.

Los cilindros iguales tienen bases y alturas recíprocas; y si las bases y alturas son recíprocas, los cilindros serán iguales.

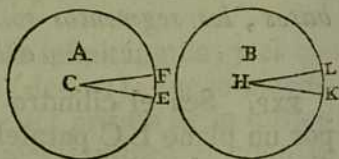
Consta de la proposicion xxxiv del libro xi, y de la definicion vi de este.

Las proposiciones xvi y xvii se omiten.

PROPOSICION XVIII. TEOREMA.

Las esferas tienen la razon triplicada de sus diámetros ó radios, ó bien son como los cubos de sus diámetros ó radios.

EXP. Sean las esferas A, B, cuyos centros son C, H, y los radios CF, HL: digo que serán proporcionales $A : B :: \overline{CF}^3 : \overline{HL}^3$.



DEM. Concíbanse las esferas A y B compuestas de una multitud de pirámides semejantes las de la una á las de la otra, iguales en número, y de modo que tengan el vértice en los centros C, H, y sus bases sensiblemente planas compongan las superficies de las esferas. Siendo una pirámide de estas FCE en la esfera A, y otra semejante LHK en la esfera B, la razon que tengan entre sí estas dos pirámides, esa misma tendrán (prop. xii lib. v) todas las que componen la esfera A á todas las que componen la esfera B; pero (prop. viii) la pirámide $FCE : LHK :: \overline{CF}^3 : \overline{HL}^3$; luego la esfera $A : B :: \overline{CF}^3 : \overline{HL}^3$.

DE LAS SECCIONES CÓNICAS.

En los Elementos de Euclides se ha tratado de la línea recta y circular : esta especie de Geometría se llama inferior , á distincion de la superior , que contempla las posiciones ó propiedades de otras líneas curvas , entre las quales las mas principales son las secciones cónicas , que merecieron la atencion de los Matemáticos mas insignes , singularmente de Apolonio Pergeo , por lo qual se llaman tambien Elementos de Apolonio. Su materia es dilatada , y solo se dirá de ella alguna cosa en quanto conduce á la instruccion militar.

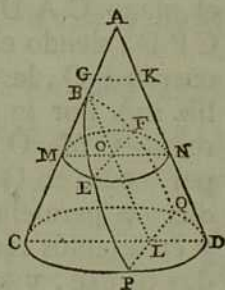
Seccion cónica es la que se forma por un plano que corta al cono de diversos modos , y la curva que el plano secante forma en la superficie del cono , se llama línea cónica. Las secciones principales son parábola , elipse é hipérbola.

DE LA PARÁBOLA.

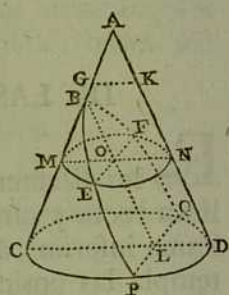
DEFINICIONES.

I. Si á un cono $ACPD$ le corta por el exe un plano perpendicular á la base , la seccion será un triángulo CAD , que se llama el triángulo por el exe , y la comun seccion de este triángulo con el círculo de la base , es el diámetro CD .

II. Si al cono le corta un plano PBQ perpendicular al



plano del triángulo por el exe, haciendo la comun seccion BL paralela al lado AD del cono, dicho plano PBQ se llama parábola; y la curva $PEBFQ$ que describe en la superficie cónica, se dice linea parabólica: la recta PQ se llama base de la parábola: el punto B vértice de ella; y la recta BL exe de la misma. Qualquiera recta en la parábola paralela al exe, se dice diámetro.



III. Si el cono se corta por un plano MEN paralelo á la base, será círculo (def. II lib. XII): la comun seccion de este plano con el triángulo por el exe, es el diámetro MN , que será paralelo á CD (prop. XVI lib. XI), y la cuerda EF , que es la comun seccion de dicho círculo con la parábola, será paralela á PQ , y ambas estarán cortadas por medio y en ángulos rectos en los puntos O, L por el exe BL ; porque siendo el plano de la parábola PBQ , y el del círculo CPD perpendiculares al triángulo por el exe CAD , tambien lo será la comun seccion PQ (prop. XIX lib. XI), como asimismo su paralela EF (prop. VIII lib. cit.): luego PL será perpendicular á las rectas LC, LB , que estan en el plano CAD (def. III lib. XI); y en el círculo CPD , siendo el diámetro CD perpendicular á la cuerda PQ , la dividirá por medio en L (prop. III lib. III). Por lo mismo EO es perpendicular á las rectas OM, OB , y la recta EF estará dividida por medio en O : así esta recta como la PQ , y todas sus paralelas á quienes el exe corta por medio y en ángulos rectos, se llaman ordenadas ó aplicadas al exe, y sus mitades EO, PL semiordenadas ó semiaplicadas. Las partes BO, BL del exe com-

prehendidas entre el vértice y las aplicadas, se llaman sagitas ó abscisas. Qualquier diámetro tiene tambien sus aplicadas, y son todas las rectas paralelas á quienes corta por medio dentro de la parábola, y solo se distinguen en que las aplicadas al exe son cortadas por este en ángulos rectos; pero todo diámetro divide á las suyas en ángulos obliquos.

IV. Si se hace $AK = ON$, y se tira GK paralela á MN , la recta GK se llama el parámetro del exe: tambien qualquier diámetro tiene su parámetro, como luego veremos. Las demás definiciones se darán en su lugar.

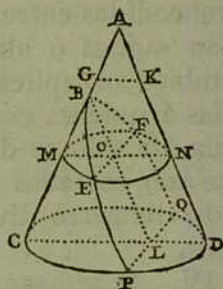
PROPOSICION I. TEOREMA.

En la parábola el quadrado de la semiordenada es igual al rectángulo hecho del parámetro en la abscisa.

EXP. Supuesto lo dicho anteriormente, sea la parábola PBQ , cuyo exe es BL , la semiordenada EO , la abscisa BO , y el parámetro GK : digo que $\overline{EO}^2 = GK \times BO$.

DEM. Siendo GK, MN paralelas, como tambien BL, AD , los triángulos AGK, BOM son equiángulos, y (prop. iv lib. vi) proporcionales... } $AK : GK :: BO : OM$; tambien siendo $AK = ON$, } $ON : GK :: BO : OM$; será substituyendo } luego (prop. xvi lib. vi) .. $ON \times OM = GK \times BO$, y siendo (prop. xiii lib. cit.) .. $ON \times OM = \overline{EO}^2$, será (ax. i) $\overline{EO}^2 = GK \times BO$; del mismo modo se prueba que $\overline{PL}^2 = GK \times BL$; luego en la parábola &c.

COROLARIO. De aquí se sigue que el parámetro GK es constante en la parábola, y que es una tercera proporcional á qualquiera abscisa BO , y á su semiordenada EO , como tambien á la abscisa BL , y á su semiordenada PL .



PROPOSICION II. TEOREMA.

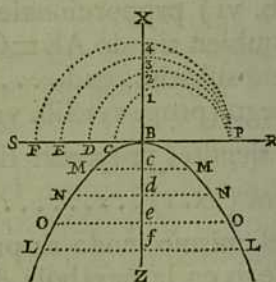
En la parábola los quadrados de las semiordenadas tienen la misma razon que las abscisas.

