

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e I.O.



**EL MODELO ESTOCÁSTICO DE
GOMPERTZ. MODELIZACIÓN DE
DATOS SOCIODEMOGRÁFICOS**

Tesis Doctoral

María Dolores Huete Morales

Granada, 2006

Universidad de Granada
Departamento de Estadística e I.O.



**EL MODELO ESTOCÁSTICO DE
GOMPERTZ. MODELIZACIÓN DE
DATOS SOCIODEMOGRÁFICOS**

Tesis Doctoral

María Dolores Huete Morales

Granada, 2006

**EL MODELO ESTOCÁSTICO DE
GOMPERTZ. MODELIZACIÓN DE
DATOS SOCIODEMOGRÁFICOS.**

Memoria Presentada por Maria Dolores Huete Morales y realizada en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa, para optar al grado de Doctor por la Universidad de Granada.

Granada, Junio de 2006

Fdo: Maria Dolores Huete Morales

Fdo: Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez Dr. D. Francisco Abad Montes
Director de la Memoria Director de la Memoria

*A mi hijo, mi marido
y mi madre.*

Agradezco en primer lugar a mis directores, D. Ramón Gutiérrez y D. Francisco Abad su apoyo recibido en todos estos años.

También me gustaría expresar mi agradecimiento a D. Ahmed Nafidi por todo el tiempo que ha dedicado a esta memoria y su inestimable colaboración, y a D^a Eva Ramos por su ánimo, sus consejos y su ayuda.

Índice general

Introducción	11
1. Modelos de crecimiento de poblaciones	17
1.1. Introducción	17
1.2. Medidas de crecimiento poblacional	21
1.2.1. Tasa de crecimiento aritmético r_a	21
1.2.2. Tasa de crecimiento geométrico r_g	22
1.2.3. Tasa de crecimiento continuo r_c (Modelo Malthusiano)	23
1.3. Modelos de crecimiento poblacional: Curva logística	24
1.3.1. Modelo de Malthus	25
1.3.2. Modelo de Verhulst	27
1.3.3. Otras formulaciones del modelo de Verhulst	30
2. Proceso Lognormal multivariante no homogéneo	35
2.1. Introducción	35
2.2. El proceso lognormal multivariante: dos aproximaciones	36
2.2.1. Ecuación diferencial estocástica	36
2.2.2. Ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov	37
2.3. Momentos de las variables endógenas	39
2.3.1. Media o tendencia de las variables endógenas	39
2.3.2. Covarianza de las variables endógenas	40
2.4. Estimación de los parámetros	41
2.5. Distribución de los estimadores de los parámetros del proceso	44
2.5.1. Distribución de $\hat{\beta}$	44
2.5.2. Distribución de \hat{B}	44
2.6. Contrastes de hipótesis sobre los parámetros	45
2.6.1. Contraste $\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$	47
2.6.2. Contraste $\mathcal{H}_0 : \beta_i = 0$	48
2.6.3. Contraste $\mathcal{H}_0 : \beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \dots = \beta_{i_h} = 0$	48

2.7.	Caso particular: El proceso lognormal univariante con un factor exógeno.	50
2.7.1.	Obtención de los momentos	50
2.7.2.	Estimadores de máxima verosimilitud	51
2.7.3.	Matriz de covarianzas de los estimadores	53
3.	Proceso de Gompertz univariante y multivariante homogéneo:	
	Inferencia por muestreo discreto	57
3.1.	Introducción	57
3.2.	Gompertz determinístico	58
3.3.	Proc. Gompertz univariante	59
3.3.1.	Análisis del proceso como solución de una ecuación diferencial estocástica	59
3.3.2.	Análisis a través de las ecuaciones de Kolmogorov	61
3.3.3.	Momentos del proceso	63
3.3.4.	Estimación de los parámetros del proceso	65
3.3.5.	Aplicación del proceso Gompertz al caso de la población andaluza	71
3.3.6.	Aplicación a la población provincial	75
3.4.	Proc. Gompertz multivariante	87
3.4.1.	Análisis a través de las ecuaciones de Kolmogorov	87
3.4.2.	Momentos del proceso	89
3.4.3.	Estimación de los parámetros	90
4.	Proceso de Gompertz univariante homogéneo: inferencia por muestreo continuo	99
4.1.	Introducción	99
4.2.	Definición del proceso como solución de una EDE	100
4.3.	Estimación de los parámetros α y β	101
4.3.1.	Estimación del parámetro α	101
4.3.2.	Estimación del parámetro β	102
4.4.	Aproximación en tiempo discreto de los estimadores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$	103
4.5.	Estimación del parámetro σ^2	107
4.6.	Simulación en el proceso Gompertz	109
4.7.	Estimación de los parámetros del proceso de Gompertz asociado al crecimiento de la población	112
5.	Proceso de Gompertz no homogéneo: Inferencia por muestreo discreto	119
5.1.	Introducción	119

5.2. Concepto y caracterización	120
5.3. Densidad de transición	120
5.4. Momentos del proceso	122
5.5. Estimación de los parámetros	123
5.6. Caso particular del proceso de Gompertz no homogéneo . . .	124
5.6.1. Densidad de transición	125
5.6.2. Funciones tendencia	126
5.6.3. Estimación de los parámetros	126
5.7. Aplicación del modelo de Gompertz no homogéneo al caso de la población andaluza	128
5.7.1. Población andaluza femenina	135
5.7.2. Población andaluza masculina	137
5.7.3. Población andaluza ambos sexos	139
Anexo de resultados	145
Bibliografía	153

Índice de figuras

1.1. Transición demográfica	19
1.2. Crecimiento transitorio	20
1.3. Línea de población	22
1.4. Crecimiento aritmético	22
1.5. Crecimiento geométrico	23
1.6. Crecimiento continuo	23
1.7. Población española 1900-1990	24
1.8. Población andaluza 1900-1990	24
1.9. Tasa de crecimiento (modelo de Malthus)	25
1.10. Crecimiento poblacional (modelo de Malthus)	27
1.11. Evolución de la tasa de crecimiento (modelo de Verhulst)	27
1.12. Crecimiento "normal" (modelo de Verhulst)	28
1.13. Población versus tasa de crecimiento (modelo de Verhulst)	28
1.14. Curva logística (modelo de Verhulst)	29
1.15. Punto de inflexión en la curva logística (modelo de Verhulst)	30
1.16. Curva logística de Robertson	31
1.17. Curva de Gompertz	32
1.18. Diferencias entre algunos modelos de crecimiento	33
3.1. Evolución de la población de Andalucía	71
3.2. Función tendencia (población de Andalucía)	72
3.3. Función tendencia condicionada (población de Andalucía)	73
3.4. Datos observados y FTC Almería, Cádiz, Córdoba y Granada	84
3.5. Datos observados y FTC Huelva, Jaén, Málaga y Sevilla	85
4.1. Trayectoria simulada del proceso de Gompertz	110
4.2. Evolución de la estimación de σ según los cuatro métodos	111
4.3. Evolución de las estimaciones de α, β	112
4.4. Evolución de la población en Andalucía (1976-2003)	114
4.5. Datos observados y función tendencia	114

4.6. Datos observados y función tendencia condicionada	115
4.7. Simulación del modelo de población	117
5.1. Información observada en mujeres	132
5.2. Información observada en hombres	133
5.3. Evolución del Indicador Coyuntural de Fecundidad	134
5.4. Función tendencia no condicionada (mujeres)	135
5.5. Función tendencia condicionada (mujeres)	136
5.6. Función tendencia no condicionada (hombres)	137
5.7. Función tendencia condicionada (hombres)	138
5.8. Función tendencia no condicionada (ambos sexos)	139
5.9. Función tendencia condicionada (ambos sexos)	141
5.10. Función tendencia no condicionada (P.Lognormal, ambos sexos)	143
5.11. Función tendencia condicionada (P.Lognormal, ambos sexos)	143

Índice de cuadros

3.1. Población andaluza a 1 de enero	71
3.2. Observaciones y Función tendencia condicionada (Población andaluza	74
3.3. Parámetros estimados por provincia	75
3.4. Población y FTC en Almería	76
3.5. Población y FTC en Cádiz	77
3.6. Población y FTC en Córdoba	78
3.7. Población y FTC en Granada	79
3.8. Población y FTC en Huelva	80
3.9. Población y FTC en Jaén	81
3.10. Población y FTC en Málaga	82
3.11. Población y FTC en Sevilla	83
3.12. Poblaciones estimadas en 2004 y 2005 por provincia	86
4.1. Población observada en Andalucía.1976-2005	113
4.2. Población observada y funciones tendencia	116
5.1. Relación lineal entre los factores exógenos y la población . . .	129
5.2. Datos socio-demográficos (Mujeres)	130
5.3. Datos socio-demográficos (Hombres)	131
5.4. Parámetros estimados (mujeres)	135
5.5. Observaciones y funciones tendencia (mujeres)	136
5.6. Parámetros estimados (hombres)	137
5.7. Observaciones y funciones tendencia (hombres)	138
5.8. Parámetros estimados (ambos sexos)	139
5.9. Observaciones y funciones tendencia (ambos sexos)	140
5.10. Parámetros estimados (P.Lognormal, ambos sexos)	142
5.11. Observaciones y funciones tendencia (P.Lognormal, ambos sexos)	142

Introducción

Objetivos de esta Tesis

El objetivo principal de esta Tesis es el estudio de los procesos de difusión Lognormal y Gompertz como herramientas para la modelización y predicción del crecimiento poblacional, y poder así establecer el que mejor se adecúa a dicha evolución de la población. Para ello, se aplican diversos modelos estocásticos a los datos observados de población en Andalucía en un amplio periodo, considerando además, la desagregación por sexo e incluso, utilizándose en algún caso para modelizar el crecimiento poblacional en las distintas provincias andaluzas. De cualquier forma, resulta una novedosa forma de establecer o ajustar el crecimiento poblacional, ya que normalmente se utilizan los modelos determinísticos de crecimiento, dependientes en su mayoría de una tasa de crecimiento poblacional.

Estos modelos de crecimiento están recogidos en el primer Capítulo de este trabajo, en el que se exponen las principales medidas y modelos de crecimiento de poblaciones. En el Capítulo 2 se introduce el proceso Lognormal multivariante no homogéneo y a continuación se establece el proceso univariante como caso particular del anterior y que será utilizado para su aplicación a datos reales. Los siguientes capítulos se centrarán en la Difusión de Gompertz: en el Capítulo 3 es analizado el proceso de Gompertz univariante y multivariante en el caso homogéneo, considerando muestreo discreto al realizar inferencia sobre el proceso. A continuación, el Capítulo 4 se centra en la difusión gompertziana univariante homogénea, pero analizando el caso de que el muestreo considerado sea continuo. Por último, en el Capítulo 5 se analiza el proceso estocástico de Gompertz no homogéneo, es decir, considerando variables exógenas que permitan afinar y mejorar la modelización de las observaciones. Además se realiza un ajuste comparativo de los procesos estocásticos Lognormal y Gompertz no homogéneos. De esta forma, se realiza un análisis de estos dos procesos estocásticos en cuan-

to a la teoría matemática y estadística que llevan implícita en sus diversas extensiones y tras ello, se aplica a datos reales de población.

Antecedentes sobre el tema

Es bien sabido, que el estudio del crecimiento se aplicó en primer lugar a poblaciones humanas, aunque actualmente son muchas las ramas científicas (Biología, Economía, etc.), que utilizan modelos de crecimiento para reflejar el comportamiento de diversos fenómenos. Los modelos más conocidos y que, aunque fueron propuestos hace largo tiempo, tuvieron una gran relevancia en su momento son el modelo propuesto por Thomas R. Malthus [39],[40],[1] que supone un crecimiento de la población de tipo exponencial y sin considerar ningún freno a dicho crecimiento y el modelo de Pierre F. Verhulst [50], que modifica el modelo de Mathus, mediante el establecimiento de una cota o valor máximo alcanzable, surgiendo así el modelo logístico de población, con lo que presupone que cualquier población tiende a un estado de equilibrio.

Estos **modelos determinísticos** no son de fácil aplicación en poblaciones reales [4], ya que como es sabido, el volumen de una población humana depende intrínsecamente de otras muchas variables de índole socioeconómica, ya sea por el cambio en los hábitos de fecundidad, por la mejora en las condiciones de vida, relativas a la salud de los individuos y que produzcan un aumento o disminución en el número de años que viven dichos individuos o por la bondad en las condiciones económicas de éstos. No hay que olvidar además la importancia en el crecimiento del fenómeno migratorio, [47]; nuestro país ha sufrido importantes variaciones de población a lo largo de su historia por el éxodo masivo de individuos a otros países europeos y latinoamericanos, y en la actualidad, es la inmigración, el fenómeno que mayor influencia puede tener sobre el volumen de población, [3].

Es por ello, que surge la necesidad de utilizar otros modelos para el ajuste del volumen poblacional, como son los procesos de difusión, ampliamente aplicados en la modelización del crecimiento, [2]. La inclusión de factores exógenos en dichos modelos es una clara ventaja, ya que permiten incluir en la tendencia, variables que influyen en el crecimiento, lo que permitirá una clara mejora en la modelización del fenómeno.

Respecto al **proceso Lognormal**, son numerosos los estudios tanto teóricos como prácticos realizados hasta el momento. Desde el punto de vista teórico destacan las aportaciones de Gutiérrez y otros, [15], [27], Torres, [49], Gutiérrez, González y Torres, [16], Gutiérrez, Román y Torres, [29], que introdujeron este proceso a partir de las ecuaciones de Kolmogorov y a partir de la ecuación diferencial estocástica de Ito, desde la perspectiva multidimensional, desarrollando el problema de la inferencia estadística en el caso de la inclusión de factores exógenos. En muchos de los trabajos anteriores se ha realizado una aplicación en problemas reales, sobre todo utilizando variables de tipo económico, ([19], [21], [28]).

Respecto al **proceso Gompertz**, fue introducido por Ricciardi, [45], [46] que consideró aplicaciones en el campo de la Biología y por Crow y Shimizu, [8]. Más adelante ha sido Gutiérrez y otros, en varios trabajos, [17],[23] quien realiza inferencia sobre dicho proceso considerando trayectorias discretas. En Ferrante, [9] se abordó el caso de la consideración de trayectorias continuas del proceso, aplicándolo al crecimiento tumoral y más recientemente ha sido Gutiérrez, Gutiérrez-Sánchez y Nafidi, ([22], [24]), quienes han profundizado en la inferencia con trayectorias continuas, aplicándolo en el caso de variables asociadas al consumo energético.

El caso no homogéneo en el proceso de Gompertz, mediante la consideración de variables exógenas en dicho proceso ha sido definido por Nafidi en [41] en el contexto general y estudiado recientemente y aplicado a datos reales por Gutiérrez y otros que han abordado el problema de la inferencia considerando trayectorias discretas de dicho proceso. En [20] se aplica al precio de la vivienda en España y en [18] al consumo eléctrico en Marruecos.

Organización de esta memoria y aportaciones

Esta memoria está organizada en cinco capítulos, quedando los tres últimos dedicados al proceso de Gompertz, tema principal de esta Tesis.

En el **Capítulo 1** se ofrece una visión general de los modelos de crecimiento utilizados específicamente para poblaciones humanas. En primer lugar, se muestran las principales medidas utilizadas en el campo demográfico, para establecer la intensidad del crecimiento en un periodo de tiempo y que están asociadas a distintos modelos en los que no se establece una cota a dicho crecimiento, es decir, en los que se presupone un crecimiento ilimitado.

A continuación se analizan otros modelos, con la finalidad de la introducción de la curva logística en la que sí se establece una cota al crecimiento poblacional.

En el **Capítulo 2** se hace una recopilación de los resultados obtenidos en lo que se refiere al proceso lognormal multivariante no homogéneo en el que la tendencia queda afectada por una serie de variables denominadas exógenas, e introduciéndolo a partir de las ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov y como solución de la ecuación diferencial estocástica de Ito. Se obtienen los estimadores de los parámetros asociados al proceso y su distribución en el muestreo, a partir de la función de verosimilitud y por último, se analizan los contrastes de hipótesis más usuales. En el último capítulo de esta memoria se realizará una aplicación a datos reales referentes a la población andaluza introduciendo dos variables exógenas: el número de inmigrantes procedentes del extranjero y el Indicador Coyuntural de Fecundidad, mediante la consideración del proceso Lognormal como caso particular del gompertziano. Esta aplicación tiene como finalidad comparar la bondad de los resultados obtenidos al tomar un modelo de Gompertz y un modelo Lognormal.

En el **Capítulo 3** se aborda el proceso de Gompertz homogéneo considerando muestreo discreto. Primeramente se introduce el proceso univariante, a través de las ecuaciones de Kolmogorov y como solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE). A continuación se desarrolla la teoría probabilística y estadística asociada al mismo, obteniendo las probabilidades de transición, sus funciones momento y los estimadores de los parámetros del proceso. Por último se realizan dos aplicaciones reales; en primer lugar, se modeliza la población de la Comunidad de Andalucía y en segundo lugar, se aplica a la población de cada una de las ocho provincias andaluzas, a partir de las observaciones en el periodo 1976-2005. La última parte de este capítulo está dedicada al proceso Gompertz multivariante, considerando también muestreo discreto. Se obtienen las funciones momento y los estimadores de sus parámetros asociados.

El **Capítulo 4** está dedicado al proceso de Gompertz univariante y homogéneo, pero esta vez considerando un muestreo continuo. En primer lugar se obtienen los estimadores de los parámetros de la tendencia (drift) (α y β) a partir de la función de verosimilitud. Hecho esto, se realiza una aproximación de dichos estimadores en tiempo discreto y se estudian diversos métodos para la obtención del estimador del parámetro σ . Además se abor-

da el problema de la simulación de trayectorias en este proceso y se muestra la evolución del valor del estimador de cada parámetro α y β y de σ según los distintos métodos de estimación. Comparando los resultados obtenidos en este último caso, es posible ver qué método ofrece un valor más adecuado. La última parte de este capítulo está dedicada a realizar una modelización del crecimiento de la población andaluza en el periodo 1976-2005, calculando las estimaciones de los parámetros y los valores de las funciones tendencia no condicionada y tendencia condicionada, comparando esta última con una simulación del modelo de población obtenido.

Finalmente, en el **Capítulo 5** se aborda el proceso de Gompertz univariante no homogéneo, en el que se incluyen en la tendencia una serie de variables exógenas. En un primer lugar se obtiene la función de verosimilitud, que plantea el inconveniente de la necesidad de conocer la expresión implícita de las funciones ligadas a los factores exógenos, para poder realizar inferencia sobre los parámetros. Por esta razón se considera un caso particular, facilitando así la estimación de estos parámetros. Por último se realiza un estudio exhaustivo en la aplicación de los resultados teóricos anteriores; se toma de nuevo como variable endógena, la población andaluza, considerando como variables exógenas el número de inmigrantes procedentes del extranjero, la esperanza de vida al nacimiento y el indicador sintético de fecundidad, tomando por separado hombres y mujeres y a continuación la población de ambos sexos (periodo 1981-2002). Con esta última, se realiza también una modelización mediante un proceso Lognormal no homogéneo a fin de poder efectuar conclusiones sobre los resultados y poder establecer el modelo óptimo para predecir.

Problemas abiertos

Durante el desarrollo de esta memoria se ha considerado la posibilidad de realizar ampliaciones del análisis realizado en relación a lo siguiente:

- En los ajustes de población realizados, es posible la consideración de otro tipo de variables exógenas que puedan mejorar dicho ajuste. En esta Tesis se han tomado variables demográficas, aunque es muy probable que algunos indicadores económicos influyan en gran medida en el comportamiento del crecimiento poblacional; por ejemplo, en un periodo de desarrollo o bonanza económica es muy natural que los niveles de fecundidad aumenten y por lo tanto, también el crecimiento poblacional sea mayor.

- Respecto a la inferencia estadística sobre el proceso de Gompertz, sería muy interesante conocer la distribución de los estimadores de los parámetros obtenidos, ya que permitiría obtener intervalos de confianza para los mismos. Ya en desarrollo de esta Tesis se ha intentado conseguir dicha distribución mediante una metodología que permite conocer la distribución asintótica de los estimadores de los parámetros en un proceso de difusión y que puede consultarse en ([43]). En el caso de proceso Gompertz no se ha conseguido obtener dicha distribución, por la aparición de una matriz singular. Por lo tanto, es necesario buscar otras formas de conseguirla.
- Considerar las versiones no homogéneas de otros procesos de difusión, como por ejemplo, los de tipo logístico analizados en [14] y de Rayleigh estudiado en [30], y aplicar estas extensiones a los datos reales de la población utilizados en esta memoria, lo que permitiría comprobar si otros modelos estocásticos mejoran el ajuste poblacional.

Capítulo 1

Modelos de crecimiento de poblaciones

1.1. Introducción

Es una necesidad imperiosa conocer la evolución de la población de una región o zona geográfica y cómo va a cambiar el volumen de la misma en un futuro. La Demografía, como ciencia, ha tratado de medir o cuantificar la intensidad del crecimiento y de prever si va a aumentar o disminuir, teniendo en cuenta los múltiples factores que pueden influir en ese aumento o disminución. Es bien sabido que los factores o fenómenos demográficos que hacen que la población aumente son la fecundidad, que contribuye a través del número de nacimientos ocurridos en su seno; la mortalidad, a través del número de defunciones y la migración, por el número de entradas y salidas.

Por tanto, realizar un análisis exhaustivo de la evolución de una población debe pasar previamente por el estudio de los indicadores más característicos o relevantes de cada fenómeno; por ejemplo, el mejor indicador y que más información proporciona sobre mortalidad es la esperanza de vida al nacimiento de una población, ya que un aumento de la misma, llevará a que los niveles poblacionales también aumenten debido a la longevidad de sus habitantes. En fecundidad, suele utilizarse el indicador sintético o coyuntural de fecundidad, ya que proporciona el número de hijos por mujer en edad fértil y por lo tanto, un aumento de este indicador también hará que la población aumente.

Ninguna población varía su crecimiento de forma espontánea, sino que

existen mecanismos que facilitan o dificultan el mismo. Por ejemplo, el que una población tenga mayor población femenina dentro de la vida laboral, hará que los indicadores de fecundidad sean menores y por consiguiente, la velocidad de crecimiento de la población disminuya.

El crecimiento de la población puede actuar como estímulo o impedimento del desarrollo económico de cualquier país. Diversas teorías económicas han surgido a este respecto; algunas de ellas suponen una relación negativa entre el crecimiento poblacional y el económico, afirmando que el crecimiento de la población frena el desarrollo económico en cuanto al output (Hoover y Coale, 1958), a la renta per cápita (Enke, 1971) o el ahorro (Leff, 1969); otras fuentes de pensamiento se han dirigido sobre la base de que el aumento poblacional facilita el económico (Clarke, 1967 ó Easterlin, 1967), si bien es cierto que ninguna de ellas han sido demostradas empíricamente. Los trabajos empíricos de Kuznet (1967) y Thirlwall (1972) sobre una muestra de 27 países en vías de desarrollo y 16 desarrollados demostraron que no existe una relación significativa entre ambas magnitudes, aunque en un análisis de Hoyo y García (1988) sobre el caso de España, reflejó que durante los años 1965 a 1974, se produjo un aumento elevado de la tasa de crecimiento de la renta, acompañado por el mayor aumento de la población hasta entonces (para ampliar, puede verse [6],[11] y [38]).

En la actualidad, es bien sabido tanto en el campo de la Economía como en el de la Demografía, que existe una relación bidireccional entre las variables económicas y demográficas. El comportamiento del número de nacimientos es consecuencia del ciclo económico, aunque quizás con cierto retardo. La bondad económica hace que el número de matrimonios sea más elevado y por tanto, aumente la fecundidad.

Teorías cuantitativas de la población

La primera teoría, a la que podemos clasificar como económica, sobre la evolución de la población fue propuesta por Thomas Robert Malthus (1798), que aseguraba que la población tiende a crecer por efecto de una capacidad reproductora constante, en progresión geométrica; aunque este crecimiento es frenado por las subsistencias o recursos alimenticios que pueden crecer solamente en progresión aritmética. Por otro lado, Verhulst(1838) creía que la población aumentaba en progresión geométrica, a razón constante, pero frenada por una serie de obstáculos que dificultan el crecimiento, con lo cual aparece la curva *Logística* que tiende asintóticamente a un máximo

(condición de equilibrio estacionario). Una tercera teoría surge de Carlos Darwin (y desarrollada matemáticamente por Volterra), que considera la influencia recíproca que dos especies (devoradora y no devoradora) ejercen sobre el crecimiento de cada una de ellas; esto es, el crecimiento de la primera, hace que se frene el crecimiento en la segunda y a su vez, este freno hace que la primera también detenga su propagación (*teoría periódica*). La última teoría fundamental sobre población es la (*teoría cíclica*), que concluye que la población tiende a seguir una marcha semejante a los organismos que la componen, que atraviesan distintas etapas de desarrollo, estacionamiento e involución (ver [13]).

La Transición Demográfica

La teoría o perspectiva de la Transición Demográfica desarrollada por Thompson (1929), comenzó siendo una descripción de los cambios demográficos sufridos en los países desarrollados durante el siglo XIX al XX. Es el proceso mediante el cual la población pasa de una situación de altos índices de natalidad y mortalidad a otra caracterizada por unos índices muy bajos, por lo que se produce un periodo de rápido crecimiento transicional. España, como el resto de países europeos ya ha superado dicha transición, [31].

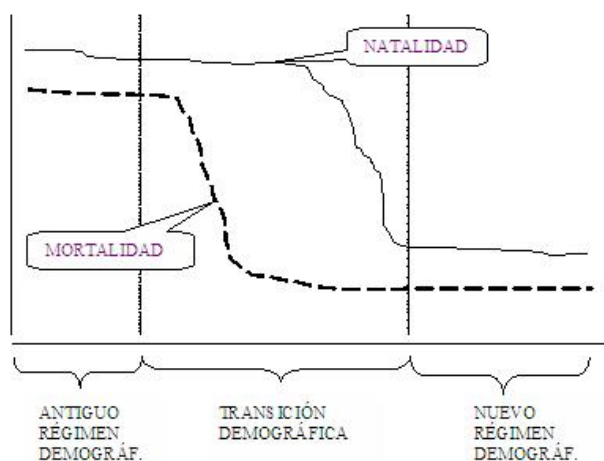


Figura 1.1: Transición demográfica

El antiguo régimen demográfico en Europa Occidental se caracteriza por una alta natalidad y alta mortalidad; tanto el Estado como la Iglesia fomentan los nacimientos. Con la revolución industrial (Europa, siglo XIX) se produce un desequilibrio transitorio ya que la natalidad sigue siendo alta, pero debido a los avances médicos y otras aportaciones, comienza a disminuir la mortalidad. Esta situación produce lo que se denomina "explosión demográfica". Por último el nuevo régimen demográfico se caracteriza por una baja natalidad y baja mortalidad, ya que aparecen los métodos anticonceptivos, la escolarización de los niños, incorporación de la mujer al mercado de trabajo, etc. Por lo tanto, el crecimiento constante en un primer momento, para sufrir un rápido aumento hasta que se estabiliza de nuevo en la última etapa de la Transición demográfica:

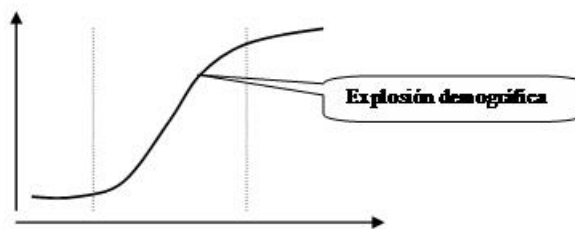


Figura 1.2: Crecimiento transitorio

En Europa Occidental estamos ya en la 3ª fase de crecimiento (nuevo régimen demográfico) e incluso en algunos países como el nuestro el crecimiento es negativo; este crecimiento casi nulo deriva a un envejecimiento de la población, lo que supone unos gastos que repercuten en la población activa. Por esta razón en algunos países se tiende a dar estímulos a la natalidad (desgravación fiscal, ayudas por hijo, etc). Otros países se encuentran en la fase de explosión demográfica, que al no poder hacer frente a las necesidades de todos sus habitantes, desarrollan políticas demográficas para el control de la natalidad. Por ejemplo, China lanzó en 1979 la campaña del "hijo único" que consistía en la gratuidad de operaciones de esterilización y de métodos anticonceptivos, e incluso la sanción del 1,5 del sueldo a la familia que tuviera más de un hijo. Como hemos dicho anteriormente, muchos de los países de nuestro entorno, están sufriendo niveles de fecundidad tan bajos y un envejecimiento de la población tan enorme, que se están alejando de la situación de equilibrio que hemos visto en el "nuevo régimen demográfico". Esta situación se está empezando a denominar Segunda Transición

Demográfica, fundamentalmente caracterizada por el decrecimiento de la población (indicadores sintéticos de fecundidad muy bajos, retraso de la edad media al matrimonio, tasas de mortalidad bajas y saldos migratorios prácticamente nulos).

Por esta razón, muchos demógrafos vislumbran que la salida más rápida de esta segunda transición, sería fomentar las inmigraciones desde otros países que se encuentren en fase de explosión demográfica.

1.2. Medidas de crecimiento poblacional

La primera cuestión importante es cuánto y con qué velocidad crece una población; las tasas de crecimiento responden a esta pregunta en un primer lugar, aunque un análisis más exhaustivo de la velocidad de crecimiento de una población debe contemplar los distintos factores que harán que la población aumente o disminuya constantemente. Ninguna población varía su crecimiento de forma espontánea, sino que existen mecanismos que facilitan o dificultan el mismo. Por ejemplo, el que una población tenga mayor población femenina dentro de la vida laboral, hará que los indicadores de fecundidad sean menores y por consiguiente, la velocidad de crecimiento de la población disminuya. Por este motivo, las tasas de crecimiento serán sólo una primera aproximación y se utilizarán para intervalos de tiempo relativamente cortos.

Cualquier análisis demográfico básico tratará de medir cuánto está creciendo (o en algunos casos disminuyendo) la población. Para ello, será necesario disponer del volumen de población en fechas sucesivas y del tiempo transcurrido entre dichas fechas. Definiremos una tasa de crecimiento r como el incremento de población que se produce en un intervalo de tiempo t por cada unidad que constituye la población. Según el criterio de selección de la población de referencia, aparecen diversas soluciones, en las que la población *explota* o se extingue según si dicha tasa es positiva o negativa:

1.2.1. Tasa de crecimiento aritmético r_a

Toma como población de referencia la que existe al comienzo del intervalo de tiempo (el crecimiento se produce a "interés simple"). Si P_0 es población al inicio del intervalo temporal considerado y P_t la población al final del intervalo temporal de longitud t .

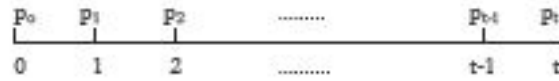


Figura 1.3: Línea de población

En este caso:

$$P_t = P_{t-1} + P_0 r_a = P_0(1 + t r_a) \Rightarrow r_a = \frac{P_t - P_0}{t P_0}$$

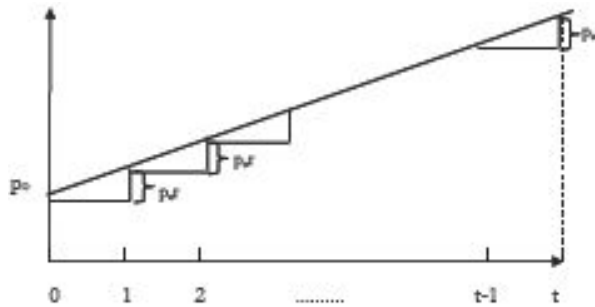


Figura 1.4: Crecimiento aritmético

1.2.2. Tasa de crecimiento geométrico r_g

Toma como población de referencia la que existe al comienzo del intervalo de tiempo en estudio (el incremento se produce a "interés compuesto", es decir la población de cada periodo interviene en el crecimiento):

$$P_t = P_{t-1} + P_{t-1} r_g = P_0(1 + r_g)^t \Rightarrow r_g = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

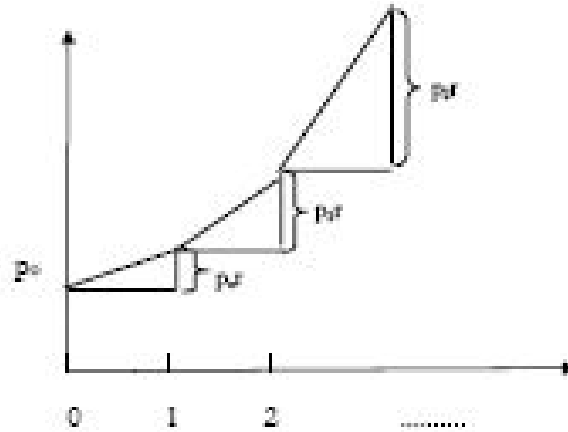


Figura 1.5: Crecimiento geométrico

1.2.3. Tasa de crecimiento continuo r_c (Modelo Malthusiano)

Se toma como población de referencia la que existe al comienzo de cada intervalo infinitesimal de tiempo (el incremento se produce a "interés compuesto" pero en cada instante):

$$P_t = P_0 e^{r_c t} \Rightarrow r_c = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{P_t}{P_0} \right)$$

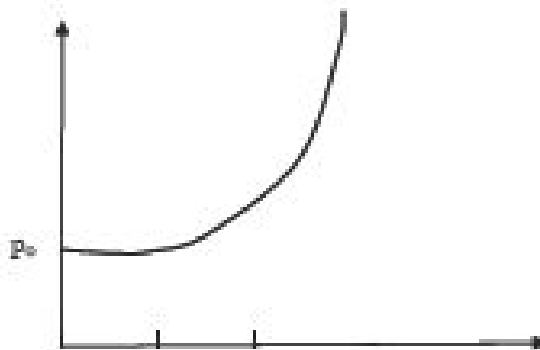


Figura 1.6: Crecimiento continuo

1.3. Modelos de crecimiento poblacional: Curva logística

Lógicamente no podemos suponer un crecimiento de la población ilimitado; en los modelos de crecimiento aritmético, geométrico y continuo, la población crece ilimitadamente. En ninguna población humana el crecimiento puede ser de este tipo (ó por lo menos no lo es si consideramos un amplio periodo).

