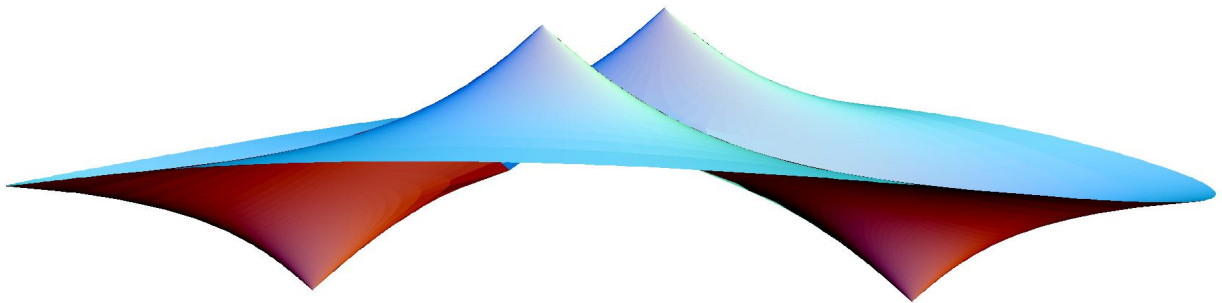


# SUPERFICIES MAXIMALES CON SINGULARIDADES AISLADAS

Tesis doctoral





## SUPERFICIES MAXIMALES CON SINGULARIDADES CÓNICAS

Memoria presentada por la Licenciada Isabel Fernández Delgado, y realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección de Francisco José López Fernández, Catedrático de dicho Departamento, con objeto de aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Granada, 2 de Mayo de 2006

Prof. Francisco J. López Fernández  
Director de la Memoria

Lda. Isabel Fernández Delgado  
Aspirante al grado de Doctor

DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD DE GRANADA



## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, mi más profundo agradecimiento a Paco. No sé qué es más inagotable, si su paciencia o su sabiduría. En cualquier caso, esta tesis no hubiera visto la luz sin ninguna de las dos.

Gracias también a Leo, por los dibujos, y a Miguel Ortega, por la asistencia informática.

Lo mejor de este trabajo es la posibilidad de conocer gente que te haga cambiar la perspectiva de las cosas, y te enseñe que hay formas y *formas* de hacer matemáticas. Por todo eso, y por mucho más, gracias a Pablo, Jose Antonio, Ronaldo, y por supuesto a Manfredo. Y otra parte genial de esto es viajar, y esos viajes no hubieran sido lo mismo sin Magda, Ana, Teresa, César, Antonio y Jose María, gracias.

Y como no todo en la vida son matemáticas... gracias a Migue y a Carmen, que a pesar de haberse ido tan lejos están más cerca que nunca. Gracias a Antonio, porque es mi amigo y me quiere. Gracias a Argenis, Benji, Nuria, Caro, Salva, y todos los que han llenado mi piso y aún así han conseguido que no me echaran del edificio. Gracias a Marta, Lola, Carolina, Javi, Aurora y Pablo, por los buenos recuerdos. Y gracias a Edu... tengo miles de motivos para eso, pero como decía alguien "el margen de este libro es muy pequeño para exponerlos".

Y, como se suele decir, por último que no menos importante, gracias a mi familia, en especial a mis padres, que también deberían ser famosos por su paciencia, entre otras muchas cosas.



A mis padres





Algunas personas  
nunca aprenden nada  
porque todo lo comprenden  
demasiado pronto



# ÍNDICE GENERAL

---

INTRODUCCIÓN	XIII
PRESENTACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS	XVII
<b>1. PRELIMINARES</b>	<b>1</b>
1.1. EL ESPACIO DE LORENTZ-MINKOWSKI $\mathbb{L}^3$	1
1.2. SUPERFICIES ESPACIALES	2
1.2.1. SINGULARIDADES AISLADAS	4
1.2.2. SUPERFICIES ESPACIALES ENTERAS	6
1.3. SUPERFICIES MAXIMALES	9
1.4. REGULARIDAD DE SOLUCIONES DE ECUACIONES ELÍPTICAS	13
1.5. SUPERFICIES DE RIEMANN	16
1.5.1. DIVISORES SOBRE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN	16
1.5.2. LA VARIEDAD JACOBIANA Y LA APLICACIÓN DE ABEL-JACOBI	17
1.5.3. DOBLE DE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN	18
<b>2. SUPERFICIES MAXIMALES CON SINGULARIDADES AISLADAS</b>	<b>21</b>
2.1. TIPOS DE SINGULARIDADES	21
2.2. EL CASO CON BORDE	27
<b>PARTE I: SUPERFICIES MAXIMALES COMPLETAS EN <math>\mathbb{L}^3</math> CON UN NÚMERO FINITO DE SINGULARIDADES</b>	<b>33</b>
<b>3. SUPERFICIES DE TIPO FINITO</b>	<b>35</b>
3.1. COMPORTAMIENTO EN LOS FINALES	37

3.2.	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA . . . . .	41
3.3.	CONSTRUCCIÓN DE EJEMPLOS . . . . .	44
4.	EL CASO EMBEBIDO . . . . .	51
4.1.	COMPORTAMIENTO GLOBAL . . . . .	52
4.2.	ESTRUCTURA DEL ESPACIO DE MODULI . . . . .	58
4.2.1.	ESTRUCTURA CONFORME Y REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS . . . . .	59
4.2.2.	UNA BIYECCIÓN PARA $\mathcal{M}_n$ . . . . .	62
4.2.3.	LA APLICACIÓN $\Gamma$ ES ABIERTA . . . . .	71
4.2.4.	CONCLUSIONES . . . . .	76
	APÉNDICE: DEMOSTRACIÓN DE LOS RESULTADOS TÉCNICOS . . . . .	83
A.1.	DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.6 . . . . .	83
A.2.	ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DEL FIBRADO ESPINORIAL $\mathcal{S}_n$ (TEOREMA 4.7) . . . . .	88
A.3.	DEPENDENCIA DIFERENCIABLE DE LOS DATOS DE WEIERSTRASS (PROPOSICIÓN 4.11) . . . . .	92
	<b>PARTE II: SUPERFICIES MAXIMALES PERIÓDICAS Y COMPLETAS EN EL ESPACIO <math>\mathbb{L}^3</math></b> . . . . .	<b>101</b>
5.	SUPERFICIES PERIÓDICAS DE TIPO FINITO . . . . .	103
6.	LAS POSIBLES ISOMETRÍAS . . . . .	107
6.1.	DESCARTANDO ISOMETRÍAS ELÍPTICAS Y PARABÓLICAS . . . . .	108
6.2.	ESTRUCTURA CONFORME DE UNA SUPERFICIE PERIÓDICA DE TIPO FINITO . . . . .	111
6.3.	DESCARTANDO ISOMETRÍAS HIPERBÓLICAS . . . . .	116
6.4.	CONCLUSIONES . . . . .	119
7.	SUPERFICIES INVARIANTES POR TRASLACIONES . . . . .	125
7.1.	FINALES DE UNA SUPERFICIE SIMPLEMENTE PERIÓDICA . . . . .	126
7.2.	UNA FÓRMULA TIPO JORGE-MEEKS . . . . .	131
7.3.	REPRESENTACIÓN ANALÍTICA . . . . .	132
7.4.	CONSTRUCCIÓN DE EJEMPLOS . . . . .	133
8.	SUPERFICIES EMBEBIDAS SIMPLEMENTE PERIÓDICAS DE TIPO FINITO . . . . .	137
8.1.	ESPACIO DE MODULI . . . . .	139

8.1.1. ESTRUCTURA CONFORME Y REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS . . . . .	139
8.1.2. UNA BIYECCIÓN PARA $\hat{\mathcal{M}}_n$ . . . . .	140
8.1.3. LA APLICACIÓN $\hat{\Gamma}$ ES ABIERTA . . . . .	143
8.1.4. CONCLUSIONES . . . . .	144
PROBLEMAS ABIERTOS	145



# INTRODUCCIÓN

---

Las superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2)$  son objetos de especial interés por situarse en la encrucijada de distintas áreas de la Matemática y de la Física.

Desde el punto de vista variacional, se corresponden con los puntos críticos del funcional área asociado a deformaciones por superficies espaciales (esto es, con métrica inducida riemanniana). De hecho, representan máximos locales para este funcional (de ahí su nombre).

Geoméricamente están caracterizadas como aquellas superficies espaciales de  $\mathbb{L}^3$  con curvatura media nula, lo que permite extender por analogía el concepto a hipersuperficies de  $\mathbb{L}^n$ ,  $n > 3$  (aunque no la caracterización variacional). El que la curvatura media se anule idénticamente equivale a decir que su aplicación de Gauss, que toma valores sobre la esfera de radio  $-1$  de  $\mathbb{L}^3$ , es conforme. Como consecuencia, toda inmersión maximal es armónica y admite una representación conforme (denominada representación de Weierstrass, [Kob]). Esta propiedad es compartida con otras familias interesantes de superficies, como las superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$  [Oss], las superficies de Bryant [Bry] o las superficies llanas en  $\mathbb{H}^3$  [GMM], y permite incorporar técnicas propias del análisis complejo en el estudio de estas superficies.

Los grafos maximales  $u(x_1, x_2)$  sobre dominios del plano  $\{x_3 = 0\}$  de  $\mathbb{L}^3$  ocupan un lugar de privilegio en la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales, ya que satisfacen la ecuación quasilineal y elíptica:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}}\right) = 0,$$

donde  $|\nabla u|^2 < 1$  por la condición de espacialidad. El principio del máximo propio de este tipo de ecuaciones es una herramienta de gran utilidad en el estudio de las superficies maximales, como veremos a lo largo de esta memoria.

Finalmente, desde el punto de vista físico las superficies maximales, junto con las espaciales de curvatura media constante, juegan un papel relevante en la Teoría de la Relatividad, ya que representan las condiciones iniciales naturales para las ecuaciones de Einstein [MT]. Es también interesante comentar que las superficies maximales modelan singularidades de tipo cónico, presentes en diversos fenómenos naturales [Ki] (ciertos solitones en dinámica de fluidos, cosmología, electromagnetismo, etc).

Durante años, el desarrollo de la teoría de superficies maximales se ha circunscrito al estudio del problema de Dirichlet. Propiedades básicas de grafos maximales (existencia, unicidad, convergencia) fueron obtenidos por Bartnik y Simon [BS], entre otros. Klyachin y Miklyukov ([KM], [KM2]) los extendieron al caso de superficies con singularidades. Por otra parte, el problema de Björlink para estas superficies fue tratado por Alías, Chaves y Mira en [ACM].

Nuestro interés se centrará en propiedades geométricas de naturaleza global, esto es, con la completitud como hipótesis fundamental. Es conocido que una superficie espacial completa es un grafo sobre cualquier plano espacial. En el caso maximal, Calabi [Ca] para  $n = 3, 4$  y Cheng-Yau [ChY] para  $n$  arbitrario, probaron aún más:

*Las únicas hipersuperficies maximales y completas en  $\mathbb{L}^n$  son los hiperplanos espaciales.*

Como consecuencia de este resultado, el desarrollo de la teoría global de hipersuperficies maximales en  $\mathbb{L}^n$  (nosotros nos ocuparemos sólo del caso  $n = 3$ ) ha de centrarse en las hipersuperficies con puntos singulares (puntos donde la métrica degenera, o equivalentemente, el hiperplano tangente es luminoso). En este ámbito hay que situar algunos trabajos previos de Estudillo y Romero [ER].



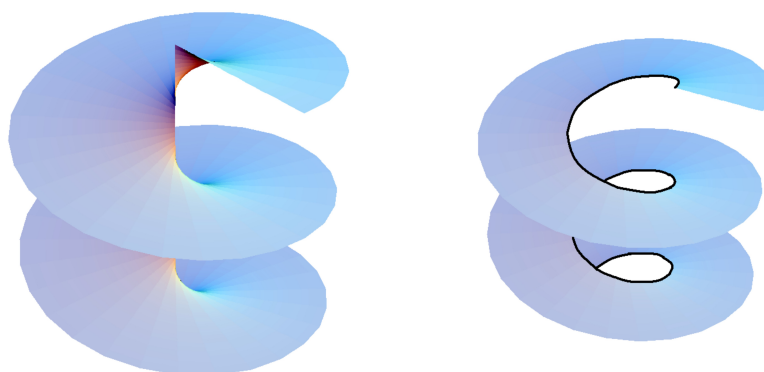


Figura 1: El helicoides (izquierda) y la parte de él que es maximal con su curva singular (derecha).

Cobra por tanto relevancia la comprensión de la geometría de las singularidades asociadas a superficies maximales en  $\mathbb{L}^3$ . Como una primera aproximación, señalaremos que los puntos singulares se presentan tanto de forma aislada o distribuidos a lo largo de curvas analíticas sobre la superficie. Por ejemplo, el helicoides maximal (Figura 1) tiene una hélice de singularidades, mientras que la catenoide lorentziana (Figura 2) tiene sólo un punto singular.

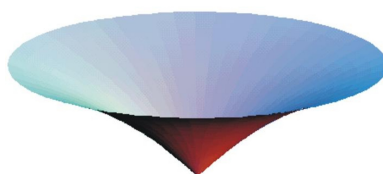


Figura 2: Catenoide Lorentziana

Umehara y Yamada [UY] han estudiado el comportamiento de una familia de superficies maximales con conjunto de singularidades compacto, denominadas por estos autores *maxfaces*, que en cierto sentido pueden considerarse como la generalización natural de la familia de superficies minimales completas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura total finita. Por otro lado, A. A. Klyachin [Kly] ha obtenido resultados de existencia y unicidad de grafos maximales con conjunto de singularidades compacto, describiendo su comportamiento en el infinito: son asintóticas a planos o a medias catenoides.

El objetivo fundamental de esta memoria es el estudio de las superficies maximales propiamente *embebidas* (esto es, sin autointersecciones) con singularidades aisladas en  $\mathbb{L}^3$  y más generalmente en 3-variedades lorentzianas completas y llanas. Gran parte de nuestro análisis se extenderá de forma natural al caso no embebido. Los principales resultados obtenidos están recogidos en los trabajos de investigación [FLS1], [FLS2], [FL1] y [FL2].

La elección de esta familia de superficies es natural por diversas razones. Primero, es bien conocido que la hipótesis de embebimiento resulta básica en el contexto de la teoría de subvariedades. El estudio de la geometría y topología subyacente a la familia de superficies embebidas, al igual que ocurre en otros ambientes (superficies minimales o superficies de curvatura media constante en 3-variedades riemannianas, por ejemplo), es interesante en sí mismo y resulta fundamental para la comprensión de la geometría de la variedad ambiente.

Además, las únicas singularidades aisladas localmente embebidas son las cónicas, que como explicamos anteriormente, están sustentadas por una evidente intuición física. Alrededor de una singularidad cónica la superficie es asintótica a un semi-cono de luz, el vector normal no está bien definido (sus valores asintóticos recorren todas las direcciones luminosas) y la curvatura de Gauss explota a infinito.

Por último, indicaremos también que la familia de superficies maximales embebidas con singularidades aisladas es muy amplia, e incluye ejemplos con interesantes propiedades geométricas. El ejemplo más representativo es la semicatenoide lorentziana en  $\mathbb{L}^3$  (Figura 2), que se obtiene al girar la curva  $z = \sinh(cy)$  alrededor del eje  $z$ . Ecker [Eck] caracterizó a la catenoide como el único grafo maximal con un punto singular, y Kobayashi [Kob] como la única superficie maximal con aplicación de Gauss inyectiva. Otra familia interesante son los ejemplos tipo Riemann descritos en [LLS] (Figura 3), una familia 1-paramétrica de grafos maximales con dos puntos cónicos, asintóticos a planos horizontales y foliados por círculos, rectas o puntos en planos horizontales, propiedad esta última que los caracteriza.



Figura 3: Superficie maximal de tipo Riemann

# PRESENTACIÓN DE RESULTADOS OBTENIDOS

---

A grandes rasgos, esta memoria consta de tres bloques bien diferenciados.

El primero tiene carácter preliminar. En él, tras establecer las definiciones y resultados básicos para nuestro estudio posterior (Capítulo 1), estudiaremos las propiedades locales de las superficies maximales alrededor de las singularidades (Capítulo 2). Concretamente, clasificamos las singularidades aisladas en espaciales y luminosas, dependiendo del comportamiento de la estructura conforme de la superficie en la singularidad. La aplicación de Gauss extiende de forma holomorfa a las singularidades espaciales, y no lo hace a las luminosas. Topológicamente, los puntos singulares se corresponden con los puntos de ramificación de la proyección ortogonal de la superficie sobre planos espaciales, excepción hecha de los puntos cónicos (para los que esta proyección es uno a uno). Así, una singularidad luminosa es embebida si y sólo si es de tipo cónico, y las singularidades espaciales nunca puede ser embebidas.

Obtendremos también información acerca de la estructura conforme subyacente a una superficie maximal propiamente inmersa en  $\mathbb{L}^3$ , bajo ciertas condiciones geométricas. Así en el Teorema 2.3 se prueba que:

*Si la “norma” lorentziana sobre una superficie maximal en  $\mathbb{L}^3$  (posiblemente con frontera no vacía) es una función positiva y propia, entonces ésta tiene estructura conforme parabólica.*

Uno de los conceptos fundamentales en esta memoria es el de superficie maximal de tipo finito. Una superficie maximal propiamente inmersa en  $\mathbb{L}^3$  se dice de tipo finito si tiene topología finita y un número finito de singularidades. Estas superficies son multigrafos enteros con un número finito de hojas, y sus puntos de ramificación se corresponden con las singularidades no embebidas de la superficie.

Este concepto se extiende de forma natural a superficies maximales propiamente inmersas en una 3-variedad de Lorentz completa y llana  $\mathcal{N}$ . Es conocido que cualquier variedad  $\mathcal{N}$  como la anterior es isomorfa a un cociente  $\mathbb{L}^3/G$  siendo  $G$  un grupo de isometrías de  $\mathbb{L}^3$  que actúa de forma propia y discontinua. Diremos que una superficie maximal propiamente inmersa en  $\mathcal{N}$  es de tipo finito si tiene topología finita, un número finito de singularidades, y existe una geodésica temporal completa en  $\mathcal{N}$  que corta a la superficie sólo para valores finitos del parámetro tiempo. El levantamiento a  $\mathbb{L}^3$  de este tipo de superficies es un multigrafo entero con un número finito de hojas, y sus puntos de ramificación se corresponden con los levantamientos de las singularidades no embebidas de la superficie. Recíprocamente, todo multigrafo satisfaciendo las condiciones anteriores e invariante por un grupo discreto de isometrías  $G$  de  $\mathbb{L}^3$  actuando de forma propia y discontinua en  $\mathbb{L}^3$ , induce en  $\mathcal{N} = \mathbb{L}^3/G$  una superficie de tipo finito. Así, las superficies maximales en 3-variedades completas y llanas están íntimamente relacionadas con las superficies maximales y periódicas de  $\mathbb{L}^3$ .

Dedicaremos el segundo bloque de la memoria (Parte I) a las propiedades de las superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ , y finalmente en la Parte II extenderemos este estudio a las superficies de tipo finito en 3-variedades de Lorentz completas y llanas.

Así, en las Proposiciones 3.1 y 6.8 demostramos que los conceptos de “completitud” y “ser propia” son equivalentes para inmersiones de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  y  $\mathcal{N}$  respectivamente, y a su vez, equivalentes a que el correspondiente multigrafo en  $\mathbb{L}^3$  sea entero. También probamos que la estructura conforme de una superficie maximal de tipo finito es biholomorfa a la de una superficie de Riemann compacta menos una cantidad finita de puntos (tipo conforme finito), y sus datos de Weierstrass (incluida la aplicación de Gauss) extienden de forma holomorfa a los finales topológicos de la superficie. Además controlamos el comportamiento asintótico en el infinito (Proposiciones 3.3 y 7.2) y establecemos fórmulas de tipo Jorge-Meeks (Ecuaciones (3.1) y (7.7)) para este tipo de

superficies. Como consecuencia, probamos un teorema de representación (Teorema 3.5 en  $\mathbb{L}^3$  y Teorema 7.3 en  $\mathcal{N}$ ) que se muestra especialmente útil para la construcción de nuevos ejemplos. Todos estos resultados tienen un enunciado particularmente sencillo en el caso embebido, en el que todas las singularidades son cónicas. En la Subsección 3.3 construimos de forma explícita varias familias de superficies maximales embebidas en  $\mathbb{L}^3$  con un número arbitrario de singularidades e interesantes propiedades geométricas, en especial relativas a su simetría. Ejemplos periódicos pueden encontrarse en la Subsección 7.4.

En Capítulo 4 estudiamos el espacio de moduli de las superficies maximales embebidas en  $\mathbb{L}^3$  con una cantidad finita de singularidades. Toda superficie de esta naturaleza es un grafo sobre el plano  $\{x_3 = 0\}$  asintótico a una catenoide o un plano. El comportamiento asintótico de la superficie está por tanto controlado por el crecimiento logarítmico del grafo, y de hecho el principio del máximo permite establecer que la posición de los puntos singulares y el crecimiento logarítmico determinan unívocamente al grafo.

Si denotamos por  $\mathcal{M}_n$  al conjunto de los grafos maximales sobre  $\{x_3 = 0\}$  con  $n + 1$  puntos singulares, demostraremos en el Corolario 4.13 y el Teorema 4.15 que:

*Los vectores de posición de los puntos singulares y el crecimiento logarítmico de un grafo proporcionan coordenadas analíticas sobre  $\mathcal{M}_n$ , dotando a este espacio de estructura de variedad analítica de dimensión  $3n + 4$ . La topología subyacente a  $\mathcal{M}_n$  coincide con la asociada a la convergencia uniforme de grafos sobre dominios compactos del plano  $\{x_3 = 0\}$ , y es equivalente a la convergencia de estructuras conformes y datos de Weierstrass.*

Ya en la última parte de la memoria, en el Capítulo 6 estudiaremos la influencia que impone a la geometría de una 3-variedad de Lorentz completa y llana  $\mathcal{N}$  la existencia de una superficie maximal de tipo finito. Como estas variedades son de la forma  $\mathcal{N} = \mathbb{L}^3/G$ , donde  $G$  es un grupo de isometrías actuando de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{L}^3$ , la clasificación de estas variedades se convierte en un problema de naturaleza geométrico-algebraica. Margulis [Mar] probó la existencia de una familia amplia de variedades  $\mathcal{N}$  cuyo grupo fundamental  $G$  es libre no abeliano, mientras que Mess [Mess] demostró que  $G$  no puede ser isomorfo al grupo fundamental de una superficie topológica compacta de característica de Euler negativa. Estos hechos pueden ayudar a entender por qué el problema general de clasificación resulta bastante complejo (de

hecho aún hoy permanece abierto). En este contexto, el siguiente resultado es quizás uno de los mayores logros de esta memoria (Teoremas 6.7):

*Sea  $N = \mathbb{L}^3/G$  una 3-variedad lorentziana completa, llana, orientable y ortocrona, y supongamos que existe una superficie maximal  $S$  propiamente inmersa y de tipo finito en  $\mathcal{N}$ . Entonces  $G$  es un grupo de traslaciones espaciales de rango uno o dos.*

Como consecuencia de este resultado, la teoría de superficies periódicas en  $\mathbb{L}^3$  con un número finito de singularidades en su región fundamental se reduce al estudio de superficies invariantes por grupos de traslaciones espaciales de rango uno (simplemente periódicas) o dos (doblemente periódicas).

Concluimos esta memoria estudiando el espacio de moduli  $\hat{\mathcal{M}}_n$  de las superficies maximales embebidas y simplemente periódicas con  $n + 1$  puntos singulares en su región fundamental. Estas superficies son grafos sobre planos espaciales asintóticos a dos semi-planos espaciales (finales tipo Scherk). El principio del máximo de nuevo nos dice que estos semiplanos junto con la posición de los puntos singulares determinan unívocamente a la superficie. El análisis es muy similar al que se hizo con las superficies en  $\mathbb{L}^3$ , y nos permite concluir el siguiente resultado (Corolario 8.6 y Teorema 8.8):

*Si normalizamos los grafos de  $\hat{\mathcal{M}}_n$  para que sean invariantes por la traslación de vector  $(1, 0, 0)$  y el primero de los finales Scherk sea el semi-plano horizontal  $\{x_3 = 0, x_2 \leq 0\}$ , entonces los vectores de posición de los puntos singulares y la pendiente del segundo final Scherk del grafo proporcionan coordenadas analíticas sobre  $\hat{\mathcal{M}}_n$ , dotando a este espacio de estructura de variedad analítica de dimensión  $3n + 4$ . La topología subyacente a  $\hat{\mathcal{M}}_n$  coincide con la asociada a la convergencia uniforme de grafos sobre dominios compactos del plano  $\{x_3 = 0\}$ , y es equivalente a la convergencia de estructuras conformes y datos de Weierstrass.*

Finalmente, hemos querido acabar proponiendo una serie de problemas abiertos. Algunos de ellos son continuación natural del trabajo iniciado en la memoria, que por limitaciones de tiempo no han podido ser debidamente desarrollados. Otros proponen líneas de investigación complementarias a las aquí desarrolladas, pero también de gran interés.

# PRELIMINARES

---

## 1.1. EL ESPACIO DE LORENTZ-MINKOWSKI $\mathbb{L}^3$

El espacio de Lorentz-Minkowski de dimensión 3 es el espacio  $\mathbb{R}^3$  junto con el producto escalar lorentziano canónico,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3, \quad x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Un vector  $v \in \mathbb{L}^3 \setminus \{0\}$  se dice *espacial* (resp. *temporal*, *luminoso*) si  $\langle v, v \rangle > 0$  (resp.  $< 0$ ,  $= 0$ ). El vector  $v = 0 \in \mathbb{L}^3$  es espacial por definición.

Análogamente diremos que un plano o una recta afín de  $\mathbb{L}^3$  es espacial, temporal o luminosa si la restricción de la métrica a su variedad de dirección es una métrica definida positiva, lorentziana, o indefinida respectivamente.

El conjunto de todas las rectas luminosas que pasan por un punto  $P_0 \in \mathbb{L}^3$  se denomina el *cono de luz* de  $P_0$ . El interior de dicho cono está formado por las rectas temporales que pasan por  $P_0$ , mientras que la parte exterior consta de las rectas espaciales que contienen al punto.

Denotaremos por  $\text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  al grupo de todas las isometrías afines (o movimientos rígidos) de  $\mathbb{L}^3$ . Al subgrupo formado por las isometrías positivas lo denotaremos por

$\text{Iso}_+(\mathbb{L}^3)$ , mientras que  $\text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^3)$  representará el subgrupo de las isometrías ortocronas (es decir, aquellas que conservan la orientación temporal). Finalmente,  $\text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^3) = \text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^3) \cap \text{Iso}_+(\mathbb{L}^3)$ .

Una rotación en  $\mathbb{L}^3$  es una isometría lineal y positiva cuyo subespacio de puntos fijos es un recta. La rotación se dice elíptica, hiperbólica o parabólica si dicha recta es temporal, espacial o luminosa respectivamente. Un movimiento helicoidal es un movimiento rígido no lineal cuya parte lineal asociada es una rotación.

**Observación 1.1** *Cualquier isometría positiva  $R \in \text{Iso}_+(\mathbb{L}^3)$  que no sea una traslación puede ser escrita, para cierto sistema de referencia, de la siguiente forma:*

$$(1) R((x, y, z)) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, t \in ]0, 2\pi[, \text{ (caso elíptico)}.$$

$$(2) R((x, y, z)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon \cosh t & \epsilon \sinh t \\ 0 & \epsilon \sinh t & \epsilon \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \epsilon = \pm 1, t \in \mathbb{R} (t \neq 0 \text{ if } \epsilon = 1), \text{ (caso hiperbólico)}.$$

$$(3) R((x, y, z)) = \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - t^2/2 & t^2/2 \\ t & -t^2/2 & 1 + t^2/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, t \neq 0, \text{ (caso parabólico)}.$$

El parámetro  $t$  es llamado el ángulo de  $R$ . Además,  $R$  es un movimiento helicoidal si y sólo si  $\lambda \neq 0$ .

## 1.2. SUPERFICIES ESPACIALES

En general, una superficie inmersa en una variedad de Lorentz  $\mathcal{N}$  se dice que es *espacial* cuando la restricción de la métrica de  $\mathcal{N}$  a la superficie es una métrica riemanniana (i.e., definida positiva). Dicho de otro modo, una superficie espacial es aquella en la que el plano tangente en cada punto es un plano espacial. Análogamente, diremos que una inmersión  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  es *espacial* cuando el pullback de la métrica de  $\mathcal{N}$  vía  $\psi$  es una métrica riemanniana.

Una superficie (o inmersión) espacial es *completa* cuando lo es como superficie riemanniana.



Como cualquier superficie riemanniana orientable, las superficies espaciales orientables poseen una estructura compleja asociada a su métrica (son *superficies de Riemann*, véase la Sección 1.5).

**Observación 1.2** *Contrariamente a lo que ocurre en el caso Riemanniano, una superficie espacial y propia en  $\mathbb{L}^3$  no tiene por qué ser completa. Por ejemplo considérese la superficie  $\mathcal{S} = \{(s, t, |t| + e^{-|t|}) : s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{L}^3$  representada en la Figura 1.1. Esta superficie es propia (es de hecho un grafo sobre el plano  $\{x_3 = 0\}$ ) pero no es completa, ya que la curva  $\alpha(t) = (0, t, t + e^{-t})$ ,  $t > 0$ , es una curva divergente con longitud finita.*

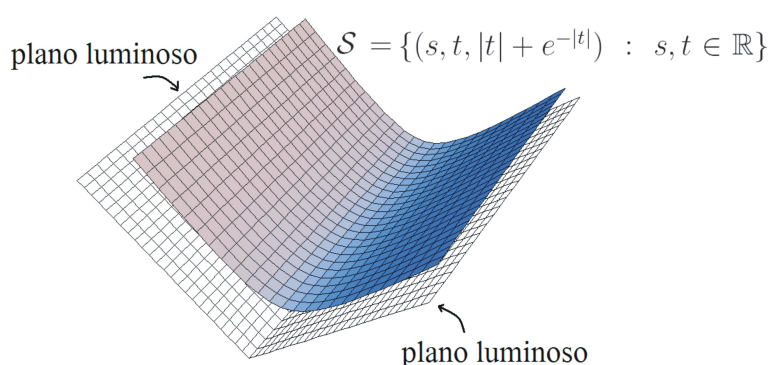


Figura 1.1: Ejemplo de superficie espacial propia y no completa en  $\mathbb{L}^3$ .

En el caso particular de que la variedad ambiente sea  $\mathbb{L}^3$ , dada una inmersión espacial  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  podemos considerar su vector normal unitario (o aplicación de Gauss)  $N$  que, debido al carácter espacial de la superficie, debe ser un vector temporal. Por lo tanto  $N$  tomará valores en la esfera  $\mathbb{H}^2 = \{p \in \mathbb{L}^3 : \langle p, p \rangle = -1\}$ . Denotaremos a las dos componentes conexas de  $\mathbb{H}^2$  por  $\mathbb{H}_+^2 = \{p \in \mathbb{H}^2 : x_3(p) > 0\}$  y  $\mathbb{H}_-^2 = \{p \in \mathbb{H}^2 : x_3(p) < 0\}$ . En particular las superficies espaciales de  $\mathbb{L}^3$  son siempre orientables. Puesto que siempre trabajaremos con superficies conexas, supondremos que la superficie está orientada de forma que  $N$  toma valores en la componente conexas inferior de  $\mathbb{H}^2$ ,  $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}_-^2$ .

El carácter espacial también implica, por ejemplo, que las superficies espaciales de  $\mathbb{L}^3$  son grafos locales sobre cualquier plano espacial, es decir, la proyección ortogonal (en el sentido lorentziano) sobre cualquier plano espacial es un homeomorfismo local. De hecho es fácil demostrar el siguiente resultado:

**Propiedad 1.1** Una superficie espacial y completa en  $\mathbb{L}^3$  ha de ser un grafo sobre cualquier plano espacial. El mismo resultado es cierto si reemplazamos la hipótesis de completitud por la de ser propia en  $\mathbb{L}^3$ .

En particular las superficies espaciales completas (o propias) de  $\mathbb{L}^3$  son siempre embebidas.

### 1.2.1. SINGULARIDADES AISLADAS

**Definición 1.1** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  una aplicación continua de una superficie diferenciable  $\mathcal{S}$  en una 3-variedad de Lorentz  $\mathcal{N}$  y  $F \subset \mathcal{S}$  un subconjunto de puntos aislados en  $\mathcal{S}$ . Diremos que  $\psi$  es una inmersión espacial con singularidades en  $F$  si:

- $\psi|_{\mathcal{S} \setminus F}$  es una inmersión espacial,
- dado  $p \in F$ ,  $U \subset \mathcal{S}$  un entorno suyo tal que  $F \cap U = \{p\}$ , y  $z$  un parámetro conforme en  $U \setminus \{p\}$  para el que la métrica inducida por  $\psi|_{\mathcal{S} \setminus F}$  se escribe como  $ds^2 = h(z)|dz|^2$ , se cumple que  $\lim_{q \rightarrow p} h(z(q)) = 0$ .

Además diremos que un punto  $p \in F$  es una singularidad embebida si la superficie  $\psi(\mathcal{S})$  está embebida en un entorno de  $\psi(p)$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  En esta memoria nos centraremos exclusivamente en las superficies con singularidades aisladas. Por tanto, de ahora en adelante todas las singularidades que consideremos serán de este tipo, aunque no lo digamos explícitamente.

Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  una superficie espacial borde con  $\partial\mathcal{S}$  (que puede ser vacío) y con singularidades aisladas en  $F \subset \text{Int}\mathcal{S} = \mathcal{S} \setminus \partial\mathcal{S}$ . De la definición anterior se desprende que  $\mathcal{S} \setminus F$  posee una estructura conforme asociada a la métrica riemanniana inducida por  $\psi$ . Alrededor de un punto de  $F$  la superficie puede ser biholomorfa a un disco punteado o a un anillo. En otras palabras,  $\mathcal{S} \setminus F$  es biholomorfa a una superficie de Riemann  $\mathcal{S}'_0$  con borde (en caso de que  $\partial\mathcal{S} \neq \emptyset$ ), menos una colección de puntos interiores  $\{p_j : j \in J\}$  (que se corresponderían con las singularidades que son del tipo del disco punteado) o de discos cerrados  $\{D_i : i \in I\}$  (que se corresponden con las singularidades de tipo anillo) contenidos también en el interior de  $\mathcal{S}'_0$  y disjuntos dos a dos.

**Definición 1.2 (Soporte conforme)** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  una inmersión espacial con singularidades aisladas en  $F \subset \mathcal{S}$ . Consideremos la superficie de Riemann con borde  $\mathcal{S}'_0$  construida anteriormente. Diremos que la superficie de Riemann con borde  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}'_0 \setminus \bigcup_{i \in I} \text{Int}(D_i)$  es el soporte conforme de la inmersión. La correspondiente reparametrización conforme será denotada por  $\psi_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{N}$  (ver Figura 1.2.1).

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Es importante observar que, en caso de que la superficie  $S$  no tenga borde, el borde de su soporte conforme  $S_0$  consta de una unión disjunta de curvas de Jordan analíticas, que se corresponden con las singularidades que son de tipo anillo. Cuando  $\partial S \neq \emptyset$ , el borde de  $S_0$  consta de una unión disjunta de curvas de Jordan analíticas, y otras curvas (también analíticas y disjuntas de las anteriores) que se corresponde con  $\partial S$ .

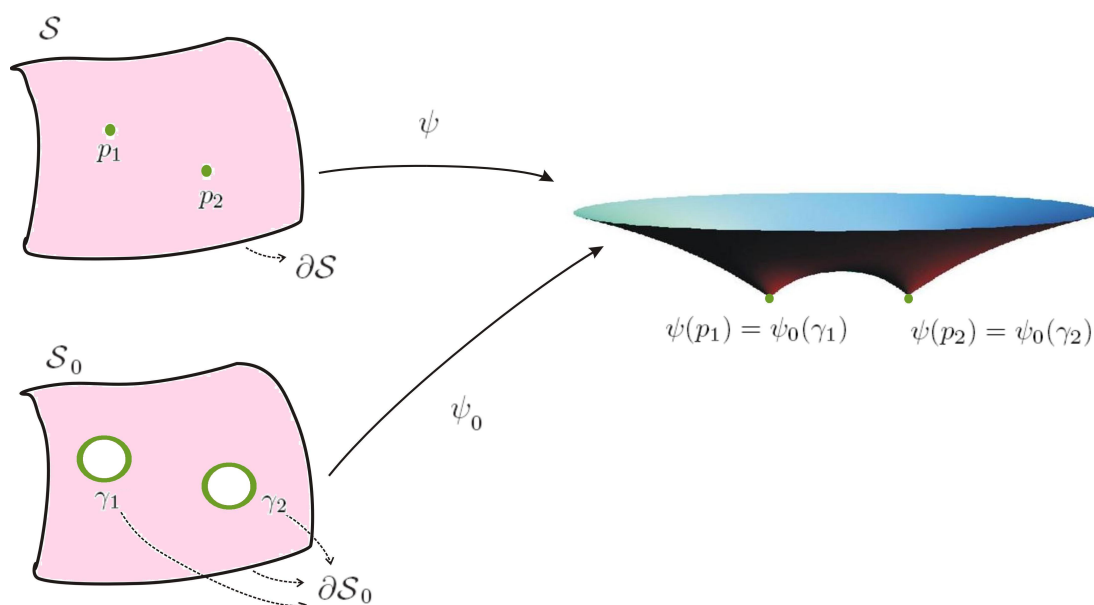


Figura 1.2: Soporte conforme de una superficie espacial con dos singularidades de tipo anillo.

El siguiente lema extiende (localmente) la Propiedad 1.1 al caso de superficies con singularidades aisladas.

**Lema 1.1 (Comportamiento local de las singularidades en  $\mathbb{L}^3$ )** Sea  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{L}^3$  una inmersión espacial definida en un disco cerrado  $\mathbb{D}$ , y supongamos que  $\psi$  tiene una única singularidad en un punto interior  $q \in \mathbb{D}$ . Sea  $\Pi$  un plano espacial de  $\mathbb{L}^3$  y  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$  la correspondiente proyección ortogonal Lorentziana.

Entonces, localmente alrededor de  $q$ ,  $\pi \circ \psi$  es un recubridor finito ramificado en la singularidad. Como consecuencia, la singularidad es embebida si y sólo si, en un entorno de  $q$ ,  $\psi$  es un grafo sobre cualquier plano espacial.

*Demostración:* Después de una isometría de  $\mathbb{L}^3$  podemos suponer que  $\Pi = \{x_3 = 0\}$  y que  $P_0 = \psi(q)$  coincide con el origen. Denotaremos  $D = \psi(\mathbb{D})$ .

**Afirmación:** Existe un disco cerrado  $U$  en  $\{x_3 = 0\}$  centrado en el origen tal que la componente conexa  $V$  de  $(\pi \circ \psi)^{-1}(U)$  que contiene a  $q$  verifica:

$$\psi(\partial V \setminus \{q\}) \subset \pi^{-1}(\partial U).$$

*Demostración de la Afirmación:* Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que existe una sucesión  $\{s_h\} \rightarrow 0$  de números reales positivos tales que, para cada  $h$ ,  $\psi(\partial V_h)$  no está contenida en  $\pi^{-1}(\partial U_h)$ , donde  $U_h$  es el disco de radio  $s_h$  en  $\Pi$  centrado en el origen y  $V_h$  es la componente conexa de  $\psi^{-1}(D \cap \pi^{-1}(U_h))$  que contiene a  $q$ . Por lo tanto,  $V_h$  es un dominio conexo que contiene a  $q$  y a una pieza de  $\partial \mathbb{D}$  en su frontera. Como consecuencia, el conjunto  $\psi^{-1}(D \cap \{(0, 0, x) : x \in \mathbb{R}\})$  contiene una curva de Jordan uniendo  $q$  y  $\partial \mathbb{D}$ . Pero esto contradice que  $\psi$  es espacial en  $\mathbb{D} \setminus \{q\}$ , lo que demuestra la afirmación.  $\diamond$

Veamos ahora que  $\pi \circ \psi : V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0) \rightarrow U \setminus \{0\}$  es un recubridor finito.

Puesto que  $\psi$  es espacial en  $\mathbb{D} \setminus \{q\}$ , la composición  $\pi \circ \psi$  es un difeomorfismo local en este conjunto y por tanto  $\pi \circ \psi : V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0) \rightarrow U \setminus \{0\}$  es también un difeomorfismo local (recuérdese que  $(\pi \circ \psi)(\partial V)$  está contenida en  $\partial U$ ). Por otro lado,  $(\pi \circ \psi)^{-1}(0) \cap V$  es compacto, por lo que  $\pi \circ \psi : V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0) \rightarrow U \setminus \{0\}$  es propia. Por tanto  $\pi \circ \psi : V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0) \rightarrow U \setminus \{0\}$  es un recubridor finito. Además como  $U \setminus \{0\}$  es un cilindro, también debe serlo  $V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0)$  por lo que deducimos que  $(\pi \circ \psi)^{-1}(0) \cap V = \{q\}$ .