EXP. Sea la parábola PBQ , su exe BL , y las semiordenadas EO , PL , serán las abscisas BO , BL : digo que $\overline{EO}^2 : \overline{PL}^2 :: BO : BL$.

DEM. Por la prop. I se tiene que $\overline{EO}^2 = GK \times BO$, y que $\overline{PL}^2 = GK \times BL$; luego $\overline{EO}^2 : \overline{PL}^2 :: GK \times BO : GK \times BL$; tambien (prop. I lib. VI) $GK \times BO : GK \times BL :: BO : BL$; luego (prop. XI lib. V) $\overline{EO}^2 : \overline{PL}^2 :: BO : BL$; que era &c.

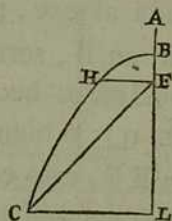
Esta es la propiedad primaria y esencial de la parábola, y se verifica de las semiordenadas y abscisas respecto á qualquier diámetro.

COROLARIO. De aquí se sigue la descripcion de la parábola en un plano, sin necesidad de considerarla en un cono, y es de este modo: tírense dos rectas SR , XZ , que se corten perpendicularmente en un punto B : tómese



B P á discrecion para que sirva de parámetro al exe B Z : desde B ácia S señálense muchos puntos C, D, E &c. á discrecion, y sobre las rectas P C, P D, P E &c. describanse semicírculos, que cortarán á la recta B X en los puntos 1, 2, 3 &c. : hágase $Bc = BC$, $Bd = BD$, $Be = BE$, $Bf = BF$ &c., y por los puntos c, d, e, f &c. tírense paralelas á SR, y sobre ellas córtese á una y otra parte del exe, $cM = B1$, $dN = B2$, $eO = B3$ &c., y pasando una curva por los puntos B, M, N, O, &c. se tendrá delineada la parábola; porque siendo continuas proporcionales $BC, B1, BP$, y $Bc = BC$, y $cM = B1$, serán tambien continuas proporcionales Bc, cM, BP , y el quadrado de la semiordenada cM igual al rectángulo de la abscisa Bc , y del parámetro BP : luego el punto M está en la curva parabólica (prop. 1): lo mismo se demuestra de los demás puntos.

DEFINICION V. Focus ó foco es un punto F en el exe, que dista del vértice B la quarta parte del parámetro.



PROPOSICION III. TEOREMA.

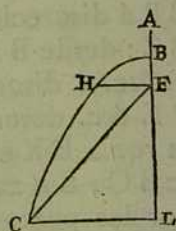
En la parábola, si desde el foco se tira una recta á qualquier punto de la periferia, será igual á la quarta parte del parámetro mas á la abscisa correspondiente á la semiordenada que pasa por dicho punto.

EXP. Sea la parábola BHC, el foco F, y FC una recta tirada á qualquier punto C de la periferia: digo que FC será igual á la quarta parte del parámetro mas á la abscisa BL correspondiente á

la semiordenada CL , que pasa por dicho punto C .

PREP. Alárguese el exe LB , y córtese $BA = BF$.

DEM. Porque AF está dividida por medio en B , y tiene directamente añadida la FL , será (prop. VII



lib. II) $\overline{AL}^2 = 4AB \times BL + \overline{FL}^2$
 y siendo $4BF$, ó bien $4AB$ el } $\overline{CL}^2 = 4AB \times BL$,
 parámetro (def. V), será (prop. I) }
 y substituyendo se tendrá $\overline{AL}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{FL}^2$
 tambien (prop. XLVII lib. I) $\overline{CF}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{FL}^2$
 luego (ax. I) $\overline{AL}^2 = \overline{CF}^2$
 y por consiguiente (cor. prop. } $AL = CF$.
 XLVI lib. I) }

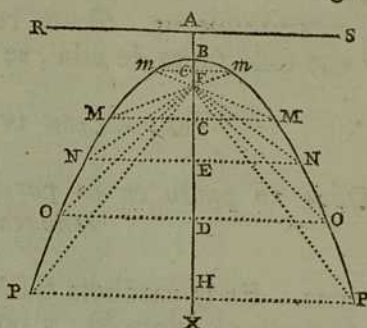
Lo propio se verifica de la recta FH semiordenada al exe, porque estando AF dividida por medio en B , será el cuadrado de AF igual á quatro cuadrados hechos de la mitad AB (cor. II prop. IV lib. II), ó bien á quatro rectángulos hechos de AB en BF , esto es, será $\overline{AF}^2 = 4AB \times BF$;
 tambien por la prop. I $\overline{HF}^2 = 4AB \times BF$;
 luego (ax. I) $\overline{AF}^2 = \overline{HF}^2$
 y por consiguiente $AF = HF$.

COROLARIO I. La semiordenada HF que pasa por el foco, es la mitad del parámetro.

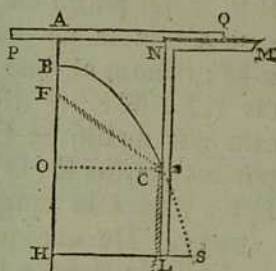
COROLARIO II. Puede la parábola describirse de este modo: tírese RS perpendicular sobre AX : tómense á discrecion dos partes iguales AB , BF : divídase BX en muchas partes como quiera en los puntos C , E , D , H &c., y tírense por estos paralelas á RS : desde F con el intervalo CA determínense los puntos M , M : córtense tambien desde F

con el intervalo EA los puntos N, N , y así de los demás; y pasando por ellos una curva $BMNO \&c.$, se tendrá descripta la parábola; porque tirando las rectas $FM, FN, FO \&c.$, será $MF=CA, FN=EA$

$\&c.$: luego (prop. III) los puntos $M, N, O \&c.$ estan en la periferia parabólica.



COROLARIO III. Puede tambien describirse la parábola de este modo: sea HB el exe, F el foco, y prolongando HB , hágase $BA=BF$: por el punto A (que se dice generador) tírese al exe la perpendicular PN (llamada generatriz ó directriz), y ajústese á esta



una regla que tenga una pequeña canal, para que corra por ella libremente el brazo de una esquadra MNL : tómese un hilo FCL que sea igual á $NL=AH$: fixese una extremidad en F , y la otra en el punto L de la esquadra. Disponiendo el lado NL sobre AH , se tomará una punta de lapiz C , de suerte que lleve tirante el hilo; y moviéndose la esquadra desde A ácia Q , la punta C (acompañando siempre la esquadra, y siguiendo la tirantez del hilo), describirá la semiparábola BCS ; y lo mismo se hace en la otra parte. Esta práctica se funda, como la del corolario antecedente, en que siempre la recta FC , que sale del foco, es igual á la correspondiente abscisa BO junta con la AB quarta parte del parámetro.

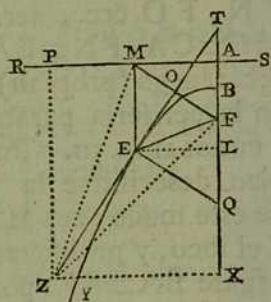
DEFINICION VI. Si una recta toca á la parábola, y cae toda fuera de ella, se llama tangente.

PROPOSICION IV. TEOREMA.

Dado un punto en la parábola, tirar por él una tangente.

EXP. En la parábola BEY sea dado el punto E, y por él se pide tirar una tangente.

