

Técnicas Cuantitativas II

DISTRIBUCIONES DE LOS ESTADÍSTICOS MUESTRALES

Distribución para la media y varianza de una población Normal

Distribución para la diferencia de medias y cociente de varianzas de sendas
poblaciones Normales

Distribución para la proporción muestral y diferencia de proporciones muestrales



Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para la varianza muestral

Distribución para la media muestral

Distribución para la proporción muestral

Distribución para el cociente de varianzas

Distribución para la diferencia de medias muestrales

Distribución para la diferencia de proporciones

Distribuciones de los estadísticos muestrales

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Como se ha visto en el tema anterior, los estadísticos muestrales se pueden utilizar para la estimación puntual de los correspondientes parámetros poblacionales. Pero además de la estimación puntual, existen otros métodos de estimación de parámetros poblacionales como son los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis (que se estudiarán en temas posteriores).

Para el estudio de estos métodos será fundamental tener en cuenta el carácter aleatorio de los estadísticos muestrales y conocer su distribución. Así, se entiende por distribución de muestreo de un estadístico la distribución de probabilidad que puede obtenerse como resultado de un número infinito de muestras aleatorias independientes, cada una de tamaño n , provenientes de la población de interés.

Destacar que este tema se centra en estadísticos muestrales cuyas distribuciones de probabilidad son obtenidas a partir de poblaciones con distribución normal. Esta característica marcará también los siguientes temas de estimación paramétrica mediante intervalos de confianza y contraste de hipótesis.

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para la varianza de una muestra procedente de una población normal

Con la media poblacional conocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño n procedente de una población $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es conocida. Se verifica entonces que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2.$$

En efecto, si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tipificando

$$\frac{X_i - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1), \quad \forall i$$

y en tal caso, por construcción de la distribución chi-cuadrado

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi_n^2.$$

Con la media poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño n procedente de una población $N(\mu, \sigma^2)$, donde μ es desconocida. Se verifica entonces que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

En efecto, teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n \bar{X} = n\bar{X} - n\bar{X} = 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n ((X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(X_i - \bar{X})^2 + 2 (X_i - \bar{X}) (\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + 2 (\bar{X} - \mu) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n (\bar{X} - \mu)^2, \end{aligned}$$

Con la media poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

y en tal caso:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - \frac{1}{\sigma^2} \cdot n (\bar{X} - \mu)^2.$$

Donde el primer sumando del segundo miembro acabamos de demostrar que se distribuye según una χ_n^2 , mientras que el segundo lo hace según una χ_1^2 , ya que como estudiaremos en el siguiente apartado

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

por lo que tipificando se obtiene que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1),$$

y si entonces elevamos al cuadrado

$$\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2 \sim \chi_1^2.$$

Con la media poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Por tanto, $\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ se puede expresar como la diferencia de dos variables aleatorias independientes ambas con distribución χ^2 de n y 1 grados de libertad, respectivamente. Entonces, puesto que la distribución chi-cuadrado es reproductiva en sus grados de libertad, se obtiene que:

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

Finalmente, como

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = n \cdot S_n^2 = (n-1) \cdot S_{n-1}^2,$$

se deduce que

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{\sigma^2} \cdot S_n^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2.$$

Con la media poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Con la media
poblacional conocida

Con la media
poblacional
desconocida

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Ejemplo 1 Si suponemos que la variable altura de los jugadores de un determinado equipo de baloncesto sigue una distribución normal, calcular la probabilidad de que en una muestra de 4 jugadores seleccionados al azar, la desviación típica muestral supere el valor de 1'2 cm si la desviación típica poblacional es 1'8 cm.