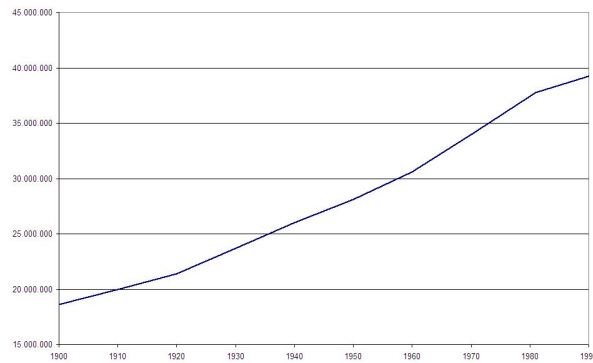


Figura 1.7: Población española 1900-1990

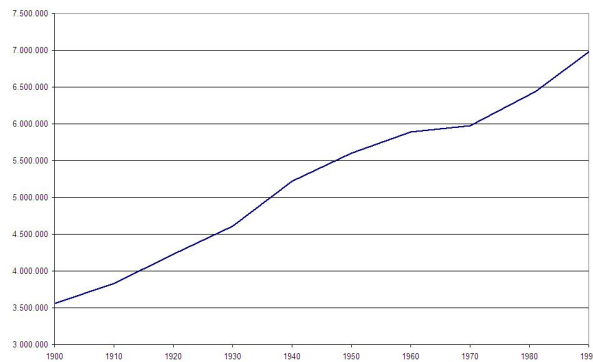


Figura 1.8: Población andaluza 1900-1990

Existen otros modelos de crecimiento, como la curva logística propuesta en 1838 por Verhulst, [50] y puesta en práctica por Pearl y Reed en 1920 (que obtuvieron empíricamente esta curva en el crecimiento de una colonia

de moscas en una botella de leche), en la que se plantea un valor máximo alcanzable por la población, es decir, se establece un freno a la velocidad de crecimiento.

Dichos modelos están basados en la suposición de que el crecimiento en un instante de tiempo depende del tamaño de la población y del tiempo, y se modelizan de la siguiente forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = F(P, t)$$

1.3.1. Modelo de Malthus

Según Malthus, el crecimiento poblacional es constante, lo que haría que la población aumentara ilimitadamente ([39] y [40]). Malthus afirmó que el único freno insalvable es el crecimiento limitado de las subsistencias, "sin alimentos no hay población". A este obstáculo, añade además otras características inherentes a cualquier población humana, como son el vicio o libertinaje y la moral. No obstante, en la formulación de su ley poblacional, elude la inclusión de estos factores.

En definitiva, Malthus, supone que la tasa de crecimiento es constante hasta un instante t_m donde la población alcanza su máximo tamaño P_m . Por lo tanto a partir de t_m la tasa de crecimiento se hace 0:

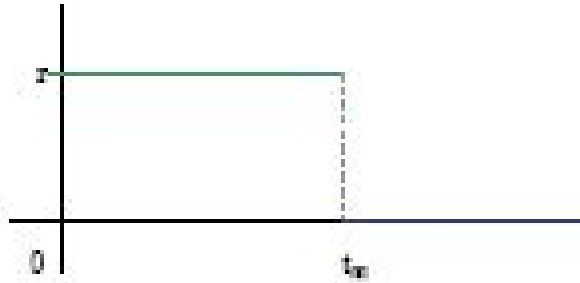


Figura 1.9: Tasa de crecimiento (modelo de Malthus)

Su formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= rP \quad \forall t \leq t_m \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= 0 \quad \forall t > t_m\end{aligned}$$

Entonces, la población en cada instante será:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial t} = r &\Leftrightarrow P = P_0 e^{rt} \quad \forall t \leq t_m \\ \frac{\partial P}{\partial t} = 0 &\Leftrightarrow P = P_m \quad \forall t > t_m\end{aligned}$$

Veamos que lo anterior es cierto:

$$\frac{1}{P(t)} \frac{\partial P(t)}{\partial t} = r(t)$$

Resolvamos la anterior ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{P(t)} \frac{\partial P(t)}{\partial t} dt &= \int r(t) dt \\ \ln P(t) + k &= \int r(t) dt\end{aligned}$$

Suponiendo la condición inicial $r(t) = 0$ para $t = 0$, $\ln P(t) + k = 0$, por lo que $k = -\ln P(0)$ y sustituyendo en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\ln P(t) - \ln P(0) &= \int r(t) dt \\ \ln \frac{P(t)}{P(0)} &= \int r(t) dt \\ P(t) &= P(0) e^{\int r(t) dt}\end{aligned}$$

por lo que si la tasa de crecimiento es constante, es decir, $r(t) = r$, tenemos que:

$$P(t) = P(0)e^{rt} \tag{1.1}$$

La ecuación anterior se conoce normalmente con el nombre de **Ecuación malthusiana** y es utilizada (entre otras cosas) para predecir el volumen poblacional en un instante t conocida la población en el instante 0 y suponiendo que la tasa de crecimiento va a permanecer constante.

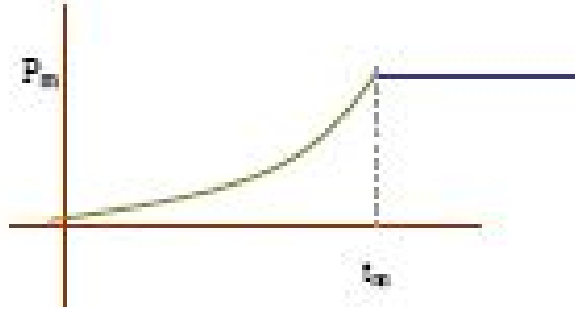


Figura 1.10: Crecimiento poblacional (modelo de Malthus)

1.3.2. Modelo de Verhulst

Este modelo es similar al anterior, aunque con la variación de que cuando la población alcanza su máximo (P_m), la tasa de crecimiento desciende linealmente. Por lo tanto, hasta que la población alcanza un tamaño "normal" (P_n), r es constante (r_0). Su formulación es por tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r_0 P \quad \forall t \leq t_n; P \leq P_n$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r(t) P \quad \forall t_n \leq t \leq t_m; P_n \leq P \leq P_m$$

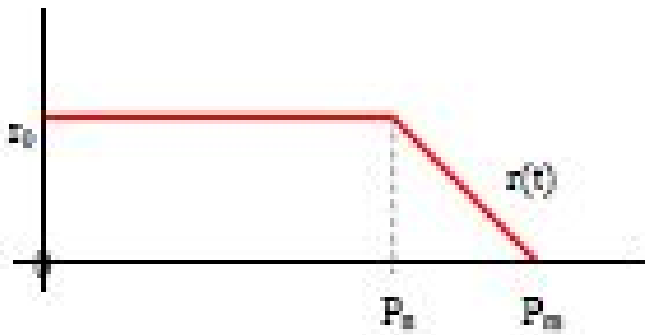


Figura 1.11: Evolución de la tasa de crecimiento (modelo de Verhulst)

1ª Fase

El comportamiento en el crecimiento de la población hasta que es alcanzado el tamaño "normal" P_n es conocido:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = r_0 P \Leftrightarrow P(t) = P(0)e^{r_0 t}$$

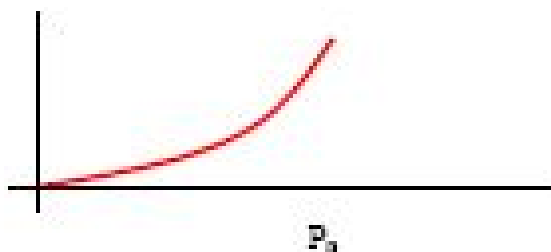


Figura 1.12: Crecimiento "normal" (modelo de Verhulst)

2ª Fase

En la segunda fase, el crecimiento desciende hasta alcanzar el tamaño máximo probable P_m ; a partir de ese momento el crecimiento será nulo.

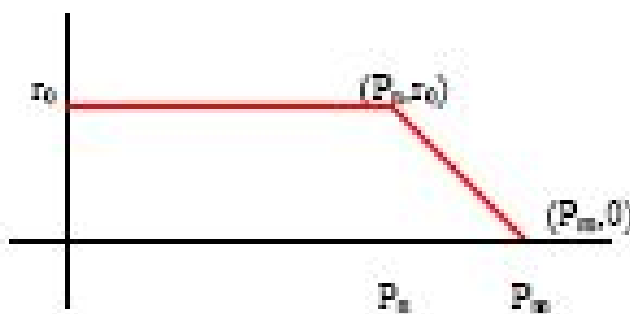


Figura 1.13: Población versus tasa de crecimiento (modelo de Verhulst)

Simplemente calculando la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(P_m, 0)$ y (P_n, r_0) , se obtiene el valor de la tasa de crecimiento en esta fase:

$$r - 0 = \frac{r_0 - 0}{P_n - P_m} (P - P_m) \Leftrightarrow r = \frac{r_0}{P_m - P_n} (P_m - P)$$

por lo que el modelo quedará caracterizado en esta fase por la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{r_0(P_m - P)}{P_m - P_n}$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior (obviamos su demostración por ser bastante extensa), se llega a que:

$$P \equiv P(t) = \frac{P_m}{1 + ke^{-at}} \tag{1.2}$$

siendo:

$$k = A^{-1} = \left\{ \frac{P_n}{P_m - P_n} \left(\frac{P_0}{P_n} \right)^{\frac{P_n}{P_m - P_n}} \right\}^{-1}$$

$$a = \frac{r_0 P_m}{P_m - P_n}$$

de forma que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = P_m$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = 0$$

por lo que como puede verse, uniendo las dos fases aparece la *curva logística*. Si observamos la representación gráfica de esta función, vemos que su filosofía de crecimiento supone que éste es rápido al principio y después comienza a disminuir, cuando existen limitaciones al desarrollo; al fin, se establece un equilibrio entre la población y el medio en el que se desarrolla, por lo que finalmente el crecimiento cesa.

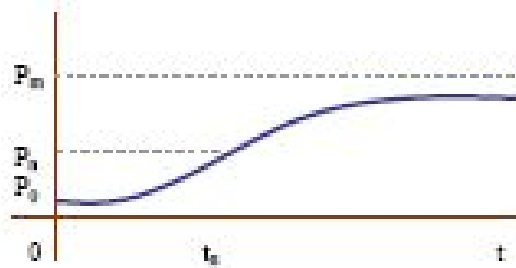


Figura 1.14: Curva logística (modelo de Verhulst)

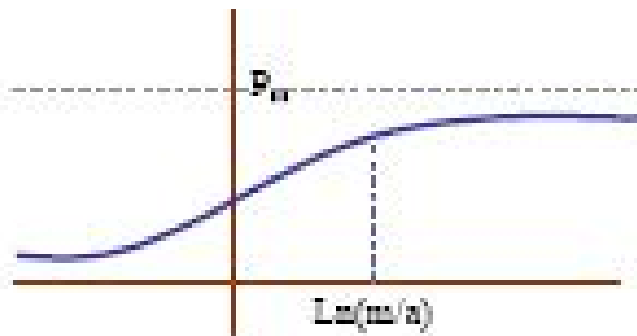


Figura 1.15: Punto de inflexión en la curva logística (modelo de Verhulst)

Otra variante de la curva logística es la siguiente:

$$P(t) = P(0) + \frac{P_m}{1 + ke^{-at}} \quad (1.3)$$

en la que se supone, como es lógico, que cualquier población no surge de la nada, sino que el crecimiento se produce a partir de una población inicial. Estos modelos no son de fácil aplicación en problemas reales, por lo que se utilizan casi exclusivamente en estudios teóricos de población. A pesar de ello, la curva logística se ha utilizado en algunos casos para representar una población real, como es el caso de los Estados Unidos en el periodo 1780-1940 (Theory of Econometrics, H.T. Davis) o el caso de España, en el que Angel Alcaide publicó en 1955 una estimación para el periodo 1860-1950. Posteriormente volvió a utilizar la curva logística para ajustar la población en el periodo 1950-2000. Los resultados de este autor, son discutibles, ya que por ejemplo, su ajuste para el primer periodo mencionado no recoge de ninguna manera la perturbación sufrida en el crecimiento de España debida a la "gripe de 1918". Para ampliar la información anterior puede verse [6].

1.3.3. Otras formulaciones del modelo de Verhulst

Tanto Pearl (1920) como Robertson (1923) consideraron el modelo de Verhulst como el modelo que mejor explicaba el comportamiento de los organismos vivos, tras realizar numerosos estudios. La teoría de Quetelet (1825), que suponía que la velocidad de crecimiento queda frenada por la limitación de recursos alimenticios, siendo esta última proporcional al cuadrado de dicha velocidad, hizo que Verhulst reformulara su modelo de crecimiento

poblacional. Aparece así la *curva logística de Robertson*, dada por la ecuación:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha P - \beta P^2 \quad (1.4)$$

en el que el crecimiento poblacional depende de la población existente en cada instante, frenado proporcionalmente al cuadrado de la población en ese instante. Resolviendo la ecuación diferencial anterior, aparece que la población en un instante t puede expresarse de la siguiente forma:

$$P \equiv P(t) = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{1 + ke^{-\alpha t}} \quad (1.5)$$

siendo $k = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

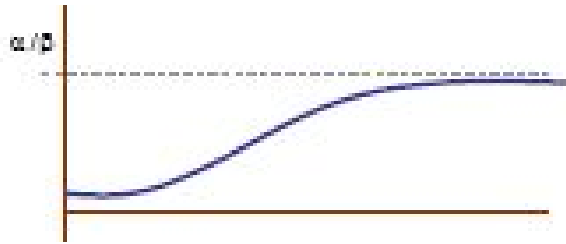


Figura 1.16: Curva logística de Robertson

Una variante más del modelo de Verhulst es la conocida como *Ley de Gompertz*, cuya formulación es:

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = -rP(t) \ln \left(\frac{P_m}{P(t)} \right)$$

Resolvamos la anterior ecuación diferencial:

$$\int \frac{\partial P(t)}{P(t) \ln \left(\frac{P_m}{P(t)} \right)} = - \int r \partial t$$

$$\ln \left[\ln \left(\frac{P_m}{P(t)} \right) \right] + k = -rt$$

suponiendo la condición inicial, $P(t) = P_0$ en $t = 0$, tenemos que k es:

$$- \ln \left[\ln \left(\frac{P_m}{P_0} \right) \right]$$

por lo que finalmente aparece la siguiente ecuación:

$$\frac{\ln\left(\frac{P_m}{P(t)}\right)}{\ln\left(\frac{P_m}{P_0}\right)} = e^{-rt}$$

y realizando algunas operaciones, aparece la solución del modelo:

$$P \equiv P(t) = P_m \exp\left\{\ln\left(\frac{P_0}{P_m}\right) e^{-rt}\right\}$$

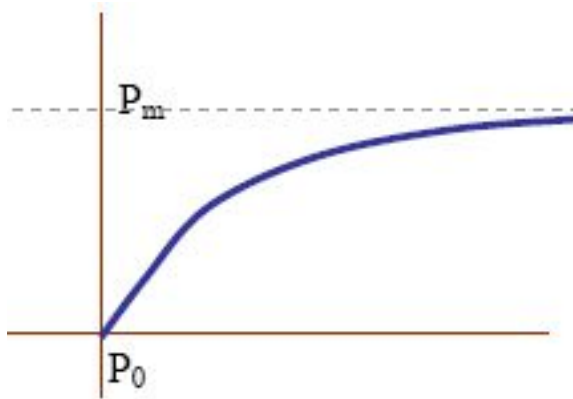


Figura 1.17: Curva de Gompertz

En este caso, cuando el tamaño de la población es inferior a P_m , es decir, $0 < P(t) < P_m$, éste se va incrementando hasta alcanzar el nivel de estacionariedad P_m . Además, una población que comenzara con un tamaño superior a P_m , decrecería hasta alcanzar dicho valor y a partir de aquí, el incremento sería nulo.

Otros autores como Kingston, Amoroso, Gini, etc. también realizaron formulaciones para recoger el crecimiento de las poblaciones. Todos estos autores, tienen en común el modelo general, en el que el crecimiento poblacional depende directamente de una determinada función de la población en cada instante, es decir:

$$\frac{1}{P(t)} \frac{\partial P(t)}{\partial t} = f(P(t))$$

La resolución de dicha ecuación no es siempre sencilla; dependerá de la función de población elegida para explicar el crecimiento.

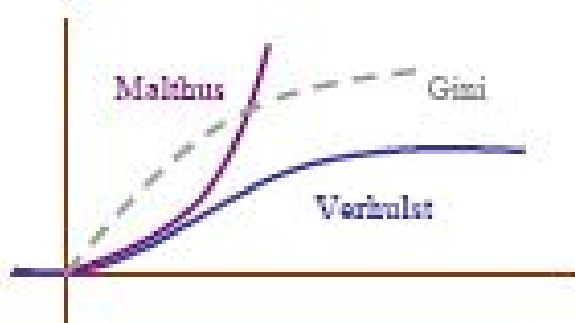


Figura 1.18: Diferencias entre algunos modelos de crecimiento

Podemos decir, como conclusión que existen gran número de modelos de crecimiento que describen diversas situaciones o etapas en la evolución de cualquier población de organismos vivos. Son muchos los autores que utilizan estos modelos en ramas de la Biología o en investigación clínica, para describir por ejemplo el crecimiento celular (algunos estudios lo han aplicado al crecimiento tumoral).

Desde el punto de vista demográfico, si pretendiéramos describir la evolución de cualquier población de nuestro entorno a lo largo de un periodo muy amplio, (que haya pasado por una transición demográfica), tendríamos que recurrir a un modelo de tipo logístico. En cambio, si el periodo de interés es relativamente corto y la población se encuentra en una situación de expansión demográfica, el modelo logístico no sería el apropiado; un modelo de Gompertz o de Gini recogería mejor el crecimiento.

De todas formas, ninguna de la funciones vistas recogen las irregularidades presentes en un país o zona geográfica, ya que normalmente una población experimenta diferentes ritmos de crecimiento, que pueden ser tanto positivos como negativos. Sí es cierto que una función de tipo exponencial puede recoger la tendencia poblacional, aunque no recoja las perturbaciones que aparecen a lo largo del tiempo; el crecimiento demográfico es potencialmente exponencial, ya que cualquier generación de individuos tiende a reemplazarse a sí misma por otra generación mayor en cuanto a su número.

Por otro lado, en todas las leyes de población expuestas anteriormente, se supone que la población es una variable dependiente exclusivamente del tiempo. Esto no es lógico, puesto que el crecimiento de una población depende de una serie de variables que condicionan su comportamiento, tanto de índole social como demográfica.

Capítulo 2

Proceso lognormal multivariante con factores exógenos

2.1. Introducción

El proceso de difusión lognormal, cuya tendencia es exponencial se hace de especial relevancia cuando se introducen en él algunas variables denominadas exógenas que afectan a su tendencia; las variables bajo estudio o endógenas, modelizadas por el proceso pueden quedar bajo la influencia de otra serie de variables, con lo que conseguiremos afinar o mejorar el ajuste que realicemos sobre las variables endógenas.

El caso que aquí nos ocupa, el proceso de difusión logarítmico normal multidimensional con factores exógenos, ha sido estudiado ampliamente y de forma exhaustiva por diversos autores. Destacan los trabajos de Tintner, [48] y de Gutiérrez, [15], que trataron el problema de la estimación de los parámetros usando muestreo discreto para el caso de dos factores exógenos; Torres, [49], generalizó estos resultados al caso de q factores exógenos con ($q > 2$), e hizo importantes contribuciones sobre contrastes de hipótesis. Otros problemas relativos a la inferencia como las bandas de confianza son estudiados por Gutiérrez, Román y Torres, [28], y Gutiérrez, Román y Torres, [29]. En estos trabajos pueden ampliarse los resultados que se exponen a continuación.

2.2. El proceso lognormal multivariante: dos aproximaciones

Existen dos formas de introducir el proceso lognormal multivariante: como un proceso de difusión, considerando las ecuaciones de adelantadas y atrasadas de Kolmogorov o como un proceso de difusión que surge de la solución de una ecuación diferencial estocástica.

2.2.1. Ecuación diferencial estocástica

Una de las formas de llegar a un proceso lognormal consiste en considerar la solución de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dX(t) = A(X(t), t)dt + B^{\frac{1}{2}}(X(t), t)dW_t \quad (2.1)$$

con la condición inicial: $X(t_0) = H$, $t_0 \leq t \leq T$ y siendo:

- $W_t; t_0 \leq t \leq T$ un proceso Wiener k -dimensional con componentes independientes
- H es un vector fijo de $(0, +\infty)^k$
- $A(x, t)$ un vector k -dimensional dado por:

$$A_j(x, t) = \left(\sum_{i=0}^q f_{ij} F_i(t) \right) x_j \quad j = 1, \dots, k$$

donde:

- $F_i; i = 1 \dots, q$ son funciones conocidas continuas en $[t_0, T]$, que toman valores en \mathbb{R} con $F_0(t) = 1$
- $f = (f_{10}, \dots, f_{1q}, \dots, f_{k0}, \dots, f_{kq})$ es un vector real $k \times (q + 1)$ dimensional
- $x \in (0, +\infty)^k \quad \forall t \in [t_0, T]$
- $B(x, t)$ es una matriz cuadrada de orden k :

$$B_{ij}(x, t) = b_{ij} x_i x_j \quad i, j = 1, \dots, k$$

donde B es una matriz de elementos $b_{ii} > 0$ simétrica y definida no negativa

Entonces, la ecuación diferencial estocástica (2.1) tiene como única solución un proceso de difusión $(0, \infty)^k$ valuado, en el que la condición inicial es H y cuya *media y varianzas infinitesimales* son respectivamente $A(x, t)$ y $B(x, t)$. Este proceso es el **proceso logarítmico normal** con k variables endógenas y q factores exógenos, siendo estos factores las funciones F_i con $i = 1, \dots, q$.

2.2.2. Ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov

Consideremos $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov definido en $(0, +\infty)^k$ con trayectorias continuas casi seguro y con probabilidades de transición:

$$P(x, t|y, s) = P[X(t) = x|X(s) = y]$$

siendo $X(t) = (X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k))'$, $X(s) = (X(s_1), X(s_2), \dots, X(s_k))'$ y x, y vectores k -dimensionales. Suponemos las siguientes condiciones:

■

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y|>\epsilon} P(dx, t+h|y, s) = 0$$

■

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y|\leq\epsilon} (x-y)P(dx, t+h|y, s) &= f(x, t) = \\ &= \begin{pmatrix} \left(f_{10} + \sum_{j=1}^q f_{1j}F_j(t) \right) x_1 \\ \left(f_{20} + \sum_{j=1}^q f_{2j}F_j(t) \right) x_2 \\ \vdots \\ \left(f_{k0} + \sum_{j=1}^q f_{kj}F_j(t) \right) x_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|x-y|\leq\epsilon} (x-y)(x-y)'P(dx, t+h|y, s) = B(x, t)$$

■ Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

con los factores exógenos $F_j; j = 1, \dots, q$, funciones continuas en $[t_0, T]$ y donde la matriz de covarianzas $B(x, t)$ es simétrica definida no negativa con elementos $b_{ij}(x, t) = b_{ij}x_i x_j$ y $b_{ii} > 0$. Nótese que dichos factores exógenos afectan solamente a la tendencia $f(x, t)$ del proceso y no a la matriz de covarianzas. Además se relacionan entre sí linealmente en cada componente

del vector tendencia.

Teniendo en cuenta las suposiciones anteriores, si denotamos por p a la función de densidad de transición condicionada, se pueden obtener las ecuaciones (atrasada y adelantada) de Kolmogorov asociadas a este proceso, bajo ciertas condiciones de diferenciable de la distribución de probabilidad de transición $P(x, t|y, s)$:

$$\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} y_i y_j \frac{\partial^2 p}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^k \left(f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) y_i \frac{\partial p}{\partial y_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k b_{ij} \frac{\partial^2 (x_i x_j p)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^k \left(f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) \frac{\partial (x_i p)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

La solución, tomando como condición inicial $p(x, s|y, s) = \delta(x - y)$ es la siguiente:

$$p(x, t|y, s) = \left[\left(\prod_{i=1}^k x_i \right) (2\Pi)^{\frac{k}{2}} (t - s)^{\frac{k}{2}} |B|^{\frac{1}{2}} \right]^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2(t-s)}Q\right) \quad (2.4)$$

siendo B una matriz de elementos $b_{ii} > 0; i = 1, \dots, k$ y Q la forma cuadrática:

$$Q = \left(\log(x) - \log(y) - \beta_0(t-s) - \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(r) dr \right)' \times \\ \times B^{-1} \left(\log(x) - \log(y) - \beta_0(t-s) - \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(r) dr \right)$$

donde:

$$\beta_0 = \left(f_{10} - \frac{1}{2}b_{11}, \dots, f_{k0} - \frac{1}{2}b_{kk} \right)' = f_0 - \frac{1}{2}\text{diag}(B) \\ \beta_i = (f_{1i}, \dots, f_{ki})'_{i=1, \dots, q}$$

así que la distribución de transición condicionada es del tipo lognormal:

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k \left[\log(x_s) + \beta_0(t-s) + \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(r) dr; (t-s)B \right] \quad (2.5)$$

2.3. Momentos de las variables endógenas

La tendencia puede ser estimada usando una muestra del proceso, al igual que su varianza, que nos sirve como medida de dispersión de la estimación de la tendencia.

Si observamos la ecuación (2.5), inmediatamente tenemos que la variable $Z(t) = \log X(t)|X(s) = x(s)$ se distribuye normalmente:

$$Z(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k \left(\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(r) dr, (t-s)B \right) \quad (2.6)$$

por lo que su función generatriz de momentos es:

$$\begin{aligned} E \left[e^{\sigma' Z(t)} \right] &= \\ &= \exp \left(\sigma' \left[\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(r) dr \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(t-s)\sigma' B \sigma \right) \text{ con } \sigma \in \mathbb{R}^k \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.3.1. Media o tendencia de las variables endógenas

Para la obtención de cualquier momento no centrado de orden r , tomamos $\sigma' = (0, \dots, \overset{(i)}{r}, \dots, 0)$ en la ecuación (2.7). Por lo tanto, la tendencia de la variable i se obtendrá considerando $\sigma' = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0)$, que resulta ser:

$$\begin{aligned} E \left[e^{\sigma' Z(t)} \right] &= E [X_i(t)|X(s) = x(s)] = \\ &= \exp \left(\log(x_i(s)) + \beta_{i0}(t-s) + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \int_s^t F_j(r) dr + \frac{t-s}{2} b_{ii} \right) = \\ &= x_i(s) \exp \left(f_{i0}(t-s) + \sum_{j=1}^q \beta_{ij} \int_s^t F_j(r) dr \right) \quad i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

donde $\beta_{i0} = f_{i0} - \frac{1}{2} b_{ii}$

2.3.2. Covarianza de las variables endógenas

Si consideramos ahora $\sigma' = (0, \dots, \overset{(i)}{r_1}, \dots, \overset{(j)}{r_2}, \dots, 0)$ en la ecuación (2.7), podemos hallar los momentos no centrados entre cualesquiera dos variables i y j . En particular, nuestro interés se basa en obtener la covarianza entre dos variables, tomaremos $\sigma' = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)$ con lo que la esperanza condicionada conjunta:

$$\begin{aligned}
E \left[e^{\sigma' Z(t)} \right] &= E [X_i(t)X_j(t)|X(s) = x(s)] = \\
&= \exp (\log(x_i(s)x_j(s)) + (\beta_{i0} + \beta_{j0})(t - s) + \\
&+ \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_s^t F_l(r)dr + \frac{t-s}{2}(b_{ii} + b_{jj} + 2b_{ij})) = \\
&= x_i(s)x_j(s) \exp \left(f_{i0}(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(r)dr \right) \cdot \\
&\cdot \exp \left(f_{j0}(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_s^t F_l(r)dr \right) \exp (b_{ij}(t - s)) = \\
&= x_i(s)x_j(s) \exp \left((f_{i0} + f_{j0})(t - s) + \sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_s^t F_l(r)dr \right) \exp (b_{ij}(t - s))
\end{aligned}$$

restando el producto de la esperanza en i y j , la covarianza será $\forall i, j = 1, \dots, k$:

$$\begin{aligned}
Cov[X_i(t)X_j(t)|X(s) = x(s)] &= x_i(s)x_j(s) \exp ((f_{i0} + f_{j0})(t - s) + \\
&\sum_{l=1}^q (\beta_{il} + \beta_{jl}) \int_s^t F_l(r)dr) \cdot [\exp (b_{ij}(t - s)) - 1]
\end{aligned}$$

y por lo tanto la varianza condicionada para la i -ésima componente queda:

$$\begin{aligned}
Var[X_i(t)|X(s) = x(s)] &= (x_i(s))^2 \exp (2f_{i0}(t - s) + \\
&2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(r)dr) \cdot [\exp (b_{ii}(t - s)) - 1]
\end{aligned}$$

2.4. Estimación de los parámetros

Sea $X(t) = (X(t(1)), \dots, X(t(k)))$ un vector k -dimensional y $x(t) = (x(t(1)), \dots, x(t(k)))$ una observación; entonces $X(t)|X(s) = x(s)$ es un proceso de difusión lognormal multivariante con q factores exógenos y por lo tanto:

$$Z(t) = \log(X(t)|X(s) = x(s))$$

se distribuye según una normal k -dimensional:

$$Z(t) \rightsquigarrow N_k \left(\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \sum_{j=1}^q \beta_j \int_s^t F_j(r) dr, (t-s)B \right) \quad (2.8)$$

siendo:

- $\beta_0 = f_0 - \frac{1}{2} \text{diag}(B)$, con B una matriz $k \times k$
- $\beta_j; j = 0, \dots, q$ son vectores paramétricos k -dimensionales
- $F_j; j = 1, \dots, q$ son funciones real valuadas
- $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_q)$ la matriz formada por los vectores paramétricos asociados al proceso, de dimensión $k \times (q+1)$

También podemos escribir (2.8) como:

$$Z(t|s) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k \left(\log(x(s)) + \beta \tilde{U}(t), (t-s)B \right) \quad (2.9)$$

donde hemos considerado el vector:

$$\tilde{U}(t) = \left(t-s, \int_s^t F_1(r) dr, \dots, \int_s^t F_q(r) dr \right)'$$

Si consideramos una nueva variable:

$$V(t) = (t-s)^{-\frac{1}{2}} (\log(X(t)) - \log(X(s)))$$

y tomamos otro vector $U(t) = (t-s)^{-\frac{1}{2}} \tilde{U}(t)$, es decir:

$$U(t) = (t-s)^{-\frac{1}{2}} \left(t-s, \int_s^t F_1(r) dr, \dots, \int_s^t F_q(r) dr \right)'$$

entonces la distribución de esta nueva variable es:

$$V(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k(\beta U(t), B)$$

de forma que la densidad de $X(t)$, utilizando el cambio de variable anterior y utilizando para $U(t)$ y $V(t)$ una notación análoga a $X(t)$, es la siguiente:

$$f(x(t), t|x(s), s) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} \left(\prod_{i=1}^k (x_i(t))^{-1} \right) (t-s)^{-\frac{k}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(v(t) - \beta u(t))' B^{-1} (v(t) - \beta u(t))\right) \quad (2.10)$$

y la densidad para $V(t)$:

$$f(v(t), t|v(s), s) = (2\pi)^{-\frac{k}{2}} |B|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(v(t) - \beta u(t))' B^{-1} (v(t) - \beta u(t))\right) \quad (2.11)$$

Tenemos que conseguir una estimación de las matrices $\beta_{k \times (q+1)}$ y $B_{k \times k}$, para lo cual se utiliza el método de máxima verosimilitud. Para ello se considera un muestreo discreto del proceso en los instantes t_1, \dots, t_n :

$$(X(t_1) = x(t_1), \dots, X(t_n) = x(t_n))$$

siendo $X(t_\alpha) = (X(t_{\alpha,1}), \dots, X(t_{\alpha,k}))$ un vector k -dimensional y tomando como condición inicial $P[X(t_1) = x(t_1)] = 1$.

