

Técnicas Cuantitativas II

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS MEDIANTE INTERVALOS DE CONFIANZA

Método del estadístico pivote

Construcción de intervalos de confianza procedentes de poblaciones normales



Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Método del estadístico pivote

I.C. para la varianza poblacional

I.C. para la media poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de varianzas

I.C. para la diferencia de medias poblacionales

I.C. para la diferencia de proporciones

Estimación mediante intervalos de confianza

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

La estimación puntual, estudiada en temas anteriores, nos aporta un valor concreto pero no aporta una medida de la precisión de la estimación. Una manera de subsanar este hecho será obtener de cada muestra, no un estimador puntual, sino un intervalo que se sospecha que debe contener al parámetro. En ocasiones será más interesante saber entre que posibles valores se puede mover el parámetro más que conocer un valor puntual del mismo. Es decir, puede ser más interesante proporcionar un intervalo dentro del cual esté contenido el verdadero valor de un parámetro desconocido, con cierto grado de certeza, que dar una aproximación puntual del mismo. El conocido dicho *más vale acertar aproximadamente que fallar exactamente* resume de manera concisa esta idea.

Evidentemente, esta técnica no tiene por que dar siempre un resultado correcto y a la probabilidad de que hayamos acertado al decir que el parámetro estaba contenido en dicho intervalo se le denomina nivel de confianza. Los extremos del intervalo de confianza se calcularán a partir de los datos muestrales y por tanto serán variables aleatorias que dependerán, entre otros elementos, del nivel de confianza.

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Método del estadístico pivote

Sea X una variable aleatoria (continua o discreta) cuya distribución de probabilidad depende de un parámetro desconocido, θ . Dada una muestra aleatoria simple, $X_1, \dots, X_n$, y una función t , $t = T(X_1, \dots, X_n; \theta)$, tal que:

- Para cada θ , $T(\cdot; \theta)$ es un estadístico muestral.
- Para cada realización de la muestra, $x_1, \dots, x_n$, $T(x_1, \dots, x_n; \cdot)$ es estrictamente monótona.
- Si $\Lambda = \text{Im}g(t)$, para cada $\lambda \in \Lambda$, la ecuación $\lambda = T(x_1, \dots, x_n; \theta)$, tiene solución en θ .

En tal caso, si para cada θ , t tiene distribución independiente de θ , se puede construir un intervalo de confianza para θ .

Entonces, el proceso a seguir en cada ocasión para construir un intervalo de confianza, conocido como método del estadístico pivote, será siempre el mismo:

- Seleccionar un estadístico, T , que debe contener al parámetro para el cual se desea estimar el intervalo de confianza, θ , y cuya distribución sea conocida y no dependa del parámetro desconocido, θ .

- La distribución de tal variable aleatoria es independiente del valor del parámetro y, por tanto, se pueden encontrar los cuantiles $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$ que definen un intervalo de extremos fijos, entre los que, con probabilidad $1 - \alpha$, se encontrará dicha variable. Esto es:

$$P \left[\lambda_{\frac{\alpha}{2}} \leq t \leq \lambda_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

donde $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ y $\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}}$ son los puntos (cuantiles) de la distribución del estadístico T que dejan a su izquierda una probabilidad $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$, respectivamente.

- El siguiente paso será despejar el parámetro en la desigualdad de la probabilidad anterior, obteniendo un nuevo suceso de extremos aleatorios que contendrá al verdadero valor del parámetro fijo y desconocido:

$$P[a \leq \theta \leq b] = 1 - \alpha,$$

donde $a = T^{-1} \left(\lambda_{\frac{\alpha}{2}} \right)$ y $b = T^{-1} \left(\lambda_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)$.

El intervalo obtenido, $[a, b]$, será el intervalo de confianza, al nivel $1 - \alpha$, para el parámetro desconocido en estudio.

Por su propia construcción este método nos permite afirmar que si se construyen distintos intervalos, cada vez con distintas realizaciones de la muestra, al menos el $100(1 - \alpha)\%$ de ellos contiene el verdadero valor del parámetro.