OPER. Tírese la directriz RS, y del punto dado E báxese á ella la perpendicular EM: tírense al foco las rectas EF, MF, y dividiendo esta por medio en O, tírese por los puntos E, O la recta ET, y será la tangente que se pide.



PREP. De cualquier punto Z de la recta TE prolongada tírense las rectas ZF, ZM, y la perpendicular ZP sobre la directriz RS, como tambien la semiordenada EL.

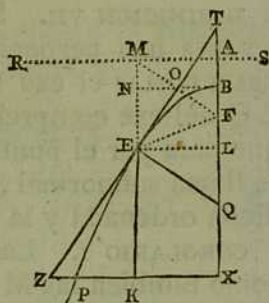
DEM. La recta $AL = EF$ (prop. III): tambien $AL = EM$ (prop. XXXIV lib. I): luego $EF = EM$ (ax. I); y en el triángulo isósceles MEF la recta EO, que divide por medio á la base MF, será perpendicular á ella (cor. II prop. V lib. I): resultando por la prop. IV del mismo los triángulos ZOF, ZOM totalmente iguales, y por consiguiente $ZF = ZM$; pero $ZM > ZP$ (prop. XIX lib. cit.) por ser el ángulo en P recto: luego tambien $ZF > ZP$, ó bien mayor que AX, y por consiguiente el punto Z está fuera de la parábola; porque si estuviese en ella, y se tirase la semiordenada ZX, seria $ZF = XA$ (prop. III); y si estuviese dentro, seria $ZF < XA$; luego &c.

y por el punto O en que la divide por medio la tangente, y el vértice B de la parábola, tírese la BO prolongada hasta cortar á la EM en N .

DEM. Los triángulos OMN , OBF tienen los ángulos en O verticalmente opuestos iguales (prop. xv lib. i), y por la xxix del mismo los alternos NMO , OBF tambien iguales, por ser las rectas MN , BF paralelas: asimismo el lado $OM = OF$ por construccion: luego (prop. xxvi lib. cit.) dichos triángulos son totalmente iguales, y por consiguiente $NO = OB$, y $NM = BF$; pero $BF = BA$: luego (ax. i) $NM = BA$, cuyas rectas quitadas de las iguales EM , LA , quedará (ax. iii) $EN = LB$; tambien los triángulos ONE , $OB T$ son totalmente iguales (prop. xxvi lib. i) respecto de tener el lado $NO = OB$ por lo demostrado, los ángulos en O verticalmente opuestos iguales, y el ángulo $ONE = OBT$ su alterno por razon de las paralelas EN , TB : luego $EN = TB$; pero $EN = LB$ por lo demostrado: luego $TB = BL$ (ax. i), y por consiguiente la subtangente TL es dupla de la abscisa BL : que era &c.

COROLARIO I. Tambien $EF = FT$, porque siendo $BT = BL$, y $BF = BA$, si á la recta BT se le añade BF , y á la BL se añade BA , será $FT = AL$; pero $AL = EF$ (prop. iii): luego $EF = FT$ (ax. i). Asimismo $FT = FQ$, porque siendo (cor. i def. vii) $EM = FQ$, y $EM = EF = FT$, será (ax. cit.) $FT = FQ$.

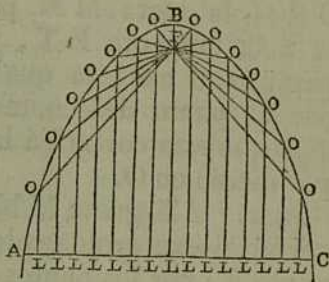
COROLARIO II. Si de un punto E se quiere sacar una tangente, se tirará EF al foco, y alargando el exe, córtese $FT = EF$, y tirando la recta ET , será



la tangente. Si no se tiene el foco, tírese la aplicada EL al exe, y haciendo $BT = BL$, tírese ET , y esta será la tangente.

COROLARIO III. Si por el punto E del contacto se tira EK paralela al exe, será el ángulo $ZEK = FET$; porque (cor. 1) el triángulo EFT es isósceles, y por consiguiente los ángulos T y FET sobre la base son iguales: tambien el ángulo $ZEK = T$ (prop. xxix lib. 1) por ser EK, TX paralelas: luego el ángulo $ZEK = FET$ (ax. 1).

ESCOLIO. De lo dicho anteriormente se infiere la razon por que se inflama prontamente qualquier materia combustible puesta en el foco F de un cóncavo parabólico ABC , si se presenta al sol siendo la superficie cóncava tersa, como un espejo estañado, ó acero bruñido; porque todos los rayos de luz LO , que dan en la superficie cóncava, haciendo el ángulo de reflexión igual al de la incidencia, concurren todos en el foco F , y siendo infinitos, hacen que la materia puesta en F se inflame, como se demuestra en la Catóptrica, ó ciencia de los rayos reflexos.



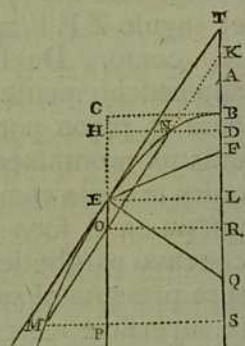
PROPOSICION VI. TEOREMA.

Si en la parábola se tira una paralela á la tangente, y por el punto del contacto otra al exe, esta cortará á la paralela á la tangente, terminada por la curva parabólica, en dos partes iguales.

EXP. Sea en la parábola BEM la recta MN paralela á la tangente ET, y EP paralela al exe, la qual pasa por el punto del contacto E: digo que esta cortará á la MN por medio en O.

PREP. Alárguese MN hasta cortar al exe prolongado en el punto K; por los puntos B, N, E, M tírense las rectas CB, HD, EL, MS perpendiculares al exe BS, y prolonguese PE hasta cortar á las CB, HD en los puntos H, C.

DEM. Por ser las rectas ET, NK paralelas, como tambien las EL, ND, los triángulos TEL, KND son equiángulos y semejantes (prop. iv lib. vi): luego por la xix del mismo serán como los quadrados de sus lados homólogos, que son las semiordenadas EL, ND, esto es, son proporcionales..... $TEL:KND::\overline{EL}^2:\overline{ND}^2$; pero (prop. ii)..... $\overline{EL}^2:\overline{ND}^2::BL:BD$; luego (prop. xi lib. v).. $TEL:KND::BL:BD$; asimismo (prop. i lib. vi) el rectángulo..... } $CL:CD::BL:BD$; luego (prop. xi cit.)... $TEL:KND::CL:CD$.



Siendo $TL = 2BL$ }
 (prop. v), será (cor.) $TEL = CL$,
 prop. xli lib. i) }
 y (prop. xiv lib. v) el triángulo $KND = CD$;
 tambien (prop. xix lib. vi) .. $TEL : KMS :: \overline{EL}^2 : \overline{MS}^2$
 y (prop. ii) $\overline{EL}^2 : \overline{MS}^2 :: BL : BS$;
 luego (prop. xi lib. v) ... $TEL : KMS :: BL : BS$;
 asimismo (prop. i lib. vi) el }
 rectángulo } .. $CL : CS :: BL : BS$;
 luego (prop. xi cit.) ... $TEL : KMS :: CL : CS$;
 y siendo por lo demostrado $TEL = CL$,
 será (prop. xiv lib. v) $KMS = CS$.
 Quitando pues del triángulo KMS el triángulo
 KND , y del rectángulo CS el rectángulo CD ,
 quedará el trapecio $DNMS$ igual al rectángulo
 HS ; y quitando de estos la parte comun $DNOPS$,
 quedará el triángulo $MOP = HON$; y siendo
 iguales y semejantes, serán totalmente iguales: lue-
 go $MO = ON$: que era &c.