Finalmente, nótese que  $\psi : V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{L}^3$  es un embebimiento si y sólo si la aplicación continua  $x_3$  separa las fibras del recubridor  $\pi \circ \psi : V \setminus (\pi \circ \psi)^{-1}(0) \rightarrow U \setminus \{0\}$ . Esto es equivalente a decir que el recubridor es un homeomorfismo, es decir,  $D$  es un grafo sobre  $\{x_3 = 0\}$  en un entorno de la singularidad  $P_0 \in D$ .  $\square$

### 1.2.2. SUPERFICIES ESPACIALES ENTERAS

Al comienzo de esta sección vimos que las superficies espaciales de  $\mathbb{L}^3$  son grafos locales sobre cualquier plano espacial. Sin embargo este hecho no es cierto cuando permitimos la existencia de singularidades, a menos que las singularidades sean embebidas (Lema 1.1). Es por esto que necesitaremos la siguiente definición.

**Definición 1.3 (Multigrafo entero)** Diremos que una aplicación continua  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es un multigrafo entero sobre un plano espacial  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  cuando al componer con la proyección ortogonal a dicho plano,  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$ , la aplicación resultante  $\pi \circ \psi$  es un recubridor ramificado del plano  $\Pi$ .

El número de hojas del multigrafo es, por definición, el número de hojas del recubridor (que puede ser infinito).

Obviamente, un grafo es un caso particular de multigrafo, cuando el número de hojas del recubridor es uno.

En el caso de superficies espaciales el plano  $\Pi$  no tiene un papel especial en la definición de multigrafo, ya que puede ser sustituido por cualquier otro plano espacial, como muestra el siguiente resultado.

**Lema 1.2** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  una superficie espacial (posiblemente con singularidades). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $\psi$  es un multigrafo entero sobre un plano espacial,
- (2)  $\psi$  es un multigrafo entero sobre cualquier plano espacial.

En este caso, el número de hojas de  $\psi$  como multigrafo es independiente del plano espacial elegido. Como consecuencia, la superficie es embebida si y sólo si todas sus singularidades son embebidas. En este caso la superficie es un grafo sobre cualquier plano espacial.

*Demostración:* Supongamos que  $\psi$  es un multigrafo entero sobre un plano espacial  $\Pi_0$ , y denotemos por  $\pi_0 : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi_0$  la proyección ortogonal asociada.

Sea  $\Pi$  otro plano espacial y  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$  la correspondiente proyección ortogonal. En virtud de Lema 1.1  $\pi \circ \psi$  es un homeomorfismo local ramificado. Comprobemos además que posee la propiedad del levantamiento de curvas. Para ello consideremos una curva  $\beta : [0, 1] \rightarrow \Pi$  y un levantamiento suyo  $\alpha : [0, \epsilon[ \rightarrow \mathcal{S}$  vía  $\pi \circ \psi$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $\alpha$  es inextensible, es decir, no existe  $\lim_{t \rightarrow \epsilon} \alpha(t)$ .

Veamos que sí existe el límite de  $\psi(\alpha(t))$  cuando  $t \rightarrow \epsilon$ . En efecto, en caso contrario  $\langle \psi(\alpha(t)), v \rangle$  sería oscilatorio o divergente, donde  $v \in \Pi^\perp$ . Por tanto  $\int_0^\epsilon |\langle (\psi \circ \alpha)'(t), v \rangle| dt = +\infty$ . Pero por otro lado,  $\psi \circ \alpha$  es una curva espacial a trozos por lo que

$$\int_0^\epsilon |\langle (\psi \circ \alpha)'(t), v \rangle| dt \leq L(\beta) < \infty,$$

lo que nos lleva a contradicción. En particular, existe  $\lim_{t \rightarrow \epsilon} (\pi_0 \circ \psi)(\alpha(t))$ , lo que contradice la propiedad del levantamiento de curvas para  $\pi_0 \circ \psi$ . Por tanto  $\psi$  es un multigrafo entero sobre  $\Pi$ , lo que termina la primera parte del lema.

Para la segunda parte supongamos que  $\psi$  es un multigrafo de  $k$  hojas sobre  $\Pi$ . Sea  $v \in \Pi^\perp \cap \mathbb{H}_+^2$  el vector unitario perpendicular a dicho plano apuntando al futuro, y consideremos un punto  $p \in \Pi$  tal que  $(\pi \circ \psi)^{-1}(p)$  conste de  $k$  puntos distintos. Para cada uno de esos puntos consideremos un entorno  $V_j$  suficientemente pequeño,  $j = 1, \dots, k$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\pi(\psi(V_j))$  es convexo para todo  $j$ .

Por tanto, para  $w \in \mathbb{H}_+^2$  suficientemente cerca de  $v$ , la recta  $\ell_w = \{p + tw : t \in \mathbb{R}\}$  verifica que  $\psi^{-1}(\ell_w) \cap V_j$  consta de un único punto para todo  $j$ . Veamos que de hecho existe un entorno  $W$  de  $v$  en  $\mathbb{H}_+^2$  de forma que, para cada  $w \in W$ ,  $\psi^{-1}(\ell_w)$  tiene también  $k$  puntos distintos. En efecto, de no ser así existiría una sucesión  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow v$  para la que existirían puntos  $q_n \in \psi^{-1}(\ell_{v_n}) \setminus \cup_j V_j$ . En particular,  $\{\pi(\psi(q_n))\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow p$ , y puesto que  $\pi \circ \psi$  es una aplicación propia, la sucesión  $\{q_n\}$  debería tener una parcial convergente a algún punto de  $(\pi \circ \psi)^{-1}(p) \subset \cup_j V_j$ , lo que nos lleva a contradicción y muestra que el número de hojas del multigrafo es localmente constante en  $v \in \mathbb{H}_+^2$ , y por tanto globalmente constante.

La parte final es consecuencia del Lema 1.1. □

Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.4 (Superficie entera en  $\mathbb{L}^3$ )** Diremos que una superficie espacial  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  (posiblemente con singularidades) es entera si es un multigrafo entero sobre cualquier plano espacial, o equivalentemente sobre un plano espacial.

**Proposición 1.3** Una superficie espacial (posiblemente con singularidades aisladas) y propia en  $\mathbb{L}^3$  es entera. Lo mismo ocurre si la superficie es completa.<sup>1</sup>

*Demostración:* Supongamos que  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es una superficie espacial. Sea  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  un plano espacial y  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$  la correspondiente proyección ortogonal. Por el Lema 1.1 sabemos que  $h := \pi \circ \psi$  es un homeomorfismo local ramificado en las singularidades de la superficie. Comprobemos que  $h$  tiene además la propiedad del levantamiento de curvas. Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \Pi$  una curva diferenciable y  $\tilde{\alpha} : [0, \epsilon[ \rightarrow \mathcal{S}$  un levantamiento (local) suyo vía  $h$ . Veamos que  $\tilde{\alpha}$  extiende de forma continua a  $t = \epsilon$ .

<sup>1</sup>Como ya vimos en la Observación 1.2, en el ambiente Lorentziano en general propia  $\neq$  completa.

En el caso de que  $\psi$  sea propia, basta demostrar que la curva  $\psi \circ \tilde{\alpha}$  tiene límite en  $\varepsilon$ . Para ello escribamos

$$\psi \circ \tilde{\alpha} = \alpha - \langle \psi \circ \tilde{\alpha}, v \rangle v,$$

donde  $v$  es un vector unitario (temporal) en  $\Pi^\perp$ . Como  $\psi$  es espacial salvo en puntos aislados,  $\langle \alpha', \alpha' \rangle^2 \geq \langle (\psi \circ \tilde{\alpha})', v \rangle^2$ . Integrando esta relación, y utilizando que  $\alpha$  está acotada obtenemos que la función  $\langle \psi \circ \tilde{\alpha}, v \rangle$  también lo está. Por lo tanto, la norma euclídea de  $\psi \circ \tilde{\alpha}$  está acotada y, puesto que dicha curva no puede acumularse a lo largo de un segmento temporal de  $\mathbb{L}^3$  (esto estaría en contradicción con su carácter espacial) deducimos que  $\psi \circ \tilde{\alpha}$  extiende de forma continua a  $t = \varepsilon$ , lo que termina la primera parte del lema.

Supongamos ahora que la inmersión es completa, y sean  $\alpha$  y  $\tilde{\alpha}$  como antes. Si denotamos por  $ds_0^2$  la métrica Riemanniana inducida en  $\Pi$  por la métrica de  $\mathbb{L}^3$  y por  $ds^2$  la métrica en  $\mathcal{S}$  entonces

$$(\psi \circ \pi)^*(ds_0^2) \geq ds^2.$$

Por lo tanto, la longitud de  $\tilde{\alpha}$  en  $\mathcal{S}$  es finita, con lo que no puede ser una curva divergente.  $\square$

### 1.3. SUPERFICIES MAXIMALES

Una superficie espacial inmersa en una variedad Lorentziana se dice *maximal* si su curvatura media es constantemente cero. En este trabajo nos centraremos principalmente en el caso en que la variedad ambiente sea  $\mathbb{L}^3$ , aunque también estudiaremos superficies maximales en cocientes de  $\mathbb{L}^3$  debido a su estrecha relación con aquellas (ver Capítulo 5).

Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es una inmersión espacial y conforme con aplicación de Gauss  $N$  y curvatura media  $H$ . Si denotamos por  $\psi = (X_1, X_2, X_3)$  a las funciones coordenadas de  $\psi$ , se tiene la siguiente relación:

$$\Delta\psi = (\Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3) = 2H N,$$

donde  $\Delta$  es el operador Laplaciano sobre la superficie. De aquí se deduce de forma inmediata la siguiente propiedad.

**Propiedad 1.2** *Una inmersión espacial y conforme es maximal si, y solamente si, sus funciones coordenadas son funciones armónicas.*

## LA APLICACIÓN DE GAUSS

La proyección estereográfica de  $\mathbb{H}^2$  sobre  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se define como la aplicación  $\sigma : \mathbb{H}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{|z| = 1\}$ ,

$$\sigma(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z}, \quad \sigma(0, 0, 1) = \infty.$$

Esta proyección aplica, de forma biyectiva y conforme,  $\mathbb{H}_+^2$  en el interior del disco unidad, y  $\mathbb{H}_-^2$  en  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{|z| \leq 1\}$ , tal y como se indica en la Figura 1.3.

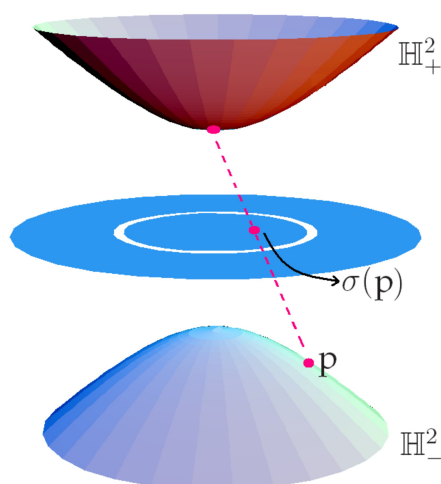


Figura 1.3: La proyección estereográfica de  $\mathbb{H}^2$ .

**Propiedad 1.3 ([Kob])** Sea  $\psi : S \rightarrow \mathbb{L}^3$  una inmersión maximal regular (es decir, sin singularidades) y conforme con aplicación de Gauss  $N$ . Entonces la composición  $g = \sigma \circ N : S \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \{|z| = 1\}$  es una aplicación holomorfa.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  A la aplicación  $g = \sigma \circ N$  la seguiremos llamando la aplicación de Gauss de la superficie.

## LA REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS

Como vimos al principio de esta sección, una de las principales características de las inmersiones maximales en  $\mathbb{L}^3$  es que cada una de las tres coordenadas de la inmersión es una función armónica. Esto da lugar a una representación de las superficies maximales en términos de datos meromorfos, utilizada por primera vez en [Kob], y que es



denominada *representación de Weierstrass* por su analogía con la representación clásica de las superficies minimales (véase por ejemplo [Oss] para más detalle).

Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  una inmersión maximal regular y conforme. Denotaremos por  $\psi = (X_1, X_2, X_3)$  a las funciones coordenadas de la inmersión. Puesto que  $X_k$  son funciones armónicas, si definimos  $\phi_k = dX_k + i(*dX_k)$ , siendo  $*$  el operador de Hodge, es claro que estas 1-formas son holomorfas. En una carta holomorfa  $(U, z)$  en  $\mathcal{S}$  se escriben como

$$\phi_k = \frac{\partial X_k}{\partial z} dz, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Además la inmersión  $\psi$  se recupera como:

$$\psi(p) = \operatorname{Re} \int_{p_0}^p (\phi_1, \phi_2, \phi_3) + \psi(p_0), \quad (1.2)$$

siendo  $p_0 \in \mathcal{S}$  un punto arbitrario.

De hecho, si  $g$  es la aplicación de Gauss de la superficie, un cálculo directo permite comprobar que  $g = (i\phi_1 - \phi_2)/\phi_3$ , y por tanto

$$\phi_1 = \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right) \phi_3, \quad \phi_2 = \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right) \phi_3, \quad (1.3)$$

y además la métrica inducida sobre  $\mathcal{S}$  se escribe como:

$$ds^2 = \frac{1}{2} (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2) = \frac{|\phi_3|^2}{4} \left( \frac{1}{|g|} - |g| \right)^2. \quad (1.4)$$

Llamaremos al par  $(g, \phi_3)$  o la terna de 1-formas  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  la *representación de Weierstrass* de la superficie.

**Propiedad 1.4** *Los datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  de una superficie maximal regular<sup>2</sup> y conforme,  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , verifican las siguientes condiciones:*

- La 1-forma vectorial  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  es holomorfa en  $\mathcal{S}$  y no se anula.
- $|g| \neq 1$  en  $\mathcal{S}$ .
- Para cada curva cerrada  $\gamma \subset \mathcal{S}$  se tiene que  $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0$ .

*Recíprocamente, si  $(g, \phi_3)$  son datos meromorfos sobre una superficie de Riemann  $\mathcal{S}$  verificando las tres condiciones anteriores, entonces la aplicación  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  dada por (1.2) está bien definida y es una inmersión maximal.*

---

<sup>2</sup>es decir, sin singularidades.

**Propiedad 1.5 (Superficie minimal asociada)** Si  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  son los datos de Weierstrass de una superficie maximal, es inmediato comprobar que  $(i\phi_1, i\phi_2, \phi_3)$  definen localmente una superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  (véase por ejemplo [Oss]), que llamaremos la superficie minimal asociada. Además la aplicación de Gauss meromorfa  $g$  de ambas superficies coincide.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Obsérvese que la expresión (1.4) define una métrica riemanniana en  $\mathcal{S}$  gracias a que  $\Phi$  no se anula y  $|g| \neq 1$ . La falta de una de estas dos condiciones provocará la aparición de singularidades, como veremos en la Sección 2.1. Por el carácter holomorfo de  $\Phi$ ,  $\Phi = 0$  sólo puede darse en puntos aislados, sin embargo,  $|g|$  es unitario sobre curvas.

## REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS PARA SUPERFICIES EN COCIENTES DE $\mathbb{L}^3$ POR TRASLACIONES

Como ya explicamos al principio de esta sección, a pesar de que nuestro estudio se centrará en las superficies maximales en  $\mathbb{L}^3$ , también necesitaremos algunas propiedades de las superficies maximales en ciertos cocientes de  $\mathbb{L}^3$ , debido a su relación con las superficies periódicas de  $\mathbb{L}^3$ . Es por esto que nos serán de utilidad las siguientes observaciones.

Es inmediato comprobar que los datos de Weierstrass son invariantes cuando aplicamos una traslación a nuestra superficie. Es decir, los datos de Weierstrass de las inmersiones  $\psi$  y  $T \circ \psi$ , siendo  $T$  una traslación de  $\mathbb{L}^3$ , coinciden.

En consecuencia, si  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es una superficie maximal invariante por un grupo  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  de traslaciones que actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{L}^3$ , y consideramos la inmersión maximal inducida entre los correspondientes cocientes  $\psi : \mathcal{S} = \widehat{\mathcal{S}}/G_0 \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  ( $G_0$  es el grupo de isometrías de  $\widehat{\mathcal{S}}$  inducido por  $G$ ), los datos de Weierstrass de  $\widehat{\psi}$  se inducen a datos holomorfos sobre  $\mathcal{S}$ , que seguiremos llamando los datos de Weierstrass de la inmersión maximal  $\psi$ .

Como consecuencia de la Propiedad 1.4, los datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  de  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  verifican las siguientes propiedades:

- (a) La 1-forma vectorial  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  es holomorfa en  $\mathcal{S}$  y no se anula.
- (b)  $|g| \neq 1$  en  $\mathcal{S}$ .
- (c) Para cada curva cerrada  $\gamma \subset \mathcal{S}$ , la traslación de vector  $v = \text{Re} \int_{\gamma} \Phi$  pertenece a  $G$ .

(d) Salvo traslación en  $\mathbb{L}^3/G$ , la inmersión viene dada por

$$\psi(p) = \pi_1\left(\operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi\right), \quad \text{con } p_0 \in \mathcal{S} \text{ arbitrario,} \quad (1.5)$$

donde  $\pi_1 : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  denota la correspondiente proyección al cociente.

De la misma forma, el recíproco es cierto. Es decir, dados  $(g, \phi_3)$  datos meromorfos sobre  $\mathcal{S}$  verificando las dos primeras condiciones anteriores y tal que el grupo  $G$  formado por las traslaciones de vectores de la forma  $v = \operatorname{Re} \int_\gamma \Phi$ , siendo  $\gamma \subset \mathcal{S}$  una curva cerrada, es un grupo que actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{L}^3$ . Entonces, la Ecuación (1.5) define una superficie maximal en la 3-variedad Lorentziana  $\mathbb{L}^3/G$ .

#### EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO

Los grafos maximales satisfacen una ecuación cuasilineal y elíptica. Concretamente, si  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que define un grafo maximal (sin singularidades) entonces  $|\nabla u| < 1$  en  $\Omega$  y se cumple:

$$Lu = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 - |\nabla u|^2}}\right) = 0.$$

Como consecuencia de esto, las superficies maximales de  $\mathbb{L}^3$  satisfacen un principio del máximo:

**Propiedad 1.6 (Principio del máximo)** Sean  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathbb{L}^3$  dos superficies maximales conexas. Supongamos que estas superficies son tangentes en un punto interior a ambas  $p \in \operatorname{Int}(\mathcal{S}_1) \cap \operatorname{Int}(\mathcal{S}_2)$ . Escribamos, localmente alrededor de  $p$ , la superficie  $\mathcal{S}_j$  como grafo de una función  $u_j$  sobre el plano tangente en  $p$ ,  $j = 1, 2$ .

Entonces, si  $u_1 \geq u_2$  localmente alrededor de  $p$ , ambas superficies coinciden.

## 1.4. REGULARIDAD DE SOLUCIONES DE ECUACIONES ELÍPTICAS

Como hemos visto, las superficies maximales de  $\mathbb{L}^3$  admiten una representación meromorfa. Esto nos será de gran utilidad en la Sección 4.2 cuando estudiemos el espacio de moduli de los grafos maximales superficies (Sección 4.2).

A continuación exponemos los resultados que precisaremos sobre convergencia de funciones que satisfacen una ecuación elíptica. Primero estableceremos la notación necesaria para hablar de límites de funciones.

ESPACIOS DE FUNCIONES Y SUS NORMAS

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  un dominio abierto y acotado. El espacio de funciones continuas de  $\Omega$  (resp. de  $\bar{\Omega}$ ) en  $\mathbb{R}^n$  es usualmente denotado como  $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$  (resp.  $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ). De la misma forma, el espacio  $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  representa el conjunto de funciones que tienen derivadas de orden  $\leq k$  continuas en  $\Omega$ , mientras que  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  es el espacio de funciones de  $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  cuyas derivadas parciales de orden  $\leq k$  tienen extensiones continuas a  $\bar{\Omega}$ . Aquí incluimos también el caso  $k = \infty$ . En adelante, y mientras no haya posibilidad de confusión denotaremos  $\mathcal{C}^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$  y  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega}) = \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ .

Para simplificar la notación de las derivadas parciales utilizaremos multi-índices. Es decir, si  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  con  $\beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  y  $|\beta| := \sum_j \beta_j = k$ , entonces para una función  $u \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}, B)$  definimos

$$D^\beta u := \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \partial x_m^{\beta_m}}.$$

Los espacios  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , son espacios normados con la norma  $\|\cdot\|_k$  definida como:

$$\|u\|_0 := \sup_{\bar{\Omega}} |u|,$$

$$\|u\|_k := \sum_{j=0}^k \sup_{|\beta|=j} \|D^\beta u\| = \sum_{j=0}^k \sup_{|\beta|=j} \sup_{\bar{\Omega}} |D^\beta u|, \quad k > 0.$$

Una función  $u \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}, B)$  se dice *Hölder continua* de orden  $\alpha \in ]0, 1]$  si existe un número real positivo  $K$  tal que  $|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^\alpha$  para todo  $x, y \in \bar{\Omega}$ . Al espacio de funciones Hölder continuas de orden  $\alpha$  sobre  $\bar{\Omega}$  lo denotaremos por  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ . Sobre él consideraremos la siguiente norma:

$$\|u\|_{0,\alpha} := \sup \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} : x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y \right\}.$$

Análogamente,  $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$  representará el espacio de las funciones de  $\mathcal{C}^k(\bar{\Omega})$  cuyas derivadas  $k$ -ésimas son  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ , dotado de la norma

$$\|u\|_{k,\alpha} := \|u\|_k + \sup_{|\beta|=k} \|D^\beta u\|_{0,\alpha}.$$

## DEPENDENCIA DIFERENCIABLE DE LAS SOLUCIONES DE EDPs ELÍPTICAS

En adelante supondremos que  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  es un dominio acotado y  $C^\infty$ . Sea  $L$  un operador diferenciable de segundo orden sobre  $\Omega$ . Es decir, dada  $u \in C^2(\Omega) = C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ,

$$Lu := \sum_{i,j=1}^m a^{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m b^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c,$$

con  $a^{i,j}, b^i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continuas,  $a^{i,j} = a^{j,i}$ . Se dice que  $L$  es un operador *elíptico* si el mínimo de sus valores propios  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente positiva. Cuando además  $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$  diremos que el operador es *estrictamente elíptico*.

Dadas  $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\phi : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continuas, consideraremos el siguiente problema de valores iniciales:

$$(*)_{L,H,\phi} \begin{cases} Lu = H & \text{en } \Omega \\ u = \phi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

**Propiedad 1.7 (Estimaciones a priori, [GT, Teorema 3.7]):** Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  una solución de  $(*)_{L,H,\phi}$ , con  $L$  estrictamente elíptico y  $c \leq 0$ .

Entonces,

$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |\phi| + C \sup_{\Omega} |H|,$$

donde  $C > 0$  es una constante que depende sólo de  $L$  y  $\Omega$ .

**Propiedad 1.8 (Estimaciones globales, [GT, Teorema 6.6]):** Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  una solución de  $(*)_{L,H,\phi}$  con  $L$  estrictamente elíptico. Supongamos que  $H \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$  y  $\phi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$  para cierto  $\alpha \in ]0, 1[$ .

Entonces

$$\|u\|_{2,\alpha} \leq C \left( \|u\|_0 + \|\phi\|_{2,\alpha} + \|f\|_{0,\alpha} \right),$$

donde  $C > 0$  es una constante que sólo depende de  $L$ ,  $\Omega$  y  $\alpha$ .

**Propiedad 1.9 (Teorema de regularidad global, [GT, Teorema 6.19]):** Sea  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  una solución del problema  $(*)_{L,H,\phi}$ , siendo  $L$  estrictamente elíptico. Supongamos que los coeficientes de  $L$  y la función  $H$  pertenecen a  $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $k \geq 0$ , y que  $\phi \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

Entonces  $u \in C^{k+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ .

## 1.5. SUPERFICIES DE RIEMANN

Una superficie de Riemann es una superficie diferenciable con un atlas de forma que el cambio de carta es holomorfo. Es un hecho conocido que cualquier superficie de Riemann es orientable.

Como ya explicamos en la Sección 1.2, una superficie espacial posee una estructura de superficie de Riemann asociada a su métrica (para superficies con singularidades ver la Definición 1.2). En el caso de que la superficie sea además maximal, esta estructura desempeña un papel fundamental, ya que sobre ella está definida la representación de Weierstrass (Sección 1.3). Es por este motivo que necesitaremos algunos conceptos relacionados con estas superficies, que exponemos a continuación.

Una superficie de Riemann  $\mathcal{R}$  tiene *tipo conforme finito* si es biholomorfa a una superficie compacta  $\overline{\mathcal{R}}$  menos una cantidad finita de puntos,  $\mathcal{R} \equiv \overline{\mathcal{R}} \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ . Un *final* en  $\mathcal{R}$  es, por definición, un entorno anular alrededor de uno de los puntos  $P_j \in \overline{\mathcal{R}}$ . De hecho es frecuente denominar *final de la superficie* tanto al entorno anular como al propio punto  $P_j$ . Durante esta memoria ambas denominaciones serán utilizadas indistintamente.

### 1.5.1. DIVISORES SOBRE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann y  $f$  (resp.  $\omega$ ) una función (resp. 1-forma) meromorfa sobre  $\mathcal{R}$  con ceros en  $P_1, \dots, P_k$  de órdenes  $n_1, \dots, n_k$  y polos en  $Q_1, \dots, Q_h$  de órdenes  $m_1, \dots, m_h$ . Por definición la expresión:

$$\frac{P_1^{n_1} \cdot \dots \cdot P_k^{n_k}}{Q_1^{m_1} \cdot \dots \cdot Q_h^{m_h}}$$

se denomina *divisor principal* asociado a la función  $f$  (resp. *divisor canónico* asociado a  $\omega$ ). Denotaremos por  $[f]$  (resp.  $[\omega]$ ) al divisor de  $f$  (resp. de  $\omega$ ).

En abstracto, un *divisor* sobre una superficie de Riemann  $\mathcal{R}$  es una expresión formal del tipo  $D = \frac{P_1 \dots P_k}{Q_1 \dots Q_h}$ , con  $P_j, Q_j \in \mathcal{R}$ , no necesariamente distintos entre sí. Cuando  $P_j \neq Q_\ell$  para cualesquiera  $j$  y  $\ell$ , diremos que el divisor es *irreducible* y su *grado* será el entero  $\deg D = k - h$ . Diremos que un divisor irreducible es *entero* si  $h = 0$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Es un hecho conocido que un divisor principal sobre una superficie compacta tiene grado cero, mientras que si  $\mathcal{R}$  es una superficie de Riemann compacta de género  $n$ , los divisores canónicos tienen grado  $2n - 2$  (para una demostración de este hecho puede verse en [FK]).

En el espacio de los divisores puede introducirse de forma natural una operación de multiplicación que lo dota de estructura de grupo. Así, si

$$D_1 = \frac{P_1 \cdot \dots \cdot P_k}{Q_1 \cdot \dots \cdot Q_h}, \quad D_2 = \frac{P'_1 \cdot \dots \cdot P'_k}{Q'_1 \cdot \dots \cdot Q'_h},$$

definimos  $D_1 \cdot D_2$  como el divisor

$$D_1 \cdot D_2 = \frac{P_1 \cdot \dots \cdot P_k \cdot P'_1 \cdot \dots \cdot P'_k}{Q_1 \cdot \dots \cdot Q_h \cdot Q'_1 \cdot \dots \cdot Q'_h}.$$

Esto nos permite también definir una relación de orden entre los divisores. Diremos que un divisor  $D_1$  es *mayor o igual* que otro divisor  $D_2$ , y lo denotaremos por  $D_1 \geq D_2$ , si  $\frac{D_1}{D_2}$  es un divisor entero.

Denotaremos por  $\text{Div}_k(\mathcal{R})$  al conjunto de divisores enteros de grado  $k \geq 1$ . Este conjunto puede ser identificado con el cociente de  $\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \times \dots \times \mathcal{R}$  bajo la acción del grupo de permutaciones de orden  $k$ . Así, el espacio  $\text{Div}_k(\mathcal{R})$  tiene una estructura diferenciable de dimensión real  $2k$  (ver [FK] para más detalle).

### 1.5.2. LA VARIEDAD JACOBIANA Y LA APLICACIÓN DE ABEL-JACOBI

Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann compacta de género  $n \geq 1$ , y fijemos una base *normal* de homología  $\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n\}$  de  $\mathcal{R}$ , es decir, los números de intersección entre las curvas verifican  $(a_j, b_h) = \delta_{jh}$ , siendo  $\delta_{jh}$  el símbolo de Kronecker. Es un hecho conocido (ver [FK]) que asociada a  $\mathcal{B}$  existe una única base del espacio de 1-formas holomorfas de  $\mathcal{R}$ ,  $\widehat{\mathcal{B}} = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ , de forma que  $\int_{a_j} \eta_h = \delta_{jh}$ .

Denotaremos por  $\Pi$  a la matriz de periodos correspondiente:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & (\pi_{j,k})_{j,k=1,\dots,n} \end{pmatrix}, \quad \pi_{j,k} = \int_{b_j} \eta_k.$$

Finalmente, sea  $L$  el retículo de  $\mathbb{C}^n$  generado por los vectores  $\{e^1, \dots, e^n, \pi^1(v), \dots, \pi^n(v)\}$ , donde  $e^j = (0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)$  y  $\pi^j = (\pi_{1,j}(v), \dots, \pi_{n,j}(v))$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

El cociente  $\mathcal{J} := \mathbb{C}^n / L$  es una variedad compleja de dimensión  $n$  que recibe el nombre de *variedad Jacobiana* asociada a  $\mathcal{R}$ .

A partir de la definición de  $\mathcal{J}$  es inmediato comprobar que la aplicación:

$$\varphi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{J},$$

$$\varphi(p) = \mathbf{p} \left( \int_{p_0}^p \eta_1, \dots, \int_{p_0}^p \eta_n \right),$$

siendo  $\mathbf{p} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{J}$  la correspondiente proyección al cociente, está bien definida (es decir, las integrales anteriores no dependen del camino elegido). Esta aplicación recibe el nombre de *aplicación de Abel-Jacobi*. Es un resultado clásico de la teoría de superficies de Riemann que  $\varphi$  es un embebimiento (ver [FK]).

La aplicación de Abel-Jacobi se extiende de manera natural al espacio de divisores enteros sobre  $\mathcal{R}$ , mediante

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Div}_k(\mathcal{R}) &\rightarrow \mathcal{J}, \\ \varphi(P_1 \cdot \dots \cdot P_k) &= \sum_{j=1}^k \varphi(P_j), \end{aligned}$$

y de la misma forma, si  $D_j \in \text{Div}_{k_j}(\mathcal{R})$ ,  $j = 1, 2$ , definimos  $\varphi\left(\frac{D_1}{D_2}\right) := \varphi(D_1) - \varphi(D_2)$ .

**Propiedad 1.10 (Teorema de Abel)** *Sea  $\mathcal{R}$  una superficie de Riemann compacta y  $\varphi$  su aplicación de Abel-Jacobi. Entonces dos divisores enteros  $D_1, D_2 \in \text{Div}_k(\mathcal{R})$  verifican  $\varphi(D_1) = \varphi(D_2)$  si y sólo si existe una función meromorfa  $f$  sobre  $\mathcal{R}$  cuyo divisor asociado es  $[f] = \frac{D_1}{D_2}$  (es decir, si y sólo si  $\frac{D_1}{D_2}$  es un divisor principal).*

Como consecuencia, para cualesquiera 1-formas meromorfas  $\omega_1$  y  $\omega_2$  sobre  $\mathcal{R}$  se cumple que  $\varphi([\omega_1]) = \varphi([\omega_2])$ .

### 1.5.3. DOBLE DE UNA SUPERFICIE DE RIEMANN

En las subsecciones anteriores hemos enunciado los conceptos y resultados que necesitaremos a lo largo de esta memoria. Sin embargo, estas herramientas son válidas sobre superficies de Riemann compactas sin borde, mientras que el soporte conforme de una superficie maximal con singularidades aisladas es una superficie con borde (ver Definición 1.2). Por este motivo en muchas ocasiones consideraremos, no el soporte conforme de la superficie, sino su *doble*.

Sea  $\mathcal{R}_0$  una superficie de Riemann con borde, y supongamos que el borde consta de una unión de curvas de Jordan analíticas disjuntas dos a dos,  $\partial\mathcal{R}_0 = \cup_{j \in J} a_j$ . Consideremos una copia (a nivel topológico) disjunta de  $\mathcal{R}_0$ , que denotaremos por  $\mathcal{R}_0^*$ , y definamos en ella la siguiente estructura conforme:



para cada  $p^* \in \mathcal{R}_0^*$  sea  $z : U \subset \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathbb{D} = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}$  una carta holomorfa en  $\mathcal{R}_0$  centrada en el correspondiente punto  $p \in \mathcal{R}_0$  (es decir, con  $z(p) = 0$ ). Por definición  $\bar{z} : U \rightarrow \mathbb{D}$ ,  $\bar{z}(p) = \overline{z(p)}$ , es una carta holomorfa en  $\mathcal{R}_0^*$  alrededor de  $p^*$ .

A partir de esto es claro que  $J : \mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_0^*$ ,  $J(p) = p^*$ , es una biyección antiholomorfa. Finalmente, consideremos la superficie  $\mathfrak{S} = (\mathcal{R}_0 \cup \mathcal{R}_0^*) / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación que identifica cada punto  $p \in \partial\mathcal{R}_0$  con su correspondiente  $p^* = J(p) \in \partial\mathcal{R}_0^*$ . Esta nueva superficie  $\mathfrak{S}$  es una superficie de Riemann compacta sin borde (ver Figura 1.4), y la aplicación  $J$  definida anteriormente se extiende de forma obvia a una involución antiholomorfa  $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ . Consúltese [Str] para una descripción más detallada de esta construcción.

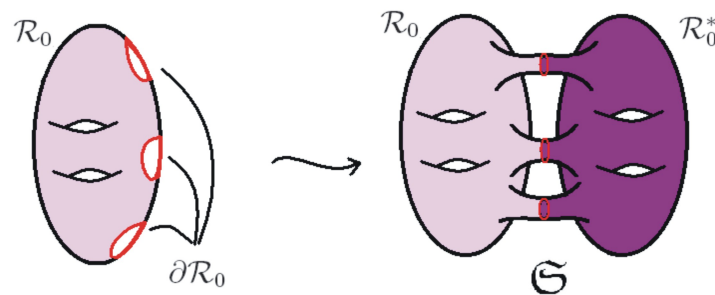


Figura 1.4: Construcción del doble de la superficie  $\mathcal{R}_0$

En adelante nos referiremos a  $\mathfrak{S}$  como el *doble* de la superficie  $\mathcal{R}_0$ , mientras que  $J$  será la *simetría especular* asociada.



# SUPERFICIES MAXIMALES CON SINGULARIDADES AISLADAS

---

# 2

En este capítulo estableceremos las propiedades básicas de carácter local de las superficies maximales con singularidades aisladas, antes de entrar en el caso completo, que será el objeto principal de nuestro estudio.

## 2.1. TIPOS DE SINGULARIDADES

En la Sección 1.2.1 vimos cómo se comporta una superficie espacial de  $\mathbb{L}^3$  alrededor de una singularidad (aislada). Cuando la superficie es además maximal la representación de Weierstrass (Ecuación (1.2)) nos permite un conocimiento mucho más detallado de la geometría de la superficie alrededor de las singularidades.

Clasificaremos las singularidades en dos tipos: *espaciales* y *luminosas*.

Una singularidad  $q \in S$  es de tipo espacial cuando el tipo conforme de la superficie alrededor de la singularidad es el de un disco punteado. Es decir, si consideramos un entorno  $\mathcal{D}$  en  $S$  alrededor de  $q$  y que no contenga otras singularidades, entonces  $\mathcal{D} \setminus \{q\}$ , con la estructura conforme inducida por su métrica riemanniana, es biholomorfo a un

disco punteado.

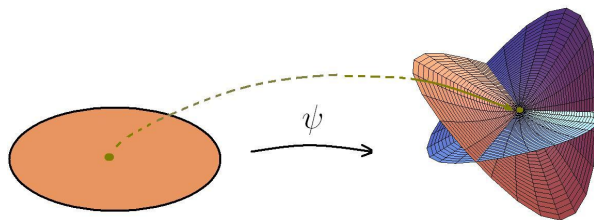


Figura 2.1: Singularidad espacial.

Cuando  $\mathcal{D} \setminus \{q\}$  es biholomorfo a un anillo  $\mathcal{A}_r := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ , para cierto  $r > 1$ , diremos que la singularidad es de tipo luminoso. En este caso la singularidad se corresponde con la curva  $\gamma = \{|z| = 1\}$ . Nos referiremos a dicha curva como la *curva singular* asociada a  $q \in \mathcal{S}$ .

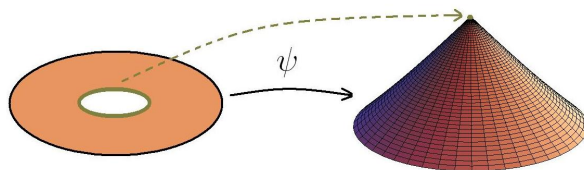


Figura 2.2: Singularidad luminosa (y embebida).

El nombre con que hemos bautizado a los dos tipos de singularidades se debe al comportamiento de la aplicación de Gauss de la superficie. En efecto, si  $g : \mathcal{D} \setminus \{q\} \rightarrow \mathbb{H}_+^2 \equiv \mathbb{D}$  es la aplicación de Gauss alrededor de una singularidad espacial, el Teorema de la singularidad evitable de Riemann nos permite extender  $g$  de forma holomorfa en el punto singular y además el valor en dicho punto ha de estar en el interior de  $\mathbb{D}$ . Dicho de otra forma, se puede definir un plano tangente en la singularidad como límite de los planos tangentes de cualquier sucesión convergiendo a  $q$  y además dicho plano es espacial. También la 1-forma  $\phi_3$  de la representación de Weierstrass extiende de forma holomorfa a la singularidad. De hecho  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  ha de tener un cero en ese punto, en virtud de la expresión de la métrica de  $\mathcal{D} \setminus \{q\}$  dada en la Ecuación (1.4).

Sin embargo, si  $\mathcal{D} \setminus \{q\}$  es biholomorfo a un anillo  $\mathcal{A}_r = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$  el comportamiento de los datos de Weierstrass es distinto. En este caso la correspondiente

reparametrización conforme  $\psi_0 : \mathcal{A}_r \rightarrow \mathbb{L}^3$  extiende de forma continua a la curva singular con  $\psi_0(\{|z| = 1\}) = \psi(q) =: Q$  y por tanto la inmersión puede ser extendida de forma analítica al anillo  $\mathcal{A} = \{1/r < |z| < r\}$  mediante  $\psi_0 \circ J = -\psi_0 + 2Q$ , siendo  $J(z) = 1/\bar{z}$  la reflexión de Schwartz respecto a  $\{|z| = 1\}$ . Esto implica que la representación de Weierstrass también puede ser extendida a  $\mathcal{A}$  y verifica  $J^*(\phi_k) = -\overline{\phi_k}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , y por tanto  $g \circ J = 1/\bar{g}$ . Es decir,  $|g| = 1$  sobre la curva singular. Así, en este caso el vector normal extiende a la curva singular con valores en el cono luz.

Además en este caso  $dg \neq 0$  sobre la curva singular. En efecto, un punto crítico de  $g$  en el conjunto  $|g|^{-1}(1)$  representaría un punto de corte entre las curvas nodales de la función armónica  $\log |g|$ , pero no hay curvas nodales de esta función en  $\mathcal{A} \setminus \{|z| = 1\}$  ya que ahí la superficie es espacial, y por tanto  $|g| \neq 1$ .

**Observación 2.1** Como consecuencia de lo anterior, el soporte conforme  $\mathcal{S}_0$  de una superficie maximal  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  con singularidad aisladas (ver Definición 1.2) es una superficie de Riemann con borde, correspondiéndose el borde con la unión de las curvas de las singularidades luminosas y el borde de  $\mathcal{S}$  (en el caso de que sea no vacío).

Por tanto, los datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  de una superficie maximal con singularidades aisladas están bien definidos sobre el soporte conforme de la superficie. Además, si  $J$  es la simetría especular asociada al doble de  $\mathcal{S}_0$  (Subsección 1.5.3),  $(g, \phi_3)$  pueden ser extendidos al doble mediante  $g \circ J = 1/\bar{g}$  y  $J^*(\phi_3) = -\overline{\phi_3}$ .

Por tanto, a menudo consideraremos los datos de Weierstrass como datos meromorfos sobre el doble de la superficie.

Como ya vimos en el Lema 1.1, las superficies espaciales con singularidades son multigrafos sobre cualquier plano espacial, correspondiéndose las singularidades con los puntos de ramificación del multigrafo. Puesto que una parte importante de nuestro estudio se centrará en el caso de que la superficie sea embebida, vamos a *explorar* un poco más el comportamiento anteriormente descrito de la representación de Weierstrass alrededor de una singularidad, con el fin de caracterizar las singularidades embebidas.

**Lema 2.1** Alrededor de una singularidad aislada, la proyección de una superficie maximal de  $\mathbb{L}^3$  sobre cualquier plano espacial es un homeomorfismo local ramificado en la singularidad con índice de ramificación  $\kappa$  igual a :

- si la singularidad es espacial,  $\kappa = n$ , siendo  $n$  el orden de la singularidad como cero de  $\Phi$ ,
- si la singularidad es luminosa,  $\kappa = m + k - 1$ , siendo  $n = 2k$  el número total de ceros de  $\Phi$  en la curva singular  $\gamma$  contados con multiplicidad (que es siempre un número par) y  $m$  el grado de  $g|_\gamma : \gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Como consecuencia, una singularidad es embebida si y sólo si es de tipo luminoso,  $\phi_3$  no se anula en la curva singular y  $g$  es inyectiva a lo largo de dicha curva.