Se tiene que

$$\frac{4}{1'8^2} S_4^2 \sim \chi_3^2,$$

de forma que, llamando $R = \frac{4}{1'8^2} S_4^2$, se tiene que

$$\begin{aligned} P[S_n > 1'2] &= P[S_n^2 > (1'2)^2] = P\left[\frac{4}{(1'8)^2} \cdot S_n^2 > \frac{4}{(1'8)^2} \cdot (1'2)^2\right] \\ &= P[R > 1'77] = 1 - P[R < 1'77] = 1 - 0'4 = 0'6. \end{aligned}$$

La última probabilidad se busca en la tabla de la distribución χ^2 con 3 grados de libertad. En realidad habría que interpolar para obtener dicha probabilidad, pero siguiendo el criterio de capítulos anteriores de utilizar como aproximación la probabilidad del punto más cercano, trabajamos con $P[R < 1'87] = 0'4$. #

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para la media de una muestra procedente de una población normal

Con varianza poblacional conocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño n procedente de una población $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es conocida. Se verifica entonces que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

En efecto, recordemos la siguiente propiedad

$$Y = |a_1| \cdot X_1 + |a_2| \cdot X_2 + \dots + |a_n| \cdot X_n = \sum_{i=1}^n |a_i| X_i$$
$$\text{donde } |a_i| = \begin{cases} a_i & , \text{ si } a_i > 0 \\ -a_i & , \text{ si } a_i < 0 \end{cases} \quad \text{y } X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \dots, n$$

$\Downarrow$

$$Y \sim N(|a_1| \cdot \mu_1 + \dots + |a_n| \cdot \mu_n, a_1^2 \cdot \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \cdot \sigma_n^2)$$
$$\equiv N\left(\sum_{i=1}^n |a_i| \mu_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

Con varianza poblacional conocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Es decir, la combinación lineal de distribuciones normales sigue siendo una distribución normal, cuya media es la combinación lineal de las medias de cada distribución, y cuya varianza es la combinación lineal con los coeficientes al cuadrado de las varianzas de cada distribución.

Puesto que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n} X_1 + \frac{1}{n} X_2 + \cdots + \frac{1}{n} X_n,$$

donde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \dots, n$, haciendo la identificación

$$a_i = \frac{1}{n}, \quad \mu_i = \mu, \quad \sigma_i^2 = \sigma^2,$$

a partir de la propiedad anterior es evidente que

$$\bar{X} \sim N \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{n} \right| \cdot \mu_i, \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \cdot \sigma_i^2 \right) \equiv N \left(\frac{n}{n} \mu, \frac{n}{n^2} \sigma^2 \right) \equiv N \left(\mu, \frac{1}{n} \sigma^2 \right).$$

Además, sin más que tipificar se obtiene que $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

Con varianza poblacional conocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Ejemplo 2 Sabiendo que el gasto mensual en teléfono de los siete mil estudiantes de la facultad de Ciencias Económicas y Empresariales tiene una distribución normal de media 45 euros y desviación típica 25 euros, calcular el porcentaje de muestras de tamaño 64 en las cuales la media muestral supere los 50 euros.

Se define la variable X como *gasto mensual en teléfono*. Teniendo en cuenta que

$$\bar{X} \sim N\left(45, \frac{25^2}{64}\right),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} P[\bar{X} > 50] &= 1 - P\left[\frac{\bar{X} - 45}{\frac{25}{\sqrt{64}}} \leq \frac{50 - 45}{\frac{25}{\sqrt{64}}}\right] \\ &= 1 - P[Z < 1'6] = 1 - 0'9452 = 0'0548, \end{aligned}$$

donde Z representa una variable $N(0,1)$.

#

Con varianza poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de tamaño n procedente de una población $N(\mu, \sigma^2)$, donde σ^2 es desconocida. Se verifica entonces que

$$\frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{S_{n-1}} = \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n-1}}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

En efecto, partiendo de que la distribución t de Student se obtiene a partir del cociente de una distribución normal tipificada y la raíz cuadrada de una chi-cuadrado entre sus grados de libertad y teniendo en cuenta que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1), \quad \frac{n}{\sigma^2} \cdot S_n^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2,$$

se tiene que

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{n}{\sigma^2} S_n^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}, \quad \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S_{n-1}^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}.$$

Con varianza poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Además, puesto que $\frac{n}{\sigma^2} \cdot S_n^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S_{n-1}^2$ es evidente que

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{n}{\sigma^2} S_n^2}{n-1}}} = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S_{n-1}^2}{n-1}}} \sim t_{n-1}.$$

