

# Técnicas Cuantitativas II

## CONTRASTES DE BONDAD DE AJUSTE Y NO PARAMÉTRICOS

Contrastes de bondad de ajuste  
Contrastes no paramétricos

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

## Introducción

## Contrastes de bondad de ajuste

## Contrastes no paramétricos

Índice

Introducción

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

# Introducción a la Inferencia no Paramétrica

En este tema estudiaremos cómo utilizar métodos no paramétricos para conocer el comportamiento o la distribución que siguen los datos.

## ■ Contrastes de bondad de ajuste

- ☐ Prueba de bondad de ajuste  $\chi^2$ .
- ☐ Prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov.
- ☐ Test de normalidad de Lilliefors.
- ☐ Prueba de Shapiro-Wilk.

## ■ Contrastes no paramétricos

- ☐ Contraste de Mann-Whitney.
- ☐ Test de Rachas de Wald-Wolfowitz.
- ☐ Test de Wilcoxon o prueba de los signos-rangos.

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no  
paramétricos

# Contrastes de bondad de ajuste: $\chi^2$ , Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors y Shapiro-Wilk

# Prueba de bondad de ajuste $\chi^2$

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

El contraste  $\chi^2$  se emplea para decidir si un conjunto de datos provienen de una distribución de probabilidad dada. En general, planteamos:

$$\begin{cases} H_0 : X \text{ sigue una distribución } F(X) \\ H_1 : X \text{ no sigue una distribución } F(X) \end{cases}$$

La idea básica de este contraste consiste en comparar las frecuencias observadas en la muestra, con las que se esperaría haber obtenido si  $H_0$  fuese cierta. El test chi-cuadrado se ha diseñado para su aplicación con distribuciones discretas, sin embargo, es válido también para distribuciones de tipo continuo.

En este contraste trabajaremos con una muestra aleatoria de tamaño  $n$  procedente de una v.a. (población)  $X$  dividida en  $k$  clases exhaustivas y mutuamente excluyentes:

| Categorías             | $S_1$ | $S_2$ | $\dots$ | $S_k$ |     |
|------------------------|-------|-------|---------|-------|-----|
| Frecuencias Observadas | $n_1$ | $n_2$ | $\dots$ | $n_k$ | $n$ |

Con el fin de realizar el contraste se define:

$n_i$ = número de observaciones en la clase  $i$ -ésima

$p_i$ = probabilidad de pertenecer a la categoría  $i$ , según lo esperado.

$E_i$ = número esperado de observaciones en la clase  $i$ -ésima bajo  $H_0$

# Prueba de bondad de ajuste $\chi^2$

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

A partir de los valores definidos definimos el estadístico de contraste como:

$$\chi_{exp}^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$$

donde la distribución del estadístico de contraste será una  $\chi_{k-1}^2$  de  $k - 1$  grados de libertad. Para hallar  $\chi_{exp}^2$  es aconsejable disponer los cálculos en una tabla como sigue:

| $S_i$    | $n_i$    | $p_i = P[x \in S_i]$ bajo $H_0$ | $E_i = n \cdot p_i$ | $(n_i - E_i)^2$ | $\frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|----------|----------|---------------------------------|---------------------|-----------------|-----------------------------|
| $S_1$    | $n_1$    | $p_1$                           | $n \cdot p_1$       | $(n_1 - E_1)^2$ | $\frac{(n_1 - E_1)^2}{E_1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$                        | $\vdots$            | $\vdots$        | $\vdots$                    |
| $S_k$    | $n_k$    | $p_k$                           | $n \cdot p_k$       | $(n_k - E_k)^2$ | $\frac{(n_k - E_k)^2}{E_k}$ |
|          | $n$      | 1                               | $n$                 |                 | $\chi_{exp}^2$              |

La interpretación intuitiva del estadístico de contraste o experimental es *Valores pequeños del estadístico mostrarán una alta concordancia entre las frecuencias que se observan y las que se esperaban, por lo que no se podrá rechazar  $H_0$* . Por otro lado, si el estadístico toma un valor muy grande mostrará la discrepancia entre estas frecuencias y habrá que rechazar  $H_0$ . Luego fijado un nivel de significación  $\alpha$ , se rechaza  $H_0$ , si  $\chi^2 > \chi_{k-1;1-\alpha}^2$ .

## CONDICIÓN DE VALIDEZ DEL TEST.

- Si  $E_i < 5$  entonces  $\chi^2$  se hace grande y por tanto se rechaza  $H_0$  sin razón. Este contraste es apropiado siempre que  $E_i > 5$ , para cualquier valor de  $i$ . Si esto no ocurre tendríamos que agrupar clases vecinas, pero por cada par de clases que se combinen hay que reducir en 1 los grados de libertad de la distribución chi del estadístico.
- Cuando se desee contrastar la hipótesis de que los datos están generados por alguna distribución (p.e. Binomial, Poisson o Normal), con parámetros de dicha distribución desconocidos se utilizarán los datos muestrales para obtener los estimadores puntuales correspondientes, pero los grados de libertad de la chi-cuadrado del contraste se reducirán en una unidad por cada parámetro estimado. En general, si es necesario estimar  $r$  parámetros, la distribución del estadístico de contraste será una  $\chi^2_{k-r-1}$  de  $k - r - 1$  grados de libertad.