Hay que destacar que una vez que se ha calculado el intervalo para una muestra determinada, no es correcto decir *la probabilidad de que el parámetro pertenezca al intervalo es $1 - \alpha$* , ya que una vez calculado el intervalo, este deja de ser aleatorio y la probabilidad será 1 si el intervalo es de los $1 - \alpha$ que contienen al parámetro, ó 0 si el intervalo es uno de los α intervalos que no contienen al parámetro. Por tanto, no tiene sentido hablar de probabilidad sino de confianza. La confianza está puesta en que el método de construcción de los intervalos nos asegura que $(1 - \alpha)100\%$ de las muestras producirán intervalos que contienen al parámetro.

Los niveles de confianza habituales son del 90%, 95% y 99%. Advertir que conforme aumenta la confianza, si bien disminuye el porcentaje de intervalos erróneos, la estimación realizada es más pobre. Si os dijera que estimo que vuestra nota final estará comprendida entre 0 y 10, ¿os he proporcionado información útil? Y eso que en este caso hemos trabajado a un 100% de confianza!!!

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Intervalo de confianza para la varianza de una población normal

Con la media poblacional conocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Sea X una variable aleatoria tal que la distribución de probabilidades de dicha variable aleatoria es $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es conocida. Entonces, dada una muestra aleatoria simple, $X_1, \dots, X_n$, se toma como cantidad pivotal:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

que tiene una distribución χ^2 con n grados de libertad.

Sea $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución χ^2 con n grados de libertad y $\chi_{\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $\frac{\alpha}{2}$ de la misma distribución, esto es:

$$P \left[Y < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad P \left[Y < \chi_{\frac{\alpha}{2}} \right] = \frac{\alpha}{2},$$

donde $Y \sim \chi_n^2$. En tal caso:

$$P \left[\chi_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

Con la media poblacional conocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

de donde, despejando σ^2

$$P \left[\frac{1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right] = 1 - \alpha.$$

Entonces, el intervalo de confianza para la varianza de la población donde la media es conocida se expresará como:

$$\left[\frac{1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \frac{1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \right].$$

Con la media poblacional desconocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Sea X una variable aleatoria tal que la distribución de probabilidades de dicha variable aleatoria es $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es desconocida. Entonces, dada una muestra aleatoria simple, $X_1, \dots, X_n$, se selecciona como cantidad pivotal:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

que tiene una distribución χ^2 con $n - 1$ grados de libertad.

Teniendo en cuenta, al igual que antes, que $\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución χ^2 con n grados de libertad y $\chi_{\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $\frac{\alpha}{2}$ de la misma distribución, entonces:

$$P \left[\chi_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 < \chi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

de donde, despejando σ^2

$$P \left[\frac{1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 < \sigma^2 < \frac{1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = 1 - \alpha.$$

Con la media poblacional desconocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Entonces, el intervalo de confianza, al nivel $1 - \alpha$, para la varianza de una población donde la media es desconocida es

$$\left[\frac{1}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \frac{1}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right].$$

Ejemplo 1 El gasto mensual en euros en clases particulares de los alumnos de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales sigue una distribución normal. Se toma una muestra aleatoria de ocho alumnos y se obtienen los siguientes datos: 90, 87, 95, 105, 101, 100, 99, 97. Se pide obtener un intervalo de confianza al 99% para la varianza poblacional. El cuantil 0'005 de la distribución χ^2 con 7 grados de libertad es $\chi_{0'005} = 0'9893$, y el cuantil 0'995 de la misma distribución es $\chi_{0'995} = 20'2777$. Según los datos del enunciado se obtiene $\bar{X} = 96'75$ y $\sum_{i=1}^8 (X_i - \bar{X})^2 = 245'5$. Por lo que el intervalo buscado es (12'11, 248'15). #

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Intervalo de confianza para la media de una población normal