*Demostración:* Consideremos una parametrización conforme de la superficie alrededor de la singularidad,  $\psi_0 : U \rightarrow \mathbb{L}^3$ , siendo  $U = \{|z| < 1\}$  en el caso de que la singularidad sea espacial y  $U = \{r < |z| \leq 1\}$  si la singularidad es luminosa. En el primer caso el punto singular es el origen, mientras que en el segundo la curva singular es  $\gamma = \{|z| = 1\}$ . Denotaremos por  $P_0$  al correspondiente punto singular de la superficie en  $\mathbb{L}^3$ .

Sea  $\Pi$  un plano espacial, y  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$  la correspondiente proyección ortogonal. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el plano espacial es el plano  $\Pi = \{x_3 = 0\}$ . Utilizando notación compleja escribiremos

$$\pi \circ \psi_0 = X_1 + i X_2 = \frac{-i}{2} \left( \int \frac{\phi_3}{g} + \int g \phi_3 \right).$$

Como vimos en el Lema 1.1,  $\pi \circ \psi_0$  es un homeomorfismo local ramificado en la singularidad. Para calcular el número de vueltas alrededor de este punto, consideremos una circunferencia centrada en  $\pi(P_0)$ ,  $\beta : I = [0, L] \rightarrow \mathbb{C}$  parametrizada por el arco y de radio suficientemente pequeño para que podamos *levantarla* a  $U$ . Sea  $\alpha : I \rightarrow U$  la curva tal que  $\beta(t) = (\pi \circ \psi_0)(\alpha(t))$ . Así, si  $\Delta$  representa la variación del argumento de  $\beta$ , el índice de ramificación de  $\pi \circ \psi_0$  en la singularidad coincide con  $\kappa = \frac{\Delta}{2i\pi} - 1$ . Por otro lado, puesto que  $\beta(t)$  está parametrizada por el arco, es inmediato comprobar que  $\Delta$  coincide también con la variación del argumento de  $\beta'(t)$ .

Supongamos primero que la singularidad es espacial. Después de una isometría en  $\mathbb{L}^3$  podemos suponer que  $g(0) \neq 0$ . Por definición, el orden de la 1-forma vectorial  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  en  $z = 0$  es el mínimo de los órdenes de las 1-formas  $\phi_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Por tanto en este caso este orden coincide con el de  $\phi_3$ . Escribiremos  $\phi_3 = z^n f(z) dz$ , con  $f(z)$  holomorfa y sin ceros en un entorno de  $z = 0$ . Así, tenemos que:

$$\begin{aligned} \beta' &= \left( (X_1 + i X_2) \circ \alpha \right)' = -\frac{i}{2} \left( \frac{\overline{\alpha^n f(\alpha) \alpha'}}{g(\alpha)} + \alpha^n f(\alpha) g(\alpha) \alpha' \right) = \\ &= -\frac{i}{2} \frac{\overline{\alpha^n \alpha'} \overline{f(\alpha)}}{g(\alpha)} \left( 1 + \frac{\alpha^n f(\alpha) \alpha'}{\overline{\alpha^n f(\alpha) \alpha'}} |g(\alpha)|^2 \right). \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $|g| < 1$  en  $U$ , la parte real de la función  $1 + \frac{\alpha^n f(\alpha) \alpha'}{\overline{\alpha^n f(\alpha) \alpha'}} |g(\alpha)|^2$  es positiva, por lo que la variación de su argumento es igual a cero. Es decir, la variación

del argumento de  $\beta'$  es igual a la de  $\frac{\overline{\alpha^n \alpha' f(\alpha)}}{g(\alpha)}$ . Puesto que las funciones holomorfas  $f$  y  $g$  no se anulan en  $z = 0$ , esta variación es  $\Delta = 2\pi i (n + 1)$ , por lo que el índice de  $\pi \circ \psi_0$  alrededor de la singularidad es  $\kappa = n$ .

Supongamos ahora que la singularidad es luminosa. En este caso consideraremos un parámetro conforme  $w$  alrededor de  $\gamma$  para el que  $g$  se escriba como  $g(w) = w^m$ . Si escribimos  $\phi_3 = F(w)dw$ , con  $F(w)$  holomorfa, entonces:

$$\begin{aligned}\beta' &= \left( (X_1 + i X_2) \circ \alpha \right)' = -\frac{i}{2} \left( \overline{F(\alpha) \alpha^{-m} \alpha'} + F(\alpha) \alpha^m \alpha' \right) \\ &= -\frac{i}{2} \overline{F(\alpha) \alpha' \alpha^{-m}} \left( 1 + \frac{F(\alpha) \alpha'}{\overline{F(\alpha) \alpha'}} |\alpha|^{2m} \right).\end{aligned}$$

Como  $|\alpha| < 1$ , razonando como en el caso de la singularidad espacial deducimos que la variación del argumento de  $1 + \frac{F(\alpha) \alpha'}{\overline{F(\alpha) \alpha'}} |\alpha|^{2m}$  es igual a cero. Por tanto  $\Delta$  coincide con la variación del argumento de la curva  $\overline{F(\alpha) \alpha' \alpha^{-m}}$ .

Sean  $a_1, \dots, a_n$  los ceros de  $\phi_3$  en  $\gamma$ , donde cada cero aparece tantas veces como indica su multiplicidad.

**Afirmación:**  $n$  es un número par.

*Demostración de la Afirmación:* Un cero de  $\phi_3$  en  $\gamma$  corresponde a un punto crítico de la función armónica  $X_3 = \operatorname{Re} \int \phi_3$ , y por tanto es un punto de corte entre las curvas nodales de esta función. Además, el orden de este punto como cero de  $\phi_3$  es igual al número de curvas nodales que se cortan en dicho punto. Por el principio del máximo para funciones armónicas el número de curvas debe ser par, con lo que obtenemos que también  $n$  es par.  $\diamond$

En adelante escribiremos  $n = 2k$ . Así,

$$F(w) = \frac{\prod_{j=1}^{2k} (w - a_j)}{w^{1+k}} f(w),$$

para cierta función holomorfa  $f(w)$  que no se anula en  $\gamma$ . Además, si  $J(w) = 1/\bar{w}$  es la reflexión respecto de  $\gamma = \{|w| = 1\}$ , puesto que  $J^*(\phi_3) = -\overline{\phi_3}$ , es fácil deducir que  $\overline{f(w)} = f(J(w)) \prod_{j=1}^{2k} a_j$ .

Por otro lado, puesto que  $|\alpha| < 1$  y  $|a_j| = 1$  para todo  $j$ , y teniendo en cuenta la simetría de la función holomorfa (sin ceros)  $f(w)$  descrita anteriormente, es fácil ver que

también  $f(\alpha) \prod_j (\alpha - a_j)$  tiene variación del argumento igual a cero. Con lo que finalmente deducimos que la variación del argumento de  $\beta'$  coincide con la de  $\overline{\alpha' \alpha^{-(m+k+1)}}$ , que es  $\Delta = 2i\pi(m+k)$ . Por tanto el índice de ramificación de  $\pi \circ \psi_0$  en la singularidad es  $\kappa = m+k-1$ .  $\square$

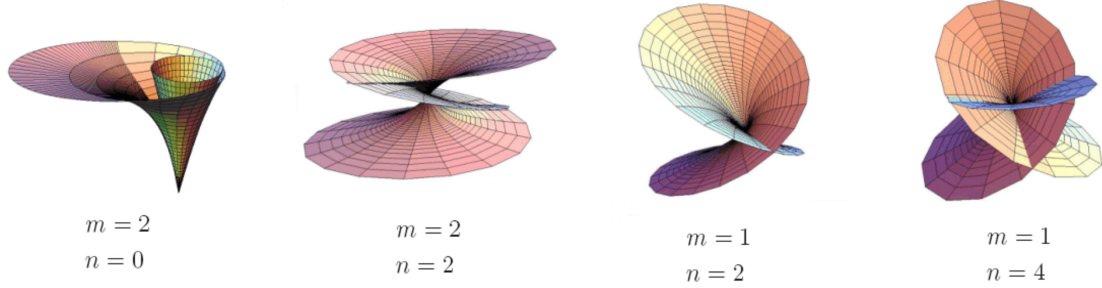


Figura 2.3: Ejemplos de singularidades luminosas no embebidas con distintos índices de ramificación.

Como consecuencia del lema anterior podemos conocer con detalle el comportamiento de una superficie maximal alrededor de una singularidad embebida.

**Corolario 2.2** *Alrededor de una singularidad embebida, una superficie maximal de  $\mathbb{L}^3$  es asintótica a una de las dos componentes del cono de luz de la singularidad.*

*Demostración:* Sea  $\psi_0 : \mathcal{A}_r = \{r < |z| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{L}^3$  una parametrización conforme de la superficie, siendo  $\gamma = \{|z| = 1\}$  la curva singular.

Gracias al lema anterior sabemos que la 1-forma  $\phi_3$  de la representación de Weierstrass de la superficie no se anula alrededor de la curva singular  $\gamma$ . Por tanto la superficie se queda, en un entorno de la singularidad, por encima o por debajo del plano  $\Pi = \{x_3 = 0\}$ . Además, en un parámetro conforme  $w$  adecuado  $g(w) = w$ , y  $\phi_3 = \frac{f(w)}{w} dw$ , con  $f(1/\bar{w}) = \overline{f(w)}$ . Utilizando coordenadas polares,  $w = r e^{it}$ , de la Ecuación (1.2) se deduce inmediatamente que, salvo traslación,

$$2\psi_0(r e^{it}) = \operatorname{Re} \int_1^r \frac{f(se^{it})}{s} \left( i \frac{e^{-it}}{s} - i se^{it}, -\frac{e^{-it}}{s} - se^{it}, 2 \right),$$

de donde se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \left\| \frac{\psi_0(r e^{it})}{x_3(\psi_0(r e^{it}))} - (\operatorname{sent}, -\operatorname{cost}, 1) \right\| = 0,$$



donde  $\|\cdot\|_1$  es la norma  $\mathcal{C}^1$  en el espacio de las funciones  $\mathcal{C}^1([0, 2\pi], \mathbb{R}^3)$ . Esto demuestra que la superficie es asintótica a una de las componentes del cono de luz de  $\psi_0(\gamma) = 0$ .  $\square$

Este último resultado motiva la siguiente definición.

**Definición 2.1 (Singularidad cónica)** *Una singularidad cónica es una singularidad aislada y embebida de una superficie maximal.*

*Diremos que una singularidad cónica apunta hacia abajo (resp. hacia arriba) cuando la superficie sea asintótica a la componente inferior (resp. superior) del cono de luz del punto singular.*

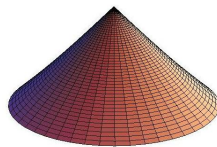


Figura 2.4: Singularidad cónica apuntando hacia arriba.

## 2.2. EL CASO CON BORDE

A pesar de que este trabajo se centrará en las superficies maximales completas (sin borde), dedicaremos esta sección al estudio de algunas propiedades de las superficies con borde. Concretamente estableceremos dos resultados, uno sobre la estructura conforme de estas superficies, y otro sobre la no-existencia de ciertas superficies maximales embebidas y con borde. Es interesante resaltar que para estos resultados no es necesaria ninguna hipótesis sobre la estructura del conjunto de singularidades de la superficie.

Una superficie de Riemann con frontera no vacía se dice que es *relativamente parabólica* si cualquier función armónica<sup>1</sup> acotada en la superficie está determinada por sus valores en la frontera. Esto es equivalente a la existencia de una función positiva, propia y superarmónica definida sobre la superficie ([Ahl], [Gry]).

**Teorema 2.3** *Sea  $\psi : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3$  una inmersión maximal conforme, propia y con borde (posiblemente con singularidades aisladas). Supongamos que la aplicación  $n : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n(p) = \langle \psi(p), \psi(p) \rangle$ , es eventualmente positiva<sup>2</sup> y propia, donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar Lorentziano.*

<sup>1</sup>Es decir, armónica en el interior y continua en la frontera.

<sup>2</sup>Es decir, positiva fuera de un compacto.

Entonces  $\mathcal{S}_0$  es relativamente parabólica.

*Demostración:* Sea  $K$  el compacto dado por  $K = \{p \in \mathcal{S}_0 : 0 \leq n(p) \leq 2\}$ , y observemos que  $\mathcal{S}_0$  es relativamente parabólica si y sólo si  $\mathcal{S}_0 \setminus \text{Int}(K)$  lo es (ver [Ahl], [Gry]). Por tanto, basta comprobar que la función

$$h : \mathcal{S}_0 \setminus \text{Int}(K) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h(p) = \log(n(p)),$$

que es propia y positiva, es además superarmónica.

Para ello consideremos parámetros isotermos  $z = u + iv$  en  $\mathcal{S}_0$ . Así  $\langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0$  y  $\langle \psi_u, \psi_u \rangle = \langle \psi_v, \psi_v \rangle = \lambda^2$ . Además, como  $\psi$  es maximal y conforme,  $\psi$  es armónica y por tanto

$$\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = -4 \left( \frac{\langle \psi, \psi_u \rangle^2 + \langle \psi, \psi_v \rangle^2}{\langle \psi, \psi \rangle^2} - \frac{\lambda^2}{\langle \psi, \psi \rangle} \right).$$

Por otro lado,

$$\psi = \frac{1}{\lambda^2} (\langle \psi, \psi_u \rangle \psi_u + \langle \psi, \psi_v \rangle \psi_v) - \langle \psi, N \rangle N,$$

siendo  $N$  el vector normal, y por tanto

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{\lambda^2} (\langle \psi, \psi_u \rangle^2 + \langle \psi, \psi_v \rangle^2) - \langle \psi, N \rangle^2,$$

lo que finalmente prueba que

$$\Delta h = -4\lambda^2 \frac{\langle \psi, N \rangle^2}{\langle \psi, \psi \rangle^2} \leq 0,$$

y concluye la demostración. □

Como consecuencia directa de este resultado, si una superficie maximal (con borde y singularidades aisladas) propiamente inmersa en  $\mathbb{L}^3$  está contenida en una región cónica del tipo  $\{(x, x_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3 : |x_3| \leq \|x\| \tan(\beta)\}$  con  $\beta \in ]0, \pi/4[$ , entonces la superficie es relativamente parabólica. Otra consecuencia inmediata es el siguiente corolario.

**Corolario 2.4** *Sea  $\mathcal{G} \subset \mathbb{L}^3$  una superficie maximal (posiblemente con singularidades aisladas) propia y con borde. Supongamos que  $\mathcal{G}$  es un grafo propio sobre una región estrellada cerrada en el plano  $\{x_3 = 0\}$  centrada en el origen.*

*Entonces, la superficie es relativamente parabólica.*

*Demostración:* Después de una traslación vertical, supondremos que  $\mathcal{G}$  contiene al origen.

En virtud del teorema anterior, basta demostrar que la aplicación  $n$  definida en el enunciado de dicho teorema es eventualmente positiva y propia. Ambos hechos son consecuencia directa, por un lado del carácter espacial de la superficie salvo en puntos aislados, y por otro del hecho de que sea un grafo sobre un dominio estrellado.

En efecto, gracias a esta última propiedad, dado  $q \in \mathcal{G} \setminus \{0\}$ , podemos considerar una curva  $\beta : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}$  uniendo  $p = 0 \in \mathcal{G}$  y  $q$  de forma que la proyección de  $\beta$  al plano  $\{x_3 = 0\}$  sea un segmento. Después de un cambio de sistema de referencia, podemos suponer que  $\beta(t) = (t, 0, u(t))$ , para cierta función  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Puesto que la superficie es espacial con singularidades aisladas tenemos que  $\|\beta'(t)\|^2 = 1 - u'(t)^2 \geq 0$ ,  $t \in I$ , y la igualdad se da a lo más en número finito de puntos. Integrando esta condición obtenemos que  $|u(1) - u(0)| < 1$ , lo que nos garantiza que el vector que une  $p = \gamma(0)$  con  $q = \gamma(1)$  es espacial y por tanto  $n(q) > 0$ .

Comprobemos ahora que  $n$  es propia. Para ello observemos primero que las esferas Lorentzianas  $\mathbb{H}_s := \{x \in \mathbb{L}^3 : \|x\| = s\}$ ,  $s > 0$ , son asintóticas al cono de luz  $\mathcal{C}_0$  en el siguiente sentido:  $\lim_{k \rightarrow \pm\infty} (r_{k,s} - r_k) = 0$ , donde  $r_{k,s} := \sqrt{k^2 + s^2}$  y  $r_k := |k|$  son los radios de los círculos euclídeos concéntricos  $\mathbb{H}_s \cap \{x_3 = k\}$  y  $\mathcal{C}_0 \cap \{x_3 = k\}$  respectivamente. Por tanto, bastaría con demostrar que existe  $\epsilon > 0$  de forma que  $\text{dist}(p, \mathcal{C}_0) \geq \epsilon$  fuera de un compacto en  $\mathcal{G}$ , donde "dist" se refiere a la distancia euclídea. Escribamos  $\mathcal{G} = \{\rho(z) := (z, u(z)) : z \in \Omega \subset \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2\}$  y sea  $\mathcal{C}_0$  el cono de luz en el origen. Puesto que  $\Omega$  es estrellado respecto del origen, para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ , la función

$$f_\theta(t) := \text{dist}(\rho(te^{i\theta}), \mathcal{C}_0),$$

está bien definida para  $t \in [0, t_\theta[$ , siendo  $t_\theta := \text{Sup}\{t \in \mathbb{R} : te^{i\theta} \in \Omega\} \in ]0, +\infty]$ . Como hemos razonado antes,  $n$  es positiva en  $\mathcal{G} \setminus \{0\}$ , por lo que  $f_\theta > 0$  en  $]0, t_\theta[$ . Además es inmediato comprobar que

$$f_\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Min} \{|t - u(te^{i\theta})|, |t + u(te^{i\theta})|\}, \quad t \in [0, t_\theta[.$$

Puesto que  $\|\rho(te^{i\theta})\| > 0$  y  $\|\frac{d}{dt}\rho(te^{i\theta})\| \geq 0$ , es inmediato comprobar que  $f_\theta(t)$  es no decreciente en  $]0, t_\theta[$ .

De todo esto se desprende que, para cada  $\delta \in ]0, \text{dist}(0, \partial\Omega)[$  y cada  $t > \delta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,

$$f_\theta(t) \geq f_\theta(\delta) \geq \epsilon := \text{Min}\{f_\theta(\delta) : \theta \in [0, 2\pi]\} > 0,$$

lo que demuestra que  $n$  es propia y termina la prueba del corolario.  $\square$

**Observación 2.2** *Utilizando la correspondencia entre las superficies maximales y minimales establecida en la Propiedad 1.5, este resultado puede ser extrapolado al caso minimal:*

*Cualquier superficie minimal  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$  que sea un grafo sobre una región plana cerrada y estrellada con borde de clase  $C^1$  es relativamente parabólica.*

Finalmente, el siguiente resultado versa sobre el comportamiento asintótico de grafos maximales completos con singularidades. Está motivado por el Teorema fuerte del semiespacio para superficies minimales (ver [HM]).

**Teorema 2.5** *Sea  $\mathcal{G} \subset \mathbb{L}^3$  un grafo maximal sobre  $\{x_3 = 0\}$  propio, posiblemente con borde y posiblemente con un conjunto aislado de singularidades interiores. Supongamos que todas las singularidades apuntan hacia arriba (en el sentido de la Definición 2.1), y supongamos también que  $\mathcal{G}$  está contenido en una banda horizontal  $\{0 < x_3 \leq k\}$  de forma que  $\partial\mathcal{G} \subset \{x_3 = k\}$ .*

*Entonces  $\mathcal{G}$  es un dominio plano de  $\{x_3 = k\}$  (en particular, el conjunto de singularidades es vacío).*

*Como consecuencia, una superficie maximal y embebida  $\mathcal{G}$  con un conjunto aislado de singularidades (y sin borde) contenida en el semiespacio  $\{x_3 \geq 0\}$  está contenida en el menor semiespacio horizontal  $\{x_3 \geq k_0\}$  que contiene al conjunto de singularidades que apuntan hacia abajo. En particular, este conjunto no puede ser no vacío.*

*Demostración:* Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe un punto  $P_0 \in \mathcal{G} \setminus \{x_3 = k\}$ . De hecho podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $P_0$  es un punto regular de  $\mathcal{G}$ .

Sea  $C_0 \subset \{x_3 \leq 0\}$  una catenoide Lorentziana vertical con singularidad apuntando hacia arriba en  $\pi(P_0)$ , donde  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \{x_3 = 0\}$  es la proyección ortogonal Lorentziana. Denotaremos por  $C_t := C_0 + (0, 0, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Por hipótesis,  $C_t \cap \mathcal{G}$  es un conjunto compacto para cualquier  $t$ , y no hay contacto en el infinito. Además, si definimos  $A = \{t \geq 0 : C_t \cap \mathcal{G} = \emptyset\}$ , es inmediato comprobar que  $A$  es un conjunto no vacío acotado superiormente. Por lo tanto  $t_0 := \text{Sup } A < +\infty$  y  $\mathcal{G} \cap C_{t_0} \neq \emptyset$ .

Veamos ahora que  $C_{t_0} \cap \mathcal{G}$  consta únicamente del punto singular de  $C_{t_0}$ . En efecto, supongamos que  $C_{t_0} \cap \mathcal{G}$  contuviese un punto regular de  $C_{t_0}$ . Dicho punto debería ser, o bien un punto regular de  $\mathcal{G} \setminus \partial\mathcal{G}$ , o bien una singularidad de  $\mathcal{G}$  que apunte hacia arriba. La segunda posibilidad no puede darse ya que estamos ante el primer contacto de  $C_{t_0}$  y  $\mathcal{G}$  (téngase en cuenta el comportamiento de la superficie alrededor de una singularidad cónica que apunta hacia arriba descrito en el Corolario 2.2). Por otro lado, tampoco

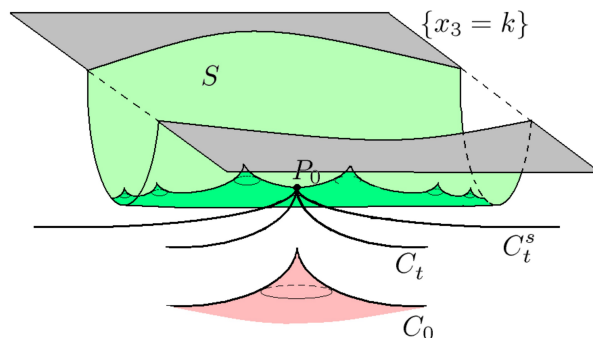


Figura 2.5: La superficie  $\mathcal{G}$  y las catenoides  $C_t$  y  $C_t^s$ .

podemos estar ante un punto regular para  $\mathcal{G}$  ya que esto contradice el principio del máximo. Por tanto  $C_{t_0} \cap \mathcal{G} = \{\pi(P_0) + (0, 0, t_0)\}$ . Ahora bien,  $\mathcal{G}$  es un grafo con lo que en realidad  $C_{t_0} \cap \mathcal{G} = \{P_0\}$  (es decir,  $x_3(P_0) = t_0$ ).

Esto quiere decir que  $\mathcal{G}$  se queda por encima de cualquier catenoide Lorentziana con singularidad (apuntando hacia arriba) en  $\mathcal{G} \setminus \{x_3 = k\}$ . Por lo tanto, si  $C_t^s$  es la catenoide dada por  $C_t^s = s \cdot C_0 + (0, 0, t)$ , puesto que  $\lim_{s \rightarrow 0} C_t^s = \{x_3 = t\}$  uniformemente sobre compactos, es fácil concluir que  $\mathcal{G} \subset \{x_3 \geq t_0\}$ . Pero  $P_0 \in \mathcal{G} \cap \{x_3 = t_0\}$ , lo que contradice el principio del máximo (recuérdese que el punto  $P_0$  era un punto regular del grafo) y prueba la primera parte del teorema.

La parte final es obvia si tenemos en cuenta que las superficies espaciales completas y embebidas de  $\mathbb{L}^3$  con singularidades aisladas son grafos enteros sobre el plano  $\{x_3 = 0\}$  (Lema 1.2).  $\square$



# PARTE I

---

## SUPERFICIES MAXIMALES COMPLETAS EN $\mathbb{L}^3$ CON UN NÚMERO FINITO DE SINGULARIDADES

---







## SUPERFICIES DE TIPO FINITO

---

En esta primera parte de la memoria nos ocuparemos de las superficies maximales de  $\mathbb{L}^3$  con un número finito de singularidades. Concretamente, nuestro objeto de estudio serán las *superficies de tipo finito*:

**Definición 3.1** Diremos que una superficie maximal con singularidades  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es de tipo finito si

- (I)  $\mathcal{S}$  tiene topología finita (es homeomorfa a una superficie compacta menos una cantidad finita de puntos),
- (II) el número de singularidades es finito,
- (III)  $\psi$  es una superficie espacial entera (ver Definición 1.4) con un número finito de hojas.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Como consecuencia de la definición anterior, el soporte conforme (ver Subsección 1.2.1) de una superficie de tipo finito es biholomorfo a una superficie compacta con borde (el borde está formado por las curvas correspondientes a las singularidades luminosas) menos una cantidad finita de discos o puntos. En el Corolario 3.2 veremos que de hecho sólo el segundo caso es posible.

En la Proposición 1.3 vimos que los conceptos de completitud o de ser propia en  $\mathbb{L}^3$  implican ser entera para superficies espaciales con singularidades aisladas. Cuando además la superficie es maximal de tipo finito estos tres conceptos son de hecho equivalentes, como muestra el siguiente resultado.

**Proposición 3.1 (Comportamiento global)** *Para superficies maximales de  $\mathbb{L}^3$  con un número finito de singularidades las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *la superficie es completa,*
- (ii) *la superficie es de tipo finito,*
- (iii) *la superficie es propia en  $\mathbb{L}^3$ ,*
- (iv) *la superficie es entera.*

*Además, en cualquiera de estos casos la superficie es embebida si y sólo si todas sus singularidades son cónicas.*

*Demostración:* Sea  $\psi_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3$  la reparametrización conforme de la superficie y  $(g, \phi_3)$  sus datos de Weierstrass.

(i)  $\Rightarrow$  (ii): Sea  $K \subset \mathcal{S}_0$  un compacto encerrando todas las singularidades. Puesto que la curvatura de Gauss de una superficie maximal regular es siempre no negativa, el Teorema de Huber (ver [Hub]) nos dice que  $\mathcal{S}_0 \setminus K$  tiene tipo conforme finito. En particular  $\mathcal{S}$  tiene topología finita. Además siguiendo las ideas de Osserman [Oss] deducimos que la representación de Weierstrass  $\Phi$  tiene polos en los finales.

Por otro lado, la Proposición 1.3 nos asegura que la superficie es entera y, puesto que el número de singularidades es finito, el multigrafo debe tener un número finito de hojas (Lema 2.1).

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Es trivial, ya que las superficies de tipo finito son, por definición, recubridores (ramificados) del plano con un número finito de hojas.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Es consecuencia de la Proposición 1.3.

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Sea  $K \subset \mathcal{S}_0$  un compacto encerrando todas las singularidades. Basta demostrar que la restricción de  $\psi_0$  a  $\mathcal{S}_0 \setminus K$  es completa.

Sea  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi = \{x_3 = 0\}$  la proyección al plano horizontal. Puesto que la superficie es entera, la métrica inducida por  $\pi \circ \psi_0$ , que denotaremos por  $ds_0^2$ , es completa. En consecuencia la métrica dada por  $|\frac{\phi_3}{g}|^2$  lo es también gracias a la siguiente desigualdad:

$$ds_0^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 \leq |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{|g|} + |g| \right)^2 |\phi_3|^2 \leq \left| \frac{\phi_3}{g} \right|^2.$$

Puesto que  $|\frac{\phi_3}{g}|^2$  es además una métrica llana en  $\mathcal{S}_0 \setminus K$  (viene dada por el módulo de una 1-forma holomorfa), los resultados de Osserman y Huber mencionados al principio de esta demostración implican que  $\mathcal{S}_0 \setminus K$  tiene tipo conforme finito,  $\frac{\phi_3}{g}$  tiene polos en los finales y  $g$  extiende de forma holomorfa a los finales. Por lo tanto, si orientamos la superficie para que  $|g| < 1$  en  $\mathcal{S}_0 \setminus K$ , existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $|g| < 1 - \varepsilon$  en dicho subconjunto. Y puesto que la métrica de la inmersión  $\psi_0$  viene dada por

$$ds^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - |\phi_3|^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{|g|} - |g| \right)^2 |\phi_3|^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} \left| \frac{\phi_3}{g} \right|^2,$$

concluimos que la inmersión es completa.

Por último, la parte final del enunciado es cierta gracias a la Proposición 1.3.  $\square$

Además en el transcurso de la demostración anterior hemos probado el siguiente resultado sobre la estructura conforme de una superficie de tipo finito.

**Corolario 3.2 (Estructura del soporte conforme)** *El soporte conforme  $\mathcal{S}_0$  de una superficie de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  es biholomorfo a una superficie de Riemann compacta con borde analítico, que denotaremos por  $\overline{\mathcal{S}_0}$ , menos una cantidad finita de puntos interiores  $\{P_1, \dots, P_r\} \subset \overline{\mathcal{S}_0} \setminus \partial(\overline{\mathcal{S}_0})$  a los que llamaremos los finales de la superficie. En esos puntos los datos de Weierstrass extienden de forma meromorfa a los finales y  $\Phi$  tiene polos.*

### 3.1. COMPORTAMIENTO EN LOS FINALES

En esta sección vamos a profundizar en el estudio de la representación de Weierstrass de una superficie maximal de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ . En concreto vamos a dar una interpretación topológica del orden de los finales como polos de  $\Phi$ , en la línea de la dada por Jorge y Meeks [JM] para las superficies minimales de  $\mathbb{R}^3$ .

Esto nos permitirá, por ejemplo, obtener una fórmula que liga la topología de la superficie con los ceros/polos de los datos de Weierstrass (ver Ecuación (3.1)). También

sentaremos las bases para un teorema de representación (ver Teorema 3.5 en Sección 3.2), que nos permitirá dar condiciones necesarias y suficientes para construir estas superficies. Como consecuencia obtendremos nuevos ejemplos de superficies de tipo finito (ver Sección 3.3).

En adelante  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  representará una superficie maximal de tipo finito. Además denotaremos por  $\mathcal{S}_0$  al soporte conforme,  $\mathcal{S}_0^*$  a su imagen especular,  $\mathfrak{S}$  al doble y  $J$  a la reflexión especular (ver Subsección 1.5.3).

**Observación 3.1** Recordemos que  $\partial(\mathcal{S}_0)$  está formado por una unión finita de curvas de Jordan analíticas, disjuntas dos a dos, que se corresponden con las singularidades luminosas. En el Lema 2.1 vimos que, en un entorno de estas curvas, los datos de Weierstrass pueden ser reflejados a la imagen especular de dichos entornos mediante  $J^*(\Phi) = -\bar{\Phi}$  (y por tanto  $g \circ J = 1/\bar{g}$ ). Esto nos permite reflejar globalmente los datos de Weierstrass de la superficie a su imagen especular,  $\mathcal{S}_0^*$ . A partir de ahora consideraremos que los datos de Weierstrass de la inmersión están definidos en  $\mathfrak{S}$ .

Antes de estudiar el comportamiento de la superficie en los finales necesitamos definir la *compactificación topológica* de  $\mathcal{S}$ , que denotaremos por  $\bar{\mathcal{S}}$ . Esta superficie se obtiene de  $\mathcal{S}$  añadiéndole los finales. Es decir, consideramos la compactificación del soporte conforme  $\bar{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{S}_0 \cup \{P_1, \dots, P_r\}$  y volvemos a identificar cada curva del borde de  $\bar{\mathcal{S}}_0$  a un solo punto (ver Figura 3.1). Dicho de otra forma,  $\bar{\mathcal{S}}$  es la compactificación de  $\mathcal{S}$  por  $k$  puntos.

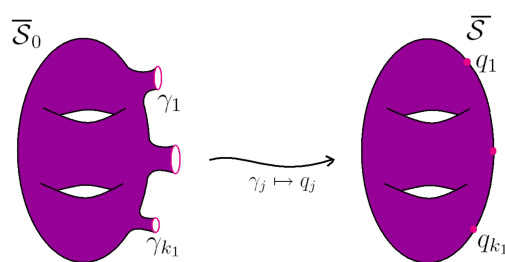


Figura 3.1: La compactificación de  $\mathcal{S}$ .

**Proposición 3.3 (Comportamiento de los finales)** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  una inmersión maximal de tipo finito y sea  $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \{P_1, \dots, P_r\}$  la compactificación de  $\mathcal{S}$  descrita anteriormente.

Sea  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  un plano espacial y  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$  la proyección ortogonal (en el sentido Lorentziano) a dicho plano. Consideremos ahora la composición  $\pi \circ \psi : \mathcal{S} \rightarrow \Pi \equiv \mathbb{C}$  que sabemos que es un recubridor ramificado con un número finito de hojas (ver Definición 3.1).

Entonces,  $\pi \circ \psi$  extiende a un recubridor ramificado  $h : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \Pi \cup \{\infty\} \equiv \bar{\mathbb{C}}$  mediante  $h^{-1}(\infty) = \{P_1, \dots, P_r\}$ . Los puntos  $P_j$  son puntos de ramificación, y el número de vueltas del recubridor en cada uno de ellos es

$$w_j := \text{Ord}_{P_j}(\Phi) - 1 = \text{Max}\{\text{Ord}_{P_j}(\phi_k) : k = 1, 2, 3\} - 1 \geq 1,$$

donde  $\text{Ord}_{P_j}(\phi_k)$  representa el orden de  $P_j$  como polo de  $\phi_k$ ,  $j = 1, \dots, r$ .

Como consecuencia el número de hojas del recubridor es precisamente  $n = \sum_{j=1}^r w_j$ .

*Demostración:* Primero observemos que, puesto que  $\pi \circ \psi$  es un recubridor (ramificado) con un número finito de hojas, en particular es una aplicación propia y por tanto la extensión  $h$  definida en el enunciado es una aplicación continua. Puesto que  $h|_{\bar{\mathcal{S}} \setminus \{P_1, \dots, P_r\}}$  es un recubridor ramificado es inmediato concluir que  $h$  también lo es.

Ahora veamos el comportamiento alrededor de un final  $P_j$ . Salvo componer con un movimiento rígido podemos suponer que  $g$  se anula en el final. Además podemos suponer que el plano  $\Pi$  es el plano horizontal  $\{x_3 = 0\} \subset \mathbb{L}^3$  (ver Lema 1.2). Utilizando notación compleja podemos escribir

$$\pi \circ \psi = \frac{-i}{2} \left( \int \frac{\phi_3}{g} + \int g \phi_3 \right) \in \{x_3 = 0\} \equiv \mathbb{C}.$$

Esto nos dice en primer lugar, que  $\Phi$  no puede tener polo simple en  $P_j$  ya que en ese caso la integral anterior no estaría bien definida. En segundo lugar, si consideramos un parámetro conforme  $z$  centrado en el final, entonces

$$\pi \circ \psi = \frac{c}{\bar{z}^{m-1}} + \sum_{j=-m+2}^{\infty} a_j \bar{z}^j + \sum_{j=-m+2}^{\infty} b_j z^j,$$

donde  $m > 1$  es el orden de  $P_j$  como polo de  $\Phi$ . Utilizando la notación del enunciado,  $m = w_j + 1$ . Por lo tanto  $h$  es un homeomorfismo local ramificado en  $z = 0$  (es decir, en  $P_j$ ) con índice de ramificación  $w_j - 1$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

En particular, hemos obtenido la siguiente caracterización para las superficies maximales embebidas de tipo finito en términos del comportamiento de los datos de Weierstrass (véase la Proposición 4.1 para una descripción más detallada del comportamiento asintótico en el caso embebido).

**Corolario 3.4** *Con la notación anterior, una superficie de tipo finito es embebida si y solamente si  $r = 1$  y  $w_1 = 1$ , es decir hay un único final y  $\Phi$  tiene un polo doble en él.*

### Otro Corolario: Una fórmula tipo Jorge-Meeks

El conocimiento del comportamiento del recubridor ramificado  $\pi \circ \psi : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \Pi \cup \{\infty\} \equiv \bar{\mathbb{C}}$  descrito en la proposición anterior nos permite también obtener una relación entre la topología de la superficie y el comportamiento de los datos de Weierstrass en las singularidades y los finales, en la línea de la conocida fórmula de Jorge y Meeks [JM] para superficies minimales.

Para ellos utilizaremos la fórmula de Riemann-Hurwitz (ver por ejemplo [FK]) para un recubridor ramificado. Esta fórmula nos da una relación entre la ramificación del recubridor y la topología de las superficies implicadas. En nuestro caso dicha relación es

$$\chi(\bar{\mathcal{S}}) = n \chi(\bar{\mathbb{C}}) - B = 2n - B,$$

donde  $\chi$  denota la característica de Euler de las superficies,  $n$  es el número de hojas del recubridor y  $B$  el número total de ramificación (es decir, la suma de todos los índices de ramificación). Puesto que los puntos de ramificación tienen lugar sólo en las singularidades y en los finales, podemos escribir  $B = B_l + B_s + B_\infty$  siendo  $B_l, B_s$  y  $B_\infty$  la suma de los índices de ramificación en las singularidades luminosas, espaciales y en los finales respectivamente.

En la proposición anterior vimos que  $B_\infty = \sum_{j=1}^r (w_j - 1) = n - r$  donde  $w_j + 1$  es el orden del final  $P_j$  como cero de  $\Phi$ ,  $j = 1, \dots, r$ . Por lo tanto  $2n - B_\infty = n + r = \sum_{j=1}^r (w_j + 1)$ . En adelante denotaremos por  $W_\infty = \sum_{j=1}^r (w_j + 1)$  a la suma de los órdenes de los finales como polos de  $\Phi$ .

Por otro lado en el Lema 2.1 vimos cuáles eran los índices de ramificación en las singularidades espaciales y luminosas. De ahí concluimos que  $B_s$  es la suma de los órdenes de los ceros de  $\Phi$  en las singularidades espaciales, que denotaremos por  $V_s$ . Para las singularidades luminosas lo que obtenemos es que  $B_l = \frac{V_l}{2} + \deg(g) - k_1$ , donde  $V_l$  es la suma de los órdenes de los ceros de  $\Phi$  en las curvas singulares (que es un número par),  $\deg(g)$  denota el grado de la aplicación de Gauss  $g$  (vista como aplicación de  $\mathcal{S}$  en  $\bar{\mathbb{C}}$ ) y  $k_1$  es el número de singularidades luminosas.

Así hemos obtenido la siguiente fórmula

$$\chi(\bar{\mathcal{S}}) = W_\infty - V_s - \frac{V_l}{2} - \deg(g) + k_1. \quad (3.1)$$

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Esta fórmula puede ser obtenida también mediante la conocida relación de que, dada una 1-forma meromorfa sobre una superficie de Riemann compacta, el número de ceros menos el número de polos (contados con multiplicidad) es igual a la característica de Euler de la superficie. Así, si  $\mathcal{S}_0$  es la compactificación del soporte conforme de la superficie, podemos considerar su doble<sup>1</sup>  $\mathfrak{S}$ , que es una superficie compacta con  $\chi(\mathfrak{S}) = 2(\chi(\bar{\mathcal{S}}) - k_1)$ . Consideremos la 1-forma  $\phi_3$ , que está definida sobre  $\mathfrak{S}$ , para el cómputo del número de ceros y polos de  $\phi_3$  basta tener en cuenta las siguientes observaciones.

Salvo movimiento rígido podemos suponer que la aplicación de Gauss  $g$  no tiene ceros ni polos en las singularidades espaciales ni en los finales. Como consecuencia, el orden de los ceros (resp. polos) de  $\phi_3$  en las singularidades espaciales (resp. en los finales) coincide con el de  $\Phi$ . Lo mismo ocurre para las singularidades luminosas, ya que en esos puntos  $g$  toma valores unitarios. Sin embargo, hay que tener en cuenta que  $\phi_3$  está definida en el doble, por tanto también tendrá ceros (resp. polos) en los reflejados<sup>2</sup> de las singularidades espaciales (resp. de los finales). Además  $\phi_3$  debe tener ceros en los polos y en los ceros de  $g$  (y del mismo orden) para que la inmersión  $\psi$  esté bien definida (ver Ec. (1.3)). Por lo tanto el número total de ceros de  $\phi_3$  en  $\mathfrak{S}$  ha de ser  $2V_s + V_l + \#g^{-1}(0) + \#g^{-1}(\infty) = 2V_s + V_l + 2\deg(g)$  mientras que el número total de polos es precisamente  $2W_\infty$ .

## 3.2. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

Como hemos visto, la representación de Weierstrass  $\Phi$  de una superficie maximal con singularidades  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  está definida, no sólo en el soporte conforme  $\mathcal{S}_0$  de la superficie, sino también sobre su compactificación  $\bar{\mathcal{S}}_0$  y por tanto puede ser extendida al doble de  $\bar{\mathcal{S}}_0$ , que denotaremos por  $\mathfrak{S}$ , mediante  $J^*(\Phi) = -\bar{\Phi}$ , siendo  $J$  la simetría especular asociada. A continuación resumimos las propiedades de  $\Phi$  que hemos visto hasta ahora (ver Lema 2.1 y Proposición 3.3).