Aplicando la propiedad de Markov, la función de verosimilitud en este caso utilizando (2.10), queda:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta, B) &= P[x_1; t_1], \dots, P[x_n; t_n | x_{n-1}; t_{n-1}] = \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left(\prod_{i=1}^k x(\alpha, i)^{-1} \right) (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{k}{2}} \times \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2}(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha)\right) \end{aligned}$$

y considerando el cambio:

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} [\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1})]$$

la función de verosimilitud tiene la siguiente forma:

$$\mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \exp\left(-\frac{1}{2}(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha)\right) \quad (2.12)$$

y por lo tanto, el logaritmo de esta expresión es:

$$\log \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = -\frac{(n-1)k}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log |B| - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}$$

Si calculamos la diferencial de esta expresión e igualamos a cero, obtenemos los estimadores de máxima verosimilitud de β y B :

$$\hat{\beta} = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha u'_\alpha \left[\sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u'_\alpha \right]^{-1} = CA^{-1} \quad (2.13)$$

$$\hat{B} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)' \quad (2.14)$$

siendo las matrices C y A:

$$C = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha u'_\alpha \quad A = \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u'_\alpha$$

Esta matriz A que aparece en el estimador de β (3.36) tiene la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) & \sum_{\alpha=2}^n F_{1\alpha} & \dots & \sum_{\alpha=2}^n F_{q\alpha} \\ \sum_{\alpha=2}^n F_{1\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{1\alpha} F_{1\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} & \dots & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{q\alpha} F_{1\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{\alpha=2}^n F_{q\alpha} & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{1\alpha} F_{q\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} & \dots & \sum_{\alpha=2}^n \frac{F_{q\alpha} F_{q\alpha}}{t_\alpha - t_{\alpha-1}} \end{pmatrix}$$

ya que:

$$F_{i\alpha} \equiv \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_i(r) dr$$

$$u_\alpha \equiv (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} (t_\alpha - t_{\alpha-1}, F_{1\alpha}, \dots, F_{q\alpha})'$$

2.5. Distribución de los estimadores de los parámetros del proceso

2.5.1. Distribución de $\widehat{\beta}$

El estimador de la matriz β de orden $k \times (q+1)$, $\widehat{\beta}$ se distribuye según una normal matricial de media β (lo que nos indica la insesgadez del estimador) y matriz de covarianzas $B \otimes A^{-1}$, es decir:

$$\widehat{\beta} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\beta, B \otimes A^{-1}) \quad (2.15)$$

o de forma semejante:

$$\text{Vec}(\widehat{\beta}') \rightsquigarrow \mathcal{N}_{k(q+1)}(\text{Vec}(\beta'), B \otimes A^{-1}) \quad (2.16)$$

donde $\text{Cov}(\text{Vec}(\widehat{\beta}')) = B \otimes A^{-1}$ será la covarianza entre las filas de $\widehat{\beta}'$, y siendo:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}' &= A^{-1} \mathbb{U} \mathbb{V}' \\ \text{Vec}(\widehat{\beta}') &= (\mathbb{I}_k \otimes A^{-1} \mathbb{U}) \text{Vec}(\mathbb{V}') \end{aligned}$$

con $\mathbb{U} = (u_2, \dots, u_n)$, $\mathbb{V} = (v_2, \dots, v_n)$, dos matrices.

La covarianza entre las columnas de la matriz $\widehat{\beta}$ o vectores cuyas componentes determinan la influencia de los factores exógenos es:

$$\text{Cov}(\text{Vec}(\widehat{\beta})) = A^{-1} \otimes B$$

siendo:

$$\text{Vec}(\widehat{\beta}) = (A^{-1} \otimes \mathbb{I}_k) \left[\sum_{i=2}^n v_\alpha u'_\alpha \right]$$

2.5.2. Distribución de \widehat{B}

El estimador de la matriz B , $\widehat{B} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \widehat{\beta} u_\alpha)(v_\alpha - \widehat{\beta} u_\alpha)'$ es independiente de la distribución de $\widehat{\beta}$, pero tiene el inconveniente de la no insesgadez ya que:

$$(n-1)\widehat{B} \rightsquigarrow \mathbb{W}_k(n-q-2, B) \quad (2.17)$$

con $E[(n-1)\widehat{B}] = (n-q-2)B$, por lo que se construye otro estimador insesgado para B , que denotamos $\widehat{\widehat{B}}$ y que tiene la siguiente forma:

$$\widehat{\widehat{B}} = \frac{n-1}{n-q-2}\widehat{B} = \frac{1}{n-q-2} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \widehat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \widehat{\beta}u_\alpha)'$$

La matriz de covarianzas asociada a este estimador es:

$$Cov \left[v(\widehat{\widehat{B}}) \right] = \frac{2}{n-q-2} D_k^- (B \otimes B) (D_k^-)'$$

siendo $v(\widehat{\widehat{B}})$ un vector tal que $Vec(\widehat{\widehat{B}}) = D_k v(\widehat{\widehat{B}})$ y D_k^- la inversa generalizada de Moore-Penrose de la matriz de duplicación D_k . Con todo ello, la matriz de covarianzas entre los estimadores $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\widehat{B}}$ queda:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} B \otimes A^{-1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{n-q-2} D_k^- (B \otimes B) (D_k^-)' \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

2.6. Contrastes de hipótesis sobre los parámetros

Sobre los contrastes de hipótesis que se pueden plantear en relación al Proceso Lognormal Multivariante no homogéneo destacan por su relevancia práctica, los relativos al estudio de la posible influencia o no de algún factor exógeno introducido en el modelo, o de algún subconjunto de ellos, a través de la contrastación de la nulidad de los parámetros β_i ; éstos son los que se muestran en esta memoria y que fueron desarrollados por Torres,[49], que además construyó contrastes sobre la nulidad de las componentes de los vectores (para verificar qué componentes del proceso quedan afectados por la inclusión de factores exógenos) y sobre la independencia entre algunas de las componentes.

El contraste que vamos a realizar es el siguiente:

$$\mathcal{H}_0 : \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^* \quad (2.19)$$

donde \mathcal{B}_1 resulta de realizar una partición en la matriz de parámetros β :

$$\beta_{(k \times q+1)} = (\mathcal{B}_1 \text{ (} k \times q_1 \text{)} | \mathcal{B}_2 \text{ (} k \times q_2 \text{)}) ; q_1 + q_2 = q + 1$$

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula son:

$$\Omega = \{(\mathcal{B}, B) : B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{(q+1)k + \frac{k(k+1)}{2}}$$

$$\omega = \{(\mathcal{B}, B) : \mathcal{B} = \mathcal{B}_1, B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{kq_2 + \frac{k(k+1)}{2}}$$

El criterio utilizado es el de razón de verosimilitudes, es decir, la búsqueda de:

$$\Lambda = \frac{\max_{\Omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B)}{\max_{\omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B)}$$

Bajo la hipótesis alternativa, recordemos que los estimadores eran:

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{\Omega} &= CA^{-1} \\ \widehat{B}_{\Omega} &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \widehat{\beta}u_{\alpha})(v_{\alpha} - \widehat{\beta}u_{\alpha})' \end{aligned}$$

por lo que maximizando la ecuación (2.12), obtenemos:

$$\max_{\Omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\widehat{B}_{\Omega}|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}} \quad (2.20)$$

En el caso de la hipótesis alternativa, los estimadores quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{2\omega} &= (C_2 - B_1 A_{12}) A_{22}^{-1} \\ \widehat{B}_{\omega} &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (y_{\alpha} - \widehat{B}_{2\omega} u_{\alpha}^2)(y_{\alpha} - \widehat{B}_{2\omega} u_{\alpha}^2)' \end{aligned}$$

siendo:

$$y_{\alpha} = v_{\alpha} - B_1^* u_{\alpha}^1 \rightsquigarrow \mathbb{N}_k(B_2 u_{\alpha}^2, B)$$

donde se han considerado las siguientes particiones:

$$\begin{aligned} C &= (C_1 | C_2) \\ \mathbb{U}'_{\alpha} &= (u_{\alpha}^1, u_{\alpha}^2) \\ A &= \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha} u'_{\alpha} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^1 & \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^2 \\ \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^2 u_{\alpha}^1 & \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}^2 u_{\alpha}^2 \end{pmatrix} \\ \widehat{\beta} &= (\widehat{B}_1 | \widehat{B}_2) \end{aligned}$$

de forma que u_{α}^1 tiene dimensión q_1 y u_{α}^2 tiene dimensión q_2 . La expresión a maximizar es:

$$\max_{\omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\widehat{B}_{\omega}|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}} \quad (2.21)$$

así que el criterio de la razón de verosimilitudes, utilizando (2.20) y (2.21):

$$\Lambda = \frac{\max_{\Omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B)}{\max_{\omega} \mathbb{L}(v_2, \dots, v_n; \beta, B)} = \frac{|\widehat{B}_{\Omega}|^{-\frac{n-1}{2}}}{|\widehat{B}_{\omega}|^{-\frac{n-1}{2}}} \quad (2.22)$$

Este criterio también puede expresarse, tras una serie de cálculos matriciales de la siguiente forma:

$$\Lambda = \frac{|(n-1)\widehat{B}_{\Omega}|^{\frac{n-1}{2}}}{|(n-1)\widehat{B}_{\Omega} + [\widehat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*]A_{11,2}[\widehat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*]|^{\frac{n-1}{2}}}$$

o también:

$$\Lambda^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_{\Omega}|}{|(n-1)\widehat{B}_{\Omega} + [\widehat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*]A_{11,2}[\widehat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*]'|} \quad (2.23)$$

siendo:

$$A_{11,2} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + A_{12}A_{22}^{-1}A_{22}A_{22}^{-1}A_{21}$$

Si G y H son dos matrices independientes y distribuidas según una Wishart $\mathbb{W}_k(n-1-(q+1), B)$ y una $\mathbb{W}_k(q_1, B)$ respectivamente, la distribución del criterio es la misma que la de:

$$\mathcal{U}_{k,q_1,n-1-(q+1)} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (2.24)$$

2.6.1. Contraste $\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$

En primer lugar, analizamos la nulidad de la primera columna de la matriz β . El criterio de la razón de verosimilitudes, tomando $\mathcal{B}_1^* = 0$ y $q_1 = 1$ y sustituyendo en la expresión (2.23), donde $\widehat{\beta}_{0\Omega}$ es la primera columna de la matriz $\widehat{\beta}$, es el siguiente:

$$\Lambda_0^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_{\Omega}|}{|(n-1)\widehat{B}_{\Omega} + \widehat{\beta}_{0\Omega}A_{11,2}\widehat{\beta}_{0\Omega}'|} \quad (2.25)$$

cuya distribución, sustituyendo en (2.24) es igual a la de $\mathcal{U}_{k,1,n-1-(q+1)}$.

2.6.2. Contraste $\mathcal{H}_0 : \beta_i = 0$

Queremos contrastar si un vector de la matriz de parámetros β es nulo. Si reordenamos las columnas de la matriz β cambiando la ubicación de β_0 y β_i , es decir, $\beta = (\beta_i, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_0, \beta_{i+1}, \dots, \beta_q)$, se va a verificar que $\mathcal{B}_1^* = 0$ y $q_1 = 1$, por lo que estaremos ante un contraste similar al anterior. En este caso, el vector u_α queda afectado ya que también se reordena de la manera $\tilde{u}_\alpha = (F_{i\alpha}, F_{1\alpha}, \dots, F_{i-1\alpha}, t_{\alpha-1} - t_\alpha, F_{i+1\alpha}, \dots, F_{q\alpha})'$, pudiéndose expresar en términos de u_α utilizando la siguiente matriz de permutación:

$$T_i = \begin{pmatrix} e'_i \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_{i-1} \\ e'_0 \\ e'_{i+1} \\ \vdots \\ e'_q \end{pmatrix}$$

siendo $e_h = (0, \dots, \overset{(h+1)}{1}, \dots, 0)$ para $h = 0, \dots, q$, quedando en el caso que nos ocupa con $i = 1$:

$$\tilde{u}_\alpha = T_1 u_\alpha$$

El criterio asociado a este contraste, sustituyendo en (2.23) es por lo tanto:

$$\Lambda_i^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_\Omega|}{|(n-1)\widehat{B}_\Omega + \widehat{\beta}_{i\Omega}\widetilde{A}_{11,2}\widehat{\beta}'_{i\Omega}|} \quad (2.26)$$

donde hemos notado $\widehat{\beta}_{i\Omega}$ a la columna (i+1)-ésima de la matriz $\widehat{\beta}$ y $\widetilde{A}_{11,2}$, que surge de $T_i A T_i'$. La distribución de este criterio es igual a la de $\mathcal{U}_{k,1,n-1-(q+1)}$.

2.6.3. Contraste $\mathcal{H}_0 : \beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \dots = \beta_{i_h} = 0$

En este contraste se propone comprobar la nulidad de una parte de la matriz de parámetros $\beta_{k \times q}$, en particular las columnas i_1, \dots, i_h . Para ello, al igual que se ha hecho en el anterior contraste, se reorganiza dicha matriz, como sigue:

$$\beta = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_h} | \beta_{i_{h+1}}, \dots, \beta_{i_q})$$

siendo $\mathcal{B}_1^* = 0$ de dimensión $k \times q_1$ con $q_1 = h$. Igualmente, el vector u_α queda afectado ya que se reordena de la misma forma, apareciendo un nuevo vector \tilde{u}_α , que se expresa en términos de u_α utilizando la matriz de permutación:

$$T_{\{i_1, \dots, i_h\}} = \begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_h} \\ e'_{i_{h+1}} \\ \vdots \\ e'_{i_q} \end{pmatrix}$$

por lo que el nuevo vector queda, en función de u_α , como $\tilde{u}_\alpha = T_{\{i_1, \dots, i_h\}} u_\alpha$.

El criterio utilizado en este contraste, utilizando la expresión (2.23) es por lo tanto:

$$\Lambda_{\{i_1, \dots, i_h\}}^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\widehat{B}_\Omega|}{|(n-1)\widehat{B}_\Omega + \widehat{\beta}_{\{i_1, \dots, i_h\}\Omega} \widetilde{A}_{11,2} \widehat{\beta}'_{\{i_1, \dots, i_h\}\Omega}|} \quad (2.27)$$

donde $\widetilde{A}_{11,2}$, que surge de la matriz $T_{\{i_1, \dots, i_h\}} A T'_{\{i_1, \dots, i_h\}}$. La distribución de este criterio es igual a la de $\mathcal{U}_{k, h, n-1-(q+1)}$.

Observación:

En algunos casos particulares de los contrastes anteriores, pueden obtenerse las distribuciones exactas para este criterio y la distribución asintótica del mismo, en el caso de que lo anterior no sea posible [49]. Las distribuciones exactas que pueden obtenerse son las que se muestran a continuación:

Caso $q_1 = 1$:

$$\frac{1 - \mathcal{U}_{k,1,n-1-(q+1)}}{\mathcal{U}_{k,1,n-1-(q+1)}} \frac{n - (q+1) - k}{k} \rightsquigarrow \mathbf{F}_{k, n-(q+1)-k} \quad (2.28)$$

Caso $q_1 = 2$:

$$\frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-1-(q+1)}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-1-(q+1)}}} \frac{n - (q+1) - k}{k} \rightsquigarrow \mathbf{F}_{2k, 2(n-(q+1)-k)} \quad (2.29)$$

2.7. Caso particular: El proceso lognormal univariante con un factor exógeno.

Sea $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión unidimensional homogéneo, \mathbb{R} -valuado y con función de densidad de transición:

$$P(x, t|y, s) = P(X(t) = x|X(s) = y) \quad (2.30)$$

Si consideramos como momentos infinitesimales del proceso respectivamente:

$$\begin{aligned} a(x, t) &= (\beta_0 + \beta_1 F(t))x \\ b(x, t) &= \gamma x^2 \end{aligned}$$

donde $\gamma > 0$ es una constante y F una función continua en $[t_0, T]$. El proceso de difusión lognormal unidimensional con un factor exógeno queda caracterizado por el hecho de que la distribución de transición condicionada es lognormal:

$$X(t)/X(s) = x(s) \rightsquigarrow \Lambda_1 \left(\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr; (t-s)\gamma \right) \quad (2.31)$$

por lo que la variable $Z(t) = \log(X(t)/X(s) = x(s))$ tendrá distribución normal unidimensional:

$$Z(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}_1 \left(\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr; (t-s)\gamma \right) \quad (2.32)$$

2.7.1. Obtención de los momentos

Teniendo en cuenta lo anterior, pueden obtenerse los momentos de orden r , a partir de la función generatriz de momentos de $Z(t)$:

$$E \left[e^{rZ(t)} \right] = \exp \left(r \left[\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr \right] + \frac{r^2}{2}(t-s)\gamma \right) \quad (2.33)$$

Para obtener la tendencia condicionada del proceso, tomamos $r = 1$, quedando:

$$E[X(t)|X(s) = x(s)] = \exp \left(\left[\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr \right] + \frac{(t-s)\gamma}{2} \right)$$

y la varianza condicionada:

$$\begin{aligned} V [X(t)|X(s) = x(s)] &= \exp \left(2 \left[\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr \right] + \frac{4(t-s)\gamma}{2} \right) - \\ &- \left(\exp \left(\left[\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr \right] + \frac{(t-s)\gamma}{2} \right) \right)^2 = \\ &= (x(s))^2 \exp \left(2\beta_0(t-s) + 2\beta_1 \int_s^t F(r)dr \right) \cdot (e^{\gamma(t-s)} - 1) \end{aligned}$$

2.7.2. Estimadores de máxima verosimilitud

Para proceder a la obtención de los estimadores consideramos un muestreo discreto del proceso en los instantes t_1, \dots, t_n :

$$(X(t_1) = x(t_1), \dots, X(t_n) = x(t_n))$$

y bajo la condición inicial de que $P[X(t_1) = x(t_1)] = 1$, la función de verosimilitud tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta_0, \beta_1, \gamma) &= \\ &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}} \gamma^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{\alpha=2}^n x_{\alpha}^{-1} (t_{\alpha} - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\gamma(t_{\alpha} - t_{\alpha-1})} v_{\alpha}^2 \right) \end{aligned}$$

siendo:

$$v_{\alpha} = (\log(x_{\alpha}) - \log(x_{\alpha-1})) - \beta_0(t_{\alpha} - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} F(r)dr$$

así que la log-verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \log \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta_0, \beta_1, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} \log(2\pi) - \frac{n-1}{2} \log(\gamma) - \\ &- \sum_{\alpha=2}^n \log(x_{\alpha}) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n \log(t_{\alpha} - t_{\alpha-1}) - \\ &- \sum_{\alpha=2}^n \left(-\frac{1}{2\gamma(t_{\alpha} - t_{\alpha-1})} [\log(x_{\alpha}) - \log(x_{\alpha-1})] - \right. \\ &\quad \left. -\beta_0(t_{\alpha} - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} F(r)dr \right]^2 \end{aligned}$$

Calculamos la derivada de la anterior expresión respecto a cada parámetro e igualamos a cero:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \log \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta_0, \beta_1, \gamma)}{\partial \beta_0} = \\
 & = - \sum_{\alpha=2}^n \left(\frac{1}{\gamma} \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \beta_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right] \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{\alpha=2}^n \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \hat{\beta}_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \log \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta_0, \beta_1, \gamma)}{\partial \beta_1} = \\
 & = - \sum_{\alpha=2}^n \left(\frac{1}{\gamma(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left(\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right) \cdot \right. \\
 & \cdot \left. \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \beta_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right] \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \hat{\beta}_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) \right]}{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \log \mathbb{L}(x_1, \dots, x_n; \beta_0, \beta_1, \gamma)}{\partial \gamma} = \\
 & = - \frac{n-1}{2\gamma} + \frac{1}{2\gamma^2} \sum_{\alpha=2}^n \left(\frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \beta_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2 \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \hat{\gamma} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n \left(\frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. -\widehat{\beta}_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - \widehat{\beta}_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r)dr \right]^2 \Bigg) \quad (2.36)$$

Puede comprobarse además que estos estimadores obtenidos por el método de máxima verosimilitud son insesgados.

2.7.3. Matriz de covarianzas de los estimadores

Sabemos que $Z(t) = \log(X(t)/X(s) = x(s))$ tiene distribución normal unidimensional:

$$Z(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}_1 \left(\log(x(s)) + \beta_0(t-s) + \beta_1 \int_s^t F(r)dr; (t-s)\gamma \right) \quad (2.37)$$

Si llamamos:

- $v_\alpha = \log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \beta_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r)dr \rightsquigarrow$
 $\rightsquigarrow \mathcal{N}_1(0; \gamma(t_\alpha - t_{\alpha-1}))$
- $w_\alpha = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}_1 \left(0; \gamma \sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \right)$
- $c_\alpha = v_\alpha \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r)dr \rightsquigarrow$
 $\rightsquigarrow \mathcal{N}_1 \left(0; \gamma \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r)dr \right]^2 \right)$
- $y_\alpha = \sum_{\alpha=2}^n c_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}_1 \left(0; \gamma \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r)dr \right]^2 \right)$
- $k_\alpha = \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})^{\frac{1}{2}}} v_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}_1(0; \gamma)$
 $k_\alpha^2 \rightsquigarrow \gamma \chi_1^2$
- $l_\alpha = \sum_{\alpha=2}^n k_\alpha^2 \rightsquigarrow \gamma \chi_{n-1}^2$

entonces:

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}_0) &= E \left[(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 \right] = \\
 &= E \left[\left(\frac{\sum_{\alpha=2}^n \left[\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})} - \beta_0 \right)^2 \right] \\
 &= E \left[\left(\frac{\sum_{\alpha=2}^n v_\alpha}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{V[w_\alpha]}{\left(\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \right)^2} \\
 &= \frac{\gamma}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\hat{\beta}_1) &= E \left[(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2 \right] = \\
 &= E \left[\left(\frac{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr [\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1}) - \beta_0(t_\alpha - t_{\alpha-1})]}{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2} - \beta_1 \right)^2 \right] \\
 &= E \left[\left(\frac{\sum_{\alpha=2}^n c_\alpha}{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{V[y_\alpha]}{\left(\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2 \right)^2} \\
 &= \frac{\gamma}{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\widehat{\gamma}) &= \\
 &= E [(\widehat{\gamma} - \gamma)^2] = \\
 &= E \left[\left(\frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n \left(\frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} [\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1})] - \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. -\beta_0(t_\alpha - t_{\alpha-1}) - \beta_1 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right) - \gamma \right)^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{(n-1)^2} E \left[\left(\sum_{\alpha=2}^n k_\alpha^2 - (n-1)\gamma \right)^2 \right] = \frac{1}{(n-1)^2} V[l_\alpha] = \\
 &= \frac{1}{(n-1)^2} 2(n-1)\gamma^2 = \frac{2\gamma^2}{n-1}
 \end{aligned}$$

La covarianza entre $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\gamma}$, y $\widehat{\beta}_1$ y $\widehat{\gamma}$ vale 0. Siguiendo un procedimiento similar al anterior, la covarianza entre $\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$ es:

$$\begin{aligned}
 Cov(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1) &= \\
 &= E [(\widehat{\beta}_0 - \beta_0)(\widehat{\beta}_1 - \beta_1)] = \\
 &= \frac{\gamma \sum_{\alpha=2}^n \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2}
 \end{aligned}$$

De esta forma, podemos escribir la matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1})} & \frac{\gamma \sum_{\alpha=2}^n \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2} & 0 \\ \frac{\gamma \sum_{\alpha=2}^n \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr}{\sum_{\alpha=2}^n (t_\alpha - t_{\alpha-1}) \sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2} & \frac{\gamma}{\sum_{\alpha=2}^n \frac{1}{(t_\alpha - t_{\alpha-1})} \left[\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F(r) dr \right]^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\gamma^2}{n-1} \end{pmatrix}$$

Observación:

En el caso de que la función asociada al factor exógeno tome valores constantes en cada intervalo de tiempo (función escalonada), es decir, que:

$$\int_{t_{\alpha-1}}^{t_{\alpha}} F(r)dr = F_{\alpha}(t_{\alpha} - t_{\alpha-1})$$

y además, como es habitual en las aplicaciones prácticas, los intervalos de tiempo entre las distintas mediciones sean de amplitud 1 ($t_{\alpha} - t_{\alpha-1} = 1$), los estimadores de máxima verosimilitud y la matriz de covarianzas quedan de la siguiente forma:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n \left[\log(x_{\alpha}) - \log(x_{\alpha-1}) - \hat{\beta}_1 F_{\alpha} \right] \quad (2.38)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha} \left[\log(x_{\alpha}) - \log(x_{\alpha-1}) - \hat{\beta}_0 \right]}{\sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha}^2} \quad (2.39)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n \left[\log(x_{\alpha}) - \log(x_{\alpha-1}) - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 F_{\alpha} \right]^2 \quad (2.40)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{n-1} & \frac{\gamma \sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha}}{(n-1) \sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha}^2} & 0 \\ \frac{\gamma \sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha}}{(n-1) \sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha}^2} & \frac{\gamma}{\sum_{\alpha=2}^n F_{\alpha}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\gamma^2}{n-1} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

En el último capítulo de esta memoria se realiza una aplicación real, tomando como variable endógena, la población andaluza y considerando otras variables de tipo socio-demográfico como exógenas. Además se muestra una comparación de los resultados obtenidos respecto a la tendencia estimada utilizando este modelo, con el modelo gompertziano.

Capítulo 3

Proceso de difusión Gompertz univariante y multivariante homogéneo: Inferencia mediante muestreo discreto

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es la consideración de la ley o modelo determinístico de Gompertz como herramienta de gran aplicación desde el punto de vista de los modelos de crecimiento (en muchos casos es utilizado para describir las dinámicas poblacionales o demográficas, [42], aunque otras ciencias han encontrado en este modelo una gran utilidad: biología, medicina, etc.). Por ejemplo, en [37] se aplica a la mortalidad por cáncer de pulmón en España. A continuación se abordará la versión estocástica del mismo, surgiendo así el proceso de difusión de Gompertz univariante homogéneo mediante la consideración de su ecuación diferencial estocástica (EDE) y de las ecuaciones atrasada y adelantada de Kolmogorov. Dicho proceso fue introducido y analizado por Ricciardi [46] y por Crow y Shimizu, [8].

Se obtendrá su función de densidad de transición (fdt), sus funciones momento y los estimadores de los parámetros asociados al mismo, mediante muestreo discreto (en particular, la función tendencia condicionada y no con-

dicionada, que nos servirá para observar la calidad de los ajustes que vamos a realizar sobre la población). También se analizará una generalización de este proceso a través de la consideración del caso multivariante homogéneo.

3.2. El modelo determinístico de Gompertz

Consideremos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) - bx(t) \log x(t) \quad (3.1)$$

donde los parámetros a y b son determinados a partir de una realización de $x(t)$ con $t \in [0, T]$. Dichos parámetros se relacionan con la tasa de crecimiento intrínseco y con el factor de deceleración del crecimiento, respectivamente. Entonces, para una condición inicial dada $x(0)$, a y b , podemos encontrar la solución a esta ecuación diferencial de primer orden (*notamos* $x(t) = x$):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bx \log x \\ \frac{dx}{ax - bx \log x} &= dt \end{aligned}$$

entonces, realizando el cambio $\log x = y$ e integrando

$$\int \frac{1}{x(a - b \log x)} dx = \int \frac{1}{(a - by)} dy = \frac{\log(a - by)}{b}$$

por lo que volviendo a la ecuación que nos ocupa:

$$-\frac{\log(a - b \log x)}{b} = t + c$$

y con la condición inicial $x(0) = x_0$ tenemos que:

$$c = -\frac{\log(a - b \log x_0)}{b}$$

sustituyendo:

$$\begin{aligned} -\frac{\log(a - b \log x)}{b} &= t - \frac{\log(a - b \log x_0)}{b} \\ \log(a - b \log x) &= -bt + \log(a - b \log x_0) \\ a - b \log x &= e^{-bt}(a - b \log x_0) \end{aligned}$$

y de ahí que la solución a esta ecuación sea:

$$x = \exp \left\{ \frac{a}{b} + \left(\log x_0 - \frac{a}{b} \right) e^{-bt} \right\} \quad (3.2)$$

denominada *Curva de Gompertz*.

3.3. El proceso de difusión de Gompertz univariante

3.3.1. Análisis del proceso como solución de una ecuación diferencial estocástica

Consideremos la ecuación diferencial (3.1) y supongamos que la tasa de crecimiento intrínseco evoluciona en el tiempo de la siguiente forma:

$$\theta(t) = a + \sigma\eta(t)$$

donde a es una constante (valor medio de $\theta(t)$), $\sigma > 0$ (coeficiente de difusión) y $\eta(t)$ es un ruido blanco gaussiano; de esta forma aparece una EDE que caracteriza al proceso estocástico gompertziano:

$$dx(t) = \{ax(t) - bx(t) \log x(t)\} dt + \sigma x(t)dw(t) \quad (3.3)$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$. El proceso $W = \{w(t), t \in [0, T]\}$ es un proceso de Wiener estándar y su diferencial es entendida en el sentido de Ito. Resolvamos dicha ecuación, [14]:

Definición Sea x_t una integral estocástica de la forma:

$$dx_t = h(x_t)dt + k(x_t)dw_t \quad (3.4)$$

y sea $(t, x) \rightarrow g(t, x) \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty], x \in \mathbb{R}$ una función continua y diferenciable en $[0, \infty] \times \mathbb{R}$. Entonces la función $y_t = g(t, x_t)$ es una integral estocástica:

$$dy_t = \frac{\partial g(t, x_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, x_t)}{\partial x} dx_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, x_t)}{\partial x^2} (dx_t)^2 \quad (3.5)$$

denominada **Fórmula de Ito** donde $dt dt = dt dw_t = dw_t dt = 0, (dw_t)^2 = dt$. Si por comodidad, expresamos el modelo de Gompertz:

$$dx_t = \{ax_t - bx_t \log x_t\} dt + \sigma x_t dw_t \quad (3.6)$$

y aplicamos la fórmula de Ito a la siguiente función:

$$y_t = g(t, x_t) = e^{bt} \log x_t$$

queda:

$$\begin{aligned} dy_t &= be^{bt} \log x_t dt + e^{bt} \frac{1}{x_t} dx_t + \frac{1}{2} \left[e^{bt} - \frac{1}{(x_t)^2} (dx_t)^2 \right] = \\ &= be^{bt} \log x_t dt + \frac{e^{bt}}{x_t} dx_t - \frac{1}{2} e^{bt} \frac{1}{(x_t)^2} (dx_t)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(e^{bt} \log x_t) &= be^{bt} \log x_t dt + \frac{e^{bt}}{x_t} (\{ax_t - bx_t \log x_t\} dt + \sigma x_t dw_t) \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{bt} \frac{1}{(x_t)^2} \sigma^2 (x_t)^2 dt = \\ &= be^{bt} \log x_t dt + ae^{bt} dt - be^{bt} \log x_t dt + \sigma e^{bt} dw_t - \frac{1}{2} \sigma^2 e^{bt} dt = \\ &= ae^{bt} dt + \sigma e^{bt} dw_t - \frac{1}{2} \sigma^2 e^{bt} dt = \\ &\quad \left(a - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{bt} dt + \sigma e^{bt} dw_t \end{aligned}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int_0^t d(e^{bs} \log x_s) &= \int_0^t \left(a - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{bs} ds + \int_0^t \sigma e^{bs} dw_s \\ e^{bt} \log x_t - \log x_0 &= \left(a - \frac{\sigma^2}{2} \right) \left(\frac{e^{bt}}{b} - \frac{1}{b} \right) + \sigma \int_0^t e^{bs} dw_s \\ \log x_t &= e^{-bt} \left(\frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} (e^{bt} - 1) + \log x_0 \right) + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dw_s \end{aligned}$$

así que la solución (utilizando la notación de (3.3)) es:

$$x(t) = \exp \left\{ \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} + \left(\log x(0) - \frac{a - \frac{\sigma^2}{2}}{b} \right) e^{-bt} + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dw(s) \right\} \quad (3.7)$$

3.3.2. Análisis a través de las ecuaciones de Kolmogorov

Sea $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión unidimensional homogéneo, \mathbb{R} -valuado y con función de distribución de transición:

$$P(y, t|x, s) = P(X(t) = y|X(s) = x) \quad (3.8)$$

Consideramos como momentos infinitesimales (coeficientes de tendencia y de difusión) del proceso respectivamente:

$$a(x, s) = \alpha x - \beta x \log(x) \quad , \quad b(x, s) = \sigma^2 x^2$$

donde $\sigma > 0$ y α, β son constantes.