# Contraste $\chi^2$ de bondad de ajuste

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

**EJEMPLO 1.** En un cajero automático situado en el extrarradio de una ciudad se ha detectado una baja utilización del mismo por los clientes de la sucursal bancaria. Con el fin de investigar esta afirmación, se ha controlado el número de llegadas al mismo durante las tardes en que la oficina permanece cerrada, contabilizándose los siguientes resultados:

| Número de llegadas al cajero | Número de tardes |
|------------------------------|------------------|
| 0                            | 21               |
| 1                            | 18               |
| 2                            | 7                |
| 3                            | 3                |
| 4 o más                      | 1                |

Con base en esta información, ¿existe alguna razón para creer que el número de llegadas por tarde es una variable de Poisson con parámetro 0.9? ( $\alpha = 0.05$ )

# Contraste $\chi^2$ de bondad de ajuste

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

## SOLUCIÓN

Definimos la variable aleatoria  $X$  como el número de llegadas al cajero por la tarde, cuya función de distribución es una Poisson de parámetro 0.9. Por tanto, planteamos las hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : X \rightarrow P(0.9) \\ H_1 : X \nrightarrow P(0.9) \end{cases}$$

Para hallar las  $p_i$  del cuadro resumen, utilizamos las tablas de la distribución de Poisson y calculamos  $P[X = 0]$ ,  $P[X = 1]$ ,  $P[X = 2]$ ,  $P[X = 3]$ ,  $P[X \geq 4]$ ;

|            | $n_i$ | $p_i = P[x \in S_i]$ bajo $H_o$ | $E_i = n \cdot p_i$ |
|------------|-------|---------------------------------|---------------------|
| $X = 0$    | 21    | 0.4066                          | 20.33               |
| $X = 1$    | 18    | 0.3659                          | 18.3                |
| $X = 2$    | 7     | 0.1647                          | 8.24                |
| $X = 3$    | 3     | 0.0494                          | <b>2.47</b> < 5     |
| $X \geq 4$ | 1     | 0.0134                          | <b>0.67</b> < 5     |
|            | 50    | 1                               | $\cong 50$          |

# Contraste $\chi^2$ de bondad de ajuste

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

Como se puede observar, el número esperado de las observaciones de las clases  $X = 3$  y  $X \geq 4$  son inferiores a 5, por tanto para que se cumpla la condición de validez del test las agrupamos obteniendo:

|            | $n_i$ | $p_i = P[x \in S_i]$ bajo $H_0$ | $E_i = n \cdot p_i$ | $(n_i - E_i)^2$ | $\frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|------------|-------|---------------------------------|---------------------|-----------------|-----------------------------|
| $X = 0$    | 21    | 0.4066                          | 20.33               | 0.4489          | 0.02208                     |
| $X = 1$    | 18    | 0.3659                          | 18.3                | 0.09            | 0.004918                    |
| $X \geq 2$ | 11    | 0.2215                          | 11.38               | 0.1444          | 0.012689                    |
|            | 50    | 1                               | $\cong 50$          |                 | $\chi^2 = 0.0397$           |

Calculamos  $\chi^2_{3-1, 1-0.05} = \chi^2_{2, 0.95} = 5.99$ , como  $\chi^2 = 0.0397 \not\geq \chi^2_{2, 0.95} = 5.99$  entonces no existen razones para rechazar  $H_0$  con una significación del 5%. No podemos rechazar que los datos provengan de una distribución de Poisson de parámetro 0.9. Esta conclusión nos permite afirmar que el cajero es muy poco utilizado ya que el número medio de llegadas esperadas por tarde es menor de 1.



# Contraste $\chi^2$ de bondad de ajuste

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

**EJEMPLO 2.** Una muestra sobre el número de personas que diariamente requieren información de un producto financiero ofrece los resultados 3, 0, 1, 3, 2, 4, 4, 5, 5, 3, 3, 1, 2, 2, 3, 4, 3, 3, 2, 4, 5, 1, 0, 4, 2, 3, 1. ¿Se puede aceptar que el número de personas que requieren la mencionada información se distribuye según una ley de Poisson?

## SOLUCIÓN

Definimos la variable aleatoria  $X$  como el número de personas que diariamente requieren información. Para estudiar si el número de personas sigue una distribución de Poisson, estimamos el valor del parámetro  $\lambda$  a partir de la media de la muestra, es decir,  $\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{73}{27} = 2.7$ . Por tanto, planteamos las hipótesis

$$\begin{cases} H_0 : X \rightarrow P(2.7) \\ H_1 : X \nrightarrow P(2.7) \end{cases}$$

|            | $n_i$ | $p_i = P[x \in S_i]$ bajo $H_0$ | $E_i = n \cdot p_i$ |
|------------|-------|---------------------------------|---------------------|
| $X = 0$    | 2     | 0.0672                          | <b>1.8144</b> < 5   |
| $X = 1$    | 4     | 0.1815                          | <b>4.9005</b> < 5   |
| $X = 2$    | 5     | 0.2450                          | 6.615               |
| $X = 3$    | 8     | 0.2205                          | 5.9536              |
| $X = 4$    | 5     | 0.1488                          | <b>4.0176</b> < 5   |
| $X \geq 5$ | 3     | 0.01370                         | <b>3.699</b> < 5    |
|            | 27    | 1                               | 27                  |