COROLARIO I. Siendo EP paralela al exe, será
 diámetro (def. ii), y dividiendo á la MN por medio
 en O , será esta su aplicada, y la recta EO su abscisa.

COROLARIO II. Las aplicadas á qualquier diáme-
 tro son paralelas á la tangente.

COROLARIO III. El quadrado de la tangente ET
 al quadrado de la semiordenada ON es como la
 abscisa BL del exe á la abscisa EO del diámetro;
 porque tirando OR paralela á EL , será $LR = EO$
 $= TK$, y por consiguiente $TL = KR$, y los trián-
 gulos TEL , KOR totalmente iguales: siendo pues
 el triángulo TEL , ó bien KOR igual al rectán-
 gulo CL , y el triángulo KMS igual al rectán-
 gulo CS , si de KMS se quita KOR , y de CS se
 quita CL , quedará el trapecio $MORS = ES$, y
 quitando el rectángulo comun OS , quedará el tri-

pero (prop. xvii lib. vi) $\overline{ON}^2 = EO \times P$;
 luego (prop. xiv lib. v) $\overline{XY}^2 = EX \times P$;
 y por consiguiente EX , XY , P son continuas proporcionales: de que se sigue, que siendo la tercera proporcional constante, será el parámetro del diámetro EP ; y generalmente el rectángulo hecho del parámetro en la abscisa igual al cuadrado de la semiordenada en qualquier diámetro, conforme se demostró en la proposicion i respecto al parámetro del exe.

COROLARIO VI. El parámetro del diámetro EP es tercera proporcional á la abscisa BL del exe, y á la tangente ET ; porque tirando BZ paralela á la tangente, será semiaplicada al diámetro EP , y en el paralelogramo $ZETB$ será (prop. xxxiv lib. i) $BZ = ET$, y $EZ = TB = BL$ por lo demostrado en la proposicion v, y siendo el parámetro tercera proporcional á la abscisa EZ , y á la semiaplicada BZ , lo será tambien á sus iguales BL , ET .

COROLARIO VII. El parámetro de qualquier diámetro EP es duplo de la subtangente mas de la subnormal, esto es, si en E se levanta la perpendicular EQ á la tangente ET , será el parámetro duplo de TQ , porque en los triángulos semejantes TEL , TEQ por ser TE media proporcional entre TQ y TL (cor. ii prop. viii lib. vi), será $\overline{TE}^2 = TL \times TQ$;
 tambien (prop. xvi lib. vi) $TL \times TQ = \frac{1}{2} TL \times 2 TQ$;
 luego (ax. i) $\overline{TE}^2 = \overline{BZ}^2 = \frac{1}{2} TL \times 2 TQ$,
 esto es $\overline{BZ}^2 = EZ \times 2 TQ$;
 luego son continuas proporcionales EZ , BZ , $2 TQ$,
 y por consiguiente $2 TQ$ será igual al parámetro del diámetro EP .

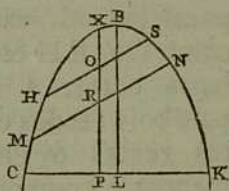
COROLARIO VIII. El parámetro de qualquier diá-

PROPOSICION VIII. PROBLEMA.

Hallar el exe de la parábola.

OPER. Tírense dentro de la parábola cualesquiera dos paralelas MN , HS terminadas en la periferia: divídanse por medio en los puntos R , O , y tírese por estos la recta PX , á la qual báxese de qualquier punto C de la curva la perpendicular CP prolongándola hasta encontrar la curva en otro punto K : divídase CK por medio en L , y tirando por este punto la LB paralela á PX , será el exe.

DEM. La recta PX divide por medio á las paralelas MN , HS : luego es diámetro; y por ser paralela á este la recta LB , y dividir por medio en ángulos rectos á la CK , esta será una aplicada, y LB el exe.

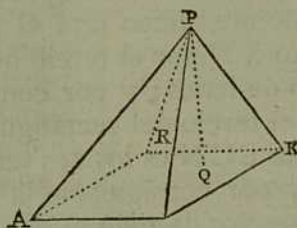
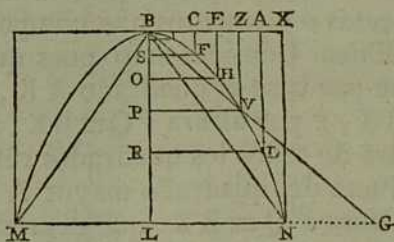


PROPOSICION IX. TEOREMA.

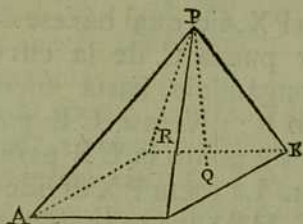
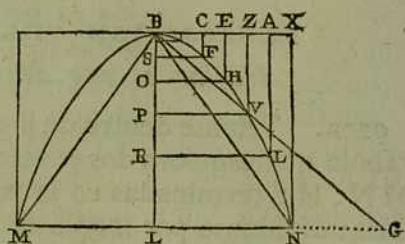
La parábola es los dos tercios del rectángulo circunscripto.

EXP. Sea la parábola MBN , cuya base es MN , y sobre esta constrúyase el rectángulo MX , de suerte que su altura sea igual al exe BL de la parábola: digo que la superficie de esta será los dos tercios de la del rectángulo.

DEM. Concíbese la recta BX dividida en una infini-



dad de partes, y que por todas las divisiones se tiran paralelas al exe, como CF, EH &c. hasta cortar á la parábola; todas estas rectas ó elementos compondrán la superficie del triángulo mixtilíneo B X N, y serán iguales á las abscisas B S, B O &c. así como las



BC, B E &c. iguales á las semiordenadas S F, O H &c., y (prop. II) todos los quadrados de las B C, B E, B Z tendrán entre sí la misma razon que las abscisas C F, E H, Z V, y serán en número iguales: luego del mismo modo que se hallare el valor de los quadrados, se hallará el de todas las rectas ó elementos que componen el triángulo mixtilíneo. Considerando pues que la pirámide R tiene por base el quadrado A K, que lo es de la recta B X, y por altura P Q = B X, su solidez se compondrá de todos los quadrados referidos, y será el producto del quadrado mayor A K por el tercio de su altura P Q = B X, que expresa el número de todos ellos (prop. VII lib. XII): luego la superficie del triángulo mixtilíneo será el producto del mayor elemento X N por el tercio de B X, que expresa el número de todos; y por consiguiente dicho triángulo será el tercio del rectángulo L X: luego la semiparábola L C N es los dos tercios del mismo rectángulo, y por consiguiente la parábola M B N será los dos tercios de todo el rectángulo M X: que era &c.

COROLARIO I. La superficie de la parábola es igual al rectángulo hecho de la base MN en los dos tercios del exe BL .