Finalmente, haciendo las operaciones pertinentes

$$\frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{n}{\sigma^2} S_n^2}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}}, \quad \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}{\sqrt{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S_{n-1}^2}{n-1}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}},$$

y entonces se concluye que

$$\frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{S_{n-1}} = \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n-1}}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Con varianza poblacional desconocida

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Con varianza
poblacional conocida

Con varianza
poblacional
desconocida

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Ejemplo 3 Si consideramos que el beneficio semanal de un determinado comercio es una variable aleatoria cuya distribución es aproximadamente Normal de media 1500 euros, calcular la probabilidad de que una muestra de 5 semanas de lugar a una media muestral superior a 1525 sabiendo que la desviación típica muestral es 36.

Se tiene que

$$t = \frac{(\bar{X} - 1500) \sqrt{5 - 1}}{36} \sim t_4,$$

de forma que

$$\begin{aligned} P[\bar{X} > 1525] &= P\left[t > \frac{(1525 - 1500)\sqrt{5 - 1}}{36}\right] \\ &= 1 - P[t < 1'388] = 1 - 0'9 = 0'1, \end{aligned}$$

donde en lugar de interpolar hemos tenido en cuenta la probabilidad del punto más cercano, en este caso, $P[t < 1'533] = 0'9$. #

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para la proporción muestral

Distribución para la proporción muestral

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Sea $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple procedente de una variable aleatoria distribuida según una Bernoulli de parámetro p , entonces la variable aleatoria dada por la proporción muestral

$$P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i,$$

tiene distribución aproximadamente Normal

$$N \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right),$$

si el tamaño muestral es suficientemente elevado y donde

$$A_i = \begin{cases} 1 & , \text{ si el individuo } i \text{ presenta la característica} \\ & \text{ en estudio con probabilidad } p \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}.$$

En efecto, puesto que $A_i \sim B(p)$ para $i = 1, \dots, n$, entonces, por definición, $\sum_{i=1}^n A_i \sim B(n, p)$.

Distribución para la proporción muestral

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Además, usando la aproximación de una Binomial por una Normal se obtiene que

$$\sum_{i=1}^n A_i \sim N(np, np(1-p)).$$

Teniendo en cuenta la propiedad de reproductividad de la distribución normal para un único elemento, se tiene que si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ entonces $Y = a \cdot X \sim N(a \cdot \mu, a^2 \cdot \sigma^2)$. Luego, identificando

$$a = \frac{1}{n}, \quad X = \sum_{i=1}^n A_i, \quad \mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p),$$

se verifica entonces que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \sim N\left(\frac{1}{n} \cdot np, \frac{1}{n^2} \cdot np(1-p)\right)$, es decir,

$$P \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

Además, sin más que tipificar se obtiene que $\frac{P-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0, 1)$.

Distribución para la proporción muestral

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Adviértase, que a efectos prácticos, para el análisis mediante intervalos de confianza y contrastes de hipótesis se suele admitir que

$$\frac{P - p}{\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}} \sim N(0, 1).$$

Ejemplo 4 Si el 20% de las empresas están dirigidas por mujeres, calcular, para una muestra aleatoria de tamaño 300, la probabilidad de que el porcentaje de empresas dirigidas por mujeres sea inferior al 15%.

Estamos ante un experimento de Bernouilli donde el éxito, $p = 0'2$, consiste en que una empresa esté dirigida por una mujer. Luego sabemos que

$$P \sim N\left(0'2, \frac{0'2 \cdot 0'8}{300}\right).$$

Entonces: $P[P \leq 0'15] = P\left[\frac{P-0'2}{\sqrt{\frac{0'2 \cdot 0'8}{300}}} \leq \frac{0'15-0'2}{\sqrt{\frac{0'2 \cdot 0'8}{300}}}\right] = P[Z \leq -2'165] = 0'0154$, donde $Z \sim N(0, 1)$. #

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para el cociente de varianzas

Distribución para el cociente de varianzas

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Dadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ dos muestras aleatorias simples independientes procedentes de sendas poblaciones normales $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, se verifica entonces que

$$F = \frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2},$$

es una variable aleatoria que se distribuye según una F de Snedecor con $n - 1$ y $m - 1$ grados de libertad para el numerador y el denominador, respectivamente.