Si $\beta = 0$, el proceso de difusión que estamos analizando se correspondería con el proceso lognormal univariante.

El proceso de difusión de Gompertz unidimensional sin factores exógenos queda caracterizado por las ecuaciones adelantadas y atrasadas de Kolmogorov (ecuaciones de difusión):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} ((\alpha y - \beta y \log(y))p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2 y^2 p) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -((\alpha x - \beta x \log(x))) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2} (\sigma^2 x^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

Con objeto de determinar la función de densidad de probabilidad de transición del proceso (fdt), podemos transformar el proceso $X(t)$ a un proceso de Wiener, utilizando el siguiente teorema, que aparece en [45]:

Teorema de Ricciardi (1977)

La función de densidad de transición (fdt) $p(y, t|x, s)$, de un proceso de difusión unidimensional $\{X(t), t \geq t_0\}$ con momentos infinitesimales $a(x, s)$ y $b(x, s)$, puede ser obtenida a partir de la fdt de un proceso Wiener $\{W(t'), t' \geq t'_0\}$, $p'(y', t'|x', s')$, utilizando una transformación que relaciona las ecuaciones de Kolmogorov de ambos procesos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s} + (a(x, s)) \frac{\partial p}{\partial x} + (b(x, s)) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial s'} + \frac{\partial^2 p'}{\partial x'^2} &= 0 \end{aligned}$$

La condición necesaria y suficiente para que exista dicha transformación es que existan dos funciones arbitrarias $c_1(s)$ y $c_2(s)$ dependientes de s que verifiquen:

$$a(x, s) = \frac{1}{4} \frac{\partial b(x, s)}{\partial x} + \frac{b(x, s)^{\frac{1}{2}}}{2} \left\{ c_1(s) + \int^x \frac{c_2(s)b(z, s) + \frac{\partial b(z, s)}{\partial s}}{b(z, s)^{\frac{3}{2}}} dz \right\}$$

Si se cumple lo anterior, existe una transformación del tipo:

$$\begin{aligned} x' &= \Psi(x, s) & y' &= \Psi(y, t) \\ s' &= \Phi(s) & t' &= \Phi(t) \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int^s c_2(z) dz \right] \int^x [b(z, s)]^{-\frac{1}{2}} dz - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int^s c_1(\theta) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^\theta c_2(z) dz \right] d\theta \\ \Phi(s) &= \int^s \exp \left[-\int^\theta c_2(z) dz \right] d\theta \end{aligned}$$

de manera que ambas funciones están relacionadas de la siguiente forma:

$$p(y, t|x, s) = p'(y', t'|x', s') \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial y} = p'(\Psi(y, t), \Phi(t) | \Psi(x, s), \Phi(s)) \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial y}$$

Usando que la función de densidad de un proceso de Wiener es la de una distribución Normal, queda lo siguiente:

$$p(y, t|x, s) = (2\pi[\Phi(t) - \Phi(s)])^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{[\Psi(y, t) - \Psi(x, s)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(s)]} \right\} \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial y} \quad (3.11)$$

Aplicación del teorema al P. Gompertz

Utilizando el teorema de Ricciardi y aplicándolo en el caso de que los momentos infinitesimales asociados al proceso tengan la forma:

$$\begin{aligned} b(x, s) &= \alpha x - \beta x \log(x) \\ a(x, s) &= \sigma^2 x^2 \end{aligned}$$

se obtiene que las funciones $c_1(s)$ y $c_2(s)$ existen y no dependen de s . Estas constantes c_1 y c_2 resultan ser:

$$c_1 = \frac{2}{\sigma} \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

$$c_2 = -2\beta$$

y por lo tanto, la transformación buscada es la siguiente:

$$\Psi(x, s) = \frac{\log(x)}{\sigma} e^{s\beta} - \frac{\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\beta\sigma} e^{s\beta} \quad \Phi(s) = \frac{e^{2s\beta}}{2\beta} \quad (3.12)$$

por lo que se puede obtener la fdt del proceso $X(t)$ a partir de la fdt del proceso Wiener, sin más que aplicar el teorema de Ricciardi y con la transformación que se ha obtenido en la expresión (3.12):

$$p(y, t|x, s) = \left\{ 2\pi \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-s)} \right) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} y^{-1}. \quad (3.13)$$

$$\cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[\log(y) - e^{-\beta(t-s)} \log(x) - \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) \right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-s)} \right)} \right\}$$

De esta forma, tenemos que la función de densidad de transición del proceso de Gompertz univariante $\{X(t); t_0 \leq t \leq T\}$, coincide con la densidad de una distribución lognormal univariante $\mathbf{\Lambda}_1(m(s, t), v(s, t))$ siendo:

$$m(s, t) = e^{-\beta(t-s)} \log(x) + \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right)$$

$$v(s, t) = \frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-s)} \right)$$

3.3.3. Momentos del proceso

La variable aleatoria $X(t)/X(s) = x$ tiene distribución lognormal $\mathbf{\Lambda}_1(m(s, t), v(s, t))$, por lo que utilizando la información conocida de esta distribución podemos

obtener los momentos condicionados de orden r de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
E(X^r(t)/X(s) = x) &= \exp \left\{ r m(s, t) + \frac{r^2}{2} v(s, t) \right\} = \\
&\exp \left\{ r e^{-\beta(t-s)} \log(x) + r \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) + \frac{r^2}{2} \frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-s)} \right) \right\} = \\
&= \exp \left\{ r e^{-\beta(t-s)} \log(x) \right\} \exp \left\{ \frac{r\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) \right\} \\
&\exp \left\{ \frac{r\sigma^2}{4\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) \left[r \left(1 + e^{-\beta(t-s)} \right) - 2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

En el momento condicionado de primer orden, $r = 1$, así que:

$$\begin{aligned}
E(X(t)/X(s) = x) &= \\
&= \exp \left\{ e^{-\beta(t-s)} \log(x) \right\} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) \right\} \\
&\exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{4\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Funciones tendencia

Utilizando la anterior expresión, la función tendencia condicionada para una realización del proceso es:

$$\begin{aligned}
E(X(t_i)/X(t_{i-1}) = x_{i-1}) &= \\
&= \exp \left\{ e^{-\beta(t_i-t_{i-1})} \log(x_{i-1}) \right\} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t_i-t_{i-1})} \right) \right\} \\
&\exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{4\beta} \left(1 - e^{-\beta(t_i-t_{i-1})} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

y considerando que $P(X(0) = x_0) = 1$, la función tendencia no condicionada es la siguiente:

$$\begin{aligned}
E(X(t)/X(0) = x_0) &= E(X(t)) = \\
&= \exp \left\{ e^{-\beta t} \log(x_0) \right\} \exp \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta t} \right) \right\} \\
&\exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{4\beta} \left(1 - e^{-\beta t} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

Respecto a la varianza del proceso:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t)/X(s) = x) &= \\ &= \left(\exp \left\{ 2e^{-\beta(t-s)} \log(x) \right\} \right) \left(\exp \left\{ \frac{2\alpha}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right) \right\} \right) \\ &\left(\exp \left\{ -\frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)} \right)^2 \right\} \right) \left(\exp \left\{ \frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-s)} \right) \right\} - 1 \right) \end{aligned}$$

3.3.4. Estimación de los parámetros del proceso

Consideremos un muestreo discreto del proceso, es decir se realizan observaciones discretas del proceso en los instantes (t_0, t_1, \dots, t_n) :

$$X(t_0) = x_{t_0}; X(t_1) = x_{t_1}; \dots; X(t_n) = x_{t_n}$$

y para simplificar la notación escribiremos x_0, x_1, \dots, x_n , suponiendo la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$. Vamos a estimar los parámetros de este proceso por el método de máxima verosimilitud. Si denotamos $r_j = t_j - t_{j-1}$, $\gamma = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$, $\theta_j = e^{-\beta r_j}$, entonces la función de verosimilitud asociada vendrá dada por la siguiente expresión, en la que se utiliza su función de densidad de probabilidad (3.13):

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(x_0, x_1, \dots, x_n | \alpha, \beta, \sigma^2) &= \prod_{j=1}^n p(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) = \\ &= \prod_{j=1}^n \left\{ 2\pi \left[\frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta r_j} \right) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} x_j^{-1} \\ &\exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\left[\log(x_j) - e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta} \left(1 - e^{-\beta r_j} \right) \right]^2}{\frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-2\beta r_j} \right)} \right\} \end{aligned}$$

Tomando logaritmos en la función anterior:

$$\begin{aligned}
\log(\mathbb{L}) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{2\beta}\right) + \sum_{j=1}^n \log(x_j^{-1}) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log\left(1 - e^{-2\beta r_j}\right) \\
&\quad - \frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - e^{-\beta r_j} \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta} (1 - e^{-\beta r_j})\right]^2}{(1 - e^{-2\beta r_j})} = \\
&= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 + \frac{n}{2} \log(2\beta) - \sum_{j=1}^n \log(x_j) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \log(1 - \theta_j^2) \\
&\quad - \frac{\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{1 - \theta_j^2}
\end{aligned}$$

Para obtener los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros γ , σ^2 y β , calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de ellos e igualamos a cero.

Para el **parámetro** γ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \gamma} &= \frac{2}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]}{1 + \theta_j} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1})}{1 + \theta_j} - \frac{\gamma}{\beta} \sum_{j=1}^n \frac{1 - \theta_j}{1 + \theta_j} = 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto se obtiene el estimador:

$$\hat{\gamma} = \hat{\beta} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1 - \hat{\theta}_j}{1 + \hat{\theta}_j} \right)^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\log(x_j) - \hat{\theta}_j \log(x_{j-1})}{1 + \hat{\theta}_j} \right) \quad (3.14)$$

Para el **parámetro** σ^2 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{1 - \theta_j^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\beta}{\sigma^4} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta}\right]^2}{1 - \theta_j^2} = 0
\end{aligned}$$

así que el estimador queda:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \hat{\theta}_j \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}(1-\hat{\theta}_j)}{\hat{\beta}} \right]^2}{1 - \hat{\theta}_j^2} \quad (3.15)$$

Respecto al **parámetro** β :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} &= \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j^2 r_j}{1 - \theta_j^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]}{1 - \theta_j^2} \\ &\quad \cdot \left[\theta_j r_j \log(x_{j-1}) - \gamma \left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1 - \theta_j r_j}{\beta^2} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \theta_j r_j \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{(1 - \theta_j^2)^2} - \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{\left[\log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma(1-\theta_j)}{\beta} \right]^2}{1 - \theta_j^2} \end{aligned}$$

Denotando $B_j = \log(x_j) - \theta_j \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1 - \theta_j)$, queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} &= \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j^2 r_j}{1 - \theta_j^2} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j^2}{1 - \theta_j^2} - \\ &\quad - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j \left[r_j \theta_j \log(x_{j-1}) - \gamma \left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1 - \theta_j r_j}{\beta^2} \right) \right] (1 - \theta_j^2) - B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1 - \theta_j^2)^2} \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (3.15) tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} &= \frac{n}{2\beta} - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j^2 r_j}{1 - \theta_j^2} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{n\sigma^2}{2\beta} \\
 - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j \left[r_j \theta_j \log(x_{j-1}) - \gamma \left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1 - \theta_j r_j}{\beta^2} \right) \right] (1 - \theta_j^2) - B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1 - \theta_j^2)^2} &= \\
 - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j^2 r_j}{1 - \theta_j^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j \left[r_j \theta_j \log(x_{j-1}) - \gamma \left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1 - \theta_j r_j}{\beta^2} \right) \right] (1 - \theta_j^2) - B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1 - \theta_j^2)^2} &= \\
 - \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j^2 r_j}{1 - \theta_j^2} - \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j r_j \theta_j \log(x_{j-1})}{1 - \theta_j^2} + & \\
 + \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j \gamma \left(\frac{\theta_j r_j}{\beta} - \frac{1 - \theta_j r_j}{\beta^2} \right)}{(1 - \theta_j^2)} + \frac{2\beta}{\sigma^2} \sum_{j=1}^n \frac{B_j^2 r_j \theta_j^2}{(1 - \theta_j^2)^2} &
 \end{aligned}$$

Igualando a cero esta última expresión y sustituyendo los estimadores de γ y σ^2 , obtenemos una ecuación no lineal que puede ser resuelta por métodos numéricos. Cuando se hace tender $\hat{\beta}$ a cero en la expresiones (3.14) y (3.15), aparecen precisamente los estimadores de los parámetros del proceso **lognormal univariante biparamétrico**:

$$\begin{aligned}
 \hat{\gamma} &= \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{j=1}^n (\log(x_j) - \log(x_{j-1})) \\
 \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{[\log(x_j) - \log(x_{j-1}) - (t_j - t_{j-1})\hat{\gamma}]^2}{t_j - t_{j-1}}
 \end{aligned}$$

Caso particular: intervalos de amplitud 1

Un caso particular de gran interés en relación a su utilidad práctica es aquél en el que los incrementos entre cada uno de los instantes de tiempo en el que se realizan las observaciones son iguales a la unidad, es decir, $r_j = 1$. En este caso, aparece una expresión explícita para todos los estimadores de los parámetros, lo que conlleva la gran ventaja de que no hay que resolver ninguna ecuación no lineal. Bajo esta consideración los estimadores antes calculados (3.14) y (3.15), se transforman de la siguiente manera:

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\beta}}{n(1 - e^{-\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^n \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) \right) \quad (3.16)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{\beta}}{n(1 - e^{-2\hat{\beta}})} \sum_{j=1}^n \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1 - e^{-\hat{\beta}}) \right)^2 \quad (3.17)$$

Nótese que $\theta_j = e^{-\beta}$ para $j = 1, \dots, n$.

Obtengamos ahora la expresión del estimador del parámetro β , denotando:

$$B_j = \log(x_j) - e^{-\beta} \log(x_{j-1}) - \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta})$$

La log-verosimilitud queda en este caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} &= \frac{n\theta^2}{1 - \theta^2} - \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)} \sum_{j=1}^n B_j \log(x_{j-1}) + \\ &+ \frac{2\beta\gamma \left(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1-\theta}{\beta^2} \right)}{\sigma^2(1 - \theta^2)} \sum_{j=1}^n B_j + \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)^2} \sum_{j=1}^n B_j^2 \end{aligned}$$

Puede comprobarse que $\sum_{j=1}^n B_j = 0$, por lo que utilizando la expresión (3.17) tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log(\mathbb{L})}{\partial \beta} &= \frac{n\theta^2}{1 - \theta^2} - \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)} \sum_{j=1}^n B_j \log(x_{j-1}) + \\ &+ \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)^2} \frac{n\sigma^2(1 - \theta^2)}{2\beta} - \frac{2\beta\theta}{\sigma^2(1 - \theta^2)} \sum_{j=1}^n B_j \log(x_{j-1}) = 0 \end{aligned}$$

Reemplazando B_j y θ por su valor y utilizando la ecuación (3.16):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) - \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1 - e^{-\hat{\beta}}) \right) \log(x_{j-1}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \sum_{j=1}^n \log^2(x_{j-1}) - \\ - \frac{\hat{\beta}}{n\hat{\beta}(1 - e^{-\hat{\beta}})} (1 - e^{-\hat{\beta}}) \sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \sum_{j=1}^n \left(\log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \log(x_{j-1}) \right) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \log(x_j) - e^{-\hat{\beta}} \sum_{j=1}^n \log^2(x_{j-1}) = \\ &\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \sum_{j=1}^n \log(x_j) - \frac{1}{n} e^{-\hat{\beta}} \left(\sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \right)^2 \end{aligned}$$

Con todo lo anterior, se obtiene el estimador del parámetro β :

$$\hat{\beta} = \log \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \sum_{j=1}^n \log(x_j) - n \sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \log(x_j)}{\left(\sum_{j=1}^n \log(x_{j-1}) \right)^2 - n \sum_{j=1}^n \log^2(x_{j-1})} \right\} \quad (3.18)$$

3.3.5. Aplicación del proceso Gompertz al caso de la población andaluza

Vamos a obtener estimaciones de los parámetros α, β, σ tomando la información sobre población en Andalucía en varios años, extraída de las estimaciones intercensales de población hasta el año 1997 y de las revisiones padronales en el periodo 1998-2005 (Fuente: IEA). En la tabla siguiente se muestran los datos recogidos durante los años 1976-2005.

Año	Población 1/1	Año	Población 1/1
1976	6159058	1977	6203459
1978	6254757	1979	6309483
1980	6367089	1981	6441247
1982	6513412	1983	6584900
1984	6669467	1985	6743617
1986	6801819	1987	6844709
1988	6868910	1989	6883737
1990	6903022	1991	6941576
1992	6983679	1993	7030137
1994	7071471	1995	7106734
1996	7130637	1997	7153392
1998	7236459	1999	7305117
2000	7340052	2001	7403968
2002	7478432	2003	7606848
2004	7687518	2005	7849799

Cuadro 3.1: Población andaluza a 1 de enero

Gráficamente (población en millones de habitantes):

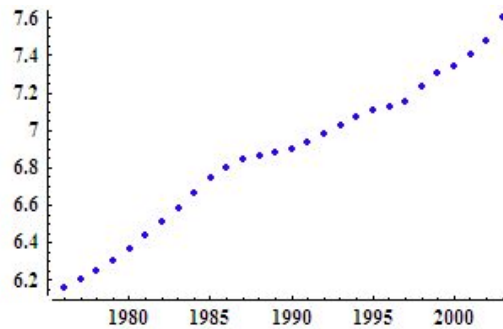


Figura 3.1: Evolución de la población de Andalucía

Si aplicamos las expresiones (3.16), (3.17), (3.18) de los estimadores de los parámetros, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= 0,00698 \\ \hat{\gamma} &= 0,02127 \quad \hat{\alpha} = 0,02127 \\ \hat{\sigma}^2 &= 1,21683 \times 10^{-5}\end{aligned}$$

Nota: Para la obtención de las estimaciones de los parámetros y las funciones tendencia se han utilizado los datos observados hasta 2003 inclusive. Los años 2004 y 2005 se han reservado para realizar una predicción y comparar así el valor estimado con el valor observado. En capítulos posteriores compararemos dichas estimaciones con las obtenidas suponiendo muestreo continuo del proceso.

Si representamos los datos observados junto con la tendencia no condicionada del proceso sujeta a las estimaciones de los parámetros anteriores, podemos apreciar que el ajuste es bastante aceptable en cuanto a que refleja la evolución de la población de forma global. En cualquier caso, vamos a obtener la tendencia condicionada, ya que va a mejorar el ajuste considerablemente.

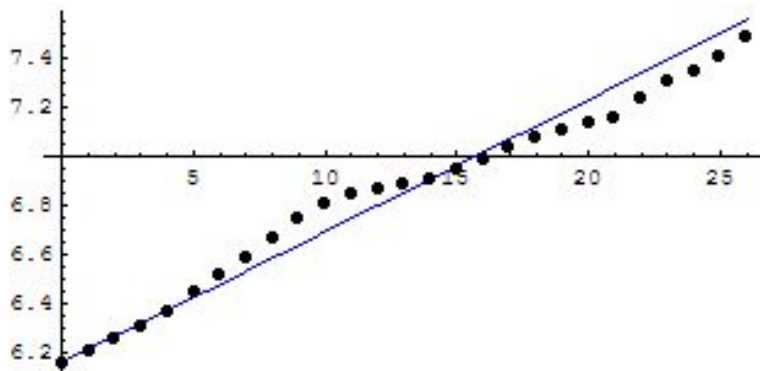


Figura 3.2: Función tendencia (población de Andalucía)

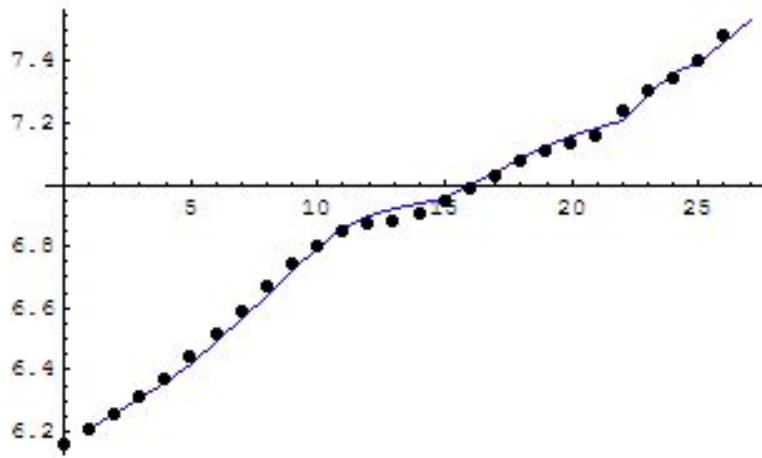


Figura 3.3: Función tendencia condicionada (población de Andalucía)

Año	Población	FTC
1976	6159058	6159060
1977	6203459	6211920
1978	6254757	6256390
1979	6309483	6307770
1980	6367089	6362570
1981	6441247	6420250
1982	6513412	6494510
1983	6584900	6566760
1984	6669467	6638330
1985	6743617	6722990
1986	6801819	6797210
1987	6844709	6855460
1988	6868910	6898390
1989	6883737	6922610
1990	6903022	6937450
1991	6941576	6956750
1992	6983679	6995330
1993	7030137	7037460
1994	7071471	7083950
1995	7106734	7125310
1996	7130637	7160600
1997	7153392	7184510
1998	7236459	7207280
1999	7305117	7290390
2000	7340052	7359070
2001	7403968	7394020
2002	7478432	7457960
2003	7606848	7532440
2004	7687518	7660870
2005	7849799	7741550

Cuadro 3.2: Observaciones y Función tendencia condicionada (Población andaluza)

3.3.6. Aplicación a la población provincial

Apliquemos de nuevo el modelo de Gompertz a la serie de valores de población en cada una de las provincias de Andalucía. Vamos en primer lugar a estimar los parámetros de dicho modelo y a continuación a obtener la función tendencia condicionada para cada provincia.

Parámetros estimados

Las estimaciones conseguidas para cada una de las provincias se muestran en la siguiente tabla:

Provincia	α	β	σ^2
Almería	0.04956	-0.04548	4.35942×10^{-5}
Cádiz	0.00965	0.03589	9.28194×10^{-6}
Córdoba	0.00042	0.00800	8.56577×10^{-6}
Granada	-0.00080	0.01956	2.11751×10^{-5}
Huelva	-0.00523	0.01348	9.72862×10^{-6}
Jaén	-0.10235	0.23229	1.80068×10^{-5}
Málaga	0.01768	0.02150	8.86347×10^{-5}
Sevilla	0.01941	0.02186	9.54060×10^{-6}

Cuadro 3.3: Parámetros estimados por provincia

Función tendencia condicionada

Se ha estimado la tendencia condicionada en cada provincia tomando los valores observados en el periodo 1976-2003. Los años 2004 y 2005 se han utilizado para realizar una predicción y comprobar la bondad del ajuste. Los resultados son:

Año	Población	FTC
1976	390350	390350
1977	393571	393064
1978	396829	396459
1979	400424	399895
1980	404536	403687
1981	412206	408026
1982	417661	416126
1983	422768	421891
1984	429836	427291
1985	436098	434770
1986	440991	441401
1987	444730	446585
1988	446482	450549
1989	447547	452406
1990	449967	453536
1991	455649	456102
1992	461231	462132
1993	466830	468058
1994	472240	474006
1995	477518	479757
1996	482737	485370
1997	487638	490923
1998	505448	496140
1999	512843	515120
2000	518229	523009
2001	533168	528759
2002	546498	544722
2003	565310	558983
2004	580077	579136
2005	612315	594977

Cuadro 3.4: Población y FTC en Almería

Año	Población	FTC
1976	939715	939715
1977	950249	950749
1978	959744	961029
1979	968751	970292
1980	978385	979075
1981	989584	988467
1982	1001555	999380
1983	1012727	1011041
1984	1026788	1021919
1985	1039583	1035604
1986	1049838	1048051
1987	1057980	1058024
1988	1064280	1065939
1989	1069577	1072062
1990	1074669	1077209
1991	1080399	1082156
1992	1086030	1087722
1993	1091921	1093191
1994	1096860	1098911
1995	1101248	1103706
1996	1102758	1107965
1997	1103795	1109431
1998	1107484	1110438
1999	1119802	1114018
2000	1125105	1125969
2001	1131346	1131113
2002	1140793	1137166
2003	1155724	1146325
2004	1164374	1160800
2005	1180817	1169180

Cuadro 3.5: Población y FTC en Cádiz

Año	Población	FTC
1976	720483	720483
1977	719115	722675
1978	718621	721313
1979	718588	720822
1980	719673	720789
1981	720838	721869
1982	725501	723028
1983	730421	727668
1984	737394	732563
1985	743572	739500
1986	747632	745646
1987	750409	749685
1988	751656	752447
1989	752280	753688
1990	752596	754309
1991	754362	754623
1992	755723	756380
1993	758407	757733
1994	760841	760403
1995	762504	762824
1996	762199	764478
1997	761920	764175
1998	767175	763897
1999	768676	769124
2000	769237	770616
2001	769625	771174
2002	771131	771560
2003	775944	773058
2004	779870	777844
2005	784376	781748

Cuadro 3.6: Población y FTC en Córdoba

Año	Población	FTC
1976	746073	746073
1977	746968	749719
1978	749043	750601
1979	751989	752645
1980	755560	755548
1981	760261	759066
1982	764725	763697
1983	769711	768094
1984	775954	773005
1985	781160	779153
1986	785820	784279
1987	788553	788866
1988	789821	791557
1989	789974	792805
1990	789824	792956
1991	792988	792808
1992	796520	795922
1993	801131	799399
1994	804885	803936
1995	807213	807630
1996	808407	809921
1997	809313	811096
1998	801177	811987
1999	813061	803982
2000	809004	815674
2001	812637	811683
2002	818959	815257
2003	828107	821476
2004	841687	830474
2005	860898	843827

Cuadro 3.7: Población y FTC en Granada

Año	Población	FTC
1976	402820	402820
1977	404912	405641
1978	407413	407719
1979	410352	410204
1980	413439	413123
1981	418888	416189
1982	422107	421600
1983	425401	424797
1984	429010	428067
1985	432148	431650
1986	434803	434765
1987	437095	437400
1988	438748	439675
1989	439936	441315
1990	441080	442494
1991	443103	443629
1992	444849	445637
1993	446839	447369
1994	448280	449343
1995	449313	450773
1996	450397	451798
1997	451278	452873
1998	453958	453747
1999	457507	456406
2000	458998	459926
2001	461730	461405
2002	464934	464114
2003	472446	467291
2004	476707	474740
2005	483792	478964

Cuadro 3.8: Población y FTC en Huelva

Año	Población	FTC
1976	651393	651393
1977	647171	649777
1978	643007	646436
1979	639062	643137
1980	636648	640007
1981	637109	638090
1982	638610	638456
1983	640437	639648
1984	643953	641099
1985	646695	643887
1986	648094	646059
1987	647550	647167
1988	644984	646736
1989	641296	644704
1990	638403	641780
1991	637968	639484
1992	639137	639139
1993	641959	640067
1994	643962	642306
1995	645342	643894
1996	645047	644988
1997	644884	644754
1998	645792	644625
1999	649662	645344
2000	645711	648408
2001	645781	645280
2002	647387	645336
2003	651565	646607
2004	654458	649913
2005	660284	652220

Cuadro 3.9: Población y FTC en Jaén

Año	Población	FTC
1976	920102	920102
1977	937599	938000
1978	956231	955454
1979	975310	974033
1980	994472	993050
1981	1018353	1012141
1982	1047859	1035923
1983	1074156	1065291
1984	1104804	1091450
1985	1130181	1121919
1986	1147141	1147135
1987	1157242	1163981
1988	1157119	1174011
1989	1151901	1173889
1990	1150234	1168708
1991	1155803	1167052
1992	1165835	1172582
1993	1175399	1182542
1994	1184079	1192036
1995	1193182	1200651
1996	1201576	1209685
1997	1211216	1218013
1998	1240580	1227576
1999	1258084	1256696
2000	1278851	1274048
2001	1302240	1294627
2002	1330010	1317797
2003	1374890	1345294
2004	1397925	1389710
2005	1453409	1412490

Cuadro 3.10: Población y FTC en Málaga

Año	Población	FTC
1976	1388123	1388123
1977	1403874	1405033
1978	1423869	1420629
1979	1445009	1440422
1980	1464377	1461342
1981	1484008	1480502
1982	1495394	1499917
1983	1509279	1511175
1984	1521728	1524902
1985	1534180	1537207
1986	1547500	1549512
1987	1561150	1562673
1988	1575820	1576157
1989	1591226	1590647
1990	1606249	1605860
1991	1621304	1620691
1992	1634354	1635551
1993	1647651	1648430
1994	1660324	1661551
1995	1670414	1674053
1996	1677516	1684006
1997	1683348	1691010
1998	1714845	1696762
1999	1725482	1727817
2000	1734917	1738302
2001	1747441	1747601
2002	1758720	1759942
2003	1782862	1771055
2004	1792420	1794840
2005	1813908	1804250

Cuadro 3.11: Población y FTC en Sevilla

En los siguientes gráficos se muestran los valores observados y los datos ajustados a través de la tendencia condicionada en las ocho provincias andaluzas:

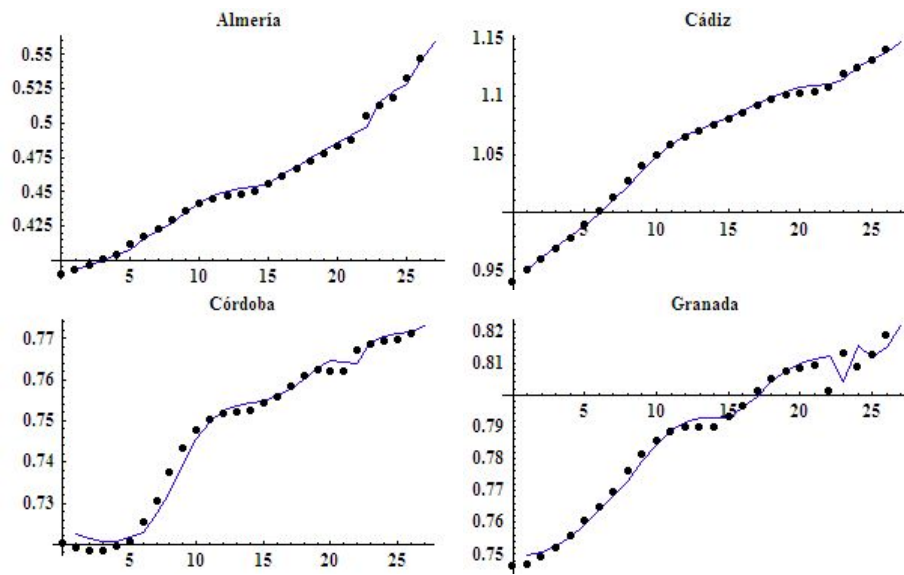


Figura 3.4: Datos observados y FTC Almería, Cádiz, Córdoba y Granada

continuación...

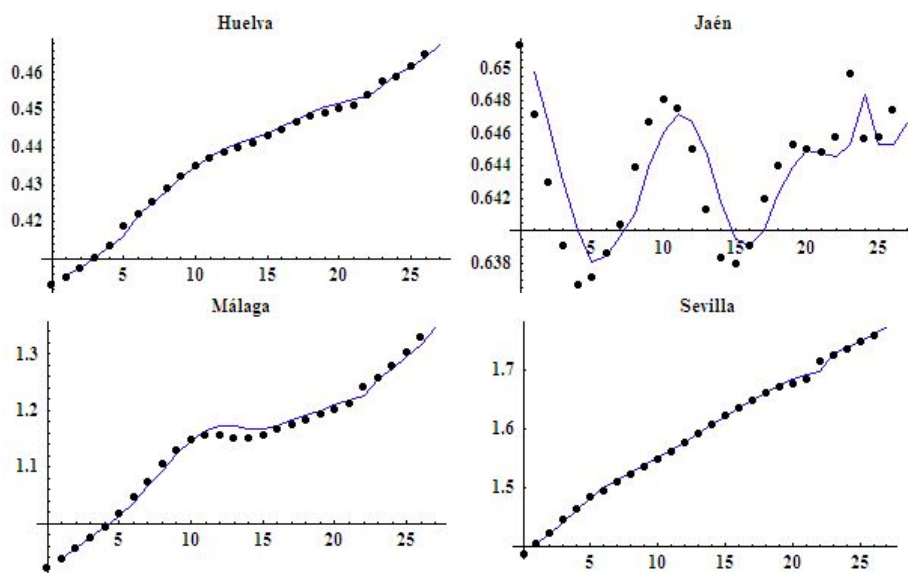


Figura 3.5: Datos observados y FTC Huelva, Jaén, Málaga y Sevilla

Las predicciones para las poblaciones a 1 de enero de 2004 y 2005 son por lo tanto:

Provincia	2004	2005
Almería	759136	594977
Cádiz	1160800	1169180
Córdoba	777844	781748
Granada	830474	843827
Huelva	474740	478964
Jaén	649913	652220
Málaga	1389710	1412490
Sevilla	1794840	1804250

Cuadro 3.12: Poblaciones estimadas en 2004 y 2005 por provincia

Si se comparan los datos anteriores con los datos reales de población, puede verse que el ajuste realizado es bastante aceptable, excepto en alguna provincia como Jaén, que como se ha visto presenta una tendencia muy poco estable.