Con varianza poblacional conocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Para obtener el intervalo de confianza del parámetro media poblacional de una variable aleatoria X distribuida como una $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es una cantidad conocida, dada $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple procedente de X , se selecciona como cantidad pivotal:

$$\frac{(\bar{X} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

que se distribuye según una $N(0, 1)$. Dicha distribución se empleará para calcular el intervalo de confianza de manera que se verifica que:

$$P \left[Z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

donde $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ son los puntos de una distribución $N(0, 1)$ que dejan por debajo suya una probabilidad $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$, respectivamente. Esto es:

$$P \left[Z < Z_{\frac{\alpha}{2}} \right] = \frac{\alpha}{2}, \quad P \left[Z < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

Con varianza poblacional conocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Si en la desigualdad de la probabilidad anterior despejamos μ , se obtiene:

$$P \left[\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha.$$

Por tanto, se ha obtenido un intervalo que contiene en su interior a la media poblacional μ con una probabilidad $1 - \alpha$. Esto es, teniendo en cuenta la simetría¹ de la distribución normal:

$$\left[\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

es el intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha$, para la media de una población normal con varianza conocida.

¹Puesto que la distribución Normal es simétrica con respecto a su media, que en este caso es el cero, se verifica que $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Este hecho se repite únicamente en el caso de la distribución t -Student.

Con varianza poblacional conocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejemplo 2 Supongamos que la variable, X , *edad de los funcionarios españoles* es una variable aleatoria con distribución $N(\mu, 15^2)$. Construir el intervalo de confianza para la media poblacional sabiendo que se ha recogido una muestra de 10 funcionarios y se han obtenido los siguientes datos: 38, 38, 50, 40, 40, 43, 58, 35, 44, 40.

A partir de los datos muestrales obtenidos se calcula el valor de la media muestral, que será $\bar{X} = 42'6$. Sustituyendo en la expresión obtenida para el intervalo se tiene:

$$\left[42'6 - 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}}, 42'6 + 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{10}} \right] = [33'30, 51'90].$$

Por tanto, con un 95% de confianza, la media poblacional estará comprendida entre 33'30 y 51'90.

Para la muestra 62, 39, 30, 33, 60, 60, 61, 29, 28, 47 el intervalo sería $[35'6, 54'2]$. Se pone de manifiesto claramente que para cada muestra se obtendrá un intervalo distinto. #

Con varianza poblacional desconocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Sea X una variable aleatoria tal que la distribución de probabilidades de dicha variable aleatoria es Normal $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es desconocida. Entonces, dada una muestra aleatoria simple, $X_1, \dots, X_n$, utilizaremos como cantidad pivotal:

$$\frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{S_{n-1}},$$

que se distribuye según una distribución t -Student con $n - 1$ grados de libertad, donde

$$S_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

El intervalo de confianza queda determinado por

$$P \left[t_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{S_{n-1}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

donde $t_{\frac{\alpha}{2}}$ y $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ son los puntos de una t de Student con $n - 1$ grados de libertad que dejan por debajo suya una probabilidad $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$, respectivamente. Esto es:

Con varianza poblacional desconocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

$$P \left[t < t_{\frac{\alpha}{2}} \right] = \frac{\alpha}{2}, \quad P \left[t < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

donde $t \sim t_{n-1}$.

Despejando el parámetro desconocido, en este caso μ , en la expresión anterior obtenemos la probabilidad equivalente:

$$P \left[\bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] = 1 - \alpha.$$

De forma que usando que la distribución t -Student es simétrica, la región que determina

$$\left[\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}} \right],$$

es el intervalo de confianza, al nivel de confianza $1 - \alpha$, para la media de una población normal con varianza desconocida.

Con varianza poblacional desconocida

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejemplo 3 Usando los datos del ejemplo anterior, se pide calcular para la primera muestra recogida el intervalo de confianza para la media poblacional suponiendo desconocida la varianza poblacional.