En efecto, ya que $\frac{n-1}{\sigma^2} S_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2$, $\frac{m-1}{\sigma^2} S_{m-1}^2 \sim \chi_{m-1}^2$, y la F de Snedecor se obtiene a partir del cociente de dos chi-cuadrado divididas respectivamente entre sus grados de libertad, se tiene que

$$\frac{\frac{\frac{n-1}{\sigma^2} S_{n-1}^2}{n-1}}{\frac{\frac{m-1}{\sigma^2} S_{m-1}^2}{m-1}} \sim F_{n-1, m-1}.$$

Entonces, operando: $\frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n-1, m-1}.$

Distribución para el cociente de varianzas

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Ejemplo 5 Se sabe que la calificación media de la asignatura Métodos Cuantitativos durante el curso 2007/2008 fue de 4'3 y la desviación típica 1'1. Durante el curso 2008/2009 se llevaron a cabo ciertos cambios metodológicos y la calificación media aumentó a 5'6 siendo la desviación típica de 0'98. Si se seleccionan 20 alumnos al azar del curso 2007/2008 y otros 25 alumnos del curso 2008/2009, calcule la probabilidad de que la primera muestra tenga una cuasivarianza muestral superior al triple de la segunda.

En este caso partimos de las distribuciones $X \sim N(4'3, 1'1^2)$, $Y \sim N(5'6, 0'98^2)$ y además sabemos que $F = \frac{S_{19}^2}{S_{24}^2} \cdot \frac{0'98^2}{1'1^2} \sim F_{19,24}$.

Entonces la probabilidad deseada se obtiene como sigue

$$\begin{aligned} P[S_{n-1}^2 > 3 \cdot S_{m-1}^2] &= P\left[\frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} > 3\right] = P\left[\left(\frac{0'98}{1'1}\right)^2 \cdot \frac{S_{19}^2}{S_{24}^2} > 3 \cdot \left(\frac{0'98}{1'1}\right)^2\right] \\ &= 1 - P[F < 2'381] = 1 - 0'975 = 0'025. \end{aligned}$$

Adviértase que al igual que en casos anteriores, se ha optado por trabajar con la probabilidad del punto más cercano, en este caso, $P[F < 2'35] = 0'975$. #

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para la diferencia de medias muestrales independientes procedentes de sendas poblaciones normales

Varianzas poblacionales conocidas

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Dadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ dos muestras aleatorias simples independientes procedentes de dos poblaciones normales $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, siendo σ_1^2 y σ_2^2 conocidas. Entonces, la diferencia $\bar{X} - \bar{Y}$ se distribuye como sigue

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N \left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m} \right).$$

En efecto, para cada muestra se verifica que

$$\bar{X} \sim N \left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n} \right), \quad \bar{Y} \sim N \left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{m} \right).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta una vez más la propiedad de reproductividad de la normal en el caso de una combinación lineal de dos elementos:

$$\left. \begin{array}{l} Z = |a|X + |b|Y \\ X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array} \right\} \implies Z \sim N(|a|\mu_1 + |b|\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2).$$

Varianzas poblacionales conocidas

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas

Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Sin más que identificar $a = 1$ y $b = -1$ es inmediato que

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right).$$

De esta expresión se deduce, tificando, que

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Si además la varianza en ambas poblaciones coincide ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$), entonces la expresión anterior queda

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Varianzas poblacionales conocidas

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Ejemplo 6 Se sabe que la calificación media de la asignatura Métodos Cuantitativos durante el curso 2007/2008 fue de 4'3 y la desviación típica 1'1. Durante el curso 2008/2009 se llevaron a cabo ciertos cambios metodológicos y la calificación media aumentó a 5'6, siendo la desviación típica de 0'98. Si se seleccionan 20 alumnos al azar del curso 2007/2008 y otros 25 alumnos del curso 2008/2009, calcule la probabilidad de que la segunda muestra tenga una media muestral superior a la primera muestra.

