Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

Tesis doctoral

LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS COMO MEDIO PARA DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO. IMPLICACIONES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Jorhan José Chaverri Hernández

Granada, 2024

Universidad de Granada

Departamento de Didáctica de la Matemática

Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación

UNIVERSIDAD DE GRANADA

LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS COMO MEDIO PARA DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO. IMPLICACIONES EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Memoria de Tesis Doctoral realizada bajo la dirección de la doctora María José Burgos Navarro, que presenta D. Jorhan José Chaverri Hernández para optar al grado de Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada.

Fdo. Jorhan José Chaverri Hernández

Vº Bº de la Directora:

Fdo. María J. Burgos Navarro

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales
Autor: Jorhan José Chaverri Hernández
ISBN: 978-84-1195-655-0
URI: https://hdl.handle.net/10481/102015

El doctorando Jorhan José Chaverri Hernández y la directora de tesis, María J. Burgos Navarro, garantizamos al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de la directora de tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores al ser citados cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Asimismo, certificamos que:

- Jorhan José Chaverri Hernández es co-autor de todos y cada uno de los artículos, actas o capítulos de libros publicados y aceptados para su publicación o en evaluación, compendiados en esta memoria en los capítulos del 3 al 8.
- Los trabajos de elaboración de todos y cada uno de estos artículos han sido parte de la formación de Jorhan José Chaverri Hernández como investigador.
- Todos y cada uno de los artículos compendiados en esta memoria de tesis doctoral son originales y no han sido utilizados por ninguno de sus coautores en otras tesis doctorales.

Granada, 27 de julio de 2024.

Directora de la Tesis | Doctorando

Fdo: María J. Burgos Navarro | Fdo: Jorhan José Chaverri Hernández

Reconocimiento

Esta investigación se realizó en el marco del proyecto de investigación PID2022-139748NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033 y FEDER/EU.

Agradecimientos

Agradezco a mi familia. A mi madre, hermanas y sobrinas, de quienes siempre recibo amor y un abrazo de apoyo. A mi padre, quien no pudo ver la culminación de este proyecto, el cual inició gracias a su eterno esfuerzo y confianza sin que yo lo imaginara.

Agradezco a mi directora, María Burgos Navarro por toda la ayuda, atención y compromiso en este trabajo, también por su constante motivación y acompañamiento personal.

Gracias María José, Carmen Gloria y Laura Zúñiga. A todas las personas que colaboraron para el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Esta memoria de tesis doctoral articula cuatro aspectos de sumo interés en la Educación Matemática: la formación de profesores, la creación de problemas, el razonamiento proporcional y el algebraico. La creación de problemas es objetivo, pero también medio para evaluar y desarrollar conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de futuros profesores con relación al razonamiento proporcional y su conexión con el algebraico.

El Capítulo 1 muestra, mediante una revisión de la literatura, la necesidad y beneficios de la creación de problemas tanto para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares como en la propia formación de los docentes. A continuación, centra la atención en el razonamiento proporcional y su conexión con el algebraico, con la intención de identificar qué carencias encuentran los docentes en formación y de qué forma es posible contribuir a su mejora a través la creación de problemas. Los antecedentes recogen también diferentes propuestas de tareas de creación de problemas y muestran la necesidad de diseñar e implementar acciones formativas que orienten la adquisición adecuada de esta competencia matemática sobre contenidos matemáticos específicos. El capítulo concluye con las hipótesis y los objetivos de investigación propuestos en esta memoria.

El Capítulo 2 recoge la fundamentación teórica y metodológica de la investigación. Se resumen los componentes esenciales para esta tesis del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, en particular, las nociones de significado pragmático y configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, así como el modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas. Además, se introducen las posturas asumidas sobre la creación de problemas, el razonamiento proporcional y el algebraico, describiendo el modelo de los niveles de algebrización propuesto desde el Enfoque ontosemiótico. Finalmente se detalla la ingeniería didáctica en el sentido generalizado como el enfoque metodológico seguido para atender a los objetivos establecidos.

De acuerdo con el análisis realizado sobre estudios previos y la reflexión en torno al diseño de experiencias formativas con motivo de esta tesis, en el Capítulo 3 presentamos un

nuevo modelo para la creación de problemas. El modelo considera esta práctica como un mega-proceso y articula las formas de crear un problema matemático, sus elementos, los procesos implicados y los tipos de conocimientos didáctico-matemáticos que involucran. En los siguientes capítulos se presenta el diseño, la implementación y la evaluación de las intervenciones formativas realizadas con docentes de primaria y secundaria en formación, centradas en la creación de problemas con una finalidad didáctico-matemática específica con relación a los razonamientos proporcional y algebraico. De manera específica, los Capítulos 4 y 5 describen los resultados de las acciones desarrolladas con maestros en formación (estudiantes del grado de Educación Primaria) españoles, destinadas a crear por variación problemas con finalidad didáctico-matemática epistémica (involucrar rasgos esenciales del razonamiento proporcional, por ejemplo, distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas) y cognitiva (crear problemas con diferentes grados de complejidad, variar un problema de proporcionalidad para contribuir a facilitar la comprensión y la solución de dificultades encontradas con la solución del problema base).

Los Capítulos 6 y 7 se dedican a las acciones formativas llevadas a cabo con futuros profesores de secundaria españoles y costarricenses, respectivamente. En el diseño de estas experiencias, se amplía el contexto de creación de problemas de proporcionalidad (aritmético, funcional, geométrico o probabilístico) y se contempla tanto la creación de forma libre o a partir de una situación dada.

Finalmente, en el Capítulo 8 se describen los resultados de una intervención formativa con maestros en formación (también estudiantes del grado de Educación Primaria) españoles, centrada en la creación de problemas por variación o a partir de una situación de proporcionalidad (en contexto aritmético o probabilístico) para fomentar el razonamiento algebraico o motivar cambios en el nivel de algebrización.

En el Capítulo 9 que cierra esta tesis, se encuentran las conclusiones generales derivadas de los resultados obtenidos en las intervenciones descritas en los capítulos anteriores, dando respuesta a las hipótesis y objetivos planteados. Estos muestran, de manera general, las dificultades de los futuros docentes para crear problemas que respondan a la finalidad didáctica requerida, motivadas en parte por un conocimiento didáctico-matemático insuficiente en las distintas facetas (epistémica, cognitiva, interaccional), y en particular por un conocimiento sesgado del razonamiento proporcional y algebraico. Finalmente, se establecen líneas futuras de investigación a partir del análisis de los logros y limitaciones observadas, sugiriendo posibles mejoras y ampliaciones de los instrumentos utilizados. Se espera así contribuir al diseño de nuevas acciones sobre creación de problemas en los programas de formación de profesores, que superen las carencias observadas.

Abstract

This doctoral thesis articulates four key aspects of great interest in Mathematics Education: teacher training, problem creation, proportional reasoning, and algebraic reasoning. Problem creation is both an objective and a means to evaluate and develop the didactic-mathematical knowledge and competencies of future teachers concerning proportional reasoning and its connection with algebraic reasoning.

Chapter 1 shows, through a literature review, the necessity and benefits of problem creation for both the teaching and learning of school mathematics and for teacher training. It then focuses on proportional reasoning and its connection to algebraic reasoning, aiming to identify the deficiencies that trainee teachers encounter and how it is possible to contribute to their improvement through problem creation. The background also includes various proposals for problem-creating tasks and demonstrates the need to design and implement training actions that guide the adequate acquisition of this mathematical competence on specific mathematical content. The chapter concludes with the hypotheses and research objectives proposed in this thesis.

Chapter 2 covers the theoretical and methodological foundation of the research. It summarizes the essential components of this thesis from the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction, particularly the notions of pragmatic meaning and the ontosemiotic configuration of practices, objects, and processes, as well as the model of didactic-mathematical knowledge and competencies of the mathematics teacher. Additionally, it introduces the assumed positions on problem creation, proportional reasoning, and algebraic reasoning, describing the model of algebraization levels proposed by the Onto-Semiotic Approach. Finally, it details the didactic engineering in the generalized sense as the methodological approach followed to meet the established objectives.

Based on the analysis of previous studies and reflections on the design of formative experiences conducted for this thesis, Chapter 3 presents a new model for problem creation. The model considers this practice as a mega-process and articulates the ways to create a mathematical problem, its elements, the processes involved, and the types of didactic-mathematical knowledge they involve. The following chapters present the design,

implementation, and evaluation of the training interventions carried out with primary and secondary trainee teachers, focusing on problem creation with a specific didactic-mathematical purpose related to proportional and algebraic reasoning. Specifically, Chapters 4 and 5 describe the results of the actions developed with trainee primary education teachers in Spain, aimed at creating problems with didactic-mathematical epistemic purposes (involving essential features of proportional reasoning, such as distinguishing proportional from additive situations) and cognitive purposes (creating problems with varying degrees of complexity, modifying a proportionality problem to facilitate understanding and addressing difficulties encountered in solving the base problem).

Chapters 6 and 7 are dedicated to the training actions carried out with future secondary school teachers in Spain and Costa Rica, respectively. In designing these experiences, the context of proportionality problem creation (arithmetic, functional, geometric, or probabilistic) is expanded, and both free creation and creation from a given situation are considered.

Finally, Chapter 8 describes the results of a training intervention with trainee primary education teachers in Spain, focused on problem creation through variation or from a proportional situation (in arithmetic or probabilistic contexts) to promote algebraic reasoning or motivate changes in the level of algebraization.

In Chapter 9, which concludes this thesis, the general conclusions derived from the results obtained in the interventions described in the previous chapters are presented, addressing the hypotheses and objectives set forth. These findings generally reveal the difficulties future teachers face in creating problems that meet the required didactic purpose. These challenges are partly due to insufficient didactic-mathematical knowledge in its various facets (epistemic, cognitive, interactional), and particularly due to a biased understanding of proportional and algebraic reasoning. Finally, future lines of research are established based on the analysis of the achievements and limitations observed, suggesting possible improvements and extensions of the instruments used. It is hoped that this will contribute to the design of new strategies for problem creation in teacher training programs, thereby addressing the identified deficiencies.

Índice

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Esta investigación se estructura de acuerdo con cuatro aspectos fundamentales que han ido adquiriendo gran importancia en Educación Matemática: la creación de problemas, el razonamiento proporcional, el razonamiento algebraico y la formación de profesores.

Las matemáticas consisten principalmente en la creación y resolución de problemas matemáticos reales, competencias que constituyen medios importantes para construir conocimiento, por eso las matemáticas escolares deben centrarse en estas actividades (Ernest, 1991).

El interés en la invención de problemas no reside sólo en su importancia como proceso matemático en sí mismo, que complementa y se articula con el de resolución de problemas (Mallart-Solaz, 2019; Pino-Fan et al., 2020), sino también lo está en su potencialidad para fomentar otras competencias (Cai y Leikin, 2020). La invención de problemas estimula un alto nivel de abstracción y requiere de un importante dominio del contenido que se estudia, como el uso adecuado del lenguaje, conceptos, procedimientos y propiedades matemáticos (Kwek, 2015; Silver, 2013). Mediante tareas de creación de problemas los profesores pueden evaluar los conocimientos de sus estudiantes, y ayudarles a aprender matemáticas de manera significativa (Cai y Hwang, 2022; Chen y Cai, 2020; Koichu, 2020). En particular la creación de problemas puede actuar como medio para desarrollar aspectos esenciales del razonamiento matemático, como son el razonamiento proporcional y el razonamiento algebraico. Además de la amplia gama de aplicaciones en situaciones científicas o cotidianas, el razonamiento proporcional es esencial para garantizar el éxito en matemáticas avanzadas (Alvarado, 2011; Cuevas-Vallejo et al., 2023). El razonamiento proporcional implica un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos (Lamon, 2007) que lleva a razonar “algebraicamente” sobre dos cantidades generalizadas de forma la relación de una cantidad con la otra es invariable. Así, es considerado como como un medio de transición de la aritmética en educación primaria hacia el álgebra en educación secundaria (Burgos y Godino, 2019; Butto y Rojano, 2004; Martínez y Romero, 2019). Para Kaput (2008) el razonamiento algebraico supone la simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades, así como el razonamiento guiado sintácticamente, cuando se abordan el estudio de estructuras, las funciones, relación y covariación, y la modelización dentro y fuera de las matemáticas.

El desarrollo del razonamiento proporcional y algebraico en los escolares precisa de una formación específica de los docentes tanto de educación primaria como de secundaria (Burgos, 2023). Los futuros docentes deben no solo conocer qué es el razonamiento proporcional y el algebraico y cómo están conectados, también deben ser capaces de crear problemas que permitan desarrollar dichos razonamientos en sus estudiantes, adaptar los problemas de acuerdo con el nivel cognitivo y realidad de los estudiantes, así como anticipar y corregir los posibles errores de los estudiantes en la resolución de problemas.

En esta tesis, consideramos la creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas (Ellerton, 2013; Malaspina et al., 2015; Mallart et al., 2018; Milinković, 2015; Tichá y Hošpesová, 2013) con relación al razonamiento proporcional y algebraico.

1.1. **Justificación**

1.1.1. Invención y resolución de problemas en las matemáticas escolares

La invención de problemas matemáticos, como proceso que permite obtener nuevos problemas, es un elemento central de la competencia matemática, tan importante como la resolución, pues no se puede resolver un problema si no ha sido previamente planteado (Contreras, 2007; Tichá y Hošpesová, 2013). Sin embargo, la práctica educativa ha centrado su interés en la resolución de problemas, quedando la creación de problemas relegada a un segundo plano en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Akay y Boz, 2010; Crespo, 2003; Ellerton, 2013; Espinoza et al., 2014; Mallart et al., 2018).

La invención de problemas está estrechamente relacionada con la resolución de problemas (Cai y Leikin, 2020; Contreras, 2007; Kilic, 2017; Schindler y Bakker, 2020) y ambas deben verse como propuestas complementarias que permiten incrementar las habilidades matemáticas de los estudiantes (Espinoza et al., 2014; Mallart-Solaz, 2019; Pino-Fan et al., 2020; Silver, 2013). Sin embargo, la resolución y creación de problemas son actividades que implican procesos cognitivos distintos, por lo que deben ser estudiadas de manera diferenciada (Cai et al., 2022).

Por un lado, la creación de problemas contribuye al desarrollo y evaluación del conocimiento matemático, dado que estimula un alto nivel de abstracción y requiere de un importante dominio del contenido que se estudia, así como el uso adecuado del lenguaje, conceptos, procesos y procedimientos matemáticos (Ayllón et al., 2016; Ernest, 1991; Fernández-Millán y Molina, 2016; Kwek, 2015). Por otro, no solo mejora la capacidad para resolver problemas (Akay y Boz, 2010; Christou et al., 2005; Kilic, 2017; Leavy y Hourigan, 2020; Mallart et al., 2018; NCTM, 2000; Xie y Masingila, 2017), sino que también brinda oportunidades a los estudiantes para crear sus propias preguntas y objetivos (Ernest, 1991; Ponte y Henriques, 2013), reduce los errores, incrementa la creatividad y la motivación, disminuye la ansiedad y el miedo de los estudiantes hacia las matemáticas, dándoles una sensación de creación propia (Akay y Boz, 2010; Ayllón et al., 2016; Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Cai y Leikin, 2020; Christou et al., 2005; Espinoza et al., 2014; Fernández y Carrillo, 2020; Leavy y Hourigan, 2020; Mallart et al., 2018; NCTM, 2000; Silver, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013). La creación de problemas fomenta las competencias (Ellerton, 2013; Mallart et al., 2018), aptitudes matemáticas y autonomía de aprendizaje de los estudiantes, les ayuda a explorar la naturaleza de los problemas en lugar de centrarse únicamente en llegar a soluciones, desarrolla y fortalece el pensamiento crítico y favorece una comprensión profunda de las matemáticas (Kiliç, 2017; Leavy y Hourigan, 2020).

Además de contribuir al desarrollo de conocimiento y competencias matemáticas, la creación de problemas también ofrece múltiples oportunidades para desarrollar competencias afectivas (Cai y Leikin, 2020), lo que se considera como una parte importante en el aprendizaje de las matemáticas en el que intervienen diferentes factores: emociones, actitudes, creencias, autoeficacia, motivación y valores (Schindler y Bakker, 2020). Para Schindler y Bakker (2020) el trabajo colaborativo en la creación de problemas permite a los estudiantes ver que las matemáticas son abiertas y habilita espacios para que diseñen sus propios problemas, se construyen atmosferas de empatía y diversión en el proceso, lo que facilita que su dimensión afectiva evolucione positivamente. Similarmente, Headrick et al. (2020) consideran que la capacidad de los estudiantes de crear problemas es evidencia de afectos positivos hacia las matemáticas, como compromiso y entusiasmo. Además, la invención de problemas también tiene como objetivo convertir a los estudiantes en resolutores competentes de problemas (Zhang et al., 2022).

Estos beneficios justifican que la creación de problemas ocupe un lugar en distintas propuestas curriculares (MEFP, 2022; MEP, 2012; NCTM, 2000; OCDE, 2007; OMET, 2005) y diferentes propuestas de enseñanza de las matemáticas (Serin, 2019; Xie y Masingila, 2017) en las que se persigue el desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes. Dado que la competencia matemática supone la habilidad para identificar, comprender, desarrollar y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones dándoles un sentido práctico, se "brinda un lugar privilegiado al planteamiento y resolución de problemas" (MEP, 2012, p. 14), contemplándose este tipo de tareas como estratégica metodológica para el planeamiento y desarrollo de las clases. Similarmente, para la OCDE (2007) "Una de las capacidades esenciales que comporta el concepto de competencia matemática es la habilidad de plantear, formular e interpretar problemas mediante las matemáticas en una variedad de situaciones o contextos" (p. 75).

1.1.2. Invención de problemas en la formación de profesores

Para incorporar de manera efectiva el planteamiento de problemas en todos los niveles de la enseñanza de las matemáticas, es necesario que los futuros profesores cuenten con experiencias sobre creación de problemas como parte de su formación previa (Grundmeier, 2015; Kilic, 2017; Singer et al., 2013). Para Ellerton (2013):

> Quizás la única manera de que el planteamiento de problemas tenga una oportunidad de ser introducido seriamente en los planes de estudio de matemáticas y en las prácticas de aula sería que los profesores jóvenes adquiriesen habilidades de planteamiento de problemas y confianza en el planteamiento de problemas por sí mismos hasta el punto de que sean capaces y estén dispuestos a ayudar a sus alumnos a plantear problemas. La forma más sencilla de avanzar hacia este objetivo sería centrar la atención en esta actividad en los programas de formación de profesores de matemáticas de infantil, primaria y secundaria. (p. 100)

El planteamiento de problemas es valioso como fin en sí mismo, pero también constituye un medio para lograr una mirada amplia de otros objetivos matemáticos y didácticos (Leavy y Hourigan, 2020). La invención de problemas es

> Tanto como medio de instrucción (destinado a involucrarlos en actividades de aprendizaje genuinas que produzcan una comprensión profunda de los conceptos y procedimientos matemáticos) como objeto de instrucción (centrado en el desarrollo de la competencia para

identificar y formular problemas a partir de situaciones no estructuradas). (Singer et al., 2013, p. 5)

Esto ha motivado en las últimas décadas, el interés de diversos investigadores en Educación Matemática por la creación de problemas con propósitos didácticos (Baumanns y Rott, 2021a; Cai et al., 2022; Cai y Leikin, 2020; Espinoza, 2013; Lee et al., 2018). Por un lado, la creación de problemas mejora el conocimiento del contenido matemático (Xie y Masingila, 2017) y permite evaluar el aprendizaje de profesores en formación y en ejercicio (Kar, 2016; Kilic, 2013b); desarrolla el pensamiento crítico y creativo, y fomenta las habilidades de análisis-síntesis y abstracción-generalización (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017). Por otro lado, las investigaciones muestran de manera explícita el vínculo de la creación de problemas con las competencias docentes, insistiendo en la importancia de incluir la invención de problemas en los programas de formación de profesores (Ellerton, 2013; Espinoza et al., 2014; Felmer et al., 2016; Malaspina, 2016; Malaspina et al., 2015, 2019; Mallart et al., 2018; Milinković, 2015; Silver, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013). La creación de problemas es una herramienta que facilita el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas: fortalece la conexión significativa entre conocimientos y competencias matemáticas (Malaspina, 2016), les ayuda a descubrir los errores conceptuales de sus alumnos (Kilic, 2013b; Ponte y Henriques, 2013); favorece las creencias de autoeficacia matemática (Akay y Boz, 2010), ayuda a perfeccionar el análisis de la actividad matemática (Mallart et al., 2016) y capacita para la enseñanza de resolución de problemas (Kilic, 2017; Leavy y Hourigan, 2020; Milinković, 2015; Piñeiro et al., 2019).

Los docentes, además de resolver problemas, deben ser capaces de elegirlos, modificarlos o crearlos con una finalidad didáctica (facilitar o profundizar en el aprendizaje de sus alumnos y estimular su razonamiento matemático) (Burgos, Chaverri y Castillo, 2022), gestionando los conocimientos matemáticos que involucran y las dificultades que pueden encontrar los estudiantes (Burgos y Chaverri, 2022; Malaspina et al., 2019), así como de evaluar críticamente la calidad de la actividad matemática que promueven (Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019). Sin embargo, incluso los profesores con años de experiencia tienen dificultades para proponer problemas a partir de situaciones que no incluyen contenidos numéricos, especialmente para crear problemas a partir de situaciones representadas visualmente (Isik et al., 2011) y priorizan el razonamiento cuantitativo

(Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Grundmeier, 2015; Leung y Silver, 1997). Plantean enunciados poco significativos para el aprendizaje de sus estudiantes, que no están adaptados al nivel educativo o con escasa demanda cognitiva, son ambiguos, incorrectos, incompletos o no responden a las pretensiones educativas, (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Ellerton, 2013; Kar, 2016; Isik et al., 2011; Mallart et al., 2018; Serin, 2019; Singer y Voica, 2013).Quizá estas sean razones por la que los profesores siguen utilizando el libro de texto como recurso principal para la selección de problemas (Pino-Fan et al., 2020).

Ante esta necesidad, incorporar la invención de problemas en la formación de profesores implica desarrollar herramientas teórico-metodológicas que los guíen en una tarea compleja con la que no están familiarizados (Ellerton, 2013; Mallart-Solaz, 2019; Mallart et al., 2018). En primer lugar, se trata de elaborar instrumentos para orientar el análisis, la selección, modificación y planteamiento de problemas para responder a determinados requerimientos matemáticos o didácticos (Mallart et al., 2018). En segundo lugar, supone planificar y llevar a la práctica acciones formativas en las que la creación de problemas aparezca como recurso para involucrar a los futuros docentes en actividades de aprendizaje auténticas que fomenten una comprensión sólida de los contenidos matemáticos y sus procesos de enseñanza y aprendizaje (Singer et al., 2013). En particular, se debe capacitar a los futuros profesores para modificar los problemas que desencadenan la actividad matemática, según las expectativas de aprendizaje y las dificultades encontradas por los estudiantes. Distintos estudios sugieren la importancia de diseñar e implementar intervenciones formativas dirigidas a promover la competencia en el análisis de tareas (Burgos et al., 2023c) ya que

> Sin un conocimiento profundo de las matemáticas, un profesor no puede llevar a cabo eficazmente las actividades que constituyen el núcleo de la enseñanza experta, como seleccionar tareas adecuadas para los alumnos, predecir las dificultades específicas de los estudiantes y representar los conceptos de forma que mejoren su comprensión matemática. (Osana et al., 2006, pp. 350-351).

1.1.3. Razonamiento proporcional y algebraico

En nuestro caso, centramos la atención en el razonamiento proporcional y su conexión con el algebraico. La proporcionalidad es un contenido con una presencia y papel fundamental en los currículos de matemáticas escolares, transversal a diferentes materias y con continuidad a lo largo de diferentes s etapas educativas (Balderas et al., 2014; Lundberg, 2011; Mochón, 2012; Wilhelmi, 2017). "El razonamiento proporcional juega un papel primordial en el desarrollo de las ideas matemáticas del estudiante" (Mochón, 2012, p. 134) y permite conectar ideas en diferentes áreas de las matemáticas (NCTM, 2000). El razonamiento proporcional supone la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y es el precursor del algebraico en la escuela secundaria (Lundberg y Kilhamn, 2018). Se trata de una forma de razonamiento matemático que involucra un sentido de covariación y de comparaciones múltiples en términos relativos, por lo que es considerado como una de las grandes ideas para lograr que los alumnos participen en las practicas centrales del pensamiento algebraico (Blanton et al., 2015). En este sentido, diferentes perspectivas teóricas y propuestas curriculares han venido recomendando la incorporación de contenidos algebraicos desde los primeros niveles educativos, con el objetivo de enriquecer la actividad matemática escolar y facilitar el acceso a las matemáticas en secundaria (Carraher y Schliemann, 2018; Kieran, 2022), lo que refuerza el interés en el razonamiento proporcional y sus oportunidades para trabajar el razonamiento algebraico.

Para Cuevas-Vallejo et al. (2023), la problemática en la enseñanza de la proporcionalidad se resume en: (1) la excesiva aritmetización, reduciendo el análisis a la aplicación de la regla de tres; (2) el escaso desarrollo de las habilidades proporcionales, limitando contextos sin explorar diversas representaciones de situaciones proporcionales; (3) desestimar el concepto de razón en el currículo, priorizando el concepto de fracción como representación de los números racionales; (4) la dificultad para distinguir relaciones lineales de relaciones no lineales, lo que lleva a la aplicación de la proporcionalidad directa en contextos donde no es aplicable.

En relación con el desarrollo del razonamiento proporcional en escolares y las dificultades que éstos se encuentran al afrontar situaciones de proporcionalidad, diversas investigaciones (Fernández y Llinares, 2011, 2012; Silvestre y Ponte, 2011; Tournaire y Pulos, 1985; entre otras) muestran que el mayor o menor éxito en las tareas de proporcionalidad depende de factores como: la relación entre los números implicados, el uso de razones enteras y no enteras, las unidades de las magnitudes involucradas en la situación, el formato en que se presenta la tarea, la familiaridad del contenido, entre otros.

Para afrontar las dificultades que se encuentran en el desarrollo del razonamiento proporcional, es importante hacer explícita la relación multiplicativa en situaciones proporcionales, permitir que distingan comparaciones multiplicativas de las aditivas e involucrar tanto razones internas (relaciones entre diferentes valores de la misma magnitud) como externas (entre valores de magnitudes diferentes) en las situaciones propuestas (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007; Ruiz y Valdemoros, 2004). Desarrollar el significado proto-algebraico y algebraico de la proporcionalidad sería un factor positivo para el progreso del aprendizaje matemático de los estudiantes (Burgos y Godino, 2020a).

El desarrollo del razonamiento proporcional y algebraico en los estudiantes precisa de una formación inicial específica de los futuros docentes, quienes deben tener un conocimiento de la proporcionalidad y de álgebra y lo que implica su enseñanza desde los niveles de primaria para llegar a movilizar este conocimiento más tarde en su práctica (Branco y Ponte, 2012; Pincheira y Alsina, 2021).

El conocimiento insuficiente del contenido matemático limita la capacidad de los profesores para crear problemas pertinentes, pero, por otro, dicho conocimiento no es suficiente para que formulen problemas que respondan a determinados requerimientos matemáticos o didácticos (Burgos y Godino, 2021; Rivas et al., 2012). Indispensablemente, el profesor de matemáticas requiere conocer las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas que contempla el currículo y ser competente para implementarlas en el desempeño de su labor docente. De igual forma, el profesor debe tener un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje, particularmente en la creación de problemas, y de los factores de tipo psicológico, sociológico y pedagógico, entre otros, que condicionan dichos procesos (Godino et al., 2016; Godino, Giacomone et al., 2017; Schneider et al., 2019). Este conocimiento especializado debe permitir al profesor "mirar profesionalmente" el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que supone, en particular, identificar e interpretar la comprensión de los estudiantes cuando resuelven (y planteen) problemas y usar esta información para tomar decisiones de acción pertinentes (Buforn et al., 2020; Ivars et al., 2018), en particular para modificar los problemas que motivaron la actividad matemática con la intención de garantizar el progreso en su aprendizaje.

A pesar de ser un tópico de gran interés en estudios durante las últimas décadas, diversas investigaciones centradas en analizar el conocimiento matemático necesario para la enseñanza de la proporcionalidad muestran que tanto los profesores en formación inicial como en ejercicio presentan dificultades para enseñar conceptos relacionados con la proporcionalidad (Balderas et al., 2014; Ben-Chaim et al., 2012; Buforn y Fernández, 2014; Buforn et al., 2018; Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2020b, 2022a; Hilton y Hilton, 2019; Izsák y Jacobson, 2017; Lo, 2004; Nagar et al., 2016; Obando et al, 2014; Riley, 2010; Rivas et al., 2012; Weiland et al., 2020; entre otras), así como para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos cuando resuelven problemas de proporcionalidad (Buforn et al., 2020; Burgos y Godino, 2022b; Fernández et al., 2012, 2013).

En particular, los profesores encuentran limitaciones para comprender los significados de razón y proporción (Buforn et al., 2018) y para interpretar adecuadamente las razones en situaciones de comparación (Livy y Vale, 2011). También tienen dificultades diferenciar situaciones proporcionales de otras que no lo son (Fernández et al., 2012; Izsák y Jacobson, 2017; Weiland et al., 2020), en particular, situaciones aditivas de multiplicativas (Hilton y Hilton, 2019).

Los trabajos de Buforn et al. (2020), Fernández et al. (2012; 2013) y Son (2013), entre otros, analizan las dificultades de futuros maestros para describir e interpretar las respuestas de estudiantes de educación primaria cuando resuelven problemas de proporcionalidad. Los resultados de Son (2013) muestran que, a pesar de su conocimiento de la razón y proporción, los futuros maestros se centran en aspectos procedimentales más que conceptuales al interpretar el error de una alumna que utiliza una estrategia aditiva en un problema de semejanza de rectángulos. Fernández et al. (2012; 2013) analizan las descripciones que hacen futuros maestros sobre respuestas de alumnos de primaria a problemas proporcionales y no proporcionales. Según los autores, discriminar entre ambas situaciones es un elemento clave para identificar evidencias de diferentes niveles del razonamiento proporcional de los estudiantes. Sin embargo, los futuros maestros tienen dificultades para diferenciar las situaciones proporcionales de las aditivas, e incluso cuando reconocer la diferencia, les resulta complejo justificar por qué las respuestas de los alumnos son o no correctas considerando los elementos matemáticos implicados en las situaciones (Fernández et al., 2013). Finalmente, Buforn et al. (2020) analizan cómo reconocen los profesores en formación el razonamiento de los estudiantes en un problema de comparación de razones. Observan que identificar elementos matemáticos claves en el problema permite que los futuros profesores lo utilicen para describir el razonamiento de los alumnos, si bien hay otros factores que afectan al reconocimiento de las características del razonamiento de los alumnos.

A pesar del consenso sobre la necesidad de desarrollar el razonamiento algebraico temprano, existe una notable desconexión de la investigación sobre el aprendizaje y la de la enseñanza del álgebra (Kieran, 2007):

> Se ha propuesto que la investigación debe ir más allá de documentar lo que piensan los estudiantes y cómo interpretan diversos objetos y procesos para incluir más información sobre las ventajas y desventajas de los diferentes enfoques de enseñanza, los contextos en los que se utilizaron, y la naturaleza de los estudiantes con quienes se probaron los enfoques. Esto sugiere una conexión más estrecha entre el estudio del aprendizaje del álgebra y el estudio de la enseñanza del álgebra. (p. 749)

Dado que las competencias docentes están estrechamente relacionadas con el desempeño de los estudiantes, las limitaciones que enfrentan los profesores sobre el razonamiento algebraico pueden afectar significativamente la calidad de la enseñanza y aprendizaje de sus estudiantes (Aké, 2021). “Cuando los estudiantes pasan de un enfoque aritmético para la resolución de problemas a un enfoque algebraico, los profesores también deben cambiar sus prácticas y sus puntos de vista sobre el alumno” (Nathan y Koedinger, 2000, p. 168). Sin embargo, el razonamiento algebraico de los estudiantes suele ser distinto a las opiniones de los profesores sobre su desarrollo (Nathan y Koedinger, 2000) y sus estrategias de enseñanza no siempre varían, quizá porque no poseen dominio del álgebra con sus variados constructos relacionados (Borko et al., 2005).

En este sentido, los resultados de investigaciones como Ferreira et al. (2022), Hohensee (2017), Stylianou et al. (2019) o Zapatera y Quevedo (2021) entre otros, muestran que los maestros de primaria suelen recibir una limitada formación en el ámbito del álgebra temprana y que los conocimientos algebraicos de maestros en formación o en ejercicios son insuficientes. Castro y Godino (2014) analizan cómo interpretan el razonamiento algebraico elemental maestros en formación cuando deben proponer tareas algebraicas elementales a alumnos de primaria. Observan que el contexto de las tareas se limita esencialmente a números y operaciones (en menor medida a geometría) y que cuando los maestros en formación proponen un problema verbal, lo consideran algebraico si puede resolverse mediante una ecuación, obviando el papel de la generalización o el pensamiento relacional en el trabajo algebraico.

Esto sugiere la necesidad de analizar y reestructurar los programas de formación de profesores para promover y desarrollar el razonamiento algebraico, así como distintas dimensiones que requieren los profesores para enseñar álgebra. En particular, para Aké (2021), es necesario que el docente se forme para algebrizar su propia actividad matemática. Por otro lado, para Ferreira et al., (2022) la identificación de evidencias del carácter algebraico en las prácticas matemáticas de alumnos, el reconocimiento de la generalización y la propuesta de acciones para fomentar la generalización contribuyen a la comprensión del significado del razonamiento algebraico y cómo fomentarlo en los estudiantes de primaria.

1.2. Antecedentes

La creación de problemas en Educación Matemática, en línea con la teoría de la actividad (Leont'ev, 1978), "establece conexiones entre los objetivos, las acciones, las condiciones y las herramientas en cualquier actividad humana" (Cai y Leikin, 2020, p. 287). Los autores sugieren que la literatura en dicho ámbito puede categorizarse según cómo se ve la invención de problemas.

De acuerdo con Cai y Leikin (2020, pp. 288-290), la investigación en Educación Matemática sobre la creación de problemas se organiza en cuatro categorías:

(a) Investigación sobre la creación de problemas como una herramienta para la enseñanza de las matemáticas.

(b) Investigación sobre la creación de problemas como un objetivo de la enseñanza de las matemáticas.

(c) Investigación que utiliza la creación de problemas como una herramienta para investigar otros fenómenos de interés.

(d) Investigación que estudia la creación de problemas como objetivo de investigación.

La creación de problemas como herramienta para la enseñanza de las matemáticas considera esta actividad como medio por el que los profesores pueden ayudar a sus alumnos a aprender matemáticas. La investigación en este sentido estudia cómo el aprendizaje de las matemáticas por parte de los alumnos (medido en términos de aspectos cognitivos y no cognitivos) puede mejorar al involucrarlos en actividades de invención de problemas y desarrollar competencias en los profesores (Cai y Hwang, 2022; Cai y Leikin, 2020; Chen y Cai, 2020; Koichu, 2020; Silber y Cai, 2021; Xu et al., 2020).

La invención de problemas como objetivo de la enseñanza de las matemáticas se centra en cómo se desarrolla la capacidad de crear buenos problemas. Esto incluye el estudio de la creación de nuevos problemas como parte de otros tipos de actividades matemáticas como la resolución de problemas, la demostración y la investigación (Guo et al., 2021; Leikin y Elgrably, 2020; Ponte y Henriques, 2013).

Además de estudiar el planteamiento de problemas como vehículo u objetivo de la instrucción, los investigadores han usado la formulación de problemas como herramienta de investigación en estudios que se centran en otros aspectos del aprendizaje, el pensamiento (Erdogan, 2020), el razonamiento y la creatividad de los estudiantes (Cai y Leikin, 2020; Elgrably y Leikin, 2021; Leikin y Elgrably, 2020; Singer y Voica, 2015) o de los efectos de su inclusión en los planes de estudios (Cai y Leikin, 2020; Cai et al., 2013).

La creación de problemas como objeto propio de investigación se centra en la comprensión de la naturaleza de la creación de problemas en sí misma, incluyendo el análisis y la evaluación de la tipología, variedad y calidad de los problemas planteados (Cai y Leikin, 2020; Ellerton, 2013; Guo et al., 2021), así como las competencias, estrategias y otros factores que permiten la formulación eficaz de problemas (Leikin y Elgrably, 2020).

1.2.1. Enfoques y propuestas de tareas de creación de problemas

Existen diversas clasificaciones para los problemas matemáticos, según sus componentes, estructura, contexto y los procesos implicados en su resolución. Por ejemplo, Kiliç (2017) considera que los problemas matemáticos se pueden clasificar en dos tipos: *problemas narrativos o verbales* que se pueden resolver de forma inmediata con una o más operaciones y *problemas de proceso* que exigen un pensamiento más flexible y mejores habilidades de organización. Cankoy (2003) clasifica los problemas como *ecuaciones simbólicas, problemas en forma de historias y ecuaciones con palabras*. Serin (2019) distingue entre *problemas de la vida real* (basados en situaciones cotidianas que no son resolubles inmediatamente con operaciones aritméticas) y *problemas de rutina* (su solución es similar a la de problemas previos o que son resolubles aplicando una fórmula aprendida u operaciones aritméticas correctamente, no proporcionan contextos realistas). Serin (2019), Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) también categorizan los problemas según los procesos a evaluar en la solución. Estos responden a los dominios cognitivos establecidos en el marco de Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) (Lindquist et al., 2019): si un problema creado implica la realización de operaciones simples, entonces se considera un problema de *conocimiento*; si se debe establecer relaciones entre los pasos, utilizar en conjunto la comprensión conceptual y habilidades operativas, es de *aplicación*; si la resolución involucra un pensamiento sistemático superior, el uso de situaciones desconocidas, contextos complejos o problemas de varas etapas, se considera de *razonamiento*. De acuerdo con Lindquist et al. (2019) un problema de conocimiento implica determinados procedimientos, como recordar, reconocer, clasificar u ordenar, calcular, recuperar (o extraer información, por ejemplo, de tablas) y medir; un problema de aplicación requiere determinar, representar o modelar y poner en práctica; en los problemas de razonamiento se analiza, se integran o sintetizan conocimientos, se puede evaluar estrategias y soluciones, sacar conclusiones, generalizar y justificar.

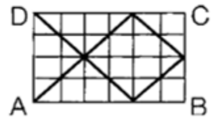
Estas categorías se pueden determinar una vez creados los problemas. Sin embargo, también se ha diferenciado la forma en la que se diseñan. Las distintas denominaciones a la actividad de crear problemas contemplan tanto la formulación de nuevas situaciones como la reformulación de problemas dados (English, 1998; Silver, 1994; Silver y Cai, 1996). Por ejemplo: *generación, formulación* o *reformulación* de problemas (Kilpatrick, 1987; Silver, 1994), *planteamiento* de problemas (Brown y Walter, 1990), *invención* de problemas (Castro, 2011), *creación* de problemas (Malaspina, 2013). En nuestro caso, consideramos estas denominaciones como sinónimos, pues todas se refieren al diseño de nuevos problemas matemáticos.

Durante la creación de problemas los estudiantes construyen interpretaciones personales de situaciones concretas a partir de su propia experiencia matemática, y las formulan en términos de problemas matemáticos significativos (Ayllón et al., 2011; Bonotto, 2013; Espinoza et al., 2016; Koichu y Kontorovich, 2013; Stoyanova y Ellerton, 1996). El carácter “significativo” de un problema viene dado por cualidades como simplicidad, brevedad, claridad, elegancia, utilidad, profundidad y complejidad matemática, ingenio, exigencia cognitiva, novedad y sorpresa, que deben ser reconocidas como tales por su inventor o su resolutor (Koichu y Kontorovich, 2013). De acuerdo con Bonotto (2013):

> La creación de problemas, por lo tanto, se convierte en una oportunidad para la interpretación y el análisis crítico de la realidad, ya que: (1) los estudiantes tienen que discernir los datos significativos de los irrelevantes; (2) deben descubrir las relaciones entre los datos; (3) deben decidir si la información que poseen es suficiente para resolver el problema; y (4) tienen que investigar si los datos implicados son numérica y/o contextualmente coherentes. (p. 40)

Para Silver (1994) el planteamiento de problemas es un componente importante de la resolución de problemas, lo que le lleva a asumir una clasificación de la creación de problemas en términos del momento en el proceso de resolución: antes (pre-solución), durante (dentro de la solución) y después (post-solución) de la resolución de problemas. El objetivo de la creación de problemas antes de su resolución no es la solución del problema, sino el planteamiento de un problema matemático a partir de una situación o experiencia dada previamente al estudiante. En este caso, los problemas se generan a partir de un estímulo concreto, como una historia, una imagen, una representación, entre otros. Cuando se crean problemas dentro del proceso de resolución, estos se reformulan, por ejemplo, cambiando los objetivos y condiciones para facilitar su comprensión y resolución. En la creación después de la resolución, se generan nuevos problemas relacionados una vez se han analizado propiedades o características de la situación inicial, modificando las condiciones, sus objetivos o preguntas. En esta última categoría, las experiencias del contexto de resolución de problemas se aplican a nuevas situaciones (Christou et al., 2005). Posteriormente, Silver et al. (1996) definieron cuatro estrategias para crear problemas, contextualizadas a partir de la siguiente situación:

Imagina mesas de billar como las que se muestran a continuación:



Supongamos que se lanza una bola en un ángulo de 45° desde la esquina inferior izquierda (A) de la mesa. Cuando la pelota golpea un lado de la mesa, rebota en un ángulo de 45°. La bola viaja sobre una mesa de 6x4 y termina en la tronera D, después de 3 golpes en los costados. Piensa en la situación de mesas de otros tamaños, considera tantos ejemplos como necesites e intenta predecir el destino final de la pelota. Es decir, ¿cuándo caerá la bola en la tronera A? ¿Cuándo caerá en la tronera B? ¿En la tronera C? ¿En la tronera D?

Figura 1.1. *Situación extraída de Silver et al. (1996, p. 297).*

Consideran (Silver et al., 1996):

(a) *Manipulación de objetivos*. Se manipula el objetivo de un problema dado y se mantienen las condiciones de ese problema. Por ejemplo, buscar una relación entre el tamaño de la mesa y el número de aciertos o el destino final.

(b) *Manipulación de restricciones*.

   i. *Condiciones iniciales*. Cambiar el ángulo de 45°, cambiar el punto de partida de la bola.

   ii. *Suposición implícita*. Introducir un efecto a la pelota, cuestionar la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión.

(c) *Simetría*. Intercambiar las condiciones dadas y los objetivos simétricamente. Por ejemplo, pasar de "Teniendo en cuenta el número de aciertos y la posición final, ¿puede determinar las dimensiones de la mesa?" a "Dadas las dimensiones de la mesa, ¿puedes determinar el número de aciertos y la bolsa final?".

(d) *Encadenamiento*. Resolver problemas anteriores antes de crear nuevos, las respuestas de un problema son necesarias para generar las respuestas del siguiente. Por ejemplo: ¿Dónde cae la bola en una mesa de 2x4? ¿Dónde cae en una mesa de 3x6? ¿Dónde cae en una mesa de 4x8? ¿Dónde cae en una mesa con el doble de largo que de ancho?

Stoyanova y Ellerton (1996) asumen que los procesos de creación de problemas pueden tener lugar bajo tres categorías: *situación libre*, *semiestructurada* o *estructurada*. En una *situación libre*, los alumnos crean problemas sin ningún tipo de restricción, basándose en sus experiencias dentro y fuera de la escuela (Stoyanova, 1998). Por ejemplo, "crear un problema difícil", "crear un problema de dinero" o “hay 10 chicas y 10 chicos de pie en una fila. Inventa tantos problemas como puedas que utilicen la información de alguna manera” (Van Harper y Presmeg, 2013).

En la *categoría semiestructurada*, se da a los alumnos una situación abierta y se les invita a explorar la estructura de esa situación y a completarla aplicando conocimientos, habilidades y relaciones derivadas de sus experiencias matemáticas anteriores. Las representaciones visuales en las que se presenta una imagen, un gráfico o una tabla, las historias verbales abiertas, entre otras, se utilizan con frecuencia en los estudios de planteamiento de problemas semiestructurados (English, 1998; Silver y Cai, 2005). Así dentro de la categoría de creación semiestructurada es posible considerar subcategorías según cuál sea la situación de partida (Akay y Boz, 2010): situación semiestructurada matemática, abierta, de modelización y de datos desconocidos. En la *situación semiestructurada matemática* se requiere plantear un problema adecuado a la situación matemática (por ejemplo, los alumnos deben crear un problema relacionado con una gráfica en la que se observa la región delimitada por la representación gráfica de dos funciones). En una *situación semiestructurada abierta* no hay restricciones sobre los componentes matemáticos involucrados en un escenario de la vida real y el estudiante puede plantear los problemas según la estructura y condiciones que prefiera (por ejemplo, plantear un problema integral para calcular el volumen de una figura sólida que no es superficie de revolución). Una *situación semiestructurada de modelización* lleva a los alumnos a concretar y prever situaciones de la vida real que pueden resolverse por medio de las matemáticas (por ejemplo, plantear un problema sobre el diseño y cálculo de coste de un anillo). Finalmente, ante una *situación semiestructurada de datos desconocidos*, el problema se crea añadiendo los datos que faltan a una situación en la que algunas estructuras entran en conflicto.

En una *situación estructurada*, el objetivo se puede determinar por todos los elementos y relaciones dadas. El problema se elabora en base a uno previo, reformulando la situación dada o cambiando sus condiciones o preguntas (Van Harpen y Presmeg, 2013). En este proceso, los alumnos establecen problemas teniendo en cuenta estrategias y situaciones que pueden venir limitadas por sus profesores (English y Watson, 2015). Autores como Baumanns y Rott (2021a) encontraron dificultades para distinguir las situaciones libres y semiestructuradas, lo que los llevó a diferenciar entre *situaciones no estructuradas* y *estructuradas*, en función del grado de información dada (Baumanns y Root, 2021a, 2021b, 2022). Las primeras forman un espectro de situaciones sin un problema inicial (problema base), en las que la información va desde casi ninguna ("crea un problema para una olimpiada matemática") hasta situaciones abiertas ricas en información donde es necesario explorar la estructura utilizando conocimientos matemáticos. En las situaciones estructuradas, se requiere plantear otros problemas basados en un problema específico, por ejemplo, variando sus condiciones.

Para Milinković (2015) un problema se describe en términos de sus tres componentes: el contexto (abstracto o realista), los elementos dados o desconocidos, y las relaciones entre los elementos. Así considera dos tipos de transformaciones de un problema: (a) la variación de alguno (uno o más) de sus componentes mientras que los demás permanecen iguales; (b) la modificación de la representación (pensar el problema en diferentes paradigmas). Señala que la variación puede crear problemas irresolubles y que esto es consecuencia del conocimiento o de la falta de conocimiento del contenido del profesor.

Christou et al. (2005) consideran que las categorías de Silver (1995), Stoyanova (1998) o sus derivadas, permiten clasificar el proceso de planteamiento de problemas en términos de las situaciones y experiencias que ofrecen a los alumnos la oportunidad de involucrarse en actividades matemáticas. Se proponen desarrollar un nuevo modelo para la creación de problemas que, basándose en las categorizaciones previas, ponga el foco de atención en los procesos de pensamiento de los estudiantes en el planteamiento de problemas. Así Christou et al. (2005) clasificaron la creación de problemas por medio de cuatro procesos diferentes: *edición*, *selección*, *comprensión* y *traducción* de información cuantitativa. Los procesos de *edición* se refieren a tareas que requieren que los alumnos planteen un problema sin ninguna restricción a partir de la información o las indicaciones proporcionadas basándose en historias o imágenes que se les presentan. El proceso de *selección* de información cuantitativa se asocia a tareas que persiguen que los alumnos planteen problemas o preguntas apropiadas para respuestas específicas y dadas previamente. La respuesta conocida funciona como restricción, de manera que los alumnos deben centrarse en el contexto estructural y en las relaciones entre la información proporcionada, por lo que asumen que la selección es más difícil que la edición. En los procesos de *comprensión* y organización de la información cuantitativa, los alumnos realizan actividades de planteamiento de problemas a partir de ecuaciones o cálculos matemáticos dados. La comprensión requiere "entender el significado de las operaciones y los estudiantes suelen seguir un proceso algorítmico centrado en la estructura operativa y no la estructura semántica de los problemas" (Christou et al., 2005, p. 2). Finalmente, la *traducción* de la información cuantitativa se produce cuando los alumnos plantean problemas o preguntas adecuadas a partir de gráficos, diagramas o tablas. Para los autores, es más exigente que la comprensión, ya que requiere la interpretación de las diferentes representaciones de las relaciones matemáticas.

Kiliç (2013a) presenta un modelo que combina el marco de Stoyanova y Ellerton (1996) sobre situaciones para la creación de problemas (libres, semiestructuradas y estructuradas) y los procesos de Christou et al. (2005) involucrados en esta tarea (edición, selección, comprensión y traducción). Específicamente, para Kiliç (2013a), la creación de problemas puede darse de forma *libre* (plantear un problema difícil y un tema determinado); se puede diseñar un problema de forma *semiestructurada* mediante el proceso de edición (variación de información cuantitativa) y traducción (a partir de una situación dada mediante gráficos, figuras, etc.) o bien, es posible crear un problema de forma *estructurada* mediante la comprensión (creación de problemas mediante cálculos matemáticos, comprender y seguir un proceso algorítmico) y selección (establecer una respuesta dada).

El modelo de Cruz (2006), contextualizado en un programa de desarrollo profesional, persigue orientar a los profesores en las etapas de la "macroestructura del proceso de elaboración de nuevos problemas" (p. 83) en situaciones de enseñanza y aprendizaje. Considera que elaboración, formulación y planteamiento son actividades diferenciadas en un mega-proceso al que llama "metaproblema":

> La elaboración de problemas se refiere a una actividad cognitiva compleja en la que actúa el profesor (a un nivel macro); la formulación de problemas constituye una subestructura de dicha actividad que a su vez se compone de varias acciones diferentes (a nivel meso), mientras que el enunciado del problema está relacionado con una operación final de la formulación (a un nivel micro). (Cruz, 2006, p. 83)

Para Cruz (2006), el proceso de formulación de un problema comienza con la *selección* del objeto matemático, que puede venir condicionada por necesidades y finalidades de tipo didáctico. Una vez seleccionado, sigue una *clasificación* (análisis) de los componentes del objeto matemático, en la que se obtiene información y se organiza de acuerdo con diversos criterios. De este análisis puede resultar la *transformación* del objeto en forma de una generalización de este o mediante el uso de analogías. Tras haber transformado o no el objeto, la acción subsiguiente comprende la *asociación* de los elementos obtenidos durante la clasificación que se abstraen para relacionarse con conceptos matemáticos, por medio de sus propiedades o relaciones. La *búsqueda de dependencia* entre los conceptos seleccionados permite tomar las decisiones necesarias para *plantear las preguntas* del problema.

Contreras (2007) desarrolla un modelo para ayudar a futuros profesores de matemáticas de secundaria a generar problemas matemáticos de manera sistemática modificando los atributos de un problema base. Aplica la estrategia de planteamiento de problemas “¿Qué pasaría si?” de Brown y Walter (1990) en el contexto de problemas geométricos. Considera que algunos problemas se pueden modificar para generar nuevos problemas mediante la aplicación de los siguientes procesos matemáticos fundamentales: *demostración*, *inversión*, *particularización*, *generalización* y *extensión* (Figura 1.2.)

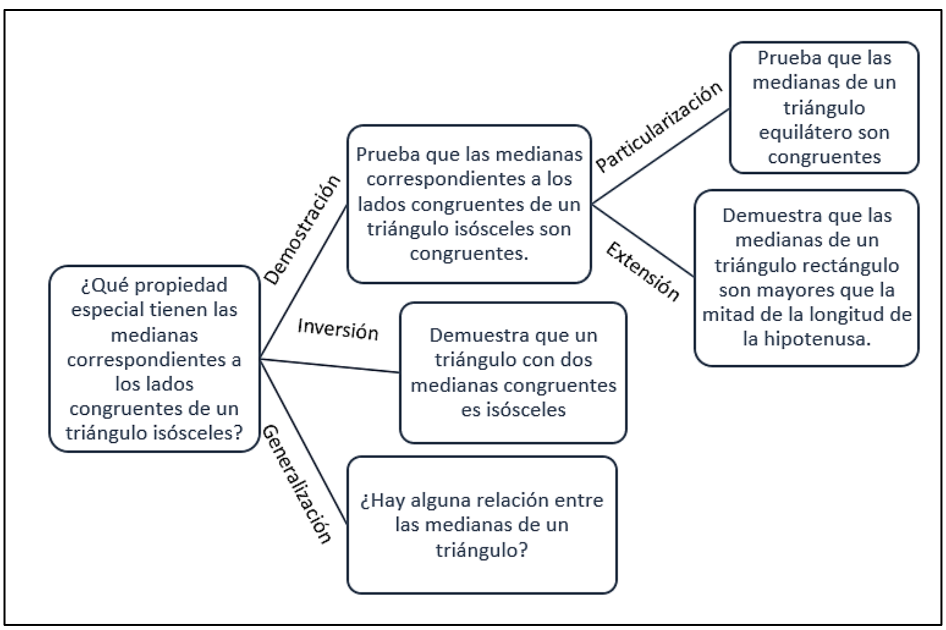


Figura 1.2. *Procesos y productos en la creación de problemas*. Elaboración propia en base a los ejemplos propuestos por Contreras (2007).

Al aplicar estos procesos, se generan los siguientes tipos de problemas: *problemas de demostración* (en el que se pide la prueba de una determinada propiedad incluida entre los atributos del problema base), *problemas inversos* (se sustituye un atributo conocido del problema base por uno desconocido y viceversa, añadiéndose condiciones o restricciones adicionales si fuera necesario), *problemas particulares* (obtenidos sustituyendo un objeto matemático del problema base por un ejemplo o caso particular del objeto matemático original), *problemas generales* (obtenidos sustituyendo un objeto matemático del problema base por otro para el que el original es un ejemplo) y *problemas extendidos* (conseguidos al sustituir un objeto matemático del problema base por otro similar o análogo, sin que sea un caso particular del previo). En todo caso, la finalidad desde el punto de vista didáctico por generar estos nuevos problemas es lograr una comprensión más profunda de las propiedades de los objetos matemáticos implicados (Contreras, 2007). Como vemos, el modelo de Contreras (2007) diferencia claramente el proceso mediante el cual modifica el problema original del producto (problema resultante) en la creación de problemas.

Pelczer y Gamboa (2009) desarrollan un modelo descriptivo para el planteamiento de problemas en el que distinguen cinco acciones: *configuración* (reflexión sobre el contexto de la situación dada y los conocimientos necesarios para comprenderla), *transformación* (análisis de las condiciones del problema e identificación y valoración de las posibles modificaciones para luego ejecutarlas), *formulación* (exploración de las formulaciones de los problemas y las posibles alteraciones), *evaluación* (para ver si satisface las condiciones iniciales o si necesita modificaciones) *y valoración final* (reflexión sobre todo el proceso).

Por otro lado, Chapman (2012) analiza cómo conciben futuros maestros la creación de problemas, encontrando las siguientes perspectivas: (1) *paradigmática* (consiste en una interpretación universal, cuya solución es particular y no depende del solucionador de problemas), (2) *objetivista* (similar a la paradigmática, pero se destaca como específica, involucra un hecho matemático), (3) *fenomenológica* (proporciona una experiencia vivida, permite una interacción y solución personalizada), (4) *humanista* (similar a la fenomenológica, pero se destaca como específica; se crean situaciones directamente relacionadas con las experiencias de los estudiantes), (5) *utilitaria* (enfatiza la creación de problemas en función de sus contribuciones al aprendizaje de los estudiantes, matemática, cognitiva y socialmente).

Autores como Grundmeier (2015), Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) o Lee et al. (2018) distinguen entre la generación de problemas (creación de problemas a partir de información o situación dada) y la reformulación de problemas (creación de problemas relacionados con un problema dado), afirmando que tienen propósitos educativos diferentes. Para Lee et al. (2018), a través de la generación de problemas los estudiantes desarrollan su creatividad, pues necesitan utilizar sus experiencias personales para conectar las matemáticas con situaciones cotidianas al crear un problema por sí mismos. Por otro lado, la reformulación de problemas orienta el desarrollo de habilidades reflexivas y amplia su conocimiento sobre los conceptos aprendidos. Para Bayazit y Kirnap-Donmez (2017), generar un problema consiste en crear una nueva pregunta basada en una situación o experiencia, mientras que la reformulación es crear una nueva pregunta haciendo cambios en un problema dado. Grundmeier (2015) considera las siguientes técnicas en el *proceso de reformulación*: a) intercambiar lo dado y lo requerido (el mismo contexto que el problema original con la información dada y solicitada intercambiadas), b) cambiar el contexto (misma estructura, pero con el contexto cambiado), c) cambiar lo dado (mismo contexto y estructura del problema, pero con la información dada cambiada), d) cambiar lo requerido (mismo contexto y estructura del problema, pero se cambia lo que la pregunta pide), e) extender el problema dado a situaciones más generales, f) añadir información (mismo contexto y estructura del problema con información añadida) y g) modificar la redacción del problema. En el *proceso de generación* se puede incluir información adicional, pero debe estar relacionada con el conjunto de información original (Grundmeier, 2015). Para este autor, añadir información, cambiar lo dado, cambiar lo requerido o modificar la redacción del problema son "técnicas superficiales", pues no requieren un cambio en su estructura, como sí ocurre cuando se crea un problema intercambiando lo dado (información) y lo solicitado (requerimiento), modificando el contexto o bien por extensión de este. La reformulación de la estructura supone más creatividad y una mayor comprensión del contenido matemático por parte del creador del problema.

Koichu y Kontorovich (2013) también desarrollaron un modelo descriptivo en el que, basándose en dos actividades de futuros profesores de matemáticas denominadas "historias de éxito", identificaron cuatro fases de planteamiento de problemas. En la primera fase, *calentamiento,* se asocia la tarea dada con determinados tipos de problemas prototípicos o familiares y se discuten ideas espontáneas. En la siguiente fase, de *búsqueda de un fenómeno matemático interesante*, los problemas iniciales sirven como material para ser considerado críticamente, en base a aspectos matemáticos que fundamente el siguiente problema de interés. A continuación, los creadores de problemas *ocultan el proceso de planteamiento de problemas* en la formulación de estos, con la intención de que los procesos por los que pasan al plantear y resolver los problemas intermedios no resulten transparentes a los potenciales resolutores. En la fase final de *revisión,* se evalúa el potencial y pertinencia de los problemas planteados y se ponen a prueba con los compañeros.

Para Baumanns y Rott (2022) la investigación sobre el planteamiento de problemas no debe limitarse a su estudio en términos de procesos de pensamiento (Christou et al., 2005) así como tampoco es suficiente con considerarlo como un subproceso de un proceso superior (Cai y Cifarelli, 2005; Ponte y Henriques, 2013). Plantean que la elaboración de un modelo de fases (acciones) general y descriptivo a partir de los numerosos procesos implicados es esencial en el estudio procesal de la creación de problemas. Así, consideran que la creación de problemas para una situación estructurada, adopta la siguiente secuencia: 1) *análisis* de la situación, en el que se recopilan condiciones simples o múltiples de la tarea inicial, identificando cuáles y en qué medida son adecuadas para crear una nueva tarea por variación o generación; 2) *variación* (se cambian u omiten algunas de las condiciones individuales o múltiples de la tarea inicial y se redacta o formula la nueva tarea); 3) *generación* de la nueva tarea elaborando una o varias condiciones nuevas, que después se redacta y formula; 4) *solución* del problema planteado; 5) *evaluación*, en la que se valora el problema planteado según si es resoluble, está bien definido, es similar a la tarea inicial, es apropiado o interesante para un objetivo específico o grupo de estudiantes. A partir de esta evaluación se acepta o rechaza el problema creado. Según Baumanns y Rott (2022), dependiendo de la situación, la muestra o el diseño utilizado, pueden aparecer fases diferentes o adicionales. Afirman que este modelo se puede utilizar para caracterizar diferentes grados de calidad del proceso de creación de problemas, lo que consideran un tema reciente en la investigación sobre la creación de problemas.

Cai et al. (2022) plantean que la creación de problemas consta de dos partes: *las situaciones-problema* que proporcionan el contexto y los datos; l*as consignas* que indican lo que se debe hacer. Según los autores, las situaciones problema pueden estar basadas en contextos de la vida real y venir expresadas con palabras, imágenes, figuras, gráficos y tablas, o bien, contextos puramente matemáticos descritos por expresiones matemáticas, gráficos, tablas, patrones. Señalan que aún no existe una conexión clara entre las indicaciones para inventar problemas y los procesos cognitivos de los creadores de problemas.

Después de estas concepciones y propuestas de creación de problemas, surge de manera natural la cuestión ¿Cómo identificar a un experto en la creación de problemas? En este sentido, Zhang et al. (2022, p. 4) consideran cuatro criterios que permiten identificar a los creadores expertos de problemas:

1) *El número de problemas matemáticos planteados*. Cuantos más problemas matemáticos se planteen, más adecuadamente habrán explorado los creadores la situación problemática y mayor será su nivel anticipado de fluidez matemática.
2) *El número de problemas planteados que son resolubles.* Cuantos más problemas matemáticos resolubles se planteen, más elementos y relaciones adaptativas podrían haber seleccionado los creadores para formular los problemas o mejor sería su comprensión de las tareas de creación de problemas.
3) *La complejidad de los problemas planteados*. Cuanto mayor sea la suma de relaciones y elementos construidos en el problema, más complicado será el espacio del problema formulad.
4) *La claridad de los problemas planteados*. Cuanto mayor sea la claridad del problema, mejor será la capacidad de comunicación del creador en la creación del problema.

A pesar de que el nivel de conocimientos matemáticos influye sobre los expertos en la creación de problemas, no es suficiente para considerar a una persona como experto en estas tareas (Zhang et al., 2022). No existe un marco general aceptado que describa esta actividad, por lo que es necesario continuar con investigaciones para desarrollar la comprensión de los procesos y las estrategias fundamentales en la creación de problemas matemáticos (Cai et al., 2022).

1.2.2. Invención de problemas en la formación de profesores

La invención de problemas es una competencia que no se estimula con la misma magnitud que la resolución de problemas en la formación de profesores. Esta preferencia hacia la resolución sobre la invención genera, para los profesores en formación, que sea más desafiante crear un problema que resolver uno similar (Ellerton, 2013), lo que influye directamente en su capacidad para enseñar a crearlos. Su escasa experiencia los lleva a proponer enunciados mal formulados, descontextualizados, incompletos, sin solución (Koichu y Kontorovich, 2013; Salazar, 2017) o cognitivamente poco exigentes (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Isik et al., 2011). Se trata de una actividad inusual (Serin, 2019), ante la cual se sienten completamente indefensos (Tichá y Hošpesová, 2013). A continuación, se describen resultados de investigaciones realizadas con futuros docentes de primaria y secundaria en relación con la invención de problemas matemáticos.

Akay y Boz (2010) estudian el efecto de la creación de problemas en la actitud y autoeficacia de futuros maestros de primaria; para ello utilizan situaciones libres, semiestructuradas y estructuradas. Concluyen que la formación basada en la invención de problemas brinda mejores resultados y es más eficaz que la enseñanza tradicional.

Isik et al. (2011) analizan los problemas creados por futuros maestros a partir de situaciones representadas verbal y visualmente. Estos autores se basan en investigaciones previas (por ejemplo, Crespo y Sinclair, 2008; Mayer et al., 1992; Silver y Cai, 1996) para clasificar los enunciados considerados como problemas, según la presencia de proposiciones de *asignación*, de *relación* y de *condición* o *pregunta*. Según Mayer et al. (1992), una proposición de asignación asigna un único valor numérico a alguna variable, una proposición relacional da una única relación numérica entre dos variables, una proposición de pregunta pide un valor numérico de alguna variable. Isik et al. (2011) ilustran la clasificación de problemas empleada mediante la siguiente situación, utilizada también en las investigaciones de Crespo y Sinclair (2008) y Silver y Cai (996):

> Jerome, Eliot y Arturo conducen a casa desde la escuela [en un mismo auto]. Arturo conduce 80 millas más que Eliot. Eliot condujo el doble de millas que Jerome. Jerome condujo 50 millas. (Traducción propia de Isik et al., 2011, p. 41)

El problema lo consideran de asignación si el requerimiento es, por ejemplo, “¿Cuántas millas condujo Eliot?”, “¿Cuántas millas condujeron en total?”; si el requerimiento es “¿Cuántas millas más condujo Arturo que Jerome?”, “¿Quién condujo más?” el problema es relacional; es condicional si el enunciado presenta la siguiente proposición “Si Arturo condujo 80 millas más que Eliot, ¿cuántas millas condujo Arturo?”.