(I)  $J \circ g = 1/\bar{g}$  y  $|g| < 1$  en  $\bar{\mathcal{S}}_0 \setminus \partial(\bar{\mathcal{S}}_0)$ .

<sup>1</sup>ver Subsección 1.5.3.

<sup>2</sup>Es decir, en sus imágenes vía la simetría especular  $J$ .

- (II) La 1-forma vectorial  $\Phi$  satisface  $J^*(\Phi) = -\bar{\Phi}$ .
- (III) Todos los polos de  $\Phi$  tienen orden  $\geq 2$  y ninguno de ellos pertenece a  $\partial(\bar{\mathcal{S}}_0)$ .
- (IV) Para cualquier curva cerrada  $\gamma \subset \mathcal{S}_0$  se cumple  $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0$ .

Además sabemos (Sección 2.1) que los ceros de  $\Phi$  en  $\bar{\mathcal{S}}_0 \setminus \partial(\bar{\mathcal{S}}_0)$  son las singularidades espaciales de la superficie.

Finalmente observemos que las curvas que generan la homología  $\mathcal{S}_0$  se pueden dividir en las que generan la homología de  $\mathcal{S}$  junto con las curvas de  $\partial\mathcal{S}_0$ . En particular la condición (IV) implica la siguiente

- (IV)' Para cualquier curva cerrada  $\gamma \subset \mathcal{S}$  se cumple  $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0$ .

Como veremos a continuación, esta condición (más débil que la anterior) basta para garantizar que la correspondiente inmersión maximal está bien definida.

Nuestro objetivo en esta sección es demostrar que estas condiciones no sólo son necesarias sino también suficientes para la existencia de una superficie maximal de tipo finito. Concretamente, aspiramos a demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 3.5** *Sea  $\mathfrak{S}$  una superficie de Riemann compacta (sin borde).*

*Supongamos que  $\mathfrak{S}$  admite una involución antiholomorfa  $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  de tal forma que el conjunto de sus puntos fijos consista de  $k_1$  curvas analíticas  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_1}$  disjuntas dos a dos y tales que  $\mathfrak{S} \setminus \cup_j \gamma_j$  tiene dos componentes conexas cuyas clausuras denotaremos por  $\bar{\mathcal{S}}_0$  y  $\bar{\mathcal{S}}_0^* = J(\bar{\mathcal{S}}_0)$ .*

*Consideremos  $(g, \phi_3)$  datos meromorfos satisfaciendo las condiciones (I), (II), (III) y (IV)' anteriores, donde la superficie  $\mathcal{S}$  de la última condición es la que se obtiene de  $\mathcal{S}_0$  identificando cada curva del borde a un solo punto (ver Figura 3.2).*

*Definamos*

$$\psi_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3 \quad \psi_0(p) := \operatorname{Re} \int_{p_0}^p \Phi$$

*donde  $p_0 \in \mathcal{S}_0$  es un punto arbitrario y  $\mathcal{S}_0 := \bar{\mathcal{S}}_0 \setminus \{P_1, \dots, P_r\}$ , siendo  $\{P_1, \dots, P_r\}$  los polos de  $\Phi$  en  $\bar{\mathcal{S}}_0$ .*

*Entonces,  $\psi_0$  está bien definida e induce una inmersión maximal de tipo finito de  $\mathcal{S}$  en  $\mathbb{L}^3$ . Dicha inmersión tiene  $k_1 + k_2$  singularidades, siendo  $k_2$  el número de ceros  $\Phi$  en  $\mathcal{S}_0 \setminus \cup_j \gamma_j$  contados sin multiplicidad.*



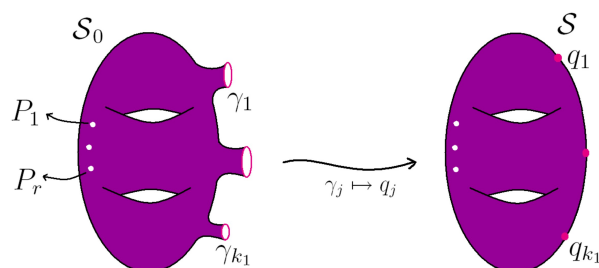


Figura 3.2: La superficie  $\mathcal{S}$  se obtiene identificando cada curva del borde de  $\mathcal{S}_0$  a un solo punto.

*Demostración:* Para que  $\psi_0$  esté bien definida necesitamos comprobar la condición (IV). Si consideramos la superficie  $\mathcal{S}$  construida en el enunciado del teorema, las curvas que generan la homología de  $\mathcal{S}_0$  son aquellas que generan la de  $\mathcal{S}$  junto con las curvas de  $\partial\mathcal{S}_0$ . Las curvas  $\gamma$  del primer tipo cumplen que  $\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = 0$  por hipótesis (condición (IV)'), mientras que la del segundo lo cumplen debido a que  $J(\gamma) = \gamma$ , y por tanto

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi = \operatorname{Re} \int_{\gamma} J^* \Phi = -\operatorname{Re} \int_{\gamma} \bar{\Phi} = -\operatorname{Re} \int_{\gamma} \Phi.$$

Para ver que se induce en la superficie  $\mathcal{S}$  basta comprobar que  $\psi_0$  aplica cada curva  $\gamma_j \subset \partial(\mathcal{S}_0)$  en un solo punto. Esto se deduce gracias a la propiedad (II) y al hecho de que las curvas  $\gamma_j$  son curvas de puntos fijos de la aplicación  $J$ . Por último la propiedad (I) nos dice que  $g$  es unitaria en estas curvas (y solamente en ellas), con lo que esas curvas son precisamente las singularidades luminosas de la superficie.

Por último comprobemos que la inmersión es de tipo finito. Puesto que el número de singularidades es finito, en virtud de la Proposición 3.1 basta comprobar que la inmersión es completa. Esto se deduce de la expresión para la métrica inducida en  $\mathcal{S}_0$  dada por (1.4) junto con la propiedad (III).  $\square$

Si queremos construir superficies embebidas podemos prescindir de la condición (IV') (se dará automáticamente) e imponer una condición adicional, como muestra el siguiente corolario.

**Corolario 3.6 (Caso embebido)** Sean  $\mathcal{S}$ ,  $J$ , y  $\bar{\mathcal{S}}_0$  como en el teorema anterior, y supongamos que  $\bar{\mathcal{S}}_0$  es homeomorfa a una esfera menos  $k_1$  discos abiertos. Consideremos datos meromorfs  $(g, \phi_3)$  sobre  $\mathcal{S}$  verificando las condiciones (I), (II) y (III) anteriores. Supongamos además que la 1-forma vectorial  $\Phi$  tiene únicamente dos polos  $P \in \mathcal{S}_0$  y  $J(P) \in \mathcal{S}_0^*$ , y que se verifica una de las dos condiciones siguientes:

(V.1)  $\Phi$  no se anula en  $\bar{S}_0$  ( $k_2 = 0$ ) y  $g|_{\gamma_j} : \gamma_j \rightarrow \mathbb{S}^1$  es inyectiva  $\forall j = 1, \dots, k_1$  (es decir,  $\deg(g) = k_1$ ).

(V.2) Los dos polos de  $\Phi$  son de orden 2.

Entonces, la inmersión  $\psi_0$  dada como en el Teorema anterior está bien definida y define una superficie maximal embebida de tipo finito con  $k_1$  singularidades en  $\mathbb{L}^3$ .

Además en este caso el soporte conforme de la superficie  $S_0$  es biholomorfo a  $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  menos una cantidad finita de discos abiertos cuyas clausuras son disjuntas dos a dos.

*Demostración:* Obsérvese que en este caso  $S$  es homeomorfa a un plano, es decir, la única curva que genera la homología de  $S$  es aquella que encierra el final, con lo que la condición (IV)' se verifica trivialmente a partir del teorema de los residuos. Por tanto, estamos en las condiciones del teorema anterior, con lo que  $\psi_0 : S_0 \rightarrow \mathbb{L}^3$  es una superficie maximal de tipo finito. Veamos ahora que cualquiera de las dos condiciones anteriores nos garantiza que dicha superficie es embebida en  $\mathbb{L}^3$ .

Si se verifica la condición (V.1): En virtud del Corolario 2.2, todas las singularidades son embebidas, con lo que por la Proposición 1.3 concluimos que la superficie es embebida.

Si se verifica la condición (V.2): Aplicar el Corolario 3.4 y la Ecuación (3.1).

La parte final del corolario es consecuencia de una extensión del Teorema de uniformización de Koebe establecido en [HS].  $\square$

### 3.3. CONSTRUCCIÓN DE EJEMPLOS

En esta parte vamos a construir, para cada  $n \geq 1$ , tres familias de ejemplos con  $n + 1$  singularidades cónicas y con las siguientes propiedades:

- Familia  $\Gamma_n^C$ : invariantes por rotaciones verticales de orden  $n+1$ , su final es asintótico a una catenoide.
- Familia  $\Gamma_n^P$  (sólo para  $n$  impar): invariantes por rotaciones verticales seguidas de simetrías horizontales, su final es asintótico a un plano horizontal.
- Familia  $\Upsilon_n$ : todas sus singularidades están contenidas en un plano vertical.

Para ello utilizaremos el Teorema de representación 3.5. Es decir, daremos una superficie de Riemann compacta (que resultará ser el doble de la superficie maximal obtenida), una involución antiholomorfa (la simetría especular) con  $n + 1$  curvas de puntos

fijos (las curvas correspondientes a las singularidades), y unos datos de Weierstrass definidos sobre la superficie.

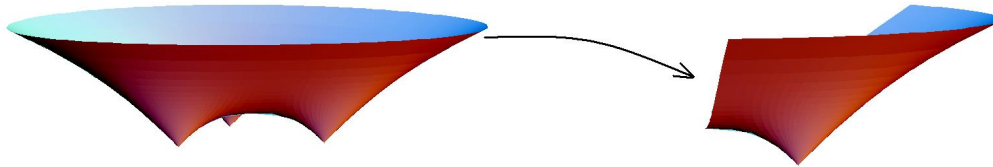


Figura 3.3: Superficie de la familia  $\Gamma_2^C$  y su pieza fundamental.

#### LAS FAMILIAS $\Gamma_n^C$ Y $\Gamma_n^P$

- **Parámetros:**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , y  $a \in ]0, 1[$ .
- **Superficie de Riemann compacta:** Para cada  $n$  y  $a$  como arriba denotaremos por  $\Sigma_{n,a}$  a la superficie de Riemann compacta de género  $n$  asociada a la función  $w = \sqrt[n+1]{\frac{z(az-1)}{z-a}}$ , es decir,

$$\Sigma_{n,a} := \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 : w^{n+1} = \frac{z(az-1)}{z-a}\}.$$

Un modelo para esta superficie puede verse en la Figura 3.4. Para construirlo se toman  $n + 1$  copias de  $\overline{\mathbb{C}}$  rajadas como se indica, y se identifican las curvas  $\beta_j^+$  con  $\beta_{j+1}^-$  y  $\sigma_j^+$  con  $\sigma_{j+1}^-$ ,  $j = 1, \dots, n + 1$ , con el convenio  $\beta_{n+2}^- = \beta_1^-$  y  $\sigma_{n+2}^- = \sigma_1^-$ . Obsérvese que tras esta identificación los puntos con  $z = 0, 1/a, a, \infty$  de cada copia determinan cuatro únicos puntos en  $\Sigma_{n,a}$  que seguiremos denotando por  $0, 1/a, a, \infty$ .

- **Involución antiholomorfa:**

$$J = J_{n,a} : \Sigma_{n,a} \rightarrow \Sigma_{n,a}, \quad J(z, w) = \left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{\bar{w}}\right).$$

- **Curvas de puntos fijos de  $J$ :** son las  $n + 1$  curvas de Jordan  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}$  que se corresponden con las  $n + 1$  ramas de  $\sqrt[n+1]{\frac{z(az-1)}{z-a}}$  sobre la curva  $|z| = 1$ . (i.e., en el modelo de la Figura 3.4, las curvas con  $|z| = 1$  en cada una de las copias de  $\overline{\mathbb{C}}$ ).

Además es fácil ver que  $\Sigma_{n,a} \setminus \cup_{j=1}^{n+1} \gamma_j$  tiene dos componentes conexas,  $\Omega_{n,a} = \{(z, w) \in \Sigma_{n,a} : |z| < 1\}$  y  $J_a(\Omega_{n,a}) = \{(z, w) \in \Sigma_{n,a} : |z| > 1\}$ .

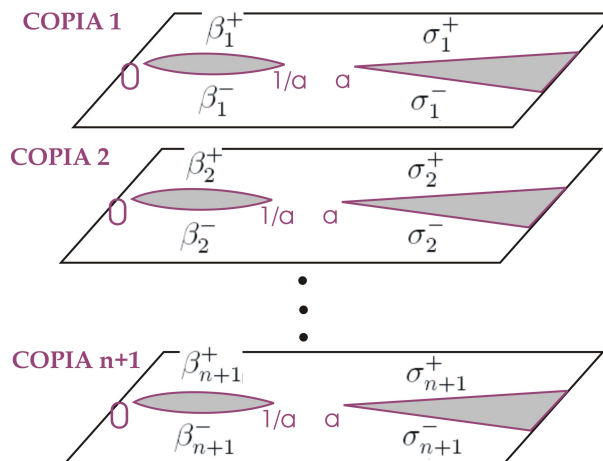


Figura 3.4: Modelo para la superficie  $\Sigma_{n,a}$ .

- **Datos de Weierstrass para las superficies de  $\Gamma_n^C$ :**

$$g = g_{n,a} = \frac{z-a}{az-1}w \quad \text{y} \quad \phi_3 = \phi_3^{n,a} = \frac{dz}{z}. \quad (3.2)$$

Sus divisores asociados son

$$[g] = \frac{(1/a)^n \cdot 0}{a^n \cdot \infty} \quad \text{y} \quad [\phi_3] = \frac{(1/a)^n \cdot a^n}{0 \cdot \infty}.$$

- **Datos de Weierstrass para las superficies de  $\Gamma_n^P$ :** En este caso debemos suponer que  $n = 2k + 1$  es impar.

$$g = g_{n,a} = \frac{z}{w^k} \quad \text{y} \quad \phi_3 = \phi_3^{n,a} = i \frac{dz}{w^{k+1}(z-a)} \quad (3.3)$$

Sus divisores son

$$[g] = \frac{a^k \cdot 0^{k+2}}{(1/a)^k \cdot \infty^{k+2}} \quad \text{y} \quad [\phi_3] = a^k \cdot (1/a)^k \cdot 0^{k+1} \cdot \infty^{k+1}.$$

Es inmediato comprobar que, en ambos casos,  $(\Sigma_{n,a}, J_{n,a}, g_{n,a}, \phi_3^{n,a})$  así definidos satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5 y por lo tanto la aplicación:

$$\psi = \psi_{n,a} : \bar{\Omega}_a \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{L}^3$$

$$\psi(x) = \text{Re} \left( \int_a^x \Phi \right),$$

define una superficie maximal completa y embebida con  $n + 1$  singularidades y asintótica a media catenoide en el caso de las superficies de  $\Gamma_n^C$  o a un plano horizontal en el caso de las superficies de  $\Gamma_n^P$ .<sup>3</sup>

### Las simetrías de las superficies de $\Gamma_n^C$ y $\Gamma_n^P$

Con la notación establecida anteriormente, consideremos la aplicación holomorfa  $T : \Sigma_{n,a} \rightarrow \Sigma_{n,a}$ ,  $T(z, w) = (z, e^{\frac{2\pi i}{n+1}} w)$ .

Para cualquier superficie de  $\Gamma_n^C$  sean  $(g, \phi_3)$  sus datos de Weierstrass. De la ecuación (3.2) es inmediato ver que

$$g \circ T = e^{\frac{2\pi i}{n+1}} g \quad \text{y} \quad T^*(\phi_3) = \phi_3.$$

Como además  $T(a) = a$ , la inmersión maximal asociada,

$$\psi = (X_1, X_2, X_3) = \operatorname{Re} \int_a (\phi_1, \phi_2, \phi_3),$$

satisface

$$\begin{aligned} \psi \circ T &= \operatorname{Re} \int_a (T^*(\phi_1), T^*(\phi_2), T^*(\phi_3)) = \\ &= \left( \cos\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right) X_1 - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right) X_2, \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right) X_1 + \cos\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right) X_2, X_3 \right). \end{aligned}$$

Es decir, las superficies de  $\Gamma_n^C$  son invariantes bajo la rotación vertical de ángulo  $\frac{2\pi}{n+1}$ .

Ahora sean  $(g, \phi_3)$  los datos de Weierstrass de una superficie maximal de la familia  $\Gamma_n^P$ ,  $n = 2k + 1$ , dados como en la Ecuación (3.3), entonces

$$g \circ T = e^{\frac{2\pi i k}{n+1}} g \quad \text{y} \quad T^*(\phi_3) = -\phi_3.$$

Por lo tanto, razonando como antes obtenemos que estas superficies son invariantes por una rotación vertical de ángulo  $\frac{2\pi k}{n+1}$  seguida de una simetría con respecto a un punto, o equivalentemente, una rotación vertical de ángulo  $\frac{2\pi}{n+1}$  seguida de una simetría horizontal.

Por lo tanto el grupo de simetrías de estas superficies tiene al menos  $n + 1$  elementos. En realidad se puede demostrar que estas superficies son las únicas cuyo grupo de simetrías tiene al menos  $2(n + 1)$  elementos.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Véase la Proposición 4.1 sobre el comportamiento en infinito de las superficies maximales y embebidas.

<sup>4</sup>Esto es consecuencia de la Observación 4.3 que veremos en el Capítulo siguiente.

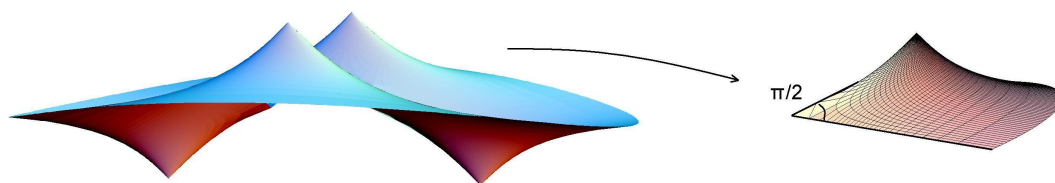


Figura 3.5: Superficie de la familia  $\Gamma_3^P$  y su pieza fundamental.

### LA FAMILIA $\Upsilon_n$

- **Parámetros:**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , y  $\alpha = (a_1, \dots, a_{2n}) \in (\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})^{2n}$ ,  $a_i \neq a_j$  si  $i \neq j$ .
- **Superficie de Riemann compacta:** Denotemos por  $\Delta_\alpha$  la superficie de Riemann asociada a la función  $w = \sqrt{(z^2 - 1) \prod_{j=1}^{2n} (z - a_j)}$ , esto es,

$$\Delta_\alpha := \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}^2} : w^2 = (z^2 - 1) \prod_{j=1}^{2n} (z - a_j)\}$$

Un modelo topológico para  $\Delta_\alpha$  está representado en la Figura 3.6. Se consideran dos copias de  $\overline{\mathbb{C}}$  y se rajan como indica la figura (donde  $a_{2n+1} := -1$  y  $a_{2n+2} := 1$ ). Después de identificar las curvas  $\beta_j^+$  con  $\beta_j^-$  y  $\beta_j^-$  con  $\sigma_j^+$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , obteniéndose una superficie compacta de género  $n$ .

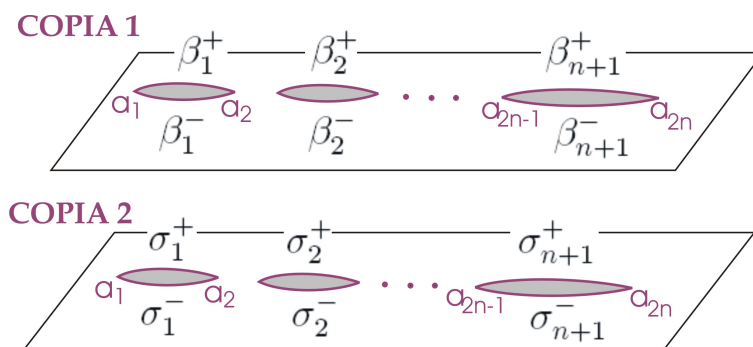


Figura 3.6: Modelo para la superficie  $\Delta_n$ .

- **Involución antiholomorfa:** Definamos  $J_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_\alpha$  como  $J_\alpha(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w})$ .
- **Curvas de puntos fijos de  $J$ :** son las curvas de Jordan  $\gamma_j = \{(z, w) \in \Delta_\alpha : z \in [a_{2j-1}, a_{2j}]\}$ ,  $j = 1, \dots, n+1$ , donde por convenio  $a_{2n+1} := -1$  y  $a_{2n+2} := 1$ .

Como consecuencia,  $\Delta_\alpha \setminus \bigcup_{j=1}^{n+1} \gamma_j$  tiene dos componentes conexas,  $\Omega_\alpha$  y  $J_\alpha(\Omega_\alpha)$ , cada una de ellas correspondiendo a una rama univaluada de  $w$ .

- **Datos de Weierstrass:** Para cualquier permutación  $\tau$  del conjunto  $\{1, \dots, 2n+2\}$ , definimos los siguientes datos meromorfos sobre  $\Delta_\alpha$ ,

$$g_{\alpha,\tau} = \frac{w - \prod_{j=1}^{n+1} (z - a_{\tau(j)})}{w + \prod_{j=1}^{n+1} (z - a_{\tau(j)})} \quad \text{y} \quad \phi_3^{\alpha,\tau} = \frac{\prod_{j=n+2}^{2n+2} (z - a_{\tau(j)}) - \prod_{i=j}^{n+1} (z - a_{\tau(j)})}{w} dz$$

Es inmediato comprobar que los datos  $\mathfrak{S} = \Delta_\alpha, J = J_a$  y  $(g, \phi_3) = (g_{\alpha,\tau}, \phi_3^{\alpha,\tau})$  satisfacen las hipótesis del Teorema 3.5 y por lo tanto la aplicación:

$$\psi = \psi_{\alpha,\tau} : \Omega_\alpha \setminus \{p_\infty\} \rightarrow \mathbb{L}^3$$

dada como en el teorema es una inmersión maximal completa y embebida con  $n+1$  singularidades.

Además, como  $a_j \in \mathbb{R}$ , la aplicación  $T(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$  induce una isometría en la superficie,  $T(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$ . Puesto que los puntos  $a_j$  son fijos por  $T$  deducimos que todas las singularidades están contenidas en el plano  $\{x_1 = 0\}$ .



Figura 3.7: Superficies de la familia  $\Upsilon_1$ .





## EL CASO EMBEBIDO

---

En este capítulo estudiaremos las superficies maximales de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  que son embebidas. Como ya sabemos, estas superficies son de hecho grafos enteros (y completos) sobre cualquier plano espacial y todas sus singularidades son de tipo cónico (Proposición 3.1).

Así, a lo largo de este capítulo  $\mathcal{G} \subset \mathbb{L}^3$  representará un grafo (entero) maximal con un número finito de singularidades cónicas. Orientaremos la superficie de forma que la aplicación de Gauss verifique  $|g| \leq 1$ . Además supondremos, aplicando una rotación en  $\mathbb{L}^3$  si es necesario, que el único final de  $\mathcal{G}$  es horizontal, es decir, el límite del vector normal en el final es vertical. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\mathcal{G}_n = \{\mathcal{G} : \mathcal{G} \text{ es un grafo maximal con } n + 1 \text{ singularidades cónicas y final horizontal}\}.$$

Como consecuencia de la Sección 3.3, el espacio  $\mathcal{G}_n$  es no vacío para cada  $n \geq 1$ .

A una ordenación del conjunto de las singularidades de  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_n$ ,  $\mathbf{m} = (q_0, \dots, q_n) \in (\mathbb{R}^3)^{n+1}$ , la llamaremos una *marca* sobre  $\mathcal{G}$ . Al par  $(\mathcal{G}, \mathbf{m})$  lo llamaremos *superficie marcada* o *grafo marcado*. Para el conjunto de superficies marcadas utilizaremos la siguiente

notación:

$$\mathcal{M}_n := \{(\mathcal{G}, \mathbf{m}) : \mathcal{G} \in \mathcal{G}_n, \mathbf{m} \text{ marca en } \mathcal{G}\}.$$

El presente capítulo está organizado en dos secciones y un apéndice. En la primera sección estudiamos las propiedades geométricas de estas superficies, como el comportamiento asintótico, un teorema de unicidad de la superficie en términos de sus singularidades y el comportamiento en infinito, y relaciones de equilibrio para los flujos y torques. Como consecuencia de esto último obtendremos resultados de no-existencia de estas superficies, así como una nueva caracterización de la catenoide Lorentziana.

Por último, en la Sección 4.2 describiremos la estructura del espacio  $\mathcal{G}_n$ ,  $n \geq 1$ . Concretamente, demostraremos que  $\mathcal{G}_n$  es una variedad real analítica de dimensión  $3n+4$ . La posición de las singularidades en  $\mathbb{L}^3$  y el *crecimiento logarítmico* (ver Definición 4.1) son coordenadas globales para este espacio, cuya topología subyacente es la de la convergencia uniforme de grafos sobre compactos. Además demostraremos que la estructura conforme y los datos de Weierstrass de las superficies dependen de forma diferenciable de estas coordenadas. Los resultados técnicos utilizados en esta sección serán demostrados en el apéndice.

## 4.1. COMPORTAMIENTO GLOBAL

### COMPORTAMIENTO ASINTÓTICO EN INFINITO

Como vimos en la Proposición 3.3, la 1-forma vectorial  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  de la representación de Weierstrass de un grafo maximal con un número finito de singularidades tiene un polo de orden 2 en el final.

Como consecuencia de esto, y siguiendo las ideas de Jorge y Meeks [JM] y R.Schoen [Sch] en el contexto de las superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$ , se puede demostrar el siguiente resultado. Otra demostración de este hecho en el ambiente Lorentziano puede ser vista en [Kly].

**Proposición 4.1 (Comportamiento asintótico)** *Sea  $\mathcal{G} = \{(x_1, x_2, u(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}$  un grafo maximal con un número finito de singularidades aisladas en  $\mathbb{L}^3$ . Entonces, salvo un movimiento rígido de  $\mathbb{L}^3$ :*

$$u(x_1, x_2) = c \log|(x_1, x_2)| + b + \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{|(x_1, x_2)|^2} + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^{-2}), \quad (4.1)$$

para ciertas constantes  $c, b, a_1$  y  $a_2 \in \mathbb{R}$ .<sup>1</sup>

Por tanto, al normalizar las superficies de  $\mathcal{G}_n$  para que la aplicación de Gauss  $g$  tenga un cero en el final, o bien  $\phi_3$  es regular en el final (si la multiplicidad del cero de  $g$  es  $> 1$ ), o bien  $\phi_3$  tiene un polo simple en el final (si el cero de  $g$  es simple). En el primero de los casos la superficie es asintótica a un plano horizontal, lo que se corresponde con el caso  $c = 0$  en (4.1). En el segundo caso ( $c \neq 0$ ) el desarrollo anterior nos permite concluir que la superficie es asintótica a media catenoide vertical, dicha catenoide apuntará hacia arriba o hacia abajo dependiendo de que la constante  $c$  sea positiva o negativa. De hecho es fácil comprobar que  $c$  coincide con el residuo de  $\phi_3$  en el final.

**Definición 4.1 (Crecimiento logarítmico)** *Al número real  $c$  que aparece en el desarrollo asintótico de un grafo maximal descrito en la Proposición 4.1 se le denomina crecimiento logarítmico de la superficie.*

#### LOS VECTORES FLUJO Y TORQUE

Sea  $\mathcal{G}$  un grafo maximal con singularidades aisladas en un conjunto  $F \subset \mathcal{G}$  y  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  una parametrización conforme suya. Orientaremos la superficie de forma que la aplicación de Gauss verifique  $|g| \leq 1$  en  $\mathcal{S}$ . Los vectores *flujo* y *torque* a lo largo de una curva cerrada en la superficie se definen como sigue.

**Definición 4.2 (Flujo y torque a lo largo de una curva cerrada)** *Sea  $\gamma(s) : [0, L] \rightarrow \mathcal{G} \setminus F$  una curva cerrada y orientada parametrizada por el arco. Sea  $\nu$  el vector conormal unitario a  $\gamma$  tal que  $\{\nu, \gamma'\}$  está positivamente orientada con respecto a la orientación de  $\mathcal{G}$ .*

*El flujo de  $\mathcal{G}$  a lo largo de  $\gamma$  es, por definición, el vector:*

$$F(\gamma) = \int_{\gamma} \nu(s) ds,$$

*mientras que el vector torque a lo largo de  $\gamma$  se define como:*

$$T(\gamma) = \int_{\gamma} \psi(\gamma(s)) \wedge \nu(s) ds,$$

*donde  $\wedge$  denota el producto exterior lorentziano.*

<sup>1</sup>Aquí  $\mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^{-2})$  representa una función  $f(x_1, x_2)$  tal que  $\lim_{|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty} \frac{f(x_1, x_2)}{|(x_1, x_2)|^{-2}} = 0$ .

Es importante observar que las anteriores definiciones no dependen de la clase de homología de la curva  $\gamma$ . En el caso del flujo esto es consecuencia del Teorema de Stokes y el carácter armónico de la inmersión. De hecho no es difícil comprobar que

$$F(\gamma) = \text{Im} \int_{\gamma} \Phi, \quad (4.2)$$

siendo  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  la representación de Weierstrass de la superficie. Para el vector torque, esta no-dependencia de la clase de homología de la curva es consecuencia de aplicar el teorema de la divergencia a la 1-forma vectorial  $\alpha_p(v) = \psi(p) \wedge (*d\psi_p(v))$ ,<sup>2</sup> cuya divergencia es proporcional a la curvatura media de la superficie, y por tanto se anula.

Por lo tanto para un grafo maximal entero sólo tiene sentido el flujo a lo largo de curvas rodeando, o bien las singularidades, o bien el final. Así si  $\mathcal{G} \in \mathcal{G}_n$  tiene singularidades en el conjunto  $F = \{q_0, \dots, q_n\} \subset \mathcal{G}$ , consideremos un dominio compacto  $\Omega \subset \mathcal{G} \setminus F$  tal que  $\partial\Omega = \gamma_{\infty} \cup \gamma_0 \cup \dots \cup \gamma_n$ , siendo  $\gamma_j$  el borde de un disco cerrado en  $\mathcal{G}$  que contiene a  $q_j$  en su interior y no contiene a más singularidades,  $j = 0, \dots, n$ , y siendo  $\gamma_{\infty}$  el borde de un disco cerrado conteniendo todas las singularidades en su interior. La orientación en  $\Omega$  induce una orientación en estas curvas de forma que, si  $\nu_j$  es el conormal unitario exterior de  $\gamma_j$ , la base  $\{\nu_j, \gamma'_j\}$  está positivamente orientada,  $j = 1, \dots, n+1, \infty$ . Llamaremos  $F_j$  (resp.,  $T_j$ ) al flujo (resp., torque) de  $\mathcal{G}$  a lo largo de la curva  $\gamma_j$ ,  $j = 0, \dots, n, \infty$ .

**Observación 4.1 (Flujo y torque en las singularidades)** *Como se demuestra en [KM], para todo  $j = 0, \dots, n$ ,  $F_j$  es un vector temporal apuntando hacia abajo, en el caso de que la singularidad apunte hacia abajo, y hacia arriba en caso contrario. Además, no es difícil comprobar que  $T_j = q_j \wedge F_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ .*

**Observación 4.2 (Flujo y torque en el infinito)** *Para una superficie con vector normal vertical en el final, la Ecuación (4.2) nos lleva a*

$$F_{\infty} = 2\pi (0, 0, c), \quad (4.3)$$

donde  $c$  es el crecimiento logarítmico.

Además, si el final es de tipo catenoide,  $T_{\infty} = P_{\infty} \wedge F_{\infty}$ , siendo  $P_{\infty}$  cualquier punto en el eje de la catenoide. Si el final es plano pero no de tipo Riemann<sup>3</sup>,  $T_{\infty} = 0$ , y para finales

<sup>2</sup>Aquí  $*$  representa el operador de Hodge.

<sup>3</sup>Por definición, un final donde  $g = 0$  se dice que es de tipo Riemann si la aplicación de Gauss  $g$  tiene un cero doble en el final (recuérdese que un final es asintótico a un plano horizontal si es un cero de  $g$  con multiplicidad de orden  $> 1$ ).

planos de tipo Riemann,  $T_\infty$  es un vector horizontal contenido en la recta asintótica del final. La demostración de estos hechos es análoga a la del caso minimal ([Per] y [Kus]).

El vector conormal  $\nu$  puede interpretarse físicamente como una fuerza que actúa sobre cada punto de la curva  $\gamma$ . Por tanto el flujo a lo largo de una curva puede identificarse con la tensión que la curva ejerce sobre la superficie. El momento resultante de la fuerza  $\nu$  respecto de un eje con vector director unitario  $v$  se define como  $M(v) = \left( \int_\gamma \langle \gamma(s) \wedge \nu(s), v \rangle ds \right) v$  por lo que  $M(v) = \langle T, v \rangle v$ .

**Proposición 4.2** Utilizando la notación anterior:

$$(1) F_\infty + \sum_{j=1}^{n+1} F_j = 0,$$

$$(2) T_\infty + \sum_{j=1}^{n+1} T_j = 0.$$

*Demostración:* (1) es consecuencia del carácter armónico de la inmersión maximal y el teorema de Stokes.

Para (2), basta aplicar el teorema de la divergencia a la 1-forma vectorial  $\alpha_p(v) = \psi(p) \wedge (*d\psi_p(v))$ , que como hemos comentado antes tiene divergencia cero.  $\square$

Como consecuencia de la fórmula (1) obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 4.3** No existe ningún grafo maximal entero con final plano y todas sus singularidades apuntando hacia arriba (o todas hacia abajo). Análogamente no existen grafos maximales enteros con un final asintótico a media catenoide apuntando hacia arriba (resp. abajo) y todas sus singularidades apuntando hacia arriba (resp. abajo).

Y obtenemos también la siguiente caracterización de la catenoide Lorentziana.

**Teorema 4.4** La catenoide Lorentziana es la única superficie maximal completa y embebida con todas sus singularidades apuntando hacia abajo y todas con flujo vertical.

*Demostración:* La demostración de este hecho se basa en un resultado de A.Ros [Ros] para superficies minimales. Concretamente se demuestra que la semi-catenode euclídea la única superficie minimal propiamente embebida cuyo borde consta de un conjunto finito de geodésicas planas convexas con flujos verticales apuntando hacia abajo, y con un final asintótico a media catenoide vertical apuntando hacia arriba.

Sea  $\mathcal{G} \subset \mathbb{L}^3$  como en el enunciado, y sea  $F \subset \mathcal{G}$  el conjunto de sus singularidades. Por la Proposición 4.2 y el Corolario 4.3 sabemos que, salvo una isometría de  $\mathbb{L}^3$ , el final de  $\mathcal{G}$  debe ser asintótico a una catenoide vertical apuntando hacia arriba.

Como ya sabemos, podemos encontrar una parametrización conforme de  $\mathcal{G}$ ,  $\psi : \Sigma \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , donde  $\Sigma \subset \overline{\mathbb{C}}$  es un dominio circular compacto<sup>4</sup>. Denotaremos por  $a_1, \dots, a_{n+1}$  a las componentes del borde, que se corresponden con las singularidades. Veamos que la superficie minimal asociada a  $\psi$  (ver Propiedad 1.5) está en las condiciones del resultado citado anteriormente.

Primero observemos que, teniendo en cuenta (4.2), por hipótesis las 1-formas  $\phi_1$  y  $\phi_2$  de la representación de Weierstrass de  $\psi$  son exactas. Por tanto la inmersión minimal y conforme  $Y : \Sigma \setminus \{q_\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $Y = \operatorname{Re} \int (i\phi_1, i\phi_2, \phi_3)$  está bien definida.

Como a lo largo de las curvas  $a_j$  la aplicación de Gauss de  $Y$  es horizontal e inyectiva y  $x_3 \circ Y$  es constante, entonces la curva  $Y(a_j)$  es una geodésica plana convexa, para cualquier  $j$ . Además el final de  $Y$  es asintótico a media catenoide apuntando hacia arriba.

Finalmente veamos que esta superficie es un grafo. Para ello consideraremos, para cada  $j$ , el disco plano  $D_j$  bordeado por  $Y(a_j)$ . Denotemos por  $S$  la superficie topológica obtenida añadiendo  $D_j$  a  $\Sigma$  (estamos identificando cualquier punto de  $a_j$  con su imagen vía  $Y$  en  $Y(a_j) \subset D_j$ ). Sea  $Z : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación continua dada por  $Z|_\Sigma = Y$  y  $Z|_{D_j} = \operatorname{Id}$ , para cualquier  $j$ . Si  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \{x_3 = 0\}$  denota la proyección ortogonal, no es difícil comprobar que  $\pi \circ Z : S \rightarrow \{x_3 = 0\}$  es un homeomorfismo local (recordemos que podemos suponer que  $|g| < 1$  en  $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ ). Además, como el final de  $Y$  es una catenoide vertical,  $\pi \circ Z$  es propia. Así  $\pi \circ Z$  es un homeomorfismo. En particular  $Y(\Sigma)$  es un grafo sobre  $\{x_3 = 0\}$ . Por tanto,  $Y : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  está en las condiciones del resultado anteriormente citado, lo que demuestra que  $Y$  define una catenoide euclídea y por tanto  $\psi(S)$  es una catenoide lorentziana.  $\square$

#### UN TEOREMA DE UNICIDAD

Como vimos en la Sección 1.3, las superficies maximales regulares satisfacen un principio del máximo. A pesar de que este principio falla cuando permitimos la existencia de singularidades, podemos adaptarlo al caso de grafos maximales con singularidades, obteniéndose el siguiente resultado.

**Teorema 4.5 (Unicidad)** Sean  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{G}_n$ .

<sup>4</sup>Es decir, un dominio compacto de  $\overline{\mathbb{C}}$  bordeado por circunferencias disjuntas de  $\mathbb{C}$ .

Entonces  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$  si y sólo si sus crecimientos logarítmicos y la posición de sus singularidades en  $\mathbb{L}^3$  coinciden.

*Demostración:* Supongamos por reducción al absurdo que existen dos grafos maximales distintos  $\mathcal{G}_1$ , y  $\mathcal{G}_2$  con singularidades en los puntos del conjunto  $F = \{q_0, \dots, q_n\} \subset \mathbb{L}^3$  y el mismo crecimiento logarítmico  $c \in \mathbb{R}$ . Como consecuencia de esto último es posible trasladar verticalmente uno de los grafos, por ejemplo  $\mathcal{G}_2$  hasta que quede por encima de  $\mathcal{G}_1$ . Es decir, si para cada  $t \in \mathbb{R}$  escribimos  $\mathcal{G}_2(t) = \mathcal{G}_2 + (0, 0, t)$ , entonces el conjunto  $\{t \geq 0; \mathcal{G}_2(t) > \mathcal{G}_1\}$ , donde el símbolo  $>$  significa *estar por encima de*, es no vacío. Sea  $t_0$  su ínfimo.

Obviamente si  $\mathcal{G}_2(t_0) \cap \mathcal{G}_1$  contiene algún punto regular, el principio del máximo (Propiedad 1.6) nos asegura que ambas superficies coinciden, lo que es imposible.

Supongamos ahora que el contacto tiene lugar en el infinito, es decir,  $\mathcal{G}_2(t_0) \cap \mathcal{G}_1 = \emptyset$ . En este caso, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $\mathcal{G}_2(t_0 - \epsilon) \cap \mathcal{G}_1$  contiene una curva de Jordan  $\gamma$  encerrando a todas las singularidades (ver Figura 4.1). Consideremos los vectores conormales exteriores  $\nu_1$  y  $\nu_2$  de  $\gamma$  en  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2(t_0 - \epsilon)$  respectivamente. Es claro que las terceras coordenadas de estos vectores satisfacen  $x_3(\nu_1) > x_3(\nu_2)$ , pero esto contradice la Ecuación (4.3) que afirma que  $\int_\gamma \nu_j = (0, 0, 2\pi c)$ ,  $j = 1, 2$ , con lo que este caso tampoco es posible.