Si definimos $\bar{Y}$ como la calificación media obtenida durante el curso 2008/2009 y como $\bar{X}$ la calificación media obtenida en el curso 2007/2008, se pide calcular la probabilidad $P[\bar{X} < \bar{Y}]$, que es lo mismo que la probabilidad $P[\bar{X} - \bar{Y} < 0]$. Tipificando:

$$\begin{aligned} P[\bar{X} - \bar{Y} < 0] &= P \left[\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (4'3 - 5'6)}{\sqrt{\frac{0'98^2}{25} + \frac{1'1^2}{20}}} < \frac{0 - (4'3 - 5'6)}{\sqrt{\frac{0'98^2}{25} + \frac{1'1^2}{20}}} \right] \\ &= P[Z < 4'1334] = 0'999982, \end{aligned}$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

#

Varianzas poblacionales desconocidas e iguales

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Dadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ dos muestras aleatorias simples independientes procedentes de dos poblaciones normales $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, siendo σ_1^2 y σ_2^2 desconocidas e iguales ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$). Entonces,

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \sim t_{n+m-2},$$

donde

$$S_p^2 = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2 + (m-1) \cdot S_{m-1}^2}{n+m-2}.$$

En efecto, puesto que

$$\left. \begin{array}{l} \frac{n-1}{\sigma^2} S_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2 \\ \frac{m-1}{\sigma^2} S_{m-1}^2 \sim \chi_{m-1}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{(n-1)S_{n-1}^2 + (m-1)S_{m-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n+m-2}^2,$$

donde se ha usado la propiedad de reproductividad de la distribución chi-cuadrado. Además se verifica que

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \sim N(0, 1).$$

Varianzas poblacionales desconocidas e iguales

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Entonces, teniendo en cuenta la forma en la que se construye la distribución t de Student se obtiene que

$$\frac{\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{m+n}{mn}}}}{\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S_{n-1}^2 + (m-1)S_{m-1}^2}{\sigma^2}}{n+m-2}}} \sim t_{n+m-2}.$$

Sin más que realizar las operaciones oportunas para simplificar la expresión anterior, tenemos finalmente que

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \sim t_{n+m-2},$$

$$\text{siendo } S_p^2 = \frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2 + (m-1) \cdot S_{m-1}^2}{n+m-2}.$$

Adviértase que puesto que se verifica que $n \cdot S_n^2 = (n-1) \cdot S_{n-1}^2$, es claro que S_p admite también la siguiente expresión:

$$S_p^2 = \frac{n \cdot S_n^2 + m \cdot S_m^2}{n+m-2}.$$

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

El tiempo, medido en segundos, que se tarda en realizar cierta tarea administrativa por un empleado con más de dos años de experiencia sigue una distribución normal de media 200 segundos. Esa misma tarea llevada a cabo por un empleado recién contratado tiene un tiempo medio de realización de 215 segundos. Tomando 15 empleados al azar con más de dos años de experiencia y 5 empleados recién contratados, y sabiendo que las cuasivarianzas muestrales son 180 y 250 respectivamente, se pide calcular la probabilidad de que el tiempo medio de realización sea más de 10 segundos superior en el caso de los empleados recién contratados, sabiendo que ambas varianzas poblacionales son iguales. Si definimos $\bar{X}$ como *tiempo medio que tardan los empleados con más de dos años de experiencia* y $\bar{Y}$ como *tiempo medio que tardan los empleados recién contratados*. La probabilidad que se desea calcular es $P[\bar{Y} > \bar{X} + 10]$, es decir, $P[\bar{X} - \bar{Y} \leq -10]$. Suponiendo que el tiempo de realización de la tarea es una variable normal y que las desviaciones típicas son desconocidas pero iguales, usaremos el estadístico:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{20}{75}}} \sim t_{18},$$