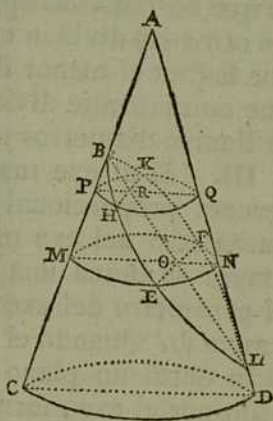
COROLARIO II. Si dentro de la parábola se inscribe el triángulo máximo MBN , tendrá la parábola al triángulo la razón de $4:3$; porque teniendo el rectángulo MX á la parábola la razón de $3:2$ por lo demostrado, y al triángulo la razón de $2:1$, las tres superficies tendrán la razón de los números $6, 4, 3$: luego la parábola al triángulo es como $4:3$.

COROLARIO III. Si la base MN se divide en tres partes iguales, y se añade una de ellas, como NG , esta será la quarta parte de MG , y por consiguiente serán proporcionales $MG:MN::4:3$; luego tirando BG , el triángulo MBG será igual á la parábola, porque el triángulo MBG al triángulo MBN es como $MG:MN$ (prop. i lib. vi), ó bien como $4:3$; y siendo la parábola al triángulo $MBN::4:3$, será el triángulo MBG igual á la parábola (prop. ix lib. v).

DE LA ELIPSE.

DEFINICIONES.

I. Si á un cono ACD le corta un plano $BHEL$ perpendicular al triángulo por el exe CAD , cortando tambien ambos lados AC, AD en los puntos B, L , esta seccion se llama elipse; y la curva $BHELFK$ que describe en la superficie cónica, se dice curva, ó periferia elíptica: la recta BL comun seccion de la elipse con el triángulo por

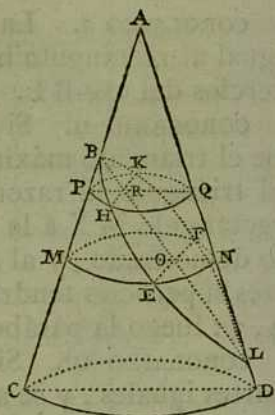


el eje, es la mayor que se puede tirar dentro de la elipse, y se llama el eje mayor.

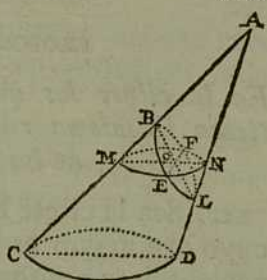
II. Todas las rectas EF , HK , que son las comunes secciones de la elipse con los círculos paralelos á la base, estan cortadas por medio y en ángulos rectos por el eje BL , conforme se dixo en la def. iii de la Parábola, y se llaman aplicadas al eje mayor, y sus mitades EO , HR semiaplicadas ó semiordenadas. Si el eje mayor BL se divide por medio en O , la aplicada EOF se dice eje menor, el qual tiene tambien sus aplicadas, que son las paralelas al eje mayor, á quienes divide por medio y en ángulos rectos: el punto O en donde se cortan los dos exes, se llama centro; y qualquiera recta que pasando por él se termina de ambas partes en la curva elíptica, se dice diámetro, y son infinitos: cada uno tiene sus aplicadas, como los exes; y aunque estos son tambien diámetros, se distinguen en que cortan á sus aplicadas en ángulos rectos; pero los otros las dividen en ángulos obliquos: el eje menor EF es el menor de los diámetros; y de estos los que mutuamente dividen por medio á sus aplicadas, se llaman diámetros conjugados.

III. Si al eje mayor y al menor se busca una tercera proporcional, esta se llama lado recto, ó parámetro del eje mayor; y si al eje menor y al mayor se busca una tercera proporcional, se tiene el parámetro del eje menor.

ESCOLIO. Quando el cono es escaleno, como ACD , y le corta un plano BEL perpendicular al triángulo por el eje, formando el ángulo $ALB = ACD$,



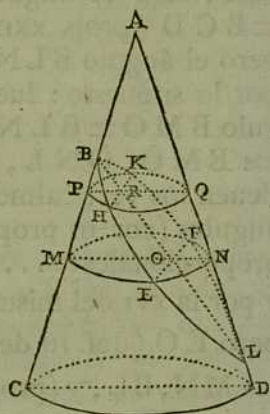
en este caso la seccion $BE L$ se llama subcontraria á la base del cono, y es círculo; porque considerando qualquier plano MEN paralelo á dicha base, será el ángulo $BMO = BCD$ (prop. xxix lib. i); pero el ángulo $BLN = BCD$ por lo supuesto: luego el ángulo $BMO = BLN$; por consiguiente los triángulos BMO, ONL , que á mas de dichos ángulos, tienen los verticalmente opuestos iguales, son equiángulos (cor. iii prop. xxxii lib. i), y (prop. iv lib. vi) proporcionales. $MO : BO :: OL : ON$, y por la xvi del mismo . . . $MO \times ON = BO \times OL$; pero EO (def. iii de la Paráb.) es perpendicular á las MN, BL , y (prop. xiii lib. vi) $\overline{EO}^2 = MO \times ON$; luego $\overline{EO}^2 = BO \times OL$; y por consiguiente siendo EO perpendicular sobre BL , y media proporcional entre los segmentos BO, OL , el punto E estará en la circunferencia de un círculo, cuyo diámetro es BL ; lo mismo se verifica de qualquiera otro punto de la curva $BE L$; luego es círculo.



PROPOSICION I. TEOREMA.

En la elipse los quadrados de las semiordenadas tienen la misma razón que los rectángulos hechos de los segmentos del exe.

EXP. Sea la elipse BHELFK, cuyo exe mayor es BL, y por qualesquiera puntos R, O pasen los planos PHQ, MEN paralelos á la base del cono, que serán círculos, cuyos diámetros PQ, MN son paralelos: las comunes secciones de los círculos y la elipse son las rectas HK, EF, que serán perpendiculares á los diámetros y al exe BL, y cortándolas este por medio, se-



rán sus aplicadas: digo pues que son proporcionales $\overline{HR}^2 : \overline{EO}^2 :: BR \times RL : BO \times OL$.

DEM. Por razon de las paralelas PQ, MN los triángulos BPR, BMO son equiángulos, y (prop. iv lib. vi) proporcionales alternando $BR : BO :: PR : MO$;

tambien los triángulos L R Q, LON son equiángulos, y por consiguiente proporcionales.

..... $RL : OL :: RQ : ON$;

luego (cor. iv) $BR \times RL : BO \times OL :: PR \times RQ : MO \times ON$;

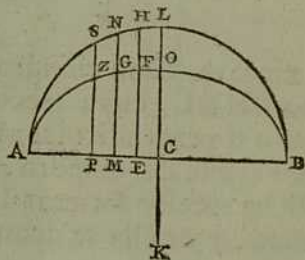
lem. i lib. v) ... pero (prop. xiii lib. vi) $PR \times RQ = \overline{HR}^2$, y $MO \times ON = \overline{EO}^2$

luego substituyendo será $\overline{HR}^2 : \overline{EO}^2 :: BR \times RL : BO \times OL$; que era &c.

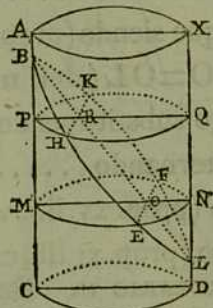
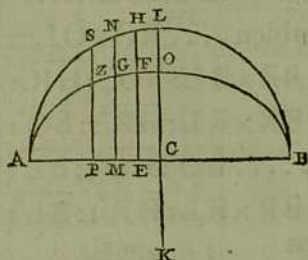
Lo mismo se entiende de los segmentos del exe menor, y de sus aplicadas, y es la propiedad primaria de la elipse.