Además, Isik et al. (2011) consideran que un enunciado no es un problema si los datos en las representaciones visuales no se pueden asociar a situaciones de la vida real. Su trabajo muestra que los participantes diseñan con mayor frecuencia problemas de bajo nivel (de asignación) tanto en situaciones verbales como visuales. El bajo éxito en la invención de problemas relacionales y condicionales puede ser por la mayor complejidad lingüística que poseen y la exigencia de habilidades de pensamiento superior (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Isik et al., 2011; Mayer et al., 1992; Silver y Cai, 1996). Para los autores, este es un aspecto que se debe atender en la formación de profesores, pues los problemas de asignación no permiten evaluar con seguridad si los conceptos estudiados son comprendidos por los estudiantes (Isik et al., 2011). Además, se evidencia un menor éxito en la creación de problemas a partir de situaciones representadas visualmente. Los autores afirman que el uso de representaciones visuales en la creación de problemas, además de utilizarlas en la resolución, ayuda a adquirir estas habilidades.

Ellerton (2013) realiza un estudio con 154 docentes en formación, en el cual emplea tareas de creación de problemas, en el marco del curso: Álgebra para el profesor de secundaria. Encuentra que (a) para los futuros profesores, crear un problema es más desafiante que resolver uno similar, (b) esta actividad beneficia la comprensión de la estructura del problema, (c) los futuros profesores evidencian fuerte sentido de disfrute o disgusto en la creación de problemas, (d) existe una preferencia hacia la resolución sobre la invención de problemas. El autor concluye que los problemas creados por los futuros profesores muestran errores de redacción o de lógica en su planteamiento.

Kilic (2017) encuentra dificultades en futuros maestros al inventar problemas que se pueden resolver mediante la estrategia de “Find-a-pattern”. Señala, principalmente, que los problemas creados no podían resolverse por esta estrategia, que los participantes no pudieron producir ningún problema y que algunos enunciados buscaban la regla general de un patrón en lugar de resolverse encontrando un patrón.

Mallart et al. (2018) realizan un estudio de caso sobre las dificultades de profesores de matemáticas en formación para inventar problemas. Trabajan con una muestra de diez participantes. Estos debían inventar (y resolver) dos problemas relacionados con geometría de acuerdo con ciertos requerimientos didáctico-matemáticos y que estuvieran dirigidos a un nivel de primaria superior. Entre los resultados encontrados se menciona que los futuros docentes no siguen las instrucciones (ninguno cumplió con todos los requerimientos establecidos), la mayoría planteó problemas muy sencillos (para un nivel de primaria inferior), dos eran adecuados para secundaria y solo tres respondían al nivel solicitado. Además, los futuros docentes expresaron tener problemas para adaptar los problemas al nivel solicitado y al contexto cotidiano. También se presentó el caso de un problema inventado, con errores en su planteamiento, por un participante que él mismo no pudo resolver. Incluso afirmaron no contar con los conocimientos matemáticos necesarios para cumplir con dicha tarea. Estos autores señalan que los futuros profesores tienen dificultades para conectar datos, establecer enunciados bien formulados sin información redundante o faltante y problemas resolubles de diferentes formas, también para utilizar un contexto familiar e involucrar al estudiante en la solución.

El trabajo de Mallart-Solaz (2019) estudia las actitudes y creencias que poseen futuros maestros sobre la creación de problemas como recurso didáctico efectico para la enseñanza de la resolución de problemas. Los participantes respondieron dos cuestionarios, dentro de los cuales se les solicitó describir las características de un problema; crear y resolver dos problemas de geometría dirigido al último curso de primaria y finalmente realizar las variaciones necesarias para que respondieran a lo que según Mallart et al. (2016) es un buen problema. Sus producciones mostraron problemas sencillos, enunciados poco claros y descontextualizados, no permitían diferentes vías de solución enunciados y no eran próximos a la realidad del alumno. Además, señalaron una serie de aspectos que debía cumplir un problema, sin embargo, no fueron capaces de seguirlos en sus propias creaciones. La característica más importante de los problemas, según los futuros maestros, es que deben tener una dificultad acorde al conocimiento del alumno. Señalan que para diseñar un problema se debe considerar el grado de dificultad, utilizar un lenguaje y contexto familiar y tener objetivos claros. El autor concluye que los futuros docentes no han desarrollado la competencia de creación de problemas como recurso didáctico. En particular, desconocen las características más importantes de los problemas y no logran diferenciar entre los procesos de creación e invención de problemas. Al igual que en Ellerton (2013), los futuros maestros consideran que la invención de un problema es más compleja que solucionarlo.

Serin (2019) realiza un estudio de caso con futuros maestros de primaria para trabajar la creación de problemas a partir de situaciones semiestructuradas. Establece una tabla a partir de la cual los participantes debían crear y resolver un problema e indicar para cuál de los primeros niveles de la primaria estaba dirigido (niños de 6 a 10 años). Muestra que los futuros maestros tienen mayor preferencia sobre los problemas rutinarios (que solo requieren operaciones aritméticas en su solución) que los problemas asociados a situaciones de la vida real, que no se pueden resolver de inmediato con operaciones, sino que requieren el desarrollo de estrategias y el uso de experiencias de los estudiantes. Menos de la mitad de los participantes diseñaron enunciados aptos para el nivel al que lo dirigieron. De acuerdo con la categorización del TIMSS (nivel de conocimiento, de aplicación y de razonamiento), los problemas creados por los futuros maestros son frecuentemente de aplicación y son menos los de razonamiento. Para Serin (2019), en educación primaria, los profesores deben preferir problemas asociados a la cotidianidad; sin embargo, en su formación no desarrollan eficazmente la habilidad de relacionar la vida cotidiana con la creación y la resolución de problemas, por lo que formulan preguntas rutinarias sin utilizar su creatividad (Serin, 2019), generando enunciados que alejan a los estudiantes de usar sus experiencias del mundo real y su conocimiento intuitivo (Bonotto, 2001).

En relación con la creación de problemas en el contexto de la proporcionalidad, Tichá y Hošpesová (2013) utilizan la creación de problemas a partir de un requerimiento didáctico (sobre fracciones) para desarrollar competencias en futuros maestros de primaria. Los participantes debían crear y resolver tres problemas a partir del mismo requerimiento (los problemas debían tener las fracciones 1/2 y 1/4). Entre sus resultados, identifican deficiencias en la comprensión conceptual de fracción. Los futuros maestros utilizaron mayoritariamente el mismo contexto situacional del primer problema que crearon en los demás enunciados; para los autores, esto es consecuencia de la estructura de los libros de texto de matemáticas: un problema suele ir seguido de otros similares para practicar. También identificaron problemas en las que los enunciados daban lugar a distintas interpretaciones.

En su investigación sobre creación y resolución de problemas matemáticos de fracciones con futuros maestros de primaria, Xie y Masingila (2017) descubrieron diferentes dificultades cuando alternaron dichas actividades:

- Dificultad para formular preguntas y producir enunciados matemáticos claros.
- Dificultad para encajar las fracciones en una situación real.
- Falta de sentido para justificar las operaciones. Escasamente justificaron las operaciones de su problema planteado.
- Confusión operativa y malentendidos sobre el significado de la multiplicación.
- Dificultades para comprender el concepto de unidad (el concepto más importante al pensar en fracciones).
- Falta de comprensión conceptual de lo que es un problema matemático. Crearon enunciados que no eran problemas matemáticos. Estos autores consideran que el enunciado no es un problema si es solo una declaración o una pregunta que se pueda responder usando simplemente información memorizada. Por ejemplo, en una fracción "¿Qué representa el denominador y qué representa el numerador?".

Los autores señalan que algunas de esas dificultades son causa de la escasa experiencia que tienen los futuros maestros en la creación de problemas, mientras que otras se deben a errores conceptuales u operativos sobre fracciones.

Kiliç (2013a) realiza un estudio con futuros maestros de primaria, en el que combina los marcos de Stoyanova y Ellerton (1996) y Christou et al. (2005) para que los participantes diseñaran seis situaciones problema: dos de forma libre (un problema difícil y otro problema relacionado con fracciones); dos de forma semiestructurada, se les solicitó la creación de dos problemas mediante los procesos de edición y traducción basados en una imagen y una tabla; además, los participantes debían inventar dos problemas a partir de situaciones estructuradas (una ecuación y una historia dadas) mediante procesos de comprensión y selección. Con estos resultados (y la aplicación de una entrevista a los participantes). Kiliç (2013a) observa que los futuros maestros utilizaron algunas de las mismas estrategias en los tres tipos de situaciones de creación de problemas; por ejemplo, tener en cuenta los pasos que utilizarían los estudiantes en la resolución. Además, identificó que los participantes tenían dificultades en la creación de problemas, como proponer enunciados que no eran un problema, con información errónea o falta de datos.

Şengül y Katranci (2015a, 2015b) investigan cómo futuros maestros crean problemas sobre razón y proporción mediante los métodos libre, semiestructurado y estructurado. De manera general, los participantes proponen enunciados de tipo ejercicio, comprensibles y que admiten solución (Sengül y Katranci, 2015a) pero muestran su preocupación por no crear problemas adecuados al nivel de enseñanza media. Aparecen dificultades fundamentalmente en la creación de forma libre (Sengül y Katranci, 2015a) debido a la falta de experiencia o de formación sobre la invención de problemas, el conocimiento limitado de los contenidos (Sengül y Katranci, 2015a, 2015b), la dificultad para escribir el texto de los problemas y el desconocimiento de los niveles cognitivos de los estudiantes o el programa curricular (Sengül y Katranci, 2015b). Atendiendo a las carencias expresadas por los propios participantes, los autores recomiendan fomentar el estudio de la resolución y creación de problemas y desarrollar métodos y recursos específicos de formación sobre creación de problemas.

El trabajo de Kar (2016) muestra que los futuros profesores de secundaria tienen dificultades para crear problemas con contextos cotidianos que puedan ser representados por gráficos lineales dados y que el grado de éxito disminuye en cuanto aumenta la complejidad de los datos en los gráficos. Se identificaron cinco tipos de error: (a) falta de inclusión de la linealidad (el más común en los resultados); (b) falta de expresión del punto o puntos de partida de la línea o líneas; (c) historia incompatible; (d) falta de inclusión de una pregunta raíz; (e) error lógico (por ejemplo, las historias eran inconsistentes con los gráficos). Según el autor, estos errores señalan que la deficiencia más importante de los futuros profesores es la falta de conocimiento conceptual. “La traducción de expresiones matemáticas a enunciados verbales requiere grandes competencias lingüísticas. Así pues, la falta de competencias lingüísticas suficientes puede ser otra de las razones de los bajos niveles de rendimiento de los futuros profesores” (Kar, 2016, p. 652).

Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) estudian las habilidades de futuros maestros para crear problemas en situaciones semiestructuradas y libres que requieren un razonamiento proporcional, mediante la reformulación de un problema inicial. Los participantes tienen mayor éxito en las tareas de reformulación, en las que modifican los contextos de las tareas originales o los datos cuantitativos en ella. Los autores indican que los futuros maestros no comprueban sus problemas y no argumentan sobre sus propios pensamientos creativos. Al igual que en Grundmeier (2015) y Leung y Silver (1997), los futuros maestros tuvieron dificultades para crear problemas basadas en situaciones que deben involucrar relaciones cualitativas. De acuerdo con Bayazit y Kirnap-Donmez (2017):

> Los hallazgos indican que los principales factores que afectan el éxito en situaciones semiestructuradas de planteamiento de problemas son las experiencias educativas pasadas de los participantes, el nivel de relación entre el planteamiento de problemas y la vida real, y la estructura cuantitativa-cualitativa del planteamiento de problemas. (p. 151)

Dentro del ámbito del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2019), Burgos et al., (2018), Burgos y Godino (2021, 2022a) emplean la creación de problemas como recurso para analizar y desarrollar los conocimientos didáctico-matemáticos de futuros docentes (de primaria y secundaria) en proporcionalidad. Partiendo de la conexión entre razonamiento proporcional y algebraico, proponen a futuros docentes crear nuevos problemas a partir de uno dado (creación por variación) de manera que se modifique el nivel de razonamiento algebraico, es decir el grado de generalidad y formalización, involucrado en su solución. Los resultados muestran que dicha tarea es compleja para los futuros docentes, que en gran medida crean problemas demasiado alejados del original, no son significativos o no involucran el razonamiento proporcional. Aun teniendo en cuenta la dificultad intrínseca al requerimiento explícito (el nivel de razonamiento algebraico implicado) las limitaciones encontradas en la formulación de enunciados pertinentes por los futuros profesores, lleva a los autores a concluir que es necesaria una mayor formación específica en la creación de problemas (Burgos y Godino, 2022a).

En el contexto específico del álgebra escolar, Zapatera y Quevedo (2021) proponen a estudiantes para maestro crear tareas para desarrollar el razonamiento algebraico en los alumnos de primaria a partir de dos situaciones abiertas. Sin embargo, casi todos los participantes transformaron ambas situaciones abiertas, con múltiples posibilidades para promover y desarrollar el pensamiento algebraico, en problemas cerrados con una única solución, que en su mayoría resolvieron aritméticamente. Los autores concluyen que los conocimientos algebraicos de los participantes son insuficientes y recomiendan incluir en los programas de formación de profesores experiencias que les permitan diseñar tareas para detectar y promover el pensamiento algebraico en sus futuros alumnos. Asimismo, se les debería ofrecer instrumentos de análisis didáctico de estas situaciones y sus posibles prácticas asociadas, con el fin de que los futuros profesores puedan ampliar su propio razonamiento algebraico y conectarlo con los diferentes bloques de las matemáticas (Zapatera y Quevedo, 2021).

1.3. Problema de investigación

En esta sección se presentan las preguntas de investigación, hipótesis y objetivos que orientaron el desarrollo de este trabajo.

1.3.1. Preguntas de investigación

Las cuestiones a las cuales se pretende dar respuesta con esta investigación se centran en la problemática de la creación de problemas como medio para desarrollar el razonamiento proporcional y algebraico en la formación de docentes.

1. ¿Qué dificultades encuentran los futuros profesores de matemáticas en la creación de problemas que involucran el razonamiento proporcional, con una finalidad didáctica?
2. ¿Qué conocimientos y competencias didáctico-matemáticas sobre razonamiento proporcional se pueden evaluar y desarrollar por medio de la creación de problemas?
3. ¿Reconocen la actividad algebraica en los problemas creados o pueden modificarlos para desarrollar un tipo de actividad algebraica?

1.3.2. Hipótesis de investigación

El trabajo de investigación persigue aportar conocimientos fundamentados sobre las siguientes hipótesis:

Hipótesis 1. Los profesores en formación tienen dificultades para crear problemas pertinentes sobre proporcionalidad.

Hipótesis 2. Los profesores en formación encuentran conflictos para discriminar la actividad aritmética de la algebraica en la producción de sus problemas de proporcionalidad.

Hipótesis 3. Los profesores en formación tienen dificultades para crear problemas que fomenten el razonamiento algebraico.

Hipótesis 4. La creación de problemas sobre proporcionalidad permite reconocer deficiencias en el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación en relación con el razonamiento proporcional.

Hipótesis 5. La creación de problemas que requieren cierto nivel de algebrización permite reconocer deficiencias en el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación en relación con el razonamiento algebraico.

Hipótesis 6. Estas dificultades pueden disminuir con el diseño e implementación de experiencias formativas a fin de desarrollar conocimientos y competencias sobre la creación de problemas basados en el razonamiento proporcional y algebraico.

Aportar nuevos conocimientos fundamentados sobre estas hipótesis es un tema de interés en el campo de investigación sobre invención de problemas y sobre desarrollo del razonamiento proporcional y algebraico en la formación de profesores. Por un lado, para que los profesores puedan diseñar tareas de invención de problemas adecuadas para sus estudiantes y gestionar las dificultades en dicho contexto, también ellos deben estar capacitados para plantear problemas (Li et al., 2020; Singer et al., 2013). Los profesores precisan conocimiento didáctico-matemático adecuado para crear problemas que respondan a una determinada finalidad educativa, por ejemplo, involucrar determinados contenidos (objetos o procesos) matemáticos, promover un nivel de complejidad dado, ayudar a superar ciertas dificultades de aprendizaje. Pero, recíprocamente, el conocimiento didáctico-matemático de los profesores sobre un determinado contenido puede determinarse y fortalecerse mediante la creación de problemas (Chaverri, 2021). En efecto, la creación de problemas involucra a los futuros docentes en actividades de aprendizaje auténticas que fomentan una comprensión sólida de los contenidos matemáticos; por ejemplo, contribuye al desarrollo del pensamiento matemático, mejora la resolución de problemas, favorece la toma de buenas decisiones (Singer et al, 2013) y promueve la capacidad de análisis didáctico-matemático (Mallart et al., 2016).

1.3.3. Objetivos de la investigación

Con esta tesis doctoral pretendemos contribuir a identificar y comprender las limitaciones que presentan docentes de matemáticas en formación sobre la creación de problemas a fin de fortalecer el razonamiento proporcional y su conexión con el algebraico, así como desarrollar competencias didáctico-matemáticas mediante su análisis. Así, esta investigación centra la atención en el siguiente objetivo general:

OG. Analizar, promover y evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos y la competencia de creación de problemas relacionados con el razonamiento proporcional y algebraico en profesores en formación de matemáticas de educación primaria y secundaria.

Este se pretende alcanzar mediante los siguientes objetivos específicos:

OE1. Analizar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional y algebraico que futuros profesores de matemáticas de primaria y secundaria ponen de manifiesto por medio de la creación de problemas.

OE2. Identificar las dificultades que manifiestan futuros profesores de matemáticas de primaria y secundaria en la creación de problemas relativos al razonamiento proporcional y algebraico.

OE3. Diseñar, implementar y evaluar acciones formativas con futuros profesores de matemáticas, sobre creación de problemas que articulen el razonamiento proporcional y el algebraico.

OE4. Analizar el desarrollo en futuros profesores de matemáticas de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional y algebraico logrado por medio de estrategias formativas centradas en la creación de problemas.

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO Y METOLÓGICO

Esta investigación se desarrolla dentro del marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino et al., 2007). El EOS asume una visión pragmatista de las matemáticas, de forma que la actividad de resolución de problemas aparece como elemento central en la construcción del conocimiento matemático (Godino et al., 2007). Las situaciones-problema constituyen la razón de ser y determinan el significado de los objetos emergentes de la misma. Por tanto, la noción de práctica matemática, entendida como toda actuación o manifestación (lingüística o no) que se realiza para resolver problemas matemáticos, comunicar, validar y generalizar a otros contextos y problemas, constituye el punto de partida para el análisis de la actividad matemática (Font et al., 2013; Godino et al., 2007; Godino, Giacomone et al, 2017; Godino et al, 2019). La noción de configuración ontosemiótica responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, los cuales desempeñan una determinada función dentro de la práctica matemática que los origina (Godino et al., 2007).

Dado que el objetivo prioritario de este estudio es el diseño, implementación y evaluación de intervenciones formativas para desarrollar competencias y conocimientos didáctico-matemáticos en futuros profesores, para y por medio de la creación de problemas, el marco metodológico adoptado es la ingeniería didáctica, en el sentido generalizado propuesto desde el EOS (Godino, Rivas et al., 2014).

2.1. Elementos del Enfoque Ontosemiótico

A continuación, se describen las herramientas teóricas del EOS esenciales para la fundamentación y desarrollo de esta tesis.

2.1.1. Significado pragmático y configuración ontosemiótica

Dada la pluralidad y relatividad de la actividad matemática, el significado no se puede resumir a una definición solamente, sino está estrechamente ligado a la práctica y al objeto. En el EOS, se entiende por *objeto matemático*, cualquier entidad que interviene de alguna manera en la práctica o actividad matemática y que puede ser separado o individualizado, siendo *practica matemática* "toda actuación o manifestación (lingüística o no: verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). El *significado* de un objeto matemático se entiende como el sistema de prácticas (institucionales o personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales, mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como objetos personales (Godino y Batanero, 1994). Esta dualidad permite hablar de significado institucional y personal de los objetos matemáticos.

Se propone una tipología de objetos matemáticos o entidades primarias: *situaciones-problema* (ejercicios y problemas más o menos abiertos, aplicaciones intra matemáticas o extra matemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática), *lenguajes* (términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros), *conceptos* (entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante una descripción o definición), *proposiciones* (enunciados sobre conceptos, afirmaciones, propiedades o atributos) *procedimientos* (técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos), y *argumentos* (enunciados requeridos para demostrar las proposiciones o explicar los procedimientos). Estos tipos de objetos pueden considerarse en base a cinco dimensiones duales: *ostensivos* (públicos, materiales, perceptibles)–*no ostensivos* (abstractos, ideales, inmateriales); *extensivos* (particulares)–*intensivos* (generales); *personales* (relativos a sujetos individuales) –*institucionales* (compartidos en una institución o comunidad de prácticas); *significantes* (expresión)–*significados* (contenido); *unitarios* (objetos considerados globalmente como un todo previamente conocido)–*sistémicos* (objetos como sistemas formados por componentes estructurados).

Aunque en el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que existen muchas clases diferentes de procesos (procesos como series de prácticas, procesos cognitivos, procesos metacognitivos, procesos instruccionales, etc.) sí se hace un esfuerzo por establecer ciertas características de lo que es un proceso matemático (Font et al., 2008; Godino et al., 2009). Se considera *proceso matemático* toda secuencia de acciones activada o desarrollada durante un cierto tiempo para conseguir un objetivo, normalmente la respuesta ante una tarea propuesta sujeta a reglas matemáticas o metamatemáticas. Así, los objetos primarios situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, emergen de los sistemas de prácticas mediante los respectivos procesos de problematización, comunicación, definición, enunciación, algoritmización (elaboración de procedimientos) y argumentación (Font et al., 2013; Godino et al., 2007). La resolución de problemas, la modelización o la creación de problemas (como detallaremos en el Capítulo 3) se consideran en el EOS como mega procesos (Godino et al., 2009), dado que involucran a algunos o varios de los procesos anteriores.

Tanto los objetos primarios como los secundarios (derivados de la aplicación de las dualidades) se pueden considerar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual proporciona criterios para distinguir tipos de procesos matemáticos primarios (aquellos de los que emergen los objetos primarios) y secundarios (aquellos de los que emergen los objetos secundarios) (Figura 2.1).

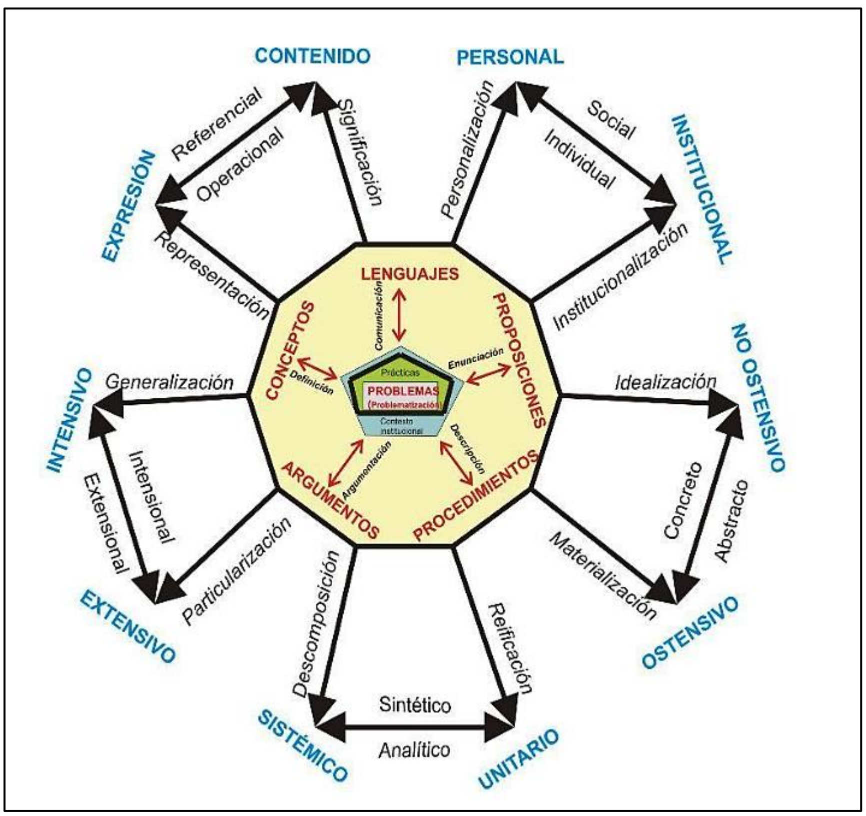


Figura 2.1. *Objetos y procesos matemáticos* (Fuente: Godino et al., 2009).

En particular, las dualidades dan lugar a los siguientes procesos secundarios: institucionalización–personalización; materialización-idealización; representación–significación; particularización-generalización; unitarización (o reificación)-descomposición. La delimitación entre los procesos de particularización y generalización con respecto a los procesos de idealización y materialización (Font y Contreras, 2008) y de estos con los de unitarización y descomposición, permite un análisis más detallado de cada uno de estos procesos y de su presencia combinada en la actividad matemática.

La actividad matemática viene modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, de las que emergen los diferentes objetos matemáticos (la "estructura"), por medio de los procesos (el "funcionamiento"). De esta forma, queda determinada la *configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos,* entendida como red articulada en las que objetos y procesos desempeñan una determinada función dentro de la práctica matemática que los origina. Dicha herramienta es clave para el análisis de la actividad matemática desde sus dos interpretaciones: en la perspectiva epistémica o institucional, el análisis permite caracterizar los conocimientos institucionales, en la interpretación cognitiva o personal describe los conocimientos personales (Font et al., 2013). Reconocer las configuraciones de objetos y procesos involucrados en las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la resolución de situaciones-problema permite al profesor prever conflictos potenciales de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados oportunamente en el proceso de aprendizaje (Godino, Giacomone et al., 2017).

2.1.2. Modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas

Adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor propuesto en el EOS (Godino et al., 2016; Godino, Giacomone et al., 2017) que articula las categorías de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Así, se acepta que el profesor debe tener *conocimiento matemático per se,* que le permita resolver los problemas y tareas propuestas en el currículum del nivel educativo donde imparte su docencia, y articularlo con los niveles superiores. Además, a medida que se ponga en juego algún contenido matemático el profesor debe tener un *conocimiento* *didáctico-matemático* de las distintas facetas que afectan el proceso educativo: *epistémica* (conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, significados institucionales de referencia), *ecológica* (relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, factores curriculares y socio-profesionales que condicionan los procesos de instrucción), *cognitiva* (cómo los estudiantes razonan, entienden y progresan en el aprendizaje de las matemáticas), *afectiva* (aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y su estudio), *mediacional* (recursos tecnológicos, materiales y temporales adecuados para potenciar el aprendizaje) e *interaccional* (conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, selección y organización de tareas, resolución de dificultades, gestión de las interacciones que se puede establecer en el aula).

El conocimiento en las diferentes facetas permite al profesor responder a situaciones reales en el aula, en particular, interpretar y evaluar las soluciones de los alumnos a tareas matemáticas y aprovechar el potencial matemático de las estrategias erróneas o poco habituales (Burgos, López-Martín et al., 2022). Específicamente, desde el modelo CCDM se asume que el profesor debe tener la capacidad de "analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa" (Godino, Giacomone et al., 2017, p. 92).

Desde este modelo se considera fundamental que el profesor de matemáticas sea competente para abordar los problemas didácticos básicos presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En particular, la c*ompetencia de análisis e intervención didáctica*, la cual le permite al profesor describir, explicar y juzgar lo que ha sucedido en el proceso de estudio y hacer propuestas de mejora (Godino, Giacomone et al., 2017). En esencia, consiste en "diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias, y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora" (Breda, et al., 2017, p. 1897). Esta competencia global del profesor de matemáticas está articulada por medio de cinco subcompetencias, asociadas a las herramientas conceptuales y metodológicas del EOS: *competencia de análisis de significados globales* (identificación de situaciones-problemas y prácticas de tipo operativo o discursivo implicadas en su resolución); *competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas* (reconocimiento de la estructura de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas); *competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas* (descripción y secuenciación de los patrones de interacción entre profesor, estudiantes, contenidos y recursos); *competencia de análisis normativo* (identificación de la red de normas y metanormas que condicionan y fundamentan el proceso instruccional); *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* (evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje y propuesta de mejoras).

Estas competencias permiten al profesor comprender el desarrollo de los aprendizajes y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Son fundamentales en la creación de problemas con fines didácticos y para responder a determinados requerimientos. Recíprocamente, la creación de problemas implica conocimientos de las facetas del CCDM y sirve de medio para desarrollar dichas competencias, pues, cuando crea un problema, el profesor debe proponer, a ser posible, varias soluciones al mismo para cerciorarse de que es resoluble (faceta instruccional) e identificar los conocimientos que se ponen en juego en su solución (faceta epistémica) valorando la adecuación al nivel educativo y el currículo (faceta ecológica). Este análisis le permitirá ser consciente de la complejidad de las situaciones-problema que propone a los estudiantes según sus necesidades, respondiendo a los conocimientos y dificultades (posibles o encontradas) de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva). Esto permite fomentar su creatividad y flexibilidad, prever y comprender los conflictos de aprendizaje y gestionar la institucionalización de los conocimientos.

2.1.3. Creación de problemas

Si bien existen diferentes posturas sobre qué estrategias o metodologías se consideran en la creación de problemas (Akay y Boz, 2010; Chapman, 2012; Contreras, 2007; Silver, 1994; Stoyanova, 1998, entre otras), en este trabajo adoptamos la propuesta Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2013; Malaspina, 2016; Malaspina y Vallejo, 2014; Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019) en el marco del EOS, dada su categorización clara y delimitada sobre las formas en las que se pueden crear problemas, además ofrecen una clasificación específica de los componentes de un problema que intervienen en dicho proceso. Para estos autores, la creación de problemas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema, determinado por cuatro elementos fundamentales (Figura 2.2): la *información*, es decir, los datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema; el *requerimiento,* esto es, lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones; el *contexto*, que puede ser intra matemático o extra matemático determinando el ambiente o escenario que da pie a la actividad matemática; el *entorno matemático* o marco global en el que se ubican los conceptos matemáticos, sus propiedades y relaciones, que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema, por ejemplo: funciones lineales, teoría de números, geometría analítica, probabilidad, entre otros; esto es, la estructura matemática (Grundmeier et al., 2015). Con mayor detalle, el contexto se entiende como "una situación que cae bajo el dominio de un determinado objeto matemático, poniendo la mirada en las notaciones, las propiedades, las definiciones que enmarcan al término matemático que se considera, y se habla, por ejemplo, de contexto algebraico, de contexto geométrico" (Font et al., 2017, p. 4).

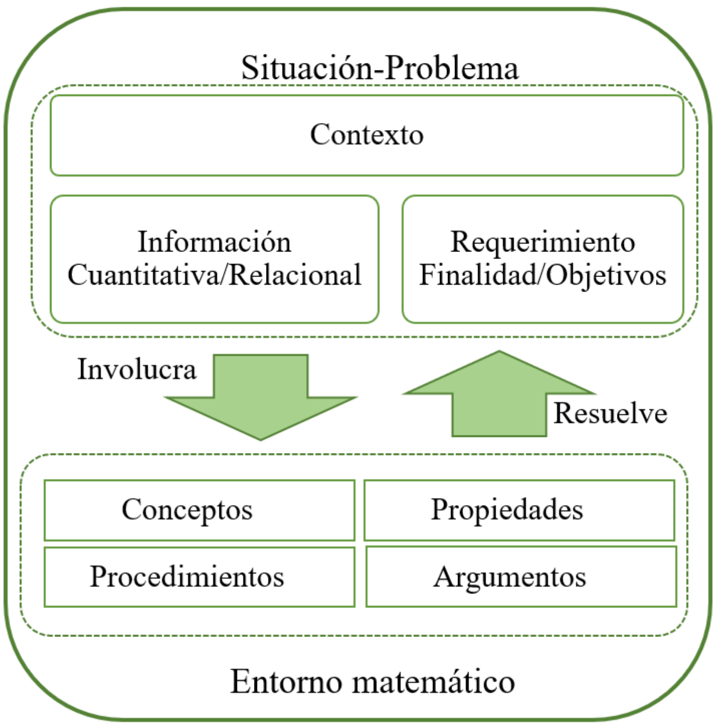


Figura 2.2. *Componentes de una situación-problema estructurada*. Elaboración propia.

De acuerdo con la propuesta de Malaspina y colaboradores, la creación de nuevos problemas puede darse a través de la variación de un problema dado o por elaboración. La *variación de un problema* es un proceso por el que se construye un nuevo problema modificando uno o más de los cuatro elementos del problema inicial. Por otro lado, la *elaboración de un problema* es un proceso en el que se obtiene un nuevo problema de forma libre, a partir de una situación (dada o configurada por el autor), o bien, por una finalidad específica, que puede tener énfasis matemático o didáctico. En la *elaboración de un problema a partir de una situación*, el contexto se origina en la situación, la información se obtiene por selección o por modificación de la que se percibe en tal situación, el requerimiento es una consecuencia de las relaciones entre los elementos de la información implícita en el enunciado y el entorno matemático se puede determinar por el autor o por las formas de resolver el problema. En la *elaboración a partir de una finalidad* (matemática o didáctica) *específica* el contexto o la información debe establecerse para responder de manera adecuada a dicho propósito. El conocimiento didáctico-matemático sobre el contenido, como puede ser la proporcionalidad, es especialmente importante para responder adecuadamente a la finalidad didáctico-matemática.

2.1.4. Conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional y algebraico

Desde la perspectiva pragmática del EOS, se entiende el razonamiento proporcional como el sistema de acciones (prácticas operativas y discursivas) puestas en juego en la resolución de problemas de proporcionalidad. Integra múltiples aspectos: las diversas interpretaciones del número racional (razón, operador, parte-todo, medida y cociente) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza) (Lamon, 2007); las nociones de tasa, razón, proporción y escala (Norton, 2005); la resolución de situaciones proporcionales de valor perdido y la discriminación de situaciones no proporcionales (Buforn y Fernández, 2014). Así, el razonamiento proporcional se manifiesta al resolver situaciones-problemas que pueden caracterizarse mediante dos tipos de relaciones (a) la funcional que vincula magnitudes diferentes y que refleja el sentido de la unidad de la razón y (b) la relación escalar que vincula cantidades de la misma magnitud (Llinares, 2003).

Sin embargo, los objetos y procesos que intervienen en las prácticas que emergen de estas situaciones, dependen de los contextos de aplicación, como muestran las múltiples investigaciones realizadas sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento proporcional (Ben-Chaim et al., 2012): aritmético, algebraico-funcional, geométrico, probabilístico, entre otros. Desde la perspectiva epistémica, es decir, desde el conocimiento matemático institucionalizado, la proporcionalidad ha sido estudiada fundamentalmente a partir de tres enfoques: el aritmético, centrado en las nociones de razón y proporción (donde destacan los problemas de comparación o de valor faltante); el algebraico-funcional, basado en la noción y propiedades de la función lineal; y el geométrico, focalizado en la semejanza de figuras.

Diversos autores defienden la importancia de comenzar el estudio de la proporcionalidad con una aproximación informal previa a la formalización de los conceptos de razón y proporción (Cramer y Post, 1993; Ruiz y Valdemoros, 2004). Esta perspectiva de tipo intuitivo, basada en la comparación perceptiva y el análisis cualitativo de las relaciones multiplicativas entre números particulares, se propone como primer acercamiento a la proporcionalidad (Burgos y Godino, 2020a; Fiol y Fortuny, 1990).

El enfoque aritmético, centrado en la noción de razón y proporción, ha sido el predominante en los desarrollos curriculares y propuestas de investigación (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2007). Una razón es un par ordenado de cantidades de magnitudes (homogéneas o heterogéneas) comparadas de manera multiplicativa. Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida. Una razón puede aparecer como fracción cuando se prescinde de las unidades de medida de las cantidades relacionadas y en este caso, una proporción es la igualdad de dos fracciones equivalentes. En este enfoque se distinguen esencialmente dos categorías de problemas de proporcionalidad: de comparación de razones y de valor faltante (la proporción es una relación de igualdad entre dos razones, en la que uno de los términos es un valor desconocido). La comparación de razones es uno de los componentes fundamentales del razonamiento proporcional, la comparación de razones (Buforn et al., 2018, 2020). En un problema de este tipo, se dan cuatro valores (a, b, c, d) relacionados de manera multiplicativa dos a dos, formando dos razones que relacionan cantidades de la misma magnitud o de magnitudes diferentes ("*a* es a *b*" como "*c* es a *d*").

Los futuros docentes deben conocer las diferentes estrategias que pueden usar los estudiantes y los principales errores que pueden cometer en los problemas de comparación de razones, como el uso de estrategias aditivas o la interpretación incorrecta de la razón (Buforn et al., 2020). También deben distinguir entre comparaciones relativas y absolutas y reconocer el papel de la razón como índice comparativo en las comparaciones relativas (Buforn et al., 2018). Así, en el enfoque aritmético tiene especial importancia los diferentes constructos asociados al número racional, en particular, el porcentaje. Aunque los significados del porcentaje son diversos, como número (puede escribirse como fracción o decimal), como cantidad intensiva, relación parte-todo, relación parte-parte o como operador, se fundamenta esencialmente en la necesidad de comparar dos cantidades entre sí, no sólo de manera absoluta sino de forma relativa. El porcentaje permite expresar de manera condensada relaciones de proporcionalidad (Parker y Leinhardt, 1995). El conocimiento sobre porcentajes supone mucho más que conversiones, cálculos y aplicaciones implica ver el porcentaje como una proporción (Dole, 2010).

El enfoque geométrico se fundamenta en la noción de semejanza de figuras y escalas en las que las razones y proporciones se establecen entre segmentos. Tareas relacionadas con la aplicación del Teorema de Thales, las escalas, ampliaciones y reducciones de figuras conservando la forma, en particular la reproducción de un puzle a escala diferente, responden al enfoque geométrico (Aroza et al., 2016; Ben-Chaim et al., 2012).

El razonamiento proporcional y el probabilístico están fuertemente vinculados; ambos implican análisis cuantitativos y cualitativos, establecer relaciones, hacer inferencias y predecir resultados (Burgos, Chaverri y Tizón-Escamilla, 2022). Trabajos como el de Bryant y Nunes (2012), entre otros, muestran que el razonamiento proporcional es un factor clave en la capacidad de los niños para comprender y aplicar conceptos probabilísticos. El razonamiento proporcional, forma parte del análisis del espacio muestral, de la cuantificación de las probabilidades, el estudio de la variable aleatoria y el muestreo y de la comprensión y uso de las correlaciones (Bryant y Nunes, 2012), por lo que es considerado un elemento esencial del razonamiento probabilístico. Además, un razonamiento proporcional insuficiente y la estrecha conexión cognitiva e intuitiva entre las nociones de azar y proporción puede estar detrás de gran parte de los errores conceptuales y procedimentales en el ámbito de la probabilidad (Bryant y Nunes, 2012), por lo que es importante dar oportunidades a los estudiantes de desarrollar el razonamiento proporcional en el contexto probabilístico (Begolli et al., 2021). La falta de razonamiento proporcional en la resolución de problemas elementales de comparación de probabilidades se encuentra no sólo en estudiantes, sino también en futuros maestros (Vásquez y Alsina, 2015), que además muestran un conocimiento matemático y didáctico insuficiente sobre la proporcionalidad (Buforn et al., 2017; Weiland et al., 2019).

Finalmente, en el enfoque algebraico, la proporcionalidad se reconoce como una situación en la que existe una relación funcional multiplicativa constante entre dos magnitudes que covarían. Los problemas en un contexto (algebraico-)funcional se caracterizan por la aplicación de la noción de función lineal y de técnicas de resolución basadas en las propiedades de dicha función:

- aditiva $f(x_1 + x_2)= f(x_1) + f(x_2)$,
- multiplicativa-escalar $f(\lambda x) = \lambda f(x)$,
- multiplicativa-funcional $f(x) = kx$,

para cualesquiera, x, $x_1, x_2, \lambda \in \mathbb{R}$; siendo k la constante de proporcionalidad. Una traslación de una función lineal $f(x) = mx$ pude dar lugar a la función afín $g(x) = mx + n$, o recíprocamente, una función lineal es un caso de función afín $g(x) = mx + n$ tal que $g(0) = 0$. Función lineal y función afín, son los primeros ejemplos de funciones reales de variable real en educación secundaria.

Disponer de estos conocimientos didáctico-matemáticos en las facetas epistémica, cognitiva e instruccional permitirá a los profesores crear problemas en los que estén involucrados los diversos significados de la proporcionalidad, conociendo las configuraciones de objetos característicos (Burgos y Godino, 2020a) y las relaciones establecidas. También les ayudará a identificar cómo éstos contribuyen a un adecuado desarrollo del razonamiento proporcional en sus estudiantes y qué dificultades pueden encontrarse sus alumnos al resolverlos.

En el EOS, una práctica matemática se considera más o menos algebraica en función de: 1) los tipos de objetos involucrados en la actividad matemática: relaciones binarias y sus propiedades, operaciones y sus propiedades, funciones, operaciones y sus propiedades, estructuras; 2) las transformaciones aplicadas a estos objetos: cálculo sintáctico, representación, generalización) y 3) el tipo de representaciones utilizadas (Aké et al., 2013; Godino, Aké et al, 2014). La aplicación del modelo de niveles de razonamiento algebraico elemental (RAE) a los sistemas de prácticas ligados a tareas relativas a proporcionalidad, aporta criterios para identificar la actividad matemática puramente aritmética (nivel 0 de RAE) y diferenciarla de progresivos niveles de algebrización: niveles 1 y 2 RAE de carácter proto-algebraico y un nivel 3 RAE, propiamente algebraico, abordables en educación primaria. Estos niveles se amplían después con otros tres niveles que permiten analizar la actividad matemática desde educación secundaria, basados en el uso y tratamiento de parámetros para representar familias de ecuaciones y funciones (niveles 4 y 5 RAE) y en el estudio de las estructuras algebraicas en sí mismas (nivel 6 RAE) (Godino, Aké et al., 2014; Godino, Beltrán-Pellicer et al., 2017).

Los criterios para distinguir categorías de significados de la proporcionalidad por medio de los niveles de RAE son los siguientes:

- *Significado aritmético.* Nivel 0. Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Se aplican procedimientos aritméticos a determinados valores numéricos (multiplicación, división); no intervienen objetos ni procesos algebraicos.
- *Significado proto-algebraico*: concentrado en las nociones de razón y proporción. Se distinguen dos niveles:
    - Nivel 1. Se usan objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de $\mathbb{N}$ y la igualdad como equivalencia. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. Se reconoce el valor unitario en un procedimiento de reducción a la unidad y el uso de representaciones diagramáticas de las soluciones.
    - Nivel 2. Se usan representaciones simbólico–literales para referir a los objetos intensivos reconocidos ligados a la información contextual; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B = C$ ($A, B, C \epsilon \mathbb{R}$). La resolución de un problema de valor faltante por medio de la formulación y solución de la ecuación proporcional (en la que la incógnita aparece a un único lado de la ecuación) o la solución de un problema mediante la representación gráfica corresponde a este nivel.
- *Significado algebraico-funcional.* Nivel 3. Los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información contextual. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables; se resuelven ecuaciones de la forma $Ax + B =$

$Cx + D$ $(A, B, C, D \in \mathbb{R})$. Se caracteriza por la aplicación de la noción de función lineal y las técnicas de resolución basadas en las propiedades de estas funciones.

Dado que para resolver una ecuación del tipo $Ax + B = C$ los alumnos pueden simplemente invertir las operaciones, se las considera *ecuaciones aritméticas*. Por otro lado, a las ecuaciones de la forma $Ax + B = Cx + D$, se las llama *ecuaciones algebraicas*, puesto que para resolverlas no es suficiente deshacer la operación indicada, siendo necesario operar con la incógnita (Kilhamm et al., 2019), lo que explica que correspondan a niveles de RAE proto y algebraico, respectivamente.

El profesor debe ser competente para determinar las configuraciones de objetos y procesos matemáticos involucrados en las prácticas puestas en juego en los significados pretendidos de los contenidos (configuraciones epistémicas, institucionales), así como las configuraciones que los estudiantes emplean al resolver los problemas (configuraciones cognitivas, personales) (Godino et al., 2016; Godino, Giacomone et al., 2017). El conocimiento especializado en la faceta epistémica permite al profesor identificar la diversidad de significados involucrados y elaborar la configuración ontosemiótica de los objetos y procesos. Además, el reconocimiento por parte de los profesores de los diferentes niveles de RAE al resolver tareas matemáticas y la capacidad de modificar problemas para promover el razonamiento algebraico en un contenido específico (en particular, la proporcionalidad) se considera un aspecto clave del conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas (Burgos y Godino, 2022a; Godino, Aké et al., 2014).

2.2. Metodología general

Nuestro interés es el diseño, implementación y evaluación de los resultados de acciones formativas con futuros docentes de matemáticas para desarrollar competencias y conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la creación de problemas que involucren el razonamiento proporcional y algebraico. Por esa razón, el marco metodológico implementado es la ingeniería didáctica, entendida en el sentido generalizado propuesto desde el EOS (Godino, Rivas et al., 2014). La interpretación de Godino, Rivas et al. (2014) de la ingeniería didáctica, amplía su concepción tradicional (Artigue, 1988) en la dirección de las investigaciones basadas en el diseño (Cobb et al., 2003), que recurren al diseño y el análisis sistemático de herramientas y estrategias instruccionales, buscando la interdependencia entre el diseño instruccional y la investigación. En la investigación basada en la ingeniería didáctica (Godino, Rivas et al., 2014), se distinguen cuatro fases:

1) *Estudio preliminar*. Estudio de los referentes teóricos sobre creación de problemas y conocimientos didáctico-matemáticos en relación con la proporcionalidad requeridos para la invención de problemas pertinentes (significados institucionales de referencia, interpretados a través de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos; significados personales, dificultades previstas y creencias en relación a la proporcionalidad y creación de problemas, análisis de los recursos técnicos y temporales previstos). Esta información es necesaria para el diseño posterior de la secuencia de actividades formativas.
2) *Diseño* de la trayectoria didáctica. Selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de los mismos, planificación de intervenciones controladas del docente. Cada una de las acciones formativas que planificamos se organiza en diferentes momentos, que comprenden (a) sesiones teóricas, en las que se presentan distintos aspectos relacionados al contenido y a las tareas a desarrollar, (b) sesiones prácticas donde los participantes trabajan de forma grupal o individual para dar respuesta a las distintas tareas asignadas como instrumento para la recolección de información.

3) *Implementación* de la trayectoria didáctica: observación de las interacciones entre personas, recursos y evaluación de los aprendizajes logrados. Supone la observación de las interacciones entre personas, recursos y evaluación de los aprendizajes logrados. En esta etapa, ponemos en práctica las actividades planificadas, se recogen las producciones de los participantes y se evalúan los aprendizajes logrados.
4) *Evaluación o análisis retrospectivo*: contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación.

Además, se emplea el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) para examinar los protocolos de respuesta de los participantes en las experiencias formativas, con la intención de codificar, crear categorías y unidades de análisis, describir tendencias, comparar características y establecer conclusiones (Cohen et al., 2018), por medio de "un conjunto estricto y sistemático de procedimientos para el análisis riguroso, el examen, la replicación, la inferencia y la verificación del contenido de los datos escritos” (p. 674).

El estudio se enmarca en una investigación descriptiva de enfoque esencialmente cualitativo, pues permite describir e interpretar el conocimiento didáctico-matemático de los futuros maestros de educación primaria (FM en adelante) y futuros profesores de educación secundaria (FP en adelante) y las dificultades que presentan en la creación de problemas; pero también incluye un tratamiento cuantitativo en la categorización, medición y descripción de los datos obtenidos y los perfiles de los grupos de participantes (Neill et al., 2018).

CAPÍTULO 3. UN MODELO PARA LA CREACIÓN DE PROBLEMAS. IMPLICACIONES EN LA FORMACIÓN DOCENTE

El contenido de este capítulo se encuentra publicado en el siguiente artículo:

> Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024a). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00482-w

3.1 Introducción

Los criterios para categorizar las actividades de planteamiento de problemas han dependido en gran medida de las preferencias individuales de los investigadores (Lee et al., 2018). Por este motivo, y dado que los productos pueden ser más accesibles mediante el análisis que los procesos (Freudenthal, 1991), la mayoría de los estudios sobre invención de problemas se han centrado en los problemas planteados como producto (Baumanns y Root, 2022; Bicer et al., 2020; Van Harpen y Presmeg, 2013). Aunque la consideración de la creación de problemas como proceso ha aumentado en estudios recientes (Baumanns y Rott, 2022; Cai y Leikin, 2020; Christou et al., 2005; Crespo y Harper, 2020; Headrick et al., 2020; Koichu y Kontorovich, 2013; Patáková, 2014; Ponte y Henriques, 2013), estos trabajos se centran fundamentalmente en los procesos cognitivos que los estudiantes activan en la creación de problemas (Christou et al., 2005).

Para Cai et al. (2022), aunque los productos de la invención de problemas, es decir, los nuevos problemas, son importantes, pues constituyen el núcleo y punto de partida de la actividad matemática, los procesos de planteamiento de problemas son igualmente relevantes porque "es en estos procesos donde los creadores de problemas analizan y estructuran la información, tienen ideas para nuevos problemas, evalúan esas ideas y las desarrollan o bien las rechazan" (p. 1). Para comprender los procesos de planteamiento de problemas, algunos autores (Christou et al., 2005; English, 1998; Pittalis et al., 2004; Silver y Cai, 1996) han analizado los propios problemas planteados por los estudiantes (estudiar el producto para descubrir el proceso). Otros han tratado de identificar las estrategias de planteamiento de problemas como una forma de entender los procesos de planteamiento de problemas (Cai y Ciffarelli, 2005; Cifarelli y Cai, 2005).

Los artículos que se interesan por el análisis de la creación de problemas como proceso (Christou et al., 2005; Cruz, 2006; Koichu y Kontorovich, 2013; Pelczer y Gamboa, 2009; Ponte y Henriques, 2013) lo hacen desde el punto de vista del pensamiento matemático que lo acompaña, intentando comprender "la compleja relación entre el planteamiento de problemas y la resolución de problemas en función de los procesos cognitivos de la invención de problemas" (Zhang et al., 2022, p. 498). No hemos encontrado investigaciones en las que se analice la creación de problemas desde un punto de vista epistémico, esto es, desde la complejidad de la trama de objetos y procesos matemáticos que involucra.

En este capítulo, a partir del análisis de las diferentes propuestas de categorización de actividades de creación de problemas, desarrolladas en el Capítulo 1, proponemos un modelo que, basado en los supuestos del EOS considera tanto los elementos que caracterizan un problema, como los procesos que se suceden en la creación de un problema. Se ejemplifica el uso del modelo para analizar las prácticas desarrolladas por maestros en formación durante el mega-proceso de creación de problemas con finalidad didáctico-matemática.

3.2. Un marco para la creación de problemas

Como hemos mencionado, si bien existen múltiples perspectivas sobre qué estrategias o metodologías se consideran en la creación de problemas (Serin, 2019), en el contexto de la formación de profesores nos apoyamos en la propuesta de Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2013; Malaspina, 2016; Malaspina y Vallejo, 2014). Considerando los modelos previos sintetizados en la sección 1.2 del capítulo 1, proponemos las siguientes categorías de creación de problemas:

– *Elaboración libre o sin estructura*. No hay una situación-problema (estructurada) de partida y no se incluyen indicaciones, pautas o restricciones sobre los componentes (contexto, entorno, información, requerimiento) del nuevo problema. Por ejemplo, "crea un problema fácil". El campo contexto-información-requerimiento (Figura 2.2) está totalmente vacío y, por tanto, también el entorno.

- *Elaboración semiestructurada*. No hay una situación-problema base, pero se incluye información o restricciones sobre los elementos del nuevo problema. Es decir, alguno de los componentes contexto-información-requerimiento están dados. Por ejemplo, puede contener contexto e información (Van Harper y Presmeg, 2013) y que se deba completar con el objetivo, o bien se deben completar los datos (información) para responder a una pregunta dada (requerimiento) (Cai y Jiang, 2017; Espinoza et al., 2018; Grundmeier, 2015). En otras ocasiones, la restricción puede venir dada como parte del entorno matemático, frecuentemente como estrategia o cálculo determinado que debe conducir a la solución (Christou et al., 2005).
- *Elaboración estructurada o variación*. Se plantea un problema en base a uno previo (Stoyanova y Ellerton, 1996; Van Harpen y Presmeg, 2013), de manera que son conocidos los diferentes elementos (contexto, información, requerimiento y entorno matemático). La variación puede ser *parcial*, si se modifican algunos de estos componentes, pero no todos, por ejemplo, los datos cuantitativos o relacionales (información), o las preguntas (requerimiento) (Van Harpen y Presmeg, 2013), o bien *completa*. También se considera dentro de la categoría de elaboración estructurada el intercambio entre información y requerimiento, añadir nueva información o plantear nuevas preguntas (Cai y Jiang, 2017).

Consideramos que la elaboración de un problema para responder a una finalidad o demanda de tipo matemático como puede ser emplear cierta estrategia o cálculos aritméticos (English y Watson, 2015), o didáctico-matemático, en el caso de profesores como, por ejemplo, involucrar ciertos conceptos o propiedades (dimensión epistémica), o responder a cierto nivel de demanda cognitiva o diagnosticar ciertas dificultades prevista (dimensión cognitiva), puede darse tanto en el caso semiestructurado como en el estructurado (variación).

Al igual que la resolución de problemas o la modelización, desde el EOS se considera la creación de problemas como un mega-proceso en tanto puede involucrar a varios procesos primarios (comunicación, enunciación, problematización) y secundarios (representación-significación, materialización-idealización, particularización-generalización, descomposición-unitarización). Los procesos elementales involucrados dependen de la tarea de creación que los motiva, es decir, cuál es el producto que se espera obtener; recíprocamente, determinados procesos determinan problemas-producto diferentes.

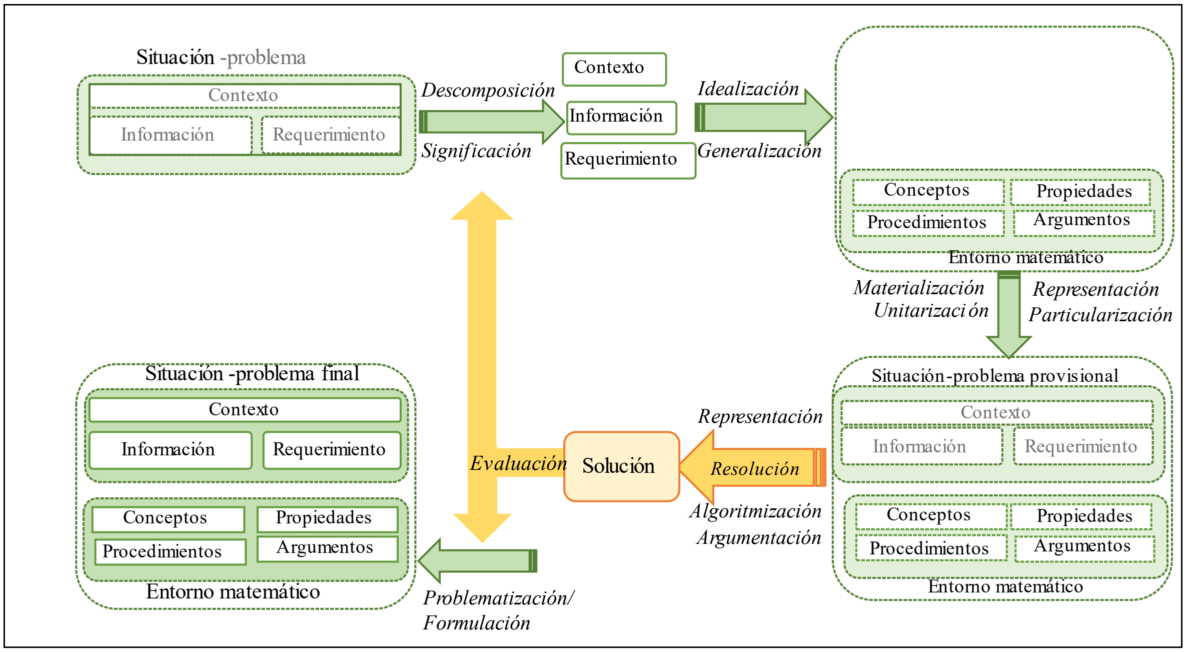


Figura 3.1. *El mega-proceso de creación de problemas.* Elaboración propia.

Pongamos como ejemplo una situación de elaboración semiestructurada en la que alguno de los componentes contexto-información-requerimiento están dados (en gris en la Figura 3.1). Para crear el problema es necesario determinar los elementos restantes. En primer lugar, esto supone separar (proceso de descomposición) los componentes dados, dotando de significado (proceso de significación) a cada uno de los objetos lingüísticos (en sus diversos registros) en la situación (parte superior central de la Figura 3.1). A continuación, información y requerimiento deben vincularse por medio de la estructura matemática. Los objetos matemáticos son entidades abstractas, esto es, inmateriales (no ostensivas) y generales (intensivas), por lo que se producen procesos de idealización y generalización en la articulación con el entorno matemático. De esta manera se disponen de todos los elementos que determinan el problema (parte superior derecha de la Figura 3.1). El análisis de los objetos matemáticos implica la clasificación, asociación y búsqueda de relaciones (Cruz, 2006). Estos deben ahora adquirir entidad unitaria (unitarización), por lo que los objetos abstractos que forman la estructura matemática del problema (el entorno) se deben particularizar, materializar y representar en la enunciación del nuevo problema (parte central derecha de la Figura 3.1). Además, como parte del proceso de creación del problema, es posible considerar el (mega-proceso) de resolución de este (que involucra representación, algoritmización y argumentación de la solución), tal y como ocurre en los modelos de

Baumanns y Rott (2022), Cruz (2006) y el de Pelczer y Gamboa (2009), dentro de la fase de evaluación. Cuando la evaluación de la solución no es satisfactoria, puede ser necesario resignificar los componentes del problema y reanalizar los objetos matemáticos para obtener nuevas formulaciones del problema (parte inferior izquierda de la Figura 3.1). Cuando la creación de problemas persigue una finalidad didáctica, no solo se evalúa la solución de este problema intermedio, también se valora la idoneidad del producto provisional, es decir su calidad o el grado en que responde a los objetivos educativos pretendidos (Kontorovich et al., 2012).

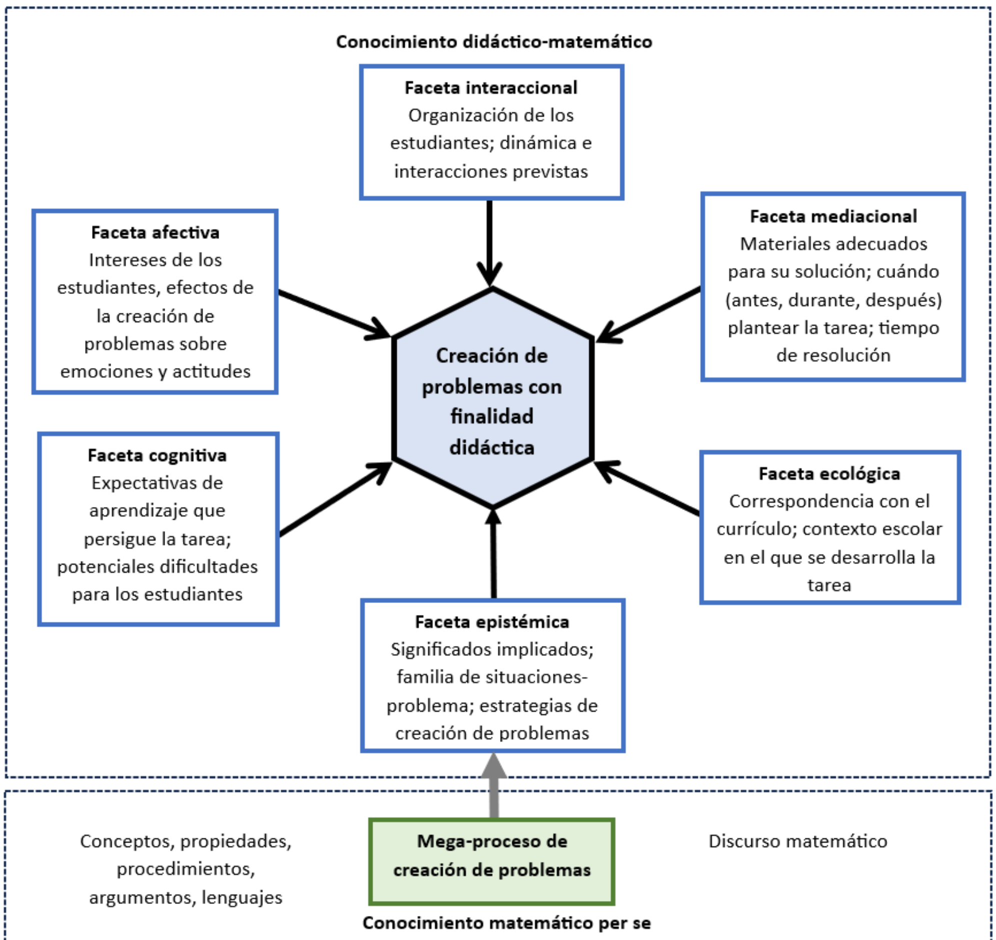


Figura 3.2. *Facetas del conocimiento didáctico-matemático en la creación de problemas.* Elaboración propia.

Como muestra la Figura 3.2, consideramos una doble dimensión en la creación de problemas: la matemática y la didáctica. En la dimensión matemática, la creación de problemas es una actividad compartida por estudiantes y profesores, modelizada en términos de procesos matemáticos y sus objetos emergentes (Figura 3.1). En la dimensión didáctica la creación de problemas implica conocimientos profesionales en distintas facetas, algunas de las cuales se relacionan con los aspectos de organización de la tarea, heurísticos y esquemas de planteamiento sugeridas por Kontorovich et al. (2012) (ver Figura 3.2). En efecto, cuando crea un problema, el profesor debería conocer y emplear diversas estrategias de resolución aptas desde el punto de vista instruccional (faceta interaccional) reconociendo los recursos materiales que podrían ser útiles o las necesidades temporales (faceta mediacional). Debería también identificar los significados de los objetos que se ponen en juego en su solución (faceta epistémica) y valorar la adecuación al nivel educativo y currículo (faceta ecológica). Este análisis le permitirá ser consciente de la complejidad de las situaciones que propone a los estudiantes, respondiendo a las dificultades (posibles o encontradas) de los alumnos (faceta cognitiva) y atendiendo a sus intereses (faceta afectiva). La puesta en juego de estos conocimientos viene determinada por la finalidad didáctica que persiga la tarea de creación de problemas, que a su vez puede tener un carácter epistémico, ecológico, cognitivo, afectivo, interaccional, mediacional o ecológico, como mostramos en la siguiente sección.

3.3. Dialéctica proceso-producto en la creación de problemas

Con la intención de ejemplificar la dialéctica proceso-producto en la creación de problemas y hacer operativos los aspectos teóricos previos, describimos algunos casos particulares de las experiencias que desarrollamos en el contexto de formación inicial de maestros de educación primaria en el ámbito específico del razonamiento proporcional (Burgos et al., 2018; Burgos y Chaverri, 2022, 2023a; Burgos y Godino, 2022a, 2022b). Las respuestas de los maestros en formación (escogidas, en cada caso, por ser representativas de las producciones del resto de participantes) se analizan desde el punto de vista de los procesos involucrados y los objetos emergentes en el mega-proceso de creación de problemas, según la Figura 3.1.

3.3.1. Creación de problemas con finalidad didáctico-matemática epistémica

En la primera parte de la situación planteada en la Figura 3.3, se propone una tarea de elaboración semiestructurada con una finalidad didáctico-matemática de naturaleza epistémica (Burgos et al., 2023b). Se proporciona el contexto del problema a elaborar, la información y el entorno matemático en el que debe encuadrarse. El maestro en formación debe reconocer a partir de la información suministrada qué magnitudes pueden relacionarse de manera aditiva, cuáles de manera proporcional, completarla y establecer el requerimiento de manera que resolver el problema requiera diferenciar dichas relaciones (faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático).