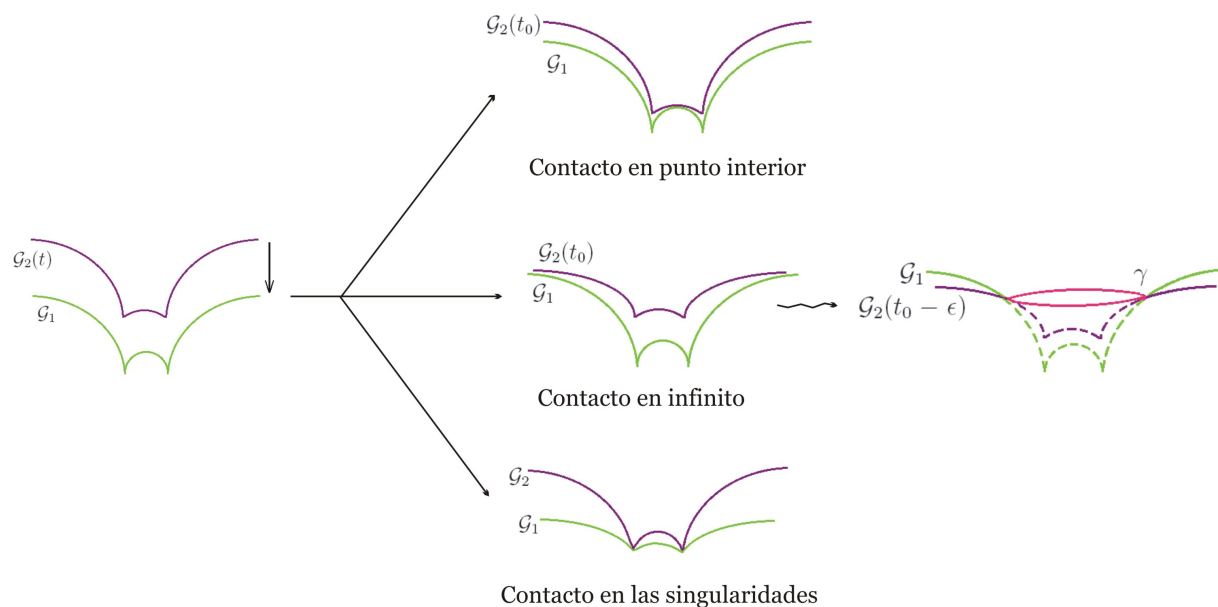


Figura 4.1: Posibilidades para el primer punto de contacto

Por tanto, la única posibilidad es que  $\mathcal{G}_2(t_0) \cap \mathcal{G}_1$  conste exclusivamente de puntos singulares. Esto lo que nos dice es que  $t_0 = 0$ ,  $\mathcal{G}_2 \cap \mathcal{G}_1 = F$  y  $\mathcal{G}_2$  está por encima de  $\mathcal{G}_1$ . Invirtiendo los papeles de  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  llegamos de nuevo a contradicción.  $\square$

**Observación 4.3** Como consecuencia, el grupo de isometrías de  $\mathbb{L}^3$  que dejan invariante la superficie coincide con:

- Las isometrías que fijan el conjunto de singularidades y que preservan el semiespacio que contiene la superficie en caso de que el final sea de tipo catenoide.
- Las isometrías que fijan el conjunto de singularidades en caso de que la superficie tenga un final horizontal.

## 4.2. ESTRUCTURA DEL ESPACIO DE MODULI

En esta sección nuestro objetivo es estudiar la estructura subyacente en el espacio de grafos maximales  $\mathcal{G}_n$ . Para introducir coordenadas analíticas en este espacio será necesario introducirlas previamente en el espacio de grafos marcados  $\mathcal{M}_n$ . Obsérvese que, si denotamos por  $\mathcal{P}_n$  al espacio de permutaciones de orden  $n + 1$ ,  $\mathcal{G}_n$  puede ser visto como el cociente de  $\mathcal{M}_n$  por la acción

$$\lambda : \mathcal{M}_n \times \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{M}_n,$$

$$\lambda((\mathcal{G}, \mathbf{m}), \tau) = (\mathcal{G}, \tau(\mathbf{m})).$$

Con lo que, una vez que dotemos a  $\mathcal{M}_n$  de estructura de variedad analítica, esta podrá ser inducida en  $\mathcal{G}_n$ .

Por otro lado, el Teorema 4.5 nos sugiere unos candidatos naturales a ser las coordenadas de  $\mathcal{M}_n$ . En efecto, como consecuencia de aquel resultado la siguiente aplicación,

$$\Gamma : \mathcal{M}_n \rightarrow (\mathbb{R}^3)^{n+1} \times \mathbb{R}$$

$$\Gamma(\mathcal{G}, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, c),$$

donde  $c$  es el crecimiento logarítmico de la superficie (ver Definición 4.1), es inyectiva. Por lo tanto, si demostramos que  $\Gamma(\mathcal{M}_n) \subset \mathbb{R}^{3n+4}$  es abierto, la aplicación  $\Gamma$  puede ser utilizada como sistema de coordenadas analíticas globales en el espacio  $\mathcal{M}_n$ .



Demostrar este hecho requiere varios resultados previos, algunos de ellos interesantes por sí mismos. Primero demostraremos que también es posible introducir en  $\mathcal{M}_n$  otra estructura de variedad, esta vez *sólo* diferenciable, en términos de su estructura conforme y sus datos de Weierstrass. Como consecuencia de esto, bastará demostrar que  $\Gamma$  es continua (de hecho veremos que es diferenciable) cuando consideramos esta estructura diferenciable en  $\mathcal{M}_n$ . Una vez visto esto, el Teorema de invarianza del dominio nos garantiza que  $\Gamma$  es abierta.

La sección está organizada como sigue: en la Subsección 4.2.1 introduciremos la notación necesaria para los resultados posteriores. En la Subsección 4.2.2 construiremos la aplicación que dotará a  $\mathcal{M}_n$  de esta estructura diferenciable “auxiliar”. Finalmente en la Subsección 4.2.3 concluiremos la demostración de que  $\Gamma$  es abierta. Para establecer todos estos resultados necesitaremos algunos lemas técnicos, que serán demostrados separadamente en el apéndice del final de este capítulo para no dificultar el seguimiento del hilo general de la demostración.

#### 4.2.1. ESTRUCTURA CONFORME Y REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS

Como vimos en el Corolario 3.6, el soporte conforme (Definición 1.2) de una superficie maximal y embebida de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  es biholomorfo a  $\mathbb{C}$  menos una cantidad finita de discos abiertos cuyas clausuras son disjuntas dos a dos. El punto  $z = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$  se corresponde con el final de la superficie.

En otras palabras, si  $\mathcal{G} \subset \mathbb{L}^3$  es un grafo maximal con un conjunto finito de singularidades  $F \subset \mathcal{G}$ , entonces  $\mathcal{G} \setminus F$  es biholomorfo a  $\Omega \setminus \{\infty\}$ , donde  $\Omega$  es un dominio circular en el sentido que se precisa en la siguiente definición.

**Definición 4.3 (Dominio circular)** *Un dominio abierto  $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se dice que es un dominio circular si su borde está formado por un número finito de círculos disjuntos dos a dos.*

Obviamente un dominio circular viene caracterizado por los centros y radios de los círculos de su borde. Además, después de un biholomorfismo se puede conseguir que uno de estos círculos tenga centro en el origen y radio uno, y que otro de ellos esté centrado en la dirección positiva del eje real. Por esto nos será útil la siguiente notación.

Dada una upla  $v = (c_1, \dots, c_n, r_1, \dots, r_n) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{R}^+)^n$  de centros y radios, definimos las curvas  $a_j(v) := \{z \in \mathbb{C} : |z - c_j| = r_j\}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , con el convenio  $c_0 = 0$

y  $r_0 = 1$ .

Denotaremos por  $\mathcal{T}_n \subset ]1, +\infty[ \times \mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{R}^+)^n \subset \mathbb{R}^{3n-1}$  al conjunto de uplas  $v$  como la anterior tales que los discos cerrados bordeados por los círculos  $a_j(v)$ ,  $j = 0, \dots, n$ , son disjuntos dos a dos.

**Definición 4.4** Utilizando la notación anterior, para cada  $v \in \mathcal{T}_n$  denotaremos por  $\Omega(v)$  el dominio circular bordeado por las curvas  $\bigcup_{j=0}^n a_j(v)$ . Diremos que  $\Omega(v)$  es un dominio circular marcado con marca  $v$ . También denotaremos por  $c_j(v)$  y  $r_j(v)$  los correspondientes centros y radios de  $\partial\Omega(v)$ .

Diremos que dos dominios circulares marcados,  $\Omega(v_1)$  y  $\Omega(v_2)$ , son iguales si y solamente si  $v_1 = v_2$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Al parametrizar el espacio de Teichmüller de los dominios circulares<sup>5</sup> por la upla de sus centros y radios, estamos imponiendo un cierto orden en los círculos del borde de estos dominios. Puesto que estas curvas se corresponden con las singularidades de la superficie maximal correspondiente, esto implica un orden en el conjunto de las singularidades, lo que explica el por qué de introducir el espacio de grafos marcados  $\mathcal{M}_n$  en lugar de trabajar directamente con el espacio  $\mathcal{G}_n$ .

Por lo tanto, es inmediato ver que para cada  $(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{M}_n$  existe un único  $v \in \mathcal{T}_n$  tal que se verifica:

- $\mathcal{G} \setminus F$  ( $F$  es el conjunto de singularidades) es biholomorfo a  $\Omega(v) \setminus \{\infty\}$ .
- Existe una inmersión maximal y conforme  $\psi : \overline{\Omega(v)} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{L}^3$  tal que  $\psi(\overline{\Omega(v)} \setminus \{\infty\}) = \mathcal{G}$  y además  $\psi(a_j(v)) = q_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , siendo  $\mathfrak{m} = (q_0, \dots, q_n)$ .

En nuestro estudio sobre la estructura de los espacios  $\mathcal{M}_n$  y  $\mathcal{G}_n$  desempeñará un papel fundamental el doble de la superficie  $\overline{\Omega}$ , ya que las herramientas que utilizaremos se refieren a superficies compactas (sin borde). El doble de una superficie con borde fue descrito en abstracto en la Subsección 1.5.3, sin embargo en el caso particular de dominios circulares es posible simplificar esta construcción con algunas identificaciones.

En primer lugar recordemos que uno de los círculos que bordean  $\overline{\Omega}$  tiene centro cero y radio uno, con lo que si definimos  $J : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  como  $J(z) = 1/\bar{z}$ , el dominio  $\Omega^* := J(\Omega)$  es disjunto de  $\Omega$ . Por tanto podemos identificar el doble de la superficie  $\Omega$  con la superficie  $\mathfrak{S} = \Omega \cup \Omega^* / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación que identifica cada punto de una curva del borde de  $\Omega$  con su correspondiente imagen vía  $J$ . Utilizando esta identificación la simetría especular viene dada por la aplicación  $J(z) = 1/\bar{z}$ . Esta construcción está representada en la Figura 4.2.

<sup>5</sup>Es decir, el espacio de todos los dominios circulares salvo biholomorfismo.

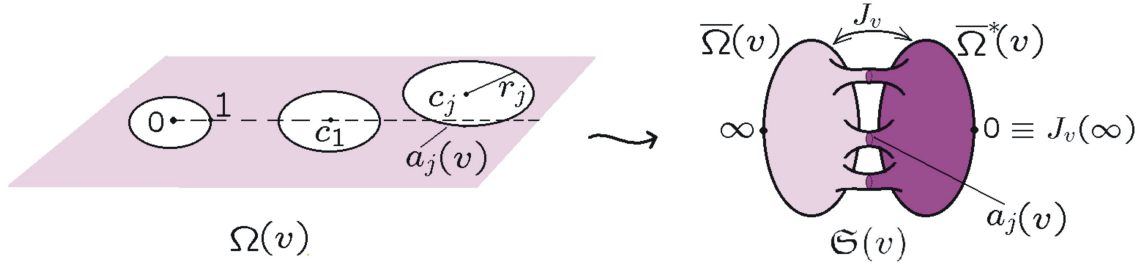


Figura 4.2: El dominio circular  $\Omega(v)$  y su doble.

En ocasiones será necesario hacer referencia a la marca del dominio circular  $\Omega$ , es decir, a la secuencia de centros y radios  $v \in \mathcal{T}_n$  tales que  $\Omega = \Omega(v)$ . En ese caso denotaremos  $\mathfrak{S}(v)$  y  $J_v$  al doble y la simetría especular asociadas.

También será de utilidad para nuestros propósitos el tener cartas holomorfas *universales* para  $\mathfrak{S}(v) \setminus \partial\Omega(v)$ . Esto es, cartas que no dependan del punto  $v \in \mathcal{T}_n$ , al menos localmente.

**Observación 4.4 (Cartas holomorfas universales para  $\mathfrak{S}(v)$ )** Sea  $v_0 \in \mathcal{T}_n$  y consideremos una bola  $V(\epsilon)$  de radio  $\epsilon$  y centrada en  $v_0$  en  $\mathcal{T}_n \subset \mathbb{R}^{3n-1}$ .

Consideremos un punto  $z_0 \in \Omega(v_0) \subset \bar{\mathbb{C}}$ . Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, existe un entorno  $U$  de  $z_0$  en  $\bar{\mathbb{C}}$  que está contenido en  $\Omega(v)$  para todo  $v \in V(\epsilon)$ . Diremos que  $(U, z = \text{Id}|_U)$  es una carta (holomorfa) universal alrededor de  $z_0$  para  $\mathfrak{S}(v)$ ,  $v \in \mathcal{T}_n$ .

Si  $z_0 \in \Omega(v_0)^* = J_{v_0}(\Omega(v_0))$ , entonces existirá un único  $z_1 \in \Omega(v_0)$  tal que  $z_0 = J_{v_0}(z_1)$ . Consideremos una carta universal  $(U, z)$  alrededor de  $z_1$ . Diremos que la carta (holomorfa)  $(J_v(U), z \circ J_v|_{J_v(U)})$  es una carta universal para  $z_1$  en  $\mathfrak{S}(v)$ ,  $v \in \mathcal{T}_n$ .

Por lo tanto, podemos ver los datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  de la superficie como datos meromorfos en  $\mathfrak{S}$ . Además, puesto que estamos suponiendo que la superficie está orientada para que  $|g| \leq 1$  en  $\bar{\Omega}$  y que el final es horizontal,  $g$  se anula en  $z = \infty$ , mientras que  $\phi_3$  puede ser regular (en caso de final plano) o tener un polo (final catenoidal) en  $\infty$ . Además sabemos que  $g$  tiene grado  $n + 1$  (Corolario 3.6), por lo que en total debe tener  $n + 1$  ceros (contados con multiplicidad). Denotaremos por  $w_1, \dots, w_n \in \Omega$  a los restantes ceros. Como consecuencia, y teniendo en cuenta las simetrías  $J \circ g = 1/\bar{g}$  y  $J^*(\phi_3) = -\bar{\phi}_3$ , es fácil ver que los divisores para  $g$  y  $\phi_3$  han de tener la siguiente expresión:

$$[g] = \frac{D \cdot \infty}{J(D) \cdot J(\infty)} \quad [\phi_3] = \frac{D \cdot J(D)}{\infty \cdot J(\infty)}, \quad (4.4)$$

donde  $D$  es el divisor dado por  $D = w_1 \cdot \dots \cdot w_n \in \text{Div}_n(\Omega)$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow \infty \in D$  si y solamente si el final es plano.

El divisor  $D$  jugará un papel fundamental en la descripción del espacio  $\mathcal{M}_n$  de grafos marcados. De hecho, la teoría clásica de superficies de Riemann establece que  $D$  determina de forma única al par  $(g, \phi_3)$  salvo constante multiplicativa. Por tanto, el dominio  $\Omega(v)$  y el divisor  $D \in \text{Div}_n(\Omega(v))$  encierran toda la información de tipo conforme de la superficie y de sus datos de Weierstrass.

Esto nos permitirá identificar cada superficie del espacio  $\mathcal{M}_n$  con su correspondiente  $v \in \mathcal{T}_n$  y  $D \in \text{Div}_n(\Omega(v))$ . Por otro lado, la aplicación de Abel-Jacobi (ver Sección 1.5) permite caracterizar aquellos divisores para los que existen una función  $g$  y una 1-forma  $\phi_3$  meromorfas satisfaciendo la Ecuación (4.4), lo que nos ayudará a ver los pares  $(v, D)$  como cierta subvariedad de un *fibrado de divisores*. En la siguiente subsección establecemos la notación necesaria para definir rigurosamente estas correspondencias.

#### 4.2.2. UNA BIYECCIÓN PARA $\mathcal{M}_n$

##### DEFINICIÓN DE LOS FIBRADOS DE DIVISORES Y JACOBIANO

**Definición 4.5 (Fibrado de divisores)** Para cada  $v \in \mathcal{T}_n$  y  $k \in \mathbb{N}$  sea  $\text{Div}_k(\Omega(v))$  el espacio de divisores enteros de grado  $k$  sobre  $\Omega(v)$  (ver Sección 1.5). Denotaremos por

$$\mathfrak{Div}_k = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_n} \text{Div}_k(\Omega(v)) = \{(v, D) : v \in \mathcal{T}_n, D \in \text{Div}_k(\Omega(v))\},$$

y nos referiremos a él como el *fibrado de  $k$ -divisores*.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Por comodidad, adoptaremos el convenio  $\mathfrak{Div}_0 = \mathcal{T}_n$ .

Es un hecho conocido que el conjunto  $\text{Div}_k(N)$  de divisores enteros de grado  $k$  sobre una superficie de Riemann  $N$  tiene estructura de variedad analítica, ya que puede ser identificado con el cociente de  $N^k = N \times \overset{(k)}{!} \times N$  bajo la acción del grupo de permutaciones de orden  $k$ . Por lo tanto, podemos inducir de forma natural una estructura de variedad analítica en  $\mathfrak{Div}_k$ . La siguiente observación muestra como construir un entorno alrededor de un punto  $(v_0, D_0)$  en  $\mathfrak{Div}_k$ .

**Observación 4.5 (Entornos para  $\mathfrak{Div}_k$ )** Sea  $(v_0, D_0) \in \mathfrak{Div}_k$ . Consideremos una bola  $V(\epsilon)$  en  $\mathcal{T}_n \subset \mathbb{R}^{3n-1}$  de radio  $\epsilon$  y centro  $v_0$ . Escribamos  $D_0 = z_1^{n_1} \cdot \dots \cdot z_s^{n_s}$ , con  $z_j \in \Omega(v_0)$ ,  $z_j \neq z_h$  si

$j \neq h$ . Consideremos entornos  $U_j(\epsilon) \subset \overline{\mathbb{C}}$  centrados en  $z_j$  y de radio  $\epsilon$ ,  $j = 1, \dots, s$ , disjuntos dos a dos. Para  $\epsilon$  suficientemente pequeño el conjunto  $\mathcal{U}(\epsilon) = U_1(\epsilon)^{n_1} \times \dots \times U_s(\epsilon)^{n_s} \subset \overline{\mathbb{C}}^k$  está uniformemente contenido en  $\Omega(v)^k$  para todo  $v \in \mathcal{V}(\epsilon)$ . De esta forma el conjunto  $\mathcal{V}(\epsilon) = \mathcal{V}(\epsilon) \times \mathcal{U}(\epsilon)$  es un entorno de  $(v_0, D_0)$  en  $\text{Div}_n$ .

A continuación vamos a definir el *fibrado jacobiano* asociado a las variedades jacobianas de las superficies compactas  $\mathfrak{S}(v)$ ,  $v \in \mathcal{T}_n$ . Como vimos en la Sección 1.5, para definir correctamente la variedad jacobiana de una superficie es necesario fijar previamente una base de homología de la superficie.

En nuestro caso la base  $\mathcal{B}_v$  de homología de  $\mathfrak{S}(v)$  que consideraremos será la siguiente: identificaremos los círculos  $a_j(v)$  de  $\partial\Omega(v)$  con sus correspondientes las clases de homología,  $j = 0, \dots, n$ . La primera parte de la base  $\mathcal{B}_v$  estará formada por estas curvas. Para construir el resto de elementos de la base consideraremos curvas  $\gamma_j$  en  $\overline{\Omega(v)}$  uniendo  $a_0(v)$  con  $a_j(v)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , de tal forma que la curva  $b_j(v)$  que resulta de unir  $\gamma_j$  con  $J_v(\gamma_j)$  satisfaga

$$(b_j(v), b_h(v)) = 0, \quad (a_h(v), b_j(v)) = \delta_{hj}, \quad j, h = 1, \dots, n,$$

donde  $(\cdot, \cdot)$  denota el número de intersección entre dos curvas y  $\delta_{jh}$  es el símbolo de Kronecker.<sup>6</sup> Obsérvese que la clase de homología de  $b_j(v)$  (que en lo sucesivo identificaremos con sus representantes) no depende de la elección de  $\gamma_j$ , y que  $J_v(b_j(v)) = -b_j(v)$  a nivel de homología.

Por tanto, para cada  $v \in \mathcal{T}_n$ , en lo sucesivo adoptaremos la base

$$\mathcal{B}_v := \{a_1(v), \dots, a_n(v), b_1(v), \dots, b_n(v)\}$$

como base *canónica* de homología de la superficie compacta  $\mathfrak{S}(v)$  (ver Figura 4.3).

Una vez fijada la base de homología de  $\mathfrak{S}(v)$ , consideremos la correspondiente variedad jacobiana, que denotaremos por  $\mathcal{J}(v)$ . Aunque en la Sección 1.5 ya explicamos cómo se construye esta variedad, revisaremos brevemente esta construcción para fijar la notación que necesitaremos en el resto del capítulo.

Así, llamaremos  $\hat{\mathcal{B}}_v = \{\eta_1(v), \dots, \eta_n(v)\}$  a la base del espacio de 1-formas holomorfas sobre  $\mathfrak{S}(v)$  dual de  $\mathcal{B}_v$ , y  $\Pi(v)$  representará a la matriz de periodos correspondiente:

$$\Pi(v) = \begin{pmatrix} \text{Id}_n & 0 \\ 0 & (\pi_{j,k}(v))_{j,k=1,\dots,n} \end{pmatrix}, \quad \pi_{j,k}(v) = \int_{b_j(v)} \eta_k(v).$$

<sup>6</sup>Obsérvese que, puesto que la simetría especular  $J_v$  fija las curvas  $a_j(v)$  punto a punto, las curvas  $b_j(v)$  así definidas son curvas cerradas.

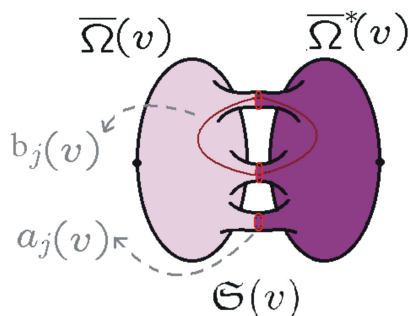


Figura 4.3: Base de homología canónica para  $\mathfrak{S}(v)$ .

Por último,  $L(v)$  representará el retículo sobre  $\mathbb{Z}$  generado por los vectores

$$\{e^1, \dots, e^n, \pi^1(v), \dots, \pi^n(v)\},$$

donde  $e^j = (0, \dots, \overset{(j)}{1}, \dots, 0)$  y  $\pi^j = (\pi_{1,j}(v), \dots, \pi_{n,j}(v))$ . De esta forma,

$$\mathcal{J}(v) = \mathbb{C}^n / L(v).$$

**Definición 4.6 (Fibrado Jacobiano)** Para cada  $v \in \mathcal{T}_n$  sea  $\mathcal{J}(v)$  la variedad jacobiana de la superficie  $\mathfrak{S}(v)$  construida anteriormente. Al correspondiente fibrado sobre  $\mathcal{T}_n$ ,

$$\mathcal{J}_n = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_n} \mathcal{J}(v),$$

lo llamaremos el fibrado jacobiano.

Puesto que  $\mathcal{J}(v)$  es una variedad analítica de dimensión (real)  $2n$ ,  $\mathcal{J}_n$  puede ser dotado de forma natural de una estructura de variedad analítica de dimensión  $(3n-1)+2n = 5n-1$ .

Para cada  $v \in \mathcal{T}_n$  consideraremos la aplicación de Abel-Jacobi sobre  $\mathfrak{S}(v)$ ,

$$\varphi_v : \mathfrak{S}(v) \rightarrow \mathcal{J}(v)$$

$$\varphi_v(z) = \mathfrak{p}_v \left( \int_1^z T(\eta_1(v), \dots, \eta_n(v)) \right),$$

donde  $\mathfrak{p}_v : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{J}(v) = \mathbb{C}^n / L(v)$  es la correspondiente proyección canónica.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Obsérvese que  $1 \in \partial\Omega(v) \subset \mathfrak{S}(v)$  uniformemente en  $v \in \mathcal{T}_n$  y por tanto  $\varphi_v$  está bien definida.

Como explicamos en la Sección 1.5 esta aplicación puede ser extendida al espacio de divisores enteros mediante  $\varphi_v(P_1 \cdot \dots \cdot P_k) = \sum_{j=1}^k \varphi_v(P_j)$ ,  $k \geq 1$ .

Además, definimos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}iv_k &\rightarrow \mathcal{J}_n, \\ \varphi(v, D) &= (v, \varphi_v(D)). \end{aligned}$$

Como consecuencia del Teorema de Abel (Propiedad 1.10), cualquier divisor canónico de  $\mathfrak{S}(v)$  es aplicado vía  $\varphi_v$  en el mismo punto de la variedad Jacobiana, que denotaremos por  $T(v) \in \mathcal{J}(v)$ . La correspondiente aplicación  $v \in \mathcal{T}_n \mapsto (v, T(v)) \in \mathcal{J}_n$  será denotada por  $\hat{T}$ .

**Lema 4.6** *Las aplicaciones  $\varphi$  y  $\hat{T}$  definidas anteriormente son diferenciables.*

Debido a su carácter técnico, dejaremos la demostración de este lema para el apéndice situado en el final de este capítulo.

#### EL FIBRADO ESPINORIAL

Resumiendo lo que llevamos visto hasta ahora, dado un grafo marcado  $(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) \in \mathcal{M}_n$  sus datos de Weierstrass de están definidos en la superficie  $\mathfrak{S}(v)$  para cierto  $v \in \mathcal{T}_n$ , y además sus divisores satisfacen la Ecuación (4.4). Por lo tanto, el Teorema de Abel nos da las siguientes igualdades:

$$\varphi_v(D \cdot \infty) - \varphi_v(J_v(D) \cdot J_v(\infty)) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi_v(D \cdot J_v(D)) - \varphi_v(\infty \cdot J_v(\infty)) = T(v).$$

Juntando estas dos ecuaciones obtenemos

$$2(\varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty))) = T(v),$$

lo que motiva la siguiente definición:

**Definición 4.7 (Fibrado espinorial)** *Denotaremos por*

$$\mathcal{S}_n(v) := \{D \in Div_n(\Omega(v)) : 2(\varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty))) = T(v)\}$$

y

$$\mathcal{S}_n = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_n} \mathcal{S}_n(v) = \{(v, D) : v \in \mathcal{T}_n, D \in \mathcal{S}_n(v)\}.$$

*A este último nos referiremos como el fibrado espinorial.*

El fibrado espinorial  $\mathcal{S}_n$  es una subvariedad de  $\mathcal{D}\text{iv}_n$  de dimensión  $3n - 1$ , como afirma el siguiente teorema.

**Teorema 4.7 (Estructura del fibrado espinorial)** *El espacio  $\mathcal{S}_n$  es una  $(3n - 1)$ -subvariedad diferenciable del fibrado de divisores  $\mathcal{D}\text{iv}_n$ .*

*Además la aplicación  $\nu : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ ,  $\nu(v, D) = v$ , es un recubridor finito.*

La demostración de este teorema es algo complicada y requiere varios lemas previos, por lo que la expondremos en detalle en el Apéndice posterior. A grandes rasgos, la demostración se basa en que  $\mathcal{S}_n$  puede verse como la imagen inversa de la subvariedad de dimensión  $3n - 1$ ,  $\mathbf{0} = \{(\mathbf{v}, \mathbf{0}) \in \mathcal{J}_n : \mathbf{v} \in \mathcal{T}_n\}$ , vía la aplicación

$$H : \mathcal{D}\text{iv}_n \rightarrow \mathcal{J}_n,$$

$$H(v, D) = \left( v, 2(\varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty))) - T(v) \right).$$

Por tanto, basta demostrar que  $H$  tiene diferencial biyectiva en cada punto  $q = (v, D) \in \mathcal{S}_n$ . Como veremos, esto es equivalente a que  $D \in \mathcal{S}_n(v)$  no sea un *divisor especial*.

#### BIYECCIÓN ENTRE EL ESPACIO DE GRAFOS MARCADOS Y EL FIBRADO ESPINORIAL

Como comentamos en la Subsección 4.2.1, el divisor  $D \in \text{Div}_n(\Omega(v))$  que aparece en la Ecuación (4.4) caracteriza, salvo multiplicación por constantes, los datos de Weierstrass de un grafo maximal. Este “salvo multiplicación por constantes” se traduce en que un grafo marcado  $(\mathcal{G}, \mathbf{m}) \in \mathcal{M}_n$  está unívocamente determinado por el par  $(v, D) \in \mathcal{S}_n$  salvo movimientos rígidos y homotecias de  $\mathbb{L}^3$ . Para eliminar esta ambigüedad deberemos fijar algunos elementos adicionales que nos ayuden a distinguir entre dos superficies que difieran en uno de estos movimientos.

El factor correspondiente a las traslaciones en  $\mathbb{L}^3$  puede ser fijado eligiendo por ejemplo la primera de las singularidades  $q_0$  de la marca del grafo,  $\mathbf{m} = (q_0, \dots, q_n)$ . La parte de las rotaciones (que deben tener por eje al eje  $x_3$ , puesto que normalizamos las superficies para que el final fuese horizontal) puede ser fijado a través del vector normal de la superficie en uno de sus puntos, por comodidad elegiremos  $g(1) \in \mathbb{S}^1$  ya que  $1 \in \partial\Omega(v)$  uniformemente en  $v \in \mathcal{T}_n$ . Por último, para distinguir entre superficies homotéticas o que difieren en una simetría horizontal utilizaremos la siguiente notación:



Consideremos el parámetro conforme  $z = \text{Id}|_{U(v)}$ , donde

$$U(v) = (\Omega(v) \cup \Omega(v)^* \cup \{|z| = 1\}) \setminus \{\infty, J_v(\infty)\} \quad (4.5)$$

es un entorno en  $\mathfrak{S}(v)$  alrededor del punto  $P = 1$ . Escribamos  $\phi_3 = \frac{h_3(z)}{z} dz$  en este parámetro, para cierta función holomorfa  $h_3$ . Obsérvese que de hecho  $h_3(z) \in \mathbb{R}^*$  sobre la curva  $\{|z| = 1\}$  debido a la simetría  $J^*(\phi_3) = -\overline{\phi_3}$ . El elemento que fijaremos para descartar posibles homotecias será justamente  $h_3(1) \in \mathbb{R}^*$ .

**Definición 4.8** Con la notación anterior definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{E} : \mathcal{M}_n &\rightarrow \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^*, \\ \mathcal{E}(\mathcal{G}, \mathbf{m}) &= ((v, D), q_0, g(1), h_3(1)). \end{aligned}$$

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Recuérdese que hemos fijado una orientación en los grafos maximales, aquella para la que  $|g| \leq 1$ .

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que realmente  $\mathcal{E}$  es una biyección entre el espacio de grafos marcados  $\mathcal{M}_n$  y el espacio  $\mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^*$ . Esto puede no parecer en principio una simplificación de nuestro problema (que recordemos que es el de dar una estructura a  $\mathcal{M}_n$ ), debido a la aparente complejidad del espacio  $\mathcal{S}_n$ . Sin embargo, como vimos en el Teorema 4.7, este espacio es en realidad una subvariedad diferenciable del fibrado de divisores  $\mathfrak{Div}_n$ , con lo que la aplicación  $\mathcal{E}$  nos permitirá dotar a  $\mathcal{M}_n$  de la estructura diferenciable inducida por esta aplicación.

Para demostrar la sobreyectividad de  $\mathcal{E}$  (la inyectividad es consecuencia de los comentarios previos a su definición) necesitaremos un poco más de notación y un lema previo.

Consideremos la base 1-formas holomorfas  $\{\eta_1(v), \dots, \eta_n(v)\}$  sobre  $\mathfrak{S}(v)$  dual de la base de homología  $\mathcal{B}_v = \{a_1(v), \dots, a_n(v), b_1(v), \dots, b_n(v)\}$  utilizada para construir la variedad jacobiana. Puesto que  $J_v$  fija las curvas  $a_j(v) \subset \partial\Omega(v)$  punto a punto, deducimos que  $\int_{a_k(v)} \overline{J_v^*(\eta_j(v))} = \delta_{jk}$  y por tanto  $\overline{J_v^*(\eta_j(v))} = \eta_j(v)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Además recordemos que  $J(b_j(v)) = -b_j(v)$  con lo que  $\pi_{j,k} = \int_{b_k} \eta_j(v)$  es un número imaginario para cualesquiera  $j$  y  $k$ .

Como consecuencia, la siguiente aplicación está bien definida:

$$I_v : \mathcal{J}(v) \rightarrow \mathcal{J}(v)$$

$$I_v(\mathfrak{p}_v(w)) = \mathfrak{p}_v(\bar{w}),$$

y es además una involución analítica. Puesto que  $J_v(1) = 1$ , es inmediato comprobar que se satisface la igualdad

$$\varphi_v \circ J_v = I_v \circ \varphi_v.$$

Definiremos  $\mathcal{I} : \mathcal{J}_n \rightarrow \mathcal{J}_n$  como  $\mathcal{I}(v, \mathfrak{p}_v(w)) = (v, I_v(\mathfrak{p}_v(w)))$ , y nos referiremos a ella como la *involución especular del fibrado jacobiano*. Obviamente  $\mathcal{I}$  es una aplicación analítica.

El siguiente resultado será crucial para recuperar unos datos de Weierstrass a partir de un elemento del fibrado espinorial.

**Lema 4.8** Dado  $v \in \mathcal{T}_n$  denotemos por  $K_j(v) \in \mathcal{J}(v)$ ,  $j = 1, \dots, 2^{2n}$ , a las  $2^{2n}$  soluciones distintas de la ecuación  $2X = T(v)$ ,  $X \in \mathcal{J}(v)$ .<sup>7</sup>

Entonces,  $I_v(T(v)) = T(v)$  y  $I_v(K_j(v)) = K_j(v)$ ,  $j = 1, \dots, 2^{2n}$ .

Como consecuencia, dado un divisor  $D \in \mathcal{S}_n(v)$  se tienen las siguientes igualdades:

$$\varphi_v(D) + \varphi_v(\infty) - \varphi_v(J_v(D)) - \varphi_v(J_v(\infty)) = 0,$$

$$\varphi_v(D \cdot J_v(D)) - \varphi_v(\infty \cdot J_v(\infty)) = T(v).$$

*Demostración:* Puesto que  $T(v)$  no depende de la 1-forma meromorfa elegida, consideremos por ejemplo  $\omega_0 = \eta_1(v)$ , la primera de las 1-formas de la base de 1-formas holomorfas sobre  $\mathfrak{S}(v)$  que fijamos para la definición de  $\mathcal{J}(v)$ . Como ya vimos, esta 1-forma satisface  $J_v^*(\omega_0) = \bar{\omega}_0$ , por lo que el divisor de  $\omega_0$  es invariante por  $J_v$ . Esto implica que

$$I_v(T(v)) = I_v(\varphi_v([\omega_0])) = \varphi_v(J_v([\omega_0])) = \varphi_v([\omega_0]) = T(v).$$

En el Lema 4.6 vimos que  $\hat{T}$  es diferenciable, por lo que podemos suponer que las aplicaciones  $v \mapsto K_j(v)$  también lo son,  $j = 1, \dots, 2^{2n}$ . Para demostrar que son invariantes por  $\mathcal{I}$  notemos que, gracias a la ecuación anterior, se tiene que

$$I_v(K_j(v)) = K_j(v) + \mathfrak{p}_v \left( \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n (m_h(v)e^h + n_h(v)\pi^h(v)) \right),$$

donde  $m_h(v), n_h(v) \in \mathbb{Z}$  son funciones continuas de  $v$ . Pero de la propia definición de  $\mathcal{T}_n$  se deduce que es conexo, con lo que  $m_h(v)$  y  $n_h(v)$  deben ser en realidad constantes. Esto

<sup>7</sup>Recuérdese que  $T(v)$  es, por definición, la imagen vía  $\varphi_v$  de cualquier divisor canónico en  $\mathfrak{S}(v)$ .

implica que el segundo sumando de la expresión anterior es invariante por  $I_v$  (recorde mos que los periodos  $\pi_{j,k}(v)$  son imaginarios) y por lo tanto, para cada  $j$  el conjunto:

$$\mathcal{A}_j := \{v \in \mathcal{T}_n : I_v(K_j(v)) = K_j(v)\}$$

es, o bien vacío, o bien todo  $\mathcal{T}_n$ .

Por otro lado,  $K_j(v) = K_1(v) + q_j(v)$ , con  $2q_j(v) = 0$ , por lo que, razonando como antes,  $I_v(q_j(v)) = q_j(v)$  y por tanto  $\mathcal{A}_j = \mathcal{T}_n$  para todo  $j$  si y sólo si  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{T}_n$ .

Para demostrar esto último vamos a encontrar un dominio circular  $\Omega$  tal que su correspondiente marca  $v_0 \in \mathcal{T}_n$  esté en  $\mathcal{A}_1$ . Consideremos la superficie de Riemann compacta de género  $n$ ,

$$\mathfrak{S} = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}} : w^2 = \prod_{i=1}^{2n+2} (z - c_i)\},$$

donde  $c_i \in \mathbb{R}$  y  $c_1 < c_2 < \dots < c_{2n+2}$ . Definamos la involución antiholomorfa

$$J(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w}).$$

La función  $w$  tiene una rama bien definida  $w_+$  sobre el dominio plano  $\Sigma = \overline{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i=0}^n [c_{2i+1}, c_{2i+2}]$ , y el dominio  $\Omega = \{(z, w_+(z)) : z \in \Sigma\} \subset \mathfrak{S}$  es biholomorfo a un dominio circular  $\Omega(v_0)$ ,  $v_0 \in \mathcal{T}_n$ . Además, salvo biholomorfismo,  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(v_0)$  y  $J = J_{v_0}$ .

Sea  $\omega$  la 1-forma holomorfa  $\omega = \prod_{i=1}^{n-1} (z - c_i) \frac{dz}{w}$ . Es fácil comprobar que su divisor está dado por

$$[\omega] = c_1^2 \cdot \dots \cdot c_{n-1}^2,$$

donde, salvo las identificaciones anteriores,  $c_i \equiv (c_i, 0) \in \mathfrak{S}(v_0)$ . Como  $J_{v_0}(c_i) = c_i$ , entonces  $k_0 := \varphi_{v_0}(c_1 \cdot \dots \cdot c_{n-1}) \in J(v_0)$  es invariante bajo  $I_{v_0}$  y  $2k_0 = \varphi_v([\omega]) = T(v_0)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $k_0 = K_1(v_0)$  y por tanto  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{T}_n$ , lo que termina la primera parte de la demostración.

Para la segunda parte, basta tener en cuenta que  $D \in \mathcal{S}_n(v)$  si y sólo si  $\varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty)) = K_j(v)$  para cierto  $j \in \{1, \dots, 2^{2n}\}$ . Por lo tanto,

$$T(v) = K_j(v) + K_j(v) = K_j(v) + I_v(K_j(v)) = \varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty)) + \varphi_v(J_v(D)) - \varphi_v((\infty)),$$

y también

$$0 = K_j(v) - K_j(v) = K_j(v) - I_v(K_j(v)) = \varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty)) - \varphi_v(J_v(D)) + \varphi_v((\infty)),$$

lo que nos da las igualdades deseadas.  $\square$

**Proposición 4.9** *La aplicación  $\mathcal{E} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^*$  definida en la Definición 4.8 es biyectiva.*

*Demostración:* Sea  $x \in \mathcal{S}_n$ ,  $x = (v, D)$ . En virtud del Lema 4.8,

$$\varphi_v(D) - \varphi_v(J_v(\infty)) - \varphi_v(J_v(D)) + \varphi_v(\infty) = 0$$

y

$$\varphi_v(D \cdot J_v(D)) - \varphi_v(J_v(\infty) \cdot \infty) = T(v),$$

con lo que el Teorema de Abel nos garantiza la existencia de una función  $f$  y una 1-forma  $\nu$  meromorfas sobre  $\mathfrak{S}(v)$  cuyos divisores son

$$[f] = \frac{D \cdot \infty}{J_v(D \cdot \infty)}, \quad [\nu] = \frac{D \cdot J_v(D)}{\infty \cdot J_v(\infty)}.$$

Definamos

$$g_x := \frac{1}{f(1)} f$$

y observemos que  $g_x \circ J_v = 1/\overline{g_x}$  y  $g_x(1) = 1$ . Además, esta última propiedad junto con el hecho de que  $[g_x] = \frac{D \cdot \infty}{J_v(D \cdot \infty)}$  caracteriza  $g_x$  como función meromorfa sobre  $\mathfrak{S}(v)$ .

Por otro lado,  $J_v^*(\nu) = \lambda \overline{\nu}$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{S}^1$  (recuérdese que  $J_v$  es una involución), con lo que la 1-forma  $\phi = \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \nu$  satisface  $J_v^*(\phi) = -\overline{\phi}$ .

Si consideramos la carta  $(U(v), z = \text{Id}|_{U(v)})$  utilizada para la definición de  $\mathcal{E}$  (Ecuación (4.5)) y escribimos  $\phi(z) = h(z) \frac{dz}{z}$ ,  $z \in U(v)$ , se deduce fácilmente a partir de lo anterior que  $h(z) \in \mathbb{R}^*$  sobre la curva  $|z| = 1$ . Definiremos

$$\phi_3(x) := \frac{1}{h(1)} \phi.$$

Las ecuaciones

$$[\phi_3(x)] = \frac{D \cdot J_v(D)}{\infty \cdot J_v(\infty)} \quad \text{y} \quad h_3(1) = 1$$

caracterizan  $\phi_3(x)$  como 1-forma meromorfa sobre  $\mathfrak{S}(v)$ .