Del enunciado se sabe que $n = 10$ y para la primera muestra se ha obtenido $\bar{X} = 42'6$. Realizando los cálculos oportunos de calcula la cuasivarianza como:

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{414'4}{9} = 46'04,$$

y usando la expresión del intervalo construido en el apartado anterior se obtiene:

$$P \left[42'6 - 2'262 \cdot \frac{6'78}{\sqrt{10}} < \mu < 42'6 + 2'262 \cdot \frac{6'78}{10} \right] = 0'95,$$

que operando resulta: $P[37'75 < \mu < 47'45] = 0'95$.

Para la segunda muestra el intervalo de confianza sería (34'37, 55'43).

#

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Intervalo de confianza para la proporción

Intervalo de confianza para la proporción

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Dada $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n procedente de una Bernoulli, estimamos la proporción muestral mediante la distribución

$$\frac{P - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}},$$

que puede considerarse aproximadamente normal de media cero y varianza uno, cuando el tamaño de la muestra es suficientemente grande.

Teniendo en cuenta que la distribución normal es simétrica y sea $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución normal de media cero y varianza uno, se verifica entonces que

$$P \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{P - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha.$$

Si en el suceso expresado en la probabilidad anterior despejamos p , queda

$$P \left[P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} < p < P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \right] = 1 - \alpha.$$

Intervalo de confianza para la proporción

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Por tanto, el intervalo de confianza, al nivel $1 - \alpha$, para la proporción se define como:

$$\left[P - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}, P + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \right].$$

Ejemplo 4 Según la encuesta publicada por "The Washington Post" el 5 de noviembre de 2008, de los 17834 encuestados, el 47'3% afirmaba no haber votado por el candidato Barack Obama. Se pide construir un intervalo de confianza al 99% para la verdadera proporción de votantes que lo hicieron por Obama.

Puesto que $P = 0'527$, $n = 17834$ y $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2'575$ ya que $\alpha = 0'01$, el intervalo queda

$$(0'5173, 0'5366).$$

Si para ganar el candidato necesita contar con el 51% de votantes, ¿hay alguna evidencia para creer en su éxito?

Atendiendo al intervalo de confianza obtenido, el candidato tiene una fuerte evidencia a favor de su triunfo, pues dicho intervalo, al 99%, está siempre por encima de 0'51. #

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Intervalo de confianza para el cociente de varianzas

Intervalo para el cociente de varianzas

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Dadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$, dos muestras aleatorias simples independientes procedentes de dos poblaciones normales, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, con medias y varianzas desconocidas, la variable usada como cantidad pivotal será

$$\frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2},$$

que tiene una distribución F de Snedecor con $n - 1$ grados de libertad para el numerador y $m - 1$ grados de libertad para el denominador.

Si $F_{\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $\frac{\alpha}{2}$ y $F_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de dicha distribución, entonces

$$P \left[F_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

donde despejando $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ resulta $P \left[F_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2} < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < F_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2} \right] = 1 - \alpha.$

Y entonces, el intervalo de confianza, al nivel $1 - \alpha$, para el cociente de varianzas de dos poblaciones normales es

$$\left[F_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2}, F_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2} \right].$$

Intervalo para el cociente de varianzas

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejemplo 5 Supongamos que las notas de Métodos Cuantitativos siguen una distribución normal en los grupos existentes. Se selecciona una muestra aleatoria simple de 31 alumnos matriculados en los grupos de la mañana y otra de 46 alumnos de los grupos de la tarde, ambas independientes, y se obtienen como cuasivarianzas muestrales 49 y 36, respectivamente. Se pide obtener un intervalo de confianza para el cociente de varianzas poblacionales al nivel de confianza del 90%.

A partir de los datos muestrales del enunciado se tiene que

$$n = 31, \quad S_{n-1}^2 = 49, \quad m = 46, \quad S_{m-1}^2 = 36.$$

Por otro lado, para $\alpha = 0'1$, 30 grados de libertad en el numerador y 45 en el denominador, $F_{\frac{\alpha}{2}} = 0'563$ y $F_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1'713$. Luego, el intervalo de confianza es:

$$0'41 < \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} < 1'25.$$

#

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Intervalo de confianza para la diferencia de medias procedentes de sendas poblaciones normales independientes

Varianzas poblacionales conocidas

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Dadas dos muestras aleatorias simples independientes, $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$, procedentes de dos poblaciones normales, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, con varianzas conocidas, entonces la variable aleatoria usada como cantidad pivotal será

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}},$$

la cual tiene una distribución $N(0, 1)$.