Ejemplo varianzas desconocidas e iguales

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Varianzas
poblacionales
conocidas
Varianzas
poblacionales
desconocidas e iguales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

donde

$$S_p = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2 + (m-1) \cdot S_{m-1}^2}{n+m-2}} = \sqrt{\frac{14 \cdot 180 + 4 \cdot 250}{18}} = 13'984,$$

luego

$$\begin{aligned} P[\bar{X} - \bar{Y} \leq -10] &= P \left[\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \leq \frac{-10 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{m+n}{mn}}} \right] \\ &= P \left[t < \frac{-10 - (200 - 215)}{13'984 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{5}}} \right] \\ &= P \left[t < \frac{5}{13'984 \cdot 0'516} \right] = P[t < 0'6929] = 0'75, \end{aligned}$$

donde $t \sim t_{18}$ y una vez más hemos considerado la probabilidad del punto más próximo, que en este caso es $P[t < 0'688] = 0'75$.

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribución para la diferencia de proporciones

Distribución para la diferencia de proporciones

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Dadas $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$ dos muestras aleatorias simples independientes con tamaños n y m , procedentes de variables aleatorias de Bernoulli, con parámetros p_1 y p_2 . Se verifica entonces que la variable aleatoria

$$\frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}}} \sim N(0, 1).$$

De forma análoga al caso de la distribución para la diferencia de medias cuando ambas varianzas son conocidas, a partir de

$$P_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n}\right), \quad P_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right),$$

se obtiene que $P_1 - P_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}\right)$, y entonces, sin más que tipificar la expresión anterior

$$\frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n} + \frac{p_2(1-p_2)}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Distribución para la diferencia de proporciones

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Adviértase, que a efectos prácticos, para el análisis mediante intervalos de confianza y contrastes de hipótesis se suele admitir que

$$\frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Ejemplo 7 Según los resultados publicados en el informe del 2008 realizado por Infoadex, el 47'6% de la inversión publicitaria en el 2008 fue destinada a medios convencionales mientras que en el 2007 se destinó el 49'5%. Si se selecciona una muestra de 10 empresas en cada uno de los años, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción muestral de inversión en medios convencionales en el 2007 sea inferior a la del 2008?

Siendo P_1 la proporción de inversión publicitaria en el año 2007 y P_2 en el 2008 y usando que $Z = \frac{P_1 - P_2 - (0'495 - 0'476)}{\sqrt{\frac{0'495(1-0'495)}{10} + \frac{0'476(1-0'476)}{10}}} \sim N(0, 1)$, se tiene

$$P[P_1 < P_2] = P[P_1 - P_2 < 0] = P\left[Z < -\frac{0'019}{0'223}\right] = P[Z < -0'086] = 0'4641.$$

#

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Resumen

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribuciones de estadísticos muestrales a partir de una muestra aleatoria simple, $X_1, \dots, X_n$, procedente de una $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\text{varianza} \begin{cases} \mu \text{ conocida: } \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2 \\ \mu \text{ desconocida: } \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n}{\sigma^2} \cdot S_n^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot S_{n-1}^2 \sim \chi_{n-1}^2 \end{cases}$$

$$\text{media} \begin{cases} \sigma^2 \text{ conocida: } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1) \\ \sigma^2 \text{ desconocida: } \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}} \sim t_{n-1} \end{cases}$$

Distribución de la proporción a partir de una muestra aleatoria simple, $X_1, \dots, X_n$, procedente de una $B(p)$:

$$\frac{P - p}{\sqrt{\frac{P \cdot (1-P)}{n}}} \sim N(0, 1)$$

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Distribuciones de estadísticos muestrales a partir de dos muestras aleatorias simples, $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$, procedentes de sendas $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $N(\mu_2, \sigma_2^2)$:

$$\text{cociente varianzas: } \frac{S_{n-1}^2}{S_{m-1}^2} \cdot \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F_{n-1, m-1}$$

$$\text{diferencia medias} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ conocidas: } \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \sim N(0, 1) \\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ desconocidas: } \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(n-1) \cdot S_{n-1}^2 + (m-1) \cdot S_{m-1}^2}{n+m-2} \cdot \sqrt{\frac{m+n}{mn}}}} \sim t_{n+m-2} \\ \sigma_1^2, \sigma_2^2 \text{ desconocidas y muestras grandes: } \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_n^2}{n} + \frac{S_m^2}{m}}} \sim N(0, 1) \end{array} \right.$$