COROLARIO I. El rectángulo hecho de los segmentos del exe mayor es al quadrado de su semi-ordenada como el quadrado del exe mayor al quadrado del exe menor, esto es, son proporcionales. $BR \times RL : \overline{HR}^2 :: \overline{BL}^2 : \overline{EF}^2$, porque siendo (prop. I) $BR \times RL : BO \times OL :: \overline{HR}^2 : \overline{EO}^2$, y $BO = OL$ (def. II), tambien $BO \times OL = \overline{BO}^2$, luego substituyendo será $BR \times RL : \overline{BO}^2 :: \overline{HR}^2 : \overline{EO}^2$, y alternando $BR \times RL : \overline{HR}^2 :: \overline{BO}^2 : \overline{EO}^2$, pero (prop. xv lib. v) $\overline{BO}^2 : \overline{EO}^2 :: \overline{BL}^2 : \overline{EF}^2$, luego (prop. xi lib. cit.) .. $BR \times RL : \overline{HR}^2 :: \overline{BL}^2 : \overline{EF}^2$.

COROLARIO II. Dados los exes de la elipse, se describe en un plano de este modo: sea el exe mayor AB, y el menor OK: dispónganse estos de suerte que se corten por medio y en ángulos rectos en el punto C: sobre AB como diámetro descríbase un círculo ALB, y alargando CO hasta L, tómense en el diámetro muchos puntos E, M, P &c., y tirando por ellos paralelas á CL, córtense todas proporcionalmente en los puntos F, G, Z &c., como lo está CL en el punto O, esto es, hágase la proporcion $CL : CO :: EH : EF$, y tambien $CL : CO :: MN : MG$, y así de las demás; y pasando una curva por todos los puntos Z, G, F, O &c., se tendrá la elipse; porque siendo por construccion $CL : CO :: EH : EF$, será (prop. xxii lib. vi) $\overline{CL}^2 : \overline{CO}^2 :: \overline{EH}^2 : \overline{EF}^2$,



y alternando..... $\overline{CL}^2 : \overline{EH}^2 :: \overline{CO}^2 : \overline{EF}^2$;
 pero (prop. XIII lib. VI)..... $\overline{CL}^2 = AC \times CB$,
 y $\overline{EH}^2 = AE \times EB$;
 luego substituyen- } $AC \times CB : AE \times EB :: \overline{CO}^2 : \overline{EF}^2$,
 do se tendrá
 y por consiguiente los puntos Z, G, F, O &c. estarán
 (prop. I) en la curva elíptica : luego AOB es elipse.

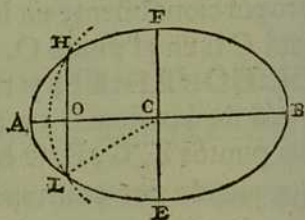


ESCOLIO. Si un cilindro ACDX se corta por un plano BHEL, cuya seccion no sea paralela á la base, pero sí perpendicular al paralelogramo AD que pasa por el exe del cilindro, y es perpendicular á la base, dicha seccion formará la elipse BHELFK como en el cono, y de ella se demuestra lo mismo.

PROPOSICION II. PROBLEMA.

Dado el centro de una elipse, hallar sus exes.

OPER. Dada la elipse AFB E, y su centro C, tómese un punto L en la periferia, y desde C con el intervalo CL descríbese un arco LH hasta encontrar la curva en otro punto H: tírese la recta LH, y di-



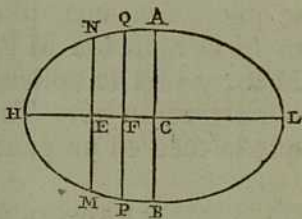
vidiéndola por medio en O , por los puntos O, C tírese la AB terminada en la periferia elíptica, y será uno de los exes: tírese también por el punto C la recta EF perpendicular sobre AB , y será el otro exe. Consta de lo dicho.

ESCOLIO. Si el arco de círculo descripto con la distancia del centro al punto tomado en la curva elíptica fuere tangente á esta, tirando por dicho punto y el centro una recta hasta terminarse en la periferia elíptica, será uno de los exes, el mayor si el círculo toca á la elipse exteriormente, y el menor si la toca interiormente.

PROPOSICION III. PROBLEMA.

Dada una elipse, hallar su centro.

OPER. Tírense dentro de la elipse cualesquiera dos paralelas MN, PQ terminadas en la curva elíptica, y divídanse por medio en los puntos E, F : tírese por estos la recta HL terminada también en la curva, y dividiéndola por medio en el punto C , este será el centro.

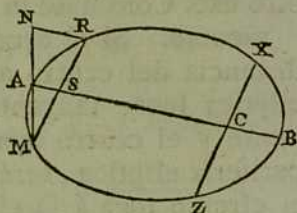


DEM. Porque la recta HL divide por medio á las paralelas MN, PQ , será diámetro, y dichas paralelas sus aplicadas (def. II); y como todos los diámetros se corten por medio en el centro de la elipse, será C el centro que se pide.

PROPOSICION IV. PROBLEMA.

Dado en la elipse un diámetro, y un punto en la periferia, tirar por él una aplicada.

EXP. Sea dado el diámetro AB en la elipse $RXBZM$, y el punto M en la periferia, y se pide tirar por él una aplicada.



OPER. Por los puntos M , A tírese la recta MN : córtese $AN = AM$, y tirando por N la NR paralela á AB hasta encontrar la periferia en un punto R : tírese tambien por este y por M la RM , y será la aplicada que se pide. La demostracion consta de la prop. II lib. VI, y def. II Elips.

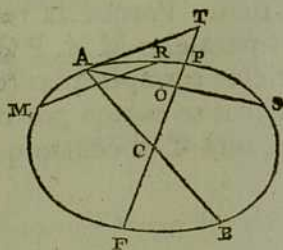
ESCOLIO. Si por un punto C dado en el diámetro, se quiere tirar una aplicada, tírese de qualquier punto M la aplicada MR , y por C la ZX paralela á MR , y será la aplicada (def. II).

DEFINICION IV. Tangente de la elipse es la recta que la toca en un punto, y no la corta.

PROPOSICION V. PROBLEMA.

Dado un punto en la elipse, tirar por él una tangente.

EXP. Sea dada la elipse $APBM$, y el punto A en la periferia, y se pide tirar por él una tangente.



OPER. Tírese el diámetro AB , y por qualquier punto M la aplicada MR (prop. IV), y tirando la recta AT paralela á MR , será la tangente.

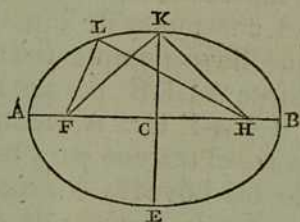
DEM. Si alguna parte de la recta AT cayere

dentro de la elipse, la dividiría por medio el diámetro AB (def. 11), por ser AT y MR paralelas, y esta aplicada al diámetro; pero esto es imposible, por haberse tirado AT desde el punto A de la curva: luego cae toda fuera, y es tangente.