Si $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de dicha distribución normal, entonces se verifica que

$$P \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

donde hemos usado una vez más que por ser la distribución Normal simétrica se verifica que $Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Varianzas poblacionales conocidas

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Si en el suceso expresado en la probabilidad anterior despejamos $\mu_1 - \mu_2$, queda

$$P \left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} < \mu_1 - \mu_2 < \right. \\ \left. (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right] = 1 - \alpha,$$

obteniéndose el intervalo de confianza para la diferencia de medias, al nivel $1 - \alpha$, para dos poblaciones normales cuyas varianzas son conocidas

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}} \right].$$

Varianzas poblacionales conocidas

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejemplo 6 El comercial de cierta marca de refrescos trabaja con dos salas de fiestas. Debido a recortes de plantilla en su empresa debe de dejar de trabajar con una de ellas. Para tomar dicha decisión cuenta con dos muestras aleatorias simples de tamaño 100 y 125, respectivamente, sobre el consumo semanal de refrescos en cada una de las salas. Para la primera muestra se obtiene una media de 19070 botellines consumidos, mientras que para la segunda es de 21080. Suponiendo que ambas muestras proceden de poblaciones normales con varianzas poblacionales iguales a 2500 y 7500, respectivamente, ¿coincide el número medio de refrescos consumidos en ambas salas? Atendiendo a los resultados obtenidos, ¿con qué sala de fiestas debe de dejar de trabajar?

Puesto que $n = 100$, $\bar{x} = 19070$, $\sigma_1^2 = 2500$ y $m = 125$, $\bar{y} = 21080$, $\sigma_2^2 = 7500$, el intervalo de confianza al 95% será

$$(19070 - 21080) \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2500}{100} + \frac{7500}{125}} = (-2028.071, -1991.929).$$

Puesto que el intervalo obtenido es negativo, se verifica que $\mu_1 - \mu_2 < 0$, es decir, $\mu_1 < \mu_2$. Luego el número medio de refrescos consumidos es menor en la primera sala que en la segunda. Debe entonces de dejar de trabajar con la primera sala. #

Varianzas poblacionales desconocidas e iguales

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Dadas dos muestras aleatorias simples independientes, $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$, procedentes de dos poblaciones normales, $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, con varianzas desconocidas e iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$), entonces la variable aleatoria usada como cantidad pivotal será

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}}},$$

que tiene una distribución t -Student con $m + n - 2$ grados de libertad y donde

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2 + (m-1) \cdot S_{m-1}^2}{n+m-2}}.$$

Si $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución t -Student con $m + n - 2$ grados de libertad, entonces se verifica que

$$P \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}}} < t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha,$$

puesto que la distribución t -Student también es simétrica.

Varianzas poblacionales desconocidas e iguales

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Si en la expresión anterior despejamos $\mu_1 - \mu_2$, obtenemos:

$$P \left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}} \right] = 1 - \alpha.$$

Por tanto, el intervalo de confianza para la diferencia de medias, al nivel $1 - \alpha$, para dos poblaciones normales cuyas varianzas son desconocidas

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}} \right].$$

Varianzas poblacionales desconocidas e iguales

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejemplo 7 A partir de la encuesta de Infoadex, la inversión publicitaria en medios convencionales, en millones de euros, en una muestra de 6 empresas del sector automovilístico ha sido: 86'6, 69'7, 45'1, 44, 42, 40'1. Mientras que tomando una muestra de tres empresas dedicadas a la comunicación se ha obtenido: 173'8, 87'5, 58'4. Suponiendo normalidad y que las varianzas poblacionales son iguales, ¿se puede considerar que coinciden las medias poblacionales de ambas variables?