Crea a partir de la siguiente situación un problema en el que los alumnos deban distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas. Resuélvelo identificando claramente las magnitudes que se relacionan de manera proporcional y aquellas que lo hacen de manera aditiva.

> *Raquel, Juan y Daniel están plantando flores. Raquel y Juan empezaron al mismo tiempo. Daniel empezó antes que sus compañeros. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores y Daniel 8.*

Después, modifícalo para crear un nuevo problema en el que no todas las razones que intervengan en las relaciones de proporcionalidad sean enteras. Indica qué elementos modificas en tu primer problema y cuáles son las razones no enteras.

Figura 3.3. *Elaboración semi-estructurada para responder a una finalidad didáctico-matemática.* Elaboración propia.

Dado que los futuros docentes previamente han recibido formación sobre razonamiento proporcional y las dificultades que entraña a escolares diferenciar este tipo de situaciones (Hilton y Hilton, 2019) o trabajar con razones no enteras (Fernández y Llinares, 2011), se espera que empleen los conocimientos adquiridos para crear problemas en los que entren en juego estos aspectos. Por ejemplo, mostramos en la Figura 3.4 el problema creado por una maestra en formación, Laura (nombre ficticio) y la justificación de su propuesta.

Problema 1. Raquel, Juan y Daniel están plantando flores. Raquel y Juan empezaron al mismo tiempo, *pero Juan es más rápido que Raquel*. Raquel y Daniel *plantan a la misma velocidad, pero Daniel empezó antes que sus compañeros*. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores y Daniel 8. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas plantó Juan? ¿Y Daniel?

En este caso, las magnitudes que aparecen involucradas son: número de flores que planta Raquel, número de flores que planta Juan y número de flores que planta Daniel. 1. La relación entre el número de flores que planta Raquel y el número de flores que planta Daniel es aditiva; ya que la frase: "Raquel y Daniel plantan a la misma velocidad, pero Daniel empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4, Daniel ha plantado 8" describe una relación aditiva entre las cantidades. Si llamamos "x" al número de flores que ha plantado Daniel y llamamos "y" al número de flores que ha plantado Raquel, obtenemos la relación: $y = x + k$, dónde en este caso: $k = 4$, por tanto: $y = x + 4$; ya que es la diferencia que hay entre el número que planta Raquel y Daniel; cuando Raquel planta 4, Daniel planta 8.

Sin embargo, el número de flores que planta Raquel y el número de flores que planta Juan, se relacionan de manera directamente proporcional, ya que la frase: "Empezaron al mismo tiempo, pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores" describe una relación multiplicativa entre las cantidades (4 flores de Raquel se relacionan con 12 flores de Juan, y esta relación siempre es la misma desde el primer momento). De esta manera, en cada momento, el número de flores que ha plantado Juan es 3 veces el plantado por Raquel (12 = 4×3). Si en este caso, llamamos "x" al número de flores que planta Raquel y llamamos "y" al número de flores que planta Daniel, obtenemos la relación: $y = kx$, dónde k en este caso es igual a 3, por tanto, $y = 3x$. Si ahora x = 20, tenemos que $y = 3 \times 20 = 60$. Por lo tanto, cuando Raquel planta 20 flores, Juan planta 60 flores.

Figura 3.4. *Problema creado por Laura para responder a la tarea planteada en la Figura 3.3.*

Teniendo en cuenta la finalidad establecida, Laura interpreta la situación dada, seleccionando las magnitudes que potencialmente se pueden relacionar de manera aditiva o multiplicativa, a partir de los datos y sus vínculos. El proceso de idealización y generalización lleva a identificar la necesidad de añadir en la situación condiciones de regularidad y relaciones entre las magnitudes para que estas se ajusten a los modelos $y=x+k$ (relación aditiva) $y=kx$ (relación proporcional). Finalmente, Laura particulariza estas relaciones ("Juan es más rápido que Raquel", "Raquel y Daniel plantan a la misma velocidad", "Daniel empezó antes que sus compañeros") y aporta un valor de la magnitud "número de flores plantadas por Raquel" para preguntar por los valores correspondientes de las magnitudes "número de flores plantadas por Juan" y "número de flores plantadas por Daniel". Laura resuelve el problema, dando como definitiva su formulación del problema (Figura 3.5).

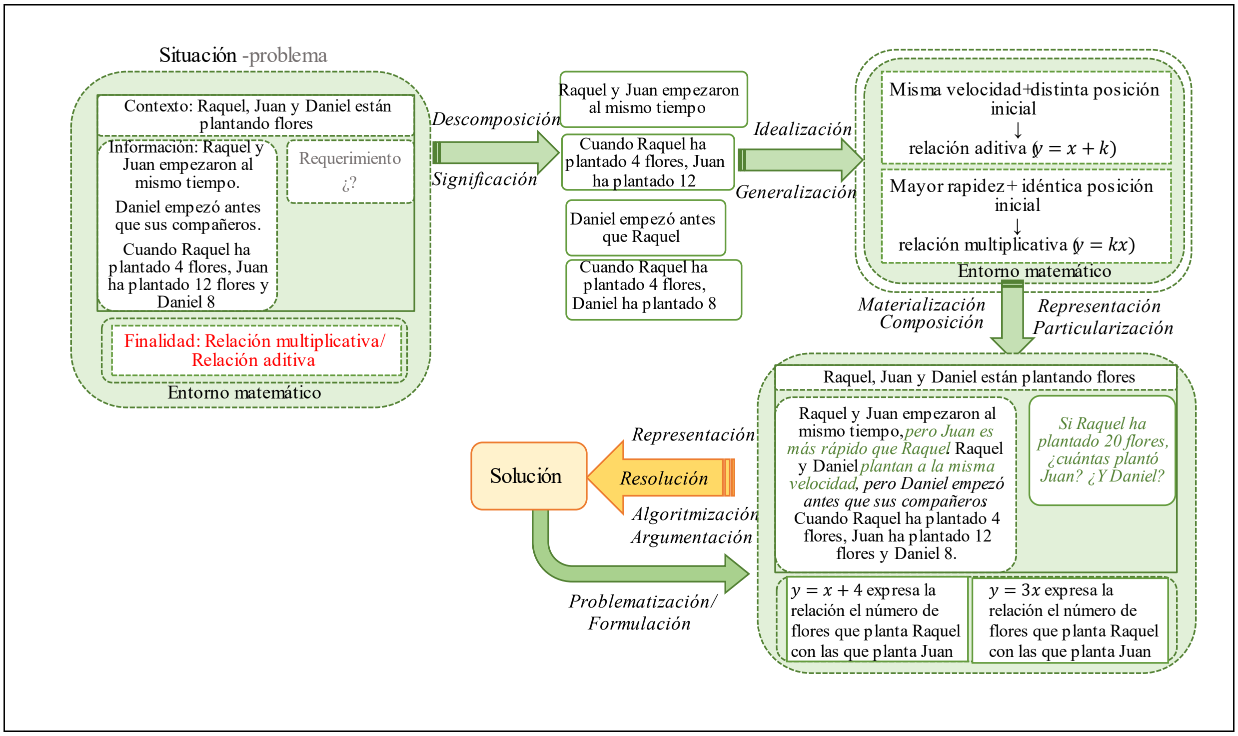


Figura 3.5. *Mega-proceso de creación de problemas seguido por Laura.* Elaboración propia.

La segunda parte de la tarea (Figura 3.3) supone una elaboración estructurada o variación con un propósito didáctico-matemático (epistémico). El maestro en formación debe interpretar la finalidad establecida en la creación, idealizar y generalizar la información (datos y relaciones) en el problema creado, reconociendo las razones entre las magnitudes y conectando con el entorno matemático: relación multiplicativa o no entre antecedente y consecuente de una razón. A continuación, la particularización y materialización, permite decidir qué elementos de las razones dadas en el problema se cambian para formular el problema con el propósito establecido.

Problema 2. Raquel, Juan y Daniel están plantando flores. Raquel y Juan empezaron al mismo tiempo, *pero Juan es más rápido que Raquel*. Raquel y Daniel *plantan a la misma velocidad, pero Daniel empezó antes que sus compañeros*. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 21 flores y Daniel 19. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas plantó Juan? ¿Y Daniel?

Deducimos del enunciado que entre el número de flores que plantan Juan y Raquel sigue habiendo una relación de proporcionalidad directa, pero cambia la constante de proporcionalidad k, k = 21/16, que no es una razón entera. Los elementos que he modificado en mi problema son el número de plantas de Juan y Daniel introduciendo fracciones para obtener así razones no enteras.

Figura 3.6. *Problema creado por variación del problema 1 (Figura 3.3) por Laura.*

Como se observa en la Figura 3.6, Laura mantiene el requerimiento, pero modifica la información cambiando el número de flores plantadas por Juan y por Daniel, de manera que, aunque la razón en el número de flores plantadas por Raquel, *4 a 20*, sigue siendo entera, no lo es la razón entre el número de flores plantadas por Raquel y Juan, *4 a 21*.

3.3.2. Creación de problemas con finalidad didáctico-matemática cognitiva

En la tarea mostrada en la Figura 3.7 (tomada de Burgos et al., 2023b) se proporciona un problema y la conversación de dos estudiantes durante su resolución. En este caso se espera que los maestros en formación analicen la finalidad que se persigue con una tarea matemática y que puedan crear variaciones (tarea de elaboración estructurada) cuando el resultado de su implementación no sea el esperado desde el punto de vista de las expectativas y logros de aprendizaje.

El maestro de 5° de educación primaria propone el siguiente problema a sus alumnos:

> *Alexa paró 2 de cada 5 penaltis que le tiraron, David paró 3 de cada 4 y Lola 11 de cada 20. ¿Quién paró mejor los penaltis? ¿Y peor?*

La tarea se resuelve en clase y los alumnos pueden hablar con sus compañeros y discutir la solución. Mientras los alumnos tratan de resolver el problema en clase, algunos comentan:

> Luis: *Es fácil... Lola es la que paró más y Alex es el que paró menos.*

A continuación, María corrige a Luis;

> *María: Eso no significa que Lola sea la mejor y Alexa la peor parando los penaltis... David los paro casi todos, es el mejor.*

El maestro ante el silencio de María interrumpe:

> *Maestro: María, ¿y sabrías decir cuál ha sido el peor alumno parando los penaltis?*
>
> A lo que María responde:
>
> *María: No se maestro, pero creo que Lola porque de 2 a 5 hay menos que de 11 a 20.*

a) ¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos? ¿Qué dificultades se han encontrado?
b) ¿Qué objetivos o expectativas de aprendizaje crees que persigue el problema?
c) Crea por variación, un problema que contribuya a lograr dichos objetivos, así como a facilitar la comprensión por parte de los estudiantes. Indica en cada caso los elementos que has variado en el enunciado y de qué manera permite lograr los objetivos de aprendizaje y superar las dificultades.

Figura 3.7. *Tarea de elaboración estructurada con finalidad didáctico-matemática cognitiva.* Elaboración propia.

En este caso, la organización de la tarea (Kontorovich et al., 2012) no contempla sólo las especificaciones didácticas o la propia situación, también las prácticas matemáticas discursivas de los alumnos a propósito de su solución que el maestro debe analizar para decidir sobre qué elementos del problema base actuar. Es decir, los procesos de descomposición, significación, idealización, generalización no sólo parten del propio problema, sino también de la actividad matemática de los estudiantes.

a) Algunas de las dificultades que han podido encontrar son: uso incorrecto de una estrategia aditiva; no identificar el todo sobre el que se considera la fracción; no reconocer las relaciones entre fracciones; no distinguir los diferentes términos de una fracción (numerador y denominador).

b) Objetivos o expectativas de aprendizaje: Fomentar el cuestionamiento y construir significados; Identificar los términos de una fracción; Escribir y leer fracciones; Comparar fracciones con distinto denominador; Hacer uso del mínimo común múltiplo; Tener en cuenta la relación entre numerador y denominador, no solo en los datos cuantitativos.

c) *Problema.* Alexa paró 2 de cada 5 penaltis que le tiraron, David paró 3 de cada 4 y Lola 11 de cada 20. ¿Qué alumno lo ha hecho mejor en proporción al número total de balones lanzados? ¿Y el que peor lo hizo? Explica tu respuesta y refleja los datos de cada niño en un gráfico.

En este problema, el elemento que he cambiado para su mejor comprensión es el requerimiento ya que dice de manera implícita que tienen que atender a la proporción para la resolución, de esta manera el objetivo del problema se ve más claro. Por último, se hace una nueva petición que es la explicación de su respuesta y la realización de tres gráficos para su mayor comprensión, ya que visualmente pueden llegar a entenderlo mejor y asentar su conocimiento.

Figura 3.8. *Análisis y creación de problema por variación del problema propuesto en el episodio (Figura 3.7) desarrollado por Daniela.*

En la Figura 3.8 se muestra la respuesta dada por una maestra en formación. Daniela (nombre ficticio) identifica e interpreta unidades de significado en las respuestas de los alumnos “Lola es la que paró más y Alex el que paró menos”, “David los paro casi todos, es el mejor”, “Lola porque de 2 a 5 hay menos que de 11 a 20”. Reconoce la estrategia aditiva incorrecta en la respuesta situando (idealización, generalización) el entorno matemático en la relación de proporcionalidad. Aunque los objetivos que precisa tienen un carácter más curricular que didáctico, Daniela describe objetos (conceptos, procedimientos, propiedades) esperados en la solución al problema matemático. En la variación, modifica el requerimiento para que sea más claro al alumno la necesidad de comparar proporcionalmente, conservando contexto, información y entorno matemático. Además, considera que la representación gráfica (aunque no precisa de qué tipo) ayuda en la resolución por lo que lo incluye también como requerimiento en el problema.

Como se puede observar en la identificación de los objetivos, así como en el propio planteamiento del problema, Daniela idealiza y generaliza la información (penaltis parados por cada portero y penaltis tirados en total a cada uno) y el requerimiento (pregunta sobre quién paró mejor los penaltis) del problema inicial para articular los objetos del entorno matemático del problema, en este caso, identificados como relaciones proporcionales y comparación de fracciones. Tras ello, particulariza estos objetos abstractos en el contexto dado (lanzamientos de penaltis) y los representa a través del lenguaje natural para modificar el requerimiento del problema ("en proporción al número total de balones lanzados").

3.4. Reflexión final

En este capítulo hemos fundamentado e ilustrado un modelo teórico de creación de problemas que, partiendo de la descripción de los elementos de un problema matemático y las categorías de elaboración de problemas propuestas por Malaspina y colaboradores, recoge y articula diversos aspectos de modelos desarrollados en investigaciones anteriores (Akay y Boz, 2010; Baumanns y Root, 2021a, 2021b, 2022; Christou et al., 2005; Stoyanova y Ellerton, 1996; Van Harper y Presmeg, 2013). Este marco articula el análisis epistémico de los procesos implicados, la categorización de tareas de creación de problemas en base a los componentes de un problema y los tipos de conocimiento didáctico-matemático que involucran.

La revisión de la literatura nos ha permitido observar que, si bien se encuentran investigaciones sobre el proceso de creación de problemas (Christou et al., 2005; Cruz, 2006; Koichu y Kontorovich, 2013; Ponte y Henriques, 2013; Pelczer y Gamboa, 2009; Zhang et al., 2022) lo hacen esencialmente desde un punto de vista cognitivo y no desde el punto de vista de la complejidad de la configuración de objetos y procesos matemáticos que involucra. La consideración de la creación de problemas como un mega-proceso, permite tomar conciencia de la complejidad intrínseca a esta actividad, profundizando sobre los diferentes procesos que tienen lugar en la secuencia de acciones desarrolladas durante la creación de un problema matemático. Además, el enfoque propuesto describe los distintos tipos de tareas de creación de problemas en función de la información proporcionada para su elaboración, así como sus finalidades matemáticas o didáctico-matemáticas.

Nuestro modelo proporciona un instrumento para analizar el mega-proceso de creación de problemas. Cuando la tarea de creación de problemas se propone a estudiantes, a priori, el modelo permite al investigador o al profesor reflexionar sobre la adecuación de la información suministrada al alumno para crear el problema, así como tomar conciencia de la complejidad intrínseca a los procesos matemáticos que se suceden hasta llegar al problema como producto final. A posteriori, permite un análisis microscópico de la actividad matemática que han llevado a dicho resultado.

Cuando el objetivo es la formación de profesores, usado a priori el modelo permite a los formadores de profesores diseñar actividades de creación de problemas teniendo en cuenta las prácticas, objetos y procesos matemáticos que implica, así como las acciones (prácticas didácticas) que se ponen en juego, su secuenciación (procesos didácticos) y las entidades emergentes de tales acciones (objetos didácticos) que determinan la dimensión didáctica de la creación de problemas (Figura 3.2). A posteriori, permite evaluar la competencia lograda y detectar los procesos (matemáticos o didácticos) que han podido ocasionar dificultades en su caso, orientando la instrucción hacia el desarrollo de dichas capacidades. La creación de problemas en este caso forma parte de una macroestructura (Kontorovich et al., 2012) organizada en torno a las diferentes facetas del conocimiento especializado del profesor (Godino, Giacomone et al., 2017), que amplía la perspectiva de investigaciones previas (Baumann y Rott, 2022; Contreras, 2007; Cruz, 2006; Grundmeier, 2015; Koichu y Kontorovich, 2013; Pelczer y Gamboa, 2009).

CAPÍTULO 4. CREACIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD EN LA FORMACIÓN DE MAESTROS

El contenido de este capítulo se encuentra publicado en los siguientes artículos:

- Burgos, M. y Chaverri, J. (2022). Conocimientos y competencias de futuros maestros para la creación de problemas de proporcionalidad. *Acta Scientiae, 24*(6), 270–306. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7061
- Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de maestros de primaria. *Uniciencia, 37*(1), 1–24. https://doi.org/10.15359/ru.37-1.14

4.1. Introducción

Las investigaciones sobre creación de problemas de matemáticas con propósitos didácticos mencionan, de manera explícita, su vínculo con las competencias docentes y señalan la importancia de incluir la invención de problemas en los programas de formación de profesorado (Ellerton, 2013; Espinoza et al., 2014; Malaspina, 2016; Mallart et al., 2018; Milinković, 2015; Silver, 2013; Tichá y Hošpesová, 2013). Además de resolver problemas, el docente debe ser capaz de adaptarlos o crearlos con fines didácticos, así como de evaluar críticamente la calidad de la actividad matemática que promueven (Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019). Sin embargo, docentes con años en ejercicio tienen dificultades para crear problemas relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, plantean enunciados que no están adaptados al nivel educativo, son incorrectos o incompletos, y mayoritariamente en un contexto exclusivamente intra-matemático (Ellerton, 2013; Mallart et al., 2018; Singer y Voica, 2013).

En nuestro caso, centramos la atención en la proporcionalidad. A pesar del gran número de aplicaciones del razonamiento proporcional en diferentes contextos (Balderas et al., 2014; Lundberg, 2011), diversas investigaciones señalan la limitada comprensión de la razón y proporción, así como las dificultades para enseñar las nociones fundamentales de la proporcionalidad que muestran tanto docentes en formación inicial como en servicio (Ben-Chaim et al., 2012; Balderas et al., 2014; Buforn et al., 2018; Burgos y Godino, 2021; Riley, 2010; Rivas et al., 2012; entre otras). En particular, el profesorado encuentra limitaciones para diferenciar situaciones proporcionales de otras que no lo son (Fernández et al., 2012). Por un lado, el conocimiento insuficiente del contenido matemático, en nuestro caso la proporcionalidad, limita su capacidad para crear problemas pertinentes; pero, por otro, dicho conocimiento no es suficiente para que formulen problemas que respondan a determinados requerimientos matemáticos o didácticos (Burgos y Godino, 2021; Rivas et al., 2012).

Las intervenciones desarrolladas con profesores en formación (Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2020b, 2021, 2022a, 2022b; Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018), empleando los constructos teórico-metodológicos del EOS, muestran el estrecho vínculo entre la capacidad de crear problemas que faciliten los aprendizajes de los estudiantes y su competencia de análisis didáctico.

En este capítulo se describe el diseño, implementación y resultados de una intervención formativa con futuros maestros de primaria, destinada a desarrollar su competencia para crear problemas matemáticos de proporcionalidad con fines didácticos, siguiendo el esquema desarrollado por Malaspina y colaboradores (Malaspina, 2013; Malaspina et al., 2015; Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018).

4.2. Contexto y participantes

La acción formativa se llevó a cabo con 127 FM (dos grupos de 61 y 66 estudiantes) en el marco de la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria, en la Universidad de Granada. Los participantes habían estudiado la proporcionalidad como parte de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria durante su primer semestre de formación universitaria. En esta asignatura se espera que los FM lleguen a conocer y articular los principales conceptos, procedimientos y sus propiedades en los diferentes temas de las matemáticas de Educación Primaria y sean capaces de enunciar y resolver problemas matemáticos de manera flexible en una variedad de situaciones y contextos, comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas. En la asignatura de segundo (cuarto semestre) los estudiantes recibieron formación específica sobre los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas tanto en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), como instruccionales (tareas y actividades, materiales y recursos). En la asignatura en la que se desarrolla la experiencia, los FM deben profundizar y emplear los conocimientos adquiridos en los cursos previos para fundamentar, diseñar y valorar unidades didácticas. En particular, uno de los focos fundamentales de la asignatura es el análisis, diseño y secuenciación de tareas matemáticas de acuerdo con unos contenidos y expectativas de aprendizaje específicas.

4.3. Diseño e implementación de la intervención

La intervención se desarrolló a través de cuatro momentos diferenciados. En la primera sesión formativa, llevada a cabo durante la clase de teoría (dos horas de duración) se presentaron las nociones de tarea matemática, prácticas y objetos matemáticos. Se destacó la importancia de que el profesor seleccione, diseñe y secuencie tareas que permitan promover eficazmente el aprendizaje de sus escolares, presentado como elementos [1] que guíen la búsqueda, selección y modificación de las tareas, los siguientes:

- *Contenido matemático* que involucra: objetos matemáticos, significados, contextos.
- *Finalidad*: Expectativas de aprendizaje (objetivos específicos y competencias) que permite desarrollar.
- *Limitaciones de aprendizaje:* Posibles dificultades y errores que pueden aparecer en su resolución.
- *Nivel de complejidad*. Los FM están familiarizados con los niveles de complejidad según el marco PISA (OCDE, 2005): *reproducción* (implican procedimientos y algoritmos rutinarios, uso de conceptos y propiedades matemáticas familiares al estudiante), *conexión* (problemas no meramente rutinarios pero que se sitúan aún en contextos familiares al estudiante; plantean mayores exigencias en su interpretación y requieren establecer relaciones entre distintas representaciones o enlazar diferentes aspectos de la situación para resolverla), *reflexión* (implica creatividad para identificar objetos matemáticos relevantes, requieren generalización de conocimientos previos para resolver problemas originales argumentación de los resultados).

[1] Estos elementos aparecen contemplados en el programa de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum en cuyo marco se desarrolla la intervención.

Esta sesión se organizó sobre el análisis de tareas, algunas de las cuales fueron de proporcionalidad, recordando las configuraciones epistémicas que emergen de las prácticas asociadas a los distintos significados y algunas de las dificultades y errores sobre dicho contenido identificadas en las investigaciones en didáctica de las matemáticas (estudio preliminar).

En la siguiente sesión práctica (una hora de duración), los FM trabajaron con sus equipos habituales de trabajo en el análisis de una tarea matemática (centrada en la construcción a escala de un puzle y asignación proporcional de precios a sus piezas) siguiendo los elementos descritos. La tercera sesión (dos horas de duración) se centró en dar a conocer a los FM la metodología para la creación de problemas descrita en la sección previa, insistiendo en la importancia de la invención de problemas, el papel que desempeña dentro del currículum y su desarrollo, así como en la necesidad de que los docentes adquieran la capacidad de crear problemas de matemáticas, para poder orientar adecuadamente el desarrollo de tal capacidad en sus alumnos. En esta sesión formativa, se emplearon también algunos ejemplos de tareas de proporcionalidad, entre otros, para mostrar la creación de problemas por variación o por elaboración, recordando nuevamente los conocimientos necesarios sobre el razonamiento proporcional. En la cuarta sesión (una hora de duración), los estudiantes trabajaron de nuevo de forma colaborativa, formando un total de 33 equipos de trabajo (19 equipos en un grupo y 14 en otro, a los que nos referiremos como E1, E2, etc.) para responder a las consignas siguientes sobre creación de problemas (Burgos, Chaverri y Castillo, 2022; Chaverri y Burgos, 2023) (ver Anexo I).

- *Tarea 1. Creación de problemas por variación.* A partir de la siguiente situación, sacada de un libro de texto de educación primaria, debéis crear tres problemas por variación, de manera que en los tres problemas que creéis no cambien siempre los mismos elementos respecto del enunciado inicial.

  Calcula el dato que falta

Entradas	*17*	*9*
Precio	*85*	*x*

- *Tarea 2.* Crea un problema en el que los alumnos deban distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y no todas las razones que intervengan sean enteras.

- *Tarea 3*. Crea a partir de la siguiente situación dos problemas de proporcionalidad en los que consideres que el grado de complejidad es distinto. Identifica en cada caso los objetos matemáticos que intervienen, las posibles dificultades que podrían encontrar alumnos de primaria, indicando el curso para el que estarían destinados:

  Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17,80 euros. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 euros.

Así, mientras que la finalidad de las tareas 1 y 2 tiene un carácter matemático o didáctico-matemático epistémico, la de la tarea 3 tiene un carácter cognitivo. En efecto, con la primera tarea, se pretende valorar el grado de conocimiento logrado sobre los elementos que caracterizan un problema y la flexibilidad de los FM para crear problemas significativos partiendo de una situación dada cuando deben variar de diferentes formas dichos elementos. Con la segunda consigna se persigue, por un lado, valorar el conocimiento-didáctico matemático de los FM sobre aspectos esenciales del razonamiento proporcional, como son reconocer razones enteras (relación de divisibilidad entre los términos) y no enteras en la relación de proporcionalidad, identificar la relación multiplicativa en situaciones proporcionales (la relación entre las magnitudes es de la forma $y = kx$, siendo k una constante) y distinguirla de la relación aditiva (la relación entre las magnitudes es de la forma $y = x + k$, siendo k una constante) (Fernández y Llinares, 2011; Lamon, 2007; Van Dooren et al., 2008). Por otro, persigue evaluar su competencia para crear problemas en los que se pueda diagnosticar las posibles dificultades de alumnos de primaria con estos aspectos.

Según se establece en la tercera tarea, el entorno matemático en el que se deben crear los problemas es el de proporcionalidad. Por sí sola, la situación dada no determina un problema dado que no hay un requerimiento (no hay cuestión que se pida al alumno resolver). Crear el problema a partir de la situación supone, en particular, "añadir" las preguntas a la situación. Observamos que al solicitar que los problemas respondan al entorno de proporcionalidad y tener un nivel de complejidad diferente, se deben atender también a requerimientos didáctico-matemáticos. Sin embargo, el punto de partida para la elaboración de los problemas viene dado por la situación establecida. Las condiciones adicionales permiten delimitar la tarea de acuerdo con el interés de la investigación y realizar un análisis de características específicas en la misma. Los resultados de investigaciones previas (ver la revisión de Stahnke et al., 2016) muestran que tanto profesores en formación como en ejercicio tienen dificultades para analizar las tareas matemáticas (dejándose llevar por sus propias creencias), diferenciar tareas rutinarias de no rutinarias, identificar su potencial didáctico y elegir los formatos adecuados para fomentar el aprendizaje de sus alumnos. Por este motivo, proponemos a los FM que, como parte del análisis, reconozcan los objetos matemáticos implicados en su solución, las posibles dificultades asociadas y el curso para el que serían adecuados. Así, articulamos la creación de problemas con las competencias para el análisis de significados y análisis ontosemiótico de prácticas, objetos y procesos (Godino, Giacomone et al., 2017). Pedir a los FM que identifiquen las dificultades que pueden tener sus alumnos en los problemas que ellos plantean, nos permite diagnosticar y reforzar su conocimiento didáctico-matemático en la faceta cognitiva (Godino, Giacomone et al., 2017). Además, reflexionar sobre el curso al que estarían destinados, les ayuda a concretar el grado de complejidad atendiendo a los conocimientos que les son más o menos familiares a los estudiantes, según la planificación escolar.

4.3.1. Categorías de análisis. Tareas 1 y 2

Presentamos en esta sección las categorías empleadas para la valoración de las respuestas de los participantes a las tareas 1 y 2. Estas fueron establecidas a priori por el equipo investigador teniendo en cuenta el requerimiento de la actividad: por un lado, la significatividad del enunciado y, por otro lado, que se construya por variación del problema inicial en la primera tarea y que permita distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y no todas las razones involucradas sean enteras, en la segunda tarea. De manera general, un problema es *significativo* si: el enunciado propuesto establece realmente un problema matemático, tiene solución y no está implícita en el enunciado, su redacción es clara, no presenta ambigüedad (falta o redundancia en la información), y se identifiquen claramente los distintos elementos que lo caracterizan. Si no posee alguna de estas características se considera un problema no significativo.

En este caso, un problema se considera *pertinente* cuando además de ser significativo responde a las condiciones establecidas para su creación (por variación o por elaboración).

En la primera tarea, los FM debían crear tres problemas distintos, a partir de uno inicial, variando en cada ocasión al menos dos de sus elementos, pero no todos. Contemplamos las siguientes categorías para analizar el grado de éxito de los enunciados propuestos:

- Enunciado *no pertinente*. El enunciado propuesto no es significativo (Figuras 4.1 y 4.2), o bien es significativo, pero no se obtiene por variación del inicial, por ejemplo:

  > En una bolsa tenemos 85 bolas, 17 son rojas y el resto azules. ¿Qué probabilidad hay de sacar una bola azul? Y si el total es de 85 bolas y hay 17 azules, 25 bolas amarillas y 43 verdes, ¿cuál es la probabilidad de NO sacar una bola amarilla? (E33)

- Enunciado *poco pertinente*. El enunciado propuesto es significativo y se obtiene por variación de un solo elemento del problema inicial. Un ejemplo en esta categoría vendría dado por el siguiente enunciado, donde se cambia únicamente el contexto:

  > El grupo de 2ºB va a ir al teatro para ver una representación teatral de Lorca, son 17 alumnos y las entradas cuestan 85 euros. El grupo de 3ºA quiere ir también, pero son 9 alumnos. ¿Cuánto le costarán las entradas? (E27)

- Enunciado *pertinente*. El enunciado propuesto es significativo y se obtiene por la variación de más de un elemento del inicial, pero no todos (ver Figura 4.3).

En la siguiente tarea se pide a los FM que creen un problema cuya solución requiera distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y en el que no todas las razones involucradas sean enteras. Surgen así las siguientes categorías:

- Enunciado *no pertinente*. El enunciado propuesto no es significativo (Figura 4.6), o bien es significativo, pero no permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas (Figura 4.8, Figura 4.9).
- Enunciado *poco pertinente*. El enunciado propuesto es significativo, pero no cumple la finalidad didáctica, por ejemplo, permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas, pero todas las razones involucradas son enteras (véase la Figura 4.10).
- Enunciado *pertinente.* El enunciado propuesto es significativo, permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas y no todas las razones involucradas son enteras.

4.3.2. Categorías de análisis en la Tarea 3

Presentamos en esta sección las categorías empleadas para la valoración de sus respuestas a la tarea 3.

Pertinencia de los problemas y grado de complejidad asociado. El problema se considera *pertinente* si es significativo, parte de la situación inicial dada sin alterarla y es de proporcionalidad. De esta forma aparecen las siguientes categorías a priori:

- Ninguno de los problemas creados es pertinente.
- Solo un problema planteado es pertinente, pero no supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.
- Solo un problema planteado es pertinente y supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.
- Los dos problemas planteados son pertinentes, pero ambos corresponden al mismo nivel de complejidad.
- Los dos problemas planteados son pertinentes y sus niveles de complejidad son distintos.

Reconocimiento de objetos matemáticos. Los FM deben identificar los objetos matemáticos que intervienen en cada uno de los problemas creados. Se trata de que reflexionen sobre las configuraciones ontosemióticas en los problemas de proporcionalidad que ellos mismo elaboran y ayudarles a diagnosticar las posibles dificultades en la actividad matemática. De acuerdo con la finalidad del trabajo, centramos la atención en las configuraciones asociadas a los problemas de enunciado pertinente. En este caso, dentro de cada problema, se emplearon las siguientes categorías de análisis de reconocimiento de objetos (según la tipología del EOS para estos):

- *No responde*. Los FM no identifican los objetos matemáticos en el problema.
- *Incorrectos*. Todos los objetos matemáticos señalados por los FM son incorrectos.
- *Mayoría incorrectos*. Los FM identifican correctamente al menos uno de los objetos matemáticos en el problema, pero menos de la mitad.
- *Parcialmente correctos*. Los FM identifican correctamente al menos la mitad, pero no todos, los objetos matemáticos en el problema.

- *Correctos.* Todos los objetos matemáticos del problema son identificados correctamente.

Identificación de dificultades previstas en la resolución del problema. Por otro lado, los FM deben señalar las dificultades que podrían encontrar alumnos de primaria al resolver los problemas. Atendiendo a las categorías de objetos del EOS, se clasifican en:

- *Situacionales*, asociadas a la comprensión del enunciado del problema.
- *Conceptuales*, relacionadas a conceptos, sus descripciones o definiciones.
- *Proposicionales*, asociadas a las proposiciones o propiedades que relacionan conceptos.
- *Procedimentales*, vinculadas al desarrollo de técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentales*, relativas a la justificación de proposiciones y procedimientos.

4.4. Análisis y resultados de las respuestas a las tareas 1 y 2

A continuación, presentamos los resultados del análisis de contenido de las respuestas elaboradas por los equipos de trabajo a las tareas propuestas en la intervención, siguiendo las categorías establecidas en la sección previa.

4.4.1. Creación de problemas por variación

En la primera tarea, los FM debían crear tres problemas mediante la variación de al menos dos componentes del problema inicial, de manera que en las tres situaciones propuestas no modificasen siempre los mismos elementos respecto del enunciado de partida. La Tabla 4.1 muestra los resultados en relación con el grado de pertinencia de los 96 problemas creados por los 32 equipos (el equipo E17 no creó ninguno de los tres problemas solicitados).

Tabla 4.1
Distribución de frecuencia en la pertinencia de los problemas creados por variación por los FM (n=96).

Categoría	Frecuencia (Porcentaje)
Enunciado no pertinente	18 (18,75)
No significativo	13 (13,54)
Significativo, pero no por variación	5 (5,21)
Enunciado poco pertinente	16 (16,67)
Enunciado pertinente	62 (64,58)
Total	96 (100)

Como se observa en la Tabla 4.1, el 81,25% de los problemas creados fueron significativos y por variación de al menos un elemento en el enunciado inicial. Trece de los problemas propuestos por los FM se consideraron (no pertinentes) no significativos. En primer lugar, dos de ellos (creados uno por E5 y otro por E14), no formulan un problema, sino que demandan inventar uno. Así E5 plantea "Inventa un problema de proporcionalidad a partir de los siguientes datos". Otros cinco equipos plantearon un problema cuya solución se encuentra dentro del enunciado. Un ejemplo se muestra en la Figura 4.1.

> Marta se ha gastado 85€ en comprar 17 libros de aventuras y su Amiga Ana, se ha gastado 45€ en comprar los mismos libros que su amiga Marta ¿Cuántos libros habrá comprado Ana?

Figura 4.1. *Enunciado no significativo creado por E33 (con solución implícita).*

Es posible que este equipo pretendiera decir que "Ana se ha gastado 45 en comprar libros del mismo precio unitario que los que ha comprado Marta", lo que además llevaría a suponer que todos los libros que compró Marta tenían el mismo precio (algo no establecido en el enunciado). Sin embargo, tal cual se enuncia, Ana compró los mismos libros que Marta, por lo que la cantidad de libros comprados por ella es 17 (igual a Marta).

Los otros seis problemas no significativos presentan ambigüedades, que impiden dar una solución numérica o relacional al problema. Por ejemplo, en el enunciado propuesto por E4 que aparece en la Figura 4.2, se solicita determinar el precio total de las entradas de un grupo de alumnos del que no se conoce el número de personas que lo forman. Con la información dada no se puede dar respuesta al problema.

> En el colegio de Juan, los alumnos de 5° han comprado entradas para asistir a un teatro, si 5°A donde hay 17 alumnos ha pagado 85€ ¿Cuánto pagaran los alumno de 5°B en total?

Figura 4.2. *Problema no significativo, ambigüedad en el requerimiento (E4).*

Cinco equipos crearon un problema significativo, pero no pertinente, pues cambiaron los cuatro elementos (información, requerimiento, contexto o entorno) del problema inicial, por lo que no se consideran como variación del enunciado inicial. En la Tabla 4.2 se muestra la distribución de elementos que variaron los participantes en los problemas poco pertinentes (16 en los que se modificó un único elemento respecto del enunciado inicial) o pertinentes (62 que variaron dos o más elementos del problema inicial). Todos ellos corresponden a problemas en el entorno de la proporcionalidad.

Tabla 4.2
Distribución de frecuencias de los problemas poco pertinentes y pertinentes creados por los FM, según las combinaciones de los elementos variados del problema inicial (n=78).

Elementos variados	Combinaciones de elementos variados	Frecuencia (Porcentaje)
1	Información	2 (2,56)
	Contexto	14 (17,95)
2	Información y requerimiento	3 (3,85)
	Requerimiento y contexto	6 (7,69)
	Información y contexto	19 (24,36)
3	Información, requerimiento y contexto	34 (43,59)

Como se observa en la tabla anterior, la combinación de elementos que los FM varían con mayor frecuencia en el problema inicial para crear otros son: información, requerimiento y contexto (43,59% de los problemas propuestos con cierto grado de pertinencia). Esto puede deberse a la mayor dificultad que supone para los FM modificar la información (lo que se da) sin modificar el requerimiento (lo que se pide) o recíprocamente, algo que ellos mismos plantean a la profesora durante la intervención. En la Figura 4.3 se presenta un ejemplo de problema creado por uno de los equipos en el que se varían estos tres elementos.

Jesús y su grupo de amigos fueron al parque de atracciones el pasado domingo. Al llegar a la taquilla, pidieron 17 entradas, y le cobraron 85 €. Al abandonar la taquilla, las chicas del grupo han pagado 45 €. ¿Cuántas chicas hay en el grupo?

Figura 4.3. *Problema pertinente elaborado por variación de la información, requerimiento y contexto (E28).*

También se puede observar en la Tabla 4.2 que el contexto aparece modificado en 73 (93,59%) de los problemas, luego es el componente que presenta mayor variación (considerando todas las combinaciones que lo incluyen). En 65 (83,33%) de los problemas propuestos el contexto es extra-matemático. En estos casos tienden a emplear mayoritariamente (en 45 enunciados) situaciones de ocio en las que las magnitudes relacionadas son “cantidad de entradas” (al cine, conciertos, parques de atracciones, partidos, teatros, entre otras) y “precio”, seguido de situaciones de compra de algún objeto (6 problemas) y actividades que implican cálculos de tiempo (5 problemas). Como en el trabajo de Tichá y Hošpesová (2013), los FM se alejan poco del contexto de la situación inicial para crear los demás problemas. Esto sugiere, como ya observaron Balderas et al. (2014), ciertas limitaciones de los FM para inventar problemas con distintas magnitudes relacionadas o contextos, y la tendencia a conservar una estructura similar al del problema dado.

La información es el segundo elemento que los FM varían con mayor frecuencia respecto del problema original (Tabla 4.2). Este se modificó en 58 (74,36%) de los problemas. En este caso, los participantes cambiaron principalmente los valores conocidos, pero mantuvieron la posición de éstos y no añadieron nuevos datos al enunciado. Se concibe además la proporcionalidad siempre desde un enfoque aritmético (Aroza et al., 2016). En la Figura 4.4 se muestra un ejemplo de problema poco pertinente, en el que los FM variaron únicamente la información.

★ Calcula el el dato que falta:

ENTRADAS	*17*	*9*
PRECIO	*X*	*17*

Figura 4.4. *Problema elaborado por variación única de la información (E27).* Elaboración propia.

De los 24 equipos que crearon más de un problema pertinente, solo dos equipos diseñaron tres problemas en los que no siempre variaron los mismos elementos (respondiendo a lo que se pedía en la tarea); catorce crearon al menos dos problemas variando una combinación diferente de los elementos del problema inicial (ver Figura 4.5); siete equipos propusieron solo dos problemas con los mismos elementos variados; y un equipo creó los tres problemas con la misma modificación en los elementos del problema propuesto.

Problema 1. Variación de la información, requerimiento y contexto.

En un cine nos informan de que 17 entradas tienen un precio de 85€. Si solamente quiero comprar 1 entrada y además pagar la suscripción de socio del cine que cuesta 20€ ¿cuánto pagaré en total?

Problema 2. Variación de información y contexto.

Jesús se ha gastado en la entrada de un concierto 7€. ¿Cuánto dinero se gastará si le compra la entrada a 4 amigos más?

Figura 4.5. *Problemas con una combinación diferente de elementos variados (E25).*

Como se observa en la Figura 4.5, en ambos problemas propuestos, el equipo E25 varía el contexto respecto del enunciado inicial y la información. En el Problema 2, el requerimiento lleva igual que en el problema inicial a determinar un valor faltante (con la salvedad de que, en este caso, se conoce el valor unitario), mientras que en el Problema 1 se cambia uno de los datos conocidos en el problema de partida (en lugar de 9 entradas utiliza 1) y el requerimiento supone determinar el precio de una entrada (situación proporcional) y, además, el coste añadiendo el precio de la suscripción (aditiva).

4.4.2. Creación de problemas a partir de un requerimiento didáctico-matemático

En la segunda consigna, los FM debían crear un problema que llevara a distinguir situaciones directamente proporcionales de situaciones aditivas y que las razones involucradas no fueran todas enteras (requerimiento didáctico-matemático). En este caso, como se observa en la Tabla 4.3, casi la totalidad de los problemas creados son no pertinentes.

Tabla 4.3
Distribución de categorías y frecuencias de problemas creados por requerimiento didáctico-matemático (n= 33).

Categorías		Frecuencia (%)
Enunciado no pertinente		32 (96,97)
	No significativo	14 (42,42)
	Significativo, pero no permite distinguir situaciones proporcionales de aditivas	18 (54,55)
Enunciado poco pertinente		1 (3,03)
Enunciado pertinente		0 (0)

Gran parte de los problemas elaborados por los FM en esta tarea fueron no significativos. En este caso, la razón principal se debe a que doce de los enunciados propuestos son ambiguos (no dejan claro el requerimiento o la relación entre las magnitudes involucradas) y dos no se consideraron problema, dado que piden al alumno determinar si ciertas proposiciones (en relación con magnitudes directamente proporcionales) son correctas o decidir qué situaciones responden a una relación de proporcionalidad directa (o inversa). A continuación, mostramos ejemplos para los enunciados identificados.

El problema propuesto por E11 (Figura 4.6) muestra un ejemplo de enunciado ambiguo, pues no se establece la condición de regularidad: "el consumo es constante en ambos coches", que necesaria para contestar la primera pregunta. Además, suponiendo el consumo constante, las razones 3,5 a 10 frente a 3 a 10 permiten decidir cual tiene un mayor consumo, lo que responde directamente a la segunda pregunta planteada por E11. En todo caso, no se hace mención del precio del litro de combustible que no tiene por qué ser el mismo para ambos tipos (gasoil o gasolina).

Antonio tiene que hacer un viaje de 25 km, y tiene que comprarse un coche para hacerlo. Ha encontrado dos coches, el primer coche de gasolina gasta 3.5 litros en 10 km, y el segundo coche de gasoil gasta 3 litros en 10 km. ¿Cuánto gasta cada coche en 25 km? ¿Con cuál gastaría más de los dos?

Figura 4.6. *Problema no significativo (E11).*

Esta falta de reflexión por parte de los FM sobre las condiciones que permiten reconocer si una situación es de proporcionalidad directa al plantear un problema, es un hecho muy frecuente en las propuestas de los equipos. Como se observa en el enunciado propuesto por E7 en la Figura 4.7, no se establecen las condiciones de regularidad (todas las barras de pan cuestan lo mismo, los obreros trabajan a igual ritmo, el caudal del grifo es constante, etc.) que permitan responder si la frase es correcta o no en base a la existencia o no de una relación de proporcionalidad directa, inversa o de otro tipo.

Señala las frases correctas:

-Al comprar el doble de barras de pan, nos cobran el doble.
-Si un obrero tarda 10 horas en levantar un muro, dos obreros tardarán 5 horas en levantar el mismo muro.
-Si tengo 10 años y peso25 kilos, cuando tenga 20 años pesaré 50 kilos.
-Una camiseta cuesta 15,50 euros, si compro dos tendré que pagar el doble, aunque haya un descuento del 20 por ciento en la segunda prenda.
-Si un grifo de agua abierto echa 5 litros de agua si está abierto 1 minuto, si lo dejamos abierto 3 minutos echará 15 litros de agua.

Figura 4.7. *Enunciado no considerado problema (E7).*

De la Tabla 4.3 se sigue que más de la mitad de los problemas (18 de los 33), si bien eran significativos no permitían distinguir situaciones proporcionales de aditivas. En su mayoría, catorce, presentan solo situaciones proporcionales, de estos, cuatro tienen todas las razones enteras y diez utilizan razones donde no todas son enteras. Los restantes, no incluyen situaciones proporcionales, sino que o bien establecen una relación aditiva entre magnitudes, o bien, plantean un problema aditivo de comparación. Aunque en principio esta dificultad para plantear un problema que permita distinguir situaciones proporcionalidades de aditivas puede venir motivado por la propia dificultad en los futuros docentes para diferenciarlas (Balderas et al., 2014; Buforn y Fernández, 2014; Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2020b, 2021, 2022a), en otros casos, se observa que la limitación la encuentran para involucrar ambas relaciones entre diferentes magnitudes en un mismo problema.

Mónica y Juan están corriendo a la misma velocidad en el patio del colegio, pero Mónica salió al recreo un poco más tarde porque no había hecho los deberes del día anterior. Cuando Mónica llevaba 3'5 vueltas, Juan llevaba ya 7. Ahora Mónica ha dado 15 vueltas, ¿cuántas vueltas lleva Juan?

En este problema, los estudiantes tienden a utilizar incorrectamente métodos multiplicativos al identificar "el doble" en la oración Cuando Mónica llevaba 3'5 vueltas, Juan llevaba ya 7. Por este motivo, utilizan la relación del doble (x2) para calcular las vueltas que lleva Juan al final cuando habría que sumarle 3'5 a las vueltas de Mónica al ser esta una situación aditiva.

Figura 4.8. *Problema significativo, no pertinente: relación aditiva entre magnitudes (E1).*

Por ejemplo, en la Figura 4.8, se incluye el problema propuesto por E1, en el que la relación entre las magnitudes (número de vuelta al patio dadas por Mónica y número de vueltas dadas por Juan) es aditiva (Juan siempre le lleva 3,5 vueltas de ventaja). El equipo E1 diferencia situaciones aditivas de proporcionales y reconoce el error frecuente en estudiantes para tratar como multiplicativa una relación aditiva. Sin embargo, su enunciado no involucra ambos tipos de situaciones como se esperaba.

En relación a esta dificultad, los FM consideran que "distinguir" una situación proporcional de una aditiva supone proponer problemas de dos etapas: una que plantea la relación entre una (o dos) relaciones multiplicativas entre magnitudes (por ejemplo, en el enunciado de la Figura 4.9, número de libretas -precio pagado por ellas y número de paquetes de subrayadores-precio pagado por ellos) y después una segunda etapa en el problema se resuelve con una operación aditiva, suma frecuentemente ("¿Cuánto dinero ha gastado?", en la Figura 4.9).

> Antonia tiene que comprar 5 libretas y tres paquetes de subrayadores. Cada libreta cuesta 2,50€ y cada paquete de subrayadores 5€. ¿Cuánto dinero ha gastado?

Figura 4.9. *Problema significativo, no pertinente: solo situación proporcional, precio unitario decimal (E16).*

Los participantes tienen mayor facilidad para establecer razones enteras y no enteras en problemas donde no distinguen situaciones proporcionales de aditivas. Cuando los FM buscan razones no enteras (relación $a:b$ cuando a no es múltiplo o divisor de b) recurren en su mayoría a la expresión de la razón como número decimal (si bien estas razones se entienden como relaciones entre números enteros), estableciendo la relación que consideran no enteras usualmente entre distintas magnitudes (precio unitario decimal como se ve en la Figura 4.9).

Finalmente, la Tabla 4.3 pone de manifiesto que ninguno de los equipos logró responder de manera correcta y completa a lo que se les solicitaba de forma explícita en esta tarea. Sólo un equipo planteó un problema (Figura 4.10) que involucra situaciones aditivas y proporcionales, si bien todas las razones son enteras.

> Andrea y sus tres hermanas quieren ir de vacaciones a Canarias, en la agencia de viajes les han explicado que los vuelos cuestan 95 euros por persona. Sin embargo, si se hacen clientes de la agencia de viajes, los vuelos pasarán a costar 60 euros por persona. Sabiendo que para hacerse socios deben pagar 100 euros entre las cuatro hermanas, ¿cuánto pagarían las hermanas en cada uno de los casos?, ¿qué opción es más rentable?

Figura 4.10. *Problema poco pertinente. Distingue situaciones proporcionales de aditivas, pero todas las razones son enteras (E9).*

4.5. Análisis y resultados de las respuestas a la tarea 3

A continuación, presentamos los resultados del análisis de contenido de las respuestas elaboradas por los equipos de trabajo a la tarea propuesta, siguiendo las categorías establecidas en la sección previa.

4.5.1. Pertinencia y grado de complejidad de los problemas elaborados por los FM

Como se observa en la Tabla 4.4, los FM tuvieron dificultades para elaborar problemas pertinentes a partir de la situación dada; sólo 5 equipos respondieron adecuadamente a la tarea elaborando dos problemas pertinentes con grados de complejidad distintos.

Tabla 4.4
Distribución de los equipos de FM de acuerdo la pertinencia y grado de complejidad de los problemas creados (n=33).

Categorías	Frecuencia (%)
Ninguno de los problemas creados es pertinente.	16 (48,48)
Solo un problema planteado es pertinente, pero no supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.	5 (15,15)
Solo un problema planteado es pertinente y supone un cambio en el nivel de complejidad respecto al otro.	7 (21,21)
Los dos problemas planteados son pertinentes, pero tienen el mismo nivel de complejidad.	0 (0,00)
Los dos problemas planteados son pertinentes y tienen distintos niveles de complejidad.	5 (15,15)

De los 66 problemas que se analizaron (dado que cada equipo debía crear dos problemas en la tarea), 44 se valoraron como no pertinentes. De estos 44 problemas no pertinentes, 28 son además no significativos, fundamentalmente porque los enunciados son ambiguos, les falta claridad o no se pueden resolver. Por ejemplo, en la Figura 4.11 el equipo E19 propone un problema en el que se debe comparar el peso de dos tartas y decidir si el precio fuera proporcional al peso (aquí incluyen una errata en su enunciado), cuál sería más cara. Sin embargo, a partir de las dimensiones de la tarta no se puede determinar su peso, por lo que no se puede responder al requerimiento.

> *Ana encuentra dos tartas para regalar en un cumpleaños y sabe que una pesa 500 g pero la segunda no especifica el peso aunque sí especifica las medidas y encontramos que mide 10 centímetros de largo, 10 centímetros de ancho y 6 centímetros de grosor. ¿Qué tarta pesa más? Si el peso fuese proporcional al peso, ¿Cuál sería más cara?*

Figura 4.11. *Enunciado no significativo. No se puede resolver (E19).*

En la Figura 4.12 mostramos uno de los problemas que propone E25. En este enunciado se conserva la situación inicial, sin embargo, no deja claro si las entradas de Pablo son del mismo tipo que las de Julio (por lo que tendrán un determinado precio) o del tipo de las de Clara (tendrán otro) o de qué forma se puede determinar su valor unitario.

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80€. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21€. Al final de la tarde se une a Julio y Clara su amigo Pablo. Clara decide que por ser su cumpleaños lo va a invitar a las atracciones que quiera. Pablo se sube en 6 atracciones, sabiendo que Clara ha pagado 21€ subiéndose en 10 atracciones, ¿Cuánto tendrá que pagarle a Pablo?

Figura 4.12. *Problema no significativo, enunciado ambiguo (E25).*

De los 16 problemas que se consideran significativos, aunque no pertinentes, 11 mantienen el entorno de la proporcionalidad (al menos de forma implícita) modificando parcial (Figura 4.13) o totalmente la información dada en la situación de partida.

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 4 atracciones y le ha costado 10 euros. Clara se ha montado en 8 atracciones y ha pagado 20 euros. Si se gastaran cada uno 25 € ¿en cuántas atracciones se podrán subir?

Figura 4.13. *Problema no pertinente. Modifica parcialmente la situación dada (E24).*

Los otros 5 enunciados significativos, pero no pertinentes, mantienen parcialmente la situación, pero plantean problemas aditivos de comparación (4) o combinación (1). Por ejemplo, en la Figura 4.14 se aprecia que el problema propuesto por el equipo E1, que si bien parte de la situación dada, pero precisa calcular la diferencia entre los gastos totales de Julio y Clara, lo que no refiere a una situación proporcional sino a un problema aditivo de comparación.

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80 €. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 €. ¿Cuánto se ha gastado Clara más que Julio?

Figura 4.14. *Problema no pertinente, creado fuera del entorno de proporcionalidad (E1).*

Los 22 (de un total de 66) problemas creados de manera pertinente por los FM responden fundamentalmente a estos tipos:

a) Se consideran dos pares de magnitudes directamente proporcionales: número de entradas-precio pagado por ellas para cada uno de los niños. Se da un nuevo valor conocido del número de entradas que se desea comprar para cada uno de ellos (común o no) y se requiere determinar el nuevo precio, o bien, se pide determinar la cantidad de entradas de cada tipo que puede comprar cada niño (ver Figura 4.15). Esta categoría se encuentra en 10 de los problemas pertinentes creados.

b) Se consideran dos pares de magnitudes directamente proporcionales: número de entradas-precio pagado por ellas para cada uno de los niños. Se requiere comparar los valores unitarios (precio de una única entrada) en cada caso, usualmente para decidir qué niño obtuvo un mejor precio por su entrada (Figura 4.16). De este tipo, se encuentra 8 problemas pertinentes.
c) Se consideran que las dos magnitudes número de entradas (entendidas todas del mismo tipo) y precio son directamente proporcionales. Se entiende que la diferencia de precio total de los niños es porque se compró un bono, otro artículo o bien se aplicó un descuento (en este caso a Clara). Se requiere averiguar el precio del bono o bien del descuento aplicado-pregunta si estas son directamente proporcionales. Supone aceptar que tanto Julio como Clara deberían haber pagado el mismo precio unitario (Figura 4.17). De esta categoría, se proponen 4 problemas.

A continuación, consideramos cuál fue el grado de complejidad real en aquellos problemas considerados pertinentes y cómo lo valoraron los FM. De los 22 problemas pertinentes, 8 corresponden al grado de reproducción, 8 al de conexión y 6 al de reflexión. De estos, solo 11 fueron clasificados por los equipos de FM: 10 según los niveles de PISA, de ellos 6 correctamente (uno de reproducción, dos de conexión y tres de reflexión), y otro como de “contexto y familiaridad” (E6). Aquellos que lo hicieron de forma incorrecta, dieron un nivel mayor de complejidad del realmente implicado (conexión por reproducción y reflexión por conexión). Además, pocos justificaron la valoración de dicho grado. Esto muestra que, a pesar de que la mayoría de los equipos (doce de diecisiete) que crearon problemas pertinentes, lo hicieron con niveles de complejidad distintos (Tabla 4.4), tuvieron dificultades para identificar adecuadamente el grado de complejidad real de su problema. Estas limitaciones pueden deberse a que los FM: (a) no conocen claramente lo que caracteriza a cada nivel, por ejemplo, consideran que un problema es de nivel de reflexión siempre que solicita una justificación (si incluye “justifica tu respuesta”), independientemente de los procesos implicados; (b) no tienen en cuenta cuáles son los conocimientos de los alumnos en los cursos en los que plantean los problemas; y como veremos (c) tienen dificultades para identificar la red de objetos que intervienen en los problemas de proporcionalidad, aun cuando son ellos mismos quienes los crean.

Para valorar si el curso para el que los FM proponen los problemas es apropiado, se debe tener en cuenta los conocimientos que requieren los alumnos que deban resolverlo, en relación con los contenidos curriculares y las programaciones de los cursos de educación primaria. Como puede verse en la Tabla 4.5, éste es adecuado en 13 de los 22 problemas pertinentes.

Tabla 4.5
Relación entre el grado de complejidad y curso en problemas pertinentes.

		Curso al que va dirigido			
		Correcto	Incorrecto	No indica	Total
Grado de complejidad	Correcto	4	1	0	5
	Incorrecto	4	2	0	6
	No indica	5	3	3	11
	Total	13	6	3	22

Además, observamos que cuando los FM identifican el grado de complejidad de manera correcta, mayoritariamente escogen de forma adecuada el curso. Cuando asignan correctamente el curso y el grado de complejidad, son problemas propuestos para tercer ciclo que responden a los tres niveles de complejidad. En el caso de identificar de forma incorrecta el curso, los FM proponen problemas que involucran división de números decimales para tercer o cuarto curso de primaria, por lo que no se consideran pertinentes según el currículum. Mencionemos además que, de los 44 problemas no pertinentes, 37 no indicaron el grado de complejidad y 9 tampoco el curso para el que estarían destinados. En la Figura 4.15, se incluye un problema correspondiente al nivel de reproducción.

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17,80€. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21€. ¿Cuánto le costará a Julio montarse en 5 atracciones más de las que ya se ha montado? ¿Y a Clara?

Figura 4.15. *Problema de reproducción (E31).*

El equipo E31 justifica este grado de complejidad indicando que los alumnos "deberán utilizar procesos rutinarios y realización de operaciones sencillas. En este caso, una regla de 3 para cada una de las preguntas". Esto es correcto, siempre que el problema se plantee para 6º que es cuando se suele enseñar la regla de tres como procedimiento para resolver problemas de proporcionalidad. En otro caso (por ejemplo, en 5º curso para el que E31 plantea el enunciado) los estudiantes podrían usar otros procedimientos que pasarían por obtener el valor unitario en el caso de Julio, o incluso, en el caso de Clara obtener la mitad del precio (dado que el número de atracciones por las que se pregunta ahora es exactamente la mitad del comprado previamente).

> *Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80 €. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 €. ¿Quién crees que ha escogido mejor teniendo en cuenta la relación cantidad-precio? Justifica tu respuesta.*

Figura 4.16. *Problema del nivel de conexión (E29).*

La Figura 4.16 presenta uno de los problemas que propone E29 para 6º curso de primaria. En este caso, el equipo asigna nivel de complejidad de reflexión indicando que "se pide al alumno que realice un razonamiento complejo y lo recoja por escrito de forma justificada". Sin embargo, consideramos que su nivel correcto es de conexión. El alumno debe decidir la mejor opción en base a la relación cantidad (de entradas) y precio (pagado por estas). Supone una comparación relativa, que pasa por comparar las razones o bien por obtener el precio unitario. Sin embargo, estos son conceptos y procedimientos que el estudiante (de 6º de primaria) conoce.

Finalmente, la Figura 4.17 incluye un problema propuesto por E26 para tercer ciclo de educación primaria (no indica el curso) y que, si bien no lo clasifica, consideramos que estaría próximo al nivel de reflexión.

> *Julio y Clara han ido juntos a un parque de atracciones. Julio se ha subido en 8 atracciones y ha gastado 17.80€, mientras que Clara ha montado en 10 atracciones y se ha gastado 21€. Uno de los dos se acordó de que tenía un ticket de descuento. ¿Quién de los dos tiene el ticket? ¿Qué porcentaje de descuento ofrece el ticket?*

Figura 4.17. *Problema del nivel de reflexión (E26).*

El planteamiento pasa por aceptar que las entradas de Julio y de Clara tienen el mismo precio unitario, por lo que la diferencia se debe a que a uno le aplicaron un descuento inicial. Esto supone reconocer y distinguir la parte proporcional de la aditiva para decidir a quién aplicaron el descuento.

4.5.2. Identificación de objetos matemáticos

Con la identificación de los objetos matemáticos se espera que los FM fijen la atención en aquellos elementos propios de la actividad matemática que pueden explicar las posibles dificultades que encuentren los escolares ante los problemas que ellos, como futuros docentes han propuesto.

A continuación, se analizan los objetos matemáticos identificados por los equipos de trabajo en los 22 problemas pertinentes de proporcionalidad que crearon en la consigna previa. La Tabla 4.6, muestra estos resultados a partir de 17 problemas pertinentes, ya que en cinco casos los FM mencionaron algunos objetos matemáticos, pero no especificaron a cuál de los dos problemas pertenecían o a qué tipo de objeto. Por ejemplo, E14 indica como objetos "razón parte-todo, valores simbólicos (euros, €), mayor o menor, multiplicación, división", pero no aclara si son conceptos o procedimientos; tampoco indica cuáles son del primer o segundo problema.

Tabla 4.6
Frecuencia de identificación de objetos matemáticos en los problemas pertinentes (n=17).

Objetos	NR	IN	MI	PC	CO
Lenguajes	3	0	0	11	3
Conceptos	2	2	5	7	1
Proposiciones	9	8	0	0	0
Argumentos	10	5	2	0	0
Procedimientos	2	3	0	4	8

Nota. NR= no responde, IN= incorrectos, MI=mayoría incorrectos, PC= parcialmente correctos, CO= correctos.

De acuerdo con estos datos, se observa que, como en investigaciones previas (Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2021; Mallart et al., 2016), los FM presentan dificultades para identificar objetos matemáticos que podrían intervenir o emerger en la solución de sus problemas sobre proporcionalidad. Esto es especialmente notorio en el caso de proposiciones y argumentos que en su mayoría o no se identifican o se hace de manera incorrecta.

En el caso de los conceptos hay una mayor variabilidad de éxito en su identificación. Los conceptos que identifican con más frecuencia de manera óptima son los de proporcionalidad (siete equipos en nueve de los problemas pertinentes) y magnitud (seis equipos en seis problemas pertinentes, aunque en tres de ellos se refieren únicamente al precio que se paga, omitiendo el número de atracciones como una de las magnitudes implicadas). Al igual que en los trabajos de Burgos et al. (2018), Burgos y Godino (2020b), Rivas et al. (2012), varios equipos de FM (6 en total) consideran indistintamente la regla de tres como concepto asociado en el problema de proporcionalidad o como procedimiento para resolverlo.

Los lenguajes y procedimientos son los objetos identificados con mayor grado de pertinencia por los FM. En el caso de los procedimientos señalan correctamente división y comparación de números decimales, reducción a la unidad o regla de tres. En el caso de los lenguajes, aunque reconocen correctamente el lenguaje natural o diagramático, obviaron el lenguaje simbólico, razón por la que en su mayoría la identificación de tipos de lenguajes fue parcialmente correcta.

Para saber quién de los dos tiene descuento en las atracciones, debemos ver qué les cuesta a ambos subirse en el mismo número de atracciones. Para ello, calcularemos el precio de las entradas de Julio si se subiera a 10 atracciones. Sabiendo que le ha costado 17.80€ subirse en 8 atracciones, para conocer el precio de las 10, planteamos la siguiente regla de tres:

$$\frac{17.8}{8}=\frac{?}{10};\ \frac{17.8\cdot 10}{8}=?\,;?=22.25€$$

Comparamos los precios que pagan ambas personas (22.25 > 21) y vemos que es Clara la que paga menos, por lo que es ella la que tiene el descuento. Sabiendo que el precio sin descuento de 10 viajes (lo que pagaría Julio) es de 22.25€ y que el precio con descuento de 10 viajes (lo que paga Clara) es de 21€, podemos plantear el siguiente dibujo:

PRECIO TOTAL DE 10 VIAJES: 22.25€	
PRECIO CON DESCUENTO: 21€	DESCUENTO

Si 22.25€ es el 100% del precio, el descuento (22.25 - 21 = 1.25€) será una parte (?) del precio, por lo tanto, podemos plantear la siguiente regla de tres:

$$\frac{22.25}{100}=\frac{1.25}{?};\ \frac{?\cdot 22.25}{100}=1.25;\frac{?}{100}=\frac{1.25}{22.25};\ \frac{1.25\cdot 100}{22.25}=?\,;?=5{,}61797753\ \%$$

<u>Solución</u>: El descuento lo tiene Clara, y es del 5,62%.