Si bien es cierto, que el valor de la predicción suele ser algo inferior al valor observado en todas las provincias, es decir, la tendencia condicionada ha sub-estimado la población en los últimos años, quizás debido a que el aumento poblacional ha sido más acusado en estos años como consecuencia probablemente, de un aumento de la inmigración y de la recuperación paulatina del número de hijos por mujer.

3.4. El proceso de difusión Gompertz homogéneo multivariante

3.4.1. Análisis a través de las ecuaciones de Kolmogorov

Sea $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión definido en $(0, +\infty)^k$ con trayectorias continuas casi seguro y con probabilidades de transición:

$$P(y, t|x, s) = P(X(t) = y|X(s) = x) \quad (3.19)$$

siendo:

$$\begin{aligned} X(t) &= (X_{t1}, \dots, X_{tk})' \\ X(s) &= (X_{s1}, \dots, X_{sk})' \end{aligned}$$

y x, y vectores k -dimensionales; entonces, si los momentos infinitesimales del proceso son:

$$\begin{aligned} a(t, x) &= \begin{pmatrix} a_1x_1 - \beta_1x_1 \log(x_1) \\ a_2x_2 - \beta_2x_2 \log(x_2) \\ \vdots \\ a_kx_k - \beta_kx_k \log(x_k) \end{pmatrix} \\ b_{ij}(x, t) &= b_{ij}x_ix_j \end{aligned} \quad (3.20)$$

siendo $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ una matriz simétrica, definida positiva y cuyos elementos $b_{ij} > 0$, aparece el proceso de difusión de Gompertz multivariante homogéneo, sin factores exógenos.

Si denotamos:

$$\begin{aligned} a x &= (a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_kx_k)' \\ x \log(x) &= (x_1 \log(x_1), x_2 \log(x_2), \dots, x_k \log(x_k))' \end{aligned}$$

entonces se puede expresar la tendencia del proceso en función de los vectores anteriores, como:

$$a(x, t) = ax + Ax \log(x) \quad (3.21)$$

siendo A la matriz diagonal e inversible:

$$A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_k \end{pmatrix}_{k \times k}$$

Este proceso queda caracterizado por las ecuaciones de difusión (ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov respectivamente), bajo ciertas condiciones de diferenciabilidad de la distribución de probabilidad de transición $P(y, t|x, s)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial((a_i y_i - \beta_i y_i \log(y_i))p)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k b_{ij} \frac{\partial^2(y_i y_j p)}{\partial y_i \partial y_j} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = - \sum_{i=1}^k (a_i x_i - \beta_i x_i \log(x_i)) \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k b_{ij} x_i x_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.23)$$

con la condición inicial $p(y, t|x, s) = \delta(y - x)$. A partir de estas ecuaciones se obtiene la siguiente solución:

$$p(y, t|x, s) = \left\{ (2\pi)^{\frac{k}{2}} |\Phi(s, t)|^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^k y_i^{-1} \right\}^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q \right\}$$

donde la forma cuadrática Q , el vector $m(s, t)$ y la matriz $\Phi(s, t)$ tienen las siguientes formas:

$$\begin{aligned} Q &= (\log(y) - m(s, t))' \Phi^{-1}(s, t) (\log(y) - m(s, t)) \\ m(s, t) &= e^{A(t-s)} \log(x) - \left(I - e^{A(t-s)} \right) A^{-1} \gamma \\ \Phi(s, t) &= \int_0^{t-s} e^{\theta A} B e^{\theta A} d\theta \end{aligned}$$

siendo $\gamma = a - \frac{b}{2}$ y $b = \text{diag}(B)$. Además como la matriz A es diagonal, se pueden poner los elementos de la matriz Φ de la siguiente forma:

$$\Phi_{ij}(s, t) = b_{ij} \frac{1 - e^{-(\beta_i + \beta_j)(t-s)}}{\beta_i + \beta_j} = b_{ij} \frac{1 - \theta_i \theta_j}{\beta_i + \beta_j}$$

siendo: $\theta_i = e^{-\beta_i(t-s)}$. Según lo anterior, la distribución de transición condicional es lognormal:

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k(m(s, t); \Phi(s, t)) \quad (3.24)$$

3.4.2. Momentos del proceso

A partir de la ecuación (3.24), podemos concluir que variable aleatoria $Z(t) = \log(X(t)/X(s) = x_s)$ tiene distribución normal:

$$Z(t) \rightsquigarrow \mathcal{N}_k(m(s, t); \Phi(s, t)) \quad (3.25)$$

por lo que si denotamos por $\mu' = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, la función generatriz de momentos será:

$$E \left[e^{\mu' Z(t)} \right] = \exp \left\{ \mu' m(s, t) + \frac{1}{2} \mu' \Phi(s, t) \mu \right\} \quad (3.26)$$

Función tendencia

Utilizando la expresión (3.26) podemos determinar los momentos no centrados de cualquier orden r tomando $\mu' = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{r}, 0, \dots, 0)$ en dicha ecuación. Obtengamos en primer lugar la esperanza de la variable $X_i(t)$, seleccionando $\mu' = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)$:

$$\begin{aligned} E \left[e^{\mu' Z(t)} \right] &= E[X_i(t) | X_i(s) = x_{is}] = \exp \left\{ m_i(s, t) + \frac{1}{2} \Phi_{ii}(s, t) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \theta_i \log(x_{is}) + (1 - \theta_i) \frac{a_i}{\beta_i} - \frac{b_{ii}}{4\beta_i} (1 - \theta_i)^2 \right\} = \\ &= x_{is}^{\theta_i} \exp \left\{ (1 - \theta_i) \frac{a_i}{\beta_i} - \frac{b_{ii}}{4\beta_i} (1 - \theta_i)^2 \right\} \end{aligned}$$

por lo que:

$$E[X_i(t)] = x_{is}^{\theta_i} \exp \left\{ (1 - \theta_i) \frac{a_i}{\beta_i} \right\} \exp \left\{ -\frac{b_{ii}}{4\beta_i} (1 - \theta_i)^2 \right\} \quad (3.27)$$

Covarianza

Obtengamos la covarianza entre las variables $X_i(t)$ y $X_j(t)$. Tomando $\mu' = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots, 0)$ en la ecuación (3.26) queda que la

esperanza condicionada conjunta es:

$$\begin{aligned}
 E \left[e^{\mu'Z(t)} \right] &= E[X_i(t)X_j(t)|X(s)] = \\
 &= \exp \left\{ m_i(s, t) + m_j(s, t) + \frac{1}{2} (\Phi_{ii}(s, t) + \Phi_{jj}(s, t) + 2\Phi_{ij}(s, t)) \right\} = \\
 &= x_{is}^{\theta_i} x_{js}^{\theta_j} \exp \left\{ (1 - \theta_i) \frac{a_i}{\beta_i} \right\} \exp \left\{ (1 - \theta_j) \frac{a_j}{\beta_j} \right\} \\
 &\exp \left\{ -\frac{b_{ii}}{4\beta_i} (1 - \theta_i)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{b_{jj}}{4\beta_j} (1 - \theta_j)^2 \right\} \exp \left\{ b_{ij} \frac{1 - \theta_i \theta_j}{\beta_i + \beta_j} \right\}
 \end{aligned}$$

por lo que restando el producto de la esperanza en i y j , la covarianza entre la i -ésima y j -ésima ($i, j=1, \dots, k$) componentes del proceso queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 Cov [X_i(t)X_j(t)] &= x_{is}^{\theta_i} x_{js}^{\theta_j} \exp \left\{ (1 - \theta_i) \frac{a_i}{\beta_i} \right\} \exp \left\{ (1 - \theta_j) \frac{a_j}{\beta_j} \right\} \quad (3.28) \\
 &\exp \left\{ -\frac{b_{ii}}{4\beta_i} (1 - \theta_i)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{b_{jj}}{4\beta_j} (1 - \theta_j)^2 \right\} \left(\exp \left\{ b_{ij} \frac{1 - \theta_i \theta_j}{\beta_i + \beta_j} \right\} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

y por tanto, la varianza de la i -ésima componente es:

$$\begin{aligned}
 Var [X_i(t)|X(s)] &= x_{is}^{2\theta_i} \exp \left\{ 2(1 - \theta_i) \frac{a_i}{\beta_i} \right\} \quad (3.29) \\
 &\exp \left\{ -\frac{b_{ii}}{2\beta_i} (1 - \theta_i)^2 \right\} \left(\exp \left\{ b_{ij} \frac{1 - \theta_i^2}{2\beta_i} \right\} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

3.4.3. Estimación de los parámetros

Consideremos un muestreo discreto del proceso considerado en los instantes (t_0, t_1, \dots, t_n) , es decir, $(X(t_0) = x_{t_0}, X(t_1) = x_{t_1}, \dots, X(t_n) = x_{t_n})$ siendo $X(t_\alpha) = (X_1(t_\alpha), \dots, X_k(t_\alpha))$, y que para simplificar notación escribiremos $X(\alpha) = (X_1(\alpha), \dots, X_k(\alpha))$, al igual que $x_{t_\alpha} = x_\alpha$. La distribución condicionada $X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k(m(s, t); \Phi(s, t))$, por lo que la función de verosimilitud, a través de la cuál estimaremos los parámetros tomando como condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}(x_0, x_1, \dots, x_n, \gamma, A, B) &= p(x_0, t_0) \prod_{\alpha=1}^n p(x_\alpha, t_\alpha | x_{\alpha-1}, t_{\alpha-1}) = \\
 &= (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} \prod_{\alpha=1}^n \left(|\Phi_\alpha|^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^k x_{i\alpha}^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q_\alpha \right\} \right)
 \end{aligned}$$

donde la forma cuadrática Q_α y la matriz Φ_α tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= [\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1})e^{r_\alpha A} - (I - e^{r_\alpha A})A^{-1}\gamma] \Phi_\alpha^{-1} \times \\ &\quad \times [\log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1})e^{r_\alpha A} - (I - e^{r_\alpha A})A^{-1}\gamma] \\ \Phi_\alpha &= \int_0^{r_\alpha} e^{\theta A} B e^{\theta A} d\theta \end{aligned} \quad (3.30)$$

siendo $r_\alpha = t_\alpha - t_{\alpha-1}$. Si consideramos el cambio:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= e^{r_\alpha A} \\ v_\alpha &= \log(x_\alpha) - \log(x_{\alpha-1})\Gamma_\alpha - (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}\gamma \end{aligned}$$

entonces la función de verosimilitud queda como sigue:

$$\mathbb{L}(v_1, \dots, v_n, \gamma, A, B) = (2\pi)^{-\frac{nk}{2}} \prod_{\alpha=1}^n \left(|\Phi_\alpha|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} v_\alpha \right\} \right)$$

y la log-verosimilitud:

$$\log \mathbb{L}(v_1, \dots, v_n, \gamma, A, B) = -\frac{nk}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \log(|\Phi_\alpha|) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} v_\alpha$$

Diferenciando la anterior expresión:

$$\begin{aligned} d \log \mathbb{L} &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \text{tr} \{ \Phi_\alpha^{-1} d\Phi_\alpha \} - \sum_{\alpha=1}^n \text{tr} \{ v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} dv_\alpha \} - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^n \text{tr} \{ v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (d\Phi_\alpha) \Phi_\alpha^{-1} v_\alpha \} = \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \Phi_\alpha^{-1} (v_\alpha v'_\alpha - \Phi_\alpha) \Phi_\alpha^{-1} d\Phi_\alpha \right\} - \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} dv_\alpha \right\} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) & (2) \end{matrix}$$

Para obtener la diferencial anterior, usamos las propiedades del álgebra matricial. Definamos en primer lugar las siguientes matrices:

$$M_\alpha = \Phi_\alpha^{-1}(v_\alpha v'_\alpha - \Phi_\alpha)\Phi_\alpha^{-1}$$

$$N_\alpha = \int_0^{r_\alpha} u e^{uA} B e^{uA} du$$

Calculemos en primer lugar $d\Phi_\alpha$, usando (3.30):

$$\begin{aligned} d\Phi_\alpha &= \int_0^{r_\alpha} (dA) u e^{uA} B e^{uA} du + \int_0^{r_\alpha} u e^{uA} B (dA) e^{uA} du + \\ &+ \int_0^{r_\alpha} e^{uA} (dB) e^{uA} du = (dA) \int_0^{r_\alpha} u e^{uA} B e^{uA} du + \\ &+ \int_0^{r_\alpha} u e^{uA} B e^{uA} du (dA) + \int_0^{r_\alpha} e^{uA} (dB) e^{uA} du = \\ &= (dA) N_\alpha + N_\alpha (dA) + \int_0^{r_\alpha} e^{uA} (dB) e^{uA} du \end{aligned}$$

El primer término de $d \log \mathbb{L}$ queda entonces:

$$\begin{aligned} (1) &= \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \Phi_\alpha^{-1} (v_\alpha v'_\alpha - \Phi_\alpha) \Phi_\alpha^{-1} d\Phi_\alpha \right\} = \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n M_\alpha d\Phi_\alpha \right\} = \\ &= \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n M_\alpha (dA) N_\alpha + M_\alpha N_\alpha (dA) \right\} + \\ &+ \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} M_\alpha e^{uA} (dB) e^{uA} du \right\} = \\ &= tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n M_\alpha N_\alpha (dA) \right\} + \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} e^{uA} M_\alpha e^{uA} du (dB) \right\} \end{aligned}$$

y el segundo término:

$$\begin{aligned}
 (2) &= tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} dv_\alpha \right\} = tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} [-r_\alpha(dA)\Gamma_\alpha(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1}\gamma) - \right. \\
 &\quad \left. -(I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(dA)A^{-1}\gamma + (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(d\gamma)] \right\} = \\
 &= -tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} [-r_\alpha(dA)\Gamma_\alpha(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1}\gamma) + \right. \\
 &\quad \left. +(I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(dA)A^{-1}\gamma] \right\} + \\
 &+ tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(d\gamma) \right\} = \\
 &= -tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1}\gamma)v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} \Gamma_\alpha(dA) + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(dA) \right\} + \\
 &+ tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(d\gamma) \right\} = \\
 &= -tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n [r_\alpha(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1}\gamma)v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} \Gamma_\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}] (dA) \right\} + \\
 &+ tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(d\gamma) \right\}
 \end{aligned}$$

Uniendo ambos términos, la expresión de $d \log \mathbb{L}$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 d \log \mathbb{L} &= tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n [M_\alpha N_\alpha - r_\alpha(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1}\gamma)v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} \Gamma_\alpha + \right. \\
 &\quad \left. + \gamma v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}] (dA) \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} e^{uA} M_\alpha e^{uA} du (dB) \right\} + \tag{3.31} \\
 &\quad + tr \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (I - \Gamma_\alpha)A^{-1}(d\gamma) \right\}
 \end{aligned}$$

Vamos a aprovechar el hecho de que la matriz A sea diagonal para solucionar el problema de estimar dicha matriz, ya que se reduce a la estimación

del vector formado por su diagonal. Si tomamos:

$$A = \sum_{l=1}^k E_l \mathcal{B} e_l'$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{(k \times 1)} &= \text{diag}(A) = (-\beta_1, \dots, -\beta_k)' \\ E_{l(k \times k)} &\begin{cases} E_{l(ij)} = 1 & \forall i, j = l \\ E_{l(ij)} = 0 & \forall i, j \neq l \end{cases} \\ e_{l(1 \times k)}' &= (0, \dots, 0, \overset{(l)}{1}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

por lo que si sustituimos:

$$dA = \sum_{l=1}^k E_l(d\mathcal{B})e_l'$$

en la última expresión obtenida para $d \log \mathbb{L}$ queda:

$$\begin{aligned} d \log \mathbb{L} &= \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n [M_\alpha N_\alpha - r_\alpha (\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1} \gamma) v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} \Gamma_\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \gamma v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_\alpha) A^{-1}] \left(\sum_{l=1}^k E_l(d\mathcal{B}) e_l' \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} e^{uA} M_\alpha e^{uA} du (dB) \right\} + \\ &\quad + \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (I - \Gamma_\alpha) A^{-1} (d\gamma) \right\} = \\ &= \sum_{l=1}^k \text{Vec} \left\{ \left(\sum_{\alpha=1}^n [M_\alpha N_\alpha - r_\alpha (\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1} \gamma) v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} \Gamma_\alpha + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_\alpha) A^{-1}] E_l e_l' \right)' \right\}' d\text{Vec}(\mathcal{B}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Vec} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} e^{uA} M_\alpha e^{uA} du \right\}' (d\text{Vec}(B)) + \\ &\quad + \text{Vec} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \Phi_\alpha^{-1} (I - \Gamma_\alpha) A^{-1} \right\}' d\text{Vec}(\gamma) \end{aligned}$$

Si igualamos a cero se obtienen las ecuaciones de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} e^{u\hat{A}} \hat{M}_\alpha e^{u\hat{A}} du = 0 \\
 (ii) \quad & \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \hat{\Phi}_\alpha^{-1} (I - \hat{\Gamma}_\alpha) \hat{A}^{-1} = 0 \\
 (iii) \quad & \sum_{l=1}^k \sum_{\alpha=1}^n \left\{ \hat{M}_\alpha \hat{N}_\alpha - r_\alpha \hat{\Gamma}_\alpha \hat{\Phi}_\alpha^{-1} v_\alpha (\log(x_{\alpha-1}) + \hat{A}^{-1} \hat{\gamma})' + \right. \\
 & \left. + \hat{A}^{-1} \hat{\Phi}_\alpha^{-1} (I - \hat{\Gamma}_\alpha) \hat{A}^{-1} v_\alpha \hat{\gamma}' \right\} E_l e_l = 0
 \end{aligned}$$

La última ecuación es equivalente a la siguiente:

$$(iii) \sum_{l=1}^k \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \hat{M}_\alpha \hat{N}_\alpha - r_\alpha \hat{\Gamma}_\alpha \hat{\Phi}_\alpha^{-1} v_\alpha (\log(x_{\alpha-1}) + \hat{A}^{-1} \hat{\gamma})' \right\} E_l e_l = 0$$

Llamando:

$$D = \sum_{\alpha=1}^n \hat{M}_\alpha \hat{N}_\alpha - r_\alpha \hat{\Gamma}_\alpha \hat{\Phi}_\alpha^{-1} v_\alpha (\log(x_{\alpha-1}) + \hat{A}^{-1} \hat{\gamma})'$$

esta expresión (iii) queda:

$$D = \sum_{l=1}^k D E_l e_l$$

o lo que es lo mismo:

$$D_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq k$$

En definitiva, se obtiene un sistema de k ecuaciones no lineales con k incógnitas $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$, que debe resolverse usando procedimientos numéricos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_\alpha} e^{u\hat{A}} \hat{M}_\alpha e^{u\hat{A}} du = 0 \\ \sum_{\alpha=1}^n v'_\alpha \hat{\Phi}_\alpha^{-1} (I - \hat{\Gamma}_\alpha) \hat{A}^{-1} = 0 \\ D_{ii} = 0, \quad 1 \leq i \leq k \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Caso particular:

Consideremos el caso en el que la matriz $A_{k \times k}$ (diagonal, formada por los elementos $-\beta_i; i=1, \dots, k$) y la matriz $B_{k \times k}$ de elementos b_{ij} , conmutan, es decir:

$$b_{ij}(\beta_i - \beta_j) = 0, \quad \forall i \neq j$$

Para que lo anterior se verifique, debe cumplirse que $b_{ij} = 0$ ó $\beta_i = \beta_j, \forall i \neq j$. El primer caso no tiene interés práctico, ya que la matriz B sería diagonal por lo que no consideraríamos las covarianzas entre las distintas componentes.

A continuación centramos nuestro estudio en el caso de que $\beta_i = \beta_j \forall i \neq j$. Como la matriz A es diagonal y en la que todos sus elementos son iguales, entonces dicha matriz se puede expresar de la forma $A = -\beta I$ por lo que la estimación de los k elementos de la matriz A , se reduce a la estimación de un solo parámetro, β . Si tenemos en cuenta todo lo anterior y sustituimos en la expresión (3.33), queda:

$$\begin{aligned}
d \log \mathbb{L} &= -d(\beta) \operatorname{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n [M_{\alpha} N_{\alpha} - r_{\alpha}(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1} \gamma) v'_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{-1} \Gamma_{\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + \gamma v'_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_{\alpha}) A^{-1}] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_{\alpha}} e^{uA} M_{\alpha} e^{uA} du (dB) \right\} + \\
&\quad + \operatorname{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{-1} (I - \Gamma_{\alpha}) A^{-1} (d\gamma) \right\} = \\
&= -d(\beta) \operatorname{tr} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n [M_{\alpha} N_{\alpha} - r_{\alpha}(\log(x_{\alpha-1}) + A^{-1} \gamma) v'_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{-1} \Gamma_{\alpha} + \right. \\
&\quad \left. + \gamma v'_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{-1} A^{-1} (I - \Gamma_{\alpha}) A^{-1}] \right\} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Vec} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{r_{\alpha}} e^{uA} M_{\alpha} e^{uA} du \right\}' d \operatorname{Vec}(B) + \\
&\quad + \operatorname{Vec} \left\{ \sum_{\alpha=1}^n v'_{\alpha} \Phi_{\alpha}^{-1} (I - \Gamma_{\alpha}) A^{-1} \right\}' d \operatorname{Vec}(\gamma)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Igualando a cero la anterior diferencial se obtienen las ecuaciones de verosimilitud siguientes:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \sum_{\alpha=1}^n \left(1 + e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^{-1} v_{\alpha} = 0 \\
 (ii) \quad & 2\hat{\beta}\hat{B}^{-1} \left(\sum_{\alpha=1}^n \left(1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^{-1} v_{\alpha}v'_{\alpha} \right) \hat{B}^{-1} - n\hat{B}^{-1} = 0 \\
 (iii) \quad & tr\{D\} = 0
 \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned}
 D = & 2\hat{\beta}\hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=1}^n r_{\alpha}e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}} \left(1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^2 v_{\alpha}v'_{\alpha} - \\
 & -2\hat{\beta}\hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=1}^n r_{\alpha}e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}} \left(1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^{-1} v_{\alpha} \left(\log(x_{\alpha-1}) - \frac{\gamma}{\hat{\beta}} \right)' + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^n r_{\alpha}e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}} \left(1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^{-1} I
 \end{aligned}$$

Con las expresiones (i) y (ii) se extraen los estimadores $\hat{\gamma}$ y \hat{B} que vienen expresados en función de $\hat{\beta}$:

$$\hat{\gamma} = \hat{\beta} \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{1 - e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}}}{1 + e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}}} \right)^{-1} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\log(x_{\alpha}) - e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}}\log(x_{\alpha-1})}{1 + e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}}} \quad (3.34)$$

$$\hat{B} = \frac{2\hat{\beta}}{n} \sum_{\alpha=1}^n \left(1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^{-1} v_{\alpha}v'_{\alpha} \quad (3.35)$$

y la ecuación (iii) de la que extraemos el estimador $\hat{\beta}$, que debe resolverse mediante métodos numéricos queda:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k}{2\hat{\beta}} \sum_{\alpha=1}^n \frac{r_{\alpha}e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}}{1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{r_{\alpha}e^{-r_{\alpha}\hat{\beta}}}{1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}} tr \left\{ \hat{B}^{-1} v_{\alpha} \left(\log(x_{\alpha-1}) - \frac{\gamma}{\hat{\beta}} \right)' \right\} + \\
 & \sum_{\alpha=1}^n \frac{r_{\alpha}e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}}{\left(1 - e^{-2r_{\alpha}\hat{\beta}}\right)^2} tr \left\{ \hat{B}^{-1} v_{\alpha}v'_{\alpha} \right\} = 0
 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Capítulo 4

Proceso de Gompertz univariante homogéneo: inferencia a partir de trayectorias continuas

4.1. Introducción

En este capítulo se analiza el proceso de Gompertz como solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE). De esta forma se va a conseguir la expresión de la función de verosimilitud, a través de la cuál se obtendrán los estimadores de los parámetros asociados al mismo (todo ello, considerando muestreo continuo del proceso). Puede verse el trabajo desarrollado por Ferrante, [9] y por Gutiérrez y otros, [22], que también han aplicado estos resultados a datos reales. En el primer caso, a datos relativos al crecimiento tumoral y en el segundo, a datos de tipo económico.

A continuación se aborda el problema de la aproximación en tiempo discreto de los estimadores, mediante la discretización del intervalo de tiempo y con el objetivo de poder realizar aplicaciones a datos de tipo discreto; en este caso, se han obtenido las funciones tendencia condicionada y no condicionada para ajustar la población de Andalucía durante el periodo 1976 – 2005.

4.2. Definición del proceso como solución de una EDE

Consideremos el proceso de Gompertz univariante como solución de la EDE de Ito:

$$dx(t) = \{\alpha x(t) - \beta x(t) \log x(t)\} dt + \sigma x(t) dw(t) \quad (4.1)$$

con la condición inicial $x(0) = x_0$ y siendo $W = \{w(t), t \in [0, T]\}$ un proceso de Wiener estándar. Vamos a estimar el valor de los parámetros α y β suponiendo una realización continua del proceso $X = \{x(t), t \in [0, T]\}$. El parámetro σ se supone conocido o al menos, si es desconocido se asume como una constante independiente de los parámetros que deseamos estimar. Esta suposición se hace ya que solamente es posible estimar σ a través de una realización discreta del proceso.

Por lo comentado anteriormente es posible reducir el problema de la estimación de los parámetros α y β al caso de:

$$dx(t) = \{\alpha x(t) - \beta x(t) \log x(t)\} dt + dw(t) \quad (4.2)$$

o si denotamos $a(\theta, t, x)$ al drift del proceso y $b(t, x)$ al coeficiente de difusión:

$$dx(t) = a(\theta, t, x)dt + dw(t) \quad (4.3)$$

con $x(0) = x_0$ y $0 \leq t \leq T$.

Supongamos que se ha observado el proceso $X(t)$ en el intervalo de tiempo $[0, T]$; sea \mathbb{P}_θ^T la medida de probabilidad generada por el proceso solución de (4.3) en el conjunto de funciones continuas en $[0, T]$, para el valor del parámetro $\theta, \theta \in \Theta$. Sea \mathbb{P}_W^T la medida de probabilidad inducida por el proceso de Wiener y \mathbb{P}_0^T la medida de probabilidad inducida por Y donde $Y(t) = x_0 + w(t)$.

Si se verifica que:

$$P \left[\int_0^T a(\theta, t, X)^2 dt < \infty \right] = 1$$

$$P \left[\int_0^T a(\theta, t, Y)^2 dt < \infty \right] = 1$$

entonces:

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^T}{d\mathbb{P}_0^T}(X) = \exp \left\{ \int_0^T a(\theta, t, X) dx(t) - \frac{1}{2} \int_0^T a(\theta, t, X)^2 dt \right\} \quad (4.4)$$

En el caso de que el coeficiente de difusión sea distinto de la unidad, se toma en la ecuación (4.4):

$$\frac{a(\theta, t, X)}{b^2(t, X)} = \frac{(\alpha - \beta \log x(t))x(t)}{\sigma^2(x(t))^2}.$$

por lo que queda:

$$\frac{d\mathbb{P}_\theta^T}{d\mathbb{P}_0^T}(X) = \exp \left\{ \int_0^T \frac{a(\theta, t, X)}{(b(t, X))^2} dx(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{a(\theta, t, X)^2}{(b(t, X))^2} dt \right\} \quad (4.5)$$

Con lo anterior, la función de log-verosimilitud para el proceso que nos ocupa tiene la siguiente forma:

$$\ell_T(\theta) = \log \frac{d\mathbb{P}_\theta^T}{d\mathbb{P}_0^T}(X) = \int_0^T \frac{(\alpha - \beta \log x(t))x(t)}{\sigma^2(x(t))^2} dx(t) - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{[(\alpha - \beta \log x(t))x(t)]^2}{\sigma^2(x(t))^2} dt$$

por lo que simplificando:

$$\ell_T(\theta) = \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \int_0^T \frac{\alpha - \beta \log x(t)}{x(t)} dx(t) - \frac{1}{2} \int_0^T [\alpha - \beta \log x(t)]^2 dt \right\} \quad (4.6)$$

4.3. Estimación de los parámetros α y β

4.3.1. Estimación del parámetro α

Tenemos que maximizar la expresión (4.6) en α , por lo que vamos a desarrollarla:

$$\begin{aligned} \ell_T(\theta) &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \alpha \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) - \beta \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left\{ \int_0^T \alpha^2 dt + \beta^2 \int_0^T \log^2 x(t) dt - 2\alpha\beta \int_0^T \log x(t) dt \right\} \right\} = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left\{ \alpha \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) - \beta \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{T}{2} \alpha^2 - \frac{\beta^2}{2} \int_0^T \log^2 x(t) dt + \alpha\beta \int_0^T \log x(t) dt \right\} \end{aligned}$$

derivando respecto al parámetro e igualando a cero:

$$\frac{\partial \ell_T}{\partial \alpha} = \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) - \alpha T + \beta \int_0^T \log x(t) dt = 0$$

por lo que el estimador máximo-verosimil para el parámetro α desconocido es:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) + \beta \int_0^T \log x(t) dt \right\} \quad (4.7)$$

4.3.2. Estimación del parámetro β

Realizamos de nuevo la maximización de la expresión (4.6) en β , por lo que derivamos en el desarrollo de la misma:

$$\frac{\partial \ell_T}{\partial \beta} = - \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) - \beta \int_0^T \log^2 x(t) dt + \alpha \int_0^T \log x(t) dt = 0$$

Sustituimos en la ecuación anterior, la expresión del estimador del parámetro α (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_T}{\partial \beta} = & - \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) - \beta \int_0^T \log^2 x(t) dt + \\ & + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log x(t) dt + \frac{\beta}{T} \left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 = 0 \end{aligned}$$

con lo que aparece el estimador máximo-verosimil para el parámetro β :

$$\hat{\beta} = \frac{T \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) - \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log x(t) dt}{\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt} \quad (4.8)$$

Con todo ello, podemos sustituir la expresión del estimador máximo-verosimil de β (4.8) en (4.7), quedando:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} = & \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) + \left\{ \frac{T \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) - \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log x(t) dt}{\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt} \right\} \int_0^T \log x(t) dt \right\} = \\ & = \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log^2 x(t) dt + \right. \\ & + \left. \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log x(t) dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 \right] / \\ & / \left[\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] \end{aligned}$$

y simplificando la expresión anterior:

$$\hat{\alpha} = \frac{\int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log x(t) dt - \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) \int_0^T \log^2 x(t) dt}{\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt} \quad (4.9)$$

4.4. Aproximación en tiempo discreto de los estimadores $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$

En la inmensa mayoría de las situaciones reales, los estimadores de máxima verosimilitud obtenidos no podrán ser evaluados ya que no se dispondrá de realizaciones continuas del proceso $X = \{x(t), t \in [0, T]\}$, sino de mediciones en tiempo discreto. Por este motivo es necesario encontrar una aproximación de la expresión de los mismos, que pueda aplicarse a datos discretos. Supongamos entonces, que se dispone de mediciones del proceso en:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

Utilizamos la *fórmula de Ito* y el método del trapecoide para aproximar las integrales estocásticas a integrales de Riemann. Consideremos la siguiente EDE:

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dw(t)$$

y sea la función $y_t = g(t, x(t))$, entonces la diferencial estocástica de y_t aplicando la fórmula de Ito queda:

$$dy_t = \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial x(t)} dx(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, x(t))}{\partial x(t)^2} (dx(t))^2$$