# Contraste $\chi^2$ de bondad de ajuste

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

Al igual que nos pasaba en el ejemplo anterior, agrupamos las dos primeras clases y las dos últimas clases, obteniendo la tabla:

|            | $n_i$ | $p_i = P[x \in S_i]$ bajo $H_0$ | $E_i = n \cdot p_i$ | $(n_i - E_i)^2$ | $\frac{(n_i - E_i)^2}{E_i}$ |
|------------|-------|---------------------------------|---------------------|-----------------|-----------------------------|
| $X \leq 1$ | 6     | 0.2487                          | 6.7149              | 0.5111          | 0.0761                      |
| $X = 2$    | 5     | 0.2450                          | 6.615               | 2.608           | 0.3943                      |
| $X = 3$    | 8     | 0.2205                          | 5.9536              | 2.0465          | 0.7035                      |
| $X \geq 4$ | 8     | 0.2858                          | 7.7166              | 0.2834          | 0.0104                      |
|            | 27    | 1                               | 27                  |                 | $\chi^2 = 1.1843$           |

Hallamos  $\chi_{4-1-1, 1-0.05}^2 = \chi_{2, 0.95}^2 = 5.99$ , como  $\chi^2 = 1.1843 \neq \chi_{2, 0.95}^2 = 5.99$  entonces aceptamos  $H_0$  con una significación del 5%. Luego los datos provienen de una distribución de Poisson de parámetro 2.7.



# Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

El test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) permite contrastar la hipótesis de que los datos observados en una muestra proceden de una población con una distribución de probabilidad continua dada de antemano. La hipótesis que se establece es:

$$\begin{cases} H_0 : X \sim F(X) \\ H_1 : X \not\sim F(X) \end{cases}$$

Para contrastar este supuesto disponemos de una muestra  $x_1, \dots, x_n$  extraída de esa población. Los pasos a seguir a la hora de realizar el contraste son:

1. Se ordenan los valores de la muestra de menor a mayor.
2. Para cada uno de los elementos muestrales, se calcula la función de distribución real bajo  $H_0$ , es decir  $F_0(x_i) = P[X \leq x_i]$  con  $i = 1, \dots, n$ .
3. Se calcula la función de distribución empírica o muestral mediante la expresión siguiente  $F_n(x_i) = \frac{\text{número de observaciones menores o iguales a } x_i}{\text{número total de datos}}$ .
4. Se calcula el **Estadístico experimental**  $D_{exp} = \max |F_0(x_i) - F_n(x_i)|$ .
5. Fijado el nivel de significación  $\alpha$  y conocido el número de elementos en la muestra,  $n$ , se obtiene el valor crítico de la tabla correspondiente al Test K-S sobre Bondad de Ajuste, que denotaremos  $D_\alpha$ .

Se rechaza  $H_0$  si  $D_{exp} > D_\alpha$ .

**EJEMPLO 3** Con un nivel de significación del 5%, contraste la hipótesis de que los siguientes valores muestrales

4, 2, 5, 3, 4, 5, 4, 2

proceden de una distribución normal con media 3.5 y varianza  $1.1^2$ .

## SOLUCIÓN

- Planteamos la hipótesis a contrastar

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(3.5, 1.1^2) \\ H_1 : X \not\sim N(3.5, 1.1^2) \end{cases}$$

- Ordenamos los valores muestrales en orden creciente (2, 2, 3, ..., 5, 5) y calculamos la función de distribución para cada uno de ellos suponiendo que  $H_0$  es cierta, es decir, se supone que los datos pertenecen a una población  $N(3.5, 1.1^2)$ . Por ejemplo,

$$F_0(2) = P[X \leq 2] = P\left[Z \leq \frac{2 - 3.5}{1.1}\right] = P[Z \leq -1.36] = 0.0869.$$

# Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

- Se calcula la función de distribución empírica o muestral.  
 $F_n(2) = \frac{2}{8} = 0.25$     $F_n(3) = \frac{3}{8} = 0.375$     $F_n(4) = \frac{6}{8} = 0.75$     $F_n(5) = \frac{8}{8} = 1$

- Si resumimos toda la información en una tabla, obtenemos:

| Muestra | $n_i$ | $N_i$ | $F_0(x_i)$ | $F_n(x_i)$ | $ F_0(x) - F_n(x) $ |
|---------|-------|-------|------------|------------|---------------------|
| 2       | 2     | 2     | 0.0869     | 0.25       | 0.1631              |
| 3       | 1     | 3     | 0.3264     | 0.375      | 0.0486              |
| 4       | 3     | 6     | 0.6736     | 0.75       | 0.0764              |
| 5       | 2     | 8     | 0.9131     | 1          | 0.0869              |
|         | 8     |       |            |            |                     |

- Se calcula el estadístico experimental

$$D_{exp} = \max |F_0(x) - F_n(x)| = 0.1631$$

- Fijado el nivel de significación al 5%,  $D_{0.05} = 0.45427$ . Por tanto, como  $D_{exp} \neq D_{0.05}$  se mantiene la hipótesis nula. Luego, a un nivel de significación del 5% y teniendo en cuenta la información muestral, se concluye que los datos han sido extraídos de una población normal cuya media y varianza son 3.5 y  $1.1^2$  respectivamente.

**EJEMPLO 4.** Supongamos una muestra aleatoria de tamaño  $n = 6$  constituida por las observaciones 0.38, 0.55, 0.32, 0.48, 0.50, 0.20. A un nivel de significación del 5% ¿se puede afirmar que la muestra considerada procede de una población con función de distribución  $F(X)$ ?