Ojetos matemáticos.

Conceptos: magnitudes proporcionales (dinero - atracciones), porcentaje, descuento.
Procedimientos: regla de tres/ reducción a la unidad.
Proposiciones: “cuando aplicamos un descuento, lo que sucede es que calculamos el porcentaje del descuento sobre el precio total, y luego lo descontamos al precio total”.
Argumentos: ninguno.
Lenguajes: natural, simbólico, diagramático.

Figura 4.18. *Solución y objetos matemáticos indicados por E26 al problema de la Figura 4.17.*

En la Figura 4.18 se incluye la solución propuesta y los objetos identificados por E26 al problema descrito en la Figura 4.17. Para resolver el problema E26 obtiene el precio que debería pagar Julio por subirse en 10 atracciones suponiendo que el precio de cada atracción es la misma, lo que le permite decidir que es Clara a quien le han aplicado el descuento. A continuación, determina a qué porcentaje corresponde.

El equipo E26 emplea la regla de tres como procedimiento (aunque indica también la reducción a la unidad), si bien no la fundamenta en la relación de proporcionalidad directa. Lo que indica como proposición es más una secuencia de procedimientos y observamos como señala explícitamente la ausencia de argumentos en su solución**.**

4.5.3. Reconocimiento de dificultades

Después de analizar los objetos matemáticos involucrados en las prácticas necesarias para resolver los problemas sobre proporcionalidad que crearon, los FM debían identificar las potenciales dificultades para sus alumnos de primaria. En este caso, la clasificación se realizó en base a la tipología de objetos primarios establecida en el marco teórico (sección 2.1). De los 33 equipos, 3 no indicaron dificultades y otros 5 las señalaron de forma genérica (no distinguían según enunciados). Así del total de enunciados propuestos por los FM, se encuentran dificultades asociadas de forma específica a 50 problemas (17 pertinentes y 33 no pertinentes). Los tipos de dificultades más frecuentemente identificadas fueron las de tipo procedimental (en 12 de los 17 problemas pertinentes y 20 de los 33 no pertinentes) y situacional (en 9 de los 17 problemas pertinentes y en 17 de los 33 no pertinentes). Todas las dificultades señaladas por los FM en los problemas pertinentes fueron correctas. También lo fueron en la mayoría de los problemas no pertinentes, donde los FM sólo señalaron de manera incorrecta algunas dificultades (3 procedimentales, 1 situacional y 1 de tipo argumentativo).

Tabla 4.7
Número de problemas en los que se identifican dificultades según categoría (n=50).

Dificultades	Número de problemas pertinentes (*n*=17) con dificultades identificadas por los FM	Número de problemas no pertinentes (*n*=33) con dificultades identificadas por los FM
Argumentales	1	1
Proposicionales	1	1
Conceptuales	4	9
Situacionales	10	17
Procedimentales	12	20

En la Tabla 4.7 se resumen las frecuencias de enunciados en los que se identifican dificultades de cada tipo. Las dificultades de tipo situacional que señalan de manera mayoritaria los FM tienen que ver con reconocer o interpretar adecuadamente la relación de proporcionalidad que se establece entre las magnitudes del problema ("Dificultad para relacionar los datos", E3; "No razonar la relación proporcional precio-las veces que se monta", E6). Cuando el requerimiento del problema que plantean lleva a determinar el precio que deben pagar Julio y Clara por montarse en una cantidad dada de atracciones, señalan dificultad para distinguir dos relaciones multiplicativas distintas en el mismo enunciado ("que al alumno le produzca confusión al ver que no le costará lo mismo a Clara que a Julio al montarse en el mismo número de atracciones", E28). Similarmente, cuando deben obtener el precio unitario para decidir qué atracción fue más barata señalan pertinentemente el interpretar una comparación absoluta y no relativa ("la principal dificultad que se puede presentar es que relacionen directamente el hecho de que a Clara le ha sobrado menos dinero signifique que se ha montado en atracciones más caras, sin tener en cuenta que Julio se ha montado en menos atracciones que ella", E23).

Las dificultades de tipo procedimental se relacionan principalmente con la aplicación de la regla de tres ("que el alumno no conozca bien los procedimientos para la realización de una regla de tres de una forma adecuada y correcta", E28), la determinación de los precios unitarios ("dividir precio entre número de veces en vez de al revés", E22) y con cálculos aritméticos en relación a la división de números decimales ("en este caso deben trabajar la división con números decimales y con dos cifras, lo que le puede ocasionar dificultad y llevar a cometer errores si lo están aprendiendo o todavía no lo dominan con soltura", E1). El mayor énfasis en las dificultades vinculadas a la regla de tres está relacionado con que éste continúa siendo el procedimiento preferido por los futuros docentes para resolver problemas de proporcionalidad. Opiniones similares a las del equipo E20, para quienes "los alumnos pueden tener dificultades a la hora de realizar las operaciones, ya que en vez de realizar la regla de tres para calcular las operaciones pueden hacer multiplicaciones" muestran que, para los FM emplear otras estrategias distintas puede ser un motivo o fuente de dificultad.

Las dificultades de tipo conceptual están relacionadas fundamentalmente con el concepto de proporcionalidad ("no comprender el concepto de proporcionalidad", "dificultad con el concepto constante de proporcionalidad", E3).

Finalmente, para los FM que han participado en la experiencia ha sido complejo identificar dificultades de tipo proposicional y argumental en sus propios problemas. Esto puede estar motivado por un escaso conocimiento de los FM sobre las propiedades de la relación de proporcionalidad y sus limitaciones para argumentar en situaciones de proporcionalidad (Balderas et al., 2014). Las dificultades de tipo proposicional son esencialmente aquellas que tienen que ver con las propiedades de las operaciones con números decimales, mientras que las de tipo argumental se asocian a limitaciones por parte del alumno para justificar los procedimientos (justificar la obtención de la constante de proporcionalidad o precio por unidad). Esto se convierte en una situación preocupante, dado que la argumentación es uno de los procesos y competencias que se deben desarrollar en diferentes currículos de matemáticas (Balderas et al., 2014; MEP, 2012).

4.6. Conclusiones

En este capítulo hemos informado del diseño, implementación y análisis de una intervención con maestros en formación basada en la creación de problemas de proporcionalidad por variación, por elaboración para responder a un requerimiento didáctico-matemático específico o a partir de una situación para responder a un determinado nivel de complejidad. Los resultados obtenidos ayudan, por un lado, a identificar y comprender las limitaciones que presentan en estas tareas y a diagnosticar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas que ponen en juego en la formulación de problemas sobre proporcionalidad. Por otro, a tomar decisiones y pautas preventivas que favorezcan el desarrollo de habilidades en la creación de problemas como parte de la formación docente (Mallart et al., 2018).

Es importante considerar las limitaciones encontradas para mejorar el diseño en futuras implementaciones. Cuando los FM crean problemas de proporcionalidad por variación escogen fundamentalmente el enfoque aritmético de la proporcionalidad. Como muestran investigaciones previas, este es el enfoque prioritario (Ben-Chaim et al., 2012) "presente en múltiples situaciones de la vida cotidiana y en prácticamente todas las disciplinas científicas, incluidas las sociales y las artes" (Balderas et al., 2014, p. 2). Sin embargo, el profesor debe conocer los diversos significados de la proporcionalidad, por lo que, en futuras intervenciones, sería adecuado diseñar consignas de creación de problemas específicas para significados como el geométrico, funcional (Aroza et al., 2016; Burgos y Godino, 2020b) o incluso probabilístico, en el que el razonamiento proporcional juega un papel decisivo (Begolli et al., 2021).

La mayoría de los enunciados creados por variación fueron pertinentes, es decir, significativos y modificando dos de los cuatro elementos que caracterizan un problema (contexto, entorno, información y requerimiento). En este caso, quizás motivados por el formato del problema dado, vinculado a una "tabla de proporcionalidad", este fue el entorno en todos los enunciados pertinentes y el contexto fue el extra-matemático. Para Calvo (2008), esta relación de las matemáticas con la cotidianidad acrecienta el conocimiento matemático, mostrando a los alumnos que esta disciplina se encuentra también fuera de las aulas. Esto permite a los futuros docentes desarrollar el componente afectivo mediante la utilidad de la proporcionalidad en la vida diaria (Beltrán-Pellicer y Godino, 2020).

A pesar del éxito para crear enunciados pertinentes por variación, formular diversos problemas en los que no siempre se modifiquen los mismos elementos fue algo que supuso mayor dificultad a los FM: la tercera parte de los equipos no pudo crear dos problemas variando una combinación diferente de los elementos del problema inicial. A pesar de que la creación de problemas forma parte de la formación sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grado de educación primaria, esta se centra en la formulación de problemas aritméticos de estructura aditiva o multiplicativa en base al tipo de estructura semántica del problema, así que, fuera de este ámbito, los FM se encuentran en una posición extraña e inusual que requiere de una mayor formación (Tichá y Hošpesová, 2013). Como sugieren Tichá y Hošpesová (2013), los profesores "deben ser conscientes de los múltiples aspectos asociados al proceso de planteamiento de problemas" (p. 142), lo que supone entre otros, conocer la forma de articular información y requerimiento de manera adecuada en la formulación de un problema. Este ha sido el elemento más controvertido cuando los FM de nuestra experiencia debían modificar estos elementos. Por otro lado, nos lleva a plantear la necesidad de que los programas de formación de maestros refuercen las estrategias de creación de problemas a lo largo de toda la formación y en diversos contenidos de las matemáticas.

Las dificultades encontradas tanto en estudiantes como en docentes en formación (Buforn y Fernández, 2014; Burgos y Godino, 2021; Fernández y Llinares, 2011, 2012), lleva a considerar la distinción entre situaciones proporcionales y aditivas como uno de los objetivos a lograr en la formación de profesores sobre razonamiento proporcional (Buforn et al., 2018). Por este motivo, la creación por parte de los futuros docentes de problemas en los que se persiga este aspecto, puede ser un buen recurso para superar estas limitaciones. Sin embargo, los resultados de nuestra investigación muestran un conocimiento matemático y didáctico insuficiente en los FM para abordar con éxito esta tarea, que se observa también en una interpretación inadecuada de las razones enteras o no enteras en situaciones de proporcionalidad.

Desde el punto de vista del conocimiento didáctico-matemático en la faceta instruccional, los FM tienen dificultades para crear problemas de proporcionalidad que respondan a una situación dada, lo que se pone de relieve cuando más del 66% de los problemas propuestos fueron no pertinentes. Además, plantean enunciados ambiguos, carentes de sentido y que o bien no se podían resolver o bien la solución estaba implícita en el propio enunciado, lo que supuso que más del 42% de sus problemas fueron no significativos. Es posible que, al pedirles crear problemas a partir desde una situación determinada, se encuentren en una posición extraña, inesperada y más restringida (Tichá y Hošpesová, 2013).

En la faceta epistémica, el análisis de las respuestas a la tarea 3 muestra las limitaciones de los FM para identificar los objetos matemáticos involucrados en los problemas creados por ellos mismos (Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2022a), así como para distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales al crear problemas que no responden a situación de proporcionalidad pero que consideran propios de dicho entorno (Fernández et al., 2012). Las limitaciones para identificar los objetos matemáticos podría ser consecuencia de la falta de experiencia con esta actividad (Rivas et al., 2012), pues la formación previa en el grado y con el taller impartido parece no ser suficiente para comprender la naturaleza y funcionalidad de los objetos matemáticos (Burgos y Godino, 2020b, 2021).

En la faceta cognitiva, los FM identifican escasamente las dificultades que puede generar en los escolares la resolución de sus problemas propuestos y cuando lo hacen no siempre es de forma correcta, centrándose mayoritariamente en dificultades de tipo procedimental, lo que coincide con los resultados obtenidos por Burgos y Godino (2020b). Como muestran las investigaciones de Lamon (2007) o Riley (2010) entre otros, los futuros maestros focalizan la atención en el aspecto operacional y justifican sus estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad en base a los procedimientos, lo que los lleva tanto a no identificar objetos como proposiciones o argumentos, como a ignorarlos como fuentes de dificultades para los alumnos. Prever las dificultades que pueden tener los alumnos en la resolución de tareas permite seleccionar estrategias más adecuadas para adaptarlas a los propósitos de aprendizaje (Burgos y Godino, 2020b), para lo que es necesario que los futuros maestros asuman que el conocimiento de los procedimientos por sí solo no es suficiente, profundizando en los conceptos, propiedades y sus relaciones en el currículo de la escuela primaria (Tichá y Hošpesová, 2013).

La identificación y justificación del nivel de complejidad asociado es algo que también resultó complejo para los participantes, a pesar de ser un análisis al que los FM deben estar familiarizados incluso de cursos previos. Sin embargo, la formación recibida al respecto se basa en problemas presentes en materiales curriculares (libros de texto, entre otros) o pruebas de evaluación de primaria y no sobre los problemas que ellos mismos elaboran. Parece pues necesario reforzar en la formación de profesores el estudio del nivel de complejidad de las tareas en base al análisis de objetos y procesos matemáticos implicados en su resolución. Asimismo, a pesar de que los FM conocen las directrices curriculares y los programas de estudio de los alumnos de educación primaria, tuvieron grandes limitaciones para determinar o adaptar sus problemas a un nivel educativo específico (por ejemplo, considerando el uso de la regla de tres en cursos anteriores a los estipulados en el currículo de matemáticas).

CAPÍTULO 5. CREACIÓN DE PROBLEMAS PARA RESPONDER A LAS DIFICULTADES DE ALUMNOS

El contenido de este capítulo se encuentra publicado en los siguientes artículos:

- Burgos, M. y Chaverri, J. (2023). Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad. *Aula Abierta*, *52*(1), 43–52. https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52
- Burgos, M. y Chaverri, J. (2024). Variación de problemas de proporcionalidad para ayudar a los alumnos a superar sus dificultades. Una experiencia con futuros maestros. *Educación Matemática.* (En prensa)

5.1. Introducción

Estudios previos muestran que un conocimiento limitado del contenido matemático dificulta a los profesores la tarea de analizar e interpretar las respuestas de los alumnos y, sin embargo, que el conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores reconozcan la comprensión matemática de sus alumnos (Bartell et al., 2013; Fernández et al., 2018; Jakobsen et al., 2014; Ponte y Chapman, 2016). Estas investigaciones también ponen de manifiesto que, si bien lograr la competencia "mirada profesional" no es fácil, puede comenzar a desarrollarse desde los programas de formación inicial en dominios matemáticos concretos (Jacobs et al., 2010; Simpson y Haltiwanger, 2017; Son, 2013), en lo que sin duda la invención de problemas contribuye.

Los futuros docentes tienen que proporcionar explicaciones matemáticas de los procedimientos usados por los estudiantes para resolver los problemas, analizar y comprender sus métodos de resolución (los usuales y los que no lo son) e identificar los errores cometidos para inferir características de la comprensión de los estudiantes. Por tanto, precisan de conocimientos didáctico-matemáticos específicos del contenido matemático que se pone en juego en los problemas (Godino, Giacomone et al. 2017; Fernández et al., 2018), en nuestro caso sobre proporcionalidad. En particular, desde el punto de vista epistémico, los futuros docentes deben distinguir entre comparaciones relativas y absolutas y reconocer el papel de la razón como índice comparativo en las comparaciones relativas (Buforn et al., 2018). Desde la faceta cognitiva, deben conocer las diferentes estrategias usadas por los estudiantes para comparar razones y los principales errores que cometen los estudiantes, como el uso de estrategias aditivas o la interpretación incorrecta de la razón (Buforn et al., 2020).

En el ámbito específico del razonamiento proporcional, autores como Buforn et al. (2020), Fernández et al. (2012, 2013) y Son (2013), entre otros, estudian la competencia “mirada profesional” en futuros maestros de educación primaria. Son (2013) analiza cómo futuros docentes interpretan la respuesta errónea de una alumna a un problema de semejanza de rectángulos, en el que esta utiliza una estrategia aditiva. Los resultados muestran que, a pesar de su conocimiento de la razón y proporción, los futuros maestros se centran en aspectos procedimentales más que conceptuales al interpretar el error.

Fernández et al. (2012, 2013) analizan las descripciones que hacen futuros maestros sobre respuestas de alumnos de primaria a problemas proporcionales y no proporcionales. Según los autores, discriminar entre ambas situaciones es un elemento clave para identificar evidencias de diferentes niveles del razonamiento proporcional de los estudiantes. Sin embargo, los futuros maestros tienen dificultades para diferenciar las situaciones proporcionales de las aditivas, e incluso cuando reconocer la diferencia, les resulta complejo justificar por qué las respuestas de los alumnos son o no correctas considerando los elementos matemáticos implicados en las situaciones (Fernández et al., 2013). El análisis realizado en estas investigaciones permite a los autores identificar y caracterizar niveles de desarrollo de la mirada profesional en los futuros maestros en el dominio de la distinción entre situaciones proporcionales y no proporcionales.

Finalmente, Buforn et al. (2020) analizan cómo reconocen los profesores en formación el razonamiento de los estudiantes en un problema de comparación de razones. Observan que identificar el proceso de unitización (construcción de una unidad de referencia que permite la comparación) como un elemento matemático clave del problema permite que los futuros profesores lo utilicen para describir el razonamiento de los alumnos. Sin embargo, también consideran que hay otros factores que afectan al reconocimiento de las características del razonamiento de los alumnos, ya que algunos participantes que identificaron los elementos matemáticos clave habían hecho comentarios generales sobre las respuestas de los alumnos.

En este capítulo nos interesa analizar cómo FM entienden las intervenciones de alumnos durante un episodio de clase en el que un hipotético maestro propone un problema de comparación de razones y cómo modifican este problema para atender a las dificultades encontradas. Pretendemos dar respuesta a los objetivos de investigación:

1. Estudiar cómo interpretan los futuros maestros de primaria el razonamiento matemático de los alumnos en un problema de comparación de razones.
2. Valorar la coherencia de las reflexiones de los futuros maestros sobre el razonamiento matemático de los alumnos con las prácticas operativas o discursivas de los alumnos, en particular, cómo identifican sus errores.
3. Identificar cómo tienen en cuenta este análisis y reflexión para proponer variaciones al problema que ayude a los alumnos a progresar en su aprendizaje.

Se pretende que los futuros maestros reconozcan las ambigüedades en el enunciado propuesto, como fuente de posibles dificultades, tomando decisiones para reformular la propuesta del problema y aprovechar los errores cometidos como fuente de aprendizaje. Además, se estudia cómo justifican las decisiones didácticas que los lleva a proponer determinadas variaciones y si estas son consistentes con los conflictos identificados y los cambios realmente efectuados. Como sugieren Piñeiro et al. (2019), la variación de problemas permite replantear tareas para facilitar el avance de los estudiantes cuando se atascan, o generar nuevas situaciones para los estudiantes más aventajados, de manera que se impulsa a los estudiantes con dificultades de aprendizaje sin desalentar a los que requieren mayores exigencias.

5.2. Contexto y participantes

La intervención se llevó a cabo con 130 FM, estudiantes de tercer curso del grado de Educación Primaria (con edades comprendidas entre los 21 y los 22 años; 63,1% de mujeres y 36,9% hombres), en el marco de la asignatura de Diseño y Desarrollo del Currículum de Matemáticas en Educación Primaria (sexto semestre) en la Universidad de Granada (España). El nivel de desempeño en las asignaturas previas de este grupo de FM es representativo de los resultados generales en el grado. Los participantes habían estudiado la proporcionalidad como parte de los contenidos de la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria durante su primer semestre de formación universitaria. En esta asignatura se espera que los FM lleguen a conocer y articular los principales conceptos, procedimientos y sus propiedades en los diferentes temas de las matemáticas de Educación Primaria y sean capaces de enunciar y resolver problemas matemáticos de manera flexible en una variedad de situaciones y contextos, comunicando de forma eficaz argumentaciones matemáticas. En la asignatura de segundo (cuarto semestre) los estudiantes recibieron formación específica sobre los fundamentos de la Didáctica de las Matemáticas tanto en aspectos cognitivos (aprendizaje matemático, errores y dificultades), como instruccionales (tareas matemáticas, materiales y recursos en el aula). En la asignatura en la que se desarrolla la experiencia (impartida por la primera autora de este trabajo), los FM deben profundizar y emplear los conocimientos adquiridos en cursos previos para fundamentar y (re)diseñar tareas matemáticas de acuerdo con unos contenidos y finalidades específicas. En particular, se espera que puedan modificar los problemas de acuerdo con las dificultades encontradas por los estudiantes en su resolución.

5.3. Diseño e implementación. La tarea

Como parte de la evaluación de la asignatura, a los FM se les propone la siguiente tarea, en la que se describe un episodio de clase centrado en el entorno del razonamiento proporcional. Se insiste en que es un problema que el (hipotético) maestro propone a sus alumnos para trabajar la comparación de razones. El enunciado es un ejemplo típico de los problemas sobre comparación de razones encontrados en los libros de texto de educación primaria españoles, donde la pregunta se puede interpretar tanto de forma absoluta (comparación entre las cantidades totales de lectores en cada curso) como relativa (comparación entre las razones de alumnos lectores a totales en ambos cursos). Los FM deben interpretar las respuestas dadas por tres alumnos y realizar variaciones del problema que faciliten su comprensión y resolución, justificando cada una de las variaciones realizadas. Los FM disponían de una semana para desarrollarla en casa, si bien debían comentar con la profesora los avances del estado de su trabajo antes de su entrega (sesiones prácticas o de tutoría). La profesora encargada de la docencia fue quien condujo la toma de datos.

El maestro propone el siguiente problema a su clase de 6º de educación primaria.

> ***Problema*** *En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta.*

A continuación, aparecen los comentarios hechos por algunos de sus alumnos al resolver o tratar de resolver este problema:

> Luis: *Es fácil...En 6º curso leen 15 y en 5º leen 12, así que leen más en 6º.*
>
> María: *Sí, pero eso no vale... Yo he dividido 60 entre 15 que sale a 4 y luego 40 entre 12 que sale 3,33333 infinitos, pero como 4 es mayor pues leen más en 6º.*
>
> Juan: *Yo también he hecho 60 entre 15, pero ese 4 no sirve. No es lo mismo 60 que 40, hay que ponerlo a la misma unidad.*

a) ¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos?

b) Crea por variación un problema que contribuya a facilitar la comprensión y la solución de las dificultades encontradas en el episodio y justifica tu elección.

Figura 5.1. *Tarea de evaluación propuesta a los FM*. Elaboración propia.

El problema que motiva la situación en el episodio de clase de la Figura 5.1 había sido propuesto para su resolución a un grupo de FM que habían participado en una intervención formativa previa (Burgos y Godino, 2022a). Las respuestas de Luis, María y Juan se extraen de los resultados de aquella experiencia. Las dos primeras representan los tipos de estrategias erróneas más frecuentes mostradas por los FM (con una formación previa análoga a los de la muestra) en Burgos y Godino (2022a) y que también aparecen en investigaciones previas (Buforn et al., 2018, 2020).

La respuesta de Juan pretende que los FM reflexionen sobre el papel del todo o unidad en la comparación de razones. En el problema que plantea el maestro a sus alumnos de 6º de primaria se espera que éstos comparen las razones de alumnos que leen a diario respecto del total de alumnos en cada uno de los cursos y que decidan en tal caso en qué curso se lee más "proporcionalmente". Por tanto, como $\frac{15}{60} < \frac{12}{40}$, se debe concluir que, en relación con el número de alumnos de cada curso se lee más en 5º de primaria. Sin embargo, la pregunta tal cual está formula-da en el problema propuesto podría dar lugar a que los alumnos respondan de manera absoluta: "se lee más en 6º porque 15 leen a diario, mientras que en 5º leen a diario 12". Esto podría ser lo que interpreta Luis, se lee más donde hay más alumnos que leen a diario. Sin embargo, también podría ocurrir que el alumno, aun entendiendo la pregunta en un sentido "proporcional", responda con una estrategia aditiva incorrecta (uso de una diferencia entre las partes en lugar de establecer la relación multiplicativa). María, por otro lado, considera que ese procedimiento no es válido, previsiblemente porque comprende el carácter relativo de la comparación. Sin embargo, no compara las razones alumnos lectores: alumnos totales sino su recíproca alumnos totales: alumnos lectores, mediante la expresión de la razón como decimal. El error que comete en este caso es que la comparación de las razones recíprocas lleva a decidir que el curso en el que se lee más (proporcionalmente) es aquél en el que es menor dicha razón unitaria (interpretación incorrecta de la razón). En el caso de Juan, no llega a decidir en qué curso son mejores lectores, sino que indica, por un lado, que el resultado obtenido por María no es útil ("ese 4 no sirve") y, por otro, que (para comparar) deben estar en "la misma unidad". Luis podría referirse a la "unidad" o "todo" de la fracción (apunta "no es lo mismo 60 que 40").

A continuación, se debe crear por variación un problema que contribuya a facilitar la comprensión de la situación y de los errores cometidos a los alumnos. No se trata de evitar los errores, sino de reformular el problema para que los alumnos entiendan cuál ha sido su error y progresen en el uso del razonamiento proporcional necesario. En primer lugar, sería adecuado reformular la pregunta del problema, para evitar la interpretación en términos absolutos. Si a los alumnos se les ha explicado el término "proporción" o "proporcional" se puede plantear la pregunta como *¿en qué curso se lee más proporcionalmente?* o *¿en qué curso es mayor la proporción de alumnos que leen a diario?* También es posible guiarles en la búsqueda de la comparación como sigue: *Teniendo en cuenta el número de alumnos totales en cada curso y el número de alumnos que leen un libro a diario, ¿en qué curso consideras que hay un mejor hábito de lectura (se lee más o son mejores lectores)?* Con esto se podría ayudar a Luis a entender el carácter relativo de la comparación (si no fue sólo una interpretación de la pregunta en términos absolutos). En otro caso se puede pedir explícitamente la razón que han de comparar. *¿Cuál es la fracción (o porcentaje) de alumnos que leen a diario en cada curso? Entonces, ¿en qué curso crees que hay un mejor hábito de lectura (o son mejores lectores)?* Esto llevaría a que "comparen fracciones (o porcentajes)" y por tanto a reflexionar sobre la necesidad de la "misma unidad" para comparar los grupos.

Por otro lado, para que comprendan el papel de la parte y el todo y ayudar a entender a María qué relación determina el resultado de su cociente, se podría preguntar previamente: *¿Cada cuántos alumnos de 6º, hay uno que lee a diario un libro? ¿y en 5º curso?* Esta pregunta persigue observar el resultado de la división que hace María: de los 60 alumnos de

6º, 15 leen a diario, luego por cada 4 alumnos de 6º hay uno que lee a diario un libro. De los 40 alumnos de 5º de primaria son 12 los que leen a diario, luego por cada 5 alumnos de 5º, hay uno que lee a diario un libro. Al comparar respecto del valor unitario, María puede relacionar su resultado con que la proporción de no lectores es mayor en 5º que en 6º.

5.3.1. Categorías de análisis de las respuestas de los alumnos

A continuación, describimos y ejemplificamos las categorías utilizadas para el análisis de las respuestas de los participantes cuando interpretaron los comentarios de los tres alumnos (Luis, María y Juan) en el episodio de clase, así como aquellas empleadas para valorar el grado de pertinencia de sus apreciaciones. Para la determinación de las categorías de análisis de las respuestas de los alumnos se tuvo en cuenta las referencias a elementos matemáticos (qué aspectos matemáticos identifican) y cómo los utilizan para interpretar la comprensión o el error reflejado en las estrategias de los alumnos. En este proceso, cada uno de los investigadores analizó de manera independiente un cuarto de los informes de los participantes. Después contrastaron y discutieron las categorías de tipos de descripción obtenidas, así como los grados de pertinencia asignados, y ante cualquier disparidad se revisaron de manera conjunta los protocolos de respuesta. A continuación, se prosiguió con el análisis independiente (de nuevo cada uno de los investigadores con un cuarto distinto de respuestas de FM) y se volvió a discutir para readaptar o añadir categorías y revisar la clasificación de las respuestas en las que no había consenso. Este proceso se repitió hasta haber valorado todas las respuestas de los participantes. Encontramos algunas respuestas de FM no concluyentes, es decir, que no permiten identificar qué error cree el FM que ha cometido el alumno. Por ejemplo, descripciones genéricas como la de FM126: "cada respuesta complementa a la otra acercándose cada vez más a la resolución final adecuada", o específicas del alumno, como las de FM10: "No sabemos cómo [Juan] lo ha resuelto al final, pero todo apunta a que va por buen camino (su razonamiento)."

Categorías de interpretaciones concluyentes sobre la respuesta de Luis.

- *La formulación de la pregunta lleva a Luis a comparar de forma absoluta.* En este caso, los FM consideran que Luis realiza una comparación absoluta y no relativa debido a que la pregunta no es clara:

> Luis no considera el conjunto de la población en total, tan solo se centra en comparar el número de alumnos que leen en 6º y el número de alumnos que lo hacen en 5º. Su razonamiento es si en 6º leen 15 y en 5º leen doce pues está claro que en 6º leen más. Si nos fijamos en la pregunta no es del todo clara e induce a error ¿En qué curso leen más? Pues él dice en 6º porque hay 15 alumnos mientras que en 5º solo 12. (FM111)

- *No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso*. Por ejemplo, FM82 señala que Luis ha resuelto el problema "sin darse cuenta de que no hay el mismo número de alumnos en los dos cursos por lo tanto no podemos averiguar a simple vista en cuál de los dos se lee más".
- *Da una respuesta rápida sin reflexionar sobre la necesidad de emplear fracciones.* En este caso, los participantes consideran que Luis ha dado una respuesta precipitada motivada por una falta de conocimientos sobre fracciones. Por ejemplo, FM125 indica que la respuesta de Luis es "la contestación más rápida y simple que podemos pensar sin poner en práctica las habilidades y pensamiento matemático. No ha planificado ni ha tenido en cuenta los elementos ni propiedades de las fracciones".
- *No recurre a la relación de proporcionalidad o su comprensión sobre la proporcionalidad es deficiente.* Esta categoría contempla las valoraciones de los FM que mencionan explícitamente que Luis no ha aplicado un razonamiento proporcional ("en ningún momento ha pensado en la relación de proporcionalidad, ya que, aunque el número es mayor, también hay bastantes más alumnos en un curso que en otro", FM45) o lo ha hecho de forma incorrecta, en cuyo caso indican el uso de una estrategia aditiva, de comparación absoluta o que no emplea porcentajes para comparar de forma proporcional.

Categorías de interpretaciones concluyentes sobre la respuesta de María.

- *Muestra carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes.* Aquí, se agrupan las valoraciones de los FM que coinciden en que el error de María se debe a deficiencias en el dominio de algún aspecto de la proporcionalidad. Por ejemplo, FM15 plantea que María "no ha comprendido el concepto de proporción, y aunque haya hecho las operaciones bien, no las ha interpretado de manera correcta".

- *Plantea de forma incorrecta la relación entre el todo y la parte.* En este caso, los FM consideran que María establece de forma incorrecta la relación parte-todo o que las razones utilizadas están planteadas al revés. Por ejemplo, FM79 indica: “la relación parte-todo la ha realizado de manera incorrecta ya que la ha planteado al contrario y por tanto el resultado le sale erróneo”.
- *No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso.* En este caso, los FM piensan que María, al igual que Juan no ha tenido en cuenta el número total de alumnos en cada clase es distinto. Este es el caso de FM8 quien indica: “A María le ha ocurrido algo similar, pues tampoco ha tenido en cuenta el número total de alumnos que conforman cada clase”.
- *Intenta determinar el promedio de cuántos libros lee cada alumno en lugar de usar proporcionalidad.* En este caso, los FM asumen, de manera similar a FM118 que, con la división, María pretende determinar la media del número de libros leídos: “María ha interpretado que para calcular en que curso se lee más debe hacer la media entre el número de alumnos totales en cada grupo y el número de lectores”.
- *Hace operaciones al azar, sin sentido o erróneas*. En esta categoría, los FM consideran que María realiza operaciones sin analizar previamente el problema, que son erróneas o sin sentido. Por ejemplo, FM03 aprecia: “María pienso que ha intentado con las operaciones sacar algún resultado, pero no ha entendido el problema y ha decidido, por ejemplo, hacer esa operación”.

Categorías de interpretaciones concluyentes sobre la respuesta de Juan

- *Identifica la necesidad de comparar las partes partiendo de la misma unidad (totales iguales/común denominador)*. Los participantes consideran esto como evidencia de cierto dominio del razonamiento proporcional, valorando el razonamiento de Juan como parcialmente correcto. Por ejemplo, FM75 señala:

  > Juan reconoce que son magnitudes directamente proporcionales, al afirmar que hay que ponerlo a la misma unidad. Es decir, no es lo mismo que lean 15 personas en una clase de 60 alumnos que en una de 40.

- *Muestra carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes*. En este caso, los participantes valoran la respuesta de Juan como incorrecta en base a dichas deficiencias ("tiene problemas para comprender la proporcionalidad", FM15). Por ejemplo, una respuesta de este tipo sería la dada por FM35:

> Es cierto que no es lo mismo 60 que 40 pero no hace falta ponerlo en la misma unidad. Sino hallar la proporción de libros que son leídos para saber con respecto a esa cantidad dónde se han leído más. Tampoco comprende la proporcionalidad.

- *Tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso*. Los participantes basan su interpretación en que este alumno, a diferencia de Luis y María, si tiene en cuenta la importancia de que el número de alumnos totales sea distinto en ambos grupos. Por ejemplo, FM27 señala:

> Juan si ha tenido en cuenta que en las dos clases no hay el mismo número de alumnos y ha considerado que realizando la división no se puede saber en qué clase se ha leído más.

- *Tiene dificultades para expresarse*. En este caso, los FM creen que la respuesta de Juan no llega a ser completamente correcta debido a sus problemas para expresar o comunicar su razonamiento. Por ejemplo, FM74 sugiere que "…debido a su corta edad tiene problemas para explicarse y es por ello que su respuesta no termina de ser acertada".

Grado de pertinencia en las interpretaciones de la comprensión de los alumnos.

Consideramos las siguientes categorías (establecidas a priori) de acuerdo con el grado de precisión en que los FM describen la estrategia del alumno e interpretan el origen del error. Así, cada valoración se considera de pertinencia:

- *Alta,* si el FM describe correctamente la respuesta dada por el alumno, interpretando su estrategia o error a partir de los elementos matemáticos identificados.
- *Media,* si el FM describe correctamente la respuesta dada por el alumno, pero no interpreta de forma adecuada o completa su estrategia o error; no es preciso o comete errores en el uso de los detalles matemáticos.
- *Baja,* en cualquier otro caso. Así, se consideran nada pertinentes todas las interpretaciones categorizadas como no concluyentes, aquellas en las que indica lo que no ha hecho el alumno o las que declaran que el error está en dificultades para expresarse.

El proceso descrito para la determinación de las categorías permitió acordar que las categorías cumplían ciertas características que asegurasen su fiabilidad: a) claramente determinadas, b) mutuamente excluyentes, c) significativas, d) replicables.

Algunas de las categorías de interpretaciones sobre las respuestas de los hipotéticos alumnos tienen claramente un grado de pertinencia asociado (por ejemplo, aquellas categorizadas como no concluyentes tienen pertinencia baja). Pero, en otros casos, producciones de los FM consideradas en una misma categoría de interpretación pueden presentar distintos grados de pertinencia, dado que depende del nivel de precisión en que los elementos matemáticos relevantes se emplean para valorar la respuesta del alumno.

5.3.2. Categorías de pertinencia en la creación de problemas por variación

A continuación, describimos y ejemplificamos las categorías utilizadas para el análisis de las respuestas de los participantes a la segunda tarea, en la que los FM debían modificar el problema para crear uno nuevo que contribuyera a la comprensión y resolución del episodio de clase. Desde el punto de vista de su pertinencia, se consideran las siguientes categorías, establecidas a priori:

- *El problema no es significativo*. Para que sea significativo el enunciado propuesto debe establecer realmente un problema matemático (en particular, que se pueda resolver y que la solución no esté implícita en el enunciado), que su redacción sea clara y no presente ambigüedad (falta de información o redundancia en el enunciado), y que se identifiquen claramente los distintos elementos que lo caracterizan.
- *El problema es significativo, pero no es variación del problema base.*
- *El problema es variación no pertinente*. El problema es significativo, creado por variación, pero no contribuye a resolver las dificultades encontradas en el episodio. Esto ocurre, por ejemplo, cuando se modifican los datos cuantitativos o relacionales, o el contexto, pero mantiene el mismo tipo de pregunta sin dejar claro si se busca una comparación absoluta o proporcional. También si el problema creado elude la dificultad propia del episodio de clase, evitando que la solución pase por la comparación proporcional de las relaciones entre las magnitudes (igualar totales de manera que la comparación absoluta de una respuesta válida, transformar el problema en uno aditivo de comparación, etc.).

- *El problema es variación pertinente*. El problema es significativo, creado por variación del problema base teniendo en cuenta las dificultades que encontraron los alumnos en el episodio de clase para su solución. Esto supone clarificar la intención del problema y en tal caso dirigir al estudiante a la comparación proporcional de los alumnos lectores en cada curso, en el sentido descrito en la sección previa.

5.3.3. Categorías de los problemas creados

Cada investigador analizó de manera independiente un cuarto de los informes de los participantes. Luego contrastaron las categorías obtenidas y las revisaron de forma conjunta para consensuar el juicio de los protocolos de respuestas en los que había discrepancia. El proceso se repitió hasta haber analizado todos los informes. Se obtienen así las siguientes categorías (establecidas a posteriori):

- *Describe lo que haría, pero no llega a formular el problema*. En este caso los FM sugieren una propuesta sin concretar un enunciado del problema. Por ejemplo, FM91 señala:

  > Lo que realizaría primero sería exponer el problema como si el total de las dos clases fuese el mismo, es decir, tanto en 6º como en 4º hay el mismo número de alumnos y, a continuación, en otro apartado, les preguntaría que si en el caso de que en 6º hubiese 60 alumnos y en 4º, 40 cuál sería ahora la clase con más porcentaje de lectura.

- *Modifica el problema para calcular totales*, pasando de un problema de proporcionalidad a otro aditivo. Por ejemplo, FM115 pregunta el número total de lectores sin distinguir los cursos:

  > En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria, 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿Cuántos libros leen entre los dos cursos a diario? Explica tu respuesta. Usa representaciones si te resulta más sencillo.

- *Modifica el problema para calcular partes*, convirtiendo el problema de comparación a uno de valor faltante. Por ejemplo, FM27:

  > En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria el 25% lee un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, el 30% lee un libro a diario. ¿Cuántos alumnos leen un libro en cada curso?

- *Mantiene la pregunta, pero cambia los datos cuantitativos por fracciones o porcentajes*. Por ejemplo:

  > En mi colegio, de los 50 alumnos de 6º curso de primaria 1/5 leen un libro a diario. De los 30 alumnos de 5º curso de primaria, 2/4 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta. (FM2)

- *Modifica los datos para que se relacionen multiplicativamente*. Cambia la información para que las cantidades de las magnitudes sean múltiplos o submúltiplos entre sí (en al menos una de las razones). Por ejemplo, FM95 enuncia: "En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 30 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?".
- *Iguala totales o partes a comparar*. En esta categoría se incluyen los problemas en los que los FM igualan los totales de alumnos o las partes de los lectores de ambos cursos, manteniendo el mismo tipo de pregunta. Por ejemplo:

  > En 6º curso hay dos clases de 30 alumnos cada una, en una de ellas 15 alumnos leen un libro a diario, en la otra, 12 alumnos leen un libro a diario. ¿En qué clase se lee más? Justifica tu respuesta (FM92, iguala totales).
  >
  > En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 18 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 18 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más? Explica tu respuesta (FM128, iguala partes).

- *Mantiene la pregunta, pero agrega información (o modifica la redacción) para insistir en la diferencia de totales de alumnos en cada curso*. En este caso los FM mantienen el enunciado, pero insisten en la diferencia de la cantidad de lectores en cada curso con la intención de orientar hacia el razonamiento proporcional. Por ejemplo, FM1 crea el siguiente problema:

  > En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. Teniendo en cuenta que cada clase tiene un número distintos de alumnos, ¿En qué curso se lee más?

- *Modifica la pregunta o añade otra con la intención de hacer referencia explícita a la proporcionalidad o a la comparación relativa (fracciones, porcentajes)*. Por ejemplo, FM5 y FM54 plantean, respectivamente:

> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué clase hay un mayor porcentaje de alumnos que leen? (FM5)
>
> En mi colegio, de los 60 alumnos de 6º curso de primaria, 15 leen un libro a diario. De los 40 alumnos de 5º curso de primaria, 12 leen un libro a diario.
>
> Según estos datos, ¿en qué curso se lee más, en proporción al número de alumnos que hay en cada curso? (FM54)

- *No es un problema creado por variación*. Esto ocurre en dos casos:
  a) los FM *modifican todos los elementos del problema*. Por ejemplo, FM8 plantea:

  > Al salir del colegio, Pedro y Ana van a la tienda de chuches. Pedro se compra 7 ladrillos rojos y Ana 10 ladrillos blancos. Al salir de la tienda, Pedro se come 3 y Ana 5. ¿Quién ha comido más ladrillos?

  b) los FM *reescriben el enunciado* manteniendo contexto, entorno, datos cuantitativos y requerimiento. Por ejemplo:

  > En mi colegio, estamos realizando una encuesta para ver cuántos alumnos leen un libro diariamente. Comprobamos que en 6º de primaria hay un total de 60 alumnos de los cuáles leen un libro diariamente 15 alumnos y en 5º de primaria con un total de 40 alumnos leen un libro diariamente 12 alumnos. ¿En qué curso leen más alumnos diariamente? Explica tu respuesta. (FM72)

- *Otros enunciados no contemplados en las demás categorías*. Se consideran en esta categoría aquellos problemas que no responden a las tipologías anteriores, pero que sí son problemas creados por variación. Por ejemplo, FM105 plantea “Compara las siguientes fracciones e indica cuál es la mayor: 15/60 y 12/40”, donde se deshace del contexto y omite la necesidad de establecer un análisis proporcional, reduciendo el problema a una comparación de fracciones.

5.3.4. Categorías de las justificaciones de las variaciones del problema

A continuación, describimos los tipos de argumentos que emplean los FM para justificar el tipo de variación propuesta:

- *Mejorar la interpretación del requerimiento*. En este caso los participantes argumentan, como FM119, que la variación realizada al problema persigue que el requerimiento sea más claro:

> Creo que la principal dificultad del problema es comprender que se pide para resolver, ya que el requerimiento puede ser interpretado de distintas formas. Por ello he decidido redactar el problema de una forma más clara para que su comprensión sea más sencilla y proponer un requerimiento más conciso para no dejar dudas de lo que se pide en el problema.

- *Mejorar la comprensión del enunciado*. Los FM consideran que sus variaciones permiten que el enunciado del problema sea más fácil de comprender, por ejemplo: "He variado un poco la información proporcionada, redactando el enunciado de manera más clara para el alumnado" (FM23).
- *Buscar un contexto más motivador o próximo a los alumnos*. En este caso los participantes consideran que escoger un contexto más familiar para los alumnos les facilita su resolución. Por ejemplo, FM83 dice:

  > He decidido modificar el contexto porque creo que es mucho más familiar y atractivo para el alumnado. Además, esa actividad se puede llevar a cabo en clase si aciertan el problema, entonces podrías crear una motivación para su resolución.

- *Facilitar la identificación del uso de la relación de proporcionalidad*. Los FM argumentan que la variación realizada al problema permite identificar la necesidad de utilizar un razonamiento proporcional. Por ejemplo, cambiando los datos para que reconozcan las proporciones, o destacando la diferencia ente la cantidad de alumnos de cada caso. Por ejemplo, FM31 señala: "Luis debe comprender que las dos clases no tienen la misma cantidad de alumnos y que debe realizar una proporcionalidad para igualarlas. Este es el sentido de la información añadida". Con "información añadida" FM31 se refiere a la frase que incluye en el enunciado propuesto: "Teniendo en cuenta que la cantidad de alumnos en ambas clases no es la misma".
- *Clarificar la relación parte-todo*. Aquí, se agrupan las justificaciones de los FM que fundamentan su propuesta en la necesidad de aclarar la relación proporcional entre las magnitudes (cantidad de lectores-total de lectores) en cada grupo de alumnos. Por ejemplo, FM76 argumenta: "La finalidad de este problema es que los alumnos identifiquen la relación parte-todo en la razón, evitando el uso de una estrategia aditiva incorrecta por comparar las partes".
- *Más fácil*. En este caso los FM plantean que su variación fue simplemente para crear un problema más fácil para los alumnos. Algunos no detallan qué los hace más

sencillos como, por ejemplo, FM92, quien simplemente indica "considero que el problema propuesto es bastante claro y sencillo de ver a simple vista, además de sencilla realización". En otros casos, especifican qué los hace más sencillo, haciendo fundamentalmente referencia a la simplificación de los datos ("De este modo les resultará más fácil y se sentirán más cómodos manejando estas cifras más pequeñas", FM58).

– *Simplificar el problema mediante el uso de fracciones*. Los participantes señalan, como FM79, que incluir fracciones disminuye la dificultad del problema:

> He realizado esta variación ya que para resolver este problema es mucho más sencillo hacerlo con el contenido de las fracciones puesto que es algo que implica menos dificultad en los alumnos y se ve mucho más claro ya que en este caso no se incluye regla de tres o porcentajes.

Algunos añaden además la ventaja de su representación para la comprensión del problema.

– *Facilitar el problema mediante el uso de porcentajes.* Esta categoría contempla los casos en los que se justifica el uso de porcentajes en el problema como medio para facilitar su resolución. Por ejemplo, FM37 señala:

> Con estos cambios considero que los alumnos entenderán mejor como calcular el curso que más lee (…), pues al tener que realizar el porcentaje de alumnos que leen por toda la clase, ayudará a superar las dificultades de Juan y María que lo habían realizado al revés, y además mediante el porcentaje podrán ver más claro el resultado.

– *Simplificar las operaciones requeridas (evitar decimales)*. En este caso los participantes realizan variaciones para que las operaciones a realizar sean fáciles para los alumnos, evitando el uso de decimales.

– *No contesta*. En este caso, los FM no justificaron la elección de los elementos variados del problema.

5.4. Resultados. Interpretación de las respuestas de los alumnos por los maestros en formación

A continuación, se muestran los resultados obtenidos del análisis y valoración de los informes entregados por 127 participantes. Los otros tres interpretaron de manera conjunta las respuestas de Luis, María y Juan: FM105 y FM120 consideran que la pregunta está formulada de manera ambigua; FM122 señala simplemente que "los alumnos no emplean proporcionalidad".

El grado de adecuación de las valoraciones se puntuaron con 0, 1, 2 puntos según estas fueran de pertinencia baja, media o alta. Así, dado que debían valorar el comentario de tres alumnos, podían obtener 6 puntos como puntuación máxima. De forma general, se observa los FM no tuvieron éxito al valorar las respuestas de los alumnos. En concreto, el 80,31% de los participantes obtuvieron menos de 3 puntos, un 12,6% lograron 3 puntos y el resto, 4 o 5 puntos.

La Tabla 5.1 presenta las frecuencias encontradas para las distintas categorías de interpretación de los FM al comentario de Luis y su nivel de pertinencia asociado.

Tabla 5.1
Frecuencias (porcentajes) en la valoración de la respuesta de Luis por los FM (n=127).

Pertinencia / Interpretación	Baja	Media	Alta	Total
La formulación de la pregunta lleva a Luis a comparar de forma absoluta	0 (0)	5 (3,94)	7 (5,51)	12 (9,45)
No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso	6 (4,74)	54 (42,52)	0 (0)	60 (47,24)
Respuesta rápida sin reflexionar sobre la necesidad de emplear fracciones.	13 (10,24)	–	–	13 (10,24)
No utiliza la relación de proporcionalidad o su comprensión es deficiente.	0 (0)	35 (27,56)	3 (2,36)	38 (29,92)
No concluyente.	4 (3,15)	–	–	4 (3,15)
Total	23 (18,11)	94 (74,02)	10 (7,84)	127 (100)

Es importante que el profesor reflexione sobre si el problema que plantea al estudiante está claramente formulado, en particular, si la pregunta se ajusta a sus intenciones didáctico-matemáticas. Los FM debían observar que la forma absoluta en la que está formulada la pregunta del episodio podía motivar la respuesta de Luis. En este caso, un escaso porcentaje de los participantes reflexionaron al respecto (Figura 5.2).

> Luis no considera el conjunto de la población en total, tan solo se centra en comparar el número de alumnos que leen en 6º y el número de alumnos que lo hacen en 5º. Su razonamiento es si en 6º leen 15 y en 5º leen doce pues está claro que en 6º leen más. Si nos fijamos en la pregunta no es del todo clara e induce a error ¿En qué curso leen más? Pues el dice en 6º porque hay que alumnos mientras que en 5º solo 12.

Figura 5.2. *La formulación de la pregunta no es clara y admite comparación absoluta (FM111). Valoración pertinente.*

La mayoría dieron por hecho que los alumnos debían interpretar "¿en qué curso se lee más?" de forma proporcional, considerando en algunos casos que la redacción de la pregunta era la adecuada a la edad de los alumnos a los que se dirigía. Casi la mitad de los participantes consideraron que Luis no había tenido en cuenta el total de alumnos que tiene cada curso, inclinándose por comparar únicamente el número de lectores. Estos FM no profundizaron en cuál podía ser el origen de esta respuesta (la redacción de la pregunta del problema o el no haber establecido una relación de proporcionalidad conveniente, por ejemplo) y con frecuencia indicaron que el alumno "no hace ninguna operación", como debilidad en su trabajo matemático.

El 29,92% indicaron que la respuesta de Luis se debe a que no reconoce la relación de proporcionalidad entre las magnitudes "número de alumnos en clase" y "número de alumnos lectores", o que un razonamiento proporcional limitado lo lleva a hacer una comparación sólo de las partes. En algunos casos (diez de los 38 FM) se refieren explícitamente al uso de una estrategia aditiva incorrecta o a la dificultad de Luis para distinguir situaciones proporcionales de aditivas (Figura 5.3).

a) ¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos?

-Luis es el que más lejos está de la solución, ya que directamente no ha entendido que es un problema en el que hay un todo (el total de la clase) y una parte (la que lee) de ese todo. Está comparando únicamente las partes de ese todo. No ha captado el razonamiento proporcional. No distingue entre situaciones aditivas y proporcionales.

Figura 5.3. *Valoración de FM53 a la respuesta de Luis. Carencia en el razonamiento proporcional. Pertinencia media.*

En otros casos, los FM reconocen que la falta de comprensión de la relación proporcional no permite a Luis identificar en qué curso hay un mayor porcentaje de lectores.

En la Tabla 5.2 se muestran los resultados de las valoraciones realizadas por los FM del comentario de María, así como su nivel de pertinencia asociado.

Tabla 5.2

Frecuencias (porcentajes) en la valoración de la respuesta de María por los FM (n=127).

Pertinencia Interpretación	Baja	Media	Alta	Total
Carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes.	18 (14,17)	13 (10,24)	0 (0)	31(24,41)
Plantea de forma incorrecta la relación entre el todo y la parte.	3 (2,36)	16 (12,60)	14 (11,02)	33 (25,98)
No tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso.	15 (11,81)	–	–	15 (11,81)
Intenta determinar el promedio de cuántos libros lee cada alumno.	6 (4,72)	–	–	6 (4,72)
Realiza operaciones al azar, sin sentido o erróneas.	24 (18,90)	–	–	24 (18,90)
No concluyente.	13 (10,24)	–	–	13 (10,24)
No contesta	5 (3,94)	–	–	5 (3,94)
Total	84 (66,14)	29 (22,84)	14 (11,02)	127 (100)

Como se observa en la Tabla 5.2, casi una cuarta parte de los FM consideraron que María muestra carencias en el razonamiento proporcional. Aunque no suelen ser descripciones que vayan más allá de indicar falta de conocimiento sobre proporcionalidad, porcentajes o equivalencia de fracciones (por lo que se consideraron de pertinencia baja), aquellos participantes que dieron una interpretación más detallada indicaron que, si bien el procedimiento seguido por María es el adecuado, la interpretación que da al resultado es incorrecta (Figura 5.4). Estas interpretaciones se consideran de pertinencia media.

> En el caso de María, el procedimiento llevado a cabo es correcto, sin embargo, no interpreta bien los resultados. En mi opinión, realiza las divisiones mecánicamente, sin comprender bien el proceso. Al obtener un número más grande, la proporción de niños que no leen respecto a los que sí es mayor, por lo que la respuesta sería totalmente al revés. Esto implica que María no comprende los conceptos de razón y proporcionalidad.

Figura 5.4. *Valoración poco pertinente de la respuesta de María. Carencia en el razonamiento proporcional (FM60).*

Las respuestas de los FM (25,98%) que consideran que María plantea de forma incorrecta la relación entre el todo y la parte (ha dividido el todo entre la parte, las razones utilizadas están planteadas al revés, …) fueron, en general, pertinentes. Por ejemplo, como se observa en la Figura 5.5, FM75 considera que María si identifica la relación parte-todo, lo que supone conocimiento de la razón, pero dividir el todo entre la parte le impide reconocer las razones “uno de cada 4” en 6º y “uno de cada 3,33333” en 5º que implica que “se lee más en 5º”.

María, a diferencia de Luis, identifica la relación parte-todo en la razón. Sin embargo, divide el todo entre las partes e identifica el resultado erróneamente, ya que sería: En 6º curso lee uno de cada 4 y en 5º curso lee uno de cada 3,33333, por lo que se lee más en 5º.

Figura 5.5. *Valoración pertinente a la respuesta de María. División del todo entre la parte (FM75).*

Se consideraron no pertinentes las respuestas en las demás categorías: María no tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso, María intenta determinar el promedio de cuántos libros lee cada alumno (se observa en este caso un conocimiento deficiente del significado de la media aritmética y de su cálculo) o realiza operaciones al azar, sin sentido o erróneas. Algunos FM que consideran que la división de María es errónea, muestran un conocimiento deficiente de la razón (Figura 5.6), identificando en el cociente dado por María cuantos alumnos no leen por cada alumno que si lo hace.

María sin embargo ha intentado ir más allá que Luis, resolviendo el problema mediante una división. En la división divide el total de alumnos del curso entre los que leen a diario de ese mismo curso. De esta forma el dato que está obteniendo es cuantos alumnos no leen por cada alumno que lee. Al no saber realmente que significa ese dato llega a la conclusión de que, como 4 es más que 3,33, más alumnos leen en 6º.

Figura 5.6. *Valoración a la respuesta de María. El total sobre la parte da la razón de los que no leen sobre los que leen (FM33).*

En la Tabla 5.3 se muestran los resultados de las valoraciones (tipo de interpretación y pertinencia) realizadas por los FM al comentario de Juan.

Tabla 5.3
Frecuencias (porcentajes) en la valoración de la respuesta de Juan por los FM (n=127).

Interpretación \ Pertinencia	Baja	Media	Alta	Total
Identifica la necesidad de comparar las partes partiendo de la misma unidad	11 (8,66)	29 (22,83)	2 (1,57)	42 (33,07)
Muestra carencia en el razonamiento proporcional o sus componentes	11 (8,66)	9 (7,09)	1 (0,79)	21 (16,54)
Tiene en cuenta que el total de alumnos es distinto en cada curso	12 (9,45)	3 (2,36)	0 (0)	15 (11,81)
Dificultades para expresarse	3 (2,36)	–	–	3 (2,36)
No concluyente.	39 (30,71)	–	–	39 (30,71)
No contesta	7 (5,51)	–	–	7 (5,51)
Total	83 (65,35)	41 (32,28)	3 (2,36)	127 (100)

Mientras que la mayoría de los participantes (87%) consideran que la respuesta más errada es la de Luis por la comparación absoluta que realiza (sin considerar la ambigüedad del requerimiento), un 21,26% de los FM consideran que Juan es el alumno que más se acerca a la solución correcta (Figura 5.7). No obstante, dado que el porcentaje de respuestas no concluyentes al valorar la intervención de este alumno es bastante elevado, es difícil saber en qué basan su opinión.

> La respuesta de Juan, a mi parecer, es la más correcta y la que más se acerca, aunque sigue siendo errónea, o al menos incompleta. Juan dice algo fundamental para la resolución de este problema y es lo siguiente: "hay que pasarlo a la misma unidad" este sería un primer paso para la resolución del problema y se realizaría mediante una regla de 3.

Figura 5.7. *Valoración de FM123 a la solución de Juan como la más correcta. Poco pertinente*.

En su mayoría se limitan a afirmar como FM116 que "Juan ha sido el que estaba más encaminado a encontrar la solución" o como FM108: "el único que hace bien el problema". Si embargo, Juan no llega a responder a la pregunta planteada, sino que indica que ha realizado la misma división que María (sin decir por qué) pero que reconoce que su resultado no es válido, precisando que "hay que ponerlo a la misma unidad". Cuando los FM detallan lo que ven detrás de la respuesta de Juan, interpretan en esta afirmación un cierto razonamiento proporcional ("se acerca al razonamiento proporcional pero no es del todo correcto. Se acerca debido a que comenta que 'hay que ponerlo a la misma unidad'", FM38). También consideran que con "ponerlo a la misma unidad" se refiere a obtener fracciones con igual denominador para compararlas ("[Juan] ha tenido en cuenta que hay que obtener el común denominador antes de realizar ninguna operación", FM62). Algunos de estos participantes añaden que lo que le ha impedido acabar el problema es desconocer cómo realizar el mínimo común múltiplo de los denominadores.

Así, un 33,07% de los FM encuentran rasgos de conocimiento sobre la proporcionalidad cuando Juan reconoce que, para comparar partes, los todos deben ser iguales (Figura 5.8).

> Aplica bien la proporcionalidad, pues piensa en igualar todos para poder comparar de forma correcta que parte es mayor y tiene adquirido el uso de las equivalencias.

Figura 5.8. *Valoración de FM69 a la respuesta de Juan basada en su uso de la proporcionalidad. Poco pertinente.*

Los FM que han considerado que la respuesta de Juan se debe a carencias en el razonamiento proporcional han sido poco precisos, indicando su falta de comprensión sobre la proporcionalidad o que carezca de sentido “poner a la misma unidad” (Figura 5.9). Algunos de estos participantes indican que Juan se confunde con la idea de “unidad de magnitud” (“Juan se equivoca al decir que no están en la misma unidad. Tanto el 60 como el 40 se corresponden a los alumnos”, FM11; “[Juan] tiene un problema con los cambios de unidad ya que los confunde”, FM106).

> - Juan. Es cierto que no es lo mismo 60 que 40 pero no hace falta ponerlo en la misma unidad. Sino hallar la proporción de libros que son leídos para saber con respecto a esa cantidad dónde se han leído mas. Tampoco comprende la proporcionalidad.

Figura 5.9. *Interpretación no pertinente de FM35 sobre la respuesta de Juan.*

Finalmente, comparando los resultados de las tablas 5.1, 5.2 y 5.3, observamos que los FM tuvieron mayor éxito al interpretar la respuesta de Luis, apreciando mayoritariamente que no había tenido en cuenta que el total de alumnos en cada grupo es diferente (Tabla 5.1) por lo que la comparación que establece no es acertada. Presentaron más dificultades al valorar con éxito el comentario de María, donde sólo la mitad de los FM se refirieron a cómo había establecido la relación entre la parte y el todo o a que no hubiera usado convenientemente la relación proporcional para extraer conclusiones, mostrando cierto grado de pertinencia sólo en poco más del 33% de las valoraciones (Tabla 5.2). Los resultados son similares al analizar la respuesta de Juan, en cuyo caso, aunque se produjo el mayor porcentaje de respuestas no concluyentes (30,71%), las valoraciones (34,64%) correspondientes a las primeras categorías (Tabla 5.3) fueron algo pertinentes.

5.5. Resultados. Variación de problemas para atender a las dificultades de los alumnos

En esta sección describimos qué tipos de variaciones realizaron los FM del problema para atender a las dificultades mostradas por los hipotéticos alumnos, en qué se basaron para proponer determinados cambios y cómo se relacionan con las interpretaciones de las respuestas de los alumnos.

5.5.1. Tipos de problemas creados y su justificación

En la Tabla 5.4 se incluye el resumen de frecuencias de los tipos de problemas creados por los FM, según las categorías descritas y ejemplificadas en la sección previa.

Tabla 5.4

Distribución de frecuencia de los problemas creados por los FM (n=130).

Categoría	Frecuencia (Porcentaje)
Modifica la pregunta o añade otra para hacer referencia a la proporcionalidad o a la comparación relativa.	67 (51,53)
Mantiene la pregunta, pero agrega información (o modifica la redacción) para insistir en la diferencia de totales de alumnos en cada curso.	14 (10,77)
Modifica los datos para que se relacionen multiplicativamente.	12 (9,23)
Mantiene la pregunta, pero cambia los datos a fracciones o porcentajes	7 (5,38)
Iguala totales o partes a comparar.	7 (5,38)
Modifica el problema para calcular totales.	5 (3,85)
Modifica el problema para calcular partes.	4 (3,08)
No es un problema creado por variación.	6 (4,62)
Describe lo que haría, pero no llegan a formular el problema.	3 (2,31)
Otros enunciados por variación.	5 (3,85)

Es interesante tener en cuenta qué respuestas de los alumnos valoraron de manera más adecuada en la primera parte de la tarea, ya que puede influir en la adecuación y el tipo de problema que elaboren cuando lo modifiquen para solventar las dificultades encontradas por estos. En este sentido, observamos que los FM tuvieron mayor éxito al interpretar la respuesta de Luis (adecuada en el 82% de los casos) que las de María y Juan. Un escaso porcentaje de los participantes (9,45%) señalaron la posibilidad de interpretar de manera absoluta la pregunta, en cuyo caso no se podía considerar errónea la respuesta de Luis. Cuando asumieron que la pregunta se debe interpretar de forma proporcional (en el 87% de los casos), indicaron que el error de Luis estaba en no considerar que el total de alumnos en cada curso es diferente. En el caso de la respuesta de María, solo la mitad de los FM mencionaron que establece erróneamente la relación entre la parte y el todo o que su planteamiento se debe a deficiencias en el razonamiento proporcional o alguno de sus componentes. Finalmente, la mayoría de los FM consideraron que Juan exhibe un razonamiento proporcional parcial que lo lleva a identificar la necesidad de comparar las partes usando la misma unidad (más del 20% consideraron que es el alumno que más se acerca a una respuesta correcta). Sin embargo, más de la mitad de los participantes no mencionan a los alumnos en su justificación y cuando lo hacen, la mayoría no indica de forma explícita la relación entre su propuesta y las respuestas de los alumnos, por lo que es difícil analizar esta conexión.

Como se observa en la Tabla 5.4, más del 50% de los FM modifican la pregunta o añaden otra con la que se pide explícitamente la comparación proporcional, frecuentemente, indicando "en proporción" (por ejemplo, FM54 plantea "¿en qué curso se lee más, en proporción al número de alumnos que hay en cada curso?") o preguntando por las fracciones o porcentajes de lectores (Figura 5.10). Sin embargo, esta decisión no está siempre motivada porque los FM consideren que la pregunta del problema de partida admita una interpretación "ambigua" (como indica FM118 en la Figura 5.10), ya que como hemos mencionado sólo el 9,45 % de los participantes reflexionaron sobre la posibilidad de interpretar de manera absoluta la pregunta.

> Creo que la principal dificultad del problema es comprender que se pide para resolver, ya que el requerimiento puede ser interpretado de distintas formas. Por ello he decidido redactar el problema de una forma más clara para que su comprensión sea más sencilla y proponer un requerimiento más conciso para no dejar dudas de lo que se pide en el problema.
>
> Problema En mi colegio, una clase de 6º de Primaria tiene 60 alumnos. Dentro de esta clase, 15 de los alumnos leen un libro a diario. En la clase de 5º de Primaria hay 40 alumnos en total y 12 de ellos leen un libro a diario. ¿En qué curso el porcentaje de lectura es mayor? Explica tu respuesta.

Figura 5.10. *Variación del requerimiento para mejorar su interpretación (FM118).*

Algunos de los FM que asumen la pregunta de manera relativa, modifican la información insistiendo en la diferencia entre número de alumnos totales en cada curso (10,77%, Tabla 5.4). Este es el caso, por ejemplo, de FM96 (ver Figura 5.11).