A partir del enunciado se puede obtener: $\bar{X} = 54'58$, $\bar{Y} = 106'56$, $S_{n-1}^2 = 364'75$ y $S_{m-1}^2 = 3601'94$ y

$$S_p = \sqrt{\frac{(6-1) \cdot 364'75 + (3-1) \cdot 3601'94}{6+3-2}} = 35'91.$$

Sustituyendo en el intervalo descrito:

$$(54'58 - 106'56) \pm 2'36 \cdot 35'91 \sqrt{\frac{6+3}{6 \cdot 3}} = [-112'03, 8'06].$$

Como el intervalo de confianza construido contiene el 0, se puede afirmar con un nivel de confianza del 95%, que la inversión publicitaria media de ambos sectores puede ser igual.

#

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Se desea comparar el tiempo que se necesita para completar la inscripción en dos aplicaciones informáticas de búsqueda de empleo que se piensan lanzar al mercado. Se toman dos muestras de 101 individuos cada una y se les pide que accedan a la aplicación y completen la ficha de inscripción, obteniendo una media de 50'2 y 52'9 segundos en la primera y segunda aplicación, respectivamente, y una varianza de 4'75 y 5'35, respectivamente. Si se supone que las poblaciones están normalmente distribuidas, ¿existe diferencia entre las medias del tiempo de inscripción en ambas aplicaciones?

La información que da el enunciado hace referencia a la muestra, por tanto, se tienen las medias y varianzas muestrales. Puesto que piden responder si las medias poblacionales son iguales, la herramienta a usar será un intervalo de confianza de diferencia de medias (y ver si contiene al cero). En tal caso, se tienen dos opciones: varianzas conocidas o desconocidas e iguales. En este caso las varianzas son desconocidas, pero no se sabe si son iguales. Por tanto, primero hay que comprobar esta suposición. Con tal objetivo, se puede obtener el intervalo de confianza para el cociente de varianzas (y ver si contiene al uno). Una vez comprobado que las varianzas son iguales, podremos estudiar qué ocurre con las medias.

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Siguiendo las indicaciones anteriores, obtendremos en primer lugar el intervalo de confianza para el cociente de varianzas, esto es:

$$\left[F_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2}, F_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2} \right].$$

A partir del enunciado se tiene que $n = 101 = m$, $S_n^2 = 4'74$ y $S_m^2 = 5'35$. Por otro lado, puesto que $S_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot S_n^2 = \frac{101}{100} \cdot 4'75 = 4'7975$ y $S_{m-1}^2 = \frac{m}{m-1} \cdot S_m^2 = \frac{101}{100} \cdot 5'35 = 5'4035$, es claro que

$$\frac{S_{m-1}^2}{S_{n-1}^2} = \frac{5'4035}{4'7975} = 1'126316.$$

En tal caso, ya que $F_{100,100}(0'975) = 1'48$ y $F_{100,100}(0'025) = \frac{1}{F_{100,100}(0'975)} = \frac{1}{1'48} = 0'68$, se tiene que el intervalo buscado es:

$$(0'68 \cdot 1'126316, 1'48 \cdot 1'126316) = (0'761, 1'67).$$

Puesto que dicho intervalo contiene al 1, se puede afirmar, a un nivel de confianza del 95%, que las varianzas poblacionales son iguales.

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Una vez comprobado que las varianzas poblacionales desconocidas son iguales, se puede calcular el intervalo de confianza para la diferencia de medias:

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{1-\frac{\alpha}{2}} S_p \sqrt{\frac{m+n}{nm}} \right].$$

Puesto que $\bar{x} - \bar{y} = 50'2 - 52'9 = -2'7$, $t_{200}(0'975) = 1'972$,

$$\sqrt{\frac{n+m}{n \cdot m}} = \sqrt{\frac{202}{101^2}} = 0'1407 \text{ y}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{n \cdot S_n^2 + m \cdot S_m^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{101 \cdot 4'75 + 101 \cdot 5'35}{200}} = 2'2584,$$

el intervalo buscado será:

$$-2'7 \pm 1'972 \cdot 0'1407 \cdot 2'2584 = (-3'326617, -2'073383).$$

Puesto que el intervalo es negativo, se puede afirmar al 95% de confianza, que $\mu_1 < \mu_2$. Es decir, el tiempo medio de inscripción es menor en la primera aplicación.