ESCOLIO. Si de qualquier punto T de la tangente se tira por el centro C la TF , y tambien la AS aplicada al diámetro PF , serán CO , CP , CT continuas proporcionales, y por consiguiente si de un punto T se ha de tirar una tangente, se tirará TF , y á las CT , CP se buscará la tercera proporcional CO ; y tirando por O la aplicada AS , se tirará despues TA , y esta será la tangente que se pide en el punto A .

La demostracion pide el conocimiento de otros teoremas que se omiten.

DEFINICION V. Focos, polos ú ombigos de la elipse son dos puntos F , H colocados en el exe mayor AB , equidistantes del centro C , y situados de tal suerte, que tiradas rectas desde ellos á

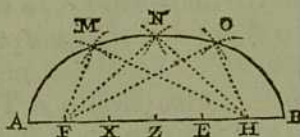


los extremos del exe menor EK , sean $FK = AC$, y $HK = CB$, y por consiguiente las dos rectas FK , HK juntas son iguales al exe mayor AB .

COROLARIO. Para hallar los focos se buscan los exes AB , EK (prop. 11), y con el intervalo AC se cortarán desde el punto K sobre el exe mayor AB los puntos F , H , que serán los focos.

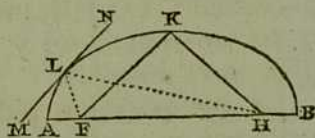
ESCOLIO I. Entre las propiedades de los focos, la primera es, que si desde ellos se tiran á qualquier punto L de la circunferencia dos rectas FL , HL , estas juntas son iguales al exe mayor AB : de donde se infiere la descripcion de la elipse dado el exe mayor AB , y sus focos, y es como sigue.

MODO PRIMERO. Sea dado el exe mayor AB , y sus focos F, H : divídase FH como quiera en muchos puntos X, Z, E &c.



desde F con el intervalo AX , y desde H con el intervalo BX hágase la intersección M : tambien desde F con el intervalo AZ , y desde H con el intervalo BZ hágase la intersección N , y asimismo todas las demás, y pasando por ellas una curva, se tendrá la elipse.

MODO SEGUNDO. Tómesese un hilo FLH igual al exe mayor AB : fíxense sus extremos en los focos F, H ; y moviendo ácia todas partes una punta de lapiz, pluma ó clavo, de suerte



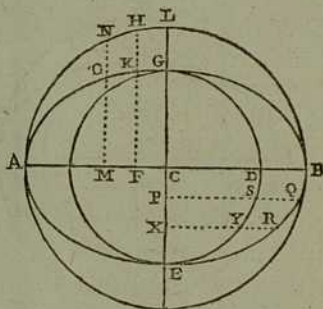
que lleve siempre tirante el hilo, se describirá la elipse $ALKB$; porque siempre será $FL + LH = AB$, y $FK + KH = AB$. Esta práctica es muy frecuente sobre el terreno para hacer la montea ó delineacion de las bóvedas ó arcos rebaxados, que llaman á vuelta de cordel, de que se hablará en la Arquitectura.

ESCOLIO II. Otra propiedad de los focos es, que si una recta MN toca á la elipse en el punto L , y de los focos se tiran FL, HL , será el ángulo $MLF = NLH$, de donde se infiere la razon por que un cuerpo luminoso puesto en el foco F hace todas sus reflexiones al punto H , y es porque el ángulo de la incidencia FLM es igual al de la reflexión HLN , como se demuestra en la Catóptrica.

PROPOSICION VI. TEOREMA.

Si sobre el exe mayor de la elipse se describe un círculo, y otro sobre el exe menor, el círculo mayor á la elipse tiene la misma razon que el exe mayor al menor, y esta misma tiene la elipse al círculo menor.

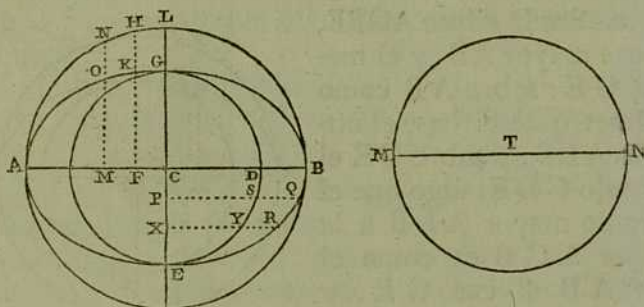
EXP. Sea la elipse $AGBE$, el exe mayor AB , y el menor GE : sobre AB como diámetro describese el círculo ALB , y sobre GE el círculo GDE : digo que el círculo mayor ALB á la elipse AGB es como el exe AB al exe GE , y que la elipse al círculo menor tendrá la misma razon.



DEM. Concíbase la superficie del círculo ALB compuesta de una multitud de elementos ó rectas FH, MN &c. paralelas á CL : á todas estas rectas ó elementos les cortará proporcionalmente la elipse en los puntos G, K, O &c. (cor. II prop. I), y así de todos los demás: luego si cada aplicada en el círculo á su correspondiente en la elipse tiene la razon de CL á CG , ó bien de AB á EG , y son iguales en número, todos los elementos del círculo á todos los de la elipse tendrán tambien (prop. XII lib. V) la misma razon, esto es, el círculo mayor á la elipse será como el exe mayor AB al menor EG . Asimismo considerando la superficie de la elipse compuesta de una multitud de elementos PQ, XR &c. paralelos á CB , serán cortados por el círculo GDE proporcionalmente, esto es, serán proporcionales

$CB:CD::PQ:PS$ &c. ó bien $AB:EG::PQ:PS$, y (prop. XII lib. V) todos los elementos de la elipse á todos los del círculo menor tendrán la misma razon, esto es, la superficie de la elipse á la del círculo menor será como el exe mayor AB al exe menor EG .

COROLARIO. El círculo del exe mayor, la elipse, y el círculo del exe menor son tres magnitudes continuas proporcionales, porque tienen entre sí una misma razon.



PROPOSICION VII. TEOREMA.

Si entre el exe mayor de la elipse y el menor se busca una media proporcional, se tendrá el diámetro de un círculo igual á la elipse.

EXP. Sea la elipse $AGBE$, el exe mayor AB , el menor GE , y MN una media proporcional entre AB y GE : digo que la superficie del círculo T descrito sobre MN como diámetro, será igual á la de la elipse.

DEM. Por ser continuas proporcionales AB , MN , EG , lo serán (esc.) $\dots \overline{AB}^2 : \overline{MN} :: AB : EG$; prop. IV lib. V Arit.) $\dots$ pero (prop. II lib. XII) el círculo $ALB : T :: \overline{AB}^2 : \overline{MN}^2$; luego (prop. XI lib. V) el círculo $ALB : T :: AB : EG$; tambien (prop. VI) $\dots ALB : AGB :: AB : EG$;

luego (prop. xi lib. v) $ALB:T::ALB:AGB$,
 y (prop. ix lib. cit.) $T=AGB$,
 esto es, el círculo igual á la elipse: que era &c.

COROLARIO I. El rectángulo circunscripto á la elipse es igual al quadrado circunscripto á un círculo cuyo diámetro es medio proporcional entre los dos exes.