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

**SOLUCIÓN.** Con el fin de saber si los datos considerados pertenecen a una población con función de distribución  $F(X)$  recurriremos al test de K-S. En el cuadro siguiente se muestran los pasos necesarios con el fin de obtener el estadístico de contraste de K-S.

| Muestra | $F_0(x_i)$ | $F_n(x_i)$ | $ F_0(x) - F_n(x) $ |
|---------|------------|------------|---------------------|
| 0.20    | 0.20       | 0.167      | 0.033               |
| 0.32    | 0.32       | 0.333      | 0.013               |
| 0.38    | 0.38       | 0.500      | 0.120               |
| 0.48    | 0.48       | 0.667      | 0.187               |
| 0.50    | 0.50       | 0.833      | 0.333               |
| 0.55    | 0.55       | 1          | 0.450               |

# Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no  
paramétricos

Luego,

$$D_{exp} = \max |F_0(x) - F_n(x)| = 0.450$$

Por otro lado, el valor crítico que se obtiene de la correspondiente tabla es  $D_{0.05} = 0.51926$ , y como consecuencia de que  $D_{exp} \not\geq D_{0.05}$  no hay evidencias significativas, a un nivel de significación del 5%, para rechazar la hipótesis nula. Por tanto, se mantiene la hipótesis de que los datos muestrales han sido extraídos de una población cuya función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$



# Test de Normalidad de Lilliefors

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no  
paramétricos

El test de Kolmogorov-Smirnov no puede ser aplicado en aquellos casos en los que la distribución normal no tiene la información sobre los parámetros poblacionales. En 1967 Lilliefors presentó una modificación del test de K-S con el fin de contrastar la hipótesis de normalidad donde no se especifica el valor de la media y varianza poblacional.

La hipótesis que se desea contrastar sería pues:

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ H_1 : X \not\sim N(\mu, \sigma^2) \end{cases}$$

donde  $\mu$  y  $\sigma^2$  son estimadas con  $\bar{X}$  y  $S_{n-1}^2$  respectivamente.

Los pasos a realizar coinciden con los desarrollados en el test de K-S, la única diferencia que presentan los dos test es la región de rechazo. Los valores críticos que en el test de K-S se obtenían de la tabla del mencionado test ahora son ahora descritos utilizando la tabla de Lilliefors de normalidad y se denotará por  $D_{L,\alpha}$ .

1. Se ordenan los valores de la muestra de menor a mayor.
2. Para cada uno de los elementos muestrales, se calcula la función de distribución real bajo  $H_0$ .
3. Se calcula la función de distribución empírica o muestral.
4. Se calcula el **Estadístico experimental**  $D_{exp} = \max |F_0(x_i) - F_n(x_i)|$ .
5. Fijado el nivel de significación  $\alpha$ , se rechaza  $H_0$  si  $D_{exp} > D_\alpha$ .

# Test de Normalidad de Lilliefors

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Prueba  $\chi^2$

Prueba de K-S

Test Lilliefors

Prueba de S-W

Contrastes no paramétricos

**EJEMPLO 5.** Con el fin de estudiar el número de accidentes laborales en una determinada provincia se ha seleccionado, tras una campaña de información y prevención, una muestra en la cual se recogió el número de accidentes durante seis semanas consecutivas. Los datos muestrales son 8, 11, 9, 7, 9 y 10. ¿Puede decirse, al 10% de significación, que la muestra considerada proviene de una población normal?

**SOLUCIÓN.** Considerando como estimador de  $\mu$  y  $\sigma^2$ , la media muestral,  $\bar{X} = 9$ , y la cuasivarianza,  $S_{n-1}^2 = 1.67$ , respectivamente, la hipótesis a describir es

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(9, 1.67) \\ H_1 : X \not\sim N(9, 1.67) \end{cases}$$

A continuación se resumen todos los resultados obtenidos en cada uno de los pasos:

| Muestra | $F_0(x_i)$ | $n_i$ | $F_n(x_i)$ | $ F_0(x) - F_n(x) $ |
|---------|------------|-------|------------|---------------------|
| 7       | 0.0606     | 1     | 0.167      | 0.1064              |
| 8       | 0.2206     | 1     | 0.333      | 0.1124              |
| 9       | 0.5000     | 2     | 0.667      | 0.1670              |
| 10      | 0.7794     | 1     | 0.833      | <b>0.1870</b>       |
| 11      | 0.9394     | 1     | 1          | 0.0536              |

Como se verifica que  $D_{exp} = 0.1870 \not\leq D_{L,0.10} = 0.297$  entonces se puede afirmar, a un nivel de significación del 10% que los datos han sido extraídos de una población normal.

El test de Shapiro -Wilk se utiliza para comprobar si un conjunto de datos se ajusta a una distribución Normal. Por tanto, el contraste plantea:

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2) \\ H_1 : X \not\sim N(\mu, \sigma^2) \end{cases}$$

Para resolver el contraste debemos seguir los siguientes pasos:

1. Se ordenan los valores de la muestra de menor a mayor.
2. Calcular el **Estadístico experimental** de Shapiro Wilk, dado por:

$$W_{exp} = \frac{\left( \sum_{j=1}^k a_j (x_{n-j+1} - x_j) \right)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

donde  $k = n/2$  si  $n$  es par, o  $k = (n - 1)/2$  si  $n$  es impar. Los coeficientes  $a_i$  se encuentran disponibles en la tablas de Shapiro Wilk.