> *En mi colegio, 15 alumnos de los 60 totales de 6º curso de primaria leen un libro a diario. Mientras que 12 alumnos de los 40 totales que hay en 5º de primaria leen un libro a diario. Teniendo en cuenta que la cantidad total de alumnos en cada curso no es la misma, indica en qué curso se lee más. Explica tu respuesta.*
>
> Para evitar el primer problema, hemos aclarado al alumnado explícitamente que: "la cantidad total de alumnos en cada curso no es la misma".
> Para evitar el segundo problema, hemos indicado de forma más clara la relación parte-todo de la razón: "15 alumnos de los 60 totales" y "12 alumnos de los 40 totales".

Figura 5.11. *Problema creado por variación de la información para clarificar relación parte-todo (FM96).*

El primer problema a que se refiere FM96 en la Figura 5.11 es "no considerar que el todo no es igual en ambas razones" (referido a Luis) y con el segundo problema "confundir la parte con el todo de las razones y viceversa, alternando los valores del numerador y el denominador en las fracciones correspondientes” (referido a María y Juan).

Cambiar los datos cuantitativos, para evitar decimales o buscar razones más sencillas que faciliten su comparación es la tercera categoría más frecuente de propuesta de cambio (9,23%) para resolver las dificultades encontradas por los alumnos (Figura 5.12).

> *En mi colegio, de los 60 alumnos de 6° curso de primaria 15 leen un libro a diario. De los 30 alumnos de 5° curso de primaria, 12 leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?*
>
> He cambiado que en 5° hay 30 alumnos, la mitad que en 6°, en vez de 40. Así podemos deducir que siendo la mitad leen casi los mismos que en 6°.

Figura 5.12. *Problema creado por variación de los datos cuantitativos para facilitar la búsqueda de relaciones multiplicativas (FM95).*

La Tabla 5.5 muestra las frecuencias encontradas en las diferentes categorías de justificaciones con las que los FM respaldaron sus variaciones realizadas al problema inicial. Se observa que el 11,54% de los FM no detallaron los motivos de su propuesta.

Tabla 5.5
Distribución de frecuencias (porcentajes) de justificaciones sobre la variación del problema (n=130).

Categoría	Frecuencia
Facilitar la identificación del uso de la relación de proporcionalidad.	22 (16,92)
Mejorar la interpretación del requerimiento.	19 (14,62)
Más fácil (simplificar datos, operaciones).	16 (12,31)
Clarificar la relación parte-todo.	15 (11,54)
Facilitar el problema mediante el uso de porcentajes.	15 (11,54)
Buscar un contexto más motivador o próximo a los alumnos.	10 (7,69)
Mejorar la comprensión del enunciado.	9 (6,92)
Facilitar el problema mediante el uso de fracciones.	9 (6,92)
No contesta.	15 (11,54)

Según se aprecia en la Tabla 5.5, casi el 17% de los participantes indicaron que con los cambios realizados al problema inicial perseguían que fuera más sencillo para los alumnos reconocer y establecer la relación proporcional entre las magnitudes. Esta justificación acompaña a algunos de los problemas en los que se modifica la pregunta o añade otra con la intención de hacer referencia explícita a la proporcionalidad o a la comparación relativa mediante fracciones o porcentajes. También en aquellos problemas creados modificando los datos para que sea más sencillo establecer relaciones multiplicativas entre las cantidades de las magnitudes (Figura 5.12).

Aunque, 19 FM señalaron que la modificación del requerimiento realizada pretendía facilitar la comprensión del requerimiento, solo cinco lograron que la pregunta fuera más clara solicitando explícitamente la comparación de los porcentajes de lectura en cada curso (Figura 5.10), o añadiendo “en proporción” a la misma. Los demás, mantuvieron el mismo tipo de pregunta, realizando variaciones de los demás elementos del problema (contexto, datos cuantitativos) que no facilitaban a los alumnos la interpretación del requerimiento.

De los 16 participantes que indicaron que su propuesta era más fácil que el problema inicial, 11 argumentaron que la dificultad del problema disminuía con la utilización de cifras más pequeñas, o al evitar los decimales periódicos en el cálculo de la razón unitaria.

Un 11,54% de los FM, justificaron el uso del porcentaje en el requerimiento del problema creado en que facilita la resolución de problemas de proporcionalidad. Al igual que FM118 (Figura 5.10), otros 13 participantes utilizan el porcentaje en el requerimiento. También se considera que dar los datos cuantitativos en forma de porcentaje o fracción ayuda a los alumnos a resolver el problema (Figura 5.13).

En mi cole de segundo ciclo de primaria, la maestra de lengua ha pasado los resultados de una encuesta sobre el porcentaje de alumnos que leen en la biblioteca. De los 60 alumnos que hay en el 6º curso 15% leen a diario, mientras que de los 40 alumnos que hay en el 5º curso solo 12 % leen un libro a diario. ¿En qué curso se lee más?
Justificación: al introducir el tanto por ciento de una cantidad, lo que le damos más facilidades al alumnado a la hora de entender el enunciado, ya que antes, al no saber que había que hacer exactamente con las cantidades, el alumno se podría confundir.

Figura 5.13. *Variación no pertinente del problema. Datos cuantitativos en forma de porcentaje (FM36).*

Las justificaciones basadas en la necesidad de clarificar la relación parte-todo (el 11,54%) acompañan a algunos de los problemas creados en los que se modifica la información para insistir en la diferencia entre el número de lectores y el número de alumnos totales de cada curso, o reescribir las razones dando primero las partes y luego los todos, como ocurre en el propuesto por FM96 incluido en la Figura 5.11. Es frecuente que consideren como FM17 que “el objetivo a la hora de especificar los 15 alumnos de 60 es ayudar a Juan y María, ya que a la hora de dividir se confunden entre la parte y el todo dividen 60 entre 15 y 40 entre 12 cuando esto debería de ser al revés 15/60 y 12/40.” Con la intención de evitar que María realice estas divisiones, otros FM apuestan también por cambiar los datos cuantitativos por las fracciones 15/60, 12/40. En este caso, se observa que, si se mantiene la pregunta (entendida de manera relativa), las fracciones o los porcentajes (Figura 5.13) permite la comparación sin necesidad de conocer los totales de alumnos en cada curso, información que sería, por tanto, redundante.

5.5.2. Pertinencia en la creación de problemas. Relación con el análisis de las respuestas de los alumnos

Dado que los FM debían crear problemas por variación del enunciado considerando las dificultades encontradas en el episodio, analizamos el grado de éxito logrado por los FM en la creación de problemas, comparándolo con el grado de pertinencia en la interpretación de respuestas de los alumnos. Una valoración en la primera tarea se consideró: pertinente (2 puntos) si el FM describe e interpreta correctamente la respuesta del alumno, analizando su estrategia o error; poco pertinente (1 punto) si el FM describe la respuesta dada por el alumno, pero no interpreta de forma adecuada su error; no pertinente (0 puntos) en cualquier otro caso. Así, podían obtener un total de 6 puntos como puntuación máxima. En este trabajo, y con la intención de contemplar la valoración conjunta, consideramos las siguientes categorías: pertinencia alta, si obtiene 5 o 6 puntos; pertinencia media, con 3 o 4 puntos; pertinencia baja, desde 0 hasta 2 puntos.

Tabla 5.6
Frecuencia (porcentaje) en las valoraciones de las respuestas de los alumnos y grados de pertinencia de los problemas creados por los FM (n=130).

Problema / Valoración	No significativo	Significativo, no variación	Variación no pertinente	Variación pertinente	Total
Pertinencia baja	18 (13,85)	3 (2,31)	61 (46,92)	27 (20,77)	109 (83,85)
Pertinencia media	4 (3,08)	1 (0,77)	10 (7,69)	4 (3,08)	19 (14,62)
Pertinencia alta	0 (0)	0 (0)	2 (1,54)	0 (0)	2 (1,54)
Total	22 (16,92)	4 (3,08)	73 (56,15)	31 (23,85)	130 (100)

La Tabla 5.6 muestra dos hechos que merecen atención. Por un lado, más de la mitad (56,15%) de los FM crearon problemas que, si bien eran problemas significativos creados por variación de la situación inicial, no facilitaban la solución atendiendo a las dificultades encontradas por los alumnos. Esto se debe, mayoritariamente a que los FM “evitan” la dificultad identificada, por ejemplo, dando la información directamente como fracción o porcentaje, porque consideran que su cálculo fue complejo, o "adaptan" la información para que la respuesta de los alumnos sea válida. Esto ocurre cuando igualan los números de alumnos en cada curso. Por ejemplo, FM55 cambia el número de alumnos en 5º y 6º a 40 en cada caso y afirma:

> Con este problema lo que he cambiado ha sido la información, ya que he modificado los números y he puesto el mismo número de alumnos en ambas clases para evitar las respuestas erróneas que han dado, fruto de la mala interpretación del problema (ya desparece el error de Luis, al tener el mismo número de alumnos en ambas clases).

Por otro, aunque la mayoría (83,85%) de los FM valoraron de forma poco pertinente las intervenciones de los alumnos del episodio, la cuarta parte de los problemas elaborados por estos participantes fueron variaciones adecuadas al requerimiento didáctico planteado en la consigna. Es decir, estos FM crearon problemas que ayudaban a superar la dificultad encontrada con el problema inicial a pesar de no haber descrito de manera adecuada las estrategias y errores de los alumnos. Esto muestra que no existe una relación directa entre la competencia para describir de forma adecuada el pensamiento matemático de los alumnos, y la capacidad para crear problemas que tengan en cuenta sus estrategias erradas. De hecho, los FM que obtuvieron la mayor calificación en la valoración de las respuestas de los alumnos crearon problemas por variación poco pertinentes y no hubo ningún FM que creara problemas de variación pertinente y obtuviera más de 4 puntos en la valoración de las respuestas de los alumnos. Esto puede venir motivado por la falta de un vocabulario experto que permita organizar el discurso profesional cuando describen el pensamiento matemático de los estudiantes (Llinares et al., 2019).

Hemos observado al respecto que más de la mitad de los participantes no mencionan a los alumnos cuando justifican la variación realizada y, si lo hacen, la mayoría no señala su relación de forma explícita. De hecho, solo el 17% de los FM justifican las variaciones del problema a partir de los resultados de la primera tarea.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se han presentado los resultados de una experiencia con futuros maestros de primaria centrada en la interpretación de las respuestas de alumnos (ficticios) a una tarea de comparación de razones y la creación de problemas de proporcionalidad por variación con la finalidad de facilitar la comprensión y la solución de las dificultades encontradas por los alumnos en el episodio de clase. No se trata de modificar el problema simplemente para alcanzar la solución o de simplificar el problema para que les resulte más fácil a los alumnos, se trata de reconocer cuáles de las respuestas erróneas proceden de la formulación de la tarea y cómo modificar la información o el requerimiento para progresar en aprendizajes significativos.

Con relación a la primera consigna, los resultados muestran las dificultades que supone a los FM la tarea de identificar por medio de las prácticas (operativas o discursivas) de los alumnos, cuál es su pensamiento matemático y en base a esto, justificar por qué consideran correcta la respuesta de un alumno de primaria y cuál creen que es el error que ha cometido. Esto los lleva a decidir si una solución es buena o no, en base a lo que esperan desde su punto de vista experto ("usar porcentajes", "emplear regla de tres") sin analizar la validez de las estrategias y argumentos que emplean los alumnos ante una determinada situación-problema, y sin cuestionar el requerimiento explícito de la misma. Así, se encuentra de forma frecuente en los informes de los participantes referencias a que se debería aplicar la regla de tres para llegar a la solución correcta, tanto de forma genérica para los tres alumnos, como específica cuando consideran el procedimiento que habría llevado al éxito a Juan (Figura 5.7) o cómo deberían haber calculado el porcentaje de lectores. Parece que la regla de tres sigue siendo lo primero en lo que piensan los FM cuando se encuentran frente a una situación de proporcionalidad, sin notar que, en un problema de comparación, como en este caso, no es el procedimiento que permite resolverlo (al menos de forma eficiente). Los maestros en formación no tienen la riqueza o las perspectivas múltiples o relativistas necesarias para ofrecer algo más que su única "respuesta correcta" (Buforn et al., 2020, p. 24). Esto puede estar motivado por un conocimiento sesgado, débil o incompleto del razonamiento proporcional. Así, coincidiendo con investigaciones previas, se observa que los FM tienen dificultades para comprender los significados de razón y proporción (Buforn et al., 2018), interpretar adecuadamente las razones en situaciones de comparación (Gómez y García, 2014) y diferenciar situaciones aditivas y multiplicativas (Hilton y Hilton, 2019). Además, se sustentan en la regla de tres en situaciones de proporcionalidad sin discutir si es pertinente (Riley, 2010) y al evaluar las respuestas de los alumnos, defienden la regla de tres como la "mejor estrategia" para emplear en tareas de proporcionalidad (Burgos y Godino, 2022b). Como sugiere Son (2013), una comprensión limitada de los FM sobre razón y proporción y su limitada exposición a la identificación de los errores de los estudiantes los motiva a centrarse simplemente en las reglas y procedimientos a la hora de identificar la fuente de los errores de los estudiantes.

El que un escaso porcentaje de participantes indicaran el carácter ambiguo del requerimiento en la situación del episodio, revela las deficiencias por parte de los FM para identificar si un problema matemático, en nuestro caso de proporcionalidad, está bien diseñado, y las dificultades que puede presentar su formulación en el proceso de resolución por parte de los estudiantes. Estas deficiencias se ponen de manifiesto también cuando los FM consideran como única fuente de error en Luis la respuesta rápida y carente de reflexión, sin observar que la pregunta se puede interpretar tanto de forma absoluta (comparación entre las cantidades totales de lectores en cada curso) como relativa (comparación entre las razones de alumnos lectores a totales en ambos cursos). También, se reconoce un conocimiento matemático y didáctico deficiente cuando los FM afirman que las operaciones que realiza María sólo darían una respuesta adecuada si hubiera el mismo número de alumnos en cada clase. En este caso, además, consideran que Juan sí observa este hecho y que por tanto es el más acertado (Juan "corrige" a su compañera, aunque no haya terminado de concluir una solución). Los FM no identifican detrás de la estrategia de María la posibilidad de obtener la respuesta al problema, no le dan sentido y las consideran "al azar" o "sin sentido" ("le sale un número que no indica nada", FM129). Para superar la resistencia a considerar la multiplicidad de planteamientos de los alumnos y reconocer su capacidad global (Buforn et al., 2020), es necesario desde la formación de profesores no sólo insistir y reforzar la flexibilidad de los futuros docentes para resolver problemas, sino también para ver las oportunidades de aprendizaje en las estrategias menos eficientes de los alumnos.

Cuando los FM analizan las respuestas de estudiantes a una tarea matemática, muestran sus conocimientos matemáticos y su competencia para discernir la información matemática relevante al interpretar el pensamiento matemático. Así, que los FM consideren que la respuesta de Luis no es buena porque no ha realizado ninguna operación aritmética para calcular la solución, es muestra de que para los FM el aspecto operacional sigue siendo determinante para reconocer el pensamiento matemático de los alumnos y decidir lo que consideran apropiado o no. También se observa que al analizar la intervención de Juan los

FM “encajan” su respuesta en lo que ellos habrían realizado para llegar hasta ella, asegurando lo que este alumno ha hecho (“Este alumno ha llegado a la respuesta correcta ya que lo que ha hecho ha sido obtener el mínimo común múltiplo antes de realizar cualquier operación”, FM22).

Con relación a la segunda parte de la tarea, el hecho de que menos de la cuarta parte de los FM tuvieran éxito al crear problemas por variación pertinentes, muestra deficiencias en diferentes facetas del conocimiento didáctico-matemático sobre la proporcionalidad:

a) *Epistémica*. Un conocimiento sólido del contenido matemático es imprescindible para crear problemas (Tichá y Hošpesová, 2013; Milinković, 2015), en particular, en aquellos que involucra el razonamiento proporcional. Aun cuando asumen que la pregunta del problema conlleva un razonamiento proporcional, los FM crean problemas (por variación en este caso) que permiten desligarse del uso de la proporcionalidad (de comparación aditiva). En otros casos, la modificación persigue el uso de la regla de tres como estrategia de resolución, aun cuando no es un medio efectivo en un problema de comparación como el dado. Esto coincide con resultados previos en los que se observa una desconexión entre el conocimiento de los procedimientos implicados en el razonamiento proporcional y significados de la razón no directamente vinculados con procedimientos, por ejemplo, la razón como índice comparativo (Buforn et al., 2018).
b) *Cognitiva*. Los profesores de matemáticas deben ser capaces de graduar la complejidad de los problemas que proponen, pero para esto requieren identificar los conflictos de aprendizaje que puede implicar una tarea (creada o elegida). En este trabajo se observa que los FM no identifican oportunamente las dificultades o errores cometidos en la solución del problema en el episodio de la clase, ni la dificultad de las posibles interpretaciones del requerimiento. Es necesario ayudar a los futuros maestros a generar un discurso detallado en relación con las estrategias usadas por los estudiantes de educación primaria (Ivars et al., 2018) incluyendo referencias explícitas a posibles obstáculos y su origen, proporcionándoles herramientas para guiar la interpretación de las narrativas de los alumnos (Burgos y Godino, 2022b).
c) *Interaccional-mediacional.* Los FM tienen dificultades para crear problemas que potencien un razonamiento proporcional en los estudiantes; pueden crear por

variación problemas pertinentes, pero estos no facilitan la comprensión y resolución del problema inicial y "evitan" las dificultades en lugar de aprovechar el error como fuente de aprendizaje. El conocimiento del contenido matemático que se espera enseñar y de cómo se desarrolla y progresa el aprendizaje de los estudiantes no es suficiente para lograr una adecuada enseñanza de las matemáticas. Es necesario reforzar los conocimientos de los futuros maestros sobre organización de tareas, resolución de dificultades y recursos apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes que les permita hacer frente a situaciones reales de clase (Godino, Giacomone et al., 2017).

CAPÍTULO 6. CREACIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD POR FUTUROS PROFESORES ESPAÑOLES: EL PAPEL DEL CONTEXTO

El contenido de este capítulo aparece recogido en el siguiente artículo:

> Burgos, M., Chaverri, J. y Muñoz-Escolano, J. (2024). Problem Posing in Mathematics Teacher Training: Developing Proportional Reasoning. *Mathematics teaching-research journal*. (En prensa)

6.1. Introducción

Los hallazgos de investigaciones previas muestran las dificultades de futuros profesores para crear problemas significativos de proporcionalidad en un contexto aritmético Proponen problemas poco relevantes para el aprendizaje de sus estudiantes, enunciados que no están adaptados al nivel educativo o son incorrectos o incompletos ((Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Burgos et al., 2018; Tichá y Hošpesová, 2013; Xie y Masingila, 2017). Sin embargo, no hemos encontrado investigaciones centradas en la formación de profesores que aborden la creación de problemas en contextos como el funcional, geométrico y probabilístico, donde la proporcionalidad juega un papel decisivo. Por otro lado, trabajos como el de Li et al. (2020) demuestran que las creencias de los profesores sobre el planteamiento de problemas pueden determinar cómo utilizan esta estrategia en su práctica docente. Sin embargo, a pesar de la importancia del planteamiento de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, y de las creencias tanto de los profesores en formación como de los profesores en servicio, el estudio de las creencias sobre el planteamiento de problemas ha recibido poca atención (Li et al., 2020).

En la acción formativa descrita en este capítulo, los futuros docentes de educación secundaria deben crear problemas en un determinado contexto (aritmético, funcional, geométrico o probabilístico) de forma libre o a partir de una situación dada. En el primer caso se persigue que los futuros profesores identifiquen en base a los elementos matemáticos implicados en su resolución la complejidad del problema propuesto. En el segundo caso, los profesores en formación deben analizar su potencialidad para desarrollar aspectos esenciales, como puede ser la naturaleza proporcional de los porcentajes o las propiedades que permiten caracterizar la relación de proporcionalidad. Planteamos los siguientes objetivos de investigación:

1. identificar las creencias que poseen futuros profesores de secundaria sobre lo que es un buen problema matemático y cómo influyen en la creación de problemas de proporcionalidad;
2. estudiar las dificultades que manifiestan futuros profesores en la creación de problemas de proporcionalidad de forma libre y semiestructurada en distintos contextos;
3. describir los conocimientos sobre el razonamiento proporcional que manifiestan futuros profesores en la creación de problemas.

6.2. Contexto y participantes

La acción formativa en la que se enmarca la investigación se realizó con 16 estudiantes para profesor (5 mujeres y 11 hombres) en el contexto de una asignatura de la especialidad de matemáticas del Máster de Profesorado de Educación Secundaria de la Universidad de Zaragoza (marzo de 2023). Las titulaciones previas de acceso al Máster de los participantes son grado en Matemáticas (11) y grado en Física (5). Como parte de su formación en el máster, los futuros profesores (FP en adelante) habían recibido formación en otra asignatura sobre tareas ricas a desarrollar en el aula de Educación Secundaria (Arce et al., 2019), así como aspectos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad en base a la lectura de distintos artículos de investigación (Fernández y Llinares, 2010; Martínez-Juste et al., 2014; Steinthorsdottir, 2006).

Una vez informados de los propósitos de la investigación, los FP firmaron un modelo de consentimiento y resolvieron individualmente las tareas de evaluación propuestas durante dos horas. Además de los informes de su trabajo individual, se dispone de las valoraciones hechas por los FP acerca de algunas de las tareas asignadas y las primeras impresiones que realizaron algunos de los participantes en su entrega.

Para conocer las creencias en torno a la creación de problemas de los participantes se les pidió inicialmente responder a las siguientes preguntas:

1. *¿Qué características consideras que debería tener un buen problema matemático?*

2. *¿De qué factores crees que depende el grado de complejidad de un problema matemático?*
3. *¿Qué conocimientos y habilidades crees que necesita un profesor para crear un buen problema matemático?*

A continuación, se les propusieron las siguientes tareas de evaluación (ver Anexo II). En la primera tarea (Figura 6.1) los estudiantes deben crear un problema de forma libre (sin situación de partida) que involucre el razonamiento proporcional en diferentes contextos.

Crea un problema que se resuelva aplicando razonamiento proporcional para cada uno de los tres siguientes contextos: aritmético, geométrico y probabilístico. Finalmente, resuélvelo.

En cada problema:

a) Indica de qué forma se emplea el razonamiento proporcional.
b) Identifica los objetos (conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y los procesos matemáticos (enunciación, significación, algoritmización, argumentación, representación, particularización, generalización, …) que aparecen involucrados.
c) Identifica de manera justificada el grado de complejidad implicado en la solución de cada uno.

Figura 6.1. *Tarea 1. Elaboración y análisis. Finalidad didáctico-matemática (epistémica).* Elaboración propia.

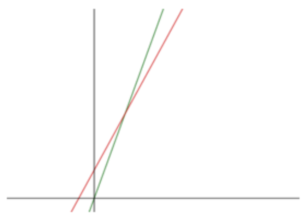
Después de crear cada problema, deben justificar cómo aparece involucrado el razonamiento proporcional y reconocer la trama de objetos y procesos, de manera que comprueben la pertinencia de los problemas que han elaborado para responder a la finalidad establecida. Además, se espera que esto les ayude a identificar el grado de complejidad implicado en las tareas.

A continuación, se proponen algunas situaciones descritas a través de imágenes. Para cada situación debes crear un problema que involucre el razonamiento proporcional en el contexto dado y responda al requerimiento establecido

Situación A

Contexto: Aritmético
Finalidad: El problema debe motivar que el alumno entienda la naturaleza proporcional de los porcentajes.
Resuelve el problema, destacando cómo se usan estas propiedades.

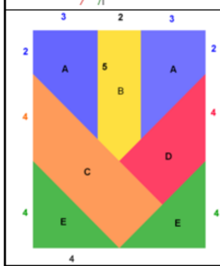
Situación B



Contexto: Funcional

Finalidad: El problema debe motivar que el alumno use las propiedades de la relación de proporcionalidad directa (aditiva, multiplicativa: relación escalar y relación funcional).

Resuelve el problema, destacando cómo se usan estas propiedades.



Situación C
Contexto: Geométrico
Finalidad: El problema debe motivar que el alumno use las propiedades de la relación de proporcionalidad directa (aditiva, multiplicativa: relación escalar y relación funcional)

Resuelve el problema, destacando cómo se usan estas propiedades.

Figura 6.2. *Tarea 2. Elaboración a partir de una situación para responder a una finalidad didáctico-matemática (epistémica).* Elaboración propia.

En la segunda tarea (Figura 6.2) se proponen tres situaciones: una imagen sobre porcentajes y descuentos en comercios, una gráfica de dos funciones (lineal y afín) y un puzle con ciertas medidas de piezas dadas. Se pide que creen problemas en los contextos asociados (aritmético, funcional y geométrico, respectivamente) para responder a finalidades con relación a la naturaleza proporcional de los porcentajes o las propiedades de la relación de proporcionalidad directa.

Las respuestas de los FP fueron analizadas y valoradas por dos de los autores, basándose en los criterios de análisis establecidos y consensuados a priori por todo el equipo. En el análisis de los problemas creados se valora tanto su significatividad como su pertinencia. Así, un problema se considera *significativo* si el enunciado propuesto establece claramente un problema matemático: se puede resolver, la solución no está implícita en el enunciado, su redacción es clara y no presente ambigüedad (falta de información o redundancia en el enunciado), y si se identifican claramente los distintos elementos que lo caracterizan (contexto, información, requerimiento, entorno).

Un problema puede ser significativo, pero no ser pertinente. En la tarea 1 esto ocurre cuando no involucra el razonamiento proporcional o no responde al contexto solicitado, en la tarea 2 si no se crea por elaboración a partir de la situación (la cambia sustancialmente, elimina información) o bien porque a pesar de estar elaborado a partir de la situación, no tiene en cuenta el contexto o la finalidad didáctico-matemática pretendida. En otro caso el problema es pertinente, es decir, es significativo, está elaborado a partir de la situación, en el contexto establecido y contempla la finalidad didáctico-matemática requerida. La tarea 1 supone describir en términos precisos cómo involucra el razonamiento proporcional. Nos interesa averiguar qué aspectos consideran los FP para valorar el grado de complejidad de los problemas que crean.

Desde una visión experta, consideramos el modelo de Stein et al. (1996) para clasificar los problemas según sean de memorización, procedimiento sin conexión, procedimiento con conexión o construcción matemática. La tarea 2 implica identificar en la solución cómo se llega a reconocer la naturaleza proporcional del porcentaje en el apartado A, o cómo se usan las propiedades de la relación de proporcionalidad, en los apartados B y C.

6.3. Resultados

En esta sección se describen los resultados del análisis realizado sobre las respuestas de los participantes a las tareas descritas en la sección previa.

6.3.1. Creencias previas

Las reflexiones de los FP sobre las características que debe tener un buen problema se pueden organizar en torno a tres dimensiones: el enunciado del problema, la actividad matemática que motiva y la demanda que supone a los estudiantes.

De acuerdo con la Tabla 6.1, para los FP un buen problema matemático se caracteriza por un enunciado claro y sin ambigüedades, un contexto motivador, así como un requerimiento que estimule el razonamiento y permita alcanzar su solución de manera asequible y por diferentes estrategias. Estas ideas coinciden y amplían los resultados obtenidos por Mallart et al. (2016).

Tabla 6.1
Características de un buen problema.

Características	Frecuencia
El enunciado	
Claro, sin ambigüedades, incluye la información necesaria	7
Contexto adecuado, enriquecedor, motivador	5
Coherente con el objeto matemático cuya enseñanza se persigue	2
La actividad matemática que motiva	
Admite diferentes estrategias de resolución	7
Las preguntas favorecen razonamiento, comprobación, reflexión	5
Moviliza competencias (no algorítmico)	3
Motiva la necesidad de los objetos matemáticos, fomenta el cuestionamiento y la extensión de su solución a otros ambientes	3
Los estudiantes	
Accesible a todos los estudiantes, no difícil de plantear y comenzar a resolver	4

Cuando se refieren a los factores que determinan la complejidad en un problema (segunda pregunta, Tabla 6.2) vuelven a referir condiciones sobre la formulación del problema, destacando cómo aparezcan ordenados y relacionados datos y preguntas, así como el "andamiaje" (FP3) de estas, sobre la actividad matemática que implican, precisando que el nivel de abstracción o la puesta en juego de "ideas felices" (FP16) eleva la complejidad de un problema. Finalmente, consideran los conocimientos y habilidades que necesitan los estudiantes para afrontarlos como aspecto que influye en su complejidad.

Tabla 6.2
Factores que determinan la complejidad de un problema.

Factores	Frecuencia
Sobre el enunciado del problema	
Información. Cantidad de datos, orden y relación entre las preguntas	4
Requerimiento. Dificultad para interpretar el enunciado, lo que requiere, seleccionando lo relevante	6
Contexto. Conexión con otros campos	2
Entorno. Complejidad de los conceptos y procesos implicados	5
La actividad matemática que motiva	
Existencia de más de una forma de resolución	3
Abstracción y creatividad	3
Sobre los estudiantes	
Conocimientos y competencias requeridas	7

A los FP les resulta más complejo precisar el conocimiento y las competencias que requiere un profesor para crear buenos problemas (ver Tabla 6.3), lo que puede estar justificado por su falta de formación y experiencia al respecto, como ellos mismos reconocieron. De hecho, de los 16 participantes, dos no respondieron a esta pregunta.

Tabla 6.3
Conocimientos y habilidades que requiere un profesor para crear problemas.

Conocimientos y habilidades	Frecuencia
Relativos al contenido	
Conocimiento del contenido y el campo de problemas	5
Conocimiento de los objetivos que se persiguen y cómo alcanzarlos	4
Creatividad	6
Relativos a los alumnos	
Sobre conocimientos previos de los alumnos	3
De las potenciales dificultades, errores frecuentes	4
De los gustos e intereses de los alumnos	5

Para los FP es necesario un "conocimiento profundo de las matemáticas" (FP9), de los objetos matemáticos y cómo se usan para resolver los problemas. También consideran importante ser creativo para proponer problemas atractivos, en contextos útiles y reales, teniendo en cuenta el objetivo que se persigue ("saber qué se quiere conseguir con el problema y cómo generar nuevo conocimiento a partir de él", FP16). Solo algunos reconocen como importante tener experiencia con la creación de problemas (FP6, FP16) así como "habilidades de redacción" (FP8).

6.3.2. Creación libre de problemas de proporcionalidad

De los 16 FP, dos no crearon problemas en el contexto aritmético y otros dos propusieron enunciados no significativos, en tanto no establecían la condición de regularidad necesaria para poder aplicar una relación de proporcionalidad. Los demás crearon problemas pertinentes, en su mayoría (nueve) de valor faltante (Figura 6.3) aunque también elaboraron otros de comparación de razones, reparto proporcional o proporcionalidad compuesta.

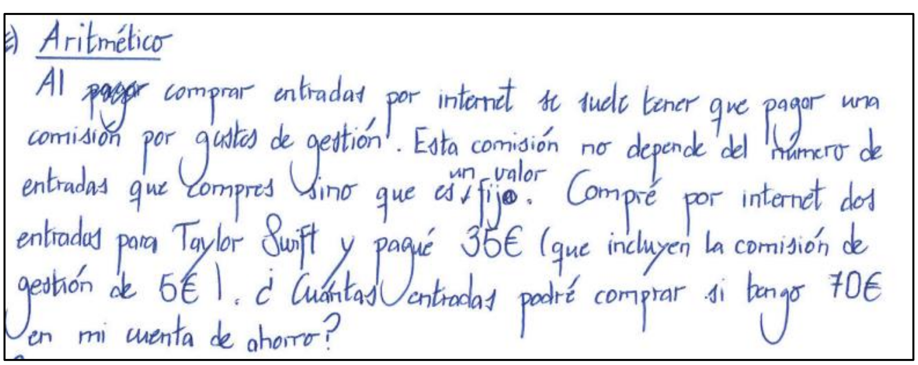

Aritmético
Al ~~pagar~~ comprar entradas por internet se suele tener que pagar una comisión por gastos de gestión. Esta comisión no depende del número de entradas que compres sino que es un valor fijo. Compré por internet dos entradas para Taylor Swift y pagué 35€ (que incluyen la comisión de gestión de 5€). ¿Cuántas entradas podré comprar si tengo 70€ en mi cuenta de ahorro?

Figura 6.3. *Problema de proporcionalidad en contexto aritmético (FP6).*

Los participantes tuvieron más dificultades para crear problemas de proporcionalidad en el contexto geométrico: cuatro FP no propusieron problemas en este contexto (mostrando sus dudas para diferenciar el uso de la proporcionalidad en el contexto geométrico del aritmético y su rechazo a lo geométrico), dos plantearon enunciados no significativos (ambiguos, falta de condiciones de regularidad) y otro creó un enunciado que, si bien era significativo, no involucraba el razonamiento proporcional. Aquellas propuestas pertinentes se enmarcaban en la semejanza de figuras geométricas, mayoritariamente de triángulos (en un caso de cuadrados), para determinar longitudes (en tres enunciados) o áreas (en otros tres enunciados) (Figura 6.4).

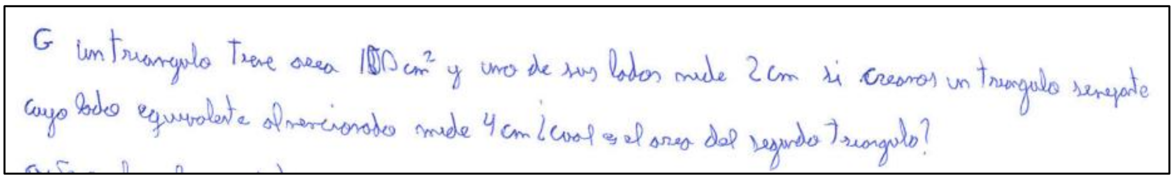
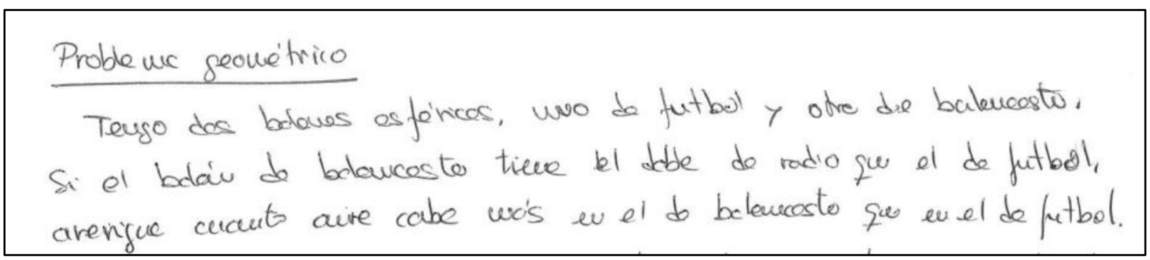

G Un triangulo tiene area 100 cm^2 y uno de sus lados mide 2 cm si creamos un triangulo semejante cuyo lado equivalente al mencionado mide 4 cm ¿cual es el area del segundo triangulo?

Figura 6.4. *Problema de proporcionalidad en contexto geométrico. Semejanza (FP3).*

Además, plantearon dos enunciados sobre escalas (determinar la longitud a partir de la escala, o la relación entre escalas) y un enunciado que demandaba la relación entre volúmenes de dos esferas (Figura 6.5).


Problema geométrico

Tengo dos balones esféricos, uno de futbol y otro de baloncesto. Si el balón de baloncesto tiene el doble de radio que el de futbol, averigüe cuanto aire cabe más en el de baloncesto que en el de futbol.

Figura 6.5. *Problema de proporcionalidad en contexto geométrico. Relación entre volúmenes de esferas (FP1).*

Crear problemas que impliquen el razonamiento proporcional en el contexto probabilístico también resultó complejo. Cuatro FP no respondieron a esta tarea (tres de ellos no lo hicieron tampoco en el contexto geométrico y dos no lo hicieron tampoco en el aritmético), otros cuatro propusieron enunciados no significativos, debido a que la información facilitada no permitía resolver el problema (Figura 6.6) y uno propuso un enunciado significativo, pero no pertinente dado que no involucraba el razonamiento proporcional ("En la quiniela la probabilidad de ganar es 1/1000. Si juegas todas las semanas, ¿aumenta?", FP2).

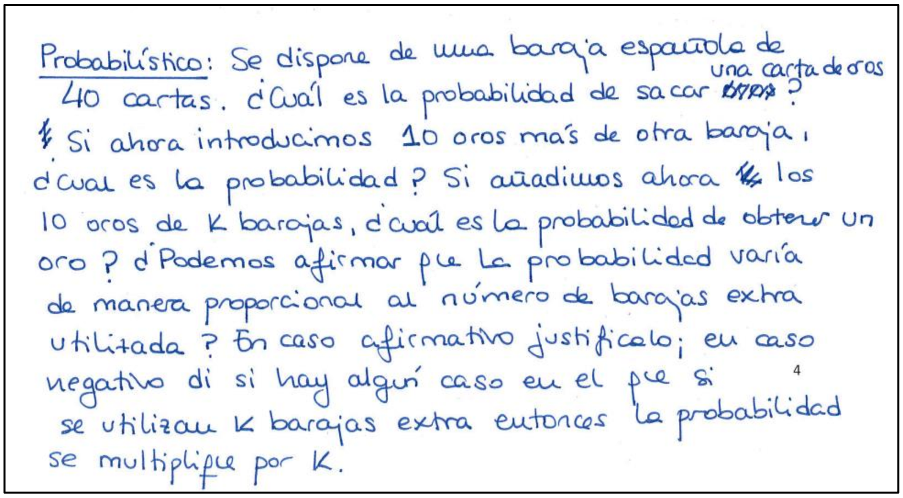

Probabilístico: Se dispone de una baraja española de 40 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta de oros? Si ahora introducimos 10 oros más de otra baraja, ¿cual es la probabilidad? Si añadimos ahora los 10 oros de K barajas, ¿cuál es la probabilidad de obtener un oro? ¿Podemos afirmar que la probabilidad varía de manera proporcional al número de barajas extra utilizada? En caso afirmativo justifícalo; en caso negativo di si hay algún caso en el que si se utilizan K barajas extra entonces la probabilidad se multiplique por K.

Figura 6.6. *Problema no significativo en el contexto probabilístico (FP15).*

Los problemas pertinentes en este contexto requerían fundamentalmente el cálculo y comparación de probabilidades simples, salvo un problema sobre juego equitativo, otro de determinación de la composición de una urna con una probabilidad dada y otro en un experimento compuesto. Además, FP3 plantea “Un jugador de baloncesto encesta 3 de cada 10 tiros, ¿cuántos tiros habrá de lanzar de media para haber encestado al menos 17?”. La razón dada se interpreta como la probabilidad de acierto. El uso del contexto y la pregunta se adaptan a un problema de valor faltante de proporcionalidad directa y es la expresión "de media" la que muestra cierto grado de incertidumbre en el contexto. En este caso, FP3 considera que la dificultad se debe a que “el número de tiros no les va a salir entero, por eso la palabra al menos en el enunciado, ya que a la parte entera de ese número deberán de sumarle 1”.

Los FP debían resolver los problemas que habían creado e identificar los objetos y procesos en la solución. De los 14 problemas creados en el contexto aritmético, siete lo resolvieron adecuadamente e identificaron el razonamiento proporcional por medio de la relación de proporcionalidad directa entre las magnitudes. Por ejemplo, FP6 identifica con relación al problema incluido en la Figura 6.3, “El razonamiento proporcional aparece en la relación de Prop. Dir [proporcionalidad directa] entre Entradas y dinero”, indicando después como objetos la “razón €/entrada, proporcionalidad directa entre € y entradas” y como procesos matemáticos, “significación”, que vincula a interpretar la comisión, “algoritmización”, que entiende cómo aplicar la técnica de reducción a la unidad para resolver el problema y la “argumentación”. En otros dos casos que no resolvieron, señalaron el procedimiento a seguir (regla de tres o reducción a la unidad) como indicativo de la presencia de razonamiento proporcional. En general, los FP no identificaron objetos, más allá de los conceptos de razón, fracción y proporcionalidad directa, y los procedimientos de cálculo aritmético, regla de tres o reducción a la unidad. Además de los procesos precisados por FP6, solo FP3 indica la "generalización" asociada a la condición de regularidad.

Los FP interpretan el grado de complejidad de un problema como la dificultad de su resolución por parte del estudiante. Los 10 participantes que hicieron alguna reflexión al respecto señalan aspectos que inciden en la mayor o menor dificultad de una tarea frente a otra. Salvo FP6, para quien el problema propuesto tenía dificultad "media-alta" pues debía distinguir la relación proporcional de la aditiva (la comisión) y FP11 que consideraba complejo tratar con razones no enteras cuando las magnitudes eran discretas ("fracción de huevo en una receta de cocina", "pueden surgir contradicciones") los demás coincidieron en que los problemas que proponían tenían dificultad baja o ninguna, en base a que usaban un "lenguaje claro" que facilitaba la comprensión del enunciado y que requería de pocos pasos. Desde un punto de vista experto, todos los problemas propuestos correspondían a un nivel de demanda cognitiva de memorización o procedimientos sin conexión según Stein et al. (1996), salvo un par de problemas de procedimientos con conexión en los que se requería la comparación de razones en proporcionalidad compuesta (FP16) o la obtención de la relación entre caudales de dos mangueras conocido la relación entre el volumen (FP1, Figura 6.7). En ambos casos, los FP indicaron que los problemas no eran complejos.

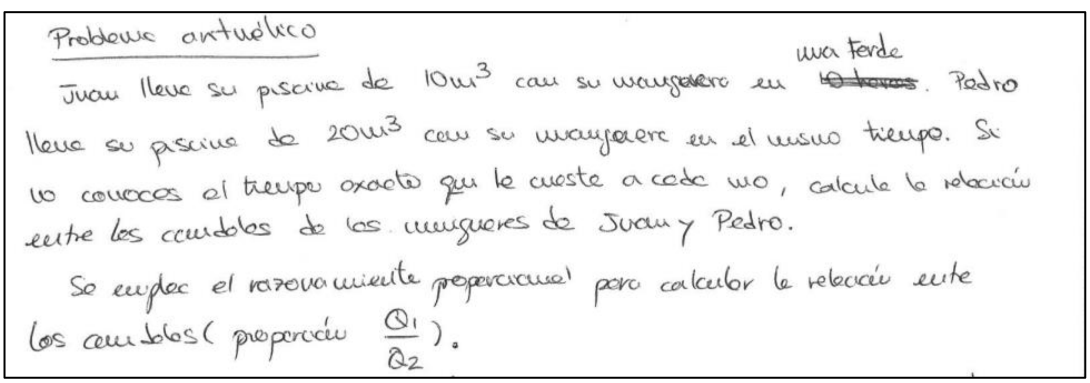

Problema aritmético
Juan llena su piscina de $10m^3$ con su manguera en ~~10 horas~~ una tarde. Pedro llena su piscina de $20m^3$ con su manguera en el mismo tiempo. Si no conoces el tiempo exacto que le cuesta a cada uno, calcula la relación entre los caudales de las mangueras de Juan y Pedro.
Se emplea el razonamiento proporcional para calcular la relación entre los caudales (proporción $\frac{Q_1}{Q_2}$).

Figura 6.7. *Problema de proporcionalidad en contexto aritmético (FP1). Alta demanda cognitiva.*

En el caso de los problemas en contexto geométrico, sólo cinco FP resolvieron su problema e identificaron adecuadamente el razonamiento proporcional. Otros dos no lo resolvieron, pero sí señalaron cómo aparecía involucrado el razonamiento proporcional: a través del uso de la escala o la relación de semejanza entre figuras. En este caso, solo cuatro FP identificaron algunos conceptos y propiedades (triángulo rectángulo, triángulos semejantes, proporcionalidad, área, semejanza de triángulos) y únicamente un FP mencionó también los procesos de modelización, representación y argumentación. En relación con la complejidad de las tareas creadas, solo nueve de los participantes hicieron alguna mención al respecto. Se observa que, si bien en su mayoría siguen pensando que sus problemas no son difíciles, si los consideran más complejos que los planteados en el contexto aritmético, haciendo referencia al propio contexto ("relacionar la proporción con la característica a escala", FP10; "usar conceptos de geometría y estar menos explícito el método de solución", FP8) o el uso de nuevas magnitudes. Por ejemplo, FP3 considera que su problema (Figura 6.2) "es difícil debido al cambio de paradigma que hay al cambiar de proporcionalidad directa a cuadrática". Con relación también al entorno FP1 considera que en su problema (Figura 6.5):

> Los alumnos deben encontrar relaciones de proporcionalidad entre figuras en 3D. Deben entender que se les pide encontrar la relación entre los volúmenes de las esferas, camuflados como elementos comunes a su entorno. Es decir, encontrar esa magnitud puede suponer un problema añadido.

En este caso, la demanda cognitiva de los problemas propuestos es superior a los planteados en el contexto aritmético (sólo uno de ellos es de memorización y hay cinco que implican procedimientos con conexión, por ejemplo, el incluido en la Figura 6.5).

Sólo tres FP resolvieron el problema propuesto de probabilidad y otros dos, aunque no lo resolvieron, precisaron que el razonamiento proporcional aparece involucrado en el cálculo y la comparación de las probabilidades o en el uso de la Regla de Laplace. Los objetos indicados por estos cinco FP incluyen los conceptos de probabilidad, casos favorables, posibles, probabilidad simple, probabilidad condicionada, probabilidad frecuentista y únicamente FP3 indica como proceso la generalización (vinculada a la asunción de equiprobabilidad).

De los ocho FP que reflexionaron sobre el grado de complejidad de su problema, tres indicaron que este era bajo, considerando que solo se emplean "conceptos básicos" (FP14), que el enunciado es claro (directo) y se necesitan pocos pasos (FP13), mientras que los demás consideraron que la complejidad es mayor debido al propio contexto y las implicaciones que tiene en las relaciones entre los números ("pensar si una fracción que exprese una probabilidad tiene sentido", FP2; "comprender el significado frecuencial de la probabilidad", FP11). Al respecto, salvo un problema del nivel de memorización y otro de procedimiento sin conexión, todos los problemas creados en el contexto de la probabilidad respondían al nivel de procedimiento con conexión.

6.3.3. *Creación de problemas de proporcionalidad a partir de situaciones*

En la tarea 2 los FP debían crear problemas de proporcionalidad a partir de situaciones descritas por medio de imágenes, en diferentes contextos y con la intención de que su solución implicara determinados conocimientos fundamentales del razonamiento proporcional.

En la situación A, que describe tres opciones frecuentes de oferta, el contexto dado es aritmético y el problema planteado debía motivar la reflexión sobre la naturaleza proporcional de los porcentajes. En este caso, dos FP no propusieron ningún problema; otros tres formularon problemas no significativos (falta de requerimiento o información incompleta, por ejemplo, no indicar que el artículo tiene el mismo precio en todos los supermercados, Figura 6.8) y otro participante planteó un problema que si bien era significativo cambiaba sustancialmente la información (oferta 3x2 y segunda unidad 60%).

A Juan quiere comprar leche en el supermercado 1 le hacen un 3x2 en el litro de leche mientras que en el supermercado 2 le hacen un 60% en la 2 unidad ¿donde debería ir si quiere comprar 8 litros de leche? ¿y si quiere 9?

Figura 6.8. *Elaboración a partir de la situación A (FP4). Problema no pertinente.*

Los demás (diez FP) crearon problemas pertinentes, es decir, significativos, elaborados a partir de la situación y que involucraban la naturaleza proporcional del porcentaje. La mayoría de estos problemas (siete) llevan a decidir cuál es la mejor oferta en la compra de un número dado de unidades (6 unidades en cinco de los enunciados propuestos, como se ve en la Figura 6.9, y varias cantidades en otros dos problemas) suponiendo que el precio de la unidad es siempre el mismo, conocido (en tres casos) o desconocido (en el resto). En otros dos casos, se debe decidir en qué oferta se paga menos por unidad ("qué oferta implica un menor coste por producto”, FP5; entendiendo que se compran dos unidades o tres unidades, según oferta).

A Me planteo comprar 6 cajas de leche en uno de los tres supermercados de los que se muestran ofertas arriba. Si la unidad suelta vale lo mismo en cada uno (1'50 €) ¿Dónde me saldrá más barato? ¿Depende del precio?

Resol:

1º) 50% en la segunda $\Rightarrow$ 2 cuestan $(1+\frac{1}{2})\cdot 1'50€ = \frac{3}{2}\cdot 1'50€$

$\Rightarrow$ 6 cuestan $\frac{9}{2}\cdot 1'50€$

2º) 3x2 $\Rightarrow$ Si pago 4 me dan las 6 $\Rightarrow$ Me costará $4\cdot 1'50€$

3º) 70% en la segunda $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ 6 cuestan $3\cdot\frac{13}{10}\cdot 1'50$

Por tanto en la última.

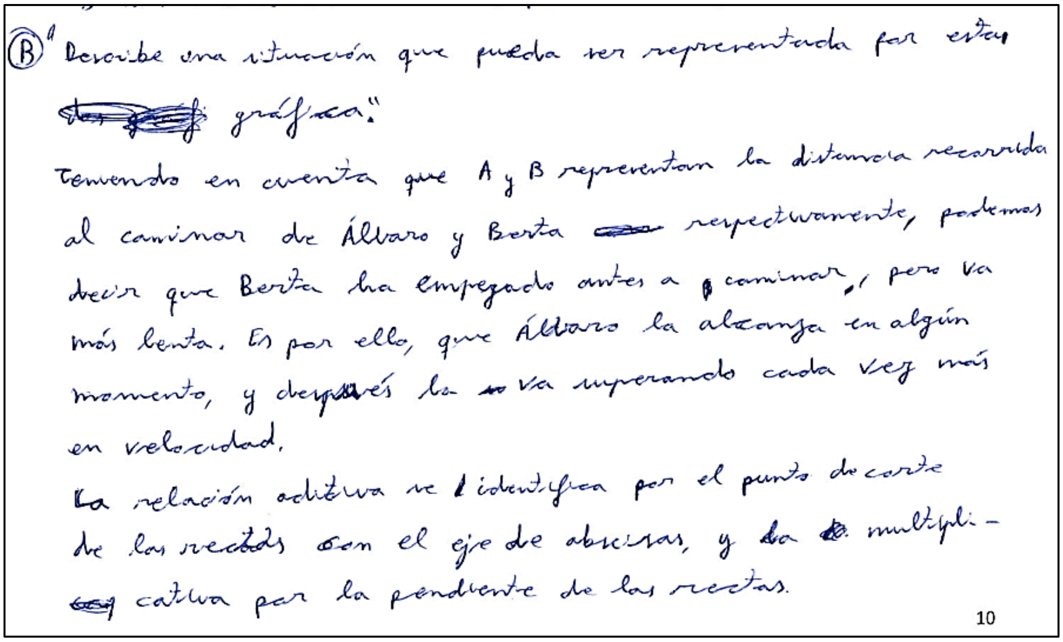
No depende del precio.

Notar que se usa la proporcionalidad de estos descuentos donde se conserva (en parejas o tríos)

Figura 6.9. *Elaboración a partir de la situación A (FP11). Problema pertinente*.

En tres enunciados, como muestra la Figura 6.9, los FP preguntan de qué forma afecta el precio del artículo en que sea mejor una u otra oferta. Los FP resuelven los problemas, pero, salvo en dos ocasiones, no mencionan cómo aparece involucrado el razonamiento proporcional y los porcentajes. Además de FP11 (Figura 6.9) que vincula la proporcionalidad a los descuentos, sólo FP4 indica que “se emplea la razón/relación de lo que pagas por unidad”. En las soluciones se observa que, de manera mayoritaria, los FP recurren al significado del porcentaje como operador y determinan la parte proporcional del precio de la unidad que se pagaría según cada oferta para después compararlos.

Para los FP fue complejo crear un problema a partir de la situación B que mostraba la gráfica conjunta de dos funciones, una lineal y una afín. Se pedía que el problema creado motivase a un potencial alumno a emplear las propiedades de la relación de proporcionalidad. Cinco de los participantes no crearon ningún problema, cuatro propusieron enunciados no significativos (dos son ambiguos y a dos les falta información para responder al requerimiento), dos fueron significativos, pero no elaborados a partir de la situación B (compras, comparar dos funciones afines) y otro fue significativo, elaborado a partir de la situación B, pero no ponía en juego las propiedades de la relación de proporcionalidad (calcular puntos de corte de las funciones). En los cuatro problemas pertinentes, las propiedades de la relación de proporcionalidad eran necesarias para definir las funciones que debían ajustarse a la representación gráfica dada en B, interpretando el significado de la pendiente y la “parte aditiva” en la afín. Se muestra un ejemplo en la Figura 6.10.



B) Describe una situación que pueda ser representada por esta gráfica".
Teniendo en cuenta que A y B representan la distancia recorrida al caminar de Álvaro y Berta respectivamente, podemos decir que Berta ha empezado antes a caminar, pero va más lenta. Es por ello, que Álvaro la alcanza en algún momento, y después la va superando cada vez más en velocidad.
La relación aditiva se identifica por el punto de corte de las rectas con el eje de abscisas, y la multiplicativa por la pendiente de las rectas.
10

Figura 6.10. *Problema creado por elaboración a partir de la situación B y solución (FP14).*

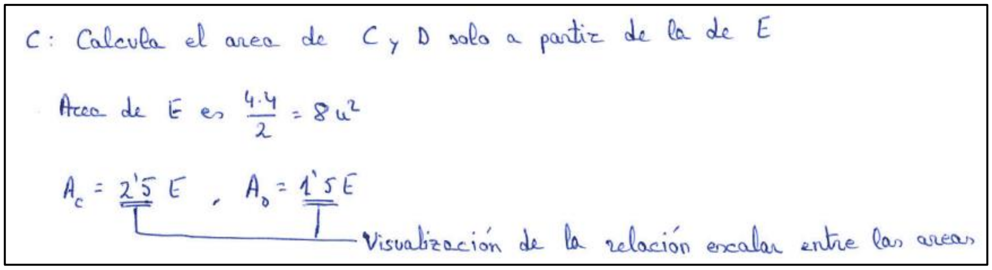
Cuando resuelven el problema, en escasas ocasiones mencionan cómo se contempla la finalidad didáctico-matemática. Aun así, es posible observar cierta confusión con las propiedades aditiva y multiplicativa de la relación de proporcionalidad. O bien asocian la propiedad multiplicativa a la pendiente o crecimiento de las rectas (Figura 6.10), o bien consideran que esta es una relación posible entre las pendientes (“las pendientes son proporcionales”; FP11, FP16). En cuanto a la propiedad aditiva, parece interpretarse (Figura 6.10) como el punto de corte con el eje de abscisas (de forma que en una función lineal esa parte aditiva sería 0) o también como la diferente entre las funciones para $x = 0$ (“diferencia original”, FP11).

Finalmente, sólo seis FP plantearon un problema para la situación C, señalando abiertamente su incapacidad para crear un problema de proporcionalidad a partir de esta situación (FP3) o mostrando su dificultad para concretar las ideas en un enunciado:

> No consigo que se me ocurra, más allá de pedir que se relacionen cantidades como las áreas de los polígonos que se muestran en la imagen. Sería interesante pedir que expliquen cómo

variaría el área de alguno de ellos si se modificaran los valores numéricos que se muestran en la figura. (FP4)

De los seis problemas planteados, todos significativos no pertinentes: dos no tuvieron en cuenta la situación de partida y los otros cuatro, aunque sí incorporaron en su planteamiento el puzle de C, no consideraron la finalidad didáctico-matemática pretendida o el contexto era aritmético (Figura 6.11).


C: Calcula el area de C y D solo a partir de la de E

Area de E es $\frac{4\cdot 4}{2} = 8u^2$

$A_c = 2'5\,E$, $A_D = 1'5\,E$

Visualización de la relación escalar entre las areas

Figura 6.11. *Problema elaborado por FP4 a partir de situación C.*

En la Figura 6.11, FP4 pide determinar el área de dos piezas del puzle (C y D) usando como unidad de medida la pieza E, obteniendo “cuando veces cabe E” en C y D (dos veces y medio, como decimal 2,5 en C y una vez y medio, como decimal, 1,5, en D). Respecto a las propiedades de la proporcionalidad menciona la “relación escalar entre las áreas”, sin embargo, no se establece una relación de proporcionalidad entre magnitudes.

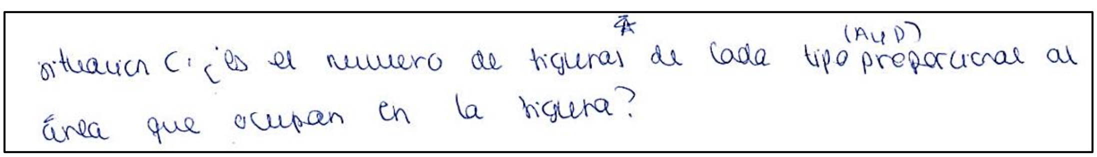

situacion C: ¿Es el numero de figuras de cada tipo (A y D) proporcional al área que ocupan en la figura?

Figura 6.12. *Propuesta de FP12 de problema a partir de la situación C.*

Como muestra la Figura 6.12, FP12 emplea la situación C para elaborar el problema, sin embargo, no es un significado geométrico de la proporcionalidad, pues plantea la relación entre el número de figuras y el área que ocupan.

Mientras que en la tarea anterior de creación libre los FP recurrieron a la semejanza de figuras (relación entre longitudes o relación entre áreas de figuras semejantes), a la noción de escala o a la aplicación del teorema de Thales, cuando deben partir de la situación C para crear un problema, los FP no recurren a dichos objetos o no saben cómo encajarlos en la finalidad establecida.

6.4. Reflexión final

Dado que diferentes contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción conllevan la participación de objetos y procesos específicos de dichos campos en las prácticas correspondientes, una enseñanza idónea de la proporcionalidad debe contemplar de forma articulada los diferentes significados: aritmético, algebraico-funcional, geométrico, probabilísticos. El profesor debe así ser capaz de crear problemas de proporcionalidad en los distintos contextos, motivando que los alumnos aprendan mediante su resolución las propiedades esenciales de la relación de proporcionalidad.

En relación con nuestro primer objetivo, las creencias de los FP sobre lo que consideran un buen problema matemático y qué habilidades necesitan para elaborarlos no son consistentes entre sí ni con sus propuestas de enunciados. Por ejemplo, en la faceta instruccional, para los FP una de las características de un buen problema matemático es la de un enunciado claro y sin ambigüedades (Tabla 6.1), pero en ambas tareas diseñaron enunciados no significativos (ambiguos). Para los FP un buen problema permite varias estrategias de solución, sin embargo, no hay evidencias de que hayan comprobado la posibilidad de responder al requerimiento en sus problemas por más de una forma, o que realmente pudieran ser resueltos. Esto coincide con lo apreciado por Bayazit y Kirnap-Donmez (2017). Desde el punto de vista cognitivo-afectivo, aunque consideran los conocimientos previos de los alumnos como uno de los aspectos esenciales para determinar la complejidad de los problemas (Tabla 6.2), priorizan la creatividad o la capacidad de atender a sus intereses como habilidades necesarias para crear buenos problemas (Tabla 6.3).

Sobre el segundo y el tercer objetivo, la competencia de los FP para crear problemas pertinentes es adecuada en el contexto aritmético pero muy limitada en los contextos funcional, geométrico y probabilístico. Esto pone de manifiesto que los conocimientos requeridos para crear un problema matemático en un contexto dado, no se transfieren a otro y que el éxito al elaborar problemas viene determinado por el ámbito en el que se enmarcan. Es significativo que sin embargo la complejidad de los problemas creados fuera superior en los contextos probabilístico y geométrico que en el aritmético.

Al igual que en Burgos et al. (2018) y Mallart et al. (2016), los FP (pese a su formación matemática superior) tuvieron limitaciones para identificar los objetos y procesos matemáticos emergentes de la solución a los problemas propuestos. Esta carencia podría explicar que algunos problemas significativos no fueran pertinentes por no responder a la finalidad epistémica establecida en la tarea. A pesar de esto, los escasos FP que reflexionaron sobre la complejidad de sus problemas propuestos, mencionaban explícitamente objetos y procesos (aun cuando no los habían referido antes). Esto lleva a plantear también en el contexto de FP de secundaria la necesidad observada en FM (Capítulo 4) de reforzar en la formación de profesores el estudio del nivel de complejidad de las tareas en base al análisis de objetos y procesos matemáticos implicados en su resolución.

Aunque estudios anteriores como los de Şengül y Katranci (2015a) o Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) observaron que los profesores en formación tenían menor éxito en la creación libre de problemas que al hacerlo de forma semiestructurada (en un contexto aritmético), los resultados de nuestra investigación muestran un mejor desempeño en el caso libre que en el semiestructurado. En este caso, responder a la finalidad didáctica establecida en la consigna pudo ser el mayor obstáculo. El FP debe reconocer a partir de la información suministrada qué magnitudes pueden relacionarse de manera proporcional, conocer y reconocer en la situación las propiedades de la relación funcional y establecer el requerimiento de manera que resolver el problema requiera emplear dicha relación y sus propiedades. Así como se ha observado en capítulos previos con maestros de primaria en el contexto aritmético, detrás de esta dificultad podría estar un conocimiento insuficiente del razonamiento proporcional en los contextos probabilístico y geométrico (Batanero et al., 2015; Copur-Gencturk et al., 2023).

CAPÍTULO 7. CREACIÓN DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD POR FUTUROS PROFESORES COSTARRICENSES

El contenido de este capítulo aparece recogido en el siguiente artículo:

> Chaverri, J., Burgos, M. y Gutiérrez, F. (2024). Invención de problemas de proporcionalidad en la formación de profesores de secundaria. (En revisión)

7.1. Introducción

Como hemos mencionado en el capítulo previo, existe una evidente brecha en la investigación que aborda cómo los profesores en formación crean problemas en contextos más allá de la aritmética, como son el funcional, geométrico y probabilístico donde la comprensión de la proporcionalidad es crucial.

Conocer los objetos y procesos matemáticos que interactúan en la resolución de un problema permite reconocer su grado de complejidad, prever conflictos y adaptar el enunciado a distintas circunstancias de aprendizaje (Burgos y Godino, 2020). Sin embargo, estudios como los de Burgos et al. (2018), Burgos y Chaverri (2022), Burgos y Godino (2022), Mallart et al. (2016), han mostrado que futuros docentes tienen dificultades para identificar dichos objetos matemáticos en la resolución y análisis de sus propios problemas de proporcionalidad en un contexto aritmético. Cuando reflexionan sobre las potenciales dificultades no distinguen las que están vinculadas a los objetos matemáticos en su solución y las asocian principalmente a la comprensión de los requisitos del enunciado y a los procedimientos matemáticos (regla de tres o aritméticos) (Burgos y Godino, 2020). Dado que la creación de problemas actúa como medio para introducir a los profesores en formación en la enseñanza de las matemáticas que, además les permite explorar de manera profunda el contenido matemático (Tichá y Hošpesová, 2013), es preciso contemplar desde esta actividad los múltiples significados de la proporcionalidad.

Con este interés, en este capítulo se describe un estudio de caso con un grupo de futuros profesores costarricenses de educación secundaria de matemáticas. Se plantean los siguientes objetivos de investigación:

1. Identificar las dificultades que presentan los futuros profesores en la creación de problemas de proporcionalidad para atender a diferentes finalidades didácticas: a) responder a un nivel de complejidad dado, b) considerar los diferentes contextos aritmético, geométrico y probabilístico, de aplicación de la proporcionalidad; c) variar un problema dado para facilitar su comprensión por parte de estudiantes.
2. Describir los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional que muestran los futuros profesores en las tareas de creación de problemas planteadas.

7.2. Contexto y participantes

La acción formativa, tipo taller, se desarrolló con 11 FP (aunque no todos participaron en cada sesión) como parte del curso Seminario en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, impartido durante el quinto año de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática. Esta carrera es reciente, su apertura en el año 2017 fue la respuesta a distintas debilidades que se presentaban en la formación de futuros profesores en dicha universidad. De acuerdo con Surcos (2016):

> Fundamenta su formación en el área de conocimiento emergente de, la Educación Matemática, o Didáctica de la Matemática, que las tendencias actuales consideran como pilar del conocimiento de todo profesor de esta disciplina. En consecuencia, el modelo de formación es sustancialmente distinto al actual. (p. 1)

Esta propuesta incluye una mayor articulación entre el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico, entre la teoría (el saber) y la práctica (el hacer), incorporando en la formación de los profesores cursos sobre didácticas específicas (Surcos, 2016) tales como Didáctica de la Matemática, Didáctica del Álgebra, Didáctica de la Geometría, Didáctica de las Funciones, Didáctica de la Estadística y la Probabilidad, Didáctica de los Números.