Con esta notación, dado  $(x, q_0, \theta, r) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^*$ , definamos

$$g_x(\theta) = \theta g_x, \quad \phi_3(x, r) = r \phi_3(x). \quad (4.6)$$

Puesto que  $g_x(\theta)$  es holomorfa en  $\Omega(v)$  y  $|g| = 1$  en  $\partial\Omega(v)$ , el principio del máximo implica que  $|g| < 1$  en  $\Omega(v)$ , por lo que el Teorema 3.5 nos asegura que la aplicación

$$\begin{aligned} \psi_x(q_0, \theta, r) : \overline{\Omega(v)} \setminus \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{L}^3, \\ \psi_x(q_0, \theta, r)(z) &:= q_0 + \operatorname{Re} \int_1^z \Phi(x, \theta, r), \end{aligned}$$

nos proporciona un grafo maximal  $\mathcal{G}_x(q_0, \theta, r) := \psi_x(q_0, \theta, r)\left(\overline{\Omega(v)} \setminus \{\infty\}\right) \in \mathcal{G}_n$ .

Por último, si definimos la marca  $\mathfrak{m}_x(q_0, \theta, r)$  correspondiente a  $\mathcal{G}_x(q_0, \theta, r)$  como  $q_j = \psi_x(q_0, \theta, r)(a_j(v))$ ,  $j = 0, \dots, n$ , es inmediato comprobar que  $\mathcal{E}^{-1}(x, q_0, \theta, r) = \{(\mathcal{G}_x(q_0, \theta, r), \mathfrak{m}_x(q_0, \theta, r))\}$ , con lo que se demuestra que  $\mathcal{E}$  es una biyección.  $\square$

El siguiente corolario es obvio a partir de la Proposición anterior y el Teorema 4.7.

**Corolario 4.10** *La aplicación  $\mathcal{E} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^*$  definida en la Definición 4.8 induce en  $\mathcal{M}_n$  una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $3n + 4$ .*

### 4.2.3. LA APLICACIÓN $\Gamma$ ES ABIERTA

Como explicamos al comienzo de esta sección, una vez demostrado que el espacio  $\mathcal{M}_n$  tiene una estructura de  $(3n + 4)$ -variedad diferenciable a través de la aplicación  $\mathcal{E}$ , nuestro siguiente paso será demostrar que la aplicación  $\Gamma$  es diferenciable, o equivalentemente, que  $\Gamma \circ \mathcal{E}^{-1}$  es diferenciable. Así, y gracias al Teorema de la invariancia del dominio, demostraremos finalmente que  $\Gamma$  puede ser utilizada como carta global para definir una estructura analítica en  $\mathcal{M}_n$ .

Este será el objetivo de la presente subsección. Recordemos que, gracias al Lema 4.8 y el Teorema de Abel, dado un elemento  $(v, D) \in \mathcal{S}_n$ , existen una función y una 1-forma meromorfas sobre  $\mathfrak{S}(v)$  cuyos divisores vienen dados por la Ecuación (4.4). Nuestro primer paso será demostrar que estos datos meromorfos dependen de forma diferenciable de  $(v, D) \in \mathcal{S}_n$ . Esto presenta una clara dificultad a priori, que es la formulación adecuada del concepto de *dependencia diferenciable de los datos de Weierstrass con respecto a un elemento del fibrado espinorial*. Esta formulación, no exenta de ciertos elementos técnicos, será simplemente aquella que nos permita ver la aplicación  $\Gamma \circ \mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbb{R}^{3n+4}$  como aplicación diferenciable. Para poder establecerla adecuadamente necesitamos la siguiente notación.

**Definición 4.9** Dado  $v \in \mathcal{T}_n$  llamaremos  $\mathcal{C}(v)$  (resp.  $\mathcal{H}(v)$ ) al conjunto de funciones (resp. 1-formas) meromorfas sobre  $\mathfrak{S}(v)$ . El correspondiente fibrado será denotado por  $\mathcal{C}_n = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_n} \mathcal{C}(v)$  (resp.  $\mathcal{H}_n = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_n} \mathcal{H}(v)$ ).

Como hemos explicado antes, para demostrar que los datos de Weierstrass dependen de forma diferenciable de  $(v, D) \in \mathcal{S}_n$  necesitaremos introducir un concepto de diferenciabilidad para aplicaciones de  $\mathfrak{Div}_{k_1, k_2}$  en  $\mathcal{C}_n$  o  $\mathcal{H}_n$  que conserven las fibras adecuado para nuestros propósitos.

**Definición 4.10** Sea  $f : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^N$  una aplicación continua. Diremos que  $f$  es diferenciable con regularidad de orden  $\kappa$  en  $\mathbb{R}^{m_1}$  si existen las derivadas parciales de cualquier orden con respecto a las variables de  $\mathbb{R}^{m_1}$  y pertenecen a  $C^\kappa(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})$ .

Esta definición se extiende de manera obvia a aplicaciones  $f : M_1 \times M_2 \rightarrow M_3$ , siendo  $M_j$  variedades diferenciables.

La siguiente definición también será de gran utilidad para demostrar la diferenciabilidad de  $\Gamma$ .

**Definición 4.11** Sea  $v_0 \in \mathcal{T}_n$  y  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño. Denotemos por  $V(\epsilon)$  la bola euclídea de radio  $\epsilon$  en  $\mathcal{T}_n$  centrada en  $v_0$ . Como  $V(\epsilon)$  es simplemente conexo, argumentos estándares de teoría de homotopía en geometría diferencial muestran la existencia de una familia de difeomorfismos

$$\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v) : v \in V(\epsilon)\},$$

tales que  $F_{v_0} = \text{Id}$ ,  $F_v(\infty) = \infty$ ,  $J_v \circ F_v \circ J_{v_0} = F_v$ , para todo  $v \in V(\epsilon)$ , y  $F : V(\epsilon) \times \overline{\Omega(v_0)} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F(v, z) := F_v(z)$ , es diferenciable.

Por definición, diremos que  $\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v) : v \in V(\epsilon)\}$  es una deformación diferenciable de  $\mathfrak{S}(v_0)$ . Además, nótese que, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño,  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$  en  $V(\epsilon) \times \overline{\Omega(v_0)}$ .

Así, dada una aplicación

$$h : \mathfrak{Div}_k \rightarrow \mathcal{C}_n,$$

que conserva las fibras, esto es,  $h_{(v, D)} := h(v, D) \in \mathcal{C}(v)$  para cualquier  $(v, D) \in \mathfrak{Div}_k$ , vamos a definir la noción de *diferenciabilidad con  $k$ -regularidad* para  $h$  basándonos en la Definición 4.10.

**Definición 4.12** Diremos que una aplicación  $h : \mathfrak{Div}_k \rightarrow \mathcal{C}_n$  que conserve las fibras es diferenciable si se verifica lo siguiente:

Dado un entorno coordenado  $\mathcal{V}(\epsilon)$  de  $\mathfrak{Div}_k$  denotemos por  $V(\epsilon)$  a su bola en  $\mathcal{T}_n$  asociada (ver Observación 4.5) y por  $v_0$  a su centro. Consideremos una deformación diferenciable de  $\mathfrak{S}(v_0)$ ,  $\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v) : v \in \mathcal{T}_n\}$ .

Diremos que  $h$  es diferenciable en  $\mathcal{V}(\epsilon)$  con  $\kappa$ -regularidad si la aplicación

$$\hat{h} : \mathcal{V}(\epsilon) \times \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \overline{\mathcal{C}},$$

$$\hat{h}((v, D), x) = h_{(v,D)}(F_v(x)),$$

es diferenciable con  $\kappa$ -regularidad en  $\mathcal{V}(\epsilon)$ .

Análogamente, diremos que  $h$  es diferenciable con  $\kappa$ -regularidad en  $\mathfrak{Div}_k$  si lo es en cualquier entorno coordenado suyo.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Es fácil comprobar que esta definición no depende de la deformación elegida.

Además esta definición puede ser extendida de forma natural a funciones  $h : W \rightarrow \mathcal{C}_n$ , con  $W$  subvariedad de  $\mathfrak{Div}_k$ .

**Definición 4.13** Sea

$$\omega : \mathfrak{Div}_k \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad (v, D) \mapsto \omega_{(v,D)},$$

una aplicación que conserva las fibras, esto es,  $\omega_{(v,D)} \in \mathcal{H}(v)$  para todo  $(v, D) \in \mathfrak{Div}_k$ . Para cada  $(v, D)$  en un entorno  $\mathcal{V}(\epsilon) \subset \mathfrak{Div}_k$  suficientemente pequeño consideremos una carta uniforme  $(U, z)$  en  $\mathfrak{S}(v)^a$  y escribamos

$$\omega_{(v,D)} = f_{(v,D)}^1(z)dz + f_{(v,D)}^2(z)d\bar{z}$$

en  $U$ .

Diremos que  $\omega$  es diferenciable con regularidad de orden  $\kappa$  si para cada carta  $(U, z)$ , las aplicaciones  $(v, D) \in \mathcal{V}(\epsilon) \mapsto f_{(v,D)}^j \in \mathcal{C}_n$ ,  $j = 1, 2$ , son diferenciables con regularidad de orden  $\kappa$ , en el sentido que se precisó en la Definición 4.10.

<sup>a</sup>Ver la Observación 4.4.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Teniendo en cuenta la Definición 4.12, la definición anterior es equivalente al hecho de que, en una carta  $(U, z)$  de  $\Omega(v_0)$  (no necesariamente uniforme), el correspondiente pull-back de

$\omega_{(v,D)}$  vía  $F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v)$  se escriba como

$$F_v^*(\omega_{(v,D)}) = \hat{f}_{(v,D)}^1(z)dz + \hat{f}_{(v,D)}^2(z)d\bar{z},$$

con  $\hat{f}^j : \mathcal{V}(\epsilon) \times U \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,  $\hat{f}^j((v, D, z)) = \hat{f}_{(v,D)}^j(z)$ , diferenciables con regularidad de orden  $\kappa$  en  $\mathcal{V}(\epsilon)$ , y esto para cada entorno  $\mathcal{V}(\epsilon)$  de  $\mathfrak{Div}_\kappa$ .

Siguiendo la notación de la Proposición 4.9, dado  $x \in \mathcal{S}_n$  denotaremos por  $(g_x, \phi_3(x))$  los datos de Weierstrass del grafo maximal marcado  $\mathcal{E}^{-1}(x, 0, 1, 1) \in \mathcal{M}_n$ .

**Proposición 4.11** *Utilizando la notación anterior, las aplicaciones*

$$\begin{array}{ll} \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{C}_n & \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{H}_n \\ x \mapsto g_x & x \mapsto \phi_3(x), \end{array}$$

son diferenciables con regularidad de orden 2 y orden 1 respectivamente.

Como consecuencia, la terna de 1-formas  $\Phi_x = (\phi_1(x), \phi_2(x), \phi_3(x))$  depende de forma diferenciable con regularidad de orden 1 de  $x \in \mathcal{S}_n$ .

La demostración de este hecho está detallada en el Apéndice.

**Teorema 4.12 (Estructura del espacio  $\mathcal{M}_n$ )** *La aplicación  $\Gamma : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^{3n+4}$  dada por  $\Gamma(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}, c = \text{crecim. log.})$ , es de clase  $\mathcal{C}^1$  cuando consideramos en  $\mathcal{M}_n$  la estructura diferenciable inducida por la biyección  $\mathcal{E}$  (ver Definición 4.8).*

*Demostración:* Sean  $x = (v, D) \in \mathcal{S}_n$  y  $X = (x, q_0, \theta, r) \in \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^*$ . Siguiendo la notación de la demostración de la Proposición 4.9 denotaremos por  $\psi_x(q_0, \theta, r)$  a la inmersión maximal y conforme asociada al grafo marcado  $\mathcal{E}^{-1}(X) \in \mathcal{M}_n$ . Como vimos en dicha demostración,

$$\psi_x(q_0, \theta, r)^T = A_{\theta,r} \cdot \psi_x(0, 1, 1)^T + (q_0, 0, 0)^T,$$

donde  $A_{\theta,r}$  es una matriz cuadrada de orden 3 diferenciable en  $(\theta, r)$  (ver Ecuación (4.6)).

Por tanto, basta demostrar que  $\Gamma(\mathcal{E}^{-1}(x, 0, 1, 1)) = (q_0(x), \dots, q_n(x), c(x))$  depende de forma diferenciable de  $x \in \mathcal{S}_n$ . Para ello trabajaremos en un entorno  $\mathcal{V}(\epsilon)$  de un punto  $x_0 = (v_0, D_0)$  (véase la Observación 4.5).



Para simplificar la notación llamaremos  $\psi_x = \psi_x(0, 1, 1)$ . También denotaremos por  $\Phi_x$  a la terna de 1-formas de la representación de Weierstrass. Así,

$$\psi_x : \overline{\Omega(v)} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{L}^3, \quad \psi_x(P) = \operatorname{Re} \int_1^P \Phi_x.$$

Cada singularidad  $q_j(x)$  es la imagen vía  $\psi_x$  de un punto cualquiera  $P_j(v) \in a_j(v) \subset \partial\Omega(v)$ . Elegiremos estos puntos de forma que  $P_j(v) = F_v(P_j(v_0))$ , siendo  $\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v) : v \in \mathcal{V}(\epsilon)\}$  una deformación diferenciable de  $\mathfrak{S}(v_0)$  (ver Definición 4.11). Por tanto,

$$q_j(x) = \psi_x(P_j(v)) = \operatorname{Re} \int_1^{P_j(v_0)} F_v^*(\Phi_x). \quad (4.7)$$

Puesto que  $\Phi_x$  depende de forma diferenciable con regularidad de orden 1 de  $x = (v, D) \in \mathcal{S}_n$  (Proposición 4.11), de la propia definición de diferenciabilidad dada para 1-formas (Definición 4.13) y utilizando el teorema de derivación bajo el signo integral, la Ecuación (4.7) nos permite concluir que  $q_j(x)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $x$ .

Finalmente, resta demostrar que el crecimiento logarítmico  $c(x) \in \mathbb{R}$  es también diferenciable en  $x$ . Para ello recordemos que, como vimos en la Observación 4.2,

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} \Phi(x) = 2\pi (0, 0, c(x)),$$

donde  $\gamma$  es una curva de Jordan en  $\Omega(v) \subset \overline{\mathbb{C}}$  encerrando el final. Es obvio que podemos escoger  $\gamma$  de forma que no dependa de  $x \in \mathcal{S}_n$ . Así  $F_v \circ \gamma = \gamma$  a nivel de homología, por lo que

$$\operatorname{Im} \int_{\gamma} \Phi_x = \operatorname{Im} \int_{F_v(\gamma)} \Phi_x = \operatorname{Im} \int_{\gamma} F_v^*(\Phi_x).$$

Por tanto, utilizando el mismo argumento anterior, concluimos que  $c(x)$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $x$ .  $\square$

Como consecuencia del resultado anterior y el Teorema 4.5, y gracias al Teorema de invariancia del dominio obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 4.13** *La aplicación  $\Gamma : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^{3n+4}$  es inyectiva y abierta, y por tanto induce en  $\mathcal{M}_n$  una estructura de variedad real analítica de dimensión  $3n + 4$ .*

#### 4.2.4. CONCLUSIONES

En la sección anterior hemos visto que  $\mathcal{M}_n$  es una  $(3n + 4)$ -variedad real analítica y la aplicación  $\Gamma : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}^{3n+4}$  que aplica cada grafo marcado en sus singularidades (ordenadas según indica la marca del grafo) y su crecimiento logarítmico es una carta global para  $\mathcal{M}_n$ . En adelante, salvo mención explícita de lo contrario, consideraremos  $\mathcal{M}_n$  con esa estructura.

Por otro lado, la biyección  $\mathcal{E} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  también induce una estructura de variedad diferenciable en  $\mathcal{M}_n$ . Como vimos en el Teorema 4.12,  $\Gamma$  es diferenciable con esta estructura, con lo que las topologías asociadas a ambas estructuras son la misma. Es decir,

*la convergencia de grafos (marcados) en  $\mathcal{M}_n$  implica la convergencia de las estructuras conformes subyacentes y de los datos de Weierstrass.*

Como ya explicamos al comienzo de este capítulo, el conjunto de grafos maximales con  $n + 1$  singularidades,  $\mathcal{G}_n$ , puede ser visto como el cociente del espacio de los correspondientes grafos marcados,  $\mathcal{M}_n$ , bajo la acción del grupo de permutaciones de orden  $n + 1$ ,  $\mathcal{P}_n$ :

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{M}_n \times \mathcal{P}_n &\rightarrow \mathcal{M}_n, \\ \lambda((\mathcal{G}, \mathbf{m}), \tau) &= ((\mathcal{G}, \tau(\mathbf{m}))). \end{aligned}$$

Esta acción puede ser utilizada para inducir en  $\mathcal{G}_n$  las estructuras diferenciable y analítica de  $\mathcal{M}_n$  que vimos en los Corolarios 4.10 y 4.13, como muestra el siguiente resultado:

**Teorema 4.14** *La acción  $\lambda$  descrita anteriormente es propiamente discontinua. Como consecuencia, la correspondiente proyección al cociente  $\mathfrak{p} : \mathcal{M}_n \rightarrow \mathcal{G}_n$ ,  $\mathfrak{p}(\mathcal{G}, \mathbf{m}) = \mathcal{G}$ , es un homeomorfismo local y puede ser utilizado para inducir en  $\mathcal{G}_n$  una única estructura analítica haciendo a  $\mathfrak{p}$  un recubridor de  $(n + 1)!$  hojas.*

*Demostración:* Sea  $(\mathcal{G}_0, \mathbf{m}_0) \in \mathcal{M}_n$  y escribamos  $\mathbf{m}_0 = (q_0, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{3n+3}$ . Consideremos un entorno  $U_j$  de  $q_j$  en  $\mathbb{R}^3$ ,  $j = 0, \dots, n$  tales que  $U_i \cap U_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , y sea  $U = U_0 \times \dots \times U_n$ . Así,  $V = \mathcal{E}^{-1}(U \times \mathbb{R})$  es un entorno de  $(\mathcal{G}_0, \mathbf{m}_0)$  en  $\mathcal{M}_n$ .

Por otro lado, para cada  $\tau \in \mathcal{P}_n$ ,  $\tau \neq \text{Id}$ ,  $\tau(U) \cap U = \emptyset$ , lo que prueba que  $\lambda(V, \tau) \cap \lambda(V, \text{Id}) = \emptyset$  y termina la demostración.  $\square$

Por otro lado, también podríamos inducir sobre  $\mathcal{G}_n$  la estructura diferenciable asociada a la que  $\mathcal{E}$  induce en  $\mathcal{M}_n$ . Como explicamos al principio de esta sección, las topologías subyacentes a ambas estructuras coinciden. El siguiente teorema muestra que además esta topología coincide con la asociada a la convergencia uniforme de grafos sobre conjuntos compactos.

**Teorema 4.15 (Topología de  $\mathcal{G}_n$ )** *Sea  $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de grafos en  $\mathcal{G}_n$ . Entonces  $\{G_k\} \rightarrow G_0 \in \mathcal{G}_n$  en la topología de  $\mathcal{G}_n$  si y sólo si  $\{G_k\}$  converge a  $G_0$  uniformemente sobre compactos.*

*Demostración:* Supongamos que  $\{G_k\}$  converge a  $G_0$  en la topología de  $\mathcal{G}_n$  y elijamos marcas  $m_k$  de  $G_k$  y  $m_0$  de  $G_0$  de forma que  $\{(G_k, m_k)\} \rightarrow (G_0, m_0)$  en  $\mathcal{M}_n$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  sea  $\Phi_k$  la representación de Weierstrass asociada y  $\psi_k = \operatorname{Re} \int \Phi_k$  la correspondiente inmersión maximal y conforme, que estará definida sobre  $\overline{\Omega(v_k)} \setminus \{\infty\}$  para cierto  $v_k \in \mathcal{T}_n$ . Obsérvese que por hipótesis,  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow v_0$ .

Como consecuencia de la Proposición 4.11 es fácil concluir que  $\lim_{z \rightarrow \infty} \|\psi_k(z)\|_0 = +\infty$  uniformemente en  $k$ , siendo  $\|\cdot\|_0$  la norma euclídea de  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $W \subset \{x_3 = 0\}$  un compacto encerrando a la proyección de las singularidades de  $m_0$  como puntos interiores. Denotemos por  $W_k$  a los compactos definidos como

$$W_k = \psi_k^{-1}(W \times \mathbb{R}) \subset \overline{\Omega(v_k)} \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{C} \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

La Proposición 4.11 nos permite deducir las siguientes propiedades:

- los dominios  $W_k$  están uniformemente acotados en  $\mathbb{C}$ ,
- $\{W_k\} \rightarrow W_0$  en la distancia de Hausdorff,
- $\psi_k$  converge uniformemente a  $\psi_0$  en  $W_0$ .

Para la última afirmación, nótese que  $\psi_k$  puede ser reflejada analíticamente con respecto a los círculos de  $\partial\Omega(v_k)$ , pudiendo ver así las funciones  $\psi_k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  definidas en un dominio universal de  $\mathbb{C}$  que contiene a  $W_0$ .

Por lo tanto, la función  $u_k : \{x_3 = 0\} \equiv \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definiendo el grafo  $G_k$  converge uniformemente sobre  $W$  a la función  $u_0$  que define  $G_0$ . Esto demuestra la primera parte del lema.

Para terminar supongamos que, utilizando la notación anterior,  $u_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente sobre compactos a  $u_0$ , y veamos que  $\{\mathcal{G}_k\} \rightarrow \mathcal{G}_0$  en  $\mathcal{G}_n$ . Esto es equivalente a encontrar marcas  $\mathbf{m}_k$  de  $\mathcal{G}_k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , de forma que  $\Gamma(\mathcal{G}_k, \mathbf{m}_k) = (\mathbf{m}_k, c_k)$  converge a  $\Gamma(\mathcal{G}_0, \mathbf{m}_0) = (\mathbf{m}_0, c_0)$ . Este es el objetivo de las dos afirmaciones siguientes.

**Afirmación I:** Las singularidades de  $\mathcal{G}_0$  son límites de sucesiones de puntos singulares en los grafos  $\mathcal{G}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

*Demostración de la Afirmación I:* Supongamos que  $p_0 = (y_0, u_0(y_0)) \in \mathcal{G}_0$  es un punto singular. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $p_0$  es una singularidad cónica apuntando hacia abajo (ver Definición 2.1).

Teniendo en cuenta el comportamiento local de las singularidades cónicas descrito en el Corolario 2.2, es claro que existe  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que  $u_0^{-1}(x_3 \leq u_0(y_0) + \epsilon)$  contiene una componente compacta  $C_0(\epsilon)$  con borde regular y conteniendo  $y_0$  como único punto singular (interior). Esta situación está representada en la Figura 4.4.

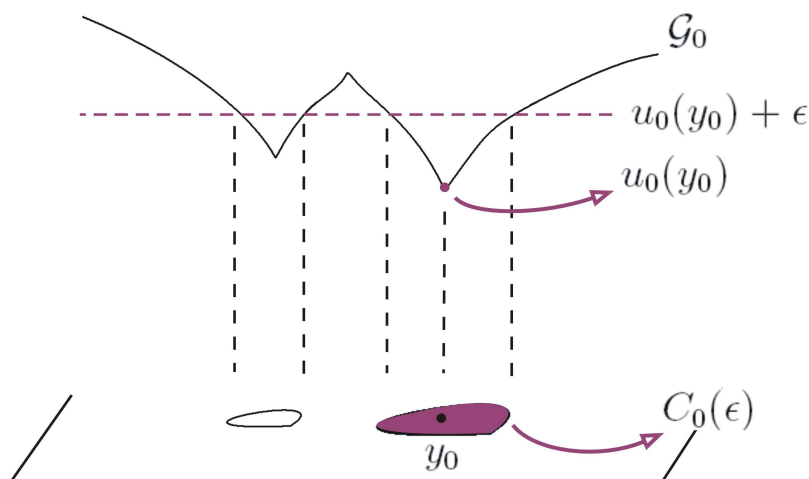


Figura 4.4: La componente compacta  $C_0(\epsilon)$ .

Puesto que  $\{u_k\} \rightarrow u_0$  uniformemente sobre compactos, para  $k$  suficientemente grande  $u_k^{-1}(\{x_3 \leq u_0(y_0) + \epsilon\})$  debe contener una componente compacta  $C_k(\epsilon)$  conteniendo  $y_0$ . Además  $\{C_k(\epsilon)\} \rightarrow C_0(\epsilon)$  en el sentido de Hausdorff, con lo que el principio del máximo implica que  $C_k(\epsilon)$  debe contener al

menos un punto interior singular  $y_k$  de  $u_k$ . Puesto que podemos achicar  $\epsilon$  tanto como queramos, deducimos que los puntos singulares  $p_k := (y_k, u_k(y_k)) \in \mathcal{G}_k$  convergen a  $p_0$ .  $\diamond$

Como consecuencia de la Afirmación anterior, es posible elegir marcas  $\mathfrak{m}_k$  de los grafos  $\mathcal{G}_k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , de forma que  $\{\mathfrak{m}_k\} \rightarrow \mathfrak{m}_0$ .

**Afirmación II:** Si  $c_k$  es el crecimiento logarítmico de  $\mathcal{G}_k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , entonces  $\{c_k\} \rightarrow c_0$ .

*Demostración de la Afirmación II:* Sea  $\gamma$  un círculo en  $\mathbb{R}^2$  encerrando todos los puntos singulares de  $u_0$  en su interior (y por tanto, también los de  $u_k$  para  $k$  suficientemente grande). Como ya explicamos en la Observación 4.2

$$F_k(\gamma) = \int_{\gamma} \nu_k(s_k) ds_k = 2\pi(0, 0, c_k),$$

donde  $\nu_k$  y  $s_k$  son, respectivamente, el vector conormal y el parámetro arco de  $\gamma$  en  $\mathcal{G}_k$ ,  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Por tanto basta estudiar la convergencia de la sucesión  $\{\int_{\gamma} \nu_k(s_k) ds_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

Sea  $A$  un entorno tubular (cerrado) de  $\gamma$  que no contiene puntos singulares de  $u_0$ . Truncando la sucesión si es necesario supondremos que  $A$  tampoco contiene puntos singulares de  $u_k$ , para cualquier  $k \in \mathbb{N}$ .

Es un hecho conocido de la teoría de operadores diferenciales que, dado  $L$  un operador quasi-lineal elíptico y  $v_0, v_1$  dos funciones diferenciables, existe otro operador elíptico  $L_1$  tal que  $L(v_1) - L(v_0) = L_1(v_1 - v_0)$ . En particular  $L_k(u_k - u_0) = L(u_k) - L(u_0) = 0$  sobre  $A$ , para cierto operador  $L_k$  lineal y elíptico. Aquí  $L$  es el operador dado por  $L(v) = \text{Div}\left(\frac{\nabla v}{\sqrt{1-|\nabla v|^2}}\right)$ .

Por otro lado, las funciones  $\frac{1}{1-|\nabla u_k|}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , están uniformemente acotadas sobre  $A$  (véase [BS]). Esto garantiza que los coeficientes de los operadores  $L_k$  están uniformemente acotados también. Por lo tanto, como por hipótesis  $\{u_k\} \rightarrow u_0$  uniformemente sobre  $A$ , la estimaciones de Schauder (ver Sección 1.4) nos llevan a que  $\{u_k\} \rightarrow u_0$  en la norma  $\|\cdot\|_2$  en el espacio de las funciones  $\mathcal{C}^2(A)$ . En particular,

$$\left\{ \int_{\gamma} \nu_k(s_k) ds_k \right\} \rightarrow \int_{\gamma} \nu_0(s_0) ds_0,$$

con lo que finalmente deducimos que  $\{c_k\} \rightarrow c_0$ .  $\diamond$

Por tanto, como consecuencia de las dos afirmaciones anteriores,  $\Gamma(\mathcal{G}_k, \mathfrak{m}_k) \rightarrow \Gamma(\mathcal{G}_0, \mathfrak{m}_0)$ , con lo que finalmente deducimos que  $\{\mathcal{G}_k\} \rightarrow \mathcal{G}_0$  en la topología de  $\mathcal{G}_n$ .  $\square$

#### EL ESPACIO COCIENTE POR SEMEJANZAS

Finalmente, estudiaremos el espacio de los grafos maximales salvo *congruencias*. Diremos que dos grafos marcados de  $\mathcal{M}_n$  son congruentes si existe una semejanza Lorentziana<sup>8</sup> de  $\mathbb{L}^3$  que lleva uno al otro (respetando el orden de las singularidades establecido en las marcas). De las normalizaciones que hicimos para las superficies de  $\mathcal{G}_n$  se deduce que el grupo  $\mathcal{R}$  de las posibles semejanzas está generado por traslaciones, rotaciones respecto del eje vertical, simetrías respecto a un plano horizontal y homotecias en  $\mathbb{L}^3$ .

Denotaremos por  $\widetilde{\mathcal{M}}_n = \mathcal{M}_n/\mathcal{R}$  al correspondiente cociente:

$$(\mathcal{G}_1, \mathfrak{m}_1) \sim (\mathcal{G}_2, \mathfrak{m}_2) \Leftrightarrow \exists R \in \mathcal{R} \text{ tal que } R(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2 \text{ y } R(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2.$$

Como consecuencia del Teorema 4.5 sabemos que  $R \in \mathcal{R}$  aplica  $(\mathcal{G}_1, \mathfrak{m}_1)$  en  $(\mathcal{G}_2, \mathfrak{m}_2)$  si y sóloamente si aplica  $\mathfrak{m}_1$  en  $\mathfrak{m}_2$  y  $\vec{R}(0, 0, c_1) = (0, 0, c_2)$ , siendo  $\vec{R}$  la parte lineal de  $R$  y  $c_j$  el crecimiento logarítmico de  $\mathcal{G}_j$ ,  $j = 1, 2$ .

Denotaremos por  $\frac{\mathbb{R}^{3n+4}}{\sim}$  al cociente por esta relación de equivalencia, es decir:

$$((q_0, \dots, q_n), c) \sim ((q'_0, \dots, q'_n), c') \Leftrightarrow \exists R \in \mathcal{R} \text{ tal que } R(q_j) = q'_j \text{ y } \vec{R}(0, 0, c) = (0, 0, c'),$$

y por  $\rho : \mathbb{R}^{3n+4} \rightarrow \frac{\mathbb{R}^{3n+4}}{\sim}$  a la proyección asociada. Es fácil comprobar que  $\rho$  no puede ser utilizada para inducir una estructura analítica en este cociente, debido a la existencia de puntos fijos para la correspondiente acción. Es por esto que necesitaremos “refinar” el subconjunto de  $\mathbb{R}^{3n+4}$  donde  $\Gamma$  toma valores.

Para ello sea  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \{x_3 = 0\}$  la proyección ortogonal y denotemos por  $\Lambda^{3n+4} \subset \mathbb{R}^{3n+4}$  el abierto dado por

$$\Lambda^{3n+4} = \{((q_0, \dots, q_n), c) \in \mathbb{R}^{3n+3} \times \mathbb{R} : \pi(q_j) \neq \pi(q_h), j \neq h\},$$

y observemos que  $\Gamma(\mathcal{M}_n) \subset \Lambda^{3n+4}$ . De hecho, sabemos que no pueden existir grafos maximales en  $\mathcal{G}_n$  con todas sus singularidades en un mismo plano y final plano (Observación 4.3). Por tanto en realidad  $\Gamma(\mathcal{M}_n) \subset \Lambda^{3n+4} \setminus H_0$ , donde

$$H_0 = \{((q_0, q_1, \dots, q_n), 0) : q_j \in \{x_3 = 0\}, \forall j\}.$$

<sup>8</sup>Es decir, una composición de movimientos rígidos de  $\mathbb{L}^3$  y homotecias.

Por otro lado, es inmediato comprobar que  $\rho(\Lambda^{3n+4} \setminus H_0) = \cup_{j=1}^{n+1} \rho(H_j)$ , siendo

$$H_j = \{((0, q_1, \dots, q_n), c) \in \Lambda^{3n+4} : q_1 \in \{x_1 = 1, x_2 = 0\}, x_3(q_j) > 0\} \quad j = 1, \dots, n,$$

$$H_{n+1} = \{(0, q_1, \dots, q_n), c) \in \Lambda^{3n+4} : q_1 \in \{x_1 = 1, x_2 = 0\}, c > 0\},$$

y además  $\rho|_{H_j} : H_j \rightarrow \rho(H_j)$  es una biyección.

Por tanto,  $\rho(\Lambda^{3n+4} \setminus H_0)$  sí tiene una estructura analítica que hace a  $\rho|_{\Lambda^{3n+4} \setminus H_0}$  una submersión. Como consecuencia de todo esto hemos demostrado el siguiente resultado.

**Teorema 4.16 (Estructura de  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ )** *La aplicación  $\widetilde{\Gamma}$  definida por el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n & \xrightarrow{\Gamma} & \Lambda^{3n+4} \setminus H_0 \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ \widetilde{\mathcal{M}}_n & \xrightarrow{\widetilde{\Gamma}} & \rho(\Lambda^{3n+4} \setminus H_0) \end{array}$$

*está bien definida y además es inyectiva y abierta, con lo que induce una estructura analítica en  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  haciendo a la proyección  $\mathcal{M}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$  una submersión analítica (aquí estamos considerando  $\mathcal{M}_n$  con la estructura analítica inducida por  $\Gamma$ ).*

**Nota**  $\rightsquigarrow$  *Como sucede en el estudio de espacios de moduli de superficies, y en general en teoría de Teichmüller, el establecer un orden de ciertos elementos (en este caso las singularidades) simplifica la comprensión del espacio correspondiente cuando identificamos superficies que difieren en congruencias. De hecho, nuestra estructura en  $\widetilde{\mathcal{M}}_n = \mathcal{M}_n/\mathcal{R}$  no puede ser inducida en el espacio cociente de grafos maximales sin marcar  $\mathcal{G}_n/\mathcal{R}$ , debido a la existencia de superficies simétricas.*

**Observación 4.6** *También se puede inducir sobre  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  la estructura diferenciable de  $\mathcal{M}_n$  inducida por la aplicación  $\mathcal{E}$  (ver Definición 4.8).*

*En efecto, como consecuencia de la Proposición 4.9, la aplicación  $\widetilde{\mathcal{E}}$  definida por el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n & \xrightarrow{\mathcal{E}} & \mathcal{S}_n \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{\mathcal{M}}_n & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{E}}} & \mathcal{S}_n \end{array}$$

*está bien definida y es una biyección entre  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$  y el fibrado espinorial  $\mathcal{S}_n$ , por lo que induce una estructura diferenciable de dimensión  $3n - 1$  en  $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ . Además con esta estructura la proyección*

$\mathcal{M}_n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_n$  es una submersión cuando consideramos sobre  $\mathcal{M}_n$  la estructura diferenciable inducida por  $\mathcal{E}$ .



# DEMOSTRACIÓN DE LOS RESULTADOS TÉCNICOS

---

## A.1. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 4.6

En esta primera sección demostraremos que las aplicaciones  $\varphi : \mathfrak{Div}_k \rightarrow \mathcal{J}_n$  y  $\hat{T} : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathfrak{Div}_{2n-2}$  son diferenciables tal como afirmaba el Lema 4.6. Denotaremos por  $\mathfrak{p}_v : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{J}(v)$  a la correspondiente proyección al cociente.

Puesto que  $\varphi_v(D) = \varphi_v(P_1 \cdot \dots \cdot P_k) = \sum_{j=1}^k \mathfrak{p}_v(\int_1^{P_j} (\eta_1(v), \dots, \eta_n(v)))$ , la diferenciable de  $\varphi$  pasa por demostrar la de la aplicación  $\eta_j : v \in \mathcal{T}_n \mapsto \eta_j(v) \in \mathcal{H}(v)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , es diferenciable con regularidad de orden 1 en el sentido de la Definición 4.13 (recordemos que  $\mathcal{T}_n \equiv \mathfrak{Div}_0$ ).

Por otro lado, es un hecho conocido de la teoría de superficies de Riemann que  $T(v) = -2K(v)$ , donde  $K(v)$  es el vector de las constantes de Riemann en  $\mathfrak{S}(v)$  (ver [FK]):

$$K(v) = \mathfrak{p}_v \left( \sum_{j=1}^n \left( \frac{\pi_{j,j}(v)}{2} e_j - \int_{a_j(v)} \tilde{\varphi}_v \eta_j(v) \right) \right),$$

siendo  $\tilde{\varphi}_v : \text{Div}_k(\Omega(v)) \rightarrow \mathbb{C}^n$  un levantamiento de  $\varphi_v : \text{Div}_k(\Omega(v)) \rightarrow \mathcal{J}(v) = \mathbb{C}^n/L(v)$ .

Por lo tanto, la diferenciabilidad de  $\hat{T}(v) = (v, T(v))$  también pasa por demostrar la de  $\eta_j, j = 1, \dots, n$ .

Para ello necesitaremos el siguiente lema sobre la dependencia diferenciable de las soluciones de ciertas ecuaciones elípticas. En este resultado se utiliza la notación para los espacios normados de funciones de clase  $C^k$  y  $C^{k,\alpha}$  que fue establecida en la Sección 1.4, así como los teoremas referentes a las soluciones de ecuaciones elípticas enunciados en dicha Sección.

**Lema A.I** *Sea  $\Omega$  un dominio abierto en  $\mathbb{R}^2$  con borde regular,  $\mathbb{B}$  una bola Euclídea abierta en  $\mathbb{R}^m$  y*

$$H(t, x), \phi(t, x) : \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

*dos funciones continuas. Para cada  $t \in \overline{\mathbb{B}}$  definamos las funciones  $H_t, \phi_t : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$H_t(x) := H(t, x), \quad \text{y} \quad \phi_t(x) := \phi(t, x).$$

*Supongamos que  $H_t \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$  y  $\phi_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , para cierto  $\alpha \in ]0, 1[$ . Supondremos además que las aplicaciones  $t \mapsto H_t$  y  $t \mapsto \phi_t$  son de clase  $C^1$ .*

*Consideremos una familia 1-paramétrica y diferenciable de métricas en  $\overline{\Omega}$ ,  $\{ds_t^2 : t \in \overline{\mathbb{B}}\}$  Consideremos una familia 1-paramétrica y diferenciable de métricas en  $\overline{\Omega}$ ,  $\{ds_t^2 : t \in \overline{\mathbb{B}}\}$  y denotemos por  $\Delta_t$  la familia de Laplacianos asociada. Para cada  $t \in \overline{\mathbb{B}}$  sea  $u_t \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  verificando:*

$$\begin{aligned} \Delta_t u_t &= H_t && \text{en } \Omega, \\ u_t &= \phi_t && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

*Por último, definamos  $u : \overline{\mathbb{B}} \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $u(t, x) = u_t(x)$ . Entonces:*

- (I) *Para cada  $t \in \overline{\mathbb{B}}$ ,  $u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Además la aplicación  $t \in \overline{\mathbb{B}} \mapsto u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  es de clase  $C^1$ .*
- (II) *Si  $H$  y  $\phi$  son diferenciables, entonces cualquier derivada parcial (de cualquier orden) de  $u$  con respecto a las variables de  $t \in \mathbb{B}$  pertenece a  $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Además  $t \in \overline{\mathbb{B}} \mapsto u_t \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  es diferenciable (de clase  $C^\infty$ ).*

*Como consecuencia, si  $H$  y  $\phi$  son diferenciables, cualquier derivada parcial (de cualquier orden) de  $u$  con respecto a las variables de  $t \in \mathbb{B}$  pertenece a  $C^{2,\alpha}((\mathbb{B} \times \Omega) \cup T)$ , donde  $T$  es cualquier porción diferenciable de  $\partial(\mathbb{B} \times \Omega)$ .*

*En particular,  $u : \mathbb{B} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable con regularidad de orden 2 en  $\mathbb{B}$ , en el sentido de la Definición 4.10.*

*Demostración:*

*Demostración de (I):* Antes de nada, observemos que  $u_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  como consecuencia directa del teorema de regularidad global establecido en la Propiedad 1.9 (Sección 1.4).

Fijemos un punto  $t_0 \in \overline{\mathbb{B}}$ , para cada  $t$  la función  $u_t - u_{t_0}$  verifica:

$$\begin{aligned} \Delta_{t_0}(u_t - u_{t_0}) &= (\Delta_{t_0} - \Delta_t)u_t + H_t - H_{t_0} && \text{en } \Omega, \\ u_t - u_{t_0} &= \phi_t - \phi_{t_0} && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

y por tanto en virtud de la Propiedad 1.7  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|u_t - u_{t_0}\|_0 = 0$ . Teniendo en cuenta este hecho y la Propiedad 1.8 concluimos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|u_t - u_{t_0}\|_{2,\alpha} = 0$ . Es decir, la aplicación  $t \mapsto u_t \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  es continua en  $t_0$ .