3. Fijado el nivel de significación  $\alpha$  y conocido el número de elementos en la muestra,  $n$ , se obtiene el valor crítico de la tabla correspondiente al Test de S-W, que denotaremos  $W_{\alpha, n}$ . Se rechaza  $H_0$ , si  $W_{exp} < W_{\alpha}$ .

Con los datos del **EJEMPLO 3.** comprobar si proceden de una población  $N(3.5, 1.1^2)$  utilizando la prueba de Shapiro-Wilk.

**SOLUCIÓN.** La hipótesis a plantear es

$$\begin{cases} H_0 : X \sim N(3.5, 1.1^2) \\ H_1 : X \not\sim N(3.5, 1.1^2) \end{cases}$$

Una vez ordenamos los valores muestrales disponemos los cálculos en la siguiente tabla:

| Muestra | $(x_i - \bar{x})^2$ | $x_{n-i+1} - x_i$       | $a_i$  | $a_i(x_{n-i+1} - x_i)$ |
|---------|---------------------|-------------------------|--------|------------------------|
| 2       | 2.640625            | $x_8 - x_1 = 5 - 2 = 3$ | 0.6052 | 1.8156                 |
| 2       | 2.640625            | $x_7 - x_2 = 5 - 2 = 3$ | 0.3164 | 0.9492                 |
| 3       | 0.390625            | $x_6 - x_3 = 4 - 3 = 1$ | 0.1743 | 0.1743                 |
| 4       | 0.140625            | $x_5 - x_4 = 0$         | 0.0561 | 0                      |
| 4       | 0.140625            |                         |        |                        |
| 4       | 0.140625            |                         |        |                        |
| 5       | 1.890625            |                         |        |                        |
| 5       | 1.890625            |                         |        |                        |
| 29      | 9.875               |                         |        | 2.9391                 |

Por tanto, el Estadístico experimental vendrá dado por  $W_{exp} = \frac{2.9391^2}{9.875} = 0.8747$ . Para un  $\alpha = 0.05$ ,  $W_{\alpha, n} = W_{0.05, 8} = 0.818$ . Por tanto con  $W_{exp} = 0.8747 \not\leq 0.818$  no tenemos evidencias para rechazar la hipótesis nula, por lo que admitimos que los datos siguen una distribución Normal.

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

# **Contrastes no paramétricos: Prueba de Mann-Witney, Prueba de Wald-Wolfowitz y Prueba rangos con signo de Wilcoxon para muestras pareadas**

Sean  $n$  y  $m$  los tamaños de dos muestras aleatorias e independientes entre sí, donde  $n \leq m$ . El contraste de Mann-Whitney nos permite contrastar si las dos muestras consideradas han sido obtenidas de la misma población. La hipótesis a plantear en este caso es:

$$\begin{cases} H_0 : F_0(x) = G_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ H_1 : F_0(x) \neq G_0(x) \end{cases}$$

Los pasos a seguir en la realización del contraste son:

1. Mezclar los datos de ambas muestras en un solo conjunto y ordenar de menor a mayor.
2. Una vez ordenados los datos se le asigna a cada uno su rango o lugar que ocupa dentro del conjunto, en el caso de haber valores repetidos se le asigna como rango el promedio de los rangos que les corresponderían si todas ellas fueran diferentes.
3. Se suman los rangos correspondientes a las observaciones de cada muestra,  $R_1$  y  $R_2$ . La suma total de los rangos cumple la propiedad

$$R_1 + R_2 = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + \frac{m \cdot (m + 1)}{2}$$

4. El Estadístico de Contraste,  $U$ , es el valor mínimo entre  $U_1$  y  $U_2$  donde:

$$U_1 = nm + \frac{n(n+1)}{2} - R_1$$

$$U_2 = nm + \frac{m(m+1)}{2} - R_2 = nm - U_1$$

5. Decisión:

- $n \leq 10$  ó  $m \leq 10$ , se rechazará la hipótesis nula si el  $p$ -valor, obtenido de la tabla de Mann-Whitney, es menor que el nivel de significación,  $\alpha$ .
- $n > 10$ ,  $m > 10$ , se rechazará la hipótesis nula si  $U < U_\alpha$  donde

$$U_\alpha = E(U) + Z_\alpha DT(U)$$

$$\text{siendo } E(U) = \frac{nm}{2} \text{ y } DT(U) = \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}}.$$

**EJEMPLO 6.** ¿Podemos afirmar, a un nivel de significación del 5% que las muestras 1 y 2 han sido extraídas de una misma población?

|           |       |       |       |       |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| Muestra 1 | 6.06  | 14.12 | 24.69 | 13.29 |
| Muestra 2 | 22.34 | 21.86 | 24.69 | 14.12 |

**SOLUCIÓN.** En primer lugar entremezclamos las observaciones ordenándolas en sentido ascendente y a continuación, se le asigna a cada elemento la posición que ocupa (o rango). Debemos tener en cuenta que si hay algún elemento que se repite entonces se considera como rango la media aritmética de los rangos que les corresponden a cada uno.

|      |       |       |       |       |       |       |       |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 6.06 | 13.29 | 14.12 | 14.12 | 21.86 | 22.34 | 24.69 | 24.69 |
| M1   | M1    | M1    | M2    | M.2   | M2    | M1    | M2    |
| 1    | 2     | 3.5   | 3.5   | 5     | 6     | 7.5   | 7.5   |

La suma de los rangos correspondientes a la primera muestra son

$R_1 = 1 + 2 + 3.5 + 7.5 = 14$  y en el caso de la segunda muestra es

$R_2 = 3.5 + 5 + 6 + 7.5 = 22$ . Luego,  $U_1 = 4 \cdot 4 + \frac{4(4+1)}{2} - 14 = 12$  y  $U_2 = 16 - 12 = 4$ .