El Seminario en Educación Matemática, en el que se desarrolla la experiencia, "gira alrededor del desarrollo de competencias profesionales, destrezas y habilidades necesarias para hacer frente a diferentes problemáticas educativas desde la docencia, asesoría e investigación para la futura persona educadora matemática" (Escuela de Matemática de la UCR, 2022, p. 1). Su programa responde a un curso flexible, en cuanto a que sus objetivos específicos son variables según el desarrollo de la disciplina, los intereses de los estudiantes y las posibilidades del profesor del curso. En este caso, se incluyó el tema "Invención de tareas matemáticas" dentro del programa, a fin de instruir a FP en dicha área y de desarrollar esta intervención formativa. Pues, aunque los participantes habían recibido formación matemática y didáctico-matemática en los cursos de didácticas específicas, en ninguno de ellos se había abordado la creación de problemas. La temática contempló lo siguiente:

> Características de las tareas matemáticas (contenido matemático, finalidad, dificultades, tiempo, etc.), considerando las situaciones-problema como el origen de la actividad matemática donde emergen los objetos matemáticos (situaciones-problema, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos), su significado y sus respectivos procesos. Componentes de un problema matemático: información, requerimiento, contexto y entorno matemático, para promover el razonamiento matemático. La invención de problemas matemáticos mediante la variación de un problema dado o por elaboración (de forma libre, a partir de una situación dada o configurada, o bien, por un requerimiento didáctico o matemático). Relación entre la invención y resolución de problemas matemáticos que promuevan los diferentes tipos de razonamiento específico: numérico, algebraico, geométrico, funcional, estadístico y probabilístico. Grados de complejidad de un problema matemático según el marco PISA: reproducción, conexión y reflexión (Escuela de Matemática de la UCR, 2022, p. 5)

7.3. Diseño de la intervención. Tareas y categorías de análisis

La intervención se organizó durante tres semanas con cinco sesiones: una teórica inicial (de 2,5 horas de duración), dos prácticas (1,5 hora horas de trabajo individual) y dos teórico-prácticas (de 2,5 horas de duración). En la primera sesión (teórica) se presentan y ejemplifican las características y componentes de un problema matemático, por ejemplo, expectativas y finalidad de aprendizaje, limitaciones y niveles de complejidad.
En la segunda sesión (práctica) los FP trabajan en la resolución de la tarea 1 (ver Anexo III):

> *Tarea 1. Crea un problema de proporcionalidad del nivel de conexión para alumnos de 6º curso de educación primaria que se encuentran acabando el tema de proporcionalidad directa y porcentajes. Después de resolverlo modifícalo para crear*

un segundo problema que sea del nivel de complejidad de reflexión. Resuélvelo y justifica por qué responde a dicho nivel de complejidad.

Los FP están familiarizados con los niveles de complejidad según el marco PISA (OCDE, 2005; MEP, 2012): *reproducción, conexión, reflexión*. Elaborar o modificar un problema para lograr un nivel de complejidad determinado, requiere reconocer los objetos y procesos implicados (faceta epistémica), considerar los conocimientos previos de los estudiantes (faceta cognitiva) y lo que el currículo establece como conocimientos esperados (faceta ecológica), dado que el nivel de complejidad viene determinado tanto por la propia tarea como por las características del resolutor potencial.

En la tercera sesión, se dedica la primera hora de clase a introducir y ejemplificar las nociones de práctica, objeto y proceso matemático del EOS. De manera previa a la sesión, los FP habían leído el documento Godino, Beltrán-Pellicer et al. (2017) sobre significados pragmáticos de la proporcionalidad.

En el tiempo restante los FP trabajaron de manera individual para responder a la primera parte de la tarea 2 (ver Anexo III):

Tarea 2. I parte. Para cada uno de los contextos: aritmético, geométrico, probabilístico, crea y resuelve un problema que implique razonamiento proporcional.

Se trata de una tarea de creación de problemas para responder a una finalidad didáctico-matemática en la faceta epistémica. Se facilita el entorno, la proporcionalidad, y el contexto, como campo de aplicación de la proporcionalidad, de manera que los FP deben añadir la información y el requerimiento atendiendo a los objetos y procesos específicos de dichos campos de prácticas o significados parciales. En la cuarte sesión (práctica) los FP resuelven la segunda parte de la tarea 2:

Tarea 2. II Parte. En los problemas creados en la primera parte, identifica el grado de complejidad, los objetos y procesos involucrados.

Esta consigna pretende articular la creación de problemas con el análisis ontosemiótico de prácticas, objetos y procesos (Godino, Giacomone et al., 2017) y valorar si dicho análisis influye en la identificación del nivel de complejidad del problema creado. Al finalizar la sesión se propone a los participantes la lectura del trabajo de Malaspina (2013) para que se familiaricen con los elementos de un problema y los procesos de creación de problemas.

Tomando como punto de partida esta lectura, la primera parte de la quinta sesión (teórica-práctica) se dedicó a la descripción de los componentes de un problema matemático y las formas de crear un nuevo problema, presentando y analizando algunos ejemplos. Se pretende que los FP doten de significado e identifiquen estos aspectos reflexionando sobre lo que habían trabajado en las sesiones previas, antes de crear problemas por variación de uno previo. Durante la hora y media restante de esta sesión, los FP resolvieron de manera individual la siguiente consigna (ver Anexo III):

> *Tarea 3. Considere el siguiente problema:*
>
> *Ciento cincuenta obreros realizan una obra en 24 días. Si se desea terminar la obra 4 días antes de lo planeado, ¿se requiere más o menos obreros? ¿Cuántos? (Santillana, 2014, p. 104)*
>
> *Resuelva el problema. Señale cuáles son las posibles dificultades que puede encontrar un estudiante al tratar de resolverlo. Luego cree por variación un problema que facilite la comprensión por parte de los estudiantes. Indique en cada caso los elementos que ha variado en el enunciado y de qué manera permite superar las dificultades del problema dado. Resuelva el problema creado.*

La finalidad de esta tarea es diagnosticar y fortalecer el conocimiento didáctico-matemático de los FP en la faceta cognitiva, mediante la identificación de dificultades que pueden tener sus estudiantes al resolver un problema de proporcionalidad. Los FP deben identificar la necesidad de precisar en la información la condición de regularidad que permita tratarlo como una situación de proporcionalidad y determinar si es directa o inversa.

Las categorías de análisis para cada consigna se definen de manera consensuada por los autores en base a las herramientas del marco teórico asumido, las investigaciones previas y los objetivos establecidos para cada tarea. Algunas se determinan a priori, por ejemplo, aquellas que hacen referencia al grado de pertinencia de los problemas creados (en las tres tareas) o los tipos de dificultades identificadas (tarea 3). Otras surgen del análisis de las respuestas de los FP, por ejemplo, los tipos de problemas creados, las modificaciones que realizan o las argumentaciones que emplean para asegurar su validez. Estas categorías fueron de igual modo discutidas y acordadas por los autores de forma conjunta.

De manera específica, como en las demás intervenciones, se considera que un problema es *significativo* si el enunciado corresponde a un problema matemático (se puede resolver y la solución no está implícita en el enunciado), se pueden identificar los elementos que lo caracterizan (contexto, información, requerimiento, entorno) y su redacción es clara y sin ambigüedades. De lo contrario se considera *no significativo*. Un problema es *pertinente* si, además de ser significativo, responde a todas las finalidades didáctico-matemáticas establecidas para su creación. Si solo las cumple de manera parcial, se considera *poco pertinente*. Por ejemplo, en la primera parte de la tarea 1 deben crear un problema de proporcionalidad del nivel de conexión. En tal caso, un problema significativo puede ser no pertinente si no es de conexión ni su solución implica la proporcionalidad; poco pertinente, si responde al nivel de conexión, pero la resolución no requiere del uso de la proporcionalidad, o se resuelve mediante el razonamiento proporcional, pero no es de conexión; pertinente, si además de significativo es de conexión y se resuelve usando componentes del razonamiento proporciona). En la tarea 3, se sigue la categorización de las dificultades descritas en el capítulo 3: (a) *situacionales*, asociadas a la comprensión del enunciado del problema; (b) *conceptuales*, relacionadas a conceptos o sus descripciones o definiciones; (c) *proposicionales*, asociadas a las propiedades fundamentalmente de la relación de proporcionalidad; (d) *procedimentales*, son dificultades en torno al desarrollo de técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos; (e) *argumentales*, relacionadas a la justificación de las proposiciones y los procedimientos.

7.4. Análisis y resultados

A continuación, se presentan los resultados del análisis de contenido de las respuestas dadas por los FP a las tareas establecidas, según las categorías indicadas en la sección anterior.

7.4.1. Creación de problemas para responder a un nivel de complejidad dado

De los once participantes en la intervención, diez realizaron la primera parte de la Tarea 1 y nueve la segunda parte. La Tabla 7.1 muestra el grado de pertinencia de los problemas creados y los modificados por los FP.

Tabla 7.1

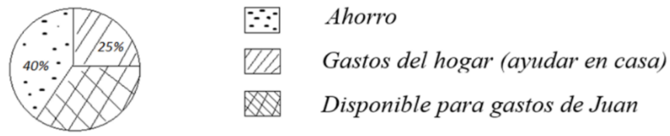
Grado de pertinencia de los problemas de conexión y reflexión creados por los FP.

Pertinencia	Conexión	Reflexión	Total
El problema no es significativo	3	5	8
El problema es significativo no pertinente	0	0	0
El problema es significativo poco pertinente	2	3	5
El problema es pertinente	5	1	6
Total	10	9	19

En la primera parte de la tarea 1, solamente cinco FP lograron crear un problema del nivel de conexión en el entorno de proporcionalidad directa (problema pertinente): cuatro fueron problemas de valor faltante (Figura 7.1), el otro problema requiere una comparación de razones (Figura 7.2). Tres de los problemas pertinentes emplean porcentajes, en dos se calcula el porcentaje de una cantidad dada (Figura 7.2), y en otro se debe calcular la cantidad total conocido el porcentaje y la parte (Figura 7.1).

El problema propuesto por FP5 (Figura 7.1) implica una relación entre distintas representaciones (gráfica, numérica y porcentual). El estudiante debe interpretar la información contenida en el gráfico y distinguir el porcentaje requerido. Mediante complemento a 100 determina que la cantidad asociada a los gastos de Juan representan el 35% y calcula (con el porcentaje y la parte) la totalidad del dinero recaudado en la fiesta. Posteriormente, determina la cantidad de dinero ahorrado. Se considera de nivel de conexión.

La fiesta de cumpleaños de Juan fue el sábado anterior y él pidió que todos sus regalos fueran en efectivo. Su padre, sin embargo, quiere enseñarle la importancia de ahorrar y le indicó, mediante el siguiente gráfico, cómo dividirían el dinero total recibido.



Si el padre de Juan le entregó ₡44975 para sus gastos y según el gráfico anterior, ¿cuánto dinero del cumpleaños le quedó de ahorro a Juan?

Resolución. Se sabe que el gráfico circular representa el 100% del total, por lo que el porcentaje disponible para gastos corresponde a 100-40-25=35. Es decir, se tiene un 35% del total para gastos de Juan. Para determinar el total de dinero recibido (x):

$$\frac{44975}{35} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 128500$$

Por lo que el ahorro será de (y):

$$\frac{128500}{100} = \frac{y}{40} \Rightarrow y = 51400$$

Figura 7.1. *Problema pertinente. Valor faltante. Nivel de conexión (FP5).*

La Figura 7.2 muestra un problema que involucra la relación de proporcionalidad directa entre precio y peso del producto. Se considera un problema de conexión para estudiantes de sexto curso de primaria que están “acabando” el tema de proporcionalidad y porcentajes, pues, además de calcular el precio unitario de cada gramo de la bolsa original, necesita calcular el 15% agregado (en la bolsa nueva) y comparar las cantidades relativas obtenidas para establecer una respuesta al problema (más producto por menos precio).

El paquete de ranchitas de 70g cuesta ₡150. En la pulpería tienen una bolsa que dice “Ahora con 15% más de producto” que cuesta ₡175. ¿cuál bolsa contiene más producto por menor precio?

Bolsa original

$$\frac{₡150}{70g} \approx 2{,}14\ ₡/g$$

Bolsa nueva

Cant gramos: $70 + 70 \cdot 0{,}15 = 70 + 10{,}5$

$$\frac{₡175}{80{,}5g} \approx 2{,}17$$

Respuesta: como $2{,}14 < 2{,}17$*, la “oferta” termina siendo “más cara”. Es más conveniente comprar el paquete original.*

Figura 7.2. *Problema pertinente. Comparación de razones y porcentajes. Nivel de conexión (FP6).*

Dos de los FP crearon un problema significativo, de proporcionalidad, pero de nivel de reproducción (problema poco pertinente), pues su resolución pasaba por la aplicación rutinaria de la regla de tres sin necesidad de establecer conexiones para determinar cuáles son las magnitudes o cómo se relacionan. Las otras tres propuestas fueron enunciados no significativos, debido a ambigüedades en la redacción.

En la segunda parte de la tarea 1, los FP debían modificar el problema de conexión que habían elaborado para crear un problema del nivel de reflexión. Sin embargo, de los cinco casos pertinentes en la primera parte, solo uno (Figura 7.3) logró hacerlo (Tabla 7.1). FP6 agrega dos preguntas al problema inicial (Figura 7.2) que obliga al estudiante a reflexionar sobre la situación para resolverlo. Primero considera que las razones precio-peso debe tener la misma proporcionalidad en ambos casos (con y sin oferta) para analizar si es "justa" la diferencia de precios. Luego, determina que la diferencia de peso representa el 16,6% del peso original, así, para que sea oferta, la bolsa de ranchitas debe tener más de ese porcentaje en el producto adicional.

PARA REFLEXIÓN: Agregamos las preguntas
¿Qué porcentaje de producto debería aumentar la empresa para que sea justo el aumento de ₡25?
¿Y para que sea considerado como oferta? (considere que la empresa debe generar ganancias). Explique su respuesta.
Necesitamos encontrar la cantidad de gramos que cumple $\frac{150}{70} = \frac{175}{x} \Longrightarrow x = 81,\overline{6}$
¿Qué porcentaje representa el $11,\overline{6}$ *que aumenta?* $70 \cdot x = 11,\overline{6}$
Para que sea considerado oferta, debe tener más del $16,\overline{6}\%$ *del producto. Por ejemplo, 17%, 18%,...*
No tiene sentido que aumenten 100% del producto por ₡25 porque la empresa sale perdiendo.
Esta tarea sería de reflexión, porque implica mayor comprensión de proporcionalidad, porcentaje, regla de 3 e inclusive conocimientos de ecuaciones. El estudiante debe integrarlos de forma ingeniosa y creativa. Además, se le invita a buscar una respuesta matemática general $(x > 16,\overline{6})$ *pero se reflexiona sobre las implicaciones en el contexto. Por último, se le pide explicar su razonamiento.*

Figura 7.3. *Problema de reflexión. Valor faltante. Uso de regla de tres. Pertinente (FP6).*

Todos los participantes que realizaron modificaciones a su problema inicial para aumentar el nivel de complejidad modificaron el requerimiento (cambiando o agregando una o más preguntas, Figura 7.3); seis de ellos también variaron la información, modificando los datos numéricos dados del problema o agregando nuevos (variación cuantitativa). Los participantes consideran necesario que las nuevas preguntas impliquen la búsqueda de una generalidad, respondiendo en la mayoría de los casos a la identificación de una fórmula matemática y solicitando que expliquen o justifiquen sus respuestas (Figura 7.3), situación registrada también con FM (Capítulo 4). Sin embargo, solo cuatro FP tratan de justificar por qué sus modificaciones llevan a un problema de reflexión (por ejemplo, Figura 7.3).

En esta segunda parte, cinco enunciados fueron no significativos por ser ambiguos y tres poco pertinentes por responder a problemas de reproducción (Tabla 7.1) de valor faltante, que solo requerían cálculos rutinarios (algoritmo de regla de tres) para ser resueltos. Por ejemplo, en la Figura 7.4, FP4 hace una comparación por gramos, no por latas; es decir, no condiciona la cantidad de producto a comprar, hay ambigüedad en el requerimiento. Si no se sabe la cantidad exacta de gramos que se quiere comprar, no se puede responder directamente. Se debería preguntar por una cantidad fija, por ejemplo ¿con qué oferta es más rentable cada 50 gramos de atún?”

En un supermercado se están realizando ofertas. El precio normal de los atunes es de ₡1500 col. la lata de 100 gramos y ₡1000 la lata de 50 gramos aunque tienen en venta 3 latas de 50 gramos con un 30% de descuento y 2 latas de 100 gramos tienen un 20% de descuento. ¿Qué es más favorable comprar?

Atún 100g $\rightarrow 1500 \rightarrow 2$ *por* $3000 \rightarrow$ *aplicar 20%* $\rightarrow 3000\,\frac{20}{100}=600$

Atún 50g $\rightarrow 1000 \rightarrow 3$ *por* $3000 \rightarrow$ *aplicar 30%* $\rightarrow 3000\,\frac{30}{100}=900$

$\rightarrow 3000-600=2400$

$\rightarrow 3000-900=2100$

Ahora en 2 latas de 100g hay 4 veces 50g $\rightarrow 2400 \div 4=600$

en 3 latas de 50g hay 3 veces 50g $\rightarrow 2100 \div 3=700$

Al igualar ambos productos, notamos que por cada 50g sale más económico comprar la promoción de 2 latas de 100g.

Figura 7.4. *Problema ambiguo. No significativo (FP4).*

Los enunciados no significativos en esta segunda parte de la consigna lo fueron porque los FP mantuvieron la ambigüedad del problema inicial, o bien al modificar el requerimiento para aumentar el nivel de complejidad, no precisaron de manera clara lo que el resolutor debe determinar o cuál es la relación de proporcionalidad implicada (Figura 7.4). Por otro lado, cuando mantienen la significatividad de la situación, frecuentemente disminuyen la complejidad del problema; usualmente mantienen una estructura similar al anterior y realizan una variación cuantitativa de la información para proceder a cálculos rutinarios, convirtiéndolo en uno de reproducción.

7.4.2. Problemas de proporcionalidad en contexto aritmético, geométrico y probabilístico

En la segunda tarea, los FP debían en primer lugar crear un problema para cada contexto: aritmético, geométrico y probabilístico. En este caso, realizaron la tarea 10 participantes (9 de ellos los mismos que realizan la tarea 1); cada FP creo los tres enunciados, excepto uno que no propuso en el contexto probabilístico. Como se aprecia en la Tabla 7.2, la mayor frecuencia de problemas pertinentes se dio en el contexto aritmético (Figura 7.5), de los cuales tres son de proporcionalidad inversa. La mayoría de los problemas no significativos en los tres contextos, lo fueron por presentar ambigüedades en su enunciado. Aquellos que fueron poco pertinentes responden al contexto indicado, pero no requieren del razonamiento proporcional en su resolución.

Tabla 7.2
Grado de pertinencia de los problemas creados por los FP, según el contexto (n=29).

Contexto	No significativo	Significativo no pertinente	Significativo poco pertinente	Pertinente	Total
Aritmético	3	1	0	6	10
Geométrico	3	0	2	5	10
Probabilístico	5	0	3	1	9
Total	11	1	5	12	29

Los seis problemas en el contexto aritmético pertinentes son de valor faltante, uno de proporcionalidad inversa (cantidad de obreros y tiempo en acabar una obra) y cinco de proporcionalidad directa. Estos implican situaciones de compra o venta de artículos (Figura 7.5), los litros de gasolina que consume un auto por kilómetros recorridos, o el tiempo que dura una acción (lectura de un libro, reproducción de bacterias). Si bien uno de los factores esenciales para que un problema involucre la proporcionalidad es la condición de regularidad que permite calcular la razón unitaria, en tres de los enunciados en este contexto (no significativos), los FP dan por hecha esta condición, sin hacerla explícita en su enunciado o en la solución.

En la Figura 7.5 se muestra un problema pertinente en el contexto aritmético. En el problema creado por FP2 se debe calcular la parte a partir del todo y el porcentaje (por complemento a 100 del descuento establecido).

Ana quiere comprar un reloj inteligente a su papá como regalo del día del padre. Para esto, ha estado buscando varias opciones y encontró una tienda en la cual todos los relojes inteligentes tienen un descuento del 33%. Ella encontró uno cuyo precio original es ₡136000. ¿Cuál es el precio del reloj una vez aplicado el descuento?

-Precio original: 136000 (responde al 100%)

-Precio con descuento: Hay que determinar el 77% de 136000.

$$\frac{136000}{100} = \frac{x}{77} \Leftrightarrow x = 104720$$

Otra forma, $136000 \cdot 0{,}77 = 104720$

R/ El precio del reloj con el descuento aplicado es de ₡104720

Figura 7.5. *Problema pertinente en contexto aritmético. Valor faltante. Porcentaje (FP2).*

En el contexto geométrico, siete problemas fueron significativos (los restantes presentaron ambigüedad en el enunciado), de los que cinco fueron además pertinentes (los otros dos no requerían el uso del razonamiento proporcional, ambos implicaban cálculo de área). En tres de los problemas pertinentes la proporcionalidad aparece involucrada mediante la semejanza de triángulos (Figura 7.6). En concreto se pide la ampliación de un triángulo rectángulo a una escala diferente o el cálculo del área de un triángulo a partir de las proporciones de los segmentos de dos triángulos rectángulos que comparten un ángulo agudo. De los otros dos problemas pertinentes, uno requiere analizar si la variación de la base o la altura de un rectángulo (al doble o la mitad) afecta de igual forma su área (FP2); el otro lleva a calcular el 10% del volumen de un cilindro (calcular la parte a partir del todo).

Luis notó que en el patio de su casa hay dos árboles alineados, cuyas sombras se proyectan y coinciden en el mismo punto a una cierta hora en un día soleado. Él procedió a marcar el punto y realizar algunas mediciones.
-El árbol pequeño mide 1,25m y su sombra se proyecta 3m hacia la izquierda del árbol.
-El árbol más grande no lo pudo medir pues es más alto que él, pero midió que su sombra se proyecta 9m hacia la izquierda del árbol.
A partir de esta situación realice un diagrama que represente la situación.
¿Es posible calcular la altura del árbol sin tener que medirlo? Si la respuesta es afirmativa, ¿cómo le explicaría a Luis cómo calcular la altura del segundo árbol? Si la respuesta es negativa, ¿qué afirmación le hace falta a Luis para poder realizar el cálculo?

Figura 7.6. *Problema pertinente en el contexto geométrico. Semejanza de triángulos (FP7).*

Los FP tuvieron más dificultad en la creación de problemas en el contexto probabilístico. Uno no creó ningún problema en este contexto, cinco propusieron enunciados no significativos pues no se podían responder con la información facilitada o era ambigua ("Si la probabilidad de ganar una ronda de bingo es $\frac{1}{50}$ ¿Cuál sería la probabilidad de ganar si se juega 3 rondas?", FP10) y tres crearon un problema significativo, pero no pertinente pues no requerían del razonamiento proporcional. El único problema pertinente en este contexto responde a un problema de proporcionalidad directa de valor faltante, relaciona el porcentaje con la probabilidad de sacar una carta de un mazo (FP5, Figura 7.7).

En la escuela, se encuentran organizando una feria y a Lucy le corresponde organizar uno de los juegos. Ella quiere hacer uno en el que se tenga un mazo de cartas de colores y las personas deban elegir solamente una, de tal forma que, si sacan una roja, entonces ganan el juego, pero si sacan una de otro color, pierden (tienen solo un intento y todas las cartas son del mismo material). Su maestra le dice que, para poder obtener ganancias, el juego debe tener una probabilidad de gane del 20%. Si Lucy quiere colocar 7 cartas de cada color, ¿cuántos colores más necesita para pintar todo el mazo? (Nota: el color es visible en una de las caras de la carta)

Si tienen 7 cartas rojas (casos favorables):

$$\frac{7}{x} = \frac{20}{100}$$

cantidad total de cartas ↲ ↳ *probabilidad del 20%*

$\Rightarrow x = 35$ *(en total se tienen 35 cartas)*

Como quiere colorear 7 cartas de cada color, necesita 5 colores, uno de ellos es el rojo, entonces necesita 4 colores más.

Figura 7.7. *Problema pertinente en el contexto probabilístico (FP5).*

En general, los FP no tuvieron dificultades para resolver los problemas creados (salvo dos de comparación de razones en el contexto geométrico). Después de resolverlos, los FP debían indicar los objetos y procesos matemáticos implicados en su solución y el grado de complejidad asociado. De acuerdo con la Tabla 7.3, el grado de complejidad es adecuado en siete de los 12 problemas pertinentes.

Tabla 7.3
Relación entre el grado de complejidad y el contexto de los problemas pertinentes (n=12).

		Contexto			
		Aritmética	Geometría	Probabilidad	Total
Grado de complejidad	Correcto	4	3	0	7
	Incorrecto	2	2	1	5
	Total	6	5	1	12

En general, los FP identifican mejor el nivel de reproducción (fundamentalmente en el contexto aritmético) que el de conexión y reflexión en los problemas que ellos mismos crean. Para los FP un problema es de conexión si su solución involucra dos temáticas o dos entornos matemáticos. Por ejemplo, FP2 asigna correctamente el nivel de conexión a su problema en el contexto geométrico justificando que este “involucra conocimientos de la geometría y la aritmética” (consiste en determinar si la variación de la base o la altura de un rectángulo afecta proporcionalmente su área). Como vimos en la experiencia con FM

(Capítulo 4), cuando los FP identifican de manera incorrecta el nivel de reflexión en ambas tareas se debe a que se basan únicamente en la solicitud de la explicación de la respuesta y no en las demás características que caracterizan a una tarea en este nivel.

Al igual que los maestros en formación (Burgos et al., 2018; Mallart et al., 2016) y como se muestra en el Capítulo 4, los FP tienen dificultades para identificar los objetos matemáticos que intervienen o surgen de la resolución de sus propios problemas de proporcionalidad. Esto es especialmente notorio en las proposiciones y los argumentos, que se identifican de forma incorrecta en su mayoría. Los objetos identificados con mayor éxito por los FP en los problemas pertinentes son los lenguajes (fundamentalmente, el natural y el numérico en el contexto aritmético; numérico y simbólico en el geométrico; el natural en el contexto probabilístico) y los procedimientos (principalmente regla de tres y operaciones aritméticas). La proporcionalidad aparece como el concepto reconocido con mayor frecuencia en los problemas pertinentes en el contexto aritmético. Esto no es así en los otros contextos; de hecho, en el contexto geométrico aparece solo en dos ocasiones (al igual que "triángulos semejantes") y en el problema pertinente del contexto probabilístico no se identifica como concepto. Aunque algunos no señalan "proporcionalidad" como un concepto asociado a sus problemas, suelen utilizarlo para describir otros objetos (como en proposiciones, procedimientos o procesos). Al igual que en el Capítulo 4 y en otros estudios con futuros docentes de educación primaria (Burgos et al., 2018; Burgos y Godino, 2020b) los FP consideran la regla de tres como un concepto o como un método para resolver el problema que crean. Por otra parte, los procesos matemáticos que identificaron con mayor frecuencia los FP en la resolución de sus problemas pertinentes son: algoritmización y argumentación, en el contexto aritmético; algoritmización, argumentación y comunicación (este último vinculado a la forma de expresión: lenguaje y tipos de representación), en el contexto geométrico, y argumentación en el contexto probabilístico. A pesar de ser una identificación limitada, estos procesos fueron reconocidos de manera correcta. Sin embargo, la mayoría de los FP que identificaron de mejor manera los procesos implicados en sus problemas pertinentes fallaron en la identificación del nivel de complejidad.

7.4.3. Variación de un problema para gestionar dificultades potenciales en la resolución por estudiantes

Siete participantes realizaron esta última tarea durante la quinta sesión formativa. Todos los FP resolvieron el problema base mediante lo que consideran como la "regla de tres inversa": realizar una multiplicación "horizontal" entre cantidades de distintas magnitudes (ver Figura 7.11). Al igual que ocurría en los problemas creados por FM en situaciones de proporcionalidad directa (evidenciado también en el contexto aritmético en el capítulo 3), los FP no reflexionaron sobre las condiciones necesarias para identificar una situación de proporcionalidad inversa. De hecho, solo FP5 consideró la condición de regularidad (durante el tiempo de trabajo todos los obreros trabajan a igual velocidad) en la resolución (Figura 7.8). A pesar de esto, cinco de los participantes hicieron explícita esta condición (Figura 7.9) en la variación propuesta del problema (todos pertinentes). En los dos problemas no pertinentes creados por variación no se refiere la condición de regularidad.

Todos los participantes señalaron dificultades de tipo situacional en el problema, en relación con a) considerar el problema como una situación de proporcionalidad directa y no inversa, b) identificar una cantidad incorrecta de días para establecer la relación (considerar los 4 días como el tiempo a terminar la obra en lugar de 20). Ninguno de los participantes identificó dificultades conceptuales y solamente FP5 apreció como potencial dificultad en el enunciado la carencia explícita de la condición de regularidad (Figura 7.8). Las dificultades de tipo procedimental, apreciadas por seis FP, se asociaron principalmente a: a) cometer errores en los cálculos aritméticos (FP5, FP7, FP8) y b) recurrir a procedimientos propios de una comparación de razones de proporcionalidad directa en lugar de inversa (FP5, FP6, FP10). Por ejemplo, FP6 indica "El estudiante podría plantear por error la relación al revés (como en proporcionalidad directa). Ninguno de los participantes señaló dificultades argumentativas.

Resolución. Note que, para durar más días, si todos los trabajadores aportan la misma cantidad de trabajo, se necesitan más trabajadores.

Se tiene:

# obreros	*días*
150	*24*
x	*20*

La constante de proporcionalidad corresponde a $150 \cdot 24 = 3600$, *entonces se tiene que* $x = \frac{3600}{20} = 180.$

R/ Se necesitan 30 más.

Dificultades

1. No identificar que se tiene un ejemplo de proporcionalidad inversa.

2. Despejar el valor de "x" aplicando regla de 3, aunque se identificó que era proporcionalidad inversa.

3. Responder a la pregunta con el valor de "x" encontrado, que no es lo que le preguntan.

4. Errores aritméticos.

5. No identificar que necesita terminar la obra en 20 días.

6. Hace falta indicar lo de la cantidad de trabajo por persona.

Figura 7.8. *Resolución y dificultades identificadas en el problema inicial (FP5).*

Como se muestra en la Figura 7.8, FP5 identifica diferentes tipos de dificultades situacionales (1, 3 y 5) y procedimentales (2, 4 y 6). FP5 señala la necesidad de reconocer que todos los obreros "aportan la misma cantidad de trabajo" y dado que aparece explícitamente en el enunciado lo considera como una de las dificultades que pueden encontrar los estudiantes.

Después de resolver el problema y de reconocer las dificultades que los alumnos pueden encontrar en su solución, los FP deben variar el problema para facilitar su comprensión y ayudar a superar las dificultades. FP5 y FP9 señalan a cuáles de las dificultades atienden con algunas de las variaciones realizadas, sin explicar cómo las resuelven o "evitan" ("se agregan algunas preguntas para evitar las dificultades 1 y 3", FP5). Por otro lado, FP6, FP7 y FP10 indican qué elementos del problema modificaron sin precisar qué dificultades atienen con cada cambio. FP8, FP9 y FP11 sí establecen qué esperan lograr con la variación de algunos componentes del problema, aunque sus descripciones no sean precisas. Por ejemplo, FP9 modifica la información, "para terminar la obra en 30 días se requieren 188 obreros, pero pretenden terminarla 1 semana antes", y reemplaza el requerimiento por la pregunta "¿es posible hacerlo con la misma cantidad de obreros?". Señala que "aunque el nuevo requerimiento es un poco más amplio permite que el estudiantado explore más lo que plantea el problema y permite ver si realmente hay comprensión del concepto de proporcionalidad inversa".

Los elementos que varían los FP en la situación de proporcionalidad inversa son la información y el requerimiento, generalmente de forma simultánea, manteniendo una estructura similar al problema dado. La razón de esto puede ser, como observamos en el Capítulo 3, que la variación del requerimiento sin modificar la información (o viceversa) representa mayor dificultad para los participantes. Como se muestra en la Figura 6.9, la modificación de la información consiste principalmente en añadir la condición de regularidad (todos los obreros realizan la misma cantidad de trabajo). Solo en tres casos se realiza una variación cuantitativa (cantidad de obreros y de días), aumentando las cantidades de obreros y días que emplean en acabar la obra con la intención de evitar la dificultad de "no identificar que se necesita terminar la obra en 20 días" (FP5).

> *Para la construcción de un edificio se contratan 150 obreros. Se espera que terminen la obra en 24 días. Si antes de comenzar, se le solicita a la empresa de construcción que termine la obra 4 días antes de lo planeado, ¿deberían contratar más obreros o menos? ¿Cuántos? ¿Cuántos trabajan en total? (Suponga que todos los obreros realizan el mismo trabajo).*
>
> *No varié contexto, requerimientos, ni entorno matemático. Tal vez solo aclaré la información. La verdad no creo que sea "necesaria" otra variación para mejorar la comprensión.*
>
> *Otra forma de resolverlo*
>
> $150 \cdot 24 = (150 + x) \cdot 20$
>
> $\frac{360}{20} = 150 + x$
>
> $180 - 150 = x$
>
> $30 = x$

Figura 7.9. *Problema pertinente. Variación de la información (FP6).*

La variación del requerimiento implica agregar una o más preguntas. Estas persiguen solicitar además de la cantidad de obreros que se deben contratar o despedir, la cantidad total que trabajarán en la obra una vez realizada esa modificación (Figura 7.9), o bien motivar un primer análisis intuitivo de la situación que facilite la respuesta a las preguntas del problema base (por ejemplo: "¿Qué pasaría con el tiempo de entrega de la obra si el capataz contrata más obreros?", FP7) y orientar el uso de la proporcionalidad inversa ("¿Cuál relación identifica entre el tiempo de entrega de la obra y la cantidad de obreros?", FP7; "¿Qué ocurre si se aumenta la cantidad de días?", FP8).

7.5. Conclusiones

La invención de problemas con fines didácticos es un potente recurso para desarrollar de manera articulada conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesor (Mallart et al., 2018). Con este interés, en este capítulo hemos informado sobre el diseño, la implementación y análisis de una intervención con FP costarricenses centrada en la creación de problemas de proporcionalidad de forma libre o estructurada, para responder a finalidades didácticas específicas. Los resultados descritos contribuyen, por un lado, a comprender las dificultades que presentan los FP en la creación de problemas de proporcionalidad y, por otro, a diagnosticar carencias en sus conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional que pueden limitar dicha competencia.

Como ya habíamos observado en el caso de futuros profesores de educación primaria españoles (Capítulo 4 de esta memoria), los FP tuvieron dificultades para crear un problema de proporcionalidad con un grado de complejidad solicitado (tarea 1), o bien, identificar el nivel de complejidad al que responde su propio problema. Consideran suficiente añadir "justique su respuesta" para que un problema pase del nivel de conexión a nivel de reflexión sin tener en cuenta los objetos y procesos matemáticos necesarios para resolver sus propios problemas. Crean generalmente problemas pertinentes dentro del nivel más básico de complejidad, pero no es así cuando aumentan su demanda, algo que también habíamos observado en maestros en formación (Capítulo 4).

Aunque los FP logran crear problemas de significativos en los diferentes contextos (tarea 2), tienen dificultades para involucrar el entorno matemático de la proporcionalidad, fundamentalmente cuando el contexto no es el aritmético. Así, se observa que los FP lograron mayor éxito en el caso aritmético, mientras que en el contexto probabilístico, la mayoría de los problemas creados fueron no pertinentes. Mientras que el significado aritmético de la proporcionalidad es el más consolidado en los diferentes niveles escolares (Ben-Chaim et al., 2012; Lamon, 2007), se reconoce un conocimiento deficiente de cómo aparece implicado el razonamiento proporcional en la resolución de problemas en contextos como el probabilístico o el geométrico (Batanero et al., 2015; Copur-Gencturk et al., 2023).

La creación de problemas en un determinado contexto y el análisis de la identificación de los objetos y procesos nos ha permitido identificar un conocimiento didáctico-matemático sesgado del razonamiento proporcional que para los FP esencialmente se reduce a la utilización de la regla de tres (como ocurriera con maestros en formación; Burgo y Godino, 2020). Además, como sucede en la intervención anterior (Capítulo 6), observamos un mayor porcentaje de problemas con cierto grado de pertinencia cuando los crean de forma libre (en distintos contextos), resultado que difiere de los observados en el Capítulo 4 y otros como los de Şengül y Katranci (2015a) y Bayazit y Kirnap-Donmez (2017) donde se observaba un mayor éxito en la creación por variación. Los FP identifican correctamente el grado de complejidad en el contexto aritmético, quizás por ser problemas del nivel de reproducción.

Hemos observado, en línea con los resultados del Capítulo 4, que, mientras que los FP identifican potenciales dificultades que tienen que ver con la propia situación (información, requerimiento) o con los procedimientos necesarios en su resolución, no reflexionan más allá en otros objetos (proposiciones, argumentos) que forman parte del entorno matemático del problema. Esto podría estar relacionado con las limitaciones para identificar objetos en la resolución de problemas, en particular, con un conocimiento deficiente de las propiedades de la relación de proporcionalidad (ignorar la condición de regularidad) y qué constituye un argumento sólido en estas situaciones (Balderas et al., 2014). Por tanto, es necesario reforzar los conocimientos de los FP sobre organización y mejora de tareas para permitirles hacer frente a situaciones reales de clase.

CAPÍTULO 8. CREACIÓN DE PROBLEMAS COMO MEDIO PARA DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL Y ALGEBRAICO

Parte del contenido de este capítulo aparece en los artículos:

- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024a). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00482-w
- Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024b). Problem creation to articulate proportional and algebraic reasoning (En revisión)

8.1. Introducción

Diferentes perspectivas teóricas y propuestas curriculares han venido recomendando la incorporación de contenidos algebraicos desde los primeros niveles educativos, con el objetivo de enriquecer la actividad matemática escolar y de favorecer el acceso a las matemáticas en secundaria (Carraher y Schliemann, 2018; Kieran, 2022). Potenciar formas de razonamiento algebraico en los primeros años de escolaridad requiere de una perspectiva más amplia de la naturaleza del álgebra escolar (Godino, Aké et al., 2014), entendiendo que el razonamiento algebraico ocurre pues en "todas las actividades destinadas a desarrollar en los alumnos una actitud para buscar regularidades, relaciones y propiedades, y para expresarlas primero en lenguaje natural y luego algebraico" (Malara y Navarra, 2018, p. 54). Para Blanton et al. (2015), el álgebra temprana se puede desarrollar por medio de cinco grandes ideas: 1) aritmética generalizada; 2) equivalencia, expresiones, ecuaciones y desigualdades; 3) pensamiento funcional; 4) variable, y 5) razonamiento proporcional. El razonamiento proporcional supone "razonar algebraicamente sobre dos cantidades generalizadas que están relacionadas de tal manera que la relación de una cantidad con la otra es invariable" (Blanton et al., 2015, p. 43). Sin embargo, el desarrollo del razonamiento proporcional y algebraico en los niños precisa de una formación inicial específica de los futuros maestros.

Los futuros maestros deben tener un conocimiento del álgebra y lo que implica su enseñanza en la escuela primaria para llegar a movilizar este conocimiento más tarde en su práctica y crear situaciones de enseñanza que desarrollen el pensamiento algebraico de sus alumnos (Burgos, 2023; Branco y Ponte, 2012; Pincheira y Alsina, 2021). Como hemos mencionado, los resultados de investigaciones como las de Ferreira et al. (2022), Hohensee (2017) o Zapatera y Quevedo (2021) entre otras, muestran que los conocimientos algebraicos de los futuros docentes son insuficientes, y destacan los efectos positivos sobre los escolares de la inclusión de prácticas algebraicas básicas en la formación de los docentes (Stylianou et al., 2019), así como la necesidad de incluir en los programas de formación docente experiencias que les permitan diseñar tareas para reconocer y promover el pensamiento algebraico en sus futuros alumnos (Zapatera y Quevedo, 2021).

Atendiendo a esta necesidad y puesto que el razonamiento proporcional aparece como precursor del razonamiento algebraico de los estudiantes (Lundberg y Kilhamn, 2018), en este capítulo describimos los resultados de una intervención formativa con futuros maestros, centrada en la creación de problemas para desarrollar y articular el razonamiento proporcional y algebraico.

8.2. Contexto y participantes

La experiencia formativa se implementó con 62 estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria en la Universidad de Granada. Durante sus estudios de grado, los FM habían recibido una formación específica sobre aspectos epistémicos (conocimientos matemáticos), cognitivos (aprendizajes, errores y dificultades), instruccionales (tareas, actividades, materiales y recursos) y curriculares de la enseñanza de las matemáticas. En el momento de desarrollar la experiencia, se espera que los participantes sean capaces de poner en práctica los conocimientos adquiridos, para resolver, diseñar y secuenciar tareas matemáticas de un contenido específico, en nuestro caso el razonamiento proporcional y algebraico. De manera específica, los FM recibieron formación sobre el análisis de prácticas matemáticas (objetos y procesos) y los niveles de razonamiento algebraico elemental, así como en los elementos que caracterizan un problema, el modelo de Malaspina (2013) y las formas de creación de problemas (ver Tabla 8.1 a continuación).

8.3. Diseño de la implementación

La intervención formativa se desarrolló durante 6 sesiones de dos horas de duración cada una. En la Tabla 8.1 se describe la trayectoria didáctica implementada y el contenido abordado en las diferentes sesiones.

Tabla 8.1
Trayectoria didáctica implementada.

Sesión	Tipo	Contenidos
Sesión 1		
Análisis de prácticas matemáticas.	Teórico-práctica.	• Prácticas matemáticas. • Objetos y procesos matemáticos.
Sesión 2		
Análisis de tareas matemáticas escolares.	Teórico-práctica.	• Tarea matemática escolar. • Características de una tarea: entorno matemático, finalidad, grado de complejidad, potenciales dificultades de resolución, recursos materiales y temporales.
Sesión 3		
Análisis de tareas matemáticas escolares.	Práctica. Trabajo colaborativo.	• Análisis de prácticas, objetos y procesos en la solución de tareas matemáticas escolar. • Identificación de las características de una tarea matemática escolar.
Sesión 4		
Creación de tareas matemáticas.	Teórico-práctica.	• Elementos de una tarea: contexto, entorno, requerimiento, información. • Formas de crear tareas matemáticas: libre, semiestructurada, estructurada. • Finalidad didáctica en la creación de tareas matemáticas.
Sesión 5		
Sentido algebraico.	Teórico-práctica.	• Razonamiento algebraico escolar. • Objetos y procesos algebraicos. • Modelo de niveles de RAE. • Tareas para desarrollar el razonamiento algebraico.
Sesión 6		
Creación de tareas matemáticas.	Práctica. Trabajo colaborativo.	• Elaboración estructurada y semiestructurada de tareas. • Finalidad didáctico-matemática epistémica: propiedades de la relación de proporcionalidad directa, implicar razonamiento algebraico.
Tarea (opcional) de evaluación individual.		

Las sesiones fueron de dos tipos: a) teórico-prácticas (de gran grupo) en las que se presentan los contenidos teóricos descritos en la Tabla 8.1 y se ejemplifican con momentos de trabajo guiado en pequeños grupos y discusión colectiva; b) prácticas (en grupos usualmente de 5 estudiantes: G01, G02, hasta G12) en los que los FM trabajan sobre las consignas facilitadas por el profesor como continuidad al trabajo teórico-práctico previo.

El trabajo en grupo permite a los estudiantes comparar y enriquecer sus propuestas de diversas estrategias para crear y resolver los problemas, identificar las posibles dificultades en las mismas, valorar la potencialidad para desarrollar el sentido algebraico, entre otros aspectos. Después de cada sesión práctica los estudiantes entregan su trabajo al profesor; este las supervisa y elabora un informe sobre la tarea que comparte y discute con los estudiantes de cada grupo de manera previa a la siguiente sesión de clase.

Tras estas sesiones los FM trabajaron individualmente en la tarea descrita a continuación como una parte opcional para la evaluación final del curso (los estudiantes pueden optar a un examen en convocatoria ordinaria, que supone el 30% de la calificación global, o bien a un examen previo y la entrega de una tarea de evaluación que después deben discutir con la profesora). De esta manera, los FM podían elegir si realizarla o no. Todos los estudiantes participaron en la experiencia.

8.4. Instrumento de recogida y análisis de datos

En esta sección describimos las tareas propuestas a los FM con relación a la creación de problemas para desarrollar el razonamiento proporcional y algebraico. En primer lugar, se presentan las tareas que corresponden a la sesión 6 de trabajo colaborativo. A continuación, se detalla una de las tareas propuestas en clase como parte de la evaluación actitudinal (10% de la calificación global de la asignatura) y que los estudiantes podían decidir entregar o no. Finalmente describimos la tarea individual de evaluación final.

8.4.1. Trabajo grupal

Tarea. El maestro propone el siguiente problema a sus alumnos de 6º de educación primaria:

Problema. *Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja*

B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A? Explica tu respuesta

Mientras los alumnos tratan de resolver el problema en clase, algunos comentan:

Luis: Maestro…no lo puedo resolver porque no sé cuántas bolas hay en la caja A.

A continuación, María intenta dar la solución al problema.

María: Yo creo que, si pensamos que hay cuatro, porque te dice que en la A una es blanca y tres son negras, pues, como tienes dos negras más, entonces, para que sea igual de probable tiene que haber la misma diferencia, ¿serían entonces 18 blancas y 20 negras… no maestro?

Pero Pedro no está de acuerdo y rápidamente indica:

Pedro: ¡Ya sé! ¡Es que no estáis usando la probabilidad! ¿Maestro puedo salir a la pizarra? ¡Ya lo he resuelto!

El maestro anima a Pedro a salir y a explicar con detalle lo que ha pensado y a sus compañeros a prestar atención a su solución. Escribe en la pizarra:

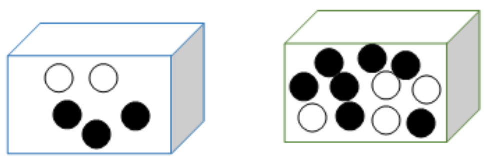
En la caja A hay una probabilidad de sacar una bola blanca es de ¼, ya que hay una blanca por cada 3 negras (1+3=4). Si en la caja B hay 20 bolas entre blancas y negras, y hay la misma probabilidad que en la caja A de sacar una bola blanca, en la caja A habría 6 blancas y 14 negras: $\frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1+5}{20} = \frac{6}{20}$

a) ¿Cómo interpretas las respuestas de los alumnos? ¿Qué dificultades se han encontrado?
b) Crea por variación del propuesto por el maestro, un problema que contribuya a facilitar la comprensión y la solución del problema del episodio por parte de los estudiantes. Indica en cada caso los elementos que has variado en el enunciado y de qué manera permite a cada alumno superar su dificultad.
c) Crea por variación, un problema que contribuya a desarrollar el sentido algebraico. Resuélvelo e identifica el nivel de razonamiento algebraico implicado.

Se persigue, por un lado, que los maestros en formación identifiquen la ausencia de razonamiento proporcional en las respuestas erróneas de los alumnos al comparar probabilidades (Begolli et al., 2021) y decidan cómo actuar sobre el problema propuesto para ayudarles a comprender el error y avanzar en el aprendizaje. Además, se espera que puedan crear por variación de este un problema para desarrollar el sentido algebraico.

En este caso, un problema se considera *significativo* si no presenta ambigüedades, su redacción es clara y se puede responder al requerimiento con la información dada. En otro caso, se considera *no significativo*. Un problema significativo se considera *pertinente* si es una variación del problema dado que facilita la comprensión del problema original ayudando a los estudiantes a superar sus dificultades (para el punto (a)), o bien, es una variación del problema de partida que motiva prácticas de carácter algebraico en su solución (para el punto (c)). En otro caso, se considera *no pertinente*.

8.4.2. Tarea individual de clase

> Crea a partir de la siguiente situación un problema en el contexto de la probabilidad que involucre el razonamiento proporcional en su solución.
>
> > Situación
> >
> > *En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras.*
>
> 
>
> A este problema lo llamaremos problema Pre. Resuélvelo. Identifica los objetos y procesos matemáticos y asigna de manera justificada el nivel de RAE implicado. A partir del problema Pre que has elaborado, propón justificadamente y resuelve nuevos problemas (Pos1, Pos2, …) cuya solución implica niveles de razonamiento algebraico superiores.

La tarea se propuso como parte de las actividades voluntarias de clase en dicho contexto (tarea usada en los trabajos de Burgos et al., 2024c; Burgos, Chaverri y Tizón-Escamilla, 2022; Burgos et al., 2023a). Participaron 17 FM que resolvieron la tarea durante una sesión de clase (una hora). En la primera parte de la tarea, se persigue la creación de un problema a partir de una situación para responder a un requerimiento didáctico-matemático, a saber, involucrar el razonamiento proporcional. Se establecieron las siguientes categorías de pertinencia: un problema se considera *pertinente* si partiendo de la situación propuesta, se añaden una o varias preguntas significativas (no tiene ambigüedad en su formulación y se puede responder a la pregunta con la información dada) de manera que en su solución aparece involucrado el razonamiento proporcional. Cuando el problema no cumple alguna de estas condiciones se considera *no pertinente*. Un problema no pertinente puede ser: significativo, parcialmente significativo o no significativo. Se considera *significativo* si todas las preguntas están bien formuladas, pero altera la situación propuesta (modificando por ejemplo el número de bolas en cada caja de la situación inicial) o no involucra el razonamiento proporcional. Es *parcialmente significativo*, si las preguntas están bien formuladas, pero altera la situación propuesta y no involucra el razonamiento proporcional o presenta varias preguntas, algunas de las cuales no son significativas. Es *no significativo* cuando las preguntas no están correctamente formuladas.

El análisis de los niveles de RAE en las soluciones propuestas por los FM se realiza identificando las prácticas, objetos y procesos y aplicando los criterios establecidos en el modelo (ver sección 2.1.4). Este análisis previo permite determinar el grado de corrección en la asignación de nivel de RAE por parte de los FM.

A continuación, los FM debían crear problemas por variación de su problema Pre, cambiando contexto, entorno, información o requerimiento, según el modelo de Malaspina et al. (2019), para responder a una finalidad didáctico-matemática: modificar el nivel de RAE implicado. Un problema Pos se considera *pertinente* si es significativo, variación del problema Pre y requiere un nivel de RAE superior en su solución. Cuando el problema no cumple alguna de estas condiciones se considera *no pertinente*. Un problema *no pertinente* puede ser: *significativo* si está correctamente formulado, pero no es variación del problema Pre o la solución propuesta no implica aumento del nivel de RAE, *parcialmente significativo*, si no es variación del problema Pre y no cambia el nivel de RAE o bien *no significativo* si las preguntas no están bien formuladas.

8.4.3. *Tarea de evaluación final*

Considera el siguiente problema:

> *Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?*

a) ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?
b) ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

c) Crea por variación de dicho problema, otras tareas relacionadas cuya resolución implique cambios en el nivel de razonamiento algebraico que se ponen en juego. Resuélvelas y justifica el nivel asignado.

d) ¿Para qué curso educativo serían adecuadas las tareas propuestas en la pregunta c) y qué conocimientos previos requerirían los estudiantes para resolverlas?

Con esta tarea se persigue evaluar la flexibilidad de los FM para resolver problemas empleando estrategias de diferentes grados de algebrización así como para modificar problemas de manera que motiven cambios en el carácter algebraico de las prácticas que motivan. Se pretende evaluar también su conocimiento del currículo y de los conocimientos de los estudiantes y cómo lo aplican en la creación de estos problemas.

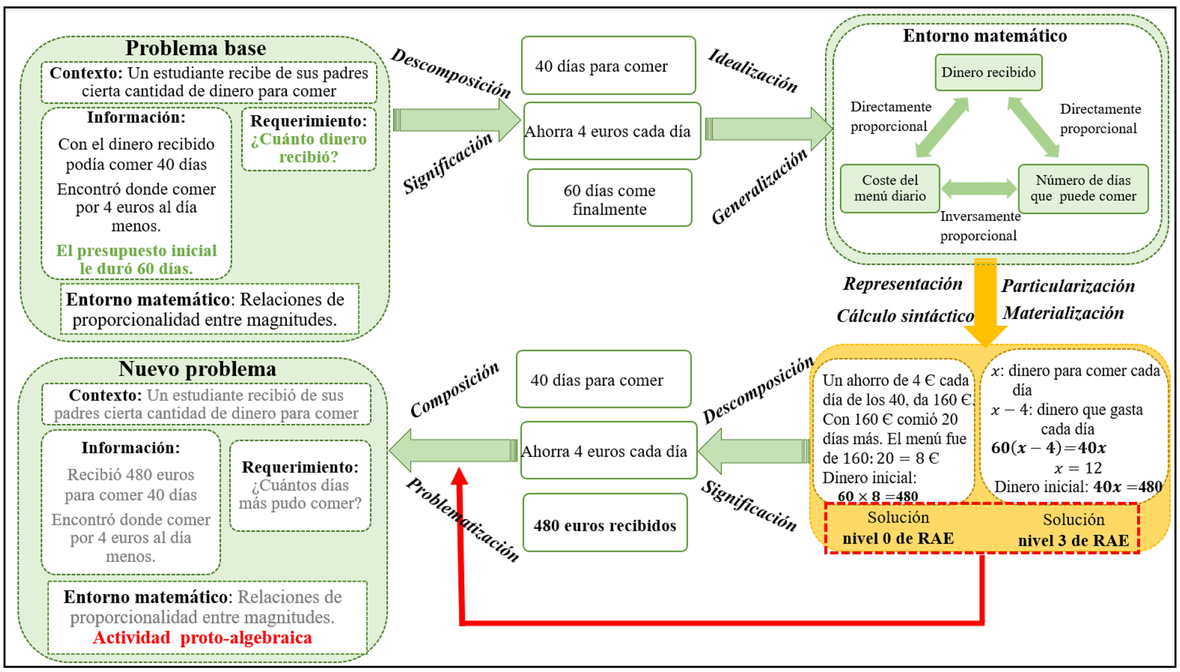


Figura 8.1. *Esquema del proceso de creación de problema por variación para responder a la finalidad didáctico-matemática.* Elaboración propia.

En la Figura 8.1 se describen los elementos que caracterizan la situación-problema base y se ejemplifica el proceso de variación de este según el modelo descrito en el Capítulo 3. En la situación problema aparecen involucradas tres magnitudes: el dinero recibido, el precio del menú diario y el número de días que el estudiante puede comer con el dinero recibido. Se conoce el número de días que contemplaba el presupuesto inicial, la diferencia entre el coste previsto inicialmente para el menú y el precio del menú más económico encontrado (el ahorro) y el número de días que pudo comer con este último menú. Se desconoce el dinero recibido por el estudiante. Cada dos de estas magnitudes se relaciona de manera directa o inversa, cuando la otra permanece constante. Así, cuando el dinero recibido es constante, el coste del menú diario y el número de días que puede comer el estudiante son inversamente proporcionales, mientras que, si el coste del menú es constante, el número de días que puede comer es directamente proporcional al dinero recibido para tal fin. Los FM deben interpretar y descomponer el texto del problema, dotando de significado a la información y requerimiento. Esto les permitirá situar en el entorno matemático (idealización, generalización) las magnitudes implicadas y cómo se relacionan (estructura matemática). La resolución del problema base (que implica procesos de particularización, representación y cálculo sintáctico, entre otros) le facilita nueva información. El análisis de las prácticas matemáticas de la solución propuesta (relaciones entre las magnitudes, nivel de RAE implicado), permite al FM decidir cómo modificar el problema (qué datos mantener, cuál será ahora el requerimiento y el entorno) con la intención de que el nuevo problema (composición, problematización) responda a la finalidad didáctico-matemática establecida. Dado que el problema de partida debía resolverse mediante procedimientos aritméticos (nivel 0 de RAE) y algebraicos (nivel 3 de RAE) se esperaba que los FM crearan problemas por variación del base, que motivasen una actividad de carácter proto-algebraico (niveles 1 y 2 de RAE).

Los investigadores, realizaron el análisis descriptivo de parte de los informes de los participantes, discutiendo con los demás las posibles discrepancias y consensua las categorías resultantes del análisis de manera colaborativa. Después de filtrar categorías, volvieron a analizar todas las respuestas de los FM. Para cada problema creado por los FM analizamos:

1) Si es significativo. Un problema se considera *significativo* si el enunciado propuesto establece realmente un problema matemático, y se identifican claramente los elementos que lo caracterizan. En particular, la solución no está implícita en el enunciado, es posible responder al requerimiento con la información dada, su redacción es clara y no presenta ambigüedad. Un problema se considera *parcialmente significativo*, si está redactado de forma clara, la solución no está implícita en el enunciado, pero incluye más información de la necesaria para resolver el problema, pudiendo dificultar la comprensión por parte de los estudiantes. Por ejemplo, se considera parcialmente significativo el problema creado por FM24: “Un estudiante

recibió de sus padres 600€ para la comida y 80€ para desplazarse hasta el comedor universitario durante 40 días. ¿Cuánto puede gastar en comer al día?" (la información sobre el dinero recibido para transporte es innecesaria para responder a la pregunta). En otro caso, se considera *no significativo* (su redacción es confusa, presenta ambigüedades, la solución está implícita o faltan datos que permita resolverlo).

2) Si es variación de la situación de partida y de qué tipo. Un problema se considera variación del problema base si comparte con este alguno de sus elementos: contexto, información, requerimiento y entorno. Las variaciones se clasifican atendiendo a cuáles de estos elementos modifican y qué tipo de problemas generan.
3) Si su solución implica cambios en los niveles de RAE que se ponen en juego y cómo lo hace.

8.5. Resultados

En esta sección presentamos los resultados del análisis de las respuestas de los FM a las diferentes consignas planteadas.

8.5.1. Resultados de la tarea grupal

Interpretación de las respuestas e identificación de dificultades

Los doce grupos de trabajo señalaron que ninguna de las respuestas de los alumnos de primaria fue correcta. Diez grupos indicaron dificultades específicas de cada uno de los estudiantes, mientras que dos de los grupos describieron dificultades de forma global.

Con respecto a la solución propuesta por Luis, cuatro grupos señalaron dificultades relacionadas con el desconocimiento o falta de comprensión de la conexión entre probabilidad y proporcionalidad ("no establece una correcta relación entre la probabilidad de sacar una bola que se le ofrece (1/4) que seguramente aplicando la proporcionalidad le repercutirá a alcanzar el dato deseado", G03). Sin embargo, en ningún caso indicaron cuál es la relación de proporcionalidad establecida en el problema ni hicieron patente de forma clara cómo se relacionan la probabilidad de obtener una bola blanca con la razón bolas blancas a negras. Tres grupos consideraron que la dificultad de Luis se debía a su falta de capacidad para establecer o aplicar la proporcionalidad, sin indicar su conexión con la probabilidad ni establecer cuál es la relación de proporcionalidad a la que se refieren ("la dificultad que hemos encontrado en Luis es que no sabe establecer la relación de proporcionalidad", G01). Otro de los grupos señaló como principal dificultad un conocimiento incompleto de contenidos relacionados con la probabilidad ("no tiene adquirido los contenidos referentes a la probabilidad", G06), sin describir qué aspectos de la probabilidad eran objeto de tales carencias. Finalmente, dos grupos indicaron el error cometido por Luis en su resolución sin atender a sus posibles causas ("Luis afirma que le faltan datos para resolver el problema, ya que no sabe cuántas bolas en total hay en la caja A, pero ese dato no es imprescindible a la hora de resolver el problema", G06).

Tras analizar la solución de María, cuatro grupos de FM señalaron como principal limitación la aplicación de una estrategia aditiva en lugar de establecer una relación de proporcionalidad ("María ha establecido una relación aditiva en lugar de una relación de proporcionalidad, pues considera que como hay dos negras más, quitándole dos a las 20 negras totales obtendrá 18 blancas", G07). Tres grupos indicaron como causa del error no hacer uso de la relación de proporcionalidad, describiendo el proceso de resolución, pero sin hacer referencia explícita a una estrategia de tipo aditiva ("no está aplicando la proporcionalidad, sino que ha calculado la diferencia entre las bolas blancas y las negras", G05). Aunque estos siete grupos reconocen carencias en el razonamiento proporcional en la respuesta de María, no lo relacionan con el probabilístico. Por último, un grupo describe el error cometido pero sin indicar ninguna posible causa ("creemos que ha restado 20-2, y por lo tanto, no obtiene el resultado correcto", G01) mientras que en dos casos los FM plantean dificultades fundamentadas en conceptos matemáticos erróneos ("María no aplica la proporcionalidad aditiva", G08) o en resoluciones incorrectas del problema original ("falla al no comprender que aunque haya el mismo número de bolas blancas al haber más bolas negras la proporcionalidad cambia", G11).

En el caso de la resolución de Pedro, todos los grupos describieron los errores cometidos en el proceso de resolución, pero no indicaron explícitamente en ningún caso las posibles dificultades asociadas a los razonamientos proporcional o probabilístico exhibidas por el estudiante. Tres grupos señalaron que Pedro determina erróneamente el valor de la probabilidad de extraer una bola blanca de la caja B al sumar la probabilidad de obtener una bola blanca de la caja A y la probabilidad de sacar una bola de la caja B ("lo que ha hecho es sumar la probabilidad de que salga una bola blanca de la caja A, con sacar una bola de cualquier color de la caja B", G05). Tres grupos de FM señalaron que el error de Pedro se encontraba en la identificación de los datos y en los cálculos realizados ("se equivoca al poner los datos y operar con ellos", G08). Finalmente, tres grupos presentaron una descripción de los errores no concluyente o carente de sentido ("Lo que le ha ocurrido es que le ha faltado poner las fracciones que suma, en este caso, ¼ sería lo mismo que 5/20", G07).

De los dos grupos que señalaron dificultades sin diferenciar en qué alumno las reconocían, uno precisó la no identificación de la relación de proporcionalidad, el uso indebido de estrategias aditivas, el desconocimiento relacionado con la probabilidad o la falta de comprensión del enunciado. El otro grupo no hizo referencia a elementos matemáticos propios de la proporcionalidad o la probabilidad, indicando de forma general que las limitaciones de todos los estudiantes se relacionaban con no ser capaces de relacionar ambas cajas o con la interpretación del enunciado.

Creación de problemas para facilitar la compresión y solución del problema original

Los FM propusieron un total de 13 problemas. En la Tabla 8.2 se muestran las categorías encontradas en los problemas creados y su frecuencia.

Tabla 8.2
Categorías de problemas creados y su frecuencia (n=13).

Categoría	Frecuencia
No significativo	4
Significativo y no pertinente	6
Pertinente	3

En dos de los problemas pertinentes se modificaron tanto la información como el requerimiento del problema. En el primero de ellos, se proporciona el número de bolas blancas que hay en la caja B, en lugar del total de bolas, y se pide determinar el número de bolas negras que hay en B (Figura 8.2).

Los FM justificaron cómo su problema atendía a las dificultades de Luis y María, a partir de la relación de proporcionalidad entre bolas blancas de ambas cajas (Figura 8.2). Sin embargo, no hicieron referencia al papel que juega la probabilidad y la razón de bolas blancas a bolas negras. La justificación asociada a Pedro resulta no concluyente.

Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 6 bolas blancas. Teniendo en cuenta que es igual de probable sacar una bola blanca en la caja A y B ¿Cuántas bolas negras hay en la caja B?

Justificación

Con esta variación permite superar las dificultades al alumnado. Por un lado Luis y María (que tienen dificultad en la asimilación y en la aplicación de la probabilidad en relación a la proporcionalidad de los casos favorables y los casos posibles) ahora, al decir cuántas bolas blancas hay en la caja B, se puede observar la proporcionalidad 1 bola blanca caja A — 6 bolas blancas caja B y por tanto se les facilita el entendimiento de dicha relación. Pedro no tiene dificultad en la asimilación de proporcionalidad pero se ha equivocado en el cálculo, al sumar ambas probabilidades, pero al decir ahora cuántas bolas blancas hay en la caja B no se encontrará con esta dificultad.

Figura 8.2. *Problema y justificación propuestos por G09. Modifica información y requerimiento.*

El segundo de los problemas añade como información una tabla para recoger distintos valores del número de bolas blancas, negras y totales, así como de la relación de proporcionalidad, e introduce como requerimiento completar dicha tabla (Figura 8.3). Los FM argumentaron que completar esta tabla orientaría al alumnado en la realización de la actividad y les ayudaría a tomar consciencia de que la razón de bolas blancas a bolas negras debe mantenerse constante para que la probabilidad de extracción en ambas cajas sea la misma.

Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si hay la misma probabilidad de sacar una bola blanca que en la caja A? Completa poco a poco la tabla, comprendiendo lo que haces y explica tu respuesta.

CAJA A

Bolas blancas	1	2	3	4	5
Bolas negras					
Total bolas (Blancas+Negras)					
Relación de proporcionalidad					

Justificación

Para poder facilitar la comprensión del problema y acabar con las dificultades que tienen estos niños, que en el caso de Luis y María es que no son capaces de sacar la razón de probabilidad y la de Pedro, que, si calcula la razón de probabilidad, pero luego no sigue avanzando de manera correcta en la resolución del problema, incluiremos en el ejercicio una tabla que irá guiando a los alumnos hacia la solución y comprensión del problema. Como podemos observar de esta manera los alumnos comprenderían el proceso y llegarían a la solución sin tener las dificultades que tenían antes. Además de esta manera se darían cuenta de que la relación de proporcionalidad no depende del número total de bolas que haya, porque en este caso siempre es la misma, ya que se respeta siempre que por cada bola blanca hay tres negras.

Figura 8.3. *Problema y justificación propuestos por G04. Modifica la información y el requerimiento.*

El tercer problema pertinente creado por variación del original modifica únicamente la información del problema base. Los FM mantuvieron el mismo enunciado, pero añadieron una imagen para facilitar el reconocimiento de la relación de proporcionalidad entre bolas blancas y negras (o blancas y totales) en la caja A y cómo esta debe mantenerse en la caja B para que la probabilidad de extraer bola blanca sea la misma (Figura 8.4). Sin embargo, los FM no justificaron su decisión.

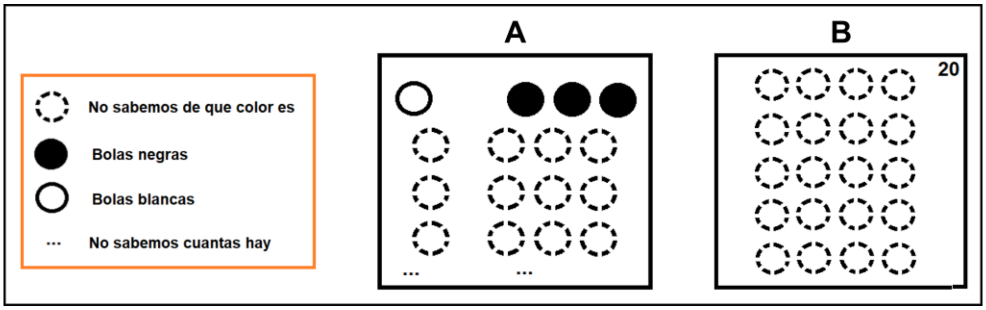


Figura 8.4. *Imagen con la que el grupo G07 completa el problema original.*

En tres de los problemas no pertinentes (no respondían a la finalidad didáctico-matemática) los FM modificaron el entorno matemático del problema original (razonamiento proporcional en la comparación de probabilidades), evitando la dificultad encontrada. Por ejemplo, G05 (Figura 8.5) propone una situación de reparto equitativo de un conjunto de bolas en cajas. Los FM indicaron que el cambio en el entorno facilita la resolución del problema, sin describir cómo puede ayudar a comprender el problema original ni a superar las dificultades observadas previamente.

Disponemos de 4 cajas, la caja A, la B, la C y la D. En cada una de ellas queremos meter el mismo número de bolas (entre blancas y negras). Si tenemos 100 bolas en total, ¿cuántas bolas habría en cada caja? ¿cuántas bolas sobran?

Figura 8.5. *Problema propuesto por G05. Se modifica el entorno matemático (problema de reparto equitativo).*

En los otros dos casos se proporciona el espacio muestral de un experimento aleatorio y se pide determinar la probabilidad de que uno o varios sucesos tengan lugar. Por ejemplo, G02 considera que su problema (Figura 8.6) atiende a las dificultades de los estudiantes al proporcionar el número total de elementos del espacio muestral y emplear en su resolución números naturales en lugar de racionales.

Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen bolas blancas y bolas negras. En la caja A encontramos 7 bolas blancas y 2 negras. Y en la otra caja hay 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Si escogemos al azar una de las cajas y escogemos una bola ¿Que probabilidad hay de que la bola sea de color negra?

Figura 8.6. *Problema propuesto por G02. Su resolución no involucra el razonamiento proporcional.*

El grupo G12 creó dos problemas en los que modificaban la información, proporcionando el número total de bolas de la caja A y cambiando los valores iniciales, o bien modificando la redacción del enunciado, indicándose que "en la caja A por cada bola blanca hay el triple de bolas negras". Los FM argumentan que proporcionar el número de bolas en A e indicar la relación multiplicativa entre el número de bolas blancas y negras mediante la expresión "el triple" puede fomentar la superación de las limitaciones de Luis y María, respectivamente, si bien ninguna de estas medidas contribuye de forma significativa a la superación de dificultades por parte de los estudiantes.

Finalmente, G08 modifica el problema inicial para transformarlo en una situación de reparto proporcional en un contexto no probabilístico, no atendiendo a las dificultades de los estudiantes. En este caso, se proporciona el número total de bolas de una caja y su razón de bolas blancas a negras, indicándose que esta es la misma que en una segunda caja donde también se conoce el total de bolas. La justificación que dan los FM en este caso no permite identificar cómo tienen en cuenta las dificultades señaladas.

Creación de problemas para promover el razonamiento algebraico

En la Tabla 8.3 se muestran las categorías encontradas en los problemas creados por los FM y su frecuencia.

Tabla 8.3
Categorías y frecuencias de problemas creados para desarrollar el RAE (n=12).

Categoría	Frecuencia
No significativo	3
Significativo y no pertinente	4
Pertinente	5

De acuerdo con la tabla anterior, cinco grupos de FM crearon problemas significativos que motivan prácticas de carácter algebraico en su solución. Sin embargo, ninguno asigna de forma correcta y justificada el nivel de razonamiento implicado en su problema. Uno propone distintas soluciones al problema creado, asignando un nivel RAE diferente a cada caso según la estrategia utilizada, sin precisar una justificación para dicha asignación. Un grupo no identifica el nivel de RAE y los otros tres lo hacen de forma incorrecta.

Por ejemplo, el problema creado por el G09 incluido en la Figura 8.7 motiva una práctica matemática de nivel 3 de RAE ya que es necesario "operar con la incógnita" en la sustitución para llegar a la ecuación $6y = 24$. Sin embargo, los FM no identifican la necesidad de operar con la incógnita y consideran que se resuelve con una ecuación de tipo aritmético.

Variación: Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola negra hay cinco bolas blancas. En la caja B hay 24 bolas (entre negras y blancas). Si es igual de probable sacar una bola negra en la caja A y B, ¿cuántas bolas blancas hay en la caja B? ¿Y bolas negras?

Los elementos que se han variado son la información y el requerimiento (se ha añadido una cuestión).

Para resolver dicho problema se propone un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

$$x — nº\ bolas\ blancas$$

$$y — nº\ bolas\ negras$$

$$x = 5y$$

$$x + y = 24$$

Si despejamos la x, nos quedaría que $6y = 24$, y que por tanto y sería igual a 24/6, teniendo como resultado 4.

Una vez conocemos el valor de y, tomamos la primera ecuación y al sustituir y por 4, nos quedaría que $x = 5 \times 4 = 20$.

Por tanto la solución sería que habría 20 bolas blancas y 4 bolas negras.

En cuanto al nivel empleado de razonamiento algebraico en la solución del problema, podemos observar que tenemos como objetos el significado relacional de la igualdad y símbolos como las incógnitas. Además, en transformaciones nos presenta ecuaciones de forma Ax +B= a una cantidad.

En definitiva, tendríamos un nivel de RAE 2.

Figura 8.7. *Problema pertinente creado por G09. Asignación incorrecta del nivel de RAE.*

Cuatro de los problemas fueron significativos, pero no pertinentes (Tabla 8.3). Esto se debe a que ninguno es variación del problema dado. Por ejemplo, en la Figura 8.8 se muestra un problema que, si bien para resolverlo implica el razonamiento algebraico, no mantiene ninguno de los elementos del problema dado (información, contexto, entorno, requerimiento).

Una familia quiere ir de viaje a la playa. Por cada media hora, recorre 60 kilómetros, ¿cuántos minutos tardará en llegar a la playa si son 189 kilómetros?

30 minutos------ 60 kms

x minutos-------189 kms

$$\frac{60}{30} = \frac{189}{x}$$

$$60x = 189 \times 30$$

$$x = (189 \times 30)/60$$

$x = 94{,}5$ minutos

Nivel de razonamiento algebraico: Nivel 2 de RAE

Figura 8.8. *Problema no pertinente, no es variación (G10). Nivel RAE correcto.*

En el caso de los cinco problemas pertinentes, tres de ellos mantienen el contexto probabilístico, sin embargo, en ninguno los FM identifican correctamente el nivel RAE (por ejemplo, Figura 8.7). De forma similar, los cuatro problemas significativos no pertinentes omitieron el uso explícito de probabilidades, pero en este caso, la mitad de los grupos de FM lograron identificar correctamente el nivel RAE (ver Figura 8.8). Esto muestra las dificultades de los FM para crear problemas pertinentes dentro del entorno de la probabilidad (lo que se observa también en los Capítulos 6 y 7) y que alcanzar esta pertinencia no asegura reconocer correctamente el nivel RAE asociado.

> **Problema:** *María y Daniel tienen una caja con pelotas y hacen una repartición en la que la razón sería de 4:6. María tiene 30 pelotas, ¿cuántas pelotas va a tener Daniel?, ¿cuántas pelotas se han repartido?, ¿quién tendrá más pelotas? ¿cuántas más?*
>
> **Solución: (nivel 2 de RAE)**
> Según nos dice el enunciado, cuando María recibe 4 pelotas, Juan recibe 6.
> Si llamamos x al número de pelotas que va a recibir Daniel, partiendo de que María ha recibido 30:
> 4→6
> 30→x
> de donde x = (30 x 6): 4 = 45. Es decir, Daniel va a recibir 45 pelotas.
> El número total de pelotas que habrá será la suma de 30 + 45 = 95 pelotas.
> Daniel tendrá más pelotas, concretamente 15 pelotas más que María.

Figura 8.9. *Problema pertinente creado por FM02. Nivel RAE incorrecto.*

Por otro lado, aunque los cinco problemas pertinentes (Tabla 8.3) sugieren el uso de razones, abandonan el contexto probabilístico. Plantean problemas de valor faltante en un contexto aritmético, que resuelven a través de la conocida regla de tres. Por ejemplo, en la Figura 8.9, FM02 no llega a establecer explícitamente la ecuación proporcional, $\frac{4}{30} = \frac{6}{x}$, en base a la razón $4:6$, ni opera con la incógnita, sino que realiza una multiplicación en cruz rutinaria para obtener $x = \frac{30\times 6}{4} = 5$. Esto caracteriza la práctica como propia del nivel RAE 1 y no nivel 2 como el FM señala.

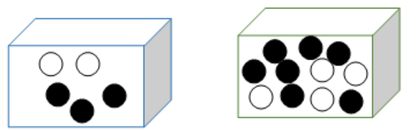
8.5.2. Resultados de la tarea de clase

En la primera parte de la tarea, los maestros en formación deben crear un problema en el contexto de urnas, teniendo en cuenta que se debe emplear el razonamiento proporcional. El resultado de este proceso es el problema Pre. Al resolverlo deben reconocer objetos y procesos para asignar el grado de razonamiento algebraico según el modelo de Godino, Aké et al. (2014). Se proporciona, por tanto, el contexto (urnas), la información (número de bolas en cada urna, mediante lenguaje gráfico/pictórico) y el entorno (razonamiento proporcional), dejando abierto el requerimiento. Se trata de una tarea de elaboración semiestructurada con finalidad didáctico-matemática (epistémica).

Análisis de procesos en una solución prototípica: Problema Pre

En la Figura 8.10 se muestra el problema creado por FM13 a partir de la situación planteada.

Formulación del problema Pre
En la caja A se han metido dos bolas blancas y 3 negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras. Si tuvieses que escoger una bola blanca a ciegas, ¿qué caja elegirías para sacar la bola?



Solución del problema Pre
En la caja A encontramos 2 bolas blancas a 3 bolas negras que hay en la caja y en la caja B encontramos 4 bolas blancas (lo que sería el doble que en la anterior) y 7 bolas negras (que es más del doble de la anterior, que sería 6) por lo que hay mayor probabilidad de obtener la bola blanca en la caja A ya que 2/3 es un número mayor que 4/7.

Figura 8.10. *Problema Pre creado por FM13 en el entorno de comparación de probabilidades en urnas.*

En el proceso de creación del problema (Figura 8.11), FM13 debe dotar de significado la imagen en el contexto probabilístico (urnas), considerando dos cajas (A y B) con números de bolas blancas y negras distintas. Dado que debe involucrar el razonamiento proporcional, se sitúa en la comparación de probabilidades (ideal, abstracta), por medio de la correspondencia con la comparación de razones entre número de bolas, acotando el entorno matemático. El contexto de azar se materializa claramente en el problema Pre, precisando que la extracción se produce a ciegas.

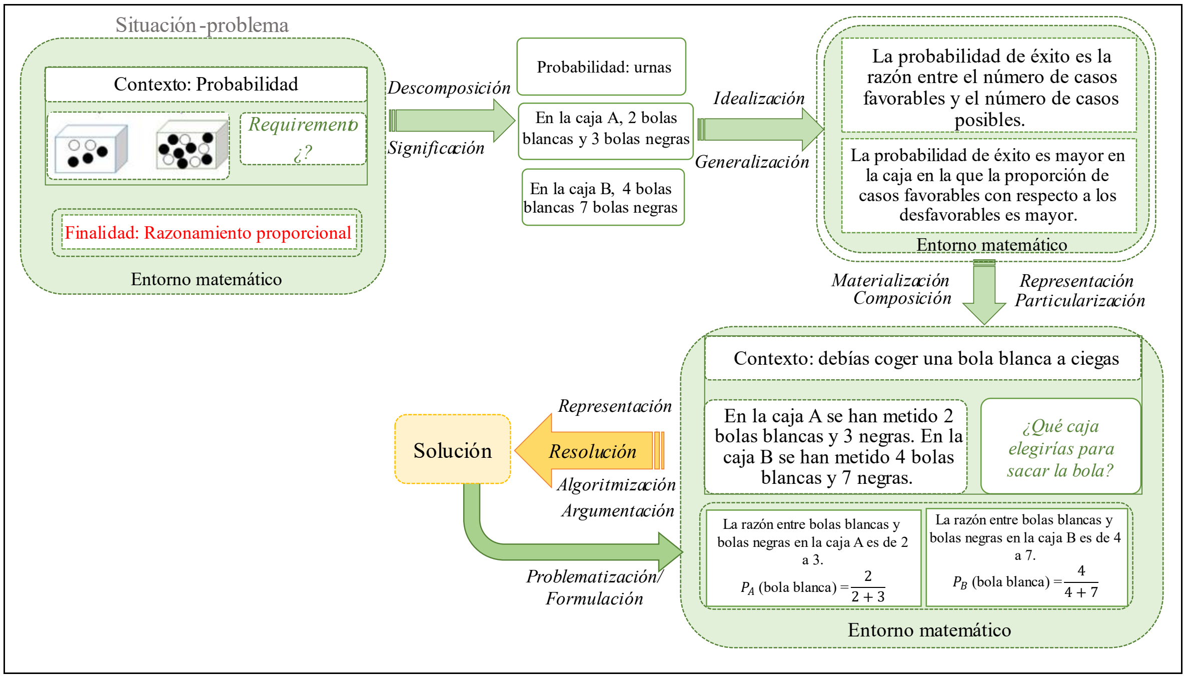


Figura 8.11. *Proceso de creación de problemas seguido por FM13. Problema Pre*. Elaboración propia.

La finalidad didáctica que persigue la segunda parte de la tarea, implica conocimientos didáctico-matemáticos específicos sobre el razonamiento algebraico. El maestro en formación debe hacer un análisis microscópico complejo de la estructura matemática implicada en la solución del problema Pre, para decidir qué variación de este implicaría un nivel mayor de razonamiento algebraico, es decir, objetos con un mayor grado de intensión y generalización y nuevos procesos algebraicos (Godino, Aké et al., 2014). Así, FM13 aprecia que no hay actividad algebraica en la solución al problema Pre, "debido a que se utilizan número particulares y no aparecen reflejadas incógnitas". Además, identifica el proceso de "particularización de la relación de proporcionalidad" al caso de la composición de las cajas. Esta reflexión le lleva a proponer el problema Pos que se incluye en la Figura 8.12.

Formulación del problema Pos
En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras. ¿Se podría crear una caja C que tenga la misma probabilidad de obtener una bola blanca que la caja A? ¿Y que la caja B? la caja C no puede tener el mismo número de bolas que las anteriores.
Solución al problema Pos
Para la resolución de este problema se debe de conocer el concepto de fracciones equivalentes por lo que el alumnado puede establecer la relación de que 2/3 = 2n/3n pudiendo n ser cualquier número pero que sea multiplicado tanto en el numerador como en el denominador. Algo que se puede aplicar directamente a la caja B con 4/7 = 4n/7n por lo que sí, la caja C puede tener la misma probabilidad de obtener una bola blanca siendo el número total de bolas multiplicado también por n.

Figura 8.12. *Problema Pos creado por FM13 para incrementar el razonamiento algebraico requerido.*

En este caso, FM13 mantiene el contexto, la información y el entorno matemático del problema (comparación de probabilidades), pero modifica el requerimiento: hace uso de una tercera caja cuya composición debe ser determinada, lo que moviliza en su resolución objetos y procesos de nivel superior (relaciones y propiedades de los números racionales, parámetros; generalización, simbolización).

El proceso de idealización que lleva a cabo FM13 para crear el problema Pos, se observa cuando este justifica qué hace que el nivel de razonamiento algebraico sea mayor en este caso. Considera la implicación de “propiedades de las fracciones equivalentes [para] poder conocer si se trata de la misma proporción a pesar de tener números distintos, encontrando así una generalización al saber que $a/b = (na)/(nb)$”, el uso del “significado relacional de la igualdad como equivalencia, y emplear símbolos literales como incógnitas, pero sin operar con ellos.”

Análisis de procesos en una solución prototípica: Problema Pos

La Figura 8.13 muestra el problema Pre de FM32 y su solución. En este caso, considera que involucrar el razonamiento proporcional implica comparar probabilidades, pero éstas deben expresarse como fracciones o porcentajes. En su solución se comparan estos porcentajes (aunque el que representa la probabilidad de obtener una bola blanca en B no es una aproximación muy adecuada). En su análisis, identifica adecuadamente los objetos, tanto los conceptos (proporcionalidad, probabilidad, fracción, porcentaje), como los procedimientos para calcular fracciones y porcentajes, y las proposiciones (enunciados sobre la probabilidad de éxito en cada casilla).

Formulación del problema Pre
En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 negras. La caja B contiene 4 bolas blancas y 7 bolas negras. a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca de la caja A? Exprésala como fracción y como porcentaje. b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca de la caja B? c) ¿En qué caja es más probable sacar una bola blanca?
Solución del problema Pre
2 bolas blancas 3 bolas negras →Total = 2 + 3 = 5 bolas Probabilidad de sacar una bola blanca = 2/5 = 40% 4 bolas blancas 7 bolas negras →Total = 4 + 7 = 11 bolas Probabilidad de sacar una bola blanca = 4/11 = 36%" 40% > 36% Es más probable que salga una bola blanca de la casilla A

Figura 8.13. *Problema Pre creado por FM32 en el entorno de comparación de probabilidades en urnas.* Fuente: Burgos et al. (2024c).

Respecto a los procesos, reconoce la "interpretación de las razones 2:3 y 4:7 como relaciones de proporcionalidad". Aprecia adecuadamente que "el razonamiento algebraico implicado es de nivel 1 ya que se aplican relaciones y propiedades genéricas de las operaciones con objetos intensivos de primer grado [referido a los números racionales]".

Formulación del problema Pos
En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras. Se lanza un dado y si es un número par, se sacan dos bolas de la caja A, una tras otra, sin sustituir ninguna de ellas. En cambio, si es impar, se sacan dos bolas de la caja B, también una detrás de otra, sin sustituir ninguna de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de sacar exactamente dos bolas blancas?
Solución al problema Pos
La probabilidad de sacar dos bolas blancas de la caja A es: P(WW/CajaA) = 2/5 × 1/4 La probabilidad de sacar dos bolas blancas de la caja B es: P(WW/CajaB) = 4/11×3/10 Al lanzar un dado, la probabilidad de obtener números pares e impares es la misma: P(par) = P(impar) = 1/2 Por lo tanto, utilizando la expresión de la probabilidad total, la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas es P(WW) = P(par) × P(WW/CajaA) + P(impar) × P(WW/CajaB) = 1/2 × 2/5 × 1/4 + 1/2 × 4/11 × 3/10 = 920/8800 = 23/220

Figura 8.14. *Problema Pos creado por FM32 para incrementar el razonamiento algebraico requerido.* Fuente: Burgos et al. (2024c).

La Figura 8.14 muestra el problema Pos propuesto por FM32. Este es representativo del segundo tipo más frecuente de problemas Pos generados por los FM, con el objetivo de involucrar un razonamiento algebraico mayor que el requerido en el problema Pre. Implica la extracción sin sustitución (aunque no se indique explícitamente), la independencia de sucesos, la probabilidad condicional y el teorema de la probabilidad total.

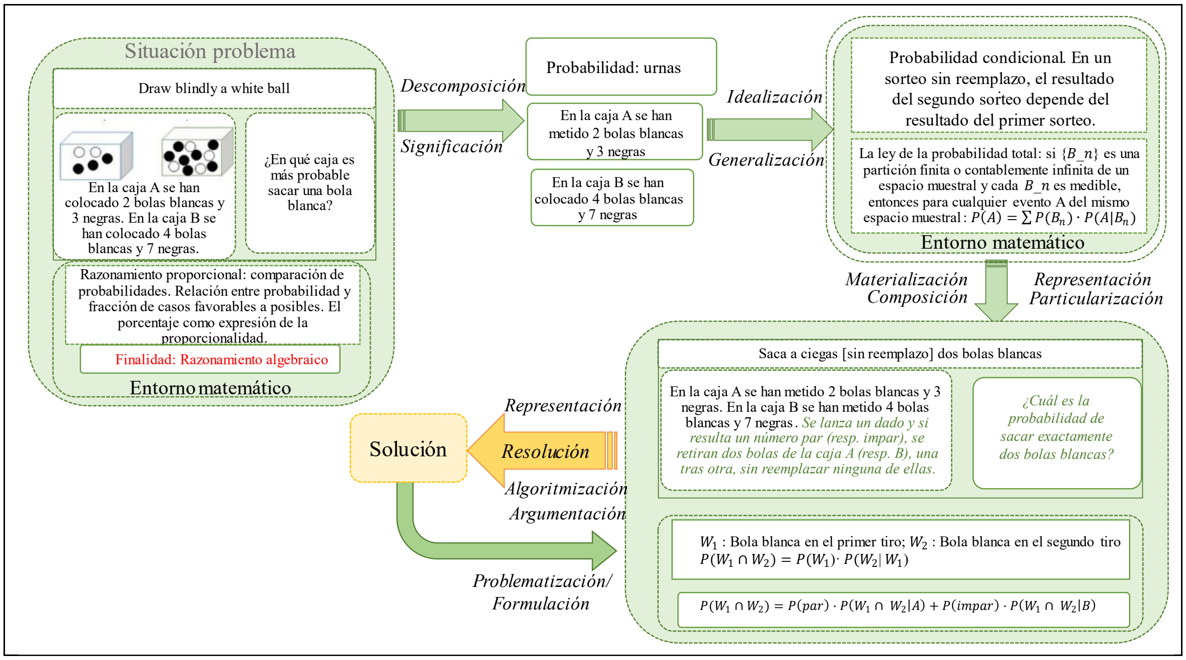


Figura 8.15. *Proceso de creación de problema seguido por FM32. Problema Pos*. Fuente: Burgos et al. (2024c).

Aunque FM10 considera (pero no justifica) que el nivel de algebrización sigue siendo protoalgebraico (nivel 1), la utilización de la probabilidad como objeto matemático con estructura y propiedades propias (independencia, teorema de la probabilidad total) va más allá de la aplicación de cálculos a través de la Regla de Laplace. Por lo tanto, consideramos que el nivel de RAE es superior (nivel 2). Los diferentes procesos seguidos por FM32 y los objetos emergentes en la creación del problema Pos se describen en la Figura 8.15.

Resultados sobre la formulación y análisis del problema Pre

Más de la mitad de los FM (47,06%) formularon un problema Pre pertinente que requiere (explícita o implícitamente) la comparación de las probabilidades (ver Figura 8.16).

En la caja A se han metido 2 bolas blancas y 3 bolas negras. En la caja B se han metido 4 bolas blancas y 7 bolas negras. Si consigues sacar una bola blanca obtienes un punto extra en matemáticas. ¿Cuál de las dos cajas escogerías para intentar sacar una bola blanca? Razona tu respuesta.

Figura 8.16. *Problema Pre pertinente (FM12). Escoger la caja que garantice mayor posibilidad de éxito.*

También se aprecia un porcentaje elevado (41,18%) de FM cuyo problema Pre requiere explícitamente el cálculo de la probabilidad de extraer una bola de un color determinado de una o de las dos cajas, sin necesidad de ser comparadas, por lo que se consideran significativos, pero no pertinentes, pues no involucran el razonamiento proporcional (Figura 8.17).

Sobre una mesa tenemos dos cajas con bolas de colores. Una de ellas, la caja A contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras, y la caja B contiene 4 bolas blancas y 7 bolas negras. En esta situación, si sacamos una bola de la caja B, ¿cuál es la probabilidad de que la bola sea negra?

Figura 8.17. *Problema Pre (FM52). Significativo no pertinente. Calculo sin comparación de probabilidades*.

En varios de los problemas enmarcados en esta categoría se plantea más de una cuestión referente al cálculo de la probabilidad (Figura 8.19), cambiando en cada cuestión la caja seleccionada y/o el color de la bola. No se ha encontrado ningún problema no significativo entre los propuestos.

Una vez propuesto y resuelto el problema, los FM debían indicar los objetos y procesos y finalmente asignar el nivel de RAE implicado en la solución. En un 76,47% de los casos, los FM resolvieron correctamente los problemas. En aquellos problemas que involucraban el razonamiento proporcional (52,94%), este viene identificado por medio de la relación multiplicativa entre casos favorables y desfavorables en ambas cajas, la comparación entre fracciones o el cálculo de porcentajes como razón entre casos favorables y casos totales. Sin embargo, el número de FM que identifican objetos propios del razonamiento proporcional (comparación de fracciones/razones, porcentajes o relación de proporcionalidad directa) en su posterior análisis es considerablemente menor (23,53%).

En relación con la asignación del nivel de RAE, en un 58,83% de los casos los FM no identifican correctamente el nivel de RAE implicado (todas de niveles 0 o 1 de RAE): un 41,18% de ellos asigna un nivel de RAE superior a resoluciones que se corresponden con un nivel 0, un 5,88% asignan nivel superior a las de nivel 1 y un 11,77% consideran aritméticas aquellas de nivel 1. Por el contrario, el 17,65% de los FM detectan adecuadamente la ausencia de actividad algebraica en su resolución (Figura 8.18) y un 23,53% asignan adecuadamente nivel 1 de RAE a la solución propuesta (Figura 8.19).

Solución al problema Pre
En la caja B encontramos el doble de bolas blancas y más del doble de bolas negras, por lo que al haber más del doble de bolas negras en la caja B la probabilidad de sacar una bola negra es mayor en la caja A que en la B.
Objetos y procesos identificados en la solución al problema Pre. Nivel RAE
Intervienen los valores numéricos particulares, es decir, número de bolas blancas y negras que encontramos en la caja. Justificación apoyada en el conocimiento de las operaciones aritméticas (doble de una cantidad) Aritmética: Nivel 0 RAE

Figura 8.18. *Solución al problema Pre de FM12 (Figura 8.16) y asignación correcta de nivel 0 RAE.*

Dado que en su mayoría los FM no justifican su asignación de nivel de RAE, no es posible conocer cómo han tenido en cuenta el análisis de objetos y procesos algebraicos emergentes en esta decisión.

Resultados sobre la formulación y análisis del problema Pos

Se propusieron 30 problemas Pos, de los cuales solo cuatro fueron no significativos. De los restantes 26 problemas, nueve fueron no pertinentes pero significativos (bien por no ser variación del problema Pre en dos casos, o por no aumentar el nivel de RAE en siete de ellos) y 16 fueron pertinentes (es decir, significativos, variación del problema Pre y requiere un nivel de RAE superior en su solución). Los tipos de problemas Pos creados respondían a una de estas categorías: 1) determinación de la composición de una caja a partir de una probabilidad conocida (34,62%) (Figura 8.19); 2) determinación/modificación de la composición de las cajas conocida la razón de bolas blancas a negras o blancas a totales (23,08%) (Figura 8.20); 3) comparación de probabilidades de sacar una bola en las dos cajas (15,38%), 4) cálculo explícito de la probabilidad simple o compuesta (26,92%).

Tenemos dos cajas. La caja A contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Y la caja B contiene 4 bolas blancas y 7 negras. ¿Qué probabilidad hay de q salga una bola blanca en cada caja?	Tenemos dos cajas. La caja A contiene 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Y la caja B contiene 4 bolas blancas y 7 negras. ¿Cuántas bolas negras quitarías a una de las cajas para que en ambas la probabilidad de sacar una bola blanca fuese la misma? ¿A qué caja le quitarías?

Figura 8.19. *Problema Pre (izquierda) y problema Pos (derecha) propuestos por FM1.*

En lo que respecta a cómo se realiza la variación del problema Pre, el 46,15% de los FM modifican sólo el requerimiento, planteando una pregunta diferente derivada de la situación original (véase Figura 8.19). Cambian el requerimiento junto con la información en un 19,23% y requerimiento junto a información y entorno en un 23,08% de los problemas, proponiéndose en estos casos una situación que lleva a determinar la composición de una nueva caja o modificar la de una de las cajas dadas conocida la proporción de bolas blancas/negras.

En la caja hay 5 bolas negras por cada 8 blancas, si en total tenemos 20 bolas negras ¿Cuántas bolas blancas hay en la caja ? ¿Y en total?

Figura 8.20. *Problema Pos. Determinación de la composición de la caja con razón (FM31).*

Un 69,23% de los problemas Pos propuestos conllevan en su resolución una actividad algebraica de nivel superior a la involucrada en el problema Pre de origen. En particular, el 30,77% de los problemas implican un nivel 1 de RAE, pues recurren al uso de los números racionales. Este carácter proto-algebraico es identificado correctamente por la mitad de los FM. Los problemas cuya solución implica un nivel 2 de RAE, la segunda categoría más frecuente (19,23%), son aquellos que requieren determinar o modificar la composición de una caja conocida la razón de bolas blancas a bolas negras o totales, pues sus resoluciones llevan a plantear y resolver una ecuación proporcional (tipo $Ax = B$). Esto ocurre en la solución propuesta por FM1 (Figura 8.21) a su problema Pos (Figura 8.19), si bien no identifica de forma adecuada el nivel de RAE implicado. En este caso corresponde a un nivel 2, pues se plantea y resuelve una ecuación del tipo $Ax + B = C$.

P(bola blanca en A)= $\frac{2}{5} = 0{,}4$

P(bola blanca en B) = $\frac{4}{11}$=0,36

En la caja A hay más probabilidad de sacar bola blanca. $\frac{3}{10} < \frac{2}{5}$

Por lo que hay que quitar bolas negras a la caja B para que tenga la misma probabilidad de sacar bola blanca en ambas cajas.

$\frac{2}{5} = \frac{4}{11-x} = 2(11-x) = 20 => 11 - x = 10$

$=> -x = 10 - 11 => -x = -1 => x = 1$

P(bola blanca en A)= $\frac{2}{5} = 0{,}4$

P(bola blanca en B) = $\frac{4}{10}$=0,4

Solución habría que quitar 1 bola negra a la caja B para que ambas cajas tengan la misma probabilidad de sacar una bola blanca.

Nivel de RAE 1. Operación con números particulares, aplicando propiedades de la estructura algebraica del conjunto de los números naturales y la igualdad como equivalencia.

Figura 8.21. *Resolución problema Pos (nivel 2 RAE) propuesta por FM1. Identificación errónea de nivel RAE.*

El resto de problemas Pos cuya resolución implica una actividad algebraica de nivel superior al problema Pre original se sitúan en niveles de RAE mayores que 2, si bien ningún FM fue capaz de identificar dicho nivel de manera correcta. Estos problemas plantean situaciones de modificación de la composición de las cajas o creación de nuevas cajas conocida la razón entre bolas de diferentes colores. Tres de estos problemas movilizan en su resolución el planteamiento y resolución de sistemas de ecuaciones lineales que se resuelven por sustitución, lo cual supone un nivel 3 de RAE.

8.5.3. Resultados de la tarea de evaluación final

Resolución: estrategias aritméticas versus algebraicas

De los 62 participantes, uno no resolvió el problema y otros dos lo hicieron de manera incorrecta (tanto en el apartado a, como en el b), debido a una interpretación errónea del requerimiento o de la información.

En primer lugar, los FM debían resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos. De los 61 participantes que respondieron a la consigna, uno lo resolvió correctamente, pero de forma algebraica (igual que en el siguiente ítem) y cuatro indicaron explícitamente que no es posible resolver la tarea sin recurrir a prácticas algebraicas. Consideran como FM57 que "no se puede ya que al no dar todos los datos necesarios y al aparecer incógnitas en el problema es imposible calcular el dinero que recibió sin usar ningún tipo de nivel de razonamiento algebraico". Salvo un FM que usó ensayo-error, los 55 FM restantes lo resolvieron de manera similar a FM3, solución que se muestra en la Figura 8.22.

> Sí, se puede llegar a la solución del problema haciendo uso de procedimientos aritméticos, de la siguiente manera:
>
> En primer lugar, calculamos cuánto supone en total el ahorro que realiza el alumno de manera diaria, es decir, 4€ durante 40 días previstos supone un ahorro total de 160€. Con esta cantidad podemos conocer el número de días de más que puede comer, en este caso, 20 días más. El coste diario real fue entonces de 160€ en 20 días, lo que supone 8€ por día. Como realmente los días fueron 60, el presupuesto total será de 60 días por 8€ al día= 480€.
>
> En este caso, estamos operando directamente con números naturales particulares, a los que hemos aplicado operaciones aritméticas (concretamente de suma y multiplicación).

Figura 8.22. *Solución aritmética al problema base (FM3).*

Aunque no se pedía que se justificara por qué eran de tipo aritmético las soluciones propuestas, 15 FM se basaron como FM3 (Figura 8.22) en la intervención de números naturales particulares sobre los que se aplicaban operaciones aritméticas (propias de un nivel 0 de RAE). Aunque no es frecuente, algunos FM consideran que la solución aritmética se extrae de la algebraica traduciendo a lenguaje natural y a operaciones aritméticas el proceso seguido en la solución algebraica.

A continuación, los FM debían proponer soluciones al problema con rasgos algebraicos. Seis FM siguieron estrategias proto-algebraicas: cuatro de ellos, adaptaron la misma estrategia aritmética que habían empleado en el apartado previo, usando símbolos literales para indicar incógnitas y relaciones generales (por ejemplo D para el número de días, $D \times 4$ para la cantidad de euros ahorrados, FM20) pero sin operar con estas (nivel 1 de RAE); otros dos plantearon y resolvieron la ecuación $\frac{x}{60} = \frac{4\times40}{20}$, donde x es la cantidad de dinero recibido (nivel 2 de RAE). De los 55 FM restantes que resolvieron el problema, 24 plantearon un sistema de ecuaciones (Figura 8.23), en el que una ecuación establece la relación entre el coste diario previsto y el que finalmente tuvo, y la otra es una ecuación de proporcionalidad inversa que relaciona el precio del menú diario y el número de días que es posible comer con dicho precio.

Sea z el dinero recibido por los padres.
Llamamos x al gasto diario previsto por los padres para comer 40 días: $x = z / 40$.
Y sea y el gasto diario real, que permitió comer 60 días: $y = z / 60$.
Tenemos así: $40x = 60y$.
También sabemos que $y = x - 4$, luego si sustituimos en el último paso nos queda:
$40x = 60(x - 4)$, resolvemos y tenemos: $40x = 60 \times 240$, luego, $20x = 240$, y de aquí sacamos que $x = 12$.
Luego la cantidad que recibe es $12 \times 40 = 480$ euros.

La solución b) corresponde a un nivel 3 de RAE (llegamos a una ecuación de la forma: $Ax \pm B = Cx \pm D$).

Figura 8.23. *Solución algebraica (nivel 3 de RAE) al problema base (FM61).*

Los restantes 31 plantearon directamente la ecuación $40x = 60(x - 4)$, indicando que x es el dinero previsto inicialmente para comer cada día y que $x - 4$ es el dinero que gasta realmente en la comida diaria. En ningún caso, mencionaron la relación de proporcionalidad inversa entre las magnitudes en sus soluciones.

Creación de problemas por variación: buscando la actividad proto-algebraica

Todos los participantes salvo dos crearon algún problema. De hecho, la mitad de los FM propusieron dos y tres FM llegaron a elaborar tres problemas. Como resultado, se han analizado un total de 96 problemas.

Para responder a la finalidad de la tarea, el problema creado debía ser una variación del base y motivar cambios en el nivel de RAE implicado en la solución. En la Tabla 8.4 se resume la frecuencia de problemas creados según su significatividad y si es variación o no, atendiendo al nivel de RAE puesto en juego en la solución del nuevo problema.

Tabla 8.4

Clasificación de los problemas según su nivel de RAE, significatividad y variación (n=96).

RAE	Significativo		Parcialmente significativo	No significativo	Total
	Variación	No variación			
Nivel 0	9	5	5	1	20 (20,83%)
Nivel 1	16	2	6	4	28 (29,17%)
Nivel 2	18	7	2	2	29 (30,21%)
Nivel 3	13	5	1	0	19 (19,79%)
Total	56 (58,83%)	19 (19,79%)	14 (14,58%)	7 (7,29%)	96 (100%)

Como muestra la Tabla 8.4, la mayoría de los problemas fueron significativos. Aquellos parcialmente significativos incluían información innecesaria, o bien la condición de regularidad que permitía resolver la situación de proporcionalidad no estaba explícita, mientras que aquellos no significativos, lo fueron porque no se podían resolver con la información facilitada.

Aunque 49 FM (81,67% de los participantes) crearon al menos un problema significativo, 17 (27,42% del total) no lograron hacerlo por variación del problema base. Estos FM elaboraron problemas que en su mayoría llevaban a plantear una ecuación algebraica (por lo que tampoco motivaban un cambio en el nivel de RAE), como se observa en la Figura 8.24).

El número de mesas en un salón de clase es el doble del número de sillas más 6 si en el salón hay 36 muebles entre mesas y sillas. ¿Cuántas mesas y sillas hay?
Planteamiento:
Mesas: $2x + 6$ Sillas: x
Planteamos la ecuación: “hay 36 en total”
$2x + 6 + x = 36$
Procedemos a resolverla:
$2x + 6 + x = 36$
$3x = 36 - 6$
$x = 30/3 = 10$
$x = 10$
Por lo tanto, como solución podemos decir lo siguiente
Mesas: $2x + 6 = 26$
Sillas: $x = 10$
La suma de mesas y sillas es de 36.
Hay 10 sillas y 26 mesas.
En este problema el nivel asignado sería el nivel 3, ya que la incógnita aparece dos veces, de manera que hay que “asociar la parte con x”, ($2x + 6 + x = 36$).

Figura 8.24. *Problema propuesto (no variación) por FM30. Solución y asignación de RAE.*

Por otro lado, 32 FM (53 % del total) crearon problemas significativos por variación del problema inicial. Se han encontrado las siguientes categorías en los problemas significativos creados por variación:

1. *Mantiene la forma, pero intercambia información por requerimiento*. En este caso, se producen dos tipos de intercambios:
   1.1. El dinero recibido pasa a ser un dato conocido (información) y se pregunta por la cantidad de ahorro diario (requerimiento) (Problema 1 en Figura 8.25).
   1.2. El dinero recibido pasa a ser un dato conocido (información) y se pregunta por cuántos días más pudo comer (requerimiento) (Problema 2 en Figura 8.25).

Problema 1 Un estudiante recibe 480€ para comer durante 40 días. Durante esos días encuentra un sitio más barato en el que puede ahorrar algo de dinero en la comida. El presupuesto le ha durado 20 días más de lo previsto. ¿Cuánto dinero consiguió ahorrar cada día?	Problema 2 Un estudiante recibe 480€ de paga de sus padres para comer durante 40 días. Durante esos días encuentra un sitio más barato en el que se ahorra 4€ al día en comida. ¿Cuántos días podrá comer usando el presupuesto inicial?

Figura 8.25. *Problemas propuestos por FM51 en las categorías 1.1 (Problema 1) y 1.2 (Problema 2).*

2. *Mantiene la forma; cambia un elemento (información o requerimiento) y conserva el resto.* Se presentan tres situaciones:
   2.1. Se cambian solo los datos (Figura 8.26, Problema a).
   2.2. Se modifica el requerimiento, pasando a preguntar el gasto diario (suficiente para responder al dinero recibido) (Figura 8.26, Problema b).
   2.3. Añade al problema base un nuevo requerimiento (Figura 8.26, Problema c).

Problema a (MF50)	Problema b (MF25)	Problema c (MF19)
Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para su día a día durante 50 días. Sin embargo, ahorró algunos días 5 euros. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 70 días. ¿Cuánto dinero recibió?	Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuál es su gasto diario en comida? Justifica tu respuesta.	Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duro 60 días. ¿Cuánto dinero recibió? Si en vez de ahorrar 4 euros, ahorrase otra cantidad, ¿cuántos días más podría estar?

Figura 8.26. *Problemas propuestos en las categorías 2.1 (Problema a), 2.2 (Problema b) y 2.3 (Problema c).*

3. *Cambia la forma del problema base, modificando información y requerimiento* para transformarlo en un problema de proporcionalidad (valor faltante) entre dos magnitudes. Se encuentran problemas en los que:
   3.1. El gasto diario en un número dado de días es conocido (información) y se pregunta por el presupuesto (Figura 8.27, Problema a).
   3.2. El presupuesto inicial y el número de días al que estaba destinado es conocido y se pregunta el dinero necesario para otra cantidad de días (Figura 8.27, Problema b).
   3.3. Se conoce el gasto diario y el número de días para los que estaba destinado el presupuesto y se pregunta por este (Figura 8.27, Problema c).

Problema a (MF22)	Problema b (MF49)	Problema c (MF10)
Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Pero, finalmente encontró sitios donde pudo ahorrar, por lo que, pudo comer 20 días más. Si sabemos que todos los días se gastaba 8 euros, ¿cuánto dinero recibió?	Un estudiante recibió de sus padres 480€ para comer durante 40 días. ¿Cuánto dinero recibirá para comer durante 60 días?	Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Si recibe 4 euros para comer un día, ¿Cuánto gastará en 40? ¿Cuánto dinero necesitará si quiere comer para 100 días?

Figura 8.27. *Problemas propuestos en las categorías 3.1 (Problema a), 3.2 (Problema b) y 3.3 (Problema c).*

4. *Variación lejana*. Aunque se mantiene el entorno de la proporcionalidad, se conserva solo parcialmente contexto e información, modificando el requerimiento (Figura 8.28).

MF54. Problema 3
Un estudiante recibe 480€ de su familia, como máximo le han dicho que puede gastar 12€ al día y como mínimo 8€. ¿Cuánto le dura el dinero si gasta el máximo diario? ¿Y el mínimo diario?

Figura 8.28. *Problema propuesto por FM54. Variación lejana*.

Indicamos en la Tabla 8.5 la frecuencia de problemas en cada una de estas categorías.

Tabla 8.5

Tipos de problemas significativos creados por variación y su frecuencia (n=56).

Descripción de las categorías	Frecuencia
Mantiene esencialmente la forma del problema base	
1.1. Intercambia información por requerimiento. Dato: dinero recibido; Pregunta: cantidad ahorro diario	6
1.2. Intercambia información por requerimiento. Dato: dinero recibido; Pregunta: cuantos días pudo comer	10
2.1. Solo cambia datos	6
2.2. Solo cambia requerimiento (gasto diario, suficiente para responder a dinero recibido)	6
2.3. Añade otro requerimiento	2
Modifica la forma del problema base	
3.1. Información: gasto diario en un número dado de días. Requerimiento: presupuesto.	6
3.2. Información: presupuesto inicial y número de días al que estaba destinado. Requerimiento: dinero necesario para otra cantidad de días.	9
3.3. Información: gasto diario, número de días para los que estaba destinado el presupuesto. Requerimiento: dinero recibido.	6
4.Variación lejana. Conserva parcialmente contexto e información, cambia requerimiento.	5
Total	56

Como se observa en la Tabla 8.5, más de la mitad de los problemas significativos creados por variación mantuvieron esencialmente la forma del problema base. En este caso, lo más frecuente es intercambiar información por requerimiento, de manera que el dinero recibido ahora es conocido y se desconoce cuántos días más pudo comer. En la Figura 8.29 se muestra el problema creado por FM13 en esta categoría.

c) Nivel algebraico 2

Un estudiante recibió de sus padres 480€ para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4€ al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró más días. ¿Cuántos días más pudo comer?

Solución.

Dinero inicial 480 €

Días iniciales para comer 40

Ahorra 4 al día

Número total de días que come → ?→"x"

Dinero para comer cada día →?=$\frac{480}{40} = 12$

Dinero gastado cada día $12 - 4 = 8$ €

$480 = 8x;\ \frac{480}{8} = x \rightarrow x = 60$ días pudo comer

El nivel de razonamiento algebraico es 2 porque utiliza una ecuación $Ax + B = C$.

Figura 8.29. *Problema 2 creado por FM13 (categoría 1.2.). Solución y asignación de nivel 2 de RAE.*

Para "bajar el nivel de RAE", FM13 busca que la ecuación implicada en la solución no sea algebraica sino aritmética, precisando un nivel 2 de RAE (Figura 8.29). En otros casos, los FM agregan información considerando que "añadiendo el valor de una de las incógnitas que tenían que calcular en un principio y cambiando por tanto la información, disminuimos y cambiamos el nivel de razonamiento algebraico que se pone en juego" (FM41).

Cuando los FM modifican la forma del problema base (categorías 3.1, 3.2, 3.3,4), usualmente cambian información y requerimiento para transformarlo en un problema en el que se establece una relación de proporcionalidad directa entre dos magnitudes: dinero recibido y número de días que puede comer, siendo el coste del menú diario una cantidad fija.

En el apartado a) se lleva a cabo un nivel 0 de razonamiento algebraico, puesto que se realizan operaciones aritméticas con números particulares. En el apartado b) se lleva a cabo un nivel 3 de razonamiento algebraico, ya que se han planteado de manera simbólica las ecuaciones y se aplica una técnica de sustitución para resolverlas.
Por tanto, vamos a llevar otros niveles de razonamiento variando el problema propuesto:

Un estudiante recibió de sus padres 420 € para comer durante 45 días. Si se ha gastado 7€ por día los primeros 10 días. ¿Cuánto dinero tiene para gastar al día los 35 días restantes?

Para resolver dicho problema, utilizaremos una ecuación de primer grado donde la incógnita x es el dinero que debería gastarse los 35 días restantes el estudiante. Para ello, en la ecuación debemos multiplicar los 10 días por los 7 € que gasta al día sumándole a esto el resto de los días que son $35x$ (x es el dinero que dispondría por día para gastarlo) todo ello igualándolo a los 420€ que dispone el estudiante. La ecuación quedaría de la siguiente manera:
$10 \times 7 + 35x = 420;\ 70 + 35x = 420;\ 35x = 420 - 70;\ 35x = 350;\ x = 10.$
Por tanto, tiene para gastarse al día los 35 días restantes 10 €.

El nivel de razonamiento algebraico asignado a este problema es el nivel 2, ya que se han realizado operaciones con números particulares aplicando propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia, así como el empleo de una ecuación de primer grado de la forma $Ax + B = C$.

Un estudiante recibió de sus padres 480 € para comer durante 40 días. Si necesita dinero para otros 15 días. ¿Cuánto dinero recibirá?

Una forma de resolverlo sería a través de una regla de tres, donde la incógnita x es el dinero que recibirá. Si para comer 40 días necesita 480 €, para 15 días recibirá x, quedando de la siguiente forma:
DÍAS DINERO
40-------------- 480
15--------------- x
$x = (15 \times 480)/40 = 180$ € recibirá por esos 15 días más.
En este problema se emplea el nivel de razonamiento algebraico 1, ya que se establece una relación de proporcionalidad entre el número de días y el dinero total, no opero con la incógnita.

Figura 8.30. *Problemas creados por variación por FM11 (categoría 3.2). Solución y asignación de niveles de RAE.*

La situación ejemplificada en la Figura 8.30 es bastante frecuente: los FM recurren a la solución por regla de tres o multiplicación en cruz, para buscar problemas de nivel 1 de RAE. Identifican la relación de proporcionalidad y que no se llega a operar con la incógnita por lo que el nivel asignado es adecuado para la práctica propuesta. Sin embargo, en ningún caso, proponen problemas que involucren la comparación de razones que supondrían prácticas propias de un nivel 1 de RAE. Son escasas aquellos problemas en los que se debe determinar el valor unitario (reducción a la unidad), también propia de un nivel 1 de RAE.

Con relación a la identificación de objetos y procesos algebraicos, se observa que, salvo 5 FM que no asignaron ni justificaron el nivel de RAE de los problemas creados, todos los demás FM identificaron con éxito los niveles de RAE de las soluciones propuestas a sus problemas (el 80% de los problemas de nivel 0, 64,28% de los de nivel 1, 82,76% de los de nivel 2 y 68,42% de los de nivel 3). En particular, el 59,37% de los problemas creados implicaba un cambio en el nivel de RAE. Al respecto, mencionemos también que aquellos FM que habían creado problemas para un nivel 0 de RAE y lo habían justificado correctamente, habían interpretado en la consigna que debían crear un problema que admitiera una solución no algebraica.

Cuando los FM no identifican correctamente el nivel de RAE en las soluciones a sus problemas, se debe usualmente a que consideran que se usa la "igualdad como equivalencia" cuando su significado es operaciones (para reconocer un nivel 1 siendo prácticas de naturaleza aritmética) o bien consideran que la ecuación que se plantea es aritmética cuando en realidad es de tipo algebraico (asignan nivel 2 cuando responde a un nivel 3). En particular, centran la atención en la ecuación final $Rx = S$ resultado de transformar la ecuación $Ax + B = Cx + D$ o el sistema de ecuaciones de manera que consideran que no hay que operar con la incógnita y por tanto el nivel es 2.

Asignación de curso e identificación de conocimientos requeridos

A continuación, los FM debían indicar para qué curso educativo serían adecuados los problemas propuestos, identificando los conocimientos previos requeridos por los estudiantes para resolverlos. Un FM no respondió a esta última tarea. En el gráfico de la Figura 8.31 se relacionan curso y nivel de RAE asignados en 88 de los 90 problemas en los que los participantes respondieron a ambas cuestiones. Dos FM consideraron que sus problemas de nivel 3 de RAE (involucran razonamiento proporcional y una ecuación algebraica), sólo serían apropiados para primer curso de secundaria, si bien podrían ser planteados a alumnos de último curso de primaria.

De forma mayoritaria, los FM consideran adecuados sus problemas para el último ciclo de educación primaria (34,09% para quinto, 45,45% para sexto). Incluso cuando estos FM no han identificado correctamente el nivel de RAE, los problemas que proponen serían abordables en los cursos indicados, asumiendo que los potenciales alumnos disponen de los conocimientos previos señalados. La mayoría de los problemas destinados para tercer ciclo de primaria (11-12 años) en los que los FM asignan el nivel 0 o nivel 1, serían adecuados también para cursos previos, si bien no lo indican.

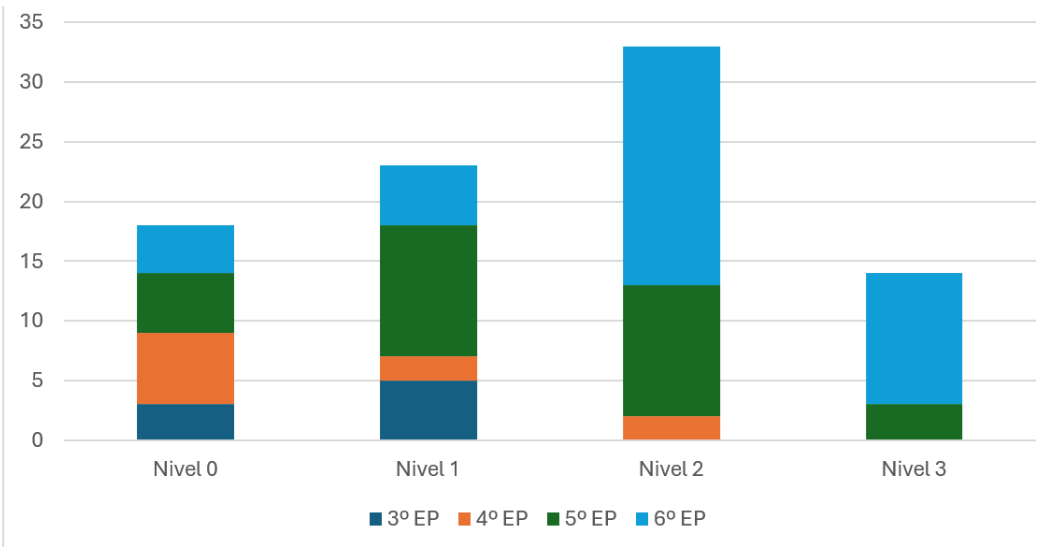


Figura 8.31. *Relación entre cursos y niveles de RAE asignados a los problemas creados.* Elaboración propia.

En la Figura 8.32 se incluye la nube de palabras señaladas con mayor frecuencia por los FM, asociadas a los conocimientos requeridos por los estudiantes para resolver los problemas creados (en los distintos niveles de RAE).

Figura 8.32. *Conocimientos requeridos identificados por los FM*. Elaboración propia[2].

A pesar de que la proporcionalidad aparece frecuentemente como conocimiento previo requerido (sólo en dos casos los FM se refieren de manera explícita a la relación de proporcionalidad inversa), un 40,98% no consideran el razonamiento proporcional (o el conocimiento sobre la proporcionalidad entre magnitudes) como conocimiento necesario para resolver los problemas creados, si bien en todos los casos aparece implicado. Los FM se centran más en la naturaleza algebraica de las prácticas, fundamentalmente en el uso del lenguaje simbólico y en las transformaciones (operaciones aritméticas, cálculo sintáctico, según el caso), especialmente en los problemas de nivel 3, que en los conceptos o propiedades que aparecen implicados. En los problemas de nivel 0 o de nivel 1, se precisan conocimientos sobre las propiedades de los números naturales y de las operaciones aritméticas con números naturales, si bien no es exclusivo de estos. Las fracciones y la equivalencia de fracciones aparecen como conocimientos necesarios en problemas de nivel 1 o de nivel 2, vinculados con la proporcionalidad o la regla de tres. Junto con la proporcionalidad, es frecuente que los FM indiquen la necesidad de estar familiarizados con el lenguaje simbólico y la construcción, transformación y resolución de ecuaciones (lineales, de grado 1) si bien en algunos casos estas no aparecen implicadas en las soluciones que proponen.

[2] Creado con https://www.nubedepalabras.es/

8.6. Conclusiones

Además de ser competentes para resolver los problemas que proponen a sus alumnos, los profesores deben ser capaces de seleccionarlos, modificarlos o crearlos con determinadas finalidades educativas. En particular, deben ser capaces de interpretar el grado de comprensión de los estudiantes al resolver una tarea matemática, así como de modificarla para fomentar la superación de las dificultades que se planteen (Godino et al., 2016; Godino, Giacomone et al., 2016). De igual manera deben considerar las oportunidades de una tarea para desarrollar distintos tipos de razonamiento, reconociendo el vínculo entre los elementos del problema y la actividad matemática que motiva (Malaspina et al., 2019; Mallart et al., 2018). Por un lado, lograr esta competencia requiere que desde la formación de profesores se contemple el diseño e implementación de acciones específicas (Malaspina et al., 2015). Por otro, la creación de problemas lleva a los futuros docentes a "repensar" la naturaleza de los objetos matemáticos antes de una instrucción explícita (Kılıç, 2017), estas acciones contribuyen además al desarrollo de los conocimientos didáctico-matemáticos durante la formación inicial de los profesores.

De manera general, la evaluación de los informes producidos por los FM en la sesión 6 de prácticas (Tabla 8.1, trabajo grupal) puso de manifiesto sus limitaciones al interpretar las respuestas de los estudiantes y de discernir qué dificultades se reconocen tras sus prácticas matemáticas. Pocos fueron los casos en los que los participantes identificaron limitaciones que conectaban el razonamiento probabilístico con el proporcional. Además, si bien la mitad de los FM señalaron dificultades asociadas a la proporcionalidad, en ningún caso se describieron con precisión y claridad qué aspectos del razonamiento proporcional eran objeto de tales limitaciones. Estos resultados están en línea con investigaciones previas que observan dificultades por parte de futuros docentes al interpretar respuestas de estudiantes a tareas de proporcionalidad (Fernández et al., 2012) e identificar las estrategias erróneas y elementos del razonamiento proporcional en este tipo de tareas (Burgos, López-Martín et al., 2022). Por otro lado, para los participantes también fue complejo crear un problema por variación del problema base que ayudase a los estudiantes a superar sus dificultades. En pocas ocasiones los FM fueron capaces de crear problemas de proporcionalidad manteniendo el contexto probabilístico y atendiendo a las limitaciones observadas en las resoluciones de estudiantes. En mayor medida, los participantes crearon problemas cuya resolución no involucraba el razonamiento proporcional, no atendían a las dificultades de los estudiantes o resultaban incorrectos o ambiguos. Este hecho concuerda con los resultados obtenidos en experiencias previas (Capítulo 4 de esta memoria).

En cuanto a la tarea individual de clase, menos de la mitad de los FM introdujeron elementos propios del razonamiento proporcional en sus tareas partiendo de la situación dada sobre probabilidad. Este resultado concuerda con aquellos que muestran las dificultades encontradas por FM al resolver tareas que involucran el razonamiento proporcional en contexto aritmético (Buforn et al., 2017; Burgos y Godino, 2022a; Weiland et al., 2019, 2020), o probabilístico (Ortiz et al., 2006; Vásquez y Alsina, 2015; Burgos, López-Martín et al., 2022). Tuvieron mayor éxito a la hora de proponer problemas por variación del problema Pre. A pesar de no haber identificado de manera correcta los niveles de RAE implicados en la solución del problema Pre, o de no haber podido justificar su asignación, más de la mitad de los problemas Pos propuestos movilizan un razonamiento algebraico superior al problema Pre. Los FM tampoco identifican en la solución de estos el nivel de RAE involucrado en su resolución. Este hecho nos conduce a pensar que los FM reconocen la existencia de una mayor demanda cognitiva a nivel algebraico, si bien presentan dificultades a la hora de establecer cuáles son los objetos y procesos algebraicos concretos involucrados en su resolución. Este hecho concuerda con investigaciones previas donde remarcan las dificultades que presentan los futuros docentes de educación primaria en entornos algebraicos (Blanton y Kaput, 2005). De esta forma, el modelo de RAE se podría emplear para reforzar el discurso profesional sobre los objetos y procesos algebraicos una vez identificados los niveles, de manera que la discusión permita reflexionar más sobre la naturaleza de las entidades que sobre la complejidad de resolución que parecen vincular al nivel.

En la tarea de evaluación final los FM debían variar un problema de proporcionalidad con la intención de promover una actividad proto-algebraica (Godino, Aké et al., 2014). Los FM debían primero resolver el problema base, planteando una solución de carácter aritmético y otra algebraica a un problema de proporcionalidad y, después, crear nuevos problemas por variación cuya resolución movilizara una actividad algebraica de nivel distinto a los anteriores, indicando el curso académico al que se dirigen y los conocimientos previos necesarios para resolverlos.

Con relación a la primera parte de esta tarea, los FM fueron capaces de proporcionar las dos soluciones al problema original, discriminando con éxito la actividad aritmética de la algebraica. Estos resultados mejoran notablemente los obtenidos por Burgos y Godino (2022a) y Tizón-Escamilla y Burgos (2023), quienes encontraron mayores dificultades en el análisis de la actividad algebraica implicada en soluciones de problemas de proporcionalidad por parte de futuros docentes. En segundo lugar, la mayoría de los problemas creados han sido significativos, en contraposición a los resultados de las experiencias previas descritas en el Capítulo 4. Además, buena parte de los problemas creados fueron una variación del problema base que movilizaba en su resolución una actividad algebraica de nivel diferente al aritmético o algebraico (finalidad didáctico-matemática de la tarea propuesta). Además, los FM identificaron con éxito el nivel de RAE implicado en la actividad matemática previsible como solución a sus problemas, justificándolo en base a la naturaleza algebraica de los objetos y procesos implicados. De nuevo, estos resultados suponen una notable mejoría respecto de los obtenidos en Burgos y Godino (2022a) y Tizón-Escamilla y Burgos (2023). En estas experiencias previas, en su intento de conseguir un nivel de RAE concreto, los FM sacrificaron la significatividad del enunciado (la solución estaba implícita en el enunciado, carecía de sentido o la información que facilitaba el enunciado no permitía responder a la pregunta). Además, consideraban solo “dos grados de algebrización: aritmético (0) o algebraico (1), en función de la ausencia o presencia de incógnitas, independientemente del tratamiento que se hiciera con ellas” (Burgos y Godino, 2022a, p. 382).

Por otro lado, se analizó de qué forma modifican los FM el problema de proporcionalidad para que su solución involucre un nivel de razonamiento algebraico distinto al original, que en este caso debía ser de carácter proto-algebraico, dadas las consignas previas. Observamos que los FM suelen mantener la estructura matemática del problema inicial, modificando exclusivamente la información o el requerimiento o intercambiando ambos elementos. Para introducir un cambio en el nivel de RAE, buscan que la ecuación que lo resuelva no sea algebraica sino aritmética (Kilhamm et al., 2019), en cuyo caso el nivel de RAE es 2. Cuando buscan un nivel 1 de RAE, aunque plantean problemas de valor faltante, lo resuelven mediante una regla de tres en la que no se llega a plantear la ecuación ni operar con la incógnita. Si bien el nivel asignado es adecuado, desde el punto de vista didáctico, es una práctica que debería evitarse pues "oculta" la intervención de las razones y la proporción, lo que conlleva un significado "degenerado" de la proporcionalidad aritmética. En ningún caso, se modifica el problema buscando una comparación de razones, componente esencial del razonamiento proporcional, o se plantean problemas que se resuelvan por medio del registro tabular (con carácter proto-funcional), diagramático o gráfico (Burgos y Godino, 2020), también de características proto-algebraicas.

Finalmente, buscamos determinar en qué se basan los FM para decidir el curso académico en el que sería adecuado el problema que han creado y cómo reconocen los conocimientos que requieren los estudiantes para resolverlo. Observamos que los FM indican de manera apropiada el curso académico al que mejor se adecúan sus problemas creados, estando en su mayoría destinados a estudiantes del tercer ciclo de educación primaria. No obstante, un alto porcentaje de los futuros docentes no identifican como conocimientos previos necesarios para su resolución objetos de naturaleza proporcional, aun siendo elementos centrales de sus problemas. Este resultado pone de manifiesto al igual que investigaciones anteriores (Buforn et al., 2020; Burgos y Godino, 2022a; Tizón-Escamilla y Burgos, 2023; Weiland et al., 2020) que los FM poseen un conocimiento didáctico-matemático o un discurso profesional insuficiente sobre el razonamiento proporcional.