ó

$$dy_t = \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial x(t)} dx(t) + \frac{1}{2} b^2(t, x(t)) \frac{\partial^2 g(t, x(t))}{\partial x(t)^2} dt \quad (4.10)$$

por integración en (4.10) se tiene:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dy_s = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial s} ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial x(s)} dx(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b^2(s, x(s)) \frac{\partial^2 g(s, x(s))}{\partial x(s)^2} ds \end{aligned}$$

por lo que:

$$y_t - y_{t_0} = \int_{t_0}^t \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial s} ds + \int_{t_0}^t \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial x(s)} dx(s) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b^2(s, x(s)) \frac{\partial^2 g(s, x(s))}{\partial x(s)^2} ds$$

y así aparece la expresión que utilizaremos más adelante:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial x(s)} dx(s) = \\ & = y_t - y_{t_0} - \int_{t_0}^t \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial s} ds - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b^2(s, x(s)) \frac{\partial^2 g(s, x(s))}{\partial x(s)^2} ds \end{aligned}$$

En el caso de los estimadores de α, β , tenemos que transformar dos integrales estocásticas. La primera es:

$$(i) \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial x(s)} = \frac{\log x(s)}{x(s)} \Rightarrow g(s, x(s)) = \frac{1}{2} \log^2 x(s); \frac{\partial^2 g(s, x(s))}{\partial x^2(s)} = \frac{1 - \log x(s)}{x^2(s)}$$

Como $t_0 = 0$ y $t = T$, queda:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{\log x(t)}{x(t)} dx(t) = \\ & = \left\{ \frac{1}{2} \log^2 x(T) - \frac{1}{2} \log^2 x(0) \right\} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 x^2(t) \frac{1 - \log x(t)}{x^2(t)} dt = \\ & = \frac{1}{2} \{ \log^2 x(T) - \log^2 x(0) - \sigma^2 T \} + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \log x(t) dt \end{aligned}$$

y la segunda:

$$(ii) \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g(s, x(s))}{\partial x(s)} = \frac{1}{x(s)} \Rightarrow g(s, x(s)) = \log x(s); \frac{\partial^2 g(s, x(s))}{\partial x^2(s)} = -\frac{1}{x^2(s)}$$

Para $t_0 = 0$ y $t = T$:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{1}{x(t)} dx(t) = \\ & = \{\log x(T) - \log x(0)\} - 0 - \frac{1}{2} \int_0^T \sigma^2 x^2(t) \left\{ -\frac{1}{x^2(t)} \right\} dt = \\ & = \log \left\{ \frac{x(T)}{x(0)} \right\} + \frac{\sigma^2 T}{2} \end{aligned}$$

Sustituimos entonces la expresión de las integrales **(i)** y **(ii)** en los estimadores de α (4.9) y β (4.8):

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_T &= \left[\left\{ \frac{1}{2} \{\log^2 x(T) - \log^2 x(0) - \sigma^2 T\} + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \log x(t) dt \right\} \int_0^T \log x(t) dt - \right. \\ & - \left. \left\{ \log \left\{ \frac{x(T)}{x(0)} \right\} + \frac{\sigma^2 T}{2} \right\} \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] / \left[\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] = \\ & = \left[\frac{\sigma^2}{2} \left\{ \left(\frac{\log^2 x(T) - \log^2 x(0)}{\sigma^2} - T \right) + \int_0^T \log x(t) dt \right\} \int_0^T \log x(t) dt - \right. \\ & \quad \left. \left(\log \left\{ \frac{x(T)}{x(0)} \right\} + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] / \\ & \quad / \left[\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_T &= \left[T \left\{ \frac{1}{2} \{\log^2 x(T) - \log^2 x(0) - \sigma^2 T\} + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^T \log x(t) dt \right\} - \right. \\ & \quad - \left. \left\{ \log \left\{ \frac{x(T)}{x(0)} \right\} + \frac{\sigma^2 T}{2} \right\} \int_0^T \log x(t) dt \right] / \\ & \quad \left[\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{T}{2} \{ \log^2 x(T) - \log^2 x(0) \} - \frac{\sigma^2 T^2}{2} + \frac{T\sigma^2}{2} \int_0^T \log x(t) dt - \right. \\
 &\quad \left. - \log \left\{ \frac{x(T)}{x(0)} \right\} \int_0^T \log x(t) dt - \frac{\sigma^2 T}{2} \int_0^T \log x(t) dt \right] / \\
 &\quad \left[\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt \right] = \\
 &= \frac{\frac{T}{2} \{ \log^2 x(T) - \log^2 x(0) \} - \frac{\sigma^2 T^2}{2} - \log \left\{ \frac{x(T)}{x(0)} \right\} \int_0^T \log x(t) dt}{\left\{ \int_0^T \log x(t) dt \right\}^2 - T \int_0^T \log^2 x(t) dt}
 \end{aligned}$$

Se pueden aproximar las expresiones anteriores para una discretización del intervalo $[0, T]$, dividido en n intervalos de igual amplitud, ya que la información disponible será:

$$\{(t_i, x(t_i)); i = 0, 1, \dots, n\}$$

por lo que el incremento en el tiempo considerado es $\Delta = (t_{i+1} - t_i) = T/n$. Para realizar dicha aproximación utilizamos la *fórmula trapezoidal*:

$$\int_0^T f(x(t)) dt \approx \Delta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x(t_i)) + f(x(t_{i+1}))}{2}$$

y en el caso de que los intervalos tengan amplitud igual a la unidad ($\Delta = 1$):

$$\int_0^T f(x(t)) dt \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x(t_i)) + f(x(t_{i+1}))}{2}$$

Otras aproximaciones muy utilizadas son la *regla de Simpson*:

$$\int_0^T f(x(t)) dt \approx \frac{\Delta}{3} \left\{ f(x(t_0)) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x(t_{2i})) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x(t_{2i-1})) + f(x(t_n)) \right\}$$

y la *suma de Riemann*, con diversas posibilidades de cálculo:

$$\mathbb{S} = \sum_{i=1}^n (x(t_i) - x(t_{i-1})) \phi_i$$

donde la función ϕ_i , puede tomarse de varias formas:

$$\begin{cases} \text{Izquierda} \mapsto \phi_i = f(x(t_{i-1})) \\ \text{Derecha} \mapsto \phi_i = f(x(t_i)) \\ \text{Supremo} \mapsto \phi_i = \sup[f(x(t_{i-1})), f(x(t_i))] \\ \text{Ínfimo} \mapsto \phi_i = \inf[f(x(t_{i-1})), f(x(t_i))] \end{cases}$$

4.5. Estimación del parámetro σ^2

En Ferrante [9] se ofrece una estimación del coeficiente de difusión, obtenida aprovechando las propiedades de la variación cuadrática asociada al proceso:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (x(t_{i+1}) - x(t_i))^2}{\sum_{i=0}^{n-1} x(t_i)^2 (t_{i+1} - t_i)} \quad (4.11)$$

Otros métodos de aproximación que proporcionan mejores resultados al estimar el coeficiente de difusión pueden encontrarse en Katsamaki y Skiadas, [33], y son los siguientes:

1^{er} método

Suponiendo que los parámetros del drift del proceso:

$$dx(t) = \{\alpha - \beta \log x(t)\} x(t)dt + \sigma x(t)dw(t)$$

son conocidos y usando la fórmula de Ito podemos expresar:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{x(t)}\right) &= -\frac{1}{(x(t))^2}dx(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(x(t))^3}\right)(dx(t))^2 = \\ &= -\frac{dx(t)}{(x(t))^2} + \frac{1}{x(t)}\frac{(dx(t))^2}{(x(t))^2} = -\frac{dx(t)}{(x(t))^2} + \frac{\sigma^2 dt}{x(t)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t)d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -\frac{dx(t)}{x(t)} + \sigma^2 dt \end{aligned} \quad (4.12)$$

ya que si denotamos $\mu = \alpha - \beta \log x(t)$:

$$\begin{aligned} (d(x(t)))^2 &= \mu^2(x(t))^2(dt)^2 + \sigma^2(x(t))^2(dw(t))^2 - 2\mu\sigma(x(t))^2 dt dw(t) = \\ &= 0 + \sigma^2(x(t))^2 dt - 0 \Rightarrow \frac{(dx(t))^2}{(x(t))^2} = \sigma^2 dt \end{aligned}$$

Suponiendo las siguientes aproximaciones de las diferencias entre los instantes $t - 1$ y t :

$$d(x(t)) \cong x(t) - x(t-1) \quad ; \quad d\left(\frac{1}{x(t)}\right) \cong \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t-1)} \quad (4.13)$$

y despejando σ en (4.12) queda la siguiente aproximación de $\hat{\sigma}$:

$$\hat{\sigma}_t = \left| -\frac{x(t) - x(t-1)}{\{x(t)x(t-1)t\}^{\frac{1}{2}}} \right| \quad ; \quad \hat{\sigma}_T = \sum_{t=1}^T \left| -\frac{x(t) - x(t-1)}{\{x(t)x(t-1)T\}^{\frac{1}{2}}} \right| \quad (4.14)$$

2º método

Recurriendo de nuevo la fórmula de Ito:

$$d(\log(x(t))) = \frac{d(x(t))}{x(t)} - \frac{1}{2} \frac{(d(x(t)))^2}{(x(t))^2} \quad (4.15)$$

y utilizando la ecuación diferencial estocástica del proceso, tenemos:

$$\frac{d(x(t))}{x(t)} = \mu dt + \sigma d(w(t)) \quad ; \quad (d(x(t)))^2 = \sigma^2(x(t))^2 dt$$

por lo que sustituyendo lo anterior en (4.15) y tomando $d(\log(x(t))) \cong \log(x(t)) - \log(x(t-1))$ queda:

$$\hat{\sigma}_t = \left| \frac{\log(x(t)) - \log(x(t-1))}{t^{\frac{1}{2}}} \right| \quad ; \quad \hat{\sigma}_T = \sum_{t=1}^T \left| \frac{\log(x(t)) - \log(x(t-1))}{T^{\frac{1}{2}}} \right| \quad (4.16)$$

3er método

Anteriormente se ha visto que:

$$\frac{d(x(t))}{x(t)} = \mu dt + \sigma d(w(t)) \quad ; \quad \left(\frac{d(x(t))}{x(t)} \right)^2 = \sigma^2 dt$$

por lo que, considerando $dx(t) \cong x(t) - x(t-1)$:

$$\sigma(dt)^{\frac{1}{2}} = \frac{d(x(t))}{x(t)}$$

la aproximación de σ buscada es:

$$\hat{\sigma}_t = \left| \frac{x(t) - x(t-1)}{x(t)t^{\frac{1}{2}}} \right| \quad ; \quad \hat{\sigma}_T = \sum_{t=1}^T \left| \frac{x(t) - x(t-1)}{x(t)T^{\frac{1}{2}}} \right| \quad (4.17)$$

4º método

Otra aproximación utilizada por Gutiérrez, [17], basada en la extensión del procedimiento propuesto por Chesney y Elliot, [7] y que como veremos, es la que mejores estimaciones del parámetro proporciona, parte de lo siguiente (visto en el 1^{er} método):

$$d\left(\frac{1}{x(t)}\right) = -\frac{dx(t)}{(x(t))^2} + \frac{\sigma^2 dt}{x(t)}$$

y utilizando las aproximaciones (4.13):

$$\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{x(t-1)} = -\frac{x(t) - x(t-1)}{(x(t))^2} + \frac{\sigma^2}{x(t)}(t - t - 1)$$

Haciendo operaciones en la expresión anterior y con $t - t - 1 = 1$, queda:

$$\hat{\sigma}_T = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \frac{|x(t) - x(t-1)|}{(x(t)x(t-1))^{\frac{1}{2}}} \quad (4.18)$$

4.6. Simulación en el proceso Gompertz

Recurrimos a la solución de la ecuación diferencial estocástica asociada al proceso:

$$x(t) = \exp \left\{ \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} + \left(\log(x(0)) - \frac{\alpha - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \right) e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dw(s) \right\}$$

El intervalo $[0, T]$ está dividido en n intervalos de igual amplitud $\Delta = (t_{i+1} - t_i) = T/n$ con $t_i = i \cdot \Delta$; $i = 0, 1, \dots, n$. Puede aproximarse la última integral de la ecuación anterior como sigue:

$$\int_0^t e^{-\beta(t-s)} dw(s) = \sum_{i=1}^n e^{-\beta(t_i - t_{i-1})} (w(t_{j+1}) - w(t_j))$$

de forma que:

$$\int_0^t e^{-\beta(t-s)} dw(s) \rightsquigarrow \mathcal{N} \left(0, \int_0^t e^{-2\beta(t-\theta)} d\theta \right)$$

ó

$$\int_0^t e^{-\beta(t-s)} dw(s) \rightsquigarrow \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=1}^n e^{-2\beta(t_i-t_{i-1})} (t_i - t_{i-1}) \right)$$

Vamos a realizar la simulación de una trayectoria del proceso de Gompertz en $[0, T]$ considerando una discretización equidistante de dicho intervalo, tomando $T = 20$; $\Delta = 0,1$; $\sigma = 0,1$; $\alpha = 1$; $\beta = 1$ y comenzando en $x_0 = 2$. La simulación resultante es la siguiente:

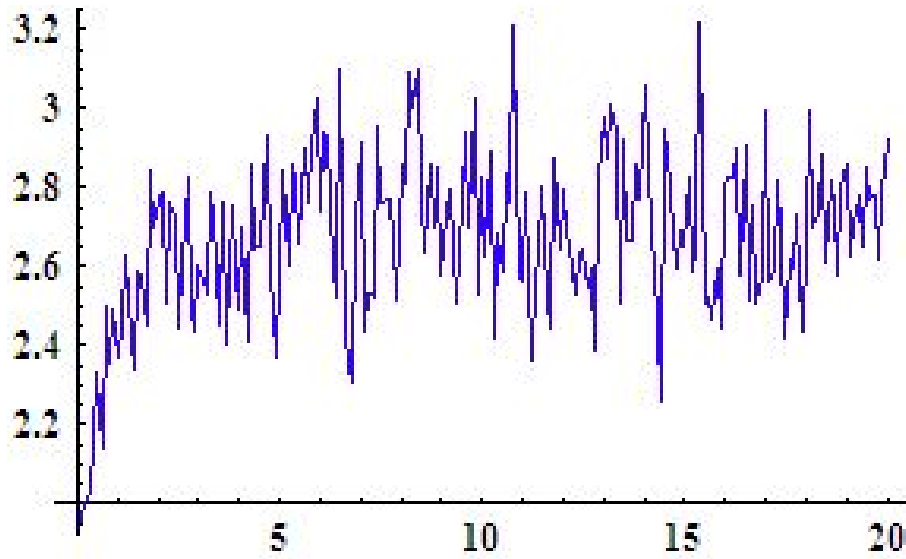


Figura 4.1: Trayectoria simulada del proceso de Gompertz

En cuanto a la estimación de parámetros, la evolución del estimador del parámetro σ según las cuatro aproximaciones vistas anteriormente es la siguiente:

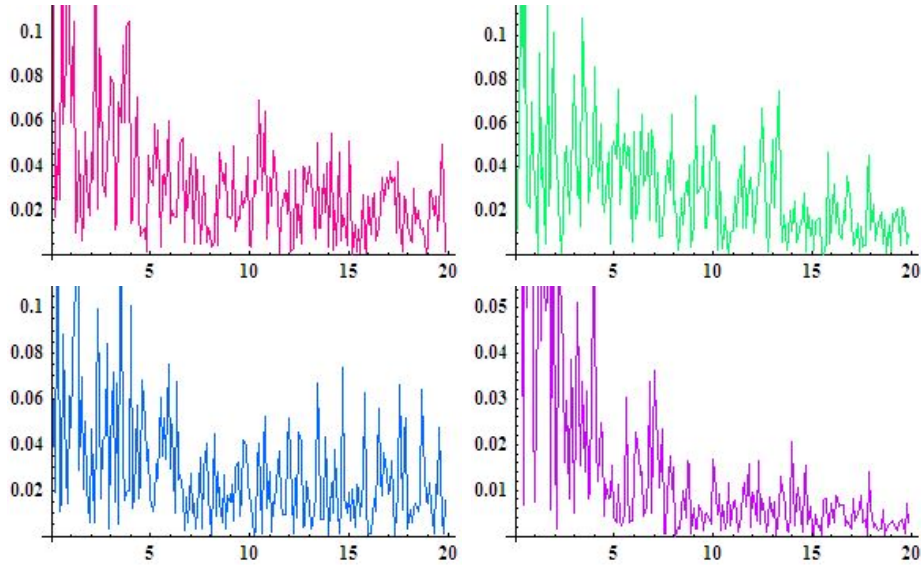
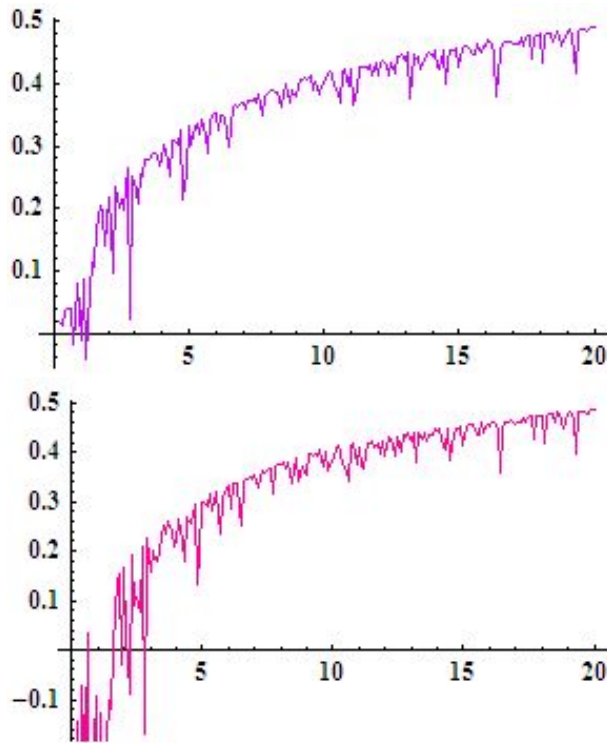


Figura 4.2: Evolución de la estimación de σ según los cuatro métodos y las estimaciones obtenidas en todos los casos son:

$$\hat{\sigma}_T^{(1)} = 1,16578 ; \hat{\sigma}_T^{(2)} = 1,14614 ; \hat{\sigma}_T^{(3)} = 1,04849 ; \hat{\sigma}_T^{(4)} = 0,08575$$

Como puede apreciarse, es el último método el que proporciona una mejor estimación del parámetro σ . La evolución de los estimadores de los parámetros asociados al drift del proceso, tomando este último método como aproximación de σ , con el objetivo de poder sustituir su valor estimado en las expresiones de los parámetros α y β , es la siguiente:

Figura 4.3: Evolución de las estimaciones de α, β

de forma que las estimaciones de los parámetros han sido:

$$\hat{\beta}_T = 0,48564 ; \hat{\alpha}_T = 0,49182$$

4.7. Estimación de los parámetros del proceso de Gompertz asociado al crecimiento de la población

La información obtenida del Instituto de Estadística de Andalucía (IEA) sobre el comportamiento sociodemográfico de la población andaluza se muestra en la siguiente tabla:

Año	Población 1/1	Año	Población 1/1
1976	6159058	1977	6203459
1978	6254757	1979	6309483
1980	6367089	1981	6441247
1982	6513412	1983	6584900
1984	6669467	1985	6743617
1986	6801819	1987	6844709
1988	6868910	1989	6883737
1990	6903022	1991	6941576
1992	6983679	1993	7030137
1994	7071471	1995	7106734
1996	7130637	1997	7153392
1998	7236459	1999	7305117
2000	7340052	2001	7403968
2002	7478432	2003	7606848
2004	7687518	2005	7849799

Cuadro 4.1: Población observada en Andalucía.1976-2005

En el siguiente gráfico se muestra la evolución de la población andaluza, en el periodo 1976-2003; los valores observados en los años 2004 y 2005 se van a utilizar para realizar predicciones, por lo que no se utilizan en la obtención de los estimadores de los parámetros:

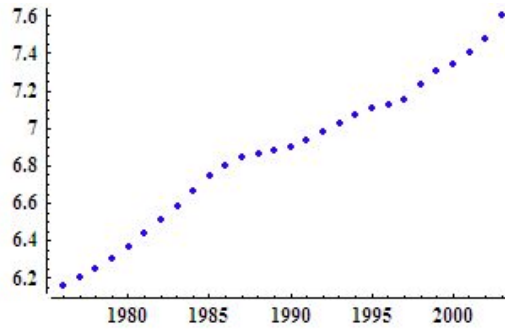


Figura 4.4: Evolución de la población en Andalucía (1976-2003)

Si estimamos los parámetros del drift previa aproximación de σ a partir del cuarto método (en el que $\hat{\sigma}_T = 0,00755343$), obtenemos las siguientes estimaciones:

$$\hat{\beta}_T = -0,00363771$$

$$\hat{\alpha}_T = 0,000814662$$

Si analizamos la función tendencia no condicionada del proceso tomando como referencia los parámetros anteriores obtenemos lo siguiente:

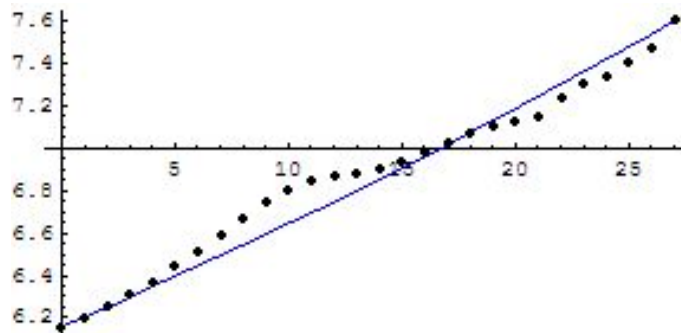


Figura 4.5: Datos observados y función tendencia

Como se aprecia, aparecen algunas desviaciones respecto a la tendencia, aunque sí recoge el comportamiento global del crecimiento poblacional, por lo que podría utilizarse para realizar predicciones de población a medio plazo. Obtenemos la tendencia no condicionada:

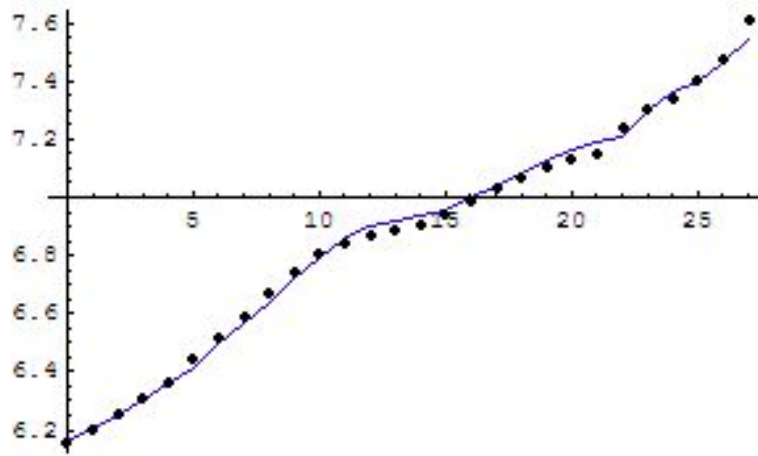


Figura 4.6: Datos observados y función tendencia condicionada

Los datos que se han obtenido aparecen en la siguiente tabla:

Año	Observaciones	FT	FTC
1976	6159058	6159058	6159058
1977	6203459	6205060	6205060
1978	6254757	6251577	6249957
1979	6309483	6298614	6301828
1980	6367089	6346179	6357168
1981	6441247	6394279	6415422
1982	6513412	6442922	6490417
1983	6584900	6492114	6563399
1984	6669467	6541865	6635700
1985	6743617	6592181	6721232
1986	6801819	6643070	6796231
1987	6844709	6694540	6855102
1988	6868910	6746599	6898486
1989	6883737	6799256	6922966
1990	6903022	6852519	6937964
1991	6941576	6906397	6957472
1992	6983679	6960897	6996472
1993	7030137	7016030	7039063
1994	7071471	7071803	7086061
1995	7106734	7128226	7127876
1996	7130637	7185308	7163550
1997	7153392	7243059	7187732
1998	7236459	7301488	7210753
1999	7305117	7360604	7294793
2000	7340052	7420418	7364258
2001	7403968	7480940	7399604
2002	7478432	7542180	7467275
2003	7606848	7604148	7539620

Cuadro 4.2: Población observada y funciones tendencia

Las predicciones obtenidas a partir de la tendencia condicionada para los años 2004 y 2005 son las siguientes:

Año	Observación	Predicción
2004	7687518	7669560
2005	7849799	7751200

Realicemos una simulación del proceso de Gompertz utilizando las estimaciones de los parámetros calculadas para este modelo. Se han obtenido 100 trayectorias del proceso y se han representado gráficamente, incluyendo además los valores de la tendencia condicionada. El resultado es el siguiente:

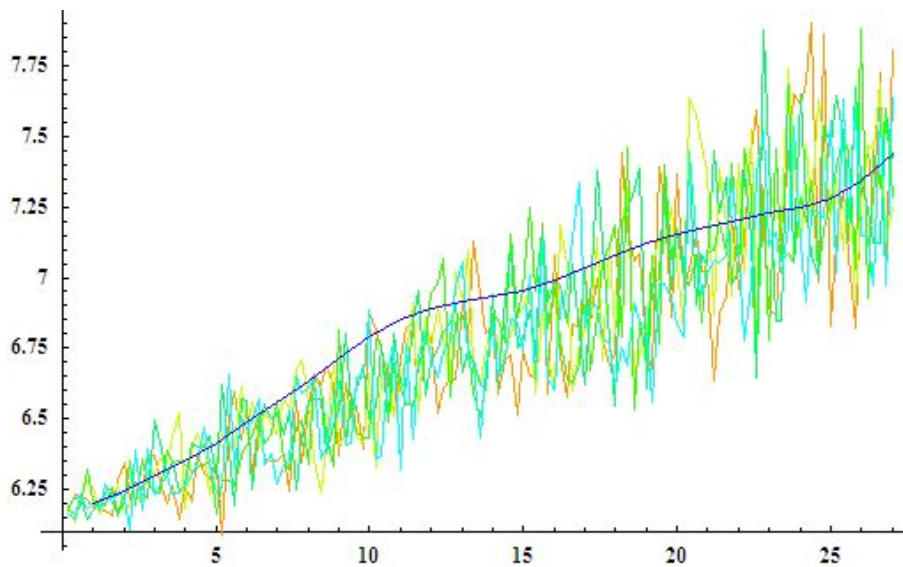


Figura 4.7: Simulación del modelo de población

Como puede verse, la tendencia condicionada obtenida para este caso real se encuentra dentro del haz de trayectorias simuladas, lo que nos lleva a concluir que la inferencia realizada sobre este proceso es adecuada.

Capítulo 5

Proceso de difusión Gompertz univariante no homogéneo: Inferencia mediante muestreo discreto

5.1. Introducción

En algunos estudios, el proceso de Gompertz modeliza adecuadamente una situación pero a veces es necesario mejorar el modelo introduciendo en él, variables externas que pueden ayudar a explicar su comportamiento, es decir, pueden incluirse en la tendencia del proceso de Gompertz univariante "factores exógenos" que afecten al comportamiento de la variable endógena. En principio serán dos funciones continuas que dependerán de ciertos parámetros.

Son varios los autores que han estudiado este proceso considerando factores exógenos. Por ejemplo en [20], se aborda el problema de la inferencia en el caso no homogéneo. Además se ha aplicado a numerosas situaciones reales, sobre todo a variables de tipo económico como el consumo eléctrico, precio de la vivienda, etc.([18],[30]).

En este capítulo se introduce dicho proceso no homogéneo via sus ecuaciones de difusión y se plantea la dificultad de la obtención de los estimadores de los parámetros. Seguidamente se particulariza para una cierta forma de las funciones que afectan al coeficiente de tendencia, con lo que se consiguen

las funciones tendencia y las ecuaciones de verosimilitud asociadas. Todo el desarrollo teórico se aplica también al caso de la población andaluza, tomando algunas variables de tipo socio-demográfico como exógenas.

5.2. Concepto y caracterización

Sea $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de difusión unidimensional, \mathbb{R} -valuado y con función de distribución de transición:

$$P(y, t|x, s) = P(X(t) = y|X(s) = x)$$

Si consideramos como momentos infinitesimales (coeficientes de tendencia y de difusión) del proceso respectivamente:

$$a(t, x) = g(t)x - h(t)x \log(x) \quad , \quad b(t, x) = \sigma^2 x^2$$

con h y g dos funciones continuas y paramétricas, es decir, que pueden depender de cierto número de parámetros y $\sigma > 0$, se tiene el proceso de difusión de Gompertz unidimensional con factores exógenos, con las siguientes ecuaciones de difusión:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} ((g(t)y - h(t)y \log(y))p) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma^2 y^2 p) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -((g(s)x - h(x)x \log(x))) \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{2} (\sigma^2 x^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

donde p es la función de densidad de transición.