Por tanto, el estadístico experimental es  $U = \min(U_1, U_2) = \min(12, 4) = 4$ .

Utilizando la tabla correspondiente al contraste de Mann-Whitney se obtiene que el  $p$ -valor para  $n = 4$ ,  $m = 4$  y  $U = 4$  es 0.171. Al ser  $0.171 = p\text{-valor} \geq \alpha = 0.05$  entonces no hay motivos para rechazar  $H_0$ , luego las dos muestras han sido extraídas de la misma población, a un nivel de significación del 5%. ■

**EJEMPLO 7.** Juan y Luisa trabajan en una gran empresa de telecomunicaciones. El gerente piensa que el trabajo realizado por ambos es muy similar. Para aclarar la duda decide estudiar si las ventas realizadas por cada uno de sus trabajadores, en miles, es la misma. A un nivel de significación del 5%, ¿podemos afirmar que la idea que tiene el gerente es correcta?

|      |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Juan | 21 | 18 | 23 | 14 | 18 | 17 | 21 | 22 | 10 | 18 | 22 | 18 |
| Luis | 21 | 12 | 16 | 21 | 29 | 18 | 23 | 20 | 23 | 26 | 28 | 30 |

**SOLUCIÓN.** Procediendo de forma similar al ejemplo anterior se tendría:

|          |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |      |
|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|------|
| Datos    | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 20 | 21   |
| Empleado | J  | L  | J  | L  | J  | J  | J  | J  | J  | L  | L  | J    |
| Rangos   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 8  | 8  | 8  | 8  | 8  | 11 | 13.5 |

  

|          |      |      |      |      |      |    |    |    |    |    |    |    |
|----------|------|------|------|------|------|----|----|----|----|----|----|----|
| Datos    | 21   | 21   | 21   | 22   | 22   | 23 | 23 | 23 | 26 | 28 | 29 | 30 |
| Empleado | J    | L    | L    | J    | J    | J  | L  | L  | L  | L  | L  | L  |
| Rangos   | 13.5 | 13.5 | 13.5 | 16.5 | 16.5 | 19 | 19 | 19 | 21 | 22 | 23 | 24 |

A partir de la información recogida en la tabla se tiene que  $R_1 = 120$  y  $R_2 = 180$ . Luego, si  $U_1 = 102$  y  $U_2 = 42$ , se tiene que  $U = 42$ .

Como  $n = 12$  y  $m = 12$ , se considera que la distribución del estadístico experimental  $U$  se aproxima a una normal. De esta forma, se podrá obtener el valor teórico mediante la expresión

$$U_{\alpha} = \frac{nm}{2} + Z_{\alpha} \sqrt{\frac{nm(n+m+1)}{12}} = 72 - 1.645 \cdot 17.321 = 70.396$$

Al ser  $U_{\alpha} = 70.396 > U = 42$  se concluye, a un nivel de significación del 5%, que la idea que tenía el gerente sobre el trabajo realizado por Juan y Luis no era correcta.

# Test de Rachas de Wald-Wolfowitz para una muestra

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

El test de Rachas de Wald-Wolfowitz permite comprobar la aleatoriedad de una muestra o contrastar si dos muestras aleatorias e independientes, han sido obtenidas de la misma población, al igual que el contraste de Mann-Whitney.

## Test de Aleatoriedad para una muestra

En este caso la hipótesis a plantear es

$$\begin{cases} H_0 : & \text{La muestra seleccionada es aleatoria,} \\ H_1 : & \text{La muestra no es aleatoria.} \end{cases}$$

Pasos a realizar:

1. Se ordenan en sentido creciente las observaciones.
2. Se calcula la mediana de todas las observaciones.
3. Denotamos por  $n_1$  aquellas observaciones que son menores a la mediana y por  $n_2$  aquellas que sean mayores o iguales.
4. Se calcula el número de rachas,  $R$ , que es la sucesión de símbolos idénticos, a los que preceden o siguen otros símbolos. Así, por ejemplo, la serie de resultados - - - + - - + + obtenida al tirar  $n = 8$  veces una moneda, constituye  $R=4$  rachas.