CAPÍTULO 9. CONCLUSIONES GENERALES

Desde la investigación en Educación Matemática, se insiste en la necesidad de diseñar e implementar experiencias formativas que promuevan el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (Godino et al., 2016), dado que un conocimiento del contenido, aunque necesario, no es suficiente para garantizar que el docente pueda reconocer y responder adecuadamente al pensamiento matemático de los estudiantes, adaptando la enseñanza a sus necesidades. De manera específica diversos investigadores han señalado la importancia de incorporar la creación de problemas en los programas de formación del profesorado. Reconocen la creación de problemas como una forma adecuada de introducir a los profesores en formación en la enseñanza de las matemáticas (Kilic, 2017; Leavy y Hourigan, 2020; Piñeiro et al., 2019; Tichá y Hošpesová, 2013) que les permite explorar de manera profunda el contenido matemático y ser conscientes de sus posibles deficiencias (Burgos et al., 2024c; Tichá y Hošpesová, 2013), mejorando el análisis global de la actividad matemática (Bayazit y Kirnap-Donmez, 2017; Mallart et al., 2016; Malaspina et al., 2019). Así el objetivo general de esta tesis ha sido

> Analizar, promover y evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos y la competencia de creación de problemas relacionados con el razonamiento proporcional y algebraico en profesores en formación de matemáticas de educación primaria y secundaria.

En este capítulo se presentan las conclusiones generales, con relación a las hipótesis y objetivos específicos del trabajo. Finalmente, se establecen líneas futuras de investigación a partir de los resultados obtenidos de las intervenciones descritas en los capítulos anteriores y las limitaciones observadas.

9.1. Conclusiones

La revisión de la literatura sobre creación de problemas y razonamiento proporcional y algebraico en profesores en formación nos llevó a plantear las siguientes hipótesis:

> *Hipótesis 1* (H1). Los profesores en formación tienen dificultades para crear problemas pertinentes sobre proporcionalidad.

Hipótesis 2 (H2). Los profesores en formación tienen conflictos para discriminar la actividad aritmética de la algebraica en la producción de sus problemas de proporcionalidad.

Hipótesis 3 (H3). Los profesores en formación tienen dificultades para crear problemas que fomenten el razonamiento algebraico.

Hipótesis 4 (H4). La creación de problemas sobre proporcionalidad permite reconocer deficiencias en el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación en relación con el razonamiento proporcional.

Hipótesis 5 (H5). La creación de problemas que requieren cierto nivel de algebrización permite reconocer deficiencias en el conocimiento didáctico-matemático de los profesores en formación en relación con el razonamiento algebraico.

Confirmarlas o refutarlas suponía abordar los siguientes objetivos:

OE1. Analizar los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento proporcional y algebraico que futuros profesores de matemáticas de primaria y secundaria ponen de manifiesto por medio de la creación de problemas.

OE2. Identificar las dificultades que manifiestan futuros profesores de matemáticas de primaria y secundaria en la creación de problemas relativos al razonamiento proporcional y algebraico.

OE3. Diseñar, implementar y evaluar acciones formativas con futuros profesores de matemáticas, sobre creación de problemas que articulen el razonamiento proporcional y el algebraico.

También considerábamos que la formación específica podía ayudar a los futuros profesores a mejorar las deficiencias previstas en las hipótesis iniciales:

Hipótesis 6 (H6). Estas dificultades pueden disminuir con el diseño e implementación de experiencias formativas a fin de desarrollar conocimientos y competencias sobre la creación de problemas basados en el razonamiento proporcional y algebraico.

Esto nos llevaba a proponer como último objetivo:

OE4. Analizar el desarrollo en futuros profesores de matemáticas de conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional y algebraico logrado por medio de estrategias formativas centradas en la creación de problemas.

9.1.1. Conclusiones relacionadas con los objetivos OE1 y OE2

Los resultados obtenidos en los capítulos anteriores evidencian que la actividad de creación de problemas permite reconocer las deficiencias del conocimiento didáctico-matemático de los futuros docentes en el razonamiento proporcional (H4) y que estos tienen dificultades para crear problemas pertinentes que involucren dicho entorno (H1).

De manera específica, los resultados de los Capítulos 4 y 5 muestran deficiencias en el conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad que limitan a los futuros maestros la tarea de formular problemas con una finalidad didáctico-matemática. Así, crean problemas en los que no se observa conexión entre los procedimientos y los significados implicados, diseñan enunciados ambiguos, carentes de sentido, irresolubles o con la solución implícita en el propio enunciado, problemas que abandonan el entorno de la proporcionalidad, o que persiguen el uso de la regla de tres cuando no es lo pretendido desde el punto de vista didáctico-matemático (faceta interaccional).

En la faceta epistémica, las dificultades para distinguir situaciones proporcionales de no proporcionales, proporcionales de aditivas, o reconocer las razones enteras o no enteras en una situación de proporcionalidad, limita a los FM la creación de tareas para abordar estos aspectos. En este sentido, se observan también dificultades para identificar los objetos matemáticos involucrados en los problemas creados por ellos mismos, algo que puede obstaculizar la comprensión sobre la estructura matemática de los problemas que producen (Burgos y Godino, 2020b, 2021).

En la faceta cognitiva, cuando los FM identifican las potenciales dificultades que pueden encontrar los escolares al resolver los problemas que ellos mismos proponen, se centran casi de manera exclusiva en las de tipo procedimental. De igual manera fue desafiante reconocer el nivel de complejidad asociado, así como adaptar sus problemas a un nivel educativo específico (faceta ecológica). Como se mostró en el Capítulo 5, los FM no reconocen la ambigüedad en la formulación y el requerimiento del problema, lo que puede obstaculizar su resolución por parte de los estudiantes, de manera que el aprendizaje que se persiga no esté garantizado (distinguir comparaciones absolutas de relativas que caracteriza al razonamiento proporcional). Esta limitada “mirada profesional” dificulta la interpretación de las narrativas de los alumnos en la resolución de un problema de proporcionalidad e impide a los FM variar con éxito el problema base para facilitar su comprensión y resolución, reconduciendo la situación desde el error hasta el aprendizaje.

Los Capítulos 6 y 7 muestran que, a pesar de su mayor formación matemática, también los futuros profesores de educación secundaria tienen dificultades para crear problemas (de forma libre, semiestructurada o estructurada) de proporcionalidad, especialmente en un contexto no aritmético, lo que supone un conocimiento didáctico-matemático insuficiente sobre los significados de la proporcionalidad (faceta epistémica). Para los FP españoles (Capítulo 6) un buen problema matemático se caracteriza por un enunciado claro, que implique una situación motivadora y que plantee preguntas que estimulen el razonamiento, favoreciendo la flexibilidad de solución. Sin embargo, sus propuestas de problemas no son consistentes con estas creencias. Los FP crean problemas pertinentes en el contexto aritmético, pero tienen dificultades en los contextos algebraico-funcional, geométrico y probabilístico, si bien crean problemas más complejos en los contextos probabilístico y geométrico que en el aritmético.

Esta mayor dificultad para crear problemas en los contextos geométrico y probabilístico también se observó con los futuros profesores de matemáticas costarricenses. En este caso, se observa un conocimiento deficiente de las propiedades de la relación de proporcionalidad (particularmente en el contexto probabilístico), así suelen ignorar la condición de regularidad, priorizan la regla de tres (como pudo verse también con FM en el Capítulo 5) y tienen limitaciones para identificar objetos y procesos implicados en un problema de proporcionalidad (algo que también sucedía con FM en el Capítulo 4).

Además, los FP tuvieron dificultades para crear un problema de proporcionalidad con un grado de complejidad solicitado, considerando que justificar la respuesta caracteriza a un problema como del nivel de reflexión. La pertinencia del enunciado disminuye cuando aumenta el nivel de demanda esperado. Las limitaciones para identificar el grado de complejidad al que responden sus problemas y las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en su resolución indica carencias en la dimensión cognitiva de su conocimiento didáctico-matemático sobre proporcionalidad.

El razonamiento proporcional facilita el acceso al álgebra temprana, por lo que crear problemas que potencien el razonamiento proporcional, alejándose de la aplicación rutinaria de procedimientos característicos, puede ser un primer paso para crear problemas que desarrollen el razonamiento algebraico. Esto supone, además, entender que el razonamiento algebraico ocurre en "todas las actividades destinadas a desarrollar en los alumnos una actitud para buscar regularidades, relaciones y propiedades, y para expresarlas primero en lenguaje natural y luego algebraico" (Malara y Navarra, 2018, p. 54), valorar el papel de las estrategias proto-algebraicas, y reconocer el papel que desempeña en este ámbito el razonamiento proporcional. Al respecto, los resultados del Capítulo 8 de esta memoria muestran que la invención de problemas permite reconocer un conocimiento didáctico-matemático limitado sobre lo que implica el razonamiento algebraico temprano y su conexión con el proporcional en los FM (H5) y revelan sus dificultades para crear problemas que fomenten el razonamiento algebraico (H3). De manera específica, para cambiar el nivel RAE de un problema los FM mantienen la estructura del problema inicial y modifican la información o el requerimiento (o ambos), a fin de que su solución sea mediante una ecuación aritmética; en sus variaciones no buscan una comparación de razones (componente esencial del razonamiento proporcional), ni persiguen el registro tabular o gráfico como medio de resolución (características proto-algebraicas); crean problemas que no involucran el razonamiento proporcional o proponen enunciados ambiguos (al igual que en los capítulos anteriores). Sin embargo, a diferencia de los resultados del Capítulo 4, reconocen con éxito el curso académico apropiado para emplear sus problemas creados, aunque no identifican objetos asociados a la proporcionalidad como conocimientos previos necesarios para su resolución.

Los resultados de este capítulo muestran sólo una confirmación parcial de la hipótesis (H2), ya que si bien de manera previa a la tarea de evaluación, los FM mostraron dificultades para diferenciar la actividad aritmética de algebraica en la creación del problema Pos de probabilidad, en la tarea de evaluación final, los FM fueron capaces de proporcionar las dos soluciones al problema original, discriminando con éxito la actividad aritmética de la algebraica.

Un conocimiento sesgado del razonamiento proporcional y algebraico en los futuros docentes obstaculiza su desarrollo y desempeño profesional. Esto causa una deficiencia no solo en la creación de problemas, como muestran los resultados de los capítulos previos, sino también en el reconocimiento de las dificultades implicadas en la resolución de tareas de proporcionalidad (Burgos y Godino, 2020b) y de pensamiento algebraico. Estas limitaciones pueden llevarlos a elegir problemas porque sean atractivos o aparezcan sugeridos por los libros de texto (Pino-Fan et al., 2020), sin evaluar su potencial para promover un aprendizaje significativo en los estudiantes, o incluso utilizar problemas propuestos en materiales curriculares que tengan errores o no responden al contexto o necesidades del estudiante (Salazar, 2017).

9.1.2. Conclusiones relacionadas con el objetivo OE3

En los Capítulos del 4 al 8 se muestra el diseño, la implementación y el análisis de acciones formativas desarrolladas con FM y FP sobre la creación de problemas, que atienden a las hipótesis de esta investigación. Los resultados, en algunos casos, orientaron la modificación de los instrumentos o tareas en las acciones formativas posteriores, a fin de obtener resultados mejores o más concluyentes, según las limitaciones diagnosticadas.

En el Capítulo 4 se desarrolla una acción formativa con FM sobre la creación de problemas de proporcionalidad por variación y por elaboración. La tarea en la que se partía de una “tabla de proporcionalidad” fue resuelta sin ninguna dificultad mediante la variación de algunos de los elementos de la misma, sin embargo, los problemas solían tener una estructura similar, aportando poca información a la investigación. Así, se omite el uso de la tabla en las siguientes experiencias formativas, aunque se mantienen tareas de creación de problemas por variación de uno dado. Además, como no era parte de las consignas establecidas, pocos FM resuelven sus problemas, algo que podía obstaculizar el análisis o la comprobación de la pertinencia del enunciado; por esa razón, se solicita explícitamente la solución de problemas creados en siguientes experiencias (Capítulos 6, 7 y 8).

Por otro lado, como la literatura muestra la importancia de analizar e interpretar las respuestas de los estudiantes, en el Capítulo 5 consideramos la articulación de la competencia *mirada profesional* con la creación de problemas. En la experiencia, los FM deben interpretar las respuestas de alumnos (ficticios) a una tarea dada de proporcionalidad y crear problemas por variación con una finalidad específica: facilitar la comprensión y la solución de las dificultades encontradas por los alumnos en el episodio de clase.

En los Capítulo 6 y 7 se muestran las acciones formativas con FP. En estos casos, y dado que en las experiencias previas con MF (Capítulo 4) se había priorizado el contexto aritmético, se integran explícitamente los contextos geométrico y probabilístico (en el Capítulo 6 también el funcional) en tareas de creación de problemas de forma libre (en el cual identifican los objetos y el nivel de complejidad implicados), variación de uno previo o a partir de una situación dada (que permiten caracterizar la relación de proporcionalidad; forma semiestructurada), tareas que responden a finalidades didácticas específicas.

Finalmente, la intervención descrita en el capítulo 8, aborda de manera específica el razonamiento algebraico en la creación de problemas. Se muestra cual es la formación recibida por los FM al respecto, y cómo se va integrando a lo largo del curso en sesiones de trabajo colaborativo (prácticas de seminarios), tareas voluntarias de clase y final de evaluación, contemplando junto con el razonamiento algebraico algunas de las limitaciones observadas previamente, por ejemplo, el contexto probabilístico y la creación de problemas para gestionar errores. Además, atendiendo a las carencias identificadas en las investigaciones previas sobre creación de problemas para modificar el nivel de RAE (Burgos y Godino, 2020a,2020b) así como el interés por las formas proto-algebraicas, la tarea persigue que los FM varíen el problema buscando niveles intermedios de RAE.

Por otra parte, como otros estudios muestran deficiencias de los docentes en formación sobre la identificación de los objetos que emergen de la resolución de problemas de proporcionalidad, esta tarea se mantuvo en distintas intervenciones (Capítulos 4, 6, 7 y 8) con el objetivo de fortalecer dichas limitaciones. Sin embargo, los resultados muestran que deben seguir atendiéndose a esta competencia en la formación de profesores tanto de educación primaria como de educación secundaria.

Estas intervenciones evidencian que la invención de problemas implica conocimientos de las distintas facetas del modelo CCDM y articulan el razonamiento proporcional y el algebraico. Cuando crea un problema, el profesor debe conocer y emplear diversas estrategias de resolución aptas desde el punto de vista instruccional (facetas interaccional-mediacional). Debe también identificar los conocimientos que se ponen en juego en su solución (faceta epistémica) y valorar la adecuación al nivel educativo (faceta ecológica). Este análisis le permitirá ser consciente de la complejidad de las situaciones que propone a los estudiantes, respondiendo a los conocimientos y dificultades (posibles o encontradas) de los alumnos (faceta cognitiva).

9.1.3. Conclusiones relacionadas con el OE4

La creación de problemas no solo era objetivo (OE3) sino también medio (OE4) para fomentar conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento proporcional y algebraico en los futuros profesores de educación primaria y educación secundaria, a través de las diferentes acciones formativas implementadas.

La creación de problemas de proporcionalidad en diferentes contextos matemáticos (aritmético, geométrico, funcional o probabilístico), o la creación de problemas de proporcionalidad con un determinado nivel de algebrización lleva a los futuros docentes a "repensar" la naturaleza de los objetos matemáticos antes de una instrucción explícita (Kılıç, 2017) y les ayuda a mejorar su técnica de análisis de la actividad matemática (Mallart et al., 2016), entendida como tarea docente esencial para anticipar conflictos de aprendizaje, gestionar los procesos de institucionalización necesarios y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos (Burgos y Godino, 2020b).

La creación de problemas con un determinado grado de complejidad o destinados a un determinado nivel educativo, así como variar un problema para facilitar la comprensión y ayudar a los alumnos a superar las dificultades que genera un problema previo, contribuye a salvar la desconexión entre los conocimientos de los profesores y las necesidades reales en sus prácticas de enseñanza (Lee et al., 2018).

En las acciones desarrolladas con maestros en formación en los capítulos 4 y 5, estos apenas estaban familiarizados con el análisis de prácticas desde un punto de vista epistémico o cognitivo, ni con la mirada profesional de las respuestas de estudiantes, por lo que las acciones desarrolladas centradas en la creación de problemas suponían una ventana al desarrollo de estas competencias. Por otro lado, aunque la formación matemática de los futuros profesores de secundaria se supone mayor (algo que puede explicar que los resultados en este caso fueran mejores que con los FM) su formación didáctico-matemática era aún menor o incluso nula, lo que da aún más valor al diseño de la intervención por medio de la creación de problemas.

Finalmente, los resultados obtenidos en el capítulo 8 mejoran notablemente los obtenidos por Burgos y Godino (2022a) y Tizón-Escamilla y Burgos (2023), tanto en el análisis de la actividad algebraica implicada, en la significatividad de los problemas creados, como en la identificación del nivel de RAE. Además, esta intervención permite constatar la evolución en estos tres aspectos, lo que muestra que disponer de mayor espacio para la formación específica a través de la creación de problemas, ayuda a superar las dificultades o carencias en el conocimiento didáctico-matemático de los docentes en formación.

9.2. Líneas futuras de investigación

En los diferentes capítulos que componen esta memoria, hemos ido reflexionando sobre las carencias o limitaciones encontradas en las experiencias que sugieren la necesidad tanto de mejorar los instrumentos de investigación, como de desarrollar nuevas acciones formativas con objetivos más específicos.

Como se pueden haber entrelazado carencias en el conocimiento matemático con la complejidad para involucrar diversas relaciones entre diferentes contenidos o conceptos (que hayan derivado en un gran porcentaje de problemas no significativos) sería necesario diagnosticar, y mejorar si fuera necesario, los conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos de los participantes sobre razonamiento proporcional y algebraico previo a las intervenciones, ya que la formación recibida en sus estudios de grado y de máster de profesorado podría no ser la esperada. Evaluar sus conocimiento didáctico-matemáticos de manera previa y posterior a las acciones formativas centradas en la creación de problemas, nos permitirá tener una idea más clara acerca de si la formulación de problemas con una finalidad didáctica les ayuda a desarrollarlos.

En concreto, sería conveniente reforzar sus conocimientos sobre razonamiento proporcional en los ámbitos geométrico, funcional y, aún más, probabilístico, puesto que fue el contexto donde menor éxito se tuvo. Esto supone la necesidad de desarrollar o reforzar en los futuros docentes los conocimientos didáctico-matemáticos sobre los diferentes significados de la proporcionalidad, las configuraciones de objetos característicos y sus relaciones (Burgos y Godino, 2020b). Esto se suma a la necesidad de reforzar su competencia lingüístico-matemática, ya que las deficiencias de los futuros profesores en dicha competencia (Kar, 2016) y la complejidad semántica que representan los problemas (Isik et al., 2011) pueden haber contribuido al bajo éxito en la invención de problemas matemáticos. Además, en futuras implementaciones se hace necesario reforzar previamente el papel de la comparación de razones como parte integral del razonamiento proporcional (Buforn et al., 2020; Monje y Gómez, 2019), así como prestar más atención a la relación de proporcionalidad inversa, en el caso de creación de problemas por futuros profesores de secundaria. En este último caso, podría haber menor porcentaje de éxito, dada la mayor presencia longitudinal y transversal en el currículo de la proporcionalidad directa frente a la inversa.

En relación con el razonamiento algebraico, sería conveniente dar a los futuros docentes oportunidades para familiarizarse, tanto en la resolución como en la creación, con las representaciones informales y presimbólicas (Hohensee, 2017) esenciales en el tránsito de lo aritmético a lo algebraico. El contexto de las actividades que pueden llevarse a cabo con representaciones como diagramas informales y rectas numéricas puede ser una forma productiva de abordar el estudio presimbólico de las ecuaciones o funciones (Hohensee, 2017). Somos conscientes de que desarrollar el sentido algebraico por medio de la creación de problemas, requiere considerar otras formas de acceso al mismo más allá del razonamiento proporcional, como pueden ser la aritmética generalizada, el estudio de ecuaciones e inecuaciones o el pensamiento funcional, entre otros (Burgos, 2023). En todo caso, la flexibilidad de la metodología permite diseñar e implementar nuevas intervenciones con la modificación de los problemas dados (cambiando, por ejemplo, el requerimiento didáctico-matemático, el entorno o el contexto) para atender a nuevos conocimientos, en particular, el razonamiento algebraico en un sentido más amplio.

Por otro lado, dado que algunas de las descripciones de los participantes sobre algunas de las tareas establecidas fueron poco concluyentes, en siguientes investigaciones se pueden complementar las intervenciones con entrevistas y sesiones posteriores de puesta en común en las que los participantes discutan (algo que por limitaciones de tiempo en las acciones formativas no fue posible llevar a cabo), por ejemplo, las razones detrás de su valoración de las respuestas de los alumnos (como en los Capítulos 5 y 8). Además, la puesta en común y la discusión colectiva en las prácticas de creación de problemas, puede ayudar a que los futuros docentes reflexionen sobre los errores o carencias de conocimientos didáctico-matemáticos y reconsideren sus propias concepciones sobre lo que es un buen problema matemático o qué es un problema "fácil" (Tichá y Hošpesová, 2013). Esto podría disminuir la cantidad de problemas no pertinentes y los casos en los que los participantes describen lo que harían, pero no concretan el problema (como sucedió en el Capítulo 5).

También creemos que solicitar la creación de otros problemas, mediante la variación de uno dado, después de la identificación de los objetos y procesos implicados en la resolución al problema previo podría aumentar el nivel de complejidad de los problemas creados y el número de problemas pertinentes. En este sentido, sería necesario diseñar y facilitar a los futuros docentes criterios que permitan valorar la pertinencia de los problemas y actúen como guía para su corrección y mejora.

Finalmente, sería conveniente ampliar el colectivo de estudio a profesores en ejercicio de educación primaria y secundaria, con los, si bien esperaríamos obtener mejores resultados que los actuales, la literatura sugiere que, a pesar de su experiencia, también poseen dificultades para crear problemas (Kaur y Rosli, 2021).

BIBLIOGRAFÍA

Akay, H. y Boz, N. (2010). The Effect of Problem Posing Oriented Analyses-II Course on the Attitudes toward Mathematics and Mathematics Self-Efficacy of Elementary Prospective Mathematics Teachers. *Australian Journal of Teacher Education*, *35*(1), 59–75. https://doi.org/10.14221/ajte.2010v35n1.6

Aké, L. (2021). El carácter algebraico en el conocimiento matemático de maestros en formación. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, 49, 15–39. http://www.scielo.org.co/pdf/ted/n49/0121-3814-ted-49-15.pdf

Aké, L., Godino, J. D., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2013). Proto-algebraic levels of mathematical thinking. En Lindmeier, A. M. y Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 1–8). PME

Alvarado, S. (2011). *El razonamiento proporcional en la educación primaria: un estudio con alumnos de 6° grado en una escuela pública del distrito federal* (Tesis de licenciatura). Universidad Pedagógica Nacional. http://200.23.113.51/pdf/28231.pdf

Arce, M., Conejo, L. y Muñoz-Escolano, J.M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*. Síntesis.

Aroza, C. J., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2016). Iniciación a la innovación e investigación educativa mediante el análisis de la idoneidad didáctica de una experiencia de enseñanza sobre proporcionalidad. *Aires*, *6*(1), 1–29. https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Aroza_Godino_Beltran.pdf

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 281-308. https://revue-rdm.com/1988/ingenierie-didactique-2/

Ayllón, M. F., Castro, E. y Molina, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema difícil por alumnos de educación primaria. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), Investigación en educación matemática XV (pp. 277–286). Ciudad real, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3731153.pdf

Ayllón, M. F., Gallego, J. L. y Gómez, I. A. (2016). La actuación de estudiantes de educación primaria en un proceso de invención de problemas. *Perfiles Educativos, 38*(152), 51–67. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57588

Balderas, R. G., Block, D. y Guerra, M. T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué": Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática, 26*(2), 7–32. https://www.redalyc.org/pdf/405/40532665002.pdf

Barlow, A.T. y Cates, J.M. (2006), The Impact of Problem Posing on Elementary Teachers' Beliefs About Mathematics and Mathematics Teaching. *School Science and Mathematics*, *106*(2), 64–73. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18136.x

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57–79. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9205-4

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa* *10*(1), 11–34. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

Baumanns, L. y Rott, B. (2021a). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Leaning,* *13*(2), 59–76. https://doi.org/10.1080/19477503.2020.1841501

Baumanns, L. y Rott, B. (2021b). Developing a framework for characterizing problem-posing activities: A review. *Research in Mathematics Education*, 28–50. https://doi.org/10.1080/14794802.2021.1897036

Baumanns, L. y Rott, B. (2022). The process of problem posing: development of a descriptive phase model of problem posing. *Educ Stud Math* 110, 251–269. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10136-y

Bayazit, I. y Kirnap-Donmez, S. M. (2017). Prospective teachers' proficiencies at problem posing in the context of proportional reasoning. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8*(1), 130–160. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.303759

Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M. y Booth, J. L. (2021) Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science*, *49*, 441–473. https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9

Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). An onto-semiotic approach to the analysis of the affective domain in mathematics education. *Cambridge Journal of Education*, *50*(1), 1–20. https://doi.org/10.1080/0305764X.2019.1623175

Ben-Chaim, D., Keret, Y. y Ilany, B. (2012). *Ratio and proportion: Research and teaching in mathematics teachers' education*. Sense Publisher. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-784-4

Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M. M. y Capraro, R. M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 457–485. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09995-8

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446. https://doi.org/10.2307/30034944

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I. y Kim, J.S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(1), 39–87. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.1.0039

Bonotto, C. (2001). How to connect school mathematics with students' out-of-school knowledge. *ZDM*, *33*(3), 75–84. https://doi.org/10.1007/BF02655698

Bonotto, C. (2013). Artifacts as source for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 37–55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Borko, H., Frykholm, J. A., Pittman, M. E., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J. K., Clark, K. K. y Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. ZDM: International reviews on mathematical education, 37(1), 43–52. https://doi.org/10.1007/BF02655896

Branco, N. y Ponte, J. P da (2012). Developing algebraic and didactical knowledge in pre-service primary teacher education. *Proceedings of the 36th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 75–82). PME.

Breda, A., Pino-Fan, L. R. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *13*(6), 1893–1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Brown, S. I. y Walter, M. I. (1990). *The art of problem posing*. Lawrence Erlbaum.

Bryant, P. y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review* (full report). The Nuffield Foundation.

Buforn, A. y Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *BOLEMA*, *28*(48), 21–41. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a02

Buforn, A., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Conocimiento del razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro y cómo reconocen características de la comprensión de los estudiantes. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 167-176). SEIEM.

Buforn, A., Llinares, S. y Fernández, C. (2018). Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción. *RMIE*, *23*(76), 229–251. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6523386

Buforn, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. y Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1–9. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333

Burgos, M. (2023). *Razonamiento algebraico elemental: implicaciones en la formación de profesores*. https://lc.cx/UVNnea

Burgos, M. y Chaverri, J. (2022). Conocimientos y competencias de futuros maestros para la creación de problemas de proporcionalidad. *Acta Scientiae, 24*(6), 270–306. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7061

Burgos, M. y Chaverri, J. (2023a). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria. *Uniciencia, 37*(1), 1–24. http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14

Burgos, M. y Chaverri, J. (2023b). Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad. *Aula Abierta, 52*(1), 43–52. https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52

Burgos, M. y Godino J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática, 31*(3), 117–150. https://doi.org/10.24844/EM3103.05

Burgos, M. y Godino J. D. (2022a). Assessing the Epistemic Analysis Competence of Prospective Primary School Teachers on Proportionality Tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*, 367–389. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10143-0

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020a). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria, *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 1–20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M. y Godino, J. D. (2020b). Prospective primary school teachers' competence for analysing the difficulties in solving proportionality problem. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00344-9

Burgos, M. y Godino, J. D. (2021). Conocimiento didáctico-matemático de la proporcionalidad en futuros maestros de educación primaria. *Profesorado, 25*(2), 281–306. https://doi.org/10.30827/profesorado.v25i2.8725

Burgos, M. y Godino, J. D. (2022b). Prospective Primary School Teachers' Competence for the Cognitive Analysis of Students' Solutions to Proportionality Tasks. *J Math Didakt, 43*, 347–376. https://doi.org/10.1007/s13138-021-00193-4

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Godino, J. (2018). Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa*, 44, 1–22. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844182013

Burgos, M., Chaverri, J. y Castillo, M. J. (2022). Creación de problemas matemáticos en la formación de maestros de primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 597). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/25/ActasXXVSEIEM.pdf

Burgos, M., Chaverri, J. y Tizón-Escamilla, N. (2022). Mathematical problem posing in teacher training, *EDULEARN22 Proceedings*, 3155−3164. https://doi.org/10.21125/edulearn.2022.0780

Burgos, M., López-Martín, M. del M., Aguayo-Arriagada, C. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia*, *36*(1), 1–24. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.38

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023a). Creación de problemas de probabilidad y razonamiento proporcional. Una experiencia con maestros en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 171–179). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/26/ActasXXVISEIEM.pdf

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023b). Procesos en la creación de problemas matemáticos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 559). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/26/ActasXXVISEIEM.pdf

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023c). Ontosemiotic analysis on problem-solving and problem-posing. *INTED2023 Proceedings*, 751–758. https://library.iated.org/publications/INTED2023/start/125

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024a). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00482-w

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024c). Problem-posing mega-process in teacher education. Developing algebraic reasoning in the probabilistic context. *INTED2024 proceedings*, 329–337. https://doi.org/10.21125/inted.2024.0136

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Mtaemática, 16*(1), 113–148. https://doi.org/10.24844/EM1601.05

Cai, J. y Cifarelli, V. V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 27*(3), 43–72.

Cai, J. y Hwang, S. (2022). Seeing Algebra in Arithmetic Through Mathematical Problem Posing. *Journal of Educational Research in Mathematics*, *32*(3), 309–329. https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.3.309

Cai, J. y Jiang, C. (2017). An analysis of problem-posing tasks in Chinese and US elementary mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(8), 1521–1540. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9758-2

Cai, J. y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R. y Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: task variables, processes, and products. En C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, y N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119–145). PME. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/126487/1/proceedings-pme-45-vol1-07.pdf

Cai, J., Moyer, J. C., Wang, N., Hwang, S., Nie, B. y Garber, T. (2013). Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 57–69. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9429-3

Cai, J., y Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, *105*(3), 287–301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Calvo, M. (2008). Enseñanza eficaz de la resolución de problemas en matemáticas. *Revista Educación*, *32*(1), 123–138. https://doi.org/10.15517/revedu.v32i1.527

Cankoy, O. (2003). Perceptions of pre-service elementary teachers in Turkish Republic of Northern Cyprus about difficulty level of mathematical problems. *Hacettepe University Journal of Education Faculty*, *25*, 26–30. http://www.efdergi.hacettepe.edu.tr/shw_artcl-855.html

Carraher, D. y Schliemann, A. (2018). Cultivating early algebraic thinking. In C. Kieran (Ed.). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice* (pp. 107–138) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_5

Castro, E. (2011). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* – 2011 (pp. 1–16). Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/2015/

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2014). Preservice elementary teacher´s thinking about algebraic reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 9*(2), 147-162.

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing. *PNA*, *6*(4), 135–146. http://hdl.handle.net/10481/20053

Chapman. O. (2014). Overall commentary: understanding and changing mathematics teachers. En J.–J. Lo, K. R. Leatham y L. R. Van Zoest (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 295–309). Dordrecht: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02562-9_16

Chaverri, J. (2021). *La invención de problemas en la formación de maestros: el caso de la proporcionalidad.* Trabajo de Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Chaverri, J. y Burgos, M. (2023). Conocimientos y competencia de creación de problemas: un estudio de caso sobre proporcionalidad con futuros maestros. En S. Caviedes., J.G. Lugo-Armenta., L.R. Pino-Fan. y A. Sánchez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática* (pp. 295–304). Universidad de Los Lagos. https://cididmat.ulagos.cl/

Chen, T. y Cai, J. (2020). An elementary mathematics teacher learning to teach using problem posing: A case of the distributive property of multiplication over addition. *International Journal of Educational Research, 102,* 101420. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.03.004

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D. y Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM Mathematics Education, 37*(3), 149–158. https://doi.org/10.1007/s11858-005-0004-6

Cifarelli, V. V. y Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*, 302–324. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.007

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. https://doi.org/10.3102/0013189X032001009

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2018). *Research methods in education (8th ed.)*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9781315456539

Contreras, J. (2007). Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problems: Using a Problem-Posing Framework With Prospective Mathematics Teachers. *The Mathematics Educator, 17*(2), 15–23. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ841562.pdf

Copur-Gencturk, Y., Baek, C. y Doleck, T. A. (2023). Closer Look at Teachers' Proportional Reasoning. *Int J of Sci and Math Educ, 21*, 113–129. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10249-7

Cramer, K. y Post, T. (1993). Connecting research to teaching proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404–407. http://www.jstor.org/stable/27968390

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 243–270. https://doi.org/10.1023/A:1024364304664

Crespo, S. y Harper, F. K. (2020). Learning to pose collaborative mathematics problems with secondary prospective teachers. *International Journal of Educational Research, 102*. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.003

Crespo, S. y Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(5), 395–415. https://doi.org/10.1007/s10857-008-9081-0

Cruz, M. (2006). A mathematical problem–formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 79–90.

Cuevas-Vallejo, A., Islas-Ortiz, E. y Orozco-Santiago, J. (2023). Promover el razonamiento proporcional mediante la tecnología digital. *Apertura, 15*(1), 84–101. http://doi.org/10.32870/Ap.v15n1.2344

Dole, S. (2010). Promoting Percent as a Proportion in Eighth-Grade Mathematics. *School Science and Mathematics, 10*(7), 345–396. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb18180.x

Elgrably, H. y Leikin, R. (2021). Creativity as a function of problem-solving expertise: posing new problems through investigations. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 891–904. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01228-3

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 87–101. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9449-z

English, L. D. (1998). Children's problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 83–106. https://doi.org/10.2307/749719

English, L. D. (2008). Setting an agenda for international research in mathematics education. En *Handbook of international research in mathematics education, 2nd Edition* (pp. 3–19). Routledge.

English, L. D. y Watson, J. M. (2015). Statistical literacy in the elementary school: Opportunities for problem posing. In M. Singer, N. Ellerton, y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 241–256). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_11

Erdogan, F. (2020). Prospective middle school mathematics teacher's problem posing abilities in context of Van Hiele levels of geometric thinking. *International Online Journal of Educational Sciences, 12*(2), 132–152. https://doi.org/10.15345/iojes.2020.02.009

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Falmer.

Escuela de Matemática de la UCR. (2022). Programa del curso MA-0033 Seminario en Educación Matemática. *Escuela de Matemática.*

Espinoza, J. (2013). *Resolución e invención de problemas en la Educación Matemática.* Comunicación presentada en XV Evento internacional MATECOMPU: la enseñanza de la Matemática, la Estadística y la Computación. Matanzas.

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 14*(2), 1–12. https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1664

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2016). La invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 14*(2), 368–392. https://doi.org/10.14204/ejrep.39.15067

Espinoza, J., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2018). Diseño de un instrumento de invención de problemas para caracterizar el talento matemático. *Ciencia y Tecnología, 34*(2), 14–25. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cienciaytecnologia/article/view/36626

Felmer, P., Pehkonen, E. y Kilpatrick, J. (Eds.). (2016). *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3

Fernández, C. y Llinares, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M. Moreno, J. Carrillo, y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281–290). SEIEM.

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34*(1), 67–80. https://doi.org/10.1174/021037011794390111

Fernández, C. y Llinares, S. (2012) Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), pp. 129–142. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through online discussions. *ZDM. Mathematics Education, 44*(6), 747–759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problema solving. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1), 441–468. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1274

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 39–61. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229

Fernández, M. E. y Carrillo, J. (2020). Un acercamiento a la forma en que los estudiantes de primaria formulan problemas. *Revista de Educação Matemática, 17*, 1–19. https://doi.org/doi.org/10.37001/remat25269062v17id257

Fernández-Millán, E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 34*(1), 53–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455

Ferreira, M. C. N., Da Ponte, J. P. y Ribeiro, A. J. (2022). Towards and Approach to Teachers' Professional Development: How to Work with Algebraic Thinking in the Early Years. *PNA*, *16*(2), 167–190. https://doi.org/10.30827/pna.v16i2.22234

Fiol, M. L. y Fortuny, J. M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Síntesis.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 33–52. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7

Font, V., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017) Algunas implicaciones didácticas derivadas de la complejidad de los objetos matemáticos cuando estos se aplican a distintos contextos, *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 10*(2), 1–23. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n2.5981

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Godino, J. D. y Contreras, A. (2008). From representation to onto-semiotic configurations in analysing mathematics teaching and learning processes. In, L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture* (pp. 157–173). Sense Publishers.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics 39*(1), 38–43. https://www.jstor.org/stable/26742011

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199–219. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo CIVEOS*. Disponible en http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90–113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2–3), 167–200. https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. y Lurduy, O. (2009). Sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos como herramientas para el análisis semiótico en educación matemática. XIII Simposio de la SEIEM. https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/dmdc/Godino_Font_Wilhelmi_Lurduy_R.pdf

Gómez, B., y García, A. (2014). Componentes críticas en tareas de comparación de razones desiguales. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*, *XVIII* (pp. 375–384). SEIEM.

Grundmeier, T. (2015). Developing the Problem-Posing Abilities of Prospective Elementary and Middle School Teachers. En F.M. Singer et al. (Eds.), *Mathematical Problem Posing*, *Research in Mathematics Education* (pp. 411–431). https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_20

Guo, Y., Yan, J. y Men, T. (2021). Chinese junior high school students' mathematical problem-posing performance. *ZDM – Mathematics Educacion*, *53*, 905–917. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01240-7

Headrick, L., Wiezel, A., Tarr, G., Zhang, X., Cullicott, C., Middleton, J. y Jansen, A. (2020). Engagement and affect patterns in high school mathematics classrooms that exhibit spontaneous problem posing: An exploratory framework and study. *Educational Studies in Mathematics, 105*, 435–456. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09996-7

Hilton, A. y Hilton, G. (2019). Primary school teachers implementing structured mathematics interventions to promote their mathematics knowledge for teaching proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *22*, 545–574. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9405-7

Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*, 231–257. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9324-9

Isik, A., Isik, C. y Kar, T. (2011). Analysis of the problems related to verbal and visual representations posed by pre-service mathematics teachers. *Pamukkale University Journal of Education*, *30*(1), 40–49.

Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S.y Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: using a hypothetical learning trajectory to improve preservice primary teachers' professional discourse. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(11), em1599. https://doi.org/10.29333/ejmste/93421

Izsák, A. y Jacobson, E. (2017). Preservice teachers' reasoning about relationships that are and are not proportional: A knowledge-in-pieces account. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 300–339. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.3.0300

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135–150.

Kaput, J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? En Kaput, J.J. Kaput, D.W. Carraher y M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435-2

Kar, T. (2016). Prospective middle school mathematics teachers' knowledge of linear graphs in context of problem-posing. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *8*(4), 643–658. https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/138

Kaur, A. y Rosli, R. (2021). Problem Posing in Mathematics Education Research: A Systematic Review. *International Journal of Academic Research in Progressive Education and Development, 10*(1), 438–456. https://doi.org/10.6007/IJARPED/v10-i1/8641

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). https://hdl.handle.net/20.500.12365/17680

Kieran, C. (2022) The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1131–1150. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6

Kilhamn, C., Röj-Lindberg, AS. y Björkqvist, O. (2019). School Algebra. En Kilhamn, C., Säljö, R. (Eds.) *Encountering Algebra.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17577-1_1

Kiliç, Ç. (2013a). Determining the Performances of Pre-Service Primary School Teachers in Problem Posing Situations. *Educational Sciences: Theory & Practice, 13*(2), 1207–1211. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1017363.pdf

Kiliç, Ç. (2013b). Pre-Service Primary Teachers' Free Problem-Posing Performances in the Context of Fractions: An Example from Turkey. *The Asia Pacific Education Researcher*, *22*(4), 677–686. https://doi.org/10.1007/s40299-013-0073-1

Kılıç, Ç. (2017). A new problem-posing approach based on problem-solving strategy: Analyzing pre-service primary school teachers' performance. *Educational Sciences: Theory & Practice, 17*, 771–789. http://dx.doi.org/10.12738/ estp.2017.3.0017

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Shoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp 123–148). Lawrance Erlbaum Associates.

Koichu, B. (2020). Problem posing in the context of teaching for advanced problem solving. *International Journal of Educational Research, 102,* 101428. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.001

Koichu, B. y Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics 83*, 71–86 (2013). https://doi.org/10.1007/s10649-012-9431-9

Kontorovich, I., Koichu, B., Leikin, R. y Berman, A. (2012). An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 149–161. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.002

Kwek, M. L. (2015). Using problem posing as a formative assessment tool. En F. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: from research to effective practice* (pp. 273–292). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_13

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Information Age Pub Inc.

Leavy, A. y Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*, 341–361. https://doi.org/10.1007/s10857-018-09425-w

Lee, Y., Capraro, R. M. y Capraro, M. M. (2018). Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Problem Posing. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 13*(2), 75–90. https://doi.org/10.12973/iejme/2698

Leikin, R. y Elgrably, H. (2020). Problem posing through investigations for the development and evaluation of proof-related skills and creativity skills of prospective high school mathematics teachers. *International Journal of Educational Research, 102*, 101424. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.002

Leont'ev, A.N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentice-Hall.

Leung, S. K. y Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 5–24. https://doi.org/10.1007/BF03217299

Li, X., Song, N., Hwang, S. y Cai, J. (2020). Learning to teach mathematics through problem posing: teachers' beliefs and performance on problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 325–347. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09981-0

Lindquist, M., Philpot, R., Mullis, I. V. y Cotter, K. E. (2019). TIMSS 2019 mathematics framework. En I. V. S. Mullis y M. O. Martin (Eds.), *2019 assessment frameworks* (pp. 11–25). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. https://timss2019.org/wp-content/uploads/frameworks/T19-Assessment-Frameworks-Chapter-1.pdf

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22–43. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ960954.pdf

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de la matemática para Primaria* (pp. 187–220). Pearson Prentice Hall.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, À., y Groenwald, C. (2019). «Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor* *de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177–192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Lo, J-J. (2004). Prospective elementary school teachers' solution strategies and reasoning for a missing value proportion task. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3,* 265–272. https://eric.ed.gov/?id=ED489581

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for research in mathematics education* (pp. 336–345). University of Rzeszów.

Lundberg, A. y Kilhamn, C. (2018). Transposition of Knowledge: Encountering Proportionality in an Algebra Task. *International Journal of Sciences and Mathematics Education 16,* 559–579. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9781-3

Malara, N. A. y Navarra G. (2018). New words and concepts for early algebra teaching: sharing with teachers epistemological issues in early algebra to develop students' early algebraic thinking. En C. Kieran (Ed.). *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-year-olds. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practic*e (pp. 51–77). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_3

Malaspina, U. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. En SEMUR, *Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Ed.), VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 129–140). SEMUR. http://funes.uniandes.edu.co/18892/1/Malaspina2013La.pdf

Malaspina, U. (2016). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En A. Ruiz (Ed.), *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (pp. 321–331). Universidad de Costa Rica. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/23946

Malaspina, U. y Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En U. Malaspina (Ed.), *Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática* (pp. 7–54). Editorial Moshera S.R.L.

Malaspina, U., Mallart, A. y Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861–2866). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289630

Malaspina, U., Torres, C. y Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, y L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving* (pp. 133–151). Suiza: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Mallart, A., Font, V. y Diez, J. (2018). Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(4), 1465–1481. https://doi.org/10.29333/ejmste/83682

Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles educativos, 38*(152), 14–30. https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57585

Mallart-Solaz, A. (2019). Interés de los futuros maestros en saber crear problemas de matemáticas para enseñar a resolverlos. *Psicología Educativa*, *25*(1), 31–41. https://doi.org/10.5093/psed2018a17

Martínez, M. y Romero, T. (2019). Transición de la aritmética al álgebra: Un estudio con estudiantes universitarios de Nicaragua. *Revista Electrónica De Conocimientos, Saberes y Prácticas*, *2*(2), 29–39. https://doi.org/10.5377/recsp.v2i2.9297

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435–444). SEIEM.

Mayer, R. E., Lewis, A. B. y Hegarty, M. (1992). Mathematical misunderstandings: Qualitative rea- soning about quantitative problems. En J. I. D. Campbell (Ed.), *The nature and origins of mathematical skills* (pp. 137–154). Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0166-4115(08)60886-9

Milinković, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. En J. Cai, N. Ellerton y F.M. Singer (Eds.), *Mathematical Problem Posing: From Research to*

Effective Practice (pp. 47–70). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_3

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012). *Programas de estudio de Matemáticas.* San José, Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf

Ministerio de Educación y Formación Profesional (MEFP) (2022). Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado, 52 (I), 24386- 24504

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 113–157. http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v24n1/v24n1a6.pdf

Monje Parrilla, J. y Gómez Alfonso, B. (2019). Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales. *Enseñanza de las ciencias*, *37*(2), 151–172. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2606

Nagar, G. G., Weiland, T., Brown, R. E., Orrill, C. H., y Burke, J. (2016). Appropriateness of proportional reasoning: Teachers' knowledge used to identify proportional situations. En M. B. Wood, E. E. Turner, M. Civil, y J. A. Eli (Eds.), *Proceedings of the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 474–481). Universidad de Arizona.

Nathan, M. J. y Koedinger, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(2), 168–190. https://doi.org/10.2307/749750

National Council Teacher Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston.

Neill, D., Quesada, C. y Arce, J. (2018). Investigación cuantitativa y cualitativa. En D. Neill y L. Cortez (Coord.), *Procesos y Fundamentos de la Investigación Científica* (pp. 68–88). UTMACH.

Norton, S. (2005). The construction of proportional reasoning. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17–24). Melbourne, Australia: PME.

Obando, G., Vasco, C. E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Relime*, *17*(1), 59–81. https://doi.org/10.12802/relime.13.1713

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2005). *Marcos teóricos de PISA 2003: Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas*, Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo. https://doi.org/10.1787/9789264065963-es

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2007). *PISA 2006: Marco de la evaluación Conocimientos y habilidades en ciencias, matemáticas y lectura*. https://doi.org/10.1787/9789264066168-es.

Ontario Ministry of Education and Training (OMET) (2005). *The Ontario Curriculum: Grades 11 and 12, business education*.

Ortiz, J.J., Mohamed, N., Batanero, C., Serrano, L. y Rodríguez, J. D. (2006). Comparación de probabilidades en maestros en formación. En Bolea, M.P.; Moreno, M.; González, M.J. (Eds.), *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 267–276). Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Osana, H., Lacroix, G., Tucker, B. y Desrosieres, C. (2006). The role of content knowledge and problem features on preservice teachers' appraisal of elementary mathematics tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 347–380. https://doi.org/10.1007/s10857-006-4084-1

Parker, M. y Leinhardt, G. (1995) Percent: a privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421–481. https://doi.org/10.2307/1170703

Patáková, E. (2014). Expert recurrence of linear problem posing. *Procedia – Social and Behavioral Sciences, 152*, 590–595. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.09.248

Pelczer, I. y Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou y H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 353–360). International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Pincheira, N. y Alsina, A. (2021). El algebra temprana en los libros de texto de Educación Primaria: implicaciones para la formación docente. *Bolema*, *35*(71), 1316–1337. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n71a05

Pino-Fan, L. R., Báez-Huaiquián, D. I., Molina-Cabero, J. G. y Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia, 34*(2), 114–136. https://doi.org/10.15359/ru.34-2.7

Piñeiro, J. L., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2019). Componentes de conocimiento del profesor para la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. *PNA 13*(2), 104–129. https://doi.org/10.30827/pna.v13i2.7876

Pittalis, M., Christou, C., Mousoulides, N. y Pitta-Pantazi, D. (2004). A structural model for problem posing. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 49–56). Bergen University College.

Ponte, J. P. y Henriques, A. (2013). Problem posing based on investigation activities by university students. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 145–156. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9443-5

Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 275–296). New York: Routledge.

Riley, K. J. (2010). Teachers' understanding of proportional reasoning. En P. Brosnan, D. B. Erchick, y L. Flevares (Eds.), *Proceedings of the 32nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 6, pp. 1055–1061). The Ohio State University.

Rivas, M. A., Godino, J. D. y Castro, W. F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema, 26*(42b), 559–588. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200008

Ruiz, E. F. y Valdemoros, M. (2004). Connections between qualitative and quantitative thinking about proportion: The case of Paulina. En M. J. Hoines y A. B. Flugestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 201–208). PME.

Salazar, L. (2017). Invención de problemas contextualizados de probabilidad: una competencia a desarrollar en profesores de matemática. *Revista comunicación*, *26*(2), 38–48. Instituto Tecnológico de Costa Rica. https://doi.org/10.18845/rc.v26i2-17.3443

Santillana (2014). *Matemática 7*. Costa Rica: Santillana.

Schindler, M. y Bakker, A. (2020). Affective field during collaborative problem posing and problem solving: a case study. *Educ Stud Math* 105, 303–324. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09973-0

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17(*1), 153–172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Şengül, S. y Katranci, Y. (2015a). The analysis of the problems posed by prospective mathematics teachers about 'ratio and proportion' subject. *Procedia. Social and Behavioral Sciences, 174*, 1364–1370. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.760

Şengül, S. y Katranci, Y. (2015b). Free problem posing cases of prospective mathematics teachers: Difficulties and solutions. *Procedia. Social and Behavioral Sciences, 174,* 1983–1990. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.864

Serin, M. K. (2019). Analysis of the problems posed by pre-service primary school teachers in terms of type, cognitive structure and content knowledge. *International Journal of Educational Methodology, 5*(4), 577–590. https://doi.org/10.12973/ijem.5.4.577

Silber, S. y Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 877–889. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01272-z

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28. https://www.jstor.org/stable/40248099?origin=JSTOR-pdf

Silver, E. A. (2013). Problem-posing research in mathematics education: looking back, looking around, and looking ahead. *Educational studies in mathematics, 83*(1), 157–162. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9477-3

Silver, E. A. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. Journal for Research in Mathematics Education, 27(5), 521–539. https://doi.org/10.2307/749846

Silver, E. A. y Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching children mathematics*, *12*(3), 129–135. https://doi.org/10.5951/TCM.12.3.0129

Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S. y Kenney, P. A. (1996). Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 293–309. https://doi.org/10.2307/749366

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: mathematical and pedagogical perspectives. *International Reviews on Mathematical Education*, *27*(2), 67–72.

Silvestre, A. I. y Ponte, J. P. (2011). Una experiencia de enseñanza dirigida al desarrollo del razonamiento proporcional. *Revista Educación y Pedagogía*, *23*(59), 137–158. https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/8714/8016

Simpson, A. y Haltiwanger, L. (2017). This is the first time I've done this: Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(4), 335–355. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9352-0

Singer, F. y Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational studies in mathematics*, *83*(1), 9–26. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9422-x

Singer, F. M. y Voica, C. (2015). Is problem posing a tool for identifying and developing mathematical creativity? En F. M. Singer, N. Ellerton y J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing* (pp. 141–174). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_7

Singer, F. M., Ellerton, N. y Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: New questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, *83*, 1–7. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9478-2

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, *84*, 49–70. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 48*(1), 1–27. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y

Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: an analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal, 33*, 455–488. https://doi.org/10.3102/00028312033002455

Steinthorsdottir, O. B. (2006). Proportional reasoning: Variable influencing of the problems difficulty level and one's use of problemsolving strategies. En J. Novotná, H. Moraová, K. M. y N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 5, pp. 169–176). PME.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164–185). MASTEC.

Stoyanova, E. y Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. En P. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Melbourne, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Stylianou, D. A., Stroud, R., Cassidy, M., Knuth, E., Stephens, A., Gardiner, A. y Demers, L. (2019). Putting early algebra in the hands of elementary school teachers: examining fidelity of implementation and its relation to student performance. *Infancia y Aprendizaje, 42*(3), 523–569. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604021

Surcos (2 de noviembre de 2016). UCR abre carrera de Bachillerato y Licenciatura en Educación Matemática. https://surcosdigital.com/ucr-abre-carrera-de-bachillerato-y-licenciatura-en-educacion-matematica/

Tichá, M. y Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133–143. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9455-1

Tizón-Escamilla, N. y Burgos M. (2023). Creation of problems by prospective teachers to develop proportional and algebraic reasonings in a probabilistic context. *Education Sciences*, *13*(12), 1186. https://doi.org/10.3390/educsci13121186

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181–204. https://doi.org/10.1007/BF02400937

Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2008). "The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity". *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(3), 311–342.

Van Harpen, X. Y. y Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 83*, 117–132. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9456-0

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 7*, 27–48. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104

Weiland, T., Orrill, C.H., Nagar, G.G., Brown, R. y Burke, J. (2020). Framing a robust understanding of proportional reasoning for teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(2), 179–202. https://doi.org/10.1007/s10857-019-09453-0

Weiland, T., Orrill, C. H, Brown, R. y Nagar, G. G. (2019). Mathematics teachers' ability to identify situations appropriate for proportional reasoning. *Research in Mathematics Education*, *21*(3), 233–250. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1579668

Wilhelmi, M. R. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/wilhelmi.pdf

Xie, J. y Masingila, J. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *96*(1), 101–118. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9760-9

Xu, B., Cai, J., Liu, Q. y Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research, 102*, 101427. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005

Zapatera, A. y Quevedo, E. (2021). The Initial Algebraic Knowledge of Preservice Teachers. *Mathematics*, *9*, 2117. https://doi.org/10.3390/math9172117

Zhang, L., Stylianides, A. J. y Stylianides. G. J. (2022) Problematizing the notion of problem posing expertise. *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*, Bozen-Bolzano, Italy. https://hal.science/hal-03753510

PUBLICACIONES VINCULADAS CON LA TESIS DOCTORAL

En esta sección se presentan los artículos publicados en revistas y las participaciones en eventos científicos que surgieron como producto de la investigación realidad en este trabajo.

Artículos en revistas

Burgos, M. y Chaverri, J. (2022). Conocimientos y competencias de futuros maestros para la creación de problemas de proporcionalidad. *Acta Scientiae, 24*(6), 270–306. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7061

Burgos, M. y Chaverri, J. (2023a). Creación de problemas de proporcionalidad en la formación de docentes de primaria. *Uniciencia, 37*(1), 1–24. http://dx.doi.org/10.15359/ru.37-1.14

Burgos, M. y Chaverri, J. (2023b). Explorando la percepción de futuros maestros de primaria sobre el pensamiento matemático de los alumnos en un problema de proporcionalidad. *Aula Abierta, 52*(1), 43–52. https://doi.org/10.17811/rifie.52.1.2023.43-52

Burgos, M. y Chaverri, J. (2024). Variación de problemas de proporcionalidad para ayudar a los alumnos a superar sus dificultades. Una experiencia con futuros maestros. *Educación Matemática.* (En prensa)

Burgos, M., Chaverri, J. y Muñoz-Escolano, J. (2024). Problem Posing in Mathematics Teacher Training: Developing Proportional Reasoning. *Mathematics teaching-research journal.* (En prensa)

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024a). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00482-w

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024b). Problem creation to articulate proportional and algebraic reasoning (En revisión)

Chaverri, J., Burgos, M. y Gutiérrez, F. (2024). Invención de problemas de proporcionalidad en la formación de profesores de secundaria. (En revisión)

Actas de congresos científicos

Burgos, M., Chaverri, J. y Castillo, M. J. (2022). Creación de problemas matemáticos en la formación de maestros de primaria. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (p. 597). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/25/ActasXXVSEIEM.pdf

Burgos, M., Chaverri, J. y Tizón-Escamilla, N. (2022). Mathematical problem posing in teacher training, *EDULEARN22 Proceedings*, 3155−3164. https://doi.org/10.21125/edulearn.2022.0780

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023a). Creación de problemas de probabilidad y razonamiento proporcional. Una experiencia con maestros en formación. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 171–179). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/26/ActasXXVISEIEM.pdf

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023b). Procesos en la creación de problemas matemáticos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (p. 559). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/26/ActasXXVISEIEM.pdf

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2023c). Ontosemiotic analysis on problem-solving and problem-posing. *INTED2023 Proceedings*, 751–758. https://library.iated.org/publications/INTED2023/start/125

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N. y Chaverri, J. (2024c). Problem-posing mega-process in teacher education. Developing algebraic reasoning in the probabilistic context. *INTED2024 proceedings*, 329–337. https://doi.org/10.21125/inted.2024.0136

Chaverri, J. y Burgos, M. (2023). Conocimientos y competencia de creación de problemas: un estudio de caso sobre proporcionalidad con futuros maestros. En S. Caviedes., J.G. Lugo-Armenta., L.R. Pino-Fan. y A. Sánchez (Eds.), *Actas del Primer Congreso Internacional de Didáctica de la Matemática* (pp. 295–304). Universidad de Los Lagos. https://cididmat.ulagos.cl/

Tizón-Escamilla, N., Burgos, M. y Chaverri, J. (2024). Variación de problemas de probabilidad para promover aprendizaje. Una experiencia con docentes en formación inicial. *Investigación en Educación Matemática XXVII*. SEIEM.

ANEXOS

Anexo I. Instrumento usado en la acción formativa con maestros en formación (Capítulo 4)

UNIVERSIDAD DE GRANADA Departamento de Didáctica de la Matemática	Diseño y desarrollo del Currículum en Educación Primaria

PRÁCTICA CREACIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS ESCOLARES

Objetivos

- Poner en juego los conocimientos matemáticos y didácticos para diseñar una tarea matemática escolar.
- Identificar los elementos de una tarea matemática escolar para crear tareas por variación.
- Relacionar la utilización de tareas matemáticas escolares con la enseñanza para lograr objetivos de aprendizaje.

Documentos de estudio

Segovia, I. y Rico, L. (Coord.) (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Godino, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.

Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñanza de las matemáticas. En Flores, P. Y Rico, L. (eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid, Pirámide.

Gestión del aula. Creación de tareas matemáticas escolares. Presentación de clase (En Prado).

Malaspina, U. y Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En Malaspina, U. (Ed.) Reflexiones y Propuestas en Educación Matemática (pp. 7 – 54). Lima: IREM-PUCP. Disponible en https://core.ac.uk/download/pdf/328834474.pdf

Metodología

Trabajando en equipo debéis resolver las siguientes tareas de manera justificada y entregar un informe con la solución. Se proponen actividades relativas a la creación de problemas en los tres ámbitos considerados: por variación, elaboración a partir de un requerimiento matemático y elaboración a partir de un requerimiento didáctico-matemático.

Creación de problemas por variación.

1. A partir de la siguiente situación, sacada de un libro de texto de educación primaria, debéis crear tres problemas por variación, de manera que en cada uno de ellos varíen respecto del inicial, al menos dos elementos distintos, es decir, que en los tres problemas que creéis no se cambien siempre los mismos elementos respecto del enunciado inicial.

Calcula el dato que falta.

ENTRADAS	17	9
PRECIO	85	x

Recuerda que, en la variación de un problema dado se construye un nuevo problema, modificando uno o más de los cuatro elementos del problema inicial (pero no todos). Estos elementos son:

- La *información*: datos cuantitativos o relacionales que se dan en el problema.
- El *requerimiento*: lo que se pide que se encuentre, examine o concluya, que puede ser cuantitativo o cualitativo, incluyendo gráficos y demostraciones.
- El *contexto*: puede ser intra matemático o extra matemático. Suele llamarse “problema contextualizado” a aquel que está relacionado con alguna situación real, con la vida cotidiana.
- El *entorno matemático*: el contenido matemático en el que se incluyen los objetos matemáticos que intervienen o pueden intervenir para resolver el problema (por ejemplo: divisibilidad, proporcionalidad, medida, estadística, probabilidad, ...)

Creación de problemas a partir de un requerimiento didáctico-matemático.

2. Crea un problema en el que los alumnos deban distinguir situaciones proporcionales de situaciones aditivas y no todas las razones que intervengan sean enteras (es decir, no siempre se establezcan relaciones de divisibilidad entre los términos).

Creación de problemas a partir de una situación.

3. Crea a partir de la siguiente situación dos problemas **de proporcionalidad** en los que consideres que el grado de complejidad es distinto. Identifica en cada caso, los objetos matemáticos que intervienen y las posibles dificultades que podrían encontrar alumnos de primaria, indicando el curso para el que estarían destinados.

Dos amigos han ido a un parque de atracciones. Julio se ha montado en 8 atracciones y le ha costado 17.80 €. Clara se ha montado en 10 atracciones y ha pagado 21 €.

Anexo II. Instrumento usado en la acción formativa con futuros profesores de secundaria españoles (Capítulo 6)

TALLER CREACIÓN DE PROBLEMAS PARA DESARROLLAR EL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL

Cuestionario inicial

1. ¿Qué características consideras que debería tener un buen problema matemático?

2. ¿De qué factores crees que depende el grado de complejidad de un problema matemático?

3. ¿Qué conocimientos y habilidades crees que necesita un profesor para crear un buen problema matemático?

Tarea 1

Crea un problema que se resuelva aplicando razonamiento proporcional para cada uno de los tres siguientes contextos: aritmético, geométrico y probabilístico. Finalmente, resuélvelo.

En cada problema:

a) Indica de qué forma se emplea el razonamiento proporcional.

b) Identifica los objetos (conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) y los procesos matemáticos (enunciación, significación, algoritmización, argumentación, representación, particularización, generalización,…) que aparecen involucrados.

c) Identifica de manera justificada el grado de complejidad implicado en la solución de cada uno.

Tarea 2

A continuación, se proponen algunas situaciones descritas a través de imágenes. Para cada situación debes crear un problema que involucre el razonamiento proporcional en el contexto dado y responda al requerimiento establecido.

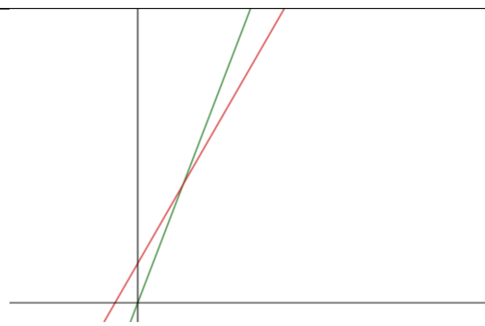
Situación A:

Contexto: Aritmético

Finalidad: El problema debe motivar que el alumno entienda la naturaleza proporcional de los porcentajes.

Resuelve el problema, destacando cómo se usan estas propiedades.

Situación B:

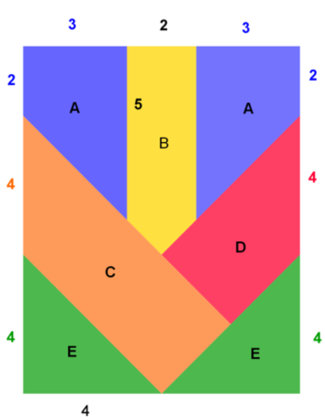


Contexto: Funcional

Finalidad: El problema debe motivar que el alumno use las propiedades de la relación de proporcionalidad directa (aditiva, multiplicativa: relación escalar y relación funcional)

Resuelve el problema, destacando cómo se usan estas propiedades.

Situación C:



Contexto: Geométrico

Finalidad: El problema debe motivar que el alumno use las propiedades de la relación de proporcionalidad directa (aditiva, multiplicativa: relación escalar y relación funcional)

Resuelve el problema, destacando cómo se usan estas propiedades.

Anexo III. Instrumento usado en la acción formativa con futuros profesores de secundaria costarricenses (Capítulo 7)

MA0033 SEMINARIO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Nombre: ____, carné ______________, cédula de identidad _________________________.

Tarea 1

Crea un problema de proporcionalidad del nivel de conexión para alumnos de 6º curso de educación primaria que se encuentran acabando el tema de proporcionalidad directa y porcentajes. Después de resolverlo modifícalo para crear un segundo problema que sea del nivel de complejidad de reflexión. Resuélvelo y justifica por qué responde a dicho nivel de complejidad.

Tarea 2

I Parte. Para cada uno de los contextos: aritmético, geométrico, probabilístico, crea un problema que se resuelva aplicando razonamiento proporcional y resuélvelo.

II Parte. En los problemas creados en la I Parte, identifica el grado de complejidad, los objetos y procesos involucrados.

Tarea 3

Considere el siguiente problema (tomado de un libro de Santillana).

> *Ciento cincuenta obreros realizan una obra en 24 días. Si se desea terminar la obra 4 días antes de lo planeado, ¿se requiere más o menos obreros? ¿Cuántos?* (Matemática 7, 2014, p. 104)

Resuelva el problema. Señale cuáles son las posibles dificultades que puede encontrar un estudiante al tratar de resolverlo. Luego cree por variación un problema que facilite la comprensión por parte de los estudiantes. Indique en cada caso los elementos que ha variado en el enunciado y de qué manera permite superar las dificultades del problema dado. Resuelva el problema creado de dos formas diferentes.