5.3. Densidad de transición

El proceso $Y(t) = \log(X(t))$, vendrá caracterizado por los momentos infinitesimales:

$$\tilde{a}(t, x) = k(t) - h(t)x \quad , \quad \tilde{b}(t, x) = \sigma^2$$

donde:

$$k(t) = g(t) - \frac{\sigma^2}{2}$$

A continuación, utilizamos el *teorema de Ricciardi*, [45] que permite obtener la probabilidad de transición del proceso $Y(t)$ mediante una transformación al proceso Wiener. En el caso que nos ocupa tendremos que:

$$k(s) - h(s)x = \frac{\sigma}{2} \left\{ c_1(s) + \int^x \frac{c_2(s)\sigma^2}{(\sigma^2)^{\frac{3}{2}}} dz \right\}$$

$$k(s) - h(s)x = \frac{\sigma}{2}c_1(s) + \frac{c_2(s)}{2}x$$

por lo que las funciones buscadas para que se verifique la condición necesaria y suficiente (existencia de las mismas) son:

$$c_1(s) = \frac{2}{\sigma}k(s) \quad , \quad c_2(s) = -2h(s)$$

Con ellos, la transformación adecuada es:

$$\begin{aligned} \Psi(x, s) &= \exp \left[-\frac{1}{2} \int^s -2h(z)dz \right] \int^x [\sigma^2]^{-\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{\sigma} \int^s \frac{2}{\sigma} k(\theta) \exp \left[-\frac{1}{2} \int^\theta -2h(z)dz \right] d\theta = \\ &= \frac{x}{\sigma} e^{\int^s h(z)dz} - \frac{1}{\sigma} \int^s k(\theta) e^{\int^\theta h(z)dz} d\theta \\ \Phi(s) &= \int^s \exp \left[-\int^\theta -2h(z)dz \right] d\theta = \\ &= \int^s e^{2 \int^\theta h(z)dz} d\theta \end{aligned}$$

Así que la probabilidad de transición del proceso $Y(t)$ puede hallarse utilizando esta transformación de la siguiente forma:

$$P(y, t|x, s) = (2\pi[\Phi(t) - \Phi(s)])^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{[\Psi(y, t) - \Psi(x, s)]^2}{2[\Phi(t) - \Phi(s)]} \right\} \frac{\partial \Psi(y, t)}{\partial y}$$

por lo que la probabilidad de transición del proceso $Y(t)$ es la densidad de una distribución normal unidimensional $\mathcal{N}(m(s, t), v(s, t))$ siendo:

$$m(s, t) = \log(x) e^{-\int_s^t h(z)dz} + e^{-\int_s^t h(z)dz} \int_s^t k(\theta) e^{\int_s^\theta h(z)dz} d\theta$$

$$v(s, t) = \sigma^2 e^{-2 \int_s^t h(z)dz} \int_s^t e^{2 \int_s^\theta h(z)dz} d\theta$$

a partir de lo cuál se deduce que la distribución de $X(t)$ es lognormal $\Lambda(m(s, t), v(s, t))$ con función de densidad de transición:

$$P(y, t|x, s) = \left(2\pi\sigma^2 e^{-2\int_s^t h(z)dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta \right)^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{\left[\log(y) - \log(x) e^{-\int_s^t h(z)dz} - e^{-\int_s^t h(z)dz} \int_s^t k(\theta) e^{-\int_\theta^t h(z)dz} d\theta \right]^2}{\sigma^2 e^{-2\int_s^t h(z)dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta} \right)$$

5.4. Momentos del proceso

La variable aleatoria $X(t)/X(s) = x$ sigue una distribución lognormal $\Lambda(m(s, t), v(s, t))$, así que los momentos condicionados de orden r de las variables endógenas son:

$$\begin{aligned} E(X^r(t)/X(s) = x) &= \exp \left\{ rm(s, t) + \frac{r^2}{2} v(s, t) \right\} = \\ &= \exp \left\{ r \log(x) e^{-\int_s^t h(z)dz} + r e^{-\int_s^t h(z)dz} \int_s^t k(\theta) e^{-\int_\theta^t h(z)dz} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2 \sigma^2}{2} e^{-2\int_s^t h(z)dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta \right\} \end{aligned}$$

Tomando $r = 1$ obtenemos inmediatamente el momento condicionado de primer orden (función tendencia condicionada):

$$\begin{aligned} E(X(t)/X(s) = x) &= \exp \left\{ \log(x) e^{-\int_s^t h(z)dz} + e^{-\int_s^t h(z)dz} \int_s^t k(\theta) e^{-\int_\theta^t h(z)dz} d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2} e^{-2\int_s^t h(z)dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z)dz} d\theta \right\} \end{aligned}$$

y la varianza condicionada del proceso queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Var}(X(t)/X(s) = x) = \\
 & = \exp \left\{ 2 \log(x) e^{-\int_s^t h(z) dz} + 2 e^{-\int_s^t h(z) dz} \int_s^t k(\theta) e^{-\int_\theta^t h(z) dz} d\theta + \right. \\
 & \quad \left. + 2\sigma^2 e^{-2\int_s^t h(z) dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z) dz} d\theta \right\} - \\
 & - \exp \left\{ 2 \log(x) e^{-\int_s^t h(z) dz} + 2 e^{-\int_s^t h(z) dz} \int_s^t k(\theta) e^{-\int_\theta^t h(z) dz} d\theta + \right. \\
 & \quad \left. + \sigma^2 e^{-2\int_s^t h(z) dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z) dz} d\theta \right\} = \\
 & = \exp \left\{ 2 \log(x) e^{-\int_s^t h(z) dz} + 2 e^{-\int_s^t h(z) dz} \int_s^t k(\theta) e^{-\int_\theta^t h(z) dz} d\theta + \right. \\
 & \quad \left. + \sigma^2 e^{-2\int_s^t h(z) dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z) dz} d\theta \right\} \\
 & \quad \left(\exp \left\{ \sigma^2 e^{-2\int_s^t h(z) dz} \int_s^t e^{2\int_s^\theta h(z) dz} d\theta \right\} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

5.5. Estimación de los parámetros

Para encontrar estimadores de los parámetros del proceso, utilizamos el método de máxima verosimilitud y consideramos muestreo discreto, es decir, una realización del mismo en los instantes (t_0, t_1, \dots, t_n) :

$$X(t_0) = x_0; X(t_1) = x_1; \dots; X(t_n) = x_n$$

con la condición inicial $P(X(t_0) = x_0) = 1$. Entonces, denotamos por:

$$m_\alpha = \log(x_{\alpha-1}) e^{-\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(z) dz} - e^{-\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(z) dz} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} k(\theta) e^{-\int_\theta^{t_\alpha} h(z) dz} d\theta$$

la función de verosimilitud asociada será:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{L}(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \prod_{\alpha=1}^n P(x_\alpha, t_\alpha | x_{\alpha-1}, t_{\alpha-1}) = \\
 &= \prod_{\alpha=1}^n \left(2\pi\sigma^2 e^{-2\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(z) dz} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2\int_{t_{\alpha-1}}^\theta h(z) dz} d\theta \right)^{-\frac{1}{2}} x_\alpha^{-1} \\
 & \quad \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \frac{[\log(x_\alpha) - m_\alpha]^2}{e^{-2\int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(z) dz} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2\int_{t_{\alpha-1}}^\theta h(z) dz} d\theta} \right)
 \end{aligned}$$

y tomando logaritmos en la expresión anterior, nos queda finalmente:

$$\begin{aligned} \log(\mathbb{L})(x_0, x_1, \dots, x_n) &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log(\sigma^2) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n \log \left(e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(z) dz} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^\theta h(z) dz} d\theta \right) - \sum_{\alpha=1}^n \log(x_\alpha) \\ &- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{\alpha=1}^n \frac{[\log(x_\alpha) - m_\alpha]^2}{e^{-2 \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} h(z) dz} \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} e^{2 \int_{t_{\alpha-1}}^\theta h(z) dz} d\theta} \end{aligned}$$

Lógicamente para poder minimizar esta función respecto a los parámetros desconocidos, necesitamos conocer la forma de las funciones h y g ; esto no siempre es posible, ya que implicaría conocer la función que mejor se ajusta a los factores exógenos introducidos en el proceso y que a su vez, tenga una integral que pueda ser resuelta. Nafidi, en [41] analiza la inclusión de factores exógenos tomando como $h(t) = \left(\frac{\theta}{1+t} \right)_{\theta > -\frac{1}{2}}$ y $g(t) = \frac{\sigma^2}{2} + h(t)$. A pesar de la simplicidad de estas expresiones, obtiene ecuaciones que deben ser resueltas mediante métodos numéricos.

Por este motivo, se plantea la posibilidad de realizar inferencia considerando casos particulares, en los que la funciones h y g sean de tal forma, que sea posible trabajar analíticamente con la función de verosimilitud asociada.

5.6. Caso particular del proceso de Gompertz no homogéneo

Supongamos que en el drift del proceso de difusión analizado anteriormente, las funciones h y g tienen la siguiente forma:

$$h(t) = \beta \quad , \quad g(t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i g_i(t) \quad (5.3)$$

donde las variables exógenas $g_i(t)$ son funciones continuas en $[t_0, T]$. De esta forma, la ecuación diferencial estocástica que caracteriza al proceso queda:

$$dx(t) = \{g(t)x(t) - \beta x(t) \log x(t)\} dt + \sigma x(t) dw(t) \quad (5.4)$$

por lo que tenemos $q + 3$ parámetros a estimar: β , σ , α_i , $i = 0, \dots, q$.

5.6.1. Densidad de transición

Recordemos la fórmula de Ito:

$$dy_t = \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial t} dt + \frac{\partial g(t, x(t))}{\partial x(t)} dx(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g(t, x(t))}{\partial x(t)^2} (dx(t))^2$$

Si aplicamos dicha fórmula a la transformación $y_t = e^{\beta t} \log(x(t))$, tenemos lo siguiente:

$$dy_t = \left\{ \beta e^{\beta t} \log x(t) \right\} dt + \frac{e^{\beta t}}{x(t)} dx(t) - \frac{1}{2} \frac{e^{\beta t}}{(x(t))^2} (dx(t))^2$$

Reemplazando y_t :

$$\begin{aligned} d\left(e^{\beta t} \log(x(t))\right) &= \left\{ \beta e^{\beta t} \log x(t) \right\} dt + \frac{e^{\beta t}}{x(t)} \left\{ g(t)x(t) - \beta x(t) \log x(t) \right\} dt + \\ &\quad + \sigma x(t) dw(t) - \frac{1}{2} \frac{e^{\beta t}}{(x(t))^2} \sigma^2 (x(t))^2 dt = \\ &= e^{\beta t} g(t) dt + \sigma e^{\beta t} dw(t) - \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\beta t} dt = \left(g(t) - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\beta t} dt + \sigma e^{\beta t} dw(t) \end{aligned}$$

Integrando:

$$y_t - y_s = \int_s^t \left(g(\xi) - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\beta \xi} d\xi + \sigma \int_s^t e^{\beta \xi} dw(\xi)$$

$$e^{\beta t} \log(x(t)) = e^{\beta s} \log(x(s)) + \int_s^t \left(g(\xi) - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{\beta \xi} d\xi + \sigma \int_s^t e^{\beta \xi} dw(\xi)$$

de esta forma, si despejamos $x(t)$ de la ecuación anterior, obtenemos la solución de la ecuación diferencial (5.4):

$$x(t) = \exp \left\{ e^{-\beta(t-s)} \log(x(s)) + \int_s^t \left(g(\xi) - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{-\beta(t-\xi)} d\xi + \sigma \int_s^t e^{-\beta(t-\xi)} dw(\xi) \right\} \quad (5.5)$$

Como es sabido que la variable aleatoria (ver [12]):

$$\int_s^t e^{-\beta(t-\xi)} dw(\xi) \rightsquigarrow \mathbf{N} \left(0, \int_s^t e^{-2\beta(t-\xi)} d\xi \right)$$

entonces la variable:

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \mathbf{\Lambda}_1 \left(\mu(s, t), \sigma^2 \nu^2(s, t) \right)$$

siendo:

$$\begin{aligned}\mu(s, t, x_s) &= e^{-\beta(t-s)} \log(x_s) - \frac{\sigma^2}{2\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) + \int_s^t g(\xi) e^{-\beta(t-\xi)} d\xi \\ \nu^2(s, t) &= \frac{1}{2\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right)\end{aligned}$$

y la fdt es por tanto:

$$P(y, t|x, s) = (2\pi\sigma^2\nu^2(s, t))^{-\frac{1}{2}} y^{-1} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{[\log(y) - \mu(s, t, x_s)]^2}{\sigma^2\nu^2(s, t)}\right\}$$

5.6.2. Funciones tendencia

Gracias al conocimiento de la distribución de $X(t)|X(s) = x_s$, como hemos visto anteriormente, sabemos que la función tendencia condicionada de este proceso es la siguiente:

$$\begin{aligned}E(X(t)|X(s) = x_s) &= \exp\left\{\log(x_s e^{-\beta(t-s)}) + \frac{\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-s)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-s)}\right)\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^q \alpha_i \int_s^t g_i(\xi) e^{-\beta(t-\xi)} d\xi\right\}\end{aligned}$$

y la función tendencia, considerando la condición inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$:

$$\begin{aligned}E(X(t)) &= \exp\left\{\log(x_0) e^{-\beta(t-t_0)} + \frac{\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(t-t_0)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma^2}{4\beta} \left(1 - e^{-2\beta(t-t_0)}\right)\right\} \cdot \exp\left\{\sum_{i=1}^q \alpha_i \int_{t_0}^t g_i(\xi) e^{-\beta(t-\xi)} d\xi\right\}\end{aligned}$$

5.6.3. Estimación de los parámetros

Consideremos un muestreo discreto del proceso considerando los instantes (t_0, t_1, \dots, t_n) , por lo que tendremos mediciones:

$$X(t_0) = x_0; X(t_1) = x_1; \dots; X(t_n) = x_n$$

con la condición inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$ y suponiendo la amplitud de los intervalos de tiempo iguales a la unidad, es decir, $t_i - t_{i-1} = 1 \forall i$.

Notación necesaria

Sea:

- $\gamma_\beta = \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta})$ y $\nu_\beta = \frac{1}{2\beta}(1 - e^{-2\beta})$
- $\mathbf{a} = \left(\alpha_0 - \frac{\sigma^2}{2}, \alpha_1, \dots, \alpha_q \right)'_{(q+1) \times 1}$
- $v_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1}(\log(x_i) - e^{-\beta} \log(x_{i-1}))$, $i = 1, \dots, n$
- $\mathbf{u}_{i,\beta} = \nu_\beta^{-1} \left(\gamma_\beta, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_1(\xi) e^{-\beta(t_i-\xi)} d\xi, \dots, \int_{t_{i-1}}^{t_i} g_q(\xi) e^{-\beta(t_i-\xi)} d\xi \right)'_{(q+1) \times 1}$, $i = 1, \dots, n$
- $\mathbf{v}_\beta = (v_{1,\beta}, \dots, v_{n,\beta})'_{n \times 1}$
- $\mathbf{U}_\beta = (\mathbf{u}_{1,\beta}, \dots, \mathbf{u}_{n,\beta})_{(q+1) \times n}$, de rango $q+1$.

La función de verosimilitud que utilizaremos para realizar inferencia sobre los parámetros desconocidos tiene la forma:

$$\mathbb{L}(x_0, x_1, \dots, x_n, \mathbf{a}, \beta, \sigma^2) = \prod_{j=1}^n P(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1})$$

y considerando las reparametrizaciones anteriores, puede escribirse:

$$\mathbb{L}(v_1, \dots, v_n, \mathbf{a}, \beta, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2\nu_\beta^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a})' (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a}) \right\}$$

Diferenciando la log-verosimilitud respecto a \mathbf{a} , σ^2 y β , aparecen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_\beta \mathbf{v}_\beta &= \mathbf{U}_\beta \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a} \\ n\sigma^2 &= (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a})' (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a}) \\ \left(\nu_\beta^{-1} e^{-\beta} \mathbf{I}'_x - \mathbf{a}' \frac{\partial \mathbf{U}_\beta}{\partial \beta} \right) (\mathbf{v}_\beta - \mathbf{U}'_\beta \mathbf{a}) &= 0 \end{aligned}$$

siendo $\mathbf{I}'_x = (\log(x_1), \dots, \log(x_n))'$ y $\frac{\partial \mathbf{U}_\beta}{\partial \beta}$ la matriz formada por las derivadas de los elementos de \mathbf{U}_β respecto de β . De este forma, se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud de \mathbf{a} y de σ^2 :

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{U}_\beta \mathbf{U}'_\beta)^{-1} \mathbf{U}_\beta \mathbf{v}_\beta \quad (5.6)$$

$$n\hat{\sigma}^2 = \mathbf{v}'_{\hat{\beta}} \mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat{\beta}} \mathbf{v}_{\hat{\beta}} \quad (5.7)$$

siendo:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{U},\hat{\beta}} = \mathbf{I}_n - \mathbf{U}'_{\hat{\beta}} (\mathbf{U}_{\hat{\beta}} \mathbf{U}'_{\hat{\beta}})^{-1} \mathbf{U}_{\hat{\beta}}$$

matriz simétrica e idempotente. El estimador de β se obtiene sustituyendo (5.6) y (5.7) en la tercera ecuación de verosimilitud, quedando la siguiente expresión:

$$\left(\nu_{\beta}^{-1} e^{-\beta} \mathbf{1}'_x - \mathbf{v}'_{\hat{\beta}} \mathbf{U}'_{\beta} (\mathbf{U}_{\hat{\beta}} \mathbf{U}'_{\hat{\beta}})^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}_{\beta}}{\partial \beta} \right) \mathbf{H}_{\mathbf{U},\beta} \mathbf{v}_{\beta} = 0 \quad (5.8)$$

Debido a que en la ecuación anterior, aparecen las funciones $g_j(t)$, no es posible una expresión explícita del estimador de β , ya que dichas funciones solamente pueden ser conocidas a partir de las observaciones discretas de las variables exógenas:

$$y_{i,j} ; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, q$$

Por esta razón, normalmente se construyen los factores exógenos a partir de los valores observados de las variables a través de funciones poligonales:

$$g_j(t) = y_{i-1,j} + (y_{i,j} - y_{i-1,j})(t - t_{i-1})$$

por lo que si denotamos:

$$z_{ij}(\beta) = y_{i-1,j} + (y_{i,j} - y_{i-1,j}) \frac{\beta - 1 + e^{-\beta}}{\beta(1 - e^{-\beta})}$$

queda:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} g_j(\xi) e^{-\beta(t_i - \xi)} d\xi = \gamma_{\beta} z_{ij}(\beta)$$

5.7. Aplicación del modelo de Gompertz no homogéneo al caso de la población andaluza

Las variables recogidas (o factores exógenos) para ajustar el modelo no homogéneo a la población andaluza desagregada por sexo en el periodo 1981-2002, han sido:

- Número de inmigrantes procedentes del exterior.
- Esperanza de vida al nacimiento (e_0), o número medio de años que les queda por vivir a los recién nacidos.
- Indicador coyuntural de fecundidad (ICF), o número de hijos por mujer en edad fértil.

La población por sexo ha sido extraída de la base de datos del Instituto de Estadística de Andalucía, al igual que el ICF. La información sobre el número de inmigrantes procedentes del exterior ha sido proporcionada por el Instituto Nacional de Estadística (INE) por la explotación de la Estadística de Variaciones Residenciales (hay que hacer notar que hasta el año 1983, la desagregación por sexo es una estimación del INE, ya que hasta esa fecha, no se recogía el sexo del inmigrante).

Por otro lado, los valores de la esperanza de vida al nacimiento por sexo son de elaboración propia, como resultado de la construcción de las tablas de mortalidad bianuales en dicho periodo, a partir de la información facilitada por el IEA.

En la siguiente tabla, se ha obtenido el coeficiente de correlación lineal entre la variable endógena y cada una de las exógenas; es notorio que la variable con mayor relación lineal es la esperanza de vida. Por el contrario, la inmigración procedente del exterior parece no influir demasiado en el aumento de la población, aunque si analizamos el número de entradas, realmente es en los últimos años cuando este fenómeno puede considerarse importante en cuanto a su influencia en el crecimiento poblacional.

R2	Inmigr	e0	ICF
Mujeres	0,447	0,991	0,924
Hombres	0,450	0,923	0,922

Cuadro 5.1: Relación lineal entre los factores exógenos y la población

Año	Población	Inmigr	e_0	ICF
1981	3272477	539	77,28	2,55
1982	3305417	723	77,82	2,46
1983	3338576	959	78,18	2,28
1984	3379971	1047	78,43	2,14
1985	3417472	869	78,74	1,99
1986	3447095	1256	78,88	1,89
1987	3469302	1037	79,05	1,82
1988	3482437	1836	79,19	1,76
1989	3491377	2789	79,40	1,69
1990	3503383	2375	79,59	1,66
1991	3525393	1667	79,78	1,61
1992	3546451	1983	80,14	1,58
1993	3570319	1894	80,36	1,52
1994	3590263	1983	80,48	1,41
1995	3607630	1922	80,76	1,35
1996	3619732	1363	80,87	1,30
1997	3631785	3361	81,03	1,31
1998	3645176	4514	81,15	1,28
1999	3656695	7408	81,13	1,32
2000	3672632	13275	81,34	1,34
2001	3700462	17671	81,71	1,35
2002	3746275	26176	81,90	1,36

Cuadro 5.2: Datos socio-demográficos (**Mujeres**)

Año	Población	Inmigr	e_0	ICF
1981	3168770	598	71,16	2,55
1982	3207995	747	71,47	2,46
1983	3246324	990	72,05	2,28
1984	3289496	1072	72,19	2,14
1985	3326145	885	72,19	1,99
1986	3354724	1302	72,35	1,89
1987	3375407	1158	72,57	1,82
1988	3386473	1984	72,68	1,76
1989	3392360	2919	72,63	1,69
1990	3399639	2495	72,51	1,66
1991	3416183	1791	72,50	1,61
1992	3437228	2163	72,81	1,58
1993	3459818	1932	73,12	1,52
1994	3481208	2148	73,35	1,41
1995	3499104	1997	73,53	1,35
1996	3510905	1474	73,59	1,30
1997	3521607	3606	74,01	1,31
1998	3533777	5030	74,27	1,28
1999	3542652	8263	74,19	1,32
2000	3556265	19470	74,60	1,34
2001	3589893	20571	75,12	1,35
2002	3637178	28728	75,31	1,36

Cuadro 5.3: Datos socio-demográficos (**Hombres**)

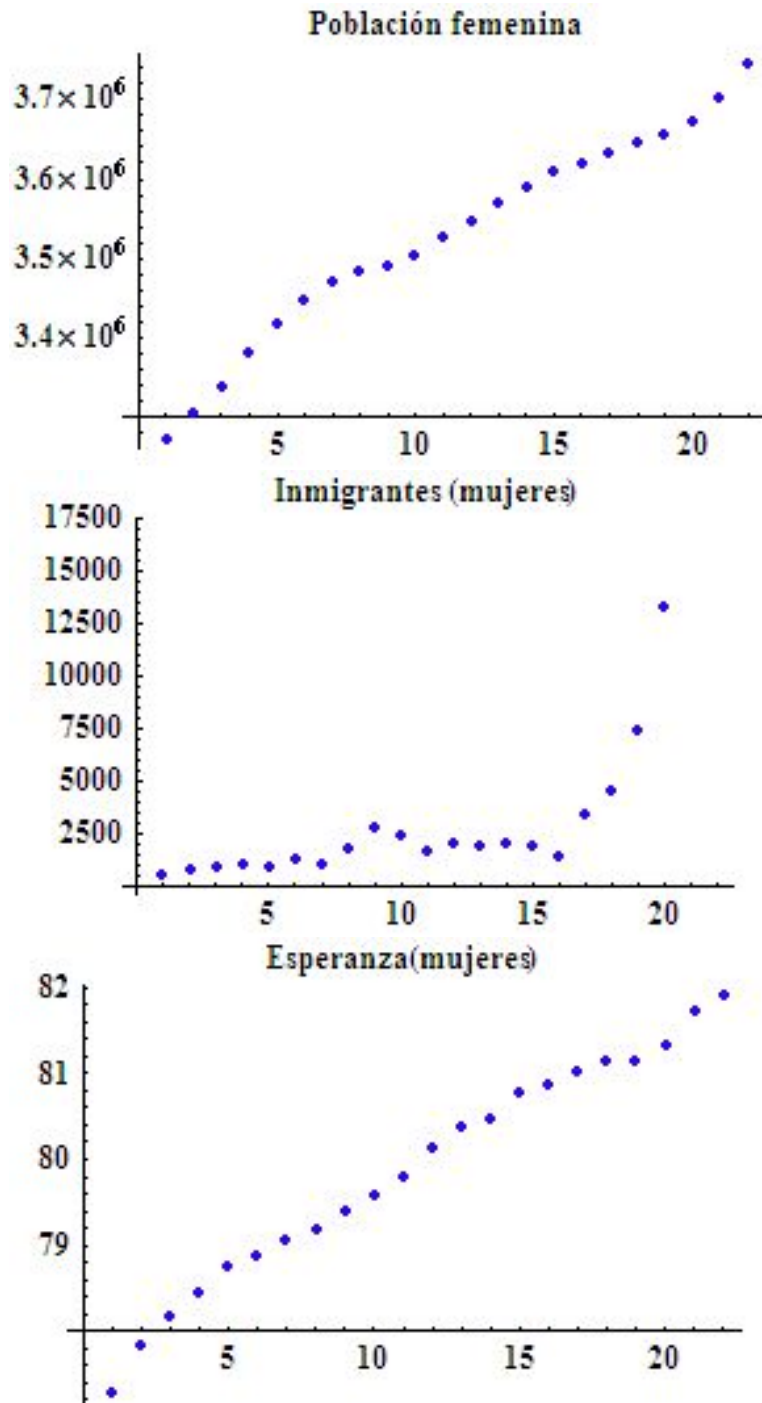


Figura 5.1: Información observada en mujeres

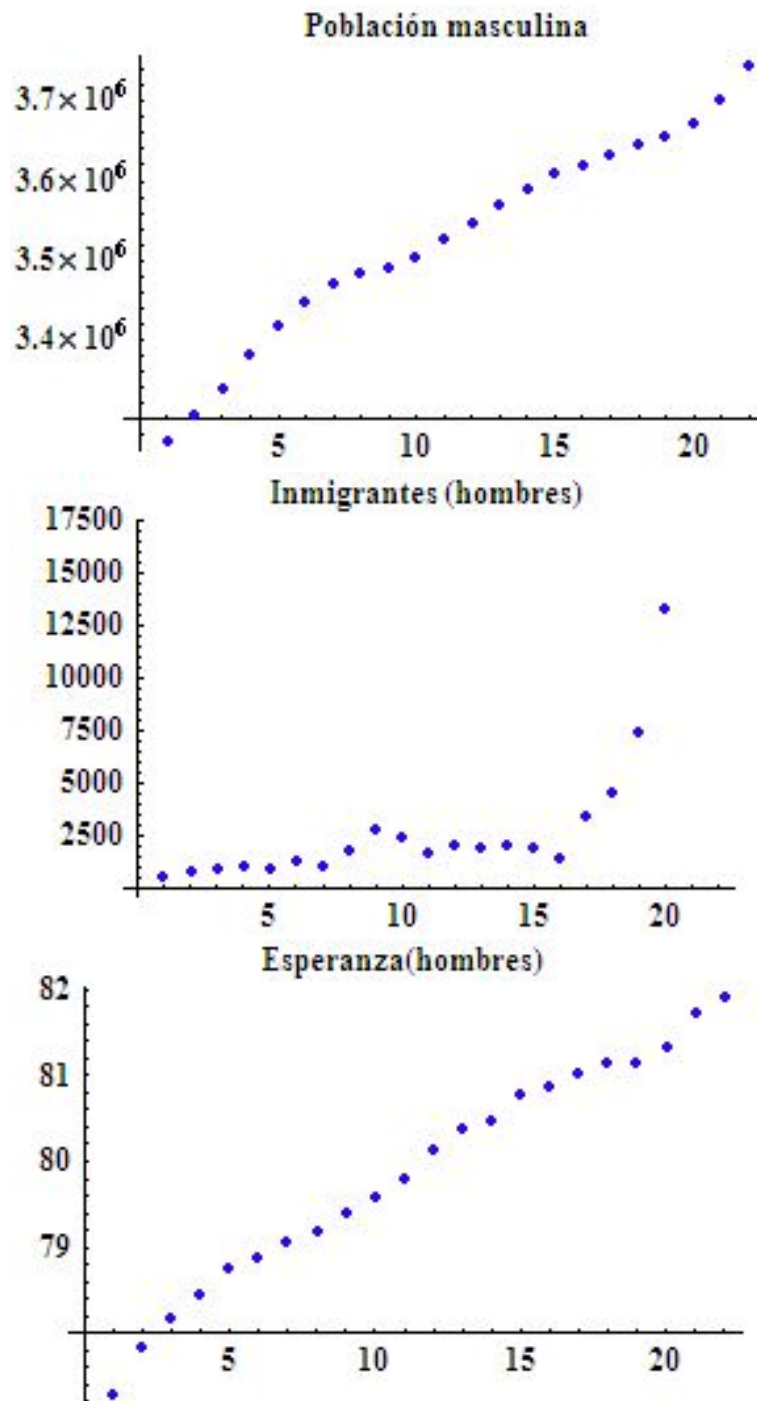


Figura 5.2: Información observada en hombres

Respecto al Índice Sintético de Fecundidad, como puede apreciarse en el gráfico, ha sufrido una disminución bastante acusada a lo largo de este periodo, aunque en los años más recientes ha empezado a recuperarse lentamente.

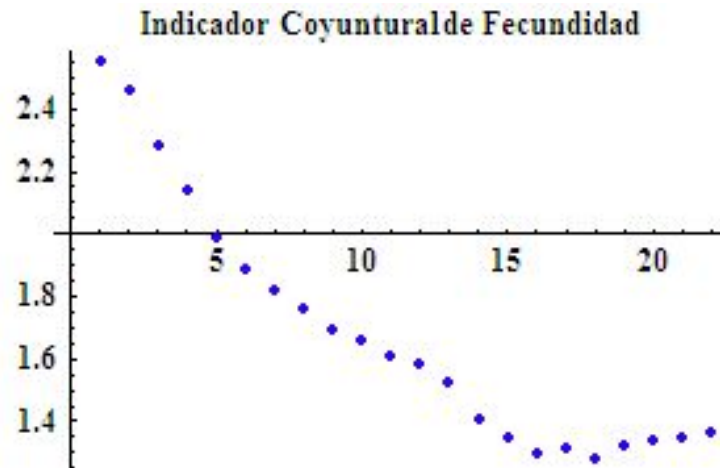


Figura 5.3: Evolución del Indicador Coyuntural de Fecundidad

Observación:

En las aplicaciones que haremos a continuación, se ha tomado tanto en el caso de mujeres como de hombres este indicador (ICF) como variable exógena; es cierto que puede calcularse el ICF masculino, pero es una medida muy poco utilizada y que tampoco va a variar significativamente respecto al femenino.

5.7.1. Población andaluza femenina

Se ha tomado como variable endógena la población femenina andaluza y como variables exógenas, el número de mujeres inmigrantes extranjeras, la esperanza de vida al nacimiento femenina y el indicador coyuntural de fecundidad. Como se ha mencionado anteriormente, el periodo de observación ha sido 1981-2002, aunque los dos últimos años se han reservado para realizar una predicción y comprobar la bondad del modelo. Los parámetros del modelo estimados han resultado los siguientes:

Parámetro	valor estimado
β	0.0378191
$\alpha_0 - \sigma^2/2$	0.0507695
α_1	-0.0005712
α_2	1.2287000
α_3	0.0066227
σ^2	2.91204×10^{-6}

Cuadro 5.4: Parámetros estimados (mujeres)

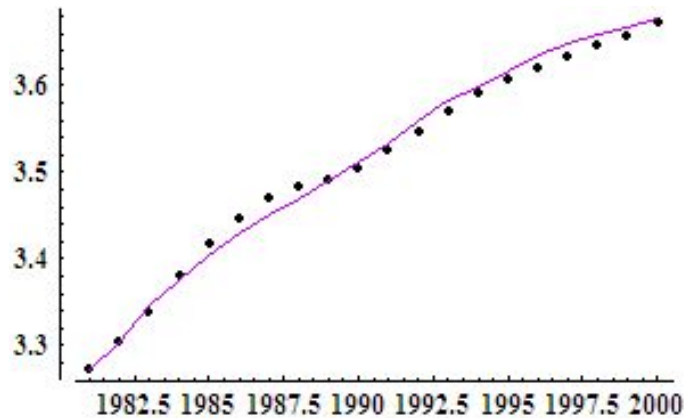


Figura 5.4: Función tendencia no condicionada (mujeres)

Año	Población	FTNC	FTC
1981	3272477	3272477	3272477
1982	3305417	3304874	3312898
1983	3338576	3344472	3337334
1984	3379971	3375294	3368726
1985	3417472	3404392	3405763
1986	3447095	3429454	3438827
1987	3469302	3450434	3467368
1988	3482437	3470601	3489233
1989	3491377	3490490	3504330
1990	3503383	3512131	3513344
1991	3525393	3533451	3529166
1992	3546451	3558325	3550886
1993	3570319	3582817	3564336
1994	3590263	3599521	3589001
1995	3607630	3617261	3608717
1996	3619732	3634841	3621345
1997	3631785	3647641	3632821
1998	3645176	3659785	3640683
1999	3656695	3667704	3656099
2000	3672632	3677852	3677868
2001	3700462	3698353	3692882
2002	3746275	3717780	3714715

Cuadro 5.5: Observaciones y funciones tendencia (mujeres)

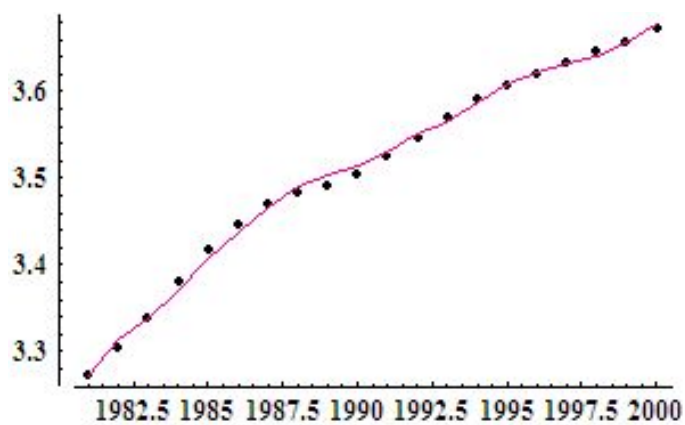


Figura 5.5: Función tendencia condicionada (mujeres)

5.7.2. Población andaluza masculina

Asumimos de nuevo como variables exógenas, el número de hombres inmigrantes extranjeros, la esperanza de vida al nacimiento masculina y el indicador coyuntural de fecundidad. El resultado se muestra a continuación:

Parámetro	valor estimado
β	0.0797127
$\alpha_0 - \sigma^2/2$	0.1031180
α_1	-0.0029721
α_2	1.0394100
α_3	0.0271248
σ^2	3.32719×10^{-6}

Cuadro 5.6: Parámetros estimados (hombres)

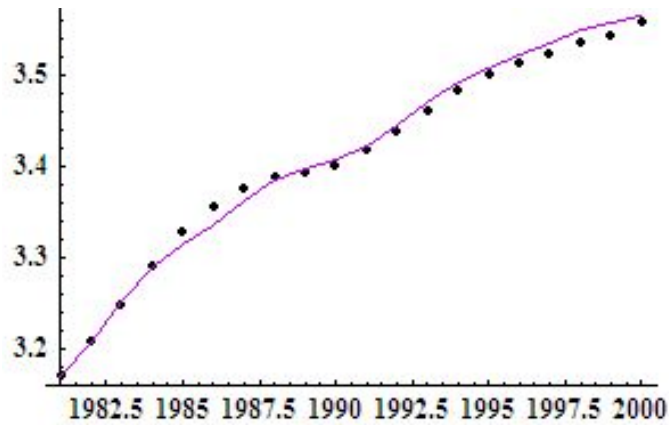


Figura 5.6: Función tendencia no condicionada (hombres)

Año	Población	FTNC	FTC
1981	3168770	3168770	3168770
1982	3207995	3207432	3215892
1983	3246324	3252106	3248214
1984	3289496	3289434	3273296
1985	3326145	3313412	3312618
1986	3354724	3334850	3352952
1987	3375407	3361053	3377808
1988	3386473	3383690	3387820
1989	3392360	3395494	3397608
1990	3399639	3405962	3408095
1991	3416183	3420710	3423248
1992	3437228	3442833	3444903
1993	3459818	3469708	3460519
1994	3481208	3490701	3478065
1995	3499104	3506720	3497287
1996	3510905	3520944	3514334
1997	3521607	3534582	3527342
1998	3533777	3549299	3530344
1999	3542652	3555967	3542251
2000	3556265	3562783	3566666
2001	3589893	3585375	3578260
2002	3637178	3605295	3599872

Cuadro 5.7: Observaciones y funciones tendencia (hombres)

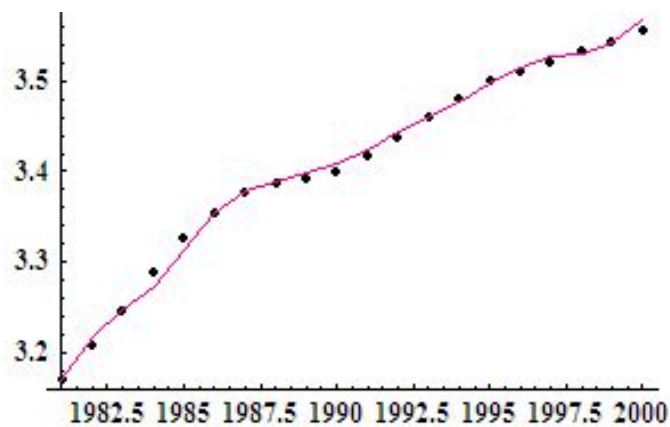


Figura 5.7: Función tendencia condicionada (hombres)

5.7.3. Población andaluza ambos sexos

Tomamos ahora solamente dos variables exógenas: el número de inmigrantes totales y el indicador coyuntural de fecundidad. Si observamos el resultado podemos concluir que el considerar la esperanza de vida al nacimiento como factor exógeno en el modelo de Gompertz es un acierto, ya que al no hacerlo, hemos perdido precisión en el ajuste.