Distribución de la proporción a partir de dos muestras aleatorias simples, $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_m$, procedentes de sendas $B(p_1)$ y $B(p_2)$:

$$\frac{(P_1 - P_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} \sim N(0, 1)$$

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

Ejercicios Propuestos

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

3.1

A partir de una población formada por tres elementos con valores 1, 2 y 3, se pide:

- (a) Determinar todas las posibles muestras con reemplazamiento de tamaño dos.
- (b) Calcular la media y la varianza de la población.
- (c) Calcular la media y la varianza de la variable aleatoria media muestral.
- (d) ¿Qué relación existe entre la media poblacional y la media de la variable aleatoria media muestral?

3.2

Según los datos obtenidos de la Encuesta de Población Activa del cuarto trimestre del 2001, el porcentaje de parados del sexo masculino en Andalucía durante el año 2001 fue de 16'46% y el de mujeres fue el 31'68%. Si se seleccionan 15 hombres y 15 mujeres al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de parados en los hombres sea más de 10 puntos inferior a la de las mujeres?

3.3

Supongamos que el sueldo mensual, en miles de euros, de los directivos de una gran empresa siguen una distribución normal $N(10, 1)$, mientras que el salario mensual del resto de personal sigue una distribución normal $N(4, 4)$. Si se extrae una muestra aleatoria simple de 10 directivos y otra de 20 empleados no directivos:

- (a) ¿Calcular la probabilidad de que el sueldo mensual medio de la muestra de 10 directivos supere los 11.000 euros?
- (b) ¿Calcular la probabilidad de que el sueldo mensual medio de la muestra de 20 empleados no directivos supere los 5.000 euros?
- (c) ¿Cuál es la probabilidad de que el sueldo medio mensual de los diez directivos supere al correspondiente a los no directivos en más de 5.000 euros?

3.4

Según la publicidad del Banco Santander del total de los créditos ICO concedidos en la Comunidad de Andalucía hasta el 12 de octubre de 2009, dicha entidad ha formalizado el 26'2%. Si se escogen 100 créditos ICO al azar, ¿cuál es la probabilidad de que más del 30% los haya concedido el Banco Santander?

Relación de ejercicios propuestos

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

3.5 Según los datos publicados por el Instituto Nacional de Estadísticas correspondientes a julio de 2009, se sabe que el importe medio de las hipotecas de fincas urbanas en Granada es de 150.964 euros, mientras que en Sevilla asciende a 201.053 euros. Suponiendo que las varianzas muestrales toman el valor 250.000 y 325.000, respectivamente, y que las varianzas poblacionales son desconocidas pero iguales, ¿cuál es la probabilidad de que escogiendo 100 hipotecas al azar de cada provincia, el importe medio de las de Sevilla sea al menos 50.000 euros superior al importe medio de las de Granada?

3.6 Según los datos publicados por el Instituto Nacional de Estadísticas correspondientes a julio de 2009, se sabe que las varianzas poblacionales del importe de las hipotecas de fincas urbanas en Granada es de 200.000, mientras que en Sevilla asciende a 310.000. ¿Cuál es la probabilidad de que escogiendo 101 hipotecas al azar de cada provincia, la cuasivarianza de la muestra de Sevilla sea inferior a la de la muestra de Granada?

Índice

Distribución para la
varianza muestral

Distribución para la
media muestral

Distribución para la
proporción muestral

Distribución para el
cociente de varianzas

Distribución para la
diferencia de medias
muestrales

Distribución para la
diferencia de
proporciones

3.7 Supongamos que la variable edad de los alumnos matriculados en primero de la Facultad de Ciencias Económicas sigue una distribución normal de media $\mu = 21$ y varianza $\sigma^2 = 4$. Se pide:

- (a) Probabilidad de que un alumno elegido aleatoriamente tenga más de 19 años.
- (b) Si consideramos una muestra aleatoria de tamaño nueve, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral tenga un valor superior a 19?
- (c) Para la misma muestra anterior, ¿cuál será la varianza de la media muestral?