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Intervalo de confianza para la diferencia de proporciones

I.C. para la diferencia de proporciones

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Dadas dos muestras aleatorias simples de tamaño m y n procedentes de dos variables aleatorias independientes distribuidas según dos Bernouillis de parámetros p_1 y p_2 , respectivamente. Entonces

$$\frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Si $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el cuantil $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la distribución $N(0, 1)$, entonces, teniendo en cuenta que la distribución normal es simétrica, se verifica que

$$P \left[-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} < Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] = 1 - \alpha.$$

Si en el suceso expresado en la probabilidad anterior despejamos $p_1 - p_2$, queda $P \left[(P_1 - P_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta < p_1 - p_2 < (P_1 - P_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta \right] = 1 - \alpha$, donde $\delta = \sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}$. Por tanto, el intervalo de confianza, al nivel $1 - \alpha$, para la diferencia de proporciones muestrales será $\left[(P_1 - P_2) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta, (P_1 - P_2) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta \right]$.

I.C. para la diferencia de proporciones

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejemplo 8 Según la encuesta publicada por "The Washington Post" el 5 de noviembre de 2008, el 95% de los encuestados de raza negra y el 43% de los encuestados de raza blanca votaron por Obama. Sabiendo que de los 17.834 total de encuestados 13.197 eran de raza blanca, 2.318 de raza negra, 1.427 eran latinos y el resto de otras razas. Construya de un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de proporciones entre los votantes de raza blanca y de raza negra que votaron por Obama.

El centro del intervalo es $P_1 - P_2 = 0'95 - 0'43 = 0'52$. Además, como $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1'96$:

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \delta = 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'95 \cdot 0'05}{2318} + \frac{0'43 \cdot 0'57}{13197}} = 0'0122.$$

Luego, el intervalo de confianza es

$$0'52 - 0'0122 < p_1 - p_2 < 0'52 + 0'0122,$$

es decir, con confianza de 0'95, la diferencia entre la proporción de la primera y la proporción de la segunda población, está comprendida entre 0'508 y 0'532. #

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

Ejercicios Propuestos

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

4.1 En una muestra de seis empresas de una determinada capital de provincia se ha obtenido que el número de empleados de baja por depresión es: 2, 4, 6, 5, 4 y 1. Calcular un intervalo para el número medio de empleados con baja por depresión con un 95% de confianza, suponiendo que la desviación típica poblacional es 1'86.

4.2 Consideramos que la edad con la que se consigue el primer empleo en una determinada localidad sigue una distribución normal con media y varianza desconocidos. Se toma una muestra aleatoria simple de 9 individuos obteniéndose los siguientes datos: 16, 20, 22, 19, 17, 25, 21, 18 y 23 años. Se pide:

- (a) Obtener el intervalo de confianza al 95% de la edad media de obtención del primer empleo en dicha localidad.
- (b) Obtener el intervalo de confianza al 95% de la varianza de la distribución.

4.3 De los 280 diplomados de la promoción 2005/2006 en Empresariales, 180 afirman estar trabajando en una entidad bancaria. Determine el intervalo de confianza para la proporción de diplomados que eligen tal opción, con una confianza del 99%.

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

4.4

Una muestra del coste de fabricación de un nuevo producto arroja una media de 212'10 euros con una cuasidesviación típica de 57'10 euros. Se pide:

- (a) Construir e interpretar un intervalo de confianza al 95% para la media poblacional suponiendo que el tamaño muestral fue de 200 productos.
- (b) Construir e interpretar un intervalo de confianza al 95% para la media poblacional suponiendo que el tamaño muestral era de 50 productos.
- (c) Explicar por qué el segundo intervalo es más extenso si el nivel de confianza de los dos es del 95%.