Veamos ahora que  $t \mapsto u_t$  admite derivadas parciales continuas de primer orden. Basta con demostrarlo para el caso  $m = 1$  (el caso general es similar). Definamos las funciones  $w_t = \frac{u_t - u_{t_0}}{t - t_0}$  y veamos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|w_t\|_{2,\alpha}$  existe y coincide con la solución  $y_{t_0} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$  del problema:

$$\begin{aligned} \Delta_{t_0} y_{t_0} &= - \left. \frac{\partial \Delta_t(u_{t_0})}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=t_0} && \text{en } \Omega \\ y_{t_0} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=t_0} && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En efecto, para  $t \neq t_0$  definamos el operador diferencial  $L_t := \frac{\Delta_t - \Delta_{t_0}}{t - t_0}$ . Así las funciones  $w_t$  son las soluciones del problema:

$$\begin{aligned} \Delta_{t_0} w_t &= -L_t u_t + \frac{H_t - H_{t_0}}{t - t_0} && \text{en } \Omega, \\ w_t &= \frac{\phi_t - \phi_{t_0}}{t - t_0} && \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

Por tanto la función  $w_t - y_{t_0}$  verifica:

$$\begin{aligned} \Delta_{t_0}(w_t - y_{t_0}) &= -L_t u_t + \left. \frac{\partial \Delta_t(u_{t_0})}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \frac{H_t - H_{t_0}}{t - t_0} - \left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=t_0}, && \text{en } \Omega \\ w_t - y_{t_0} &= \frac{\phi_t - \phi_{t_0}}{t - t_0} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=t_0} && \text{en } \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, razonando como antes se demuestra que  $w_t$  converge a  $y_{t_0}$  en la norma

$\|\cdot\|_{2,\alpha}$  de  $\mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ . Por último sean  $t_1, t_2 \in \mathbb{B}$ , y observemos que:

$$\begin{aligned} \Delta_{t_1}(y_{t_1} - y_{t_2}) &= - \left. \frac{\partial \Delta_t(u_{t_1})}{\partial t} \right|_{t=t_1} + \left. \frac{\partial \Delta_t(u_{t_2})}{\partial t} \right|_{t=t_2} + \left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=t_1} - \left. \frac{\partial H_t}{\partial t} \right|_{t=t_2} - (\Delta_{t_1} - \Delta_{t_2})y_{t_2}, \\ (y_{t_1} - y_{t_2}) &= \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_1) - \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_2) \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

de donde, utilizando de nuevo las Propiedades 1.7 y 1.8, obtenemos la continuidad de  $t \mapsto y_t = \frac{\partial u}{\partial t} \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ , lo que demuestra (I).

*Demostración de (II)* : Supongamos ahora que  $H$  y  $\phi$  son de clase  $\mathcal{C}^\infty$ . Las derivadas parciales de primer orden de  $u_t$  con respecto a las variables en  $t \in \mathbb{B}$  vuelven a estar en las condiciones del lema (ver Ecuación (4.8)), por lo que (I) también se mantiene para estas funciones. Un argumento iterativo prueba que la aplicación  $t \mapsto u_t$  es de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , lo que termina (II).

Por último, para la parte final del Lema, sea  $D^\beta u(t, x)$  una derivada parcial de  $u$  de cualquier orden con respecto a las variables en  $\mathbb{B}$  y sea  $f(t, x)$  cualquier derivada parcial de  $D^\beta u(t, x)$  de orden 2 con respecto a las variables en  $\mathbb{B} \times \Omega$ . Es suficiente comprobar que  $\|f\|_{0,\alpha}$  está acotada, donde  $\|\cdot\|_{0,\alpha}$  es la norma de  $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\mathbb{B}} \times \overline{\Omega})$ . Esto es consecuencia de la siguiente desigualdad:

$$\|f\|_{0,\alpha} \leq \text{Max}\{\|f(t, \cdot)\|_{0,\alpha} : t \in \mathbb{B}\} + C \sum_{j=1}^m \left\| \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\|_0,$$

donde  $C$  es una constante positiva y  $\|\cdot\|_0$  es la norma en  $\mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{B}} \times \overline{\Omega})$ . La regularidad de clase  $\mathcal{C}^{2,\alpha}$  de  $u$  y de todas sus derivadas parciales en  $t$  en la porción diferenciable de  $\partial(\mathbb{B} \times \Omega)$  son también consecuencia del teorema de regularidad global.  $\square$

Como consecuencia del lema anterior, tenemos el siguiente resultado. Como explicamos al principio de la sección, el Lema 4.6 es consecuencia directa de éste.

**Lema A.II** *La aplicación*

$$\eta_j : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$$

$$v \mapsto \eta_j(v),$$

*es diferenciable con regularidad de orden 1 (ver Definición 4.13).*

*Como consecuencia, las funciones  $v \in \mathcal{T}_n \mapsto \pi_{j,k}(v) := \int_{b_j(v)} \eta_k(v) \in i\mathbb{R}$ , son diferenciables.*

*Demostración:* Sea  $v_0 \in \mathcal{T}_n$  y consideremos una bola  $\mathbb{B}$  centrada en  $v_0$  y de radio  $\epsilon$  en  $\mathcal{T}_n$ .

Para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  y  $v \in \mathbb{B}$ , sea  $h_{j,v}$  la única función armónica en  $\Omega(v)$  tal que  $h_{j,v}|_{a_k(v)} = \delta_{jk}$ .

Denotaremos por  $\hat{\eta}_j(v)$  a las 1-formas  $\hat{\eta}_j(v) = \partial_z h_{j,v}$ . Estas 1-formas están definidas sobre  $\Omega(v)$  pero, puesto que las funciones  $h_{j,v}$  son constantes sobre cada componente de  $\partial\Omega(v)$ , pueden ser extendidas por reflexión de Schwartz a todo  $\mathfrak{S}(v)$ . Además es inmediato comprobar que  $\{\hat{\eta}_j(v) : j = 1, \dots, n\}$  es una base del espacio vectorial complejo de 1-formas holomorfas  $\mathfrak{S}(v)$ .

**Afirmación:** La aplicación  $\hat{\eta}_j : \mathbb{B} \rightarrow \mathcal{H}_n$  dada por  $v \mapsto \hat{\eta}_j(v)$ , es diferenciable con regularidad de orden 1.

*Demostración de la Afirmación:* Por simplificar la notación, durante la demostración de esta afirmación denotaremos  $h_{j,v} = h_v$ .

Consideremos una deformación diferenciable  $\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v), v \in \mathbb{B}\}$  de  $\mathfrak{S}(v_0)$  (ver Definición 4.11). Nótese que  $F_v(a_j(v_0)) = a_j(v)$  y  $F_v(b_j(v_0)) = b_j(v)$  a nivel de homología. De las Definiciones 4.13 y 4.12 se deduce que basta demostrar que la aplicación

$$\hat{u} : \mathbb{B} \times \overline{\Omega(v_0)} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(v, z) \mapsto h_v(F_v(z)),$$

es diferenciable con regularidad de orden 2 en  $\mathbb{B}$ .

Antes de nada observemos que  $\Omega(v_0) \subset \overline{\mathbb{C}}$  es conformemente equivalente al dominio acotado  $\Omega' = \{1/x : x \in \Omega(v_0)\} \subset \mathbb{R}^2$ , donde el biholomorfismo viene dado por  $T : \overline{\Omega'} \rightarrow \overline{\Omega(v_0)}$ ,  $T(x) = 1/x$ .

Por lo tanto, si definimos

$$u : \mathbb{B} \times \overline{\Omega'} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u(v, x) = \hat{u}(v, T(x)),$$

es claro que  $\hat{u}$  es diferenciable con regularidad de orden 2 si y sólo si  $u$  lo es.

Consideremos ahora la única métrica  $ds_v^2$  en  $\overline{\Omega'}$  que hace que la aplicación  $F_v \circ T : \overline{\Omega'} \rightarrow \overline{\Omega(v)}$  sea una isometría (cuando consideramos en  $\overline{\Omega(v)}$  la métrica inducida por la métrica canónica de  $\overline{\mathbb{C}}$ ) y denotemos por  $\Delta_v$  a la familia de

Laplacianos asociada. Entonces  $u_v := u(v, \cdot) = h_v(F_v(T(\cdot)))$  es la solución del problema:

$$\begin{aligned}\Delta_v u_v &= 0, \\ u_v|_{\partial\Omega'} &= \phi_v|_{\partial\Omega'},\end{aligned}$$

donde la función  $\phi(v, x) = \phi_v(x)$  es cierta función diferenciable en  $\overline{\mathbb{B}} \times \overline{\Omega'}$ .

Aplicando el lema A.I deducimos que  $u$  es diferenciables con regularidad de orden 2 en  $\mathbb{B}$ , lo que demuestra la Afirmación.  $\diamond$

Como consecuencia de la Afirmación anterior, la aplicación  $\hat{\eta}_j : \mathcal{T}_n \rightarrow \mathcal{H}_n$ ,  $v \mapsto \hat{\eta}_j(v)$ , es diferenciable con regularidad de orden 1. De aquí se deduce que las funciones período  $v \mapsto \int_{a_h(v)} \hat{\eta}_j(v)$  son diferenciables en  $\mathcal{T}_n$ , y como

$$\hat{\eta}_j(v) = \sum_{h=1}^n \left( \int_{a_h(v)} \hat{\eta}_j(v) \right) \eta_h(v),$$

deducimos que  $\eta_1, \dots, \eta_n$  son diferenciables con regularidad de orden 1 en  $\mathcal{T}_n$ .

□

## A.2. ESTRUCTURA DIFERENCIABLE DEL FIBRADO ESPINORIAL $\mathcal{S}_n$ (TEOREMA 4.7)

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 4.7. Como ya explicamos, la demostración de este hecho pasa por ver que cierta aplicación  $H : \mathfrak{Div}_n \rightarrow \mathcal{J}_n$  tiene diferencial biyectiva en los puntos de  $\mathcal{S}_n$ . Esto está íntimamente relacionado con que  $D$  no sea un *divisor especial* en  $\mathfrak{Div}_n(\mathfrak{S}(v))$ .

Un divisor de orden  $n$  en una superficie de Riemann compacta  $N$  de género  $n$ ,  $D_0 \in \mathfrak{Div}_n(N)$ , se dice que es especial si la aplicación de Abel-Jacobi,  $\varphi : \mathfrak{Div}_n(N) \rightarrow \mathcal{J}$ , no es un difeomorfismo local alrededor de  $D_0$ . Es un resultado clásico de la teoría de superficies de Riemann que  $D_0$  es especial si solamente si existe una 1-forma holomorfa  $\omega$  sobre  $N$  con divisor  $[\omega] \geq D_0$  (véase por ejemplo [FK]).

**Lema A.III** Si  $(v_0, D_0) \in \mathcal{S}_n$  entonces  $D_0$  no es un divisor especial en  $\mathfrak{Div}_n(\mathfrak{S}(v_0))$ .

*Demostración:* Escribamos  $D_0 = z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s}$ , con  $z_j \neq z_h$  si  $j \neq h$ . Como hemos explicado antes,  $D_0$  es especial si y solamente si existe una 1-forma holomorfa  $\omega_0$  en  $\mathfrak{S}(v_0)$  que tiene un cero en  $z_j \in \Omega(v_0) \subset \mathfrak{S}(v_0)$  de orden al menos  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Una aplicación directa del Teorema de Riemann-Roch nos da la existencia de una función meromorfa  $f$  en  $\mathfrak{S}(v_0)$  con polos en  $z_j$  de orden a lo más  $m_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Es decir,

$$[f] \leq \frac{1}{D_0}. \quad (4.9)$$

En particular,  $f$  tiene grado menor o igual que  $n$ . Puesto que  $J_{v_0}(\infty)$  no es un polo de  $f$ , después de sumar una constante adecuada podemos suponer que  $f(J_{v_0}(\infty)) = 0$ .

Por otro lado, como  $D_0 \in \mathcal{S}_n(v_0)$ , el Lema 4.8 nos asegura que  $\varphi_{v_0}(D_0 \cdot \infty) - \varphi_{v_0}(J_{v_0}(D_0 \cdot \infty)) = 0$ . Por lo tanto, una aplicación directa del Teorema de Abel da la existencia de una función meromorfa  $g$  de grado  $n + 1$  en  $\mathfrak{S}(v_0)$  cuyo divisor es

$$[g] = \frac{D_0 \cdot \infty}{J_{v_0}(D_0 \cdot \infty)}.$$

Además  $J_{v_0}$  es una involución antiholomorfa con puntos fijos, por lo que no es difícil comprobar que  $g \circ J_{v_0} = r/\bar{g}$ , para cierto  $r > 0$ . Por lo tanto, multiplicando  $g$  por el factor  $r^{-1/2}$ , podemos suponer que  $g \circ J_{v_0} = 1/\bar{g}$ .

Para cada  $v \in \mathcal{T}_n$ , sea  $\mathcal{F}_v$  la familia de funciones meromorfas  $h$  sobre  $\mathfrak{S}(v)$ , con grado  $n + 1$ , todos sus ceros en  $\Omega(v)$  y tales que  $h \circ J_v = 1/\bar{h}$ . Como consecuencia de lo anterior  $g \in \mathcal{F}_{v_0}$ .

**Afirmación:** Para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$  sea  $f_\lambda$  la función meromorfa definida por

$$f_\lambda := \frac{1 + \lambda f}{1 + \lambda(f \circ J_{v_0})}.$$

Entonces,  $f_\lambda$  no es constante para cualquier  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Además  $g_\lambda := g f_\lambda \in \mathcal{F}_{v_0}$  para cualquier  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

*Demostración de la afirmación:* Supongamos por reducción al absurdo que existe un  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $f_\lambda = c$ , con  $c \in \mathbb{C}^*$ . En ese caso,  $1 + \lambda f = c(1 + \lambda(f \circ J_{v_0}))$  y por tanto el divisor polar<sup>9</sup> de  $f$ , que está contenido en  $D_0$  (Ecuación (4.9)), es invariante por  $J_{v_0}$ . Pero esto es imposible, ya que  $D_0 \in \text{Div}_n(\Omega(v_0))$  y  $\Omega(v_0) \cap J_{v_0}(\Omega(v_0)) = \emptyset$ .

<sup>9</sup>Esto es, el divisor formado por los polos de  $f$ , contados con multiplicidad.

Para la segunda parte de la afirmación, notemos que el divisor de  $g_\lambda$  es

$$[g_\lambda] = \frac{D_\lambda \cdot \infty}{J_{v_0}(D_\lambda) \cdot J_{v_0}(\infty)},$$

donde  $D_\lambda$  es un divisor integral de grado  $\leq n$  y por lo tanto el grado de  $g_\lambda$  es  $\leq n + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Además  $g_\lambda$  no es constante para cualquier  $\lambda$  (de otra forma,  $J_{v_0}(\infty)$  sería un cero de  $1 + \lambda f$ , contradiciendo que  $f(J_{v_0}(\infty)) = 0$ ).

Sea  $A := \{\lambda \in \mathbb{C} : g_\lambda \in \mathcal{F}_{v_0}\}$ , y observemos que  $0 \in A$ . Por tanto, basta demostrar que  $A$  es abierto y cerrado.

La propiedad de ser abierto es una consecuencia elemental del teorema de Hurwitz (estamos usando el hecho de que el grado de  $g_\lambda$  es a lo más  $n + 1$ ). Por último, veamos que  $A$  es cerrado. Sea  $\lambda_0 \in \bar{A}$ , y consideremos una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$  convergiendo a  $\lambda_0$ . La sucesión  $\{g_n := g_{\lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge a  $g_0 := g_{\lambda_0}$  uniformemente en  $\mathfrak{S}(v_0)$ . Veamos que  $g_0 \in \mathcal{F}_{v_0}$ :

Puesto que  $g_n \circ J_{v_0} = 1/\bar{g}_n$ , los ceros de  $g_n$  deben estar en  $\Omega(v_0)$ , y por tanto  $g_n$  es holomorfa en  $\Omega(v_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , con lo que lo mismo es cierto para  $g_0$ . Además,  $|g_0| = 1$  en  $\partial\Omega(v_0)$  y  $g_0$  es no constante con lo que, por el principio del máximo,  $|g_0| < 1$  en  $\Omega(v_0)$  y deducimos que  $g_0$  no tiene puntos críticos en  $\partial\Omega_{v_0}$ . Como  $\partial\Omega_{v_0}$  consta de  $n + 1$  círculos disjuntos, esto quiere decir que  $g_0$  toma cada valor complejo  $\theta \in \mathbb{S}^1$  por lo menos  $n + 1$  veces. Por lo tanto, el grado de  $g_0$  debe ser  $n + 1$  y  $g_0 \in \mathcal{F}_{v_0}$ , lo que concluye la demostración de la afirmación.  $\diamond$

Finalmente, para obtener la deseada contradicción, tomemos un punto  $P \in \partial\Omega(v_0)$  tal que  $f(P) \neq 0, \infty$ , y elijamos  $\lambda' = \frac{-1}{f(P)}$ . Puesto que  $J_{v_0}(P) = P$ , la función meromorfa  $g_{\lambda'}$  tiene grado menor que  $n + 1$ , con lo que  $\lambda' \notin A = \mathbb{C}$ , lo cual es absurdo.  $\square$

Ya estamos en condiciones de demostrar la estructura diferenciable del fibrado espinorial  $\mathcal{S}_n$ .

#### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.7

Antes de nada, observemos que  $\mathcal{S}_n \neq \emptyset$  como consecuencia del Lema 4.8 y la Sección 3.3. Consideremos la aplicación  $H : \mathfrak{Div}_n \rightarrow \mathcal{J}_n$  dada por

$$H(v, D) = (v, 2\varphi_v(D) - 2\varphi_v(J_v(\infty)) - T(v)).$$



Entonces,  $\mathcal{S}_n = H^{-1}(\mathbf{0})$ , donde  $\mathbf{0} = \{(v, 0) \in \mathcal{J}_n : v \in \mathcal{T}_n\}$ . Por lo tanto, para demostrar que  $\mathcal{S}_n$  es una subvariedad diferenciable de  $\text{Div}_n$  basta comprobar que  $dH_q$  es biyectiva para cualquier  $q_0 = (v_0, D_0) \in \mathcal{S}_n$ .

Escribamos  $D_0 = z_1^{n_1} \cdot \dots \cdot z_s^{n_s}$ , con  $z_j \in \Omega(v_0)$ ,  $z_j \neq z_h$  si  $j \neq h$  y sea  $\mathcal{V}(\epsilon)$  un entorno de  $(v_0, D_0)$  en  $\text{Div}_n$  (ver Observación 4.5).

Así, para que  $dH_{q_0}$  sea biyectiva basta que la aplicación

$$H_0 : \mathcal{U}(\epsilon) \rightarrow \mathcal{J}(v_0), \quad H_0(D) = 2\varphi_{v_0}(D) - 2\varphi_{v_0}(J_{v_0}(\infty)) - T(v_0),$$

sea un difeomorfismo local alrededor de  $D_0$ . Para esto basta que  $\varphi_{v_0}(D)$  sea un difeomorfismo local en  $D_0 \in \mathcal{S}(v_0)$ , lo cual está garantizado por el Lema A.III. Esto demuestra que  $\mathcal{S}_n$  es una subvariedad de  $\text{Div}_n$  de dimensión  $3n - 1$ .

Demostremos ahora la segunda parte del teorema, que afirma que la proyección  $\nu : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$ ,  $\nu(v, D) = v$ , es un recubridor finito. Para ello observemos que, como consecuencia de lo anterior,  $H|_{\mathcal{S}_n} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathbf{0}$  es un difeomorfismo local, donde  $\mathbf{0} = \{(v, 0) : v \in \mathcal{T}_n\} \subset \mathcal{J}_n$ . Como consecuencia, lo mismo es cierto para  $\nu$ .

Para terminar veamos que  $\nu$  es propia. Para ello "rescataremos" la familia de funciones  $\mathcal{F}_v$  ya utilizada en la demostración del Lema A.III.

$$\mathcal{F}_v = \{h \text{ función meromorfa sobre } \mathfrak{S}(v), \text{ de grado } n+1, \\ \text{con todos sus ceros en } \Omega(v) \text{ y tales que } h \circ J_v = 1/\bar{h}\}$$

En efecto, sea  $\{(v_k, D_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_n$  una sucesión tal que  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a un punto  $v_\infty \in \mathcal{T}_n$ . El Lema 4.8 y el teorema de Abel nos dan la existencia de una función meromorfa  $g_k \in \mathcal{F}_{v_k}$  con divisor

$$[g_k] = \frac{D_k \cdot \infty}{J_{v_k}(D_k \cdot \infty)}.$$

Vamos a comprobar que la sucesión  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge a una función  $g_\infty \in \mathcal{F}_{v_\infty}$ . Reflexionando con respecto a todas las componentes de  $\partial\Omega(v_k)$  podemos extender de forma meromorfa  $g_k$  a un entorno abierto  $W_k \subset \bar{\mathbb{C}}$  de  $\bar{\Omega}(v_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Por continuidad, y para  $k_0$  suficientemente grande, el conjunto  $W = \bigcap_{k \geq k_0} W_k$  es un entorno de  $\bar{\Omega}(v_\infty)$ . Criterios clásicos sobre familias normales muestran que, salvo tomar una parcial,  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente en  $\bar{\Omega}(v_\infty)$  a una función  $g_\infty$  que es meromorfa mas allá de  $\bar{\Omega}(v_\infty)$ . Es claro que  $|g_\infty| = 1$  en  $\partial\Omega(v_\infty)$ ,  $|g_\infty| < 1$  en  $\Omega(v_\infty)$  y  $g_\infty(\infty) = 0$ . Esto prueba que  $g_\infty$  es no constante y puede ser extendida por reflexión a  $\mathfrak{S}(v_\infty)$  mediante  $g_\infty \circ J_\infty = 1/\bar{g}_\infty$ .

Puesto que  $\deg(g_k) = n + 1$ , el Teorema de Hurwitz implica que  $\deg(g_\infty) \leq n + 1$ . Por el otro lado,  $|g_\infty| = 1$  solamente en  $\partial\Omega(v_\infty)$ , así que  $g_\infty$  es inyectiva en cada componente del borde de  $\Omega(v_\infty)$ . Por lo tanto, el grado de  $g_\infty$  debe ser exactamente  $n + 1$ , con lo que  $g_\infty \in \mathcal{F}_{v_\infty}$ .

Por último, observemos que  $[g_\infty] = \frac{D_\infty \cdot \infty}{J_{v_\infty}(D_\infty \cdot \infty)}$  donde  $D_\infty \in \mathcal{D}iv_n$ . Usando el Teorema de Hurwitz deducimos que  $\{D_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow D_\infty \in \mathcal{D}iv_n$ . Como  $\mathcal{S}_n$  es un conjunto cerrado de  $\mathcal{D}iv_n$ , concluimos que  $D_\infty \in \mathcal{S}_n$ , lo que demuestra que  $\nu : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{T}_n$  es propia y por tanto un recubridor finito.  $\square$

### A.3. DEPENDENCIA DIFERENCIABLE DE LOS DATOS DE WEIERSTRASS (PROPOSICIÓN 4.11)

En esta sección demostraremos la Proposición 4.11 que asegura que los datos de Weierstrass  $g_x$  y  $\phi_3(x)$  asociados al grafo maximal marcado  $\mathcal{E}^{-1}(x, 0, 1, 1) \in \mathcal{M}_n$  dependen de forma diferenciable con regularidad 2 y 1 respectivamente de  $x \in \mathcal{S}_n$ . Recordemos que, si  $x = (v, D)$ , los datos  $(g_x, \phi_x)$  están caracterizados unívocamente por las ecuaciones

$$[g_x] = \frac{D \cdot \infty}{J_v(D) \cdot J_v(\infty)}, \quad g_x \circ J_v = 1/\bar{g}_x, \quad g_x(1) = 1 \quad (4.10)$$

para  $g_x$  y

$$[\phi_3(x)] = \frac{D \cdot J_v(D)}{\infty \cdot J_v(\infty)}, \quad J_v^*(\phi_3(x)) = -\overline{\phi_3(x)}, \quad h_3(1) = 0 \quad (4.11)$$

para  $\phi_3(x)$  (recordemos que  $h_3$  la función tal que  $\phi_3(x) = h_3(z)dz$  en la carta  $z = \text{Id}$  alrededor de  $1 \in \overline{\mathbb{C}}$ ).

Es un hecho conocido de la teoría de superficies de Riemann que es posible encontrar una expresión *explícita* para  $g_x$  y  $\phi_3(x)$  en función de ciertas 1-formas meromorfas que dependen de  $D$ . Más concretamente las 1-formas involucradas son las siguientes.

Dado  $D = \prod_{j=1}^s w_j^{m_j} \in Div_k(\Omega(v))$ , denotaremos por  $\tau_D(v)$  a la única 1-forma meromorfa sobre  $\mathfrak{S}(v)$  tal que

- $\tau_D(v)$  tiene polos únicamente en  $w_j$  y  $J_v(w_j)$ ,  $j = 1, \dots, s$ , y son todos simples,
- $\text{Residuo}_{w_j}(\tau_D(v)) = -\text{Residuo}_{J_v(w_j)}(\tau_D(v)) = -m_j$ ,  $j = 1, \dots, s$ ,
- $\int_{a_j(v)} \tau_D(v) = 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ .

De la misma forma, sea  $D_1 = \prod_{j=1}^s w_{j,1}^{m_j}$ ,  $D_2 = \prod_{h=1}^r w_{h,2}^{n_h} \in \text{Div}_k(\Omega(v))$  y definamos  $\kappa_{D_1, D_2}(v)$  como la única 1-forma meromorfa en  $\mathfrak{S}(v)$  tal que

- $\kappa_{D_1, D_2}(v)$  tiene polos únicamente en  $w_{j,1}$ ,  $w_{h,2}$ ,  $J_v(w_{j,1})$  y  $J_v(w_{h,2})$ ,  $j = 1, \dots, s$ ,  $h = 1, \dots, r$ , y son todos simples,
- $\text{Residuo}_{w_{j,1}}(\kappa_{D_1, D_2}(v)) = \text{Residuo}_{J_v(w_{j,1})}(\kappa_{D_1, D_2}(v)) = -m_j$ ,
- $\text{Residuo}_{w_{h,2}}(\kappa_{D_1, D_2}(v)) = \text{Residuo}_{J_v(w_{h,2})}(\kappa_{D_1, D_2}(v)) = n_h$ , para todo  $j, h$ ,
- $\int_{\alpha_j(v)} \kappa_{D_1, D_2}(v) = 0$ , para todo  $j$ .

Para la demostración de la Proposición 4.11 será fundamental demostrar que  $\tau_D(v)$  y  $\kappa_{D_1, D_2}(v)$  dependen de forma diferenciable con regularidad de orden 1 de  $(v, D)$  y  $(v, D_1, D_2)$ , respectivamente. Puesto que  $\kappa_{D_1, D_2}$  depende de dos divisores, por comodidad introduciremos la siguiente notación.

Para cada  $v \in \mathcal{T}_n$  y  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  definimos  $\text{Div}_{k_1, k_2}(\Omega(v)) = \text{Div}_{k_1}(\Omega(v)) \times \text{Div}_{k_2}(\Omega(v))$ , y denotamos por

$$\mathfrak{Div}_{k_1, k_2} = \bigcup_{v \in \mathcal{T}_n} \text{Div}_{k_1, k_2}(\Omega(v)) = \{(v, D_1, D_2) : v \in \mathcal{T}_n, D_1 \in \text{Div}_{k_1}(\Omega(v)), D_2 \in \text{Div}_{k_2}(\Omega(v))\},$$

al correspondiente fibrado sobre  $\mathcal{T}_n$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Como en el caso del fibrado de  $k$ -divisores,  $\mathfrak{Div}_k$ , el espacio  $\mathfrak{Div}_{k_1, k_2}$  tiene una estructura natural de variedad diferenciable. De la misma forma, las definiciones de diferenciable con regularidad de orden  $\kappa$  dadas en la Subsección 4.2.3 pueden ser extendidas a funciones definidas en  $\mathfrak{Div}_{k_1, k_2}$  y sus subvariedades.

La demostración del siguiente lema sigue la línea de la del Lema A.II, donde se probaba lo análogo para la base de 1-formas holomorfas  $\{\eta_j(v) : j = 1, \dots, n\}$ .

**Lema A.IV** Las aplicaciones

$$\begin{aligned} \tau : \mathfrak{Div}_k &\rightarrow \mathcal{H}_n & \kappa : \mathfrak{Div}_{k, k} &\rightarrow \mathcal{H}_n \\ (v, D) &\mapsto \tau_D(v) & (v, D_1, D_2) &\mapsto \kappa_{D_1, D_2}(v) \end{aligned}$$

son diferenciables con regularidad de orden 1.<sup>10</sup>

<sup>10</sup>Recordemos que  $\mathcal{H}_n$  se definía como el fibrado de 1-formas meromorfas en  $\mathfrak{S}(v)$ ,  $v \in \mathcal{T}_n$  (Definición 4.9)

*Demostración* : Por brevedad, demostraremos paralelamente la diferenciabilidad de ambas funciones.

Sea  $X_0 = (v_0, D_0) \in \mathfrak{Div}_k$  en el primer caso y  $X_0 = (v_0, D_{1,0}, D_{2,0}) \in \mathfrak{Div}_{k,k}$  en el segundo, y consideremos un entorno  $\mathcal{V}(\epsilon)$  de  $X_0$  de radio  $\epsilon > 0$  (ver Observación 4.5).

Escribamos  $D = \prod_{j=1}^l w_j^{m_j}$ ,  $D_1 = \prod_{j=1}^{l_1} w_{j,1}^{m_{j,1}}$  y  $D_2 = \prod_{h=1}^{l_2} w_{h,2}^{m_{h,2}}$ , y denotemos por

$$A_{v,D} = \sum_{j=1}^l \log |z - w_j|^{m_j},$$

$$A_{v,D_1,D_2} = \text{Im} \left( \int \left( \sum_{h=1}^{l_2} \frac{m_{h,2}}{z - w_{h,2}} - \sum_{j=1}^{l_1} \frac{m_{j,1}}{z - w_{j,1}} \right) dz \right).$$

Nótese que  $A_{v,D}$  está bien definida sobre  $\overline{\Omega(v)} - \{\infty, w_1, \dots, w_l\}$ , mientras que  $A_{v,D_1,D_2}$  lo está en un entorno suficientemente pequeño de  $\partial\Omega(v)$  formado por la unión de  $n + 1$  anillos.

Sea  $h_{v,D}$  (resp.  $h_{v,D_1,D_2}$ ) la única función armónica en  $\Omega(v)$  tal que  $h_{v,D}|_{\partial\Omega(v)} = A_{v,D}$  (resp.  $h_{v,D_1,D_2}|_{\partial\Omega(v)} = A_{v,D_1,D_2}$ ).

Sean  $\hat{\tau}_D(v)$  y  $\hat{\kappa}_{D_1,D_2}(v)$  las 1-formas meromorfas dadas por

$$\hat{\tau}_D(v) = 2\partial_z(h_{v,D} - A_{v,D}), \quad \hat{\kappa}_{D_1,D_2}(v) = 2i\partial_z(h_{v,D_1,D_2} - A_{v,D_1,D_2}).$$

Aunque estas 1-formas están definidas en  $\Omega(v)$ , pueden ser extendidas mediante reflexión de Schwartz a todo  $\mathfrak{S}(v)$ . Además es fácil comprobar que  $\hat{\tau}_D(v)$  y  $\hat{\kappa}_{D_1,D_2}(v)$  tienen los mismo polos (con los mismo residuos) que  $\tau_D(v)$  y  $\kappa_{D_1,D_2}(v)$  respectivamente.

**Afirmación:** Las aplicaciones  $\hat{\tau} : \mathcal{V}_0(\epsilon) \rightarrow \mathcal{H}_n$ ,  $(v, D) \mapsto \hat{\tau}_D(v)$ , and  $\hat{\kappa} : \mathcal{V}(\epsilon) \rightarrow \mathcal{H}_n$ ,  $(v, D_1, D_2) \mapsto \hat{\kappa}_{D_1,D_2}(v)$ , son diferenciables con regularidad de orden 1.

*Demostración de la Afirmación:* Para simplificar la notación, a lo largo de la demostración de esta afirmación denotaremos  $h_{j,v} = h_v$ .

Consideremos una deformación diferenciable  $\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v), v \in \mathcal{V}(\epsilon)\}$  of  $\mathfrak{S}(v_0)$  (ver Definición 4.11). Nótese que para cada  $v$  y  $j$ ,  $F_v(a_j(v_0)) = a_j(v)$  y  $F_v(b_j(v_0)) = b_j(v)$  a nivel de homología.

Sea  $\Gamma : \mathbb{B} \rightarrow \overline{W}$  una parametrización en  $\text{Div}_k$  o  $\text{Div}_{k,k}$  alrededor de  $X_0$ , donde  $W$  es un entorno contenido en  $\mathcal{V}_0(\epsilon)$  y escribamos  $\Gamma(t) = (v(t), D(t))$  o  $\Gamma(t) = (v(t), D_1(t), D_2(t))$  en cada caso,  $t \in \mathbb{B}$ .

Por brevedad, denotaremos  $F_t := F_{v(t)} : \overline{\Omega(v_0)} \rightarrow \overline{\Omega(v(t))}$  y  $h_t := h_{\Gamma(t)} : \overline{\Omega(v(t))} \rightarrow \mathbb{R}$ . Por lo tanto, de las Definiciones 4.13 y 4.12 se deduce que basta demostrar que la aplicación  $\hat{u} : \mathbb{B} \times \overline{\Omega(v_0)} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto h_t(F_t(x))$ , es diferenciable con regularidad de orden 2 en  $\mathbb{B}$ .

Para esto, observemos que  $\Omega(v_0) \subset \overline{\mathbb{C}}$  es conformemente equivalente al dominio acotado de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega' = \{1/x : x \in \Omega(v_0)\} \subset \mathbb{R}^2$ , donde el biholomorfismo está dado por  $T : \overline{\Omega'} \rightarrow \overline{\Omega(v_0)}$ ,  $T(x) = 1/x$ . Si definimos

$$u : \mathbb{B} \times \overline{\Omega'} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$u(t, x) = \hat{u}(t, T(x)),$$

es claro que  $\hat{u}$  es diferenciable con regularidad de orden 2 en  $\mathbb{B}$  si y sólo si  $u$  lo es.

Para cada  $t \in \mathbb{B}$  sea  $ds_t^2$  la única métrica en  $\overline{\Omega'}$  que hace que la aplicación  $F_t \circ T : \overline{\Omega'} \rightarrow \overline{\Omega(v(t))}$  sea una isometría (estamos considerando en  $\overline{\Omega(v(t))}$  la métrica inducida por la métrica canónica de  $\overline{\mathbb{C}}$ ), y sea  $\Delta_t$  la familia de Laplacianos asociada,  $t \in \mathbb{B}$ . Entonces  $u_t := h_t(F_t(T(x)))$  es la solución del problema

$$\Delta_t u_t = 0, \text{ en } \Omega' \quad \text{y} \quad u_t|_{\partial\Omega'} = \phi_t|_{\partial\Omega'},$$

donde  $\phi(t, x) = \phi_t(x)$  es una cierta función diferenciable en  $\mathbb{B} \times \overline{\Omega'}$ .

Bajo estas condiciones, el Lema A.I nos asegura que  $u$  es diferenciables con regularidad de orden 2 en  $\mathbb{B}$ , lo cual demuestra la Afirmación.  $\diamond$

Ahora observemos que

$$\tau_D(v) = \hat{\tau}_D(v) - \sum_{h=1}^n \left( \int_{a_h(v)} \hat{\tau}_D(v) \right) \eta_h(v),$$

y

$$\kappa_{D_1, D_2}(v) = \hat{\kappa}_{D_1, D_2}(v) - \sum_{h=1}^n \left( \int_{a_h(v)} \hat{\kappa}_{D_1, D_2}(v) \right) \eta_h(v).$$

Teniendo en cuenta el Lema A.II, deducimos que  $\tau$  y  $\kappa$  son diferenciables con regularidad de orden 1.  $\square$

Por último, necesitaremos también el siguiente lema:

**Lema A.V** Para cada  $v \in \mathcal{T}_n$  existe una 1-forma holomorfa  $\omega_0$  en  $\mathfrak{S}(v)$  con  $2n - 2$  ceros distintos, ninguno de ellos en  $\partial\Omega(v)$  y tal que  $J_v^*(\omega_0) = \overline{\omega_0}$ .

*Demostración:* Sea  $\omega$  una 1-forma holomorfa no nula en  $\mathfrak{S}(v)$  satisfaciendo  $J_v^*(\omega) = \overline{\omega}$ .

De hecho, podemos elegir  $\omega$  de tal forma que no se anule en  $\partial\Omega(v)$ . En efecto, sea  $h$  la única función armónica en  $\overline{\Omega(v)}$  tal que  $h|_{a_j(v)} = \delta_{j,0}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , donde  $\delta_{h,k}$  es el símbolo de Kronecker. Por el principio del máximo,  $h^{-1}(0) = \cup_{j=1}^n a_j(v)$  y  $h^{-1}(1) = a_0(v)$ . Puesto que estos conjuntos de nivel son regulares,  $h$  no tiene puntos críticos en  $\partial\Omega(v)$ . La 1-forma  $\omega = \partial_z h$  puede ser extendida a  $\mathfrak{S}(v)$  por reflexión de Schwartz y satisface las propiedades deseadas.

Sea  $D = [\omega] = P_1^{n_1} \cdot \dots \cdot P_s^{n_s} \cdot J_v(P_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot J_v(P_s)^{n_s}$  el divisor asociado a  $\omega$ .

Puesto que  $D$  tiene grado  $2n - 2$ , no es difícil deducir, utilizando el Teorema de Riemann-Roch, que el espacio vectorial complejo  $\mathcal{M}(D)$  de funciones meromorfas sobre  $\mathfrak{S}(v)$  con polos sólo en los puntos  $P_i, J_v(P_i)$  de órdenes a lo más  $n_i, i = 1, \dots, s$ , tiene dimensión  $n$ .

**Afirmación:** Existe una función  $f \in \mathcal{M}(D)$  de grado  $2n - 2$ .

*Demostración de la Afirmación:* Supongamos por reducción al absurdo que el grado máximo  $d_0$  de las funciones en  $\mathcal{M}(D)$  es menor que  $2n - 2$ . En este caso existiría un divisor  $D'$  de grado  $d_0$  tal que  $D \geq D'$  y  $\mathcal{M}(D') = \mathcal{M}(D)$ , donde  $\mathcal{M}(D')$  se define análogamente a  $\mathcal{M}(D)$ . Dado  $Q \in \mathfrak{S}(v)$  tal que  $D/D' \geq Q$ , entonces,  $\mathcal{M}(D') \subset \mathcal{M}(D/Q) \subset \mathcal{M}(D)$ .

Por tanto,  $\mathcal{M}(D') = \mathcal{M}(D/Q) = \mathcal{M}(D)$  y en consecuencia  $\mathcal{M}(D/Q)$  tiene dimensión  $n$ . De nuevo gracias al Teorema de Riemann-Roch deducimos que el espacio vectorial complejo  $\mathcal{H}$  de 1-formas holomorfas  $\omega'$  verificando  $(\omega') \geq D/Q$  tiene dimensión 2. Pero entonces, si  $\omega' \in \mathcal{H}$  es linealmente independiente con  $\omega$ ,  $\omega/\omega'$  representaría una función meromorfa de grado 1 sobre  $\mathfrak{S}(v)$ , lo que es imposible.  $\diamond$

Por tanto podemos considerar  $f \in \mathcal{M}(D)$  con  $\deg f = 2n - 2$ . De esta forma el divisor polar de  $f$  es  $D$ . Puesto que  $J_v(D) = D$ , podemos encontrar  $\lambda$  y  $\mu \in \mathbb{R}$  tales que  $f_0 := \lambda(f + \overline{f \circ J_v}) + i\mu(f - \overline{f \circ J_v})$  tenga el mismo divisor polar que  $f$  y además se verifique que  $f_0 \circ J_v = \overline{f_0}$ . Como ninguno de los polos de  $f_0$  está contenida en  $\partial\Omega(v)$ ,  $f_0|_{\partial\Omega(v)}$  está acotada. Por lo tanto, existe un número real  $r$  suficientemente grande para el que  $f_0 + r$  tiene sólo ceros simples, y ninguno de ellos está contenido en  $\partial\Omega(v)$ . Por tanto, la 1-forma  $\omega_0 := (f_0 + r)\omega$  verifica la propiedad deseada.  $\square$

Los lemas A.IV y A.V nos permitirán finalmente demostrar la dependencia diferenciable de los datos de Weierstrass.

#### DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 4.11

Consideremos  $x_0 = (v_0, D_0) \in \mathcal{S}_n$ . Como consecuencia del Teorema 4.7 existe una bola abierta  $V(\epsilon)$  en  $\mathcal{T}_n$  centrada en  $v_0$  de radio  $\epsilon > 0$  y un difeomorfismo local

$$V(\epsilon) \rightarrow \mathcal{S}_n,$$

$$v \mapsto (v, D(v)),$$

con  $D(v_0) = D_0$ . Por brevedad, denotaremos  $x(v) := (v, D(v))$ , para cada  $v \in V(\epsilon)$ .

Por lo tanto, la aplicación  $V(\epsilon) \rightarrow \mathfrak{Div}_{n+1}$  dada por  $v \rightarrow (v, \infty \cdot D(v))$  es diferenciable, con lo que el Lemma A.IV permite deducir que la aplicación

$$V(\epsilon) \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad v \mapsto \tau_v := \tau_{\infty \cdot D(v)}(v),$$

es diferenciable con regularidad de orden 1.