Parámetro	valor estimado
β	0.0511569
$\alpha_0 - \sigma^2/2$	0.105643
α_1	0.0027804
α_2	0.0075213
σ^2	8.83397×10^{-6}

Cuadro 5.8: Parámetros estimados (ambos sexos)

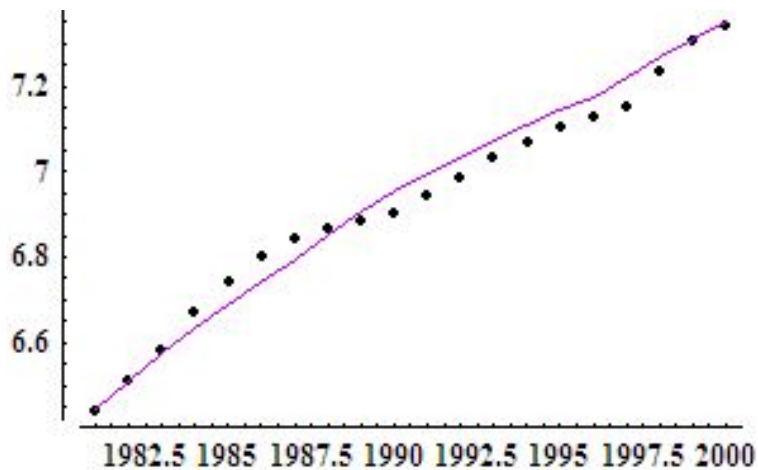


Figura 5.8: Función tendencia no condicionada (ambos sexos)

La función tendencia condicionada representa mejor a las observaciones poblacionales que la no condicionada, aunque la utilización de la FTNC, que aunque no recoge pequeñas fluctuaciones sufridas en el tiempo, es más ventajosa en el momento que se desee realizar predicciones futuras: en la obtención de la FTNC en un instante no es necesario conocer el valor observado en el instante anterior. Esto puede facilitar la obtención de predicciones futuras de población. Para ello, solamente tendríamos que establecer una serie

Año	Población	FTNC	FTC
1981	6441247	6441247	6441247
1982	6513412	6508362	6509470
1983	6584900	6573895	6576270
1984	6669467	6634276	6640415
1985	6743617	6687711	6725148
1986	6801819	6742621	6797173
1987	6844709	6796214	6856069
1988	6868910	6850694	6902926
1989	6883737	6908654	6918152
1990	6903022	6956171	6925254
1991	6941576	6994464	6946974
1992	6983679	7034371	6985578
1993	7030137	7074265	7023342
1994	7071471	7109861	7067846
1995	7106734	7143968	7104804
1996	7130637	7173981	7154546
1997	7153392	7218843	7183815
1998	7236459	7268209	7198406
1999	7305117	7308127	7285921
2000	7340052	7354451	7346108
2001	7403968	7393224	7372841
2002	7478432	7423564	7436502

Cuadro 5.9: Observaciones y funciones tendencia (ambos sexos)

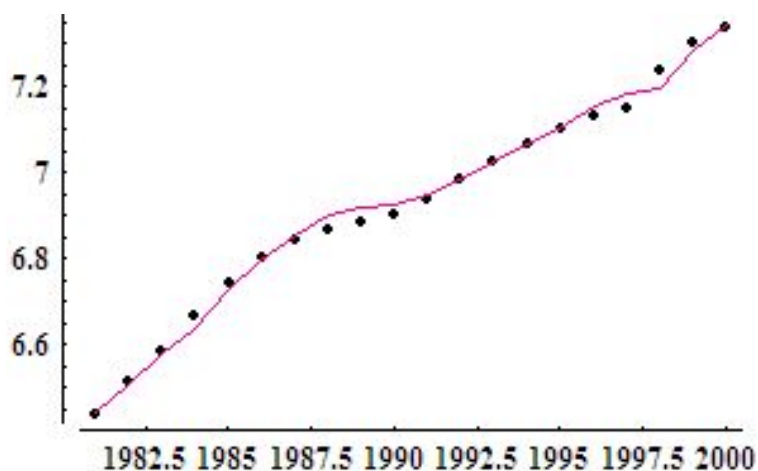


Figura 5.9: Función tendencia condicionada (ambos sexos)

de hipótesis para los valores de las variables exógenas; de hecho, en cualquier proyección de población es necesario previamente realizar suposiciones sobre el comportamiento de los indicadores demográficos básicos (esperanza de vida, ICF, migraciones).

Se abre de esta forma un abanico de posibilidades, ya que podría incluso estudiarse el comportamiento de la población a cada edad (o en intervalos de edad) y realizar predicciones por edad, aunque debería resolverse el sesgo de agregación que aparecería al obtener la población total.

Obtención de la tendencia mediante un Proceso Lognormal

Comparemos las tendencias obtenidas anteriormente con las que aparecen si consideramos un proceso Lognormal no homogéneo, tomando como variable endógena la población total y como exógenas, el número de inmigrantes y el Indicador Coyuntural de Fecundidad. Para ello, basta con hacer tender el parámetro β a 0 dentro de las expresiones calculadas para la difusión de Gompertz no homogénea, puesto que el proceso Lognormal es un caso particular del de Gompertz. De esta manera se obtienen los siguientes valores para los parámetros del modelo Lognormal:

Parámetro	valor estimado
$\alpha_0 - \sigma^2/2$	0.0050816
α_1	0.0026527
α_2	-0.0385605
σ^2	10.3461×10^{-6}

Cuadro 5.10: Parámetros estimados (P.Lognormal, ambos sexos)

Año	Población	FTNC	FTC
1981	6441247	6441247	6441247
1982	6513412	6480953	6492975
1983	6584900	6532932	6567234
1984	6669467	6586847	6634534
1985	6743617	6636427	6721602
1986	6801819	6688235	6792275
1987	6844709	6736423	6851176
1988	6868910	6785235	6900560
1989	6883737	6840530	6914787
1990	6903022	6886146	6921221
1991	6941576	6923571	6943913
1992	6983679	6964511	6985723
1993	7030137	7008732	7034267
1994	7071471	7059428	7081929
1995	7106734	7111363	7115358
1996	7130637	7155423	7158210
1997	7153392	7207178	7186484
1998	7236459	7263549	7198369
1999	7305117	7309143	7283567
2000	7340052	7356648	7351421
2001	7403968	7403202	7381276
2002	7478432	7444704	7448204

Cuadro 5.11: Observaciones y funciones tendencia (P.Lognormal, ambos sexos)

Podemos apreciar, tanto en los valores de las tendencias, como en los gráficos de las mismas, que el proceso Lognormal ofrece un peor ajuste a los datos observados; de ahí, que sea el proceso de Gompertz, el más adecuado para reflejar el comportamiento de poblaciones.

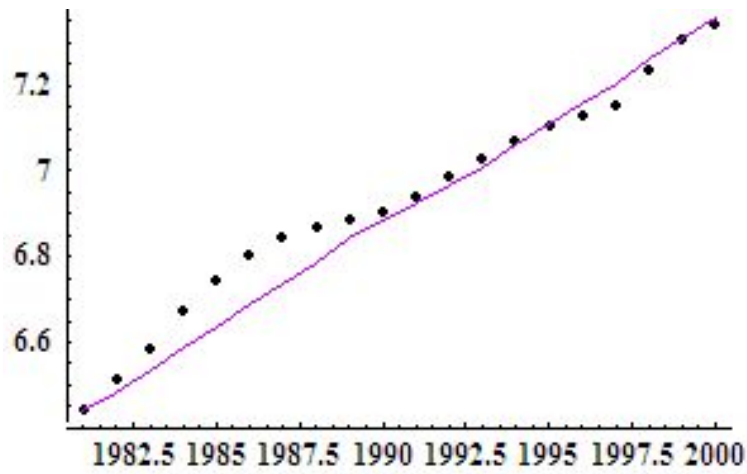


Figura 5.10: Función tendencia no condicionada (P.Lognormal, ambos sexos)

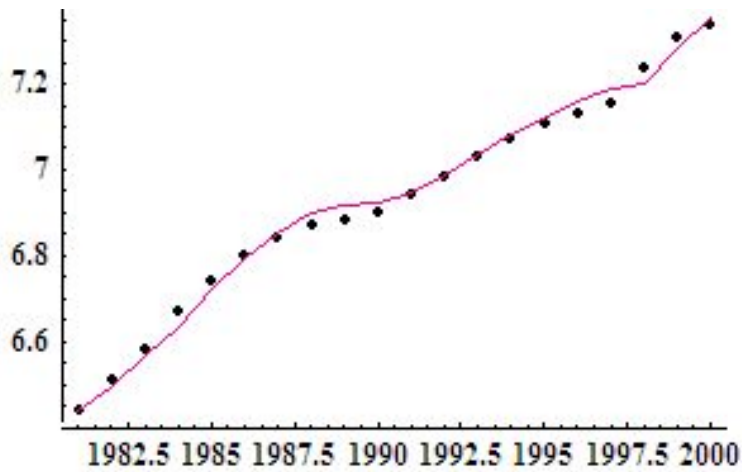


Figura 5.11: Función tendencia condicionada (P.Lognormal, ambos sexos)

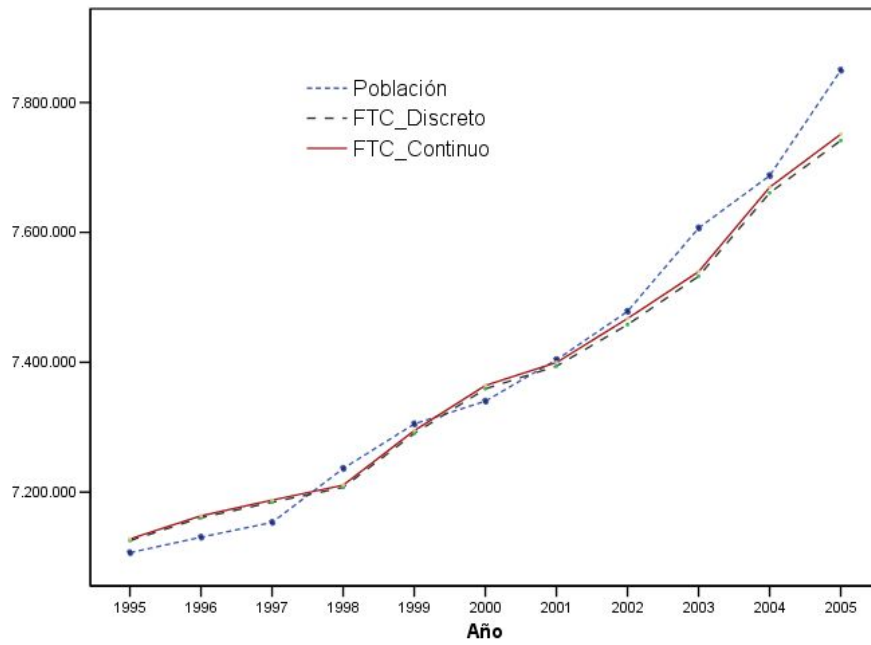
Anexo de resultados

Vamos a comparar las estimaciones obtenidas según los diversos modelos utilizados a lo largo de esta memoria, utilizando los resultados obtenido al tomar como variable de análisis, la **población total**. Para el caso homogéneo se ha utilizado el proceso de Gompertz, tanto por muestreo discreto como continuo considerando el periodo 1976-2005. Al introducir variables exógenas se han aplicado los modelos Lognormal y Gompertz no homogéneos, tomando como exógenas, el número de inmigrantes extranjeros y el ICF en el periodo 1981-2002. Veamos cuáles han sido los resultados:

Difusión homogénea

En la siguiente tabla aparecen los valores estimados para la tendencia condicionada en el caso de muestreo discreto y continuo. Se han tomado solamente los últimos años, para que se aprecien mejor las diferencias entre ambos muestreos:

Año	Población	FTC (Discreto)	FTC (Continuo)
1995	7106734	7125310	7127876
1996	7130637	7160600	7163550
1997	7153392	7184510	7187732
1998	7236459	7207280	7210753
1999	7305117	7290390	7294793
2000	7340052	7359070	7364258
2001	7403968	7394020	7399604
2002	7478432	7457960	7467275
2003	7606848	7532440	7539620
2004	7687518	7660870	7669560
2005	7849799	7741550	7751200



Calculamos la diferencia entre el valor de población observado y estimado:

Año	Dif(Discreto)	Dif (Continuo)
1995	-18576	-21142
1996	-29963	-32913
1997	-31118	-34340
1998	29179	25706
1999	14727	10324
2000	-19018	-24206
2001	9948	4364
2002	20472	11157
2003	74408	67228
2004	26648	17958
2005	108249	98599

Parece que el muestreo continuo es el más adecuado para estimar los datos de población ya que estas diferencias, parecen ser en general, inferiores. Sí destaca el gran error cometido para el último año (2005), ya que la población en dicho año ha experimentado un aumento muy notorio, quizás debido a la recuperación de la fecundidad que se está experimentando en la actualidad y por la regularización de inmigrantes, que hasta el momento eran ilegales. A pesar de ello, en el resto de los años, las estimaciones son bastante aceptables.

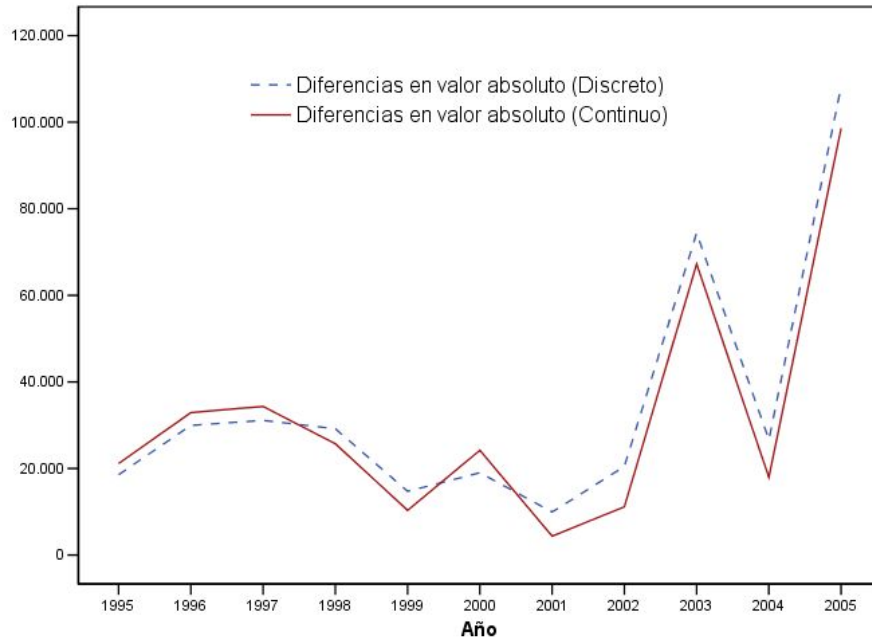
Se ha calculado la media de estas diferencias o errores (en valor absoluto) para estos años y se ha obtenido 34755.1 en el muestreo discreto y 31630.6 en el muestreo continuo, lo que refuerza la afirmación de que considerar el muestreo continuo es la mejor elección.

El valor de los parámetros estimados (para todo el periodo) en ambos modelos ha sido:

Parámetro	Discreto	Continuo
$\hat{\beta}$	0.00698	-0.00364
$\hat{\alpha}$	0.02127	0.00081
$\hat{\sigma}^2$	1.21683×10^{-5}	7.55343×10^{-3}

y la media de las diferencias en valor absoluto para todo el periodo ha sido de 22440.2 en el muestreo discreto y de 22344.0 en el continuo.

Anexo



En la siguiente tabla se muestra el error cometido (%) en cada año de observación, tomado como el cociente de la diferencia de la población observada y estimada en valor absoluto entre la población observada:

Año	Discreto	Continuo
1976	0,00	0,00
1977	0,14	0,03
1978	0,03	0,08
1979	0,03	0,12
1980	0,07	0,16
1981	0,33	0,40
1982	0,29	0,35
1983	0,28	0,33
1984	0,47	0,51
1985	0,31	0,33
1986	0,07	0,08
1987	0,16	0,15
1988	0,43	0,43
1989	0,56	0,57
1990	0,50	0,51
1991	0,22	0,23
1992	0,17	0,18
1993	0,10	0,13
1994	0,18	0,21
1995	0,26	0,30
1996	0,42	0,46
1997	0,44	0,48
1998	0,40	0,36
1999	0,20	0,14
2000	0,26	0,33
2001	0,13	0,06
2002	0,27	0,15
2003	0,98	0,88
2004	0,35	0,23
2005	1,38	1,26

Como puede apreciarse, el error cometido solamente en 2005 alcanza el 1 % de la población observada.

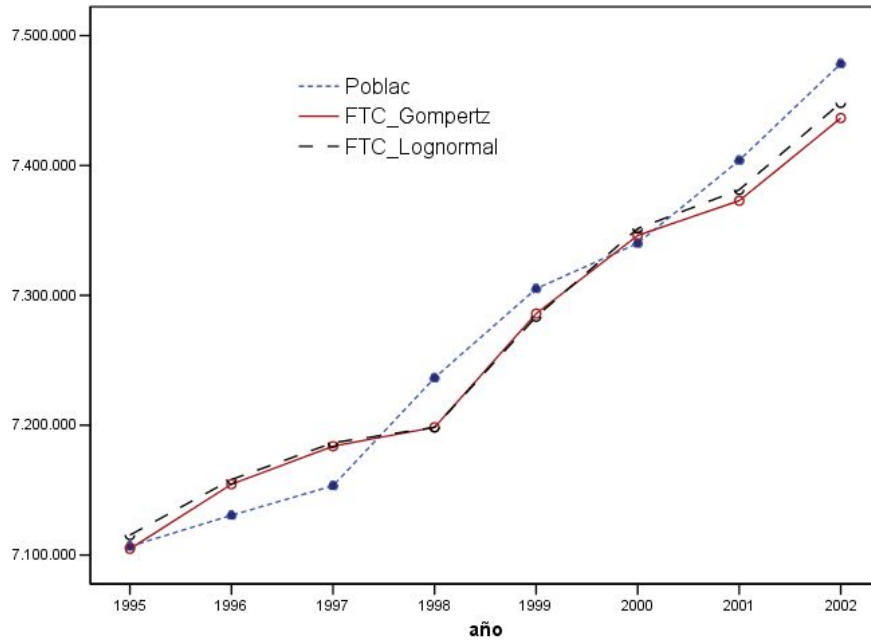
Difusión no homogénea

Vamos a comparar los resultados obtenidos al considerar variables exógenas, tomando los modelos Lognormal y Gompertz, para comprobar cuál es el que mejor aplicación tiene en el caso que estamos analizando.

Anexo

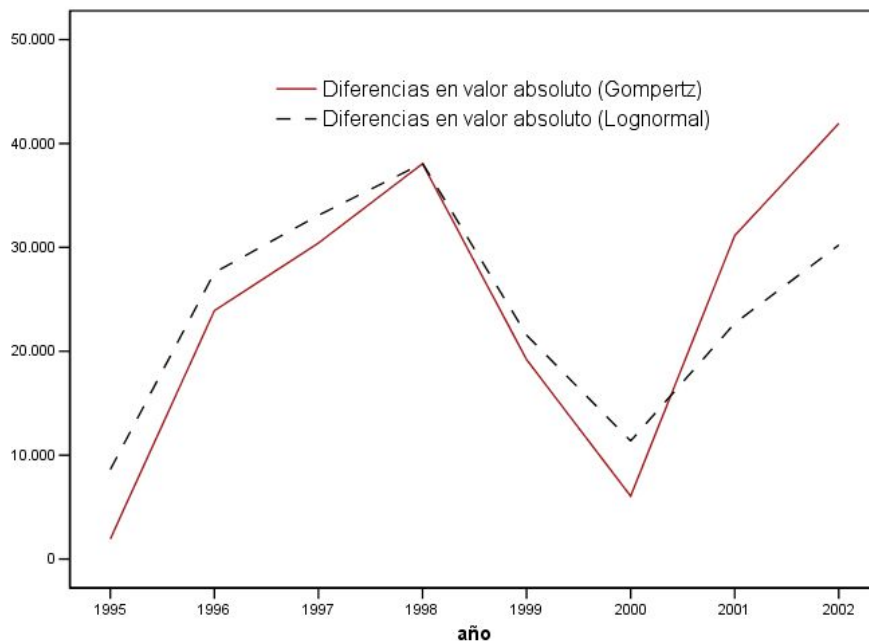
En el cuadro se muestran los valores estimados para la tendencia condicionada para ambos modelos; igualmente se han tomado en primer lugar los últimos años:

Año	Población	FTC (Gompertz)	FTC (Lognormal)
1995	7106734	7104804	7115358
1996	7130637	7154546	7158210
1997	7153392	7183815	7186484
1998	7236459	7198406	7198369
1999	7305117	7285921	7283567
2000	7340052	7346108	7351421
2001	7403968	7372841	7381276
2002	7478432	7436502	7448204



Si calculamos la diferencia entre el valor de población observado y estimado:

Año	Dif (Gompertz)	Dif (Lognormal)
1995	1930	-8624
1996	-23909	-27573
1997	-30423	-33092
1998	38053	38090
1999	19196	21550
2000	-6056	-11369
2001	31127	22692
2002	41930	30228



El promedio del valor absoluto de las diferencias para el periodo 1995-2002 es de 24078.0 en el caso de Gompertz y de 24152.3 en Lognormal. Si consideramos todo el periodo de estudio, es decir, 1981-2002, estas son de 17141.0 y de 18370.4 respectivamente.

El valor de los parámetros estimados (para todo el periodo) en ambos modelos ha sido:

Parámetro	Gompertz	Lognormal
β	0.0511569	
$\alpha_0 - \sigma^2/2$	0.105643	0.0050816
α_1	0.0027804	0.0026527
α_2	0.0075213	-0.0385605
σ^2	8.83397×10^{-6}	10.3461×10^{-6}

El error cometido (%) en cada año de observación, respecto a la población observada es:

Año	Gompertz	Lognormal
1981	0,00	0,00
1982	0,06	0,31
1983	0,13	0,27
1984	0,44	0,52
1985	0,27	0,33
1986	0,07	0,14
1987	0,17	0,09
1988	0,50	0,46
1989	0,50	0,45
1990	0,32	0,26
1991	0,08	0,03
1992	0,03	0,03
1993	0,10	0,06
1994	0,05	0,15
1995	0,03	0,12
1996	0,34	0,39
1997	0,43	0,46
1998	0,53	0,53
1999	0,26	0,29
2000	0,08	0,15
2001	0,42	0,31
2002	0,56	0,40

A la vista de los resultados anteriores podemos concluir que es el proceso de Gompertz el que mejor recoge el crecimiento poblacional aunque como puede apreciarse, al considerar factores exógenos, las diferencias entre los valores observados y estimados, en muy pocos años alcanzan el 0.5% de la población observada.

Bibliografía

- [1] Behar Cl. *Malthus and the development of demographic analysis*. Population Studies, 1987.
- [2] Biswas Suddhendu. *Stochastic Processes in Demography and Applications*. Ed. Wiley Eastern Limited, New Delhi. India, 1988.
- [3] Blanes A., Gil F., and Pérez J. Población y actividad en españa: evolución y perspectivas. In *Colección de Estudios e Informes*. La Caixa, Barcelona, 1996.
- [4] Bogue D.J., Arriaga E., and Anderton D. *Readings on population research methodology*, volume 2. U.N.F.P.A. SDC, Chicago, 1993.
- [5] Capocelli R.M. and Ricciardi L.M. A difusion model for population growth in random environment. *Theoretical Population Biology*, 5:28–41, 1974.
- [6] Caselli G., Vallin J., and Wunsch G. *La dynamique des populations*. L'Institut National d'études démographiques, París, 2001.
- [7] Chesney M. and Elliot J. Estimating the instantaneous volatility and covariance of risky assets. *Appl. Stoch. Mod. Data Anal.*, 11:51–58, 1995.
- [8] Crow E.L. and Shimizu K. *Lognormal distribution theory and application*. Marcel Dekker, 1998.
- [9] Ferrante L., Bompadre S., Possati L., and Leone L. Parameter estimation in a gompertzian stochastics model for tumor growth. *Biometrics*, 56:1076–1081, 2000.
- [10] Frank T. D. Multivariate markov processes for stochastic systems with delays: application to the stochastic gompertz model with delay. *Physical Review E*, 66 (1):011914, 2002.

- [11] Gallese E. and Lac-Prugent N. Mercado laboral y población. *27 Congreso Nacional de Estadística e I.O.*, 2003.
- [12] Gardiner CW. *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and natural sciences*. Springer, Berlin, 2^a edition, 1990.
- [13] Gini Corrado. *Esquemas teóricos y problemas concretos de la población*. Aguilar, S.A., Madrid, 1963.
- [14] Giovanis A.N. and Skiadas C.H. A stochastic logistic innovation diffusion model studying the electricity consumption in greece and the united states. *Technol Forecasts Soc Change*, 61:253–264, 1999.
- [15] Gutiérrez R., Angulo J.M., González A., and Pérez R. Inference in lognormal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 7:295–316, 1991.
- [16] Gutiérrez R., González A., and Torres F. Estimation in multivariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Applied Statistics*, 4:140–146, 1997.
- [17] Gutiérrez R., Gutiérrez-Sánchez R., and Nafidi A. Stochastic gompertz diffusion model: Statistical inference and applications. Technical report, Proceedings of the 17th symposium on E.M.C.S.R. Austrian Society for Cybernetic Studies, 2004.
- [18] Gutiérrez R., Gutiérrez-Sánchez R., and Nafidi A. Electricity consumption in morocco: Stochastic gompertz diffusion analysis with exogenous factors. *Appl. Energy* (in press), 2006.
- [19] Gutiérrez R., Gutiérrez-Sánchez R., Nafidi A., and Ramos E. Studying the vehicle park in spain by using the lognormal and gompertz diffusion processes. Technical report, 28th National Congress in Statistics and Operational Research, Spain: Cádiz, 2004.
- [20] Gutiérrez R., Gutiérrez-Sánchez R., Nafidi A., Román P., and Torres F. Inference in gompertz-type nonhomogeneous stochastic systems by means of discrete sampling. *Cybernetics and Systems*, 36:203–216, 2005.
- [21] Gutiérrez R., Gutiérrez-Sánchez R., Ramos E., Román P., and Torres F. Modelo de difusión lognormal para la descripción y predicción del precio de la vivienda. Technical report, 27^o Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa. SEIO, Lérida, 2003.

-
- [22] Gutiérrez R., Nafidi A., and Gutiérrez-Sánchez R. Inference in the stochastic gompertz diffusion model with continuous sampling. Proceedings of the VIII Jornadas Zaragoza-Pau de Matemática Aplicada y Estadística, 2003.
- [23] Gutiérrez R., Nafidi A., and Gutiérrez-Sánchez R. Stochastic gompertz diffusion process: Statistical inference and application. Technical Report 31, 7th Spanish- French congress in Mathematics and Statistics, Spain: Zaragoza, 2003.
- [24] Gutiérrez R., Nafidi A., and Gutiérrez-Sánchez R. Inference in the stochastic gompertz diffusion model with continuous sampling. *Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano*, 31:347–353, 2004.
- [25] Gutiérrez R., Nafidi A., and Gutiérrez-Sánchez R. Forecasting total natural-gas consumption in Spain by using the stochastic gompertz innovation diffusion model. *Apply Energy*, 80 (2):115–124, 2005.
- [26] Gutiérrez R., Ricciardi LM., Román P., and Torres F. First-passage-time densities for time-non-homogeneous diffusion process. *J. Appl. Prob.*, 34 (3):623–631, 1997.
- [27] Gutiérrez R., Román P., Romero D., and Torres F. Forecasting the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Cybernetic System*, 34:709–724, 2003.
- [28] Gutiérrez R., Román P., and Torres F. Inference and first-passage-times for the lognormal diffusion process with exogenous factors: application to modelling in economics. *Appl. Stochastic Models in Business and Industry*, 15:325–332, 1999.
- [29] Gutiérrez R., Román P., and Torres F. Inference on some parametric functions in the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Test*, 10 (2):357–373, 2001.
- [30] Gutiérrez-Sánchez R. *Difusiones estocásticas no homogéneas lognormales y Gompertz. Proceso de Rayleigh. Aplicaciones*. PhD thesis, Universidad de Granada, España, 2005.
- [31] Hoyo J. and A. García. *Análisis y predicción de la población española (1910-2000)*. FEDEA, Madrid, 1988.

- [32] Karlin S. and Taylor H.M. *A second course in stochastic process*. Academic Press, New York, 1981.
- [33] Katsamaki A. and Skiadas C.H. Analytic solution and estimation of parameters on a stochastic exponential model for a technological diffusion process. *Applied stochastic models and data analysis*, 11:59–75, 1995.
- [34] Kloeden P.E. and all . On effects of the discretization on estimators of drift parameters for diffusion processes. *Applied Probability*, 33:1061–1076, 1996.
- [35] Land A., Kenneth C., and Rogers A. *Multidimensional mathematical demography*. Academic Press, New York, 1982.
- [36] Lipter RS and Shiriyayev AN. *Statistics of random processes*. New York, 1981.
- [37] Llorca J., Prieto M.D., and Delgado M. Análisis gompertziano de la mortalidad por cáncer de pulmón en España, 1968-1995. *Gaceta Sanitaria*, 1998.
- [38] López-Navarro M. *Análisis cuantitativo de las influencias económicas en la dinámica demográfica española*. PhD thesis, UNED, 2002.
- [39] Malthus T.R. *Essay on the Principle of Population as it affects the future improvement of Society*. London, 1798.
- [40] Malthus T.R. *First essay on population*. Macmillan, London, 1798.
- [41] Nafidi A. *Difusiones Lognormales con factores exógenos. Extensiones a partir proceso de difusión de Gompertz*. PhD thesis, Universidad de Granada, 1997.
- [42] Newel C. *Methods and models in demography*. John Wiley Sons, Chicago, 1994.
- [43] Prakasa-Rao B.L.S. *Statistical inference for diffusion type processes*. Arnold, London, 1999.
- [44] Ramos E. *Difusión Lognormal multidimensional triparamétrica con factores exógenos*. PhD thesis, Universidad de Granada, España, 2005.
- [45] Ricciardi LM. On the transformation of diffusion processes into the Wiener processes. *Math. Anal. and Appl.*, 54:185–99, 1976.

- [46] Ricciardi LM. Diffusion processes and related topics in biology. lect notes biomath. *Springer Verlag*, 14, 1977.
- [47] Rogers A., Willekens F., and Raymer J. Modeling interregional migration flows: continuity and change. *Mathematical Population Studies*, 9:231–263, 2001.
- [48] Tinter G. and Sengupta JK. *Stochastic Economics*. Academic Press, New York, 1972.
- [49] Torres-Ruiz F. *Aportaciones al estudio de difusiones estocásticas homogéneas*. PhD thesis, Universidad de Granada, 1993.
- [50] Verhulst P. F. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Corr. Math. et Phys*, 10:113–121, 1838.