# Test de Rachas de Wald-Wolfowitz para una muestra

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

## 5. Decisión,

- (a) Si  $n_1$  y  $n_2$  son menores o iguales a 20 utilizaremos las tablas de Test de Rachas.  
Se rechaza  $H_0$  si  $R \notin \left[ R_{n_1, n_2, \frac{\alpha}{2}}; R_{n_1, n_2, 1 - \frac{\alpha}{2}} \right]$ .
- (b) Si  $n_1$  ó  $n_2$  son mayores a 20 se rechazará  $H_0$  si  $R < R_\alpha$  donde

$$R_\alpha = E[R] + Z_{\frac{\alpha}{2}} DT(R)$$

siendo

$$\begin{cases} E(R) = \frac{2n_1n_2}{n_1+n_2} + 1 \\ DT(R) = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}} \end{cases}$$

# Test de Rachas de Wald-Wolfowitz para una muestra

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Contrastes no paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

**EJEMPLO 8.** Para estudiar si el número de horas, al día, que los alumnos dedican a ver la televisión influye en las notas de Técnicas Cuantitativas II, se ha considerado una muestra de 19 alumnos, del total de alumnos matriculados. Los 19 alumnos declaran ver la televisión las siguientes horas al día; 5 , 1,0 , 5, 0, 1 , 1, 5, 1, 6, 3 ,3 ,4 , 2, 1, 2, 1, 3, 2. Al 5% de significación, ¿puede considerarse que los alumnos seleccionados para el estudio han sido tomados de una forma aleatoria?

**SOLUCIÓN.** En primer lugar ordenamos los datos para calcular el valor de la Mediana (valor que divide la muestra en dos partes iguales, mantiene el 50% de los datos por encima y por debajo de él). En este caso se tiene que  $Me = 2$ . Una vez obtenido el valor de la mediana, obtenemos las diferencias que hay entre cada observación y la mediana, asignándole  $A$  a los valores menores que la mediana y  $B$  a los valores que son mayores o iguales a  $Me$ .

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 5   | 1   | 0   | 5   | 0   | 1   | 1   | 5   | 1   | 6   |
| $B$ | $A$ | $A$ | $B$ | $A$ | $A$ | $A$ | $B$ | $A$ | $B$ |
| 3   | 3   | 4   | 2   | 1   | 2   | 1   | 3   | 2   |     |
| $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $A$ | $B$ | $A$ | $B$ | $B$ |     |

Así que,  $n_1 = 8$ ,  $n_2 = 11$  y  $R = 11$ , al ser ambos menores de 20, consultamos las tablas del Test de Rachas. A un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  y teniendo en cuenta que  $R_{8,11,0.025} = 5 \leq R = 11 \leq R_{8,11,0.975} = 14$ , no podemos rechazar la hipótesis de aleatoriedad. ■

# Test de Rachas de Wald-Wolfowitz para dos muestras

## Test para dos muestras

En este caso la hipótesis a plantear es

$$\begin{cases} H_0 : F_0(x) = G_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ H_1 : F_0(x) \neq G_0(x) \end{cases}$$

Pasos a realizar:

1. Se entremezclan y ordenan en sentido creciente las observaciones de ambas muestras.
2. Denotamos por  $n_1$  aquellas observaciones que pertenecen a la primera muestra y por  $n_2$  aquellas que sean de la segunda muestra.
3. Se calcula el número de rachas,  $R_{exp}$ .
4. Decisión:
  - (a) Si  $n_1$  y  $n_2$  son menores o iguales a 20 utilizaremos las tablas de Test de Rachas. Se rechaza  $H_0$  si  $R \notin \left[ R_{n_1, n_2, \frac{\alpha}{2}}; R_{n_1, n_2, 1 - \frac{\alpha}{2}} \right]$ .
  - (b) Si  $n_1$  ó  $n_2$  son mayores a 20 se rechazará  $H_0$  si  $R_{exp} < R_\alpha$  donde  $R_\alpha = E[R] + Z_{\frac{\alpha}{2}} DT(R)$ ;  $E(R) = \frac{2n_1 n_2}{n_1 + n_2} + 1$  y  $DT(R) = \sqrt{\frac{2n_1 n_2 (2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}}$ .

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Contrastes no paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

# Test de Rachas de Wald-Wolfowitz para dos muestras

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Contrastes no paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

**EJEMPLO 9.** Un profesor de Técnicas está interesado en introducir una herramienta informática para el desarrollo de su asignatura durante un cuatrimestre. La idea inicial que tiene el docente es que esta herramienta provocará unos mejores resultados en las calificaciones de los alumnos. Sin embargo un compañero cree que con la introducción de la informática no se producirán dichos cambios. Para salir de dudas ambos profesores recogen las calificaciones de 6 estudiantes, las cuales son recogidas en la siguiente tabla.

| Informática (A)    | 6.68 | 6.37 | 7.53 | 3.03 | 6.30 | 7.59 |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|
| No informática (B) | 2.06 | 6.66 | 5.60 | 4.94 | 4.81 | 7.73 |

¿Podemos afirmar a un 5% que la distribución de probabilidad que modelizan las notas de los estudiantes es la misma en ambos grupos?

**SOLUCIÓN.** En primer lugar mezclamos ambas muestras y las ordenamos de mayor a menor, indicando en cada observación a que grupo pertenece.

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2.06 | 3.03 | 4.81 | 4.94 | 5.60 | 6.30 | 6.37 | 6.66 | 6.68 | 7.53 | 7.59 | 7.73 |
| B    | A    | B    | B    | B    | A    | A    | B    | A    | A    | A    | B    |

El estadístico experimental del test de Rachas sería  $R_{exp} = 7$ . Además, como  $n_1 = n_2 = 6$ , se tiene que  $R_{6,6,0.025} = 3$  y  $R_{6,6,0.975} = 11$ , y entonces no tenemos evidencias, a un nivel de significación del 5% para rechazar  $H_0$ . Por tanto, se puede considerar que las notas de los alumnos de ambos profesores se distribuyen de igual forma.