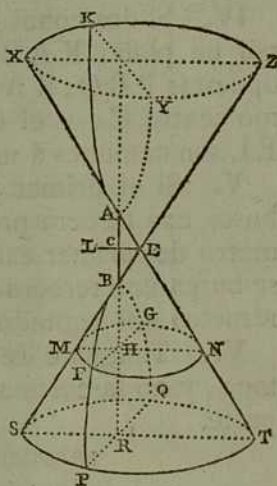
COROLARIO II. Las elipses tienen la misma razon que los rectángulos hechos de sus exes, y así serán semejantes si sus exes son proporcionales, y serán iguales si sus exes fueren recíprocamente proporcionales.

DE LA HIPÉRBOLA.

DEFINICIONES.

I. Si un cono EST se corta por un plano $ABPQ$, de suerte que siendo perpendicular al triángulo por el exe SET corte al lado ES en un punto B , y al otro lado TE alargado en A , el plano secante PBQ se llama hipérbola: la recta AB , que está fuera del cono, se dice primer exe, y es linea determinada*.

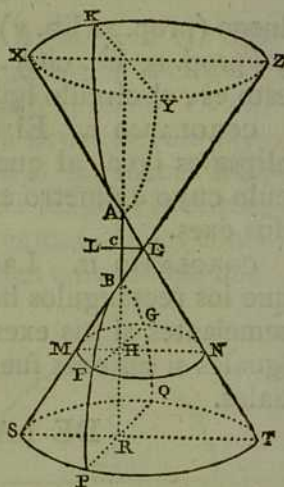
II. El punto C que está en la mitad de AB se llama centro de la hipérbola, y la



* NOTA. La definicion dada de la hipérbola es general, y aunque en adelante se trata de la hipérbola cuyo plano es perpendicular á la base del cono, las proposiciones convienen á dicha curva en general.

recta AR exe indeterminado, porque puede alargarse al infinito. La recta EL que pasa por el vértice del cono, y está dividida por medio en el centro C formando ángulos rectos con el primer exe, se llama segundo exe, y es línea determinada.

III. El punto B es vértice de la hipérbola; las rectas BH , BR son abscisas, y las FG , PQ aplicadas al exe, el qual las divide por medio y en ángulos rectos en los puntos H , R .



IV. Si dos conos opuestos EXZ , EST se cortan por un plano $KABPQ$, resultan dos hipérbolas opuestas PBQ , KAY , las cuales tienen un mismo centro C , y el exe primero AB , y el segundo EL son comunes á una y otra.

V. Si al primer exe AB , y al segundo EL se busca una tercera proporcional, se tendrá el parámetro del primer exe; y si al segundo y al primero se busca una tercera proporcional, se tendrá el parámetro del segundo exe.

VI. Tangente de la hipérbola es la recta que la toca, y no la corta aunque se alargue á una y otra parte.

PROPOSICION I. TEOREMA.

En la hipérbola el quadrado del primer exe al quadrado del segundo es como el rectángulo hecho de la recta compuesta del primer exe, y de la abscisa, en la abscisa al quadrado de la semiordenada.

EXP. Sea la hipérbola PBQ , el primer exe

A B, el segundo E L, y F H una semiordenada, será la abscisa B H, y A H la compuesta del primer exe y de la abscisa : digo que son proporcionales $\overline{AB^2} : \overline{EL^2} :: A H \times B H : \overline{FH^2}$.

DEM. Tirada por H la M N paralela á L E, los triángulos A C E, A H N son equiángulos, y (prop. iv lib. vi) proporcionales $AC : CE :: AH : HN$; tambien en los triángulos semejantes B C E, B H M } ... $BC : CE :: BH : HM$; luego (cor. iv } $AC \times BC : \overline{CE^2} :: AH \times BH : HN \times HM$; lem. i lib. v) } pero $AC \times BC = \overline{AC^2}$; y tambien (prop. xiii lib. vi) $HN \times HM = \overline{FH^2}$; luego substituyendo } .. $\overline{AC^2} : \overline{CE^2} :: AH \times BH : \overline{FH^2}$; se tendrá } .. $\overline{AB^2} : \overline{EL^2} :: AH \times BH : \overline{FH^2}$; ó bien (prop. xv lib. v) .. $\overline{AB^2} : \overline{EL^2} :: AH \times BH : \overline{FH^2}$.

PROPOSICION II. TEOREMA.

En la hipérbola los quadrados de las semiordenadas tienen la misma razon que los rectángulos hechos de la compuesta del primer exe, y de la abscisa en la abscisa.

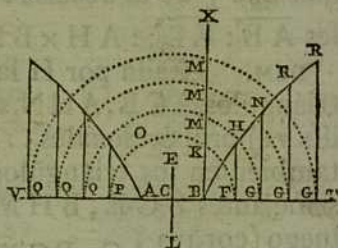
EXP. Sea en la misma hipérbola P B Q, otra semiordenada P R, será B R la correspondiente abscisa : digo que son } $\overline{FH^2} : \overline{PR^2} :: A H \times B H : A R \times B R$. proporcionales ... }

DEM. Por la proposicion antecedente se tiene que $\overline{AB^2} : \overline{EL^2} :: A H \times B H : \overline{FH^2}$; y por la misma $\overline{AB^2} : \overline{EL^2} :: A R \times B R : \overline{PR^2}$; luego (prop. xi lib. v) $A H \times B H : \overline{FH^2} :: A R \times B R : \overline{PR^2}$; y (prop. xvi lib. cit.) .. $A H \times B H : A R \times B R :: \overline{FH^2} : \overline{PR^2}$; ó bien $\overline{FH^2} : \overline{PR^2} :: A H \times B H : A R \times B R$: que era &c.

PROPOSICION III. PROBLEMA.

Dados los exes, describir la hipérbola.

OPER. Dados los exes A B, E L, dispónganse de suerte que se corten perpendicularmente por medio en C: tírese B X paralela á E L: alárguese el primer exe ácia los puntos V, T: divídase B T en muchas partes en los puntos F, G &c.: hágase $AP=BF$, $AQ=BG$, y así de los demás: desde C con el intervalo C F describáse el semicírculo FOP, que cortará á la B X en el punto K: á las tres rectas A B, E L, B K hállese la quarta proporcional F H, que se levantará perpendicular sobre B T en el punto F: con el intervalo C G describáse otro semicírculo, que determinará en la recta B X el punto M: á las tres rectas A B, E L, B M hállese la quarta proporcional G N, que se levantará perpendicular sobre B T; y á este modo se hallarán los demás R &c.; y pasando por todos ellos una curva B H N &c., se tendrá la hipérbola; y haciendo lo mismo á la otra parte del exe, se tendrán las dos hipérbolas.



DEM. Por la construccion son proporcionales $AB:EL::BK:FH$,
 y tambien $AB:EL::BM:GN$;
 luego (prop. xi lib. v) $BK:FH::BM:GN$;
 asimismo (prop. xii lib. vi) .. $\overline{BK}^2:\overline{FH}^2::\overline{BM}^2:\overline{GN}^2$;
 y (prop. xvi lib. v) $\overline{BK}^2:\overline{BM}^2::\overline{FH}^2:\overline{GN}^2$;
 pero (prop. xiii lib. vi). $\overline{BK}^2=PB \times BF=AF \times BF$;
 y tambien por la misma $\overline{BM}^2=BQ \times BG=AG \times BG$;
 luego substituyendo será $\overline{FH}^2:\overline{GN}^2::AF \times BF:AG \times BG$;
 y por la proposicion antecedente los puntos H, N &c. estan en la periferia hiperbólica.