4.5

Según un estudio realizado por un profesor de la Universidad de Granada que ha analizado 2557 titulares periodísticos de todos los diarios nacionales españoles (ABC, El Mundo, El País, Diario 16, La Razón, La Vanguardia y Ya) que versan sobre los debates del Estado de la Nación desde 1983 hasta el año 2007, se concluye que el 88% de los titulares son manipulados. Calcule un intervalo de confianza al 95% para la proporción poblacional.

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

4.6

El número de préstamos aprobados diariamente en una sucursal bancaria sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se extrae una muestra de 10 días y se obtiene la siguiente información: 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6. El director del banco estima que el número medio de préstamos aprobados diariamente es 5. Se pide:

- (a) ¿Es coherente la información muestral con la suposición del director con un nivel de confianza del 90%?
- (b) ¿Qué ocurre si aumentamos la confianza al 95%?

4.7

Se desea comparar el tiempo que se necesita para completar la inscripción en dos aplicaciones informáticas de búsqueda de empleo que se piensan lanzar al mercado. Se toma una muestra de 100 individuos y se les pide que accedan a la aplicación y completen la ficha de inscripción, obteniendo una media muestral de 50'2 y 52'9 segundos en la primera y segunda aplicación, respectivamente, y una cuasivarianza muestral de 4'8 y 5'4, respectivamente. Si se supone que las poblaciones están normalmente distribuidas y que las varianzas poblacionales son iguales, se pide obtener los intervalos de confianza al 90%, 95% y 99% para la diferencia de medias.

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

4.8

Se ha estudiado el número de sanciones tributarias tramitadas por dos administraciones locales, A y B, en referencia a la declaración de la renta del año 2008. De una muestra de 400 declaraciones revisadas en la administración A, 199 tuvieron como resultado una sanción. Mientras que de la muestra de 800 declaraciones inspeccionadas en la administración B, se resolvieron con sanción 300. Con un nivel de confianza del 99%, ¿puede pensarse que la proporción de sanciones tramitadas es la misma en ambas administraciones?

4.9

Según la encuesta publicada por “The Washington Post” el 5 de noviembre de 2008, el 66% de los encuestados de raza latina y el 43% de los encuestados de raza blanca votaron por Obama. Sabiendo que de los 17.834 encuestados, 13.197 eran de raza blanca, 2.318 de raza negra, 1.427 eran latinos y el resto de otras razas. Con un nivel de confianza del 99%, ¿puede pensarse que la proporción de votantes de Obama de raza latina es la misma que la proporción de votantes de raza blanca?

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Método del estadístico
pivote

I.C. para la varianza
poblacional

I.C. para la media
poblacional

I.C. para la proporción

I.C. para el cociente de
varianzas

I.C. para la diferencia de
medias poblacionales

I.C. para la diferencia de
proporciones

4.10

El precio medio de un determinado producto sigue una distribución normal. Se analiza su precio en 125 establecimientos de Granada obteniéndose una media de 480 euros y una cuasivarianza de 60. Se analiza igualmente el precio en 100 establecimientos de Sevilla obteniéndose una media de 460 euros y una cuasivarianza de 52. Se pide:

- (a) Suponiendo varianzas poblacionales iguales, ¿se puede afirmar con un nivel de confianza del 95% que los precios en Sevilla son mayores que los precios en Granada?
- (b) Obtener un intervalo de confianza al 95% de confianza para el cociente de varianzas suponiendo que las muestras se reducen a 101 establecimientos.

4.11

Para comparar el consumo familiar de dos comunidades, A y M, se toman sendas muestras de 70 familias. Para la primera comunidad se obtiene una media muestral de 1100 euros, mientras que para la segunda de 800. Suponiendo poblaciones normales, la primera con varianza 250 y la segunda con varianza 100, ¿se puede afirmar que el consumo medio familiar es igual en ambas comunidades?