# Test de Wilcoxon o Prueba de los signos-rangos

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

El test de Wilcoxon nos permiten estudiar si dos muestras pareadas, usualmente sobre los mismos individuos en dos momentos diferentes de tiempo, proceden de poblaciones con la misma distribución. Por ejemplo, supongamos que se desea estudiar la efectividad de una dieta considerando, por ello, el peso de un grupo de personas antes y después de someterse a ella. La hipótesis a plantear en este caso será:

$$\begin{cases} H_0 : F_0(x) = G_0(x), \forall x \in \mathbb{R} \\ H_1 : F_0(x) \neq G_0(x) \end{cases}$$

A la hora de realizar el contraste seguiremos los siguientes pasos:

1. Se calcula la diferencia de los valores muestrales en valor absoluto, desechándose aquellos casos en los que la diferencia es nula  $D_i = |X_i - Y_i|$  donde  $i = 1, \dots, n$ .
2. Se ordenan estos valores absolutos de menor a mayor, asignándoles rangos (en caso de empates se asigna el rango medio).
3. Junto a cada número de rango se anota si la diferencia correspondiente tiene signo positivo o negativo. Calculando a continuación la suma de los números de rango positivos ( $R_+$ ) y la de los rangos negativos ( $R_-$ ), verificándose

$$R_+ + R_- = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

# Test de Wilcoxon o Prueba de los signos-rangos

Índice

Introducción

Contrastes de bondad  
de ajuste

Contrastes no  
paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

4. El estadístico de contraste es el valor mínimo entre los dos rangos, es decir

$$\hat{R} = \min\{R_+, R_-\}$$

5. Decisión:

- Si  $n \leq 15$ , se rechazará la hipótesis nula cuando el valor obtenido  $\hat{R}$  sea menor o igual que el valor crítico,  $R_\alpha$ , obtenido de la tabla correspondiente.
- Si  $n > 15$  la distribución del estadístico  $\hat{R}$  bajo la hipótesis nula es aproximadamente una normal. Se rechaza la hipótesis nula si

$$\hat{R} < E[\hat{R}] + Z_\alpha DT(\hat{R})$$

donde

$$E(\hat{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$DT(\hat{R}) = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{24}}$$

# Test de Wilcoxon o Prueba de los signos-rangos

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Contrastes no paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

**EJEMPLO 10.** Una empresa farmacéutica está pensando en sacar un nuevo medicamento con el fin de perder peso. Antes de sacarlo al mercado decide seleccionar una muestra formada por 10 personas, las cuales las pesa antes de empezar el tratamiento y después de terminarlo. ¿Se puede afirmar, a un nivel de significación del 1%, que el tratamiento no llegará al mercado puesto que no se producen cambios significativos en los pesos de las personas seleccionadas?.

| Individuo | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Antes     | 72.87 | 61.10 | 71.83 | 68.64 | 73.14 | 94.81 | 69.23 | 58.08 | 62.43 | 74.38 |
| Después   | 67.06 | 64.79 | 68.14 | 64.74 | 77.88 | 78.87 | 69.24 | 58.61 | 60.79 | 70.71 |

**SOLUCIÓN.** En un primer lugar se realiza las diferencias, en valor absoluto, de los pesos antes de realizar la dieta y después de acabarla, considerando además un signo + para los casos en la que la diferencia es positiva y – cuando la diferencia arroja un resultado negativo.

| Individuo   | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Antes       | 72.87 | 61.10 | 71.83 | 68.64 | 73.14 | 94.81 | 69.23 | 58.08 | 62.43 | 74.38 |
| Después     | 67.06 | 64.79 | 68.14 | 64.74 | 77.88 | 78.87 | 69.24 | 58.61 | 60.79 | 70.71 |
| $D_i$       | 5.80  | 3.69  | 3.69  | 3.89  | 4.74  | 15.93 | 0.01  | 0.53  | 1.64  | 3.67  |
| Diferencias | +     | -     | +     | +     | -     | +     | -     | -     | +     | +     |

# Test de Wilcoxon o Prueba de los signos-rangos

Índice

Introducción

Contrastes de bondad de ajuste

Contrastes no paramétricos

Contraste de M-W

Test de Rachas

Test Wilcoxon

A continuación, se ordenan las diferencias,  $D_i$ , en orden ascendente y se le asignan los rangos correspondientes:

| $D_i$       | 0.01 | 0.53 | 1.64 | 3.67 | 3.69 | 3.69 | 3.89 | 4.74 | 5.80 | 15.93 |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| Diferencias | -1   | -1   | 1    | 1    | 1    | -1   | 1    | -1   | 1    | 1     |
| Dif. +      |      |      | 3    | 4    | 5.5  |      | 7    |      | 9    | 10    |
| Dif. -      | 1    | 2    |      |      |      | 5.5  |      | 8    |      |       |

Utilizando la información de la tabla se tiene que  $R_+ = 38.5$  y  $R_- = 16.5$  y como consecuencia  $\hat{R} = \min(38.5, 16.5) = 16.5$ . Considerando que el nivel de significación es del 1% y el tamaño muestral es  $n = 10$  el valor crítico proporcionado por la tabla es  $R_{0.01} = 5$ . Puesto que  $\hat{R} > R_{0.01}$ , entonces no hay motivos para rechazar la hipótesis nula. Por tanto, el peso de los individuos que han probado la nueva dieta no ha cambiado significativamente.