Consideremos una deformación diferenciable de  $\mathfrak{S}(v_0)$ ,  $\{F_v : \mathfrak{S}(v_0) \rightarrow \mathfrak{S}(v) : v \in V(\epsilon)\}$ . Sea  $B(v_0) = \{a_1(v_0), \dots, a_n(v_0), b_1(v_0), \dots, b_n(v_0)\}$  la base canónica de homología de  $\mathfrak{S}(v_0)$  utilizada para la definición de  $\mathcal{J}(v_0)$ . En lo que sigue, consideraremos representantes  $a_j(v_0), b_j(v_0)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , de estas clases de homología tales que  $\mathfrak{S}(v_0) - \cup_{j=1}^n (a_j(v_0) \cup b_j(v_0))$  sea simplemente conexo y contenga a los puntos del divisor  $\infty \cdot D_0$ . Así, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, las curvas  $a_j(v) := F_v(a_j(v_0))$ ,  $b_j(v) := F_v(b_j(v_0))$  no pasan por los puntos de  $\infty \cdot D(v)$ ,  $v \in V(\epsilon)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

A partir de las condiciones dadas por (4.10), el Teorema de Abel nos da la siguiente expresión para  $g_{x(v)}$ :

$$g_{x(v)}(z) = \text{Exp}\left(\int_1^z (\tau_v + \sum_{j=1}^n m_j(v) \eta_j(v))\right),$$

para  $z \in \mathfrak{S}(v) - \cup_{j=1}^n (a_j(v) \cup b_j(v))$ . En esta expresión el camino de integración está contenido en  $(\mathfrak{S}(v) - \cup_{j=1}^n (a_j(v) \cup b_j(v))) \cup \{1\}$ , y  $m_j(v) \in \mathbb{Z}$  son los enteros determinados por la ecuación

$$\widetilde{\varphi}_v(\infty \cdot D(v)) - \widetilde{\varphi}_v(J_v(\infty) \cdot J_v(D(v))) = \sum_{j=1}^n m_j(v) \pi^j(v),$$

donde  $\widetilde{\varphi}_v$  es el levantamiento de  $\varphi_v$  en  $\mathfrak{S}(v) - \cup_{j=1}^n (a_j(v) \cup b_j(v))$  que se anula 1.

Puesto que  $m_j(v)$  depende de forma continua de  $v$ , entonces  $m_j(v) = m_j \in \mathbb{Z}$  y por tanto  $g_x = g_{x(v)}$  depende de forma diferenciable de  $v$  con regularidad de orden 2.

Ahora probaremos el resultado análogo para la aplicación  $\mathcal{V}(\epsilon) \rightarrow \mathcal{H}_n$ , dada por  $v \rightarrow \phi_3(x(v))$ .

Consideremos la 1-forma holomorfa  $\omega_0$  en  $\mathfrak{S}(v_0)$  dada en el Lema A.V, y sea

$$\nu(v_0) := \omega_0 = \sum_{j=1}^n \lambda_j \eta_j(v_0),$$

donde  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ . También definiremos

$$\nu(v) := \sum_{j=1}^n \lambda_j \eta_j(v).$$

Como consecuencia del Lema A.IV, la aplicación  $v \mapsto \nu(v)$  es diferenciable con regularidad de orden 1. Por tanto basta demostrar que

$$v \in V(\epsilon) \mapsto \frac{\phi_3(x(v))}{\nu(v)} \in \mathcal{C}_n$$

es diferenciable con regularidad de orden 2.

Por los teoremas de Hurwitz y de la función implícita, para  $\epsilon$  suficientemente pequeño  $\nu(v)$  también cumple la tesis del Lema A.V. Además, como ya explicamos durante la demostración de este lema, la aplicación

$$V(\epsilon) \rightarrow \mathfrak{Div}_{2n-2}, \quad v \mapsto (v, [\nu(v)])$$

es (al menos) de clase  $\mathcal{C}^1$  (aunque de hecho puede ser demostrado que es  $\mathcal{C}^\infty$ ). Por lo tanto, si escribimos

$$[\nu(v)] = E(v) \cdot J_v(E(v)),$$

la aplicación  $V(\epsilon) \rightarrow \mathfrak{Div}_{n-1}$ , dada por  $v \mapsto E(v)$  es también diferenciable y por lo tanto, lo mismo es cierto para  $V(\epsilon) \rightarrow \mathfrak{Div}_{n,n}$ ,  $v \mapsto (v, \infty \cdot E(v), D(v))$ .

Finalmente, el Lema A.IV nos permite deducir que

$$V(\epsilon) \rightarrow \mathcal{H}_n, \quad v \mapsto \kappa_v := \kappa_{\infty \cdot E(v), D(v)}(v)$$

es diferenciable con regularidad de orden 1. Razonando como antes, concluimos que

$$f_{x(v)}(z) = \text{Exp}\left(\int_1^z (\kappa_v + \sum_{j=1}^n n_j \eta_j(v))\right),$$



es una función meromorfa bien definida sobre  $\mathfrak{S}(v)$ , para ciertos enteros  $n_j$  que no dependen de  $v$  y la aplicación  $\mathcal{V}(\epsilon) \rightarrow \mathcal{C}_n, v \mapsto f_{x(v)}$ , es diferenciable con regularidad de orden 2. El divisor asociado a  $f_{x(v)}$  está dado por

$$[f_{x(v)}] = \frac{D(v) \cdot J_v(D(v))}{\infty \cdot E(v) \cdot J_v(\infty) \cdot J_v(E(v))}.$$

Por tanto, si escribimos  $\nu(v) = h_v(z) \frac{dz}{z}$  en  $U(v)$ , deducimos que  $\frac{\phi_3(x(v))}{\nu(v)} = \frac{1}{h_v(1)} f_{x(v)}$ , y como consecuencia  $v \mapsto \phi_3(x(v))$  es diferenciable con regularidad de orden 1. Esto termina la demostración de la Proposición.

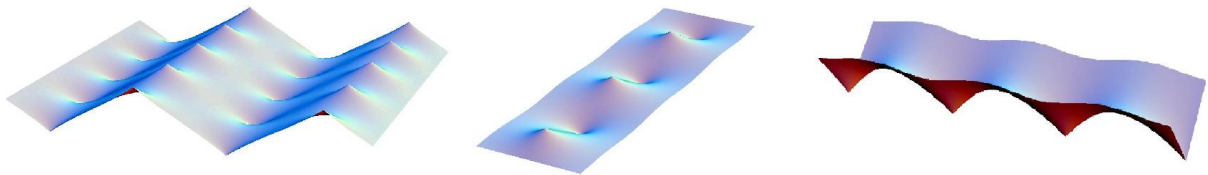


## PARTE II

---

# SUPERFICIES MAXIMALES PERIÓDICAS Y COMPLETAS EN $\mathbb{L}^3$

---





# SUPERFICIES PERIÓDICAS DE TIPO FINITO

---

# 5

Por definición, diremos que una inmersión isométrica  $\psi : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{L}^3$  es *periódica* cuando  $\psi(\mathcal{S}')$  es invariante por un grupo de isometrías  $G$ , discreto e infinito, que actúa de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{L}^3$ . Estas isometrías inducen a su vez un grupo de isometrías en  $\mathcal{S}'$  que continuaremos llamando  $G$ . También diremos que la superficie es *G*-*periódica* cuando queramos hacer referencia explícita al grupo de isometrías que dejan invariante la superficie.

Obviamente una superficie periódica nunca podrá ser de tipo finito (el conjunto de sus singularidades ha de ser invariante por el grupo de isometrías) con lo cual estas superficies *escapan* al estudio realizado en los capítulos anteriores. Sin embargo, podemos considerar sólo la pieza fundamental de la superficie, es decir, el menor subconjunto de  $\mathcal{S}'$  que mediante la acción de las isometrías de  $G$  nos recupera la superficie original. Esto nos lleva de forma natural a ver las superficies periódicas como superficies en espacios cocientes de  $\mathbb{L}^3$  donde sí es posible que el número de singularidades sea finito. En este capítulo detallaremos la equivalencia entre ambos puntos de vista y extenderemos algunas de las definiciones y resultados vistos en el Capítulo 3.

EQUIVALENCIA ENTRE SUPERFICIES PERIÓDICAS Y SUPERFICIES EN 3-VARIEDADES DE LORENTZ COMPLETAS Y LLANAS.

Si  $\mathcal{S}'$  es una superficie  $G$ -periódica en  $\mathbb{L}^3$  podemos considerar el cociente bajo dicha acción  $\mathcal{S} := \mathcal{S}'/G$ , que es una superficie inmersa de forma natural en la 3-variedad completa y llana  $\mathbb{L}^3/G$ .

Recíprocamente, supongamos ahora que tenemos una superficie  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{N}$  inmersa en una 3-variedad de Lorentz completa y llana. Es conocido que estas variedades son isométricas a los cocientes de la forma  $\mathbb{L}^3/G$ , donde  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  es un grupo discreto e infinito que actúa de forma propia y discontinua (ver por ejemplo [Wolf]).

Por otro lado, la aplicación  $\psi$  induce un homomorfismo entre los grupos fundamentales,  $\psi_* : \Pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \Pi_1(\mathcal{N}) = \Pi_1(\mathbb{L}^3/G) = G$ , cuyo núcleo denotaremos por  $H_0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el homomorfismo  $\psi_*$  es sobreyectivo, ya que en otro caso simplemente reemplazamos la inmersión de  $\mathcal{S}$  en  $\mathbb{L}^3/G$  por el correspondiente levantamiento en el cociente  $\mathbb{L}^3/G_0$ , donde  $G_0$  es la imagen de  $\psi_*$ .

**Observación 5.1** Como consecuencia de lo explicado anteriormente, a partir de ahora supondremos que el homomorfismo  $\psi_*$  inducido entre los grupos fundamentales es sobreyectivo.

Usando teoría elemental de recubridores podemos definir de forma natural una inmersión  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , siendo  $\widehat{\mathcal{S}}$  el recubridor de  $\mathcal{S}$  cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $H_0$ <sup>1</sup>, de forma que el siguiente diagrama sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} \widehat{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\widehat{\psi}} & \mathbb{L}^3 & & \\ \text{proy} \downarrow & & \downarrow & \text{proy} & \\ \mathcal{S} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{L}^3/G & & \end{array}$$

Además esta nueva inmersión (única salvo condiciones iniciales) es periódica, invariante precisamente por las isometrías del grupo  $G$  (debido a que el homomorfismo  $\psi_*$  es sobreyectivo).

**Definición 5.1 (Levantamiento)** Dada una inmersión  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  de una superficie en una variedad cociente de  $\mathbb{L}^3$ , llamaremos a la inmersión  $G$ -periódica  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  construida anteriormente el levantamiento de  $\psi$ .

<sup>1</sup>i.e.,  $\widehat{\mathcal{S}} = \widetilde{\mathcal{S}}/H_0$ , siendo  $\widetilde{\mathcal{S}}$  el recubridor universal de  $\mathcal{S}$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  A lo largo de esta memoria utilizaremos siempre la notación  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  para denotar el levantamiento de la inmersión  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Obsérvese que  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  es una superficie espacial (resp. maximal) si, y solamente si, su levantamiento  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es también espacial (resp. maximal). De igual forma,  $\psi$  tiene una singularidad en  $q \in \mathcal{S}$  si y sólo si  $\widehat{\psi}$  tiene singularidades en  $\pi_1^{-1}(q) \in \widehat{\mathcal{S}}$ , siendo  $\pi_1 : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  la aplicación recubridora.

Esto se debe a que la aplicación recubridora es isometría local cuando consideramos en  $\mathcal{S}$  y  $\widehat{\mathcal{S}}$  las métricas pullback inducidas vía  $\psi$  y  $\widehat{\psi}$  respectivamente.

Como ya explicamos al principio de este capítulo, va a ser más útil para nuestro estudio el considerar las superficies periódicas como superficies en espacios cocientes de  $\mathbb{L}^3$ , por ello precisamos de extender las principales definiciones que dimos para superficies en  $\mathbb{L}^3$  al contexto de las superficies en  $\mathbb{L}^3/G$ .

**Definición 5.2 (Tipos de singularidades)** Diremos que una singularidad de una superficie maximal en  $\mathbb{L}^3/G$  es espacial (resp. luminosa, cónica) si las correspondientes singularidades en el levantamiento de la superficie a  $\mathbb{L}^3$  son espaciales (resp. luminosas, cónicas).

**Definición 5.3 (Superficie entera en  $\mathbb{L}^3/G$ )** Diremos que una superficie espacial (posiblemente con singularidades aisladas)  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  es entera si su levantamiento a  $\mathbb{L}^3$ ,  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$ , es un multigrafo entero.

Teniendo en cuenta que una superficie espacial periódica es propia (resp. completa) si y sólo si lo es la superficie cociente asociada, la Proposición 1.3 puede ser fácilmente reinterpretada para superficies en cocientes de  $\mathbb{L}^3$  de la siguiente forma:

**Proposición 5.1** Una superficie espacial (posiblemente con singularidades aisladas) y propia en una 3-variedad cociente de  $\mathbb{L}^3$  es entera. Lo mismo ocurre si la superficie es completa.

Además, si la superficie es entera, entonces es embebida si y sólo si todas sus singularidades son embebidas. En este caso su levantamiento a  $\mathbb{L}^3$  es un grafo sobre cualquier plano espacial.

**Observación 5.2** Una superficie en un espacio cociente  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  se dice incompresible si el homomorfismo inducido entre los grupos fundamentales,  $\psi_* : \Pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{L}^3$ , es inyectivo.

En particular, si  $\psi$  es una superficie maximal entera y embebida, su levantamiento es un grafo en  $\mathbb{L}^3$  y por tanto simplemente conexo. Puesto que el grupo fundamental de la superficie levantada es justamente el núcleo de  $\psi_*$ , deducimos que estas superficies son siempre incompresibles.

Como explicamos al comienzo de esta sección, centraremos nuestro estudio sobre superficies periódicas en aquellas que tienen un número finito de singularidades en su pieza fundamental, o lo que es lo mismo, aquellas cuyo cociente tiene un número finito de singularidades.

**Definición 5.4 (Superficie de tipo finito)** Diremos que una superficie maximal (posiblemente con singularidades aisladas)  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  es de tipo finito si verifica las siguientes propiedades:

- $\mathcal{S}$  tiene topología finita (es difeomorfa al interior de una superficie compacta con borde),
- el número de singularidades es finito,
- $\psi$  es entera y existe una geodésica temporal inextensible que corta a  $\psi(\mathcal{S})$  un número finito de veces.

De igual forma, diremos que una superficie maximal  $G$ -periódica en  $\mathbb{L}^3$  es de tipo finito si el correspondiente cociente en  $\mathbb{L}^3/G$  es de tipo finito.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  La última de las condiciones de la definición anterior es equivalente a la siguiente:

- $\psi$  es una superficie entera y su levantamiento tiene un número finito de hojas.

A partir de la definición de soporte conforme (Definición 1.2) es claro que el soporte conforme de una superficie de tipo finito en  $\mathbb{L}^3/G$  es biholomorfo a una superficie de Riemann compacta con borde (el borde consiste de curvas de Jordan analíticas disjuntas dos a dos que se corresponden con las singularidades luminosas) menos una cantidad finita de puntos o discos cerrados. Para las superficies en  $\mathbb{L}^3$  vimos que sólo podía darse el primer caso. En el caso periódico ocurre lo mismo (Teorema 6.3), aunque la explicación es algo más complicada y sólo podremos llegar a ella tras establecer algunos resultados previos.



# 6

## LAS POSIBLES ISOMETRÍAS

---

En este capítulo nuestro objetivo será describir los grupos discretos  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  actuando de forma propia y discontinua que pueden ser grupos de isometrías de una superficie maximal periódica de tipo finito (Definición 5.4). Dicho de otra forma, caracterizaremos las 3-variedades de Lorentz completas y llanas (es decir, los cocientes de  $\mathbb{L}^3$ ) que admiten superficies maximales de tipo finito.

La primera de las restricciones que nos encontramos para el grupo  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  es que la correspondiente acción sobre  $\mathbb{L}^3$  sea propia y discontinua. Obviamente un grupo  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  que actúe de forma propia y discontinua no puede contener isometrías con puntos fijos. Es decir, todos los elementos de  $G$  han de tener parte traslacional. Pero esta no es la única restricción que pesa sobre el grupo  $G$ . Como veremos a lo largo de este capítulo, el hecho de que la variedad cociente  $\mathbb{L}^3/G$  contenga una superficie maximal de tipo finito fuerza a que  $G$  contenga exclusivamente de traslaciones espaciales y cierto tipo de simetrías deslizantes (ver Teorema 6.10 para una descripción más detallada).

La prueba de este resultado ocupará el presente capítulo, que está organizado como sigue: en la Sección 6.1 demostraremos que  $G$  no puede contener movimientos helicoidales o traslaciones de eje luminoso o espacial. Una vez descartadas estas isometrías

estaremos en condiciones de probar que las superficies maximales de tipo finito en  $\mathbb{L}^3/G$  tienen tipo conforme finito (Sección 6.2). Esto nos ayudará a estudiar el caso hiperbólico (Sección 6.3). Finalmente en la Sección 6.4 enunciaremos y demostraremos el teorema final de clasificación de los grupos  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  tales que existe una superficie  $G$ -periódica de tipo finito o, equivalentemente, tales que  $\mathbb{L}^3/G$  admite una superficie maximal de tipo finito (Teorema 6.10). También en esta sección demostraremos que dichas superficies son completas (Proposición 6.8).

## 6.1. DESCARTANDO ISOMETRÍAS ELÍPTICAS Y PARABÓLICAS

En esta sección demostraremos que  $G$  no puede contener movimientos helicoidales elípticos o parabólicos, así como traslaciones de vector no espacial. Esto requiere un poco de notación previa, que será utilizada varias veces a lo largo de este capítulo, y que exponemos a continuación.

Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  un multigrafo entero finito (ver Definición 1.3). Para cada vector  $v \in \mathbb{H}_+^2$  consideremos  $\Pi_v$  un plano afín de  $\mathbb{L}^3$  ortogonal a  $v$ . Definamos la siguiente función:

$$u_v^+ : \Pi_v \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_v^+(p) = \text{Max}\{t \in \mathbb{R} : p + tv \in \psi(\mathcal{S})\}.$$

Llamaremos  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S})) \subset \psi(\mathcal{S})$  el grafo entero sobre  $\Pi_v$  definido a partir de  $u_v^+$  (ver Figura 6.1),

$$\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S})) = \{p + u_v^+(p)v : p \in \Pi_v\}.$$

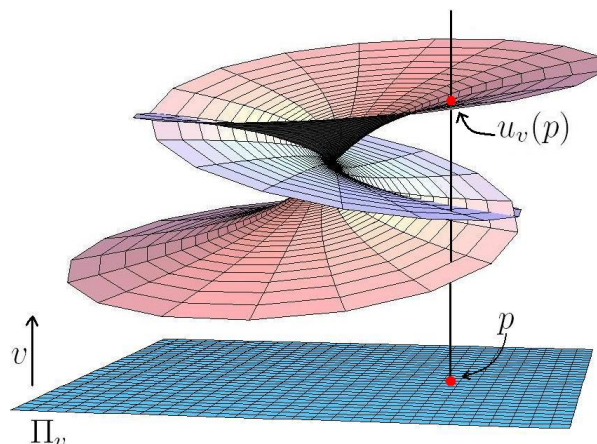
Nótese que la definición del grafo  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$  no depende del plano afín  $\Pi_v$  elegido.

**Lema 6.1** *Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  un multigrafo entero finito. Entonces el grafo  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$  construido anteriormente verifica que, para cada  $p \in \mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$ ,*

$$\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S})) \setminus \{p\} \subset \text{Ext}(\mathcal{C}_p), \tag{6.1}$$

donde  $\text{Ext}(\mathcal{C}_p)$  denota el exterior del cono de luz centrado en  $p$  (ver Sección 1.1).

Como consecuencia,  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$  es independiente de la elección del vector  $v \in \mathbb{H}_+^2$ . Por lo tanto esa superficie, que a partir de ahora denotaremos por  $\mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))$ , es un grafo entero sobre cualquier plano espacial. Además, si  $\psi$  es invariante por una isometría ortocrona (ver Sección 1.1) entonces el grafo  $\mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))$  es también invariante por dicha isometría.

Figura 6.1: El grafo  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$ .

*Demostración:* La primera de las afirmaciones del lema es equivalente a demostrar que dados  $p, q \in \mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))_v$  distintos, el vector que los une es un vector espacial. Como  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$  es un grafo sobre el plano  $\Pi_v$  perpendicular a  $v$  podemos considerar una curva  $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))_v$  uniendo  $p$  y  $q$  cuya proyección a dicho plano sea un segmento.

Después de un cambio de sistema de referencia, podemos suponer que  $v = (0, 0, 1)$ , y que el segmento en el que se proyecta  $\gamma$  está contenido en el eje  $x_1$ . Así  $\gamma$  se escribirá como  $\gamma(t) = (t, 0, u(t))$ , para cierta función Lipschitziana  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Puesto que  $\psi$  es una superficie espacial con singularidades aisladas tenemos que  $\|\gamma'(t)\|^2 = 1 - u'(t)^2 \geq 0$ ,  $t \in I$ , donde la igualdad se da a lo más en número finito de puntos. Integrando esta condición obtenemos que  $|u(1) - u(0)| < 1$ , lo que nos garantiza que el vector que une  $p = \gamma(0)$  con  $q = \gamma(1)$  es espacial.

Para la segunda parte del lema, consideremos otro vector  $w \in \mathbb{H}_+^2$  y sea  $p \in \mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$ . Veamos que también  $p \in \mathcal{G}_w^+(\psi(\mathcal{S}))$ . Para ello consideremos la recta  $r_w$  (resp.  $r_v$ ) pasando por  $p$  con dirección  $w$  (resp.  $v$ ). Por cómo hemos definido  $\mathcal{G}_w^+(\psi(\mathcal{S}))$ ,  $p$  pertenecerá a este grafo si y sólo si,  $p$  es el punto *más alto* de  $\psi(\mathcal{S}) \cap r_w$  (es decir, aquel con mayor componente en  $w$ ). Supongamos por reducción al absurdo que no es así. En este caso existiría  $q \in \psi(\mathcal{S}) \cap r_w$  que además estaría en la región interior del semi-cono  $\mathcal{C}_p \cap \{x_3 \geq x_3(p)\}$ . Pero esto implica que hay un punto en  $\mathcal{G}_w^+(\psi(\mathcal{S})) \cap r_v$  que está a mayor altura que  $p$ , lo que no es posible ya que  $p \in \mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))$ . Por tanto  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S})) \subset \mathcal{G}_w^+(\psi(\mathcal{S}))$ , e intercambiando los papeles de  $v$  y  $w$  obtenemos  $\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S})) = \mathcal{G}_w^+(\psi(\mathcal{S}))$ .

Finalmente, la última parte del lema es trivial si tenemos en cuenta que si  $R \in \text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^3)$ , para cualquier  $v \in \mathbb{H}_+^2$  también  $\vec{R}(v) \in \mathbb{H}_+^2$ , siendo  $\vec{R}$  la parte lineal de  $R$ . Por tanto, si  $R$  deja invariante el multigrafo  $\psi$  es inmediato comprobar que

$$R(\mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))) = R(\mathcal{G}_v^+(\psi(\mathcal{S}))) = \mathcal{G}_{\vec{R}(v)}^+(R(\psi(\mathcal{S}))) = \mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S})).$$

□

La construcción del grafo  $\mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))$  nos va a permitir reducir la demostración de la siguiente proposición al caso en que la superficie es un grafo entero verificando la propiedad dada por la Ecuación (6.1).

**Proposición 6.2** *No existen multigrafos espaciales enteros con un número finito de hojas invariantes por movimientos helicoidales elípticos o parabólicos, así como traslaciones de vector no espacial.*

*Demostración:* Supongamos por reducción al absurdo que  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es una superficie espacial entera con un número finito de hojas invariante por una isometría  $R \in \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  como en el enunciado. Obsérvese que  $R$  es siempre ortocrona, con lo que el grafo entero  $\mathcal{G} := \mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))$  construido en el Lema 6.1 es también invariante por  $R$ .

La Ecuación (6.1) nos dice que el vector que une dos puntos cualesquiera de  $\mathcal{G}$  ha de ser espacial, con lo que si  $R$  fuese una traslación su vector de traslación sería espacial.

El caso en que  $R$  es un movimiento helicoidal elíptico es imposible ya que  $\mathcal{G}$  es un grafo sobre el plano (espacial) perpendicular al eje de la isometría.

Por último, supongamos  $R$  es un movimiento helicoidal de eje luminoso. Salvo isometría supondremos que el eje de  $\vec{R}$  es  $\ell = \{(0, s, s) : s \in \mathbb{R}\}$  y que el vector de traslación es  $v = (0, 0, \lambda)$ ,  $\lambda \neq 0$  (ver Observación 1.1). En el caso en que  $\mathcal{G} \cap \ell \neq \emptyset$  llegamos fácilmente a contradicción, ya que si  $p$  es un punto en  $\mathcal{G} \cap \ell$ , tanto  $p$  como  $R(p) = p + v$  serían dos puntos del grafo  $\mathcal{G}$  que están en la misma recta vertical, lo cual es imposible. Supongamos por tanto que  $\mathcal{G} \cap \ell = \emptyset$ .

**Afirmación:** *Si  $\mathcal{G}$  no corta a una recta luminosa  $\ell$  entonces tampoco corta al plano perpendicular (en el sentido Lorentziano) a dicha recta,  $\Pi_\ell$ .*

*Demostración de la Afirmación:* Supongamos por ejemplo que  $\ell$  está por encima de  $\mathcal{G}$ . Sea  $q \in \ell$  y  $p_q$  el punto de  $\mathcal{G}$  que está en la misma recta vertical que  $q$ . En virtud de la Ecuación (6.1)  $\mathcal{G}$  no corta a la componente conexa interior del cono  $\mathcal{C}_{p_q}$  que apunta hacia el futuro, que denotaremos por  $\text{Int}^+(\mathcal{C}_{p_q})$ . Puesto

que  $q$  está por encima de  $p$ , también  $\mathcal{G} \cap \text{Int}^+(\mathcal{C}_q) = \emptyset$ . Por tanto  $\mathcal{G}$  omite el conjunto  $\cup_{q \in \ell} \text{Int}^+(\mathcal{C}_q)$  que coincide justamente con uno de los semiespacios determinandos por el plano  $\Pi_\ell$ .  $\diamond$

Por tanto  $\mathcal{G}$  es disjunta del plano  $\Pi_\ell = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = x_3\}$ . Podemos suponer que el grafo se queda por debajo del plano, es decir  $\mathcal{G} \subset H_0 = \{x_2 \geq x_3\}$ . Pero entonces, aplicando sucesivamente la isometría  $R$  obtendríamos que, para cualquier  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{G} = R^n(\mathcal{G}) \subset R^n(H_0) = \{x_2 \geq x_3 - n\lambda\},$$

lo cual es imposible.  $\square$

## 6.2. ESTRUCTURA CONFORME DE UNA SUPERFICIE PERIÓDICA DE TIPO FINITO

En esta sección estudiaremos la estructura del soporte conforme de una superficie de tipo finito en  $\mathbb{L}^3/G$ . Recordemos que el soporte conforme  $\mathcal{S}_0$  de una superficie maximal  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  con singularidades aisladas es una superficie de Riemann con borde, donde el borde consta de curvas de Jordan analíticas disjuntas dos a dos, que se corresponden con las singularidades luminosas.

Para el caso de superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  vimos en el Corolario 3.2 que el soporte conforme era bihomeomorfo a una superficie de Riemann compacta (con borde) menos una cantidad finita de puntos (los *finales* de la superficie). En ese caso la demostración era una aplicación más o menos directa de los Teoremas de Huber [Hub] y Osserman [Oss]. Ahora la demostración es un poco más compleja, y pasa por conocer con detalle el comportamiento del multigrafo en el infinito.

**Teorema 6.3** *El soporte conforme de una superficie maximal de tipo finito en  $\mathbb{L}^3/G$ , con  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$ , es bihomeomorfo a una superficie de Riemann compacta (con borde) menos una cantidad finita de puntos, a los que llamaremos los finales de la superficie.*

*Demostración:* Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  una superficie de tipo finito con  $G$  como en el enunciado. Pasando a un recubridor de dos hojas si es necesario podemos suponer que  $G \subset \text{Iso}_+(\mathbb{L}^3)$ . Denotemos por  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  al correspondiente levantamiento  $G$ -periódico. Recordemos que  $\widehat{\mathcal{S}}$  se definía como el recubridor de  $\mathcal{S}$  cuyo grupo fundamental  $H_0$

es isomorfo al núcleo del homomorfismo  $\psi_* : \Pi(\mathcal{S}) \rightarrow G$ . Denotaremos por  $\mathfrak{p} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$  a la aplicación recubridora.

Puesto que la superficie tiene topología finita, su soporte conforme  $\mathcal{S}_0$  es biholomorfo a una superficie de Riemann compacta con borde menos un número finito de puntos o discos cerrados. Veamos que el segundo caso no es posible.

Para ello consideremos un entorno anular  $A \subset \mathcal{S}$  alrededor de uno de esos discos/puntos, lo suficientemente pequeño para que no contenga singularidades. Es un hecho conocido de la teoría de superficies de Riemann que para ver que  $A$  tiene el tipo conforme del disco punteado (tipo parabólico) basta encontrar una función  $H : A \rightarrow \mathbb{R}$  armónica, propia y acotada superior o inferiormente (ver por ejemplo [Ahl]). Para definir dicha función necesitamos primero profundizar un poco en el comportamiento de la superficie, y de su levantamiento, alrededor del final.

La primera observación es que el levantamiento del anillo  $A \subset \mathcal{S}$  a  $\widehat{\mathcal{S}}$  ha de ser simplemente conexo. En efecto, supongamos por reducción al absurdo que no es así. En ese caso  $A$  se levantaría a una cantidad infinita (ya que el grupo  $G$  lo es) de finales anulares en  $\widehat{\mathcal{S}}$ . Sea  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  un plano espacial y  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \Pi$  la correspondiente proyección ortogonal. Al ser  $\pi \circ \widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \Pi$  un recubridor ramificado con un número finito de hojas (y en particular una aplicación propia) es fácil ver, achicando  $A$  si es necesario, que la restricción  $\pi \circ \widehat{\psi}|_{\widehat{A}} : \widehat{A} \rightarrow A$  a cada componente conexa  $\widehat{A}$  de  $\mathfrak{p}^{-1}(A)$  es un recubridor finito. Pero esto contradice que el número de hojas de  $\pi \circ \widehat{\psi}$  sea finito ya que, como hemos razonado antes,  $\mathfrak{p}^{-1}(A)$  tiene infinitas componentes conexas.

Por tanto,  $A$  se levanta a una cantidad finita de dominios simplemente conexos en  $\widehat{\mathcal{S}}$ . Sea  $\widehat{A} \subset \widehat{\mathcal{S}}$  uno de esos dominios. Sea  $R \in G$  la isometría tal que

$$\widehat{A}/\langle R \rangle \cong A.$$

Puesto que  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)_+$  y no puede contener movimientos helicoidales de tipo elíptico o parabólico (Proposición 6.2),  $G$  consiste de traslaciones espaciales y movimientos helicoidales hiperbólicos (es decir, con eje espacial). En consecuencia, salvo un cambio de sistema de referencia de  $\mathbb{L}^3$  podemos suponer que  $R$  fija la dirección  $x_1$ .

Consideremos  $\psi_0$  y  $\widehat{\psi}_0$  reparametrizaciones conformes de las correspondientes inmersiones maximales en  $\mathbb{L}^3/G$  y en  $\mathbb{L}^3$  respectivamente, y denotemos por  $\widehat{\psi}_0 = (X_1, X_2, X_3)$  a las funciones coordenadas de la inmersión  $\widehat{\psi}_0$ .

Puesto que  $\widehat{\psi}_0$  es un multigrafo existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\widehat{\psi}_0(\widehat{A}) \cap \{x_1 = c\} \neq \emptyset$ , y por tanto el siguiente conjunto es no vacío:

$$E = \mathfrak{p}(\widehat{\psi}_0^{-1}(\{x_1 = c\}) \cap \widehat{A}) = \mathfrak{p}(X_1^{-1}(c) \cap \widehat{A}) \subset A.$$

**Afirmación I:** *E contiene una curva divergente.*

*Demostración de la Afirmación I.* Puesto que la superficie es espacial,  $E$  consistirá de una familia de curvas analíticas sin puntos de corte. Esto se debe a que  $R$  actúa sobre el eje  $x_1$  mediante traslaciones, con lo que la 1-forma  $\phi_1$  de la representación de Weierstrass de  $\widehat{\psi}_0$  es  $R$ -invariante, y por tanto se induce a una 1-forma holomorfa en  $A$ . Un punto de corte en las curvas de  $E$  representaría un cero de esta 1-forma, y puesto que  $|g| \neq 1$  en  $\widehat{A}$ , esto provocaría una singularidad espacial en  $A$ . Pero esto es imposible ya que desde el principio escogimos  $A$  de forma que no contuviese puntos singulares. Por lo tanto  $E$  consiste de curvas analíticas disjuntas dos a dos.

Supongamos por reducción al absurdo que todas las curvas en  $E$  son compactas. Como  $X_1$  es armónica ninguna de estas curvas puede ser una curva interior de  $A$  homotópicamente trivial (ver curva  $\gamma_1$  en Figura 6.2), ya que el correspondiente levantamiento a  $\widehat{A}$  sería también una curva cerrada bordeando un dominio compacto, lo que contradice el principio del máximo para  $X_1$ .

Por otro lado, puesto que  $\{x_1 = c\} \cap R(\{x_1 = c\}) = \emptyset$ , las curvas en  $E$  no pueden atrapar homología (ver curva  $\gamma_2$  en Figura 6.2), ya que en ese caso la imagen vía  $\widehat{\psi}_0$  del correspondiente levantamiento a  $A$  sería una curva  $R$ -invariante contenida en el plano  $\{x_1 = c\}$ , lo cual no es posible.

Por lo tanto, la única posibilidad es que todas las curvas de  $E$  sean curvas homotópicamente triviales y conteniendo parte de  $\partial(A)$  (ver curva  $\gamma_3$  en Figura 6.2). Pero entonces  $\widehat{\psi}_0(\widehat{A})$  estaría contenido, fuera de un compacto, en uno de los dos semiespacios determinados por el plano  $\{x_1 = c\}$ . Esto contradice que  $A$  sea invariante por  $R$ , con lo que se demuestra la Afirmación.  $\diamond$

Sea  $\gamma \subset \widehat{A}$  una curva tal que  $\mathfrak{p}(\gamma)$  es una curva divergente en  $E$ . Achicando  $A$  y  $\widehat{A}$  si es necesario podemos suponer que el punto inicial de  $\gamma$  está en  $\partial(\widehat{A})$ . Sea  $\Omega$  la pieza fundamental de  $\widehat{A}$  determinada por las curvas  $\gamma$  y  $R(\gamma)$ . Es decir,  $\Omega$  es la clausura de la componente conexa de  $\widehat{A} \cap \mathfrak{p}^{-1}(A \setminus \mathfrak{p}(\gamma))$  determinada por las curvas  $\gamma$  y  $R(\gamma)$  (ver Figura 6.3). Así  $\mathfrak{p}$  es inyectiva sobre el interior de  $\Omega$  y  $\mathfrak{p}(\Omega) = A$ .

Sea  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \{x_3 = 0\}$  la proyección ortogonal al plano horizontal y definamos  $h = \pi \circ \widehat{\psi}_0$ .

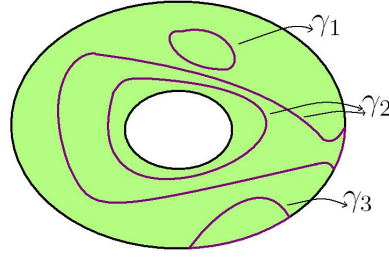


Figura 6.2: El final anular  $A$  y las posibles curvas de  $E$ .

**Afirmación II:** Después de achicar  $A$  (y por tanto también  $\widehat{A}$ ) convenientemente,  $\widehat{\psi}_0(\Omega)$  es un grafo sobre una semibanda  $W \subset \{x_3 = 0\}$  en la dirección del eje  $x_2$ . Como consecuencia,  $\Omega$  es relativamente parabólico con la estructura conforme inducida por  $\widehat{\psi}_0$ .

*Demostración de la Afirmación II:* Puesto que  $X_1$  es constante sobre las curvas  $\gamma$  y  $R(\gamma)$ ,  $h(\partial(\Omega))$  bordea eventualmente (es decir, fuera de un conjunto compacto) el borde de una semibanda  $W$  en la dirección del eje  $x_2$ . Achicando  $A$  (y por tanto  $\widehat{A}$ ) convenientemente, podemos suponer que  $h(\partial(\Omega)) = \partial(W)$ . Veamos que de hecho  $h(\Omega) = W$ .

Para ello basta notar que  $h$  es propia y abierta, con lo cual  $h(\Omega) \cap (\{x_3 = 0\} \setminus W)$  es abierto y cerrado en el conexo  $\{x_3 = 0\} \setminus W$  y por tanto, o bien  $h(\Omega) \cap (\{x_3 = 0\} \setminus W) = \emptyset$ , o bien  $h(\Omega) \cap (\{x_3 = 0\} \setminus W) = \{x_3 = 0\} \setminus W$ . Pero este último caso no es posible ya que si  $\{x_3 = 0\} \setminus W \subseteq h(\Omega)$ , entonces  $\{x_3 = 0\} \setminus (\pi \circ R^n(W)) \subseteq h(R^n(\Omega))$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .<sup>1</sup> Pero entonces para cualquier  $k \in \mathbb{N}$  tenemos

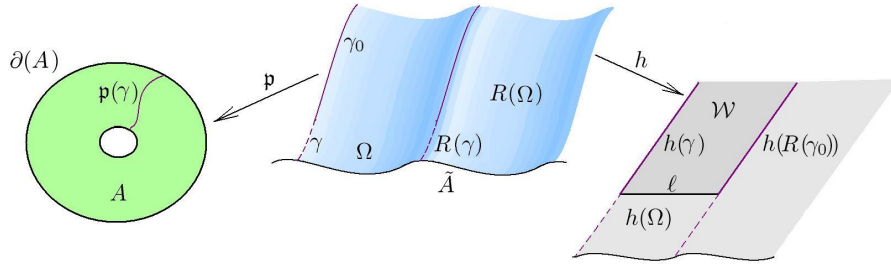
$$\emptyset \neq \{x_3 = 0\} \setminus \bigcup_{n=1}^k (\pi \circ R^n(W)) \subseteq \bigcap_{j=1}^k h(R^n(\Omega)),$$

lo que contradice que  $h$  tiene un número finito de hojas.

En consecuencia,  $h(\Omega) \cap (\{x_3 = 0\} \setminus W) = \emptyset$  y por tanto  $h(\Omega) = W$ . Es decir,  $h : \Omega \rightarrow W$  es un homeomorfismo local y propio, y por lo tanto un recubridor. Pero  $W$  es simplemente conexo, de lo que deducimos que  $h|_{\Omega}$  es

<sup>1</sup>recuérdese que estamos denotando con el mismo nombre tanto a las isometrías de  $\mathbb{L}^3$  que dejan invariante la superficie como a las isometrías que inducen sobre la superficie  $\widehat{S}$ .



Figura 6.3: El dominio  $\Omega$ 

uno a uno, y por lo tanto  $\widehat{\psi}_0(\Omega)$  es un grafo sobre  $W$  (en particular es  $\psi_0|_{\Omega}$  es un embebimiento).

Por último veamos que  $\Omega$  es relativamente parabólico. Para ello basta tener en cuenta que, puesto que  $\widehat{\psi}_0(\Omega)$  es un grafo sobre una semibanda en la dirección del eje  $x_2$ , la función segunda coordenada de  $\widehat{\psi}_0$ ,  $X_2$ , es una función armónica propia y acotada superior o inferiormente sobre  $\Omega$ , lo que termina la demostración de la Afirmación II.  $\diamond$

Ya estamos en condiciones de definir la función armónica que nos dará la parabolicidad del final anular  $A$ . Para ello consideremos la primera de las 1-formas de la representación de Weierstrass,  $\phi_1$ , y consideremos la aplicación holomorfa

$$F : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad F = \int \phi_1 = X_1 + iX_1^*,$$

donde  $X_1^*$  denota la armónica conjugada de  $X_1$ . Obsérvese que  $F$  está bien definida gracias a que  $\widehat{A}$  es simplemente conexo. Veamos que además  $F|_{\Omega}$  es inyectiva. Para esto basta comprobar que  $X_1^*$  es inyectiva sobre las curvas nodales de  $X_1$  en  $\Omega$ . De no ser así existiría un punto donde la derivada de  $F$  se anularía. Pero esto representaría un cero de  $\phi_1$  y por tanto una singularidad espacial en  $\widehat{A}$  lo cual es imposible. Por tanto  $F|_{\Omega}$  es inyectiva y como consecuencia  $F(\Omega) \subset \mathbb{C}$  es relativamente parabólico, de lo que se deduce que  $X_1^*|_{\Omega}$  es propia y acotada superior o inferiormente.

Por otro lado, puesto que la isometría  $R$  actúa sobre el eje  $x_1$  mediante traslaciones,  $F \circ R = F + w$  para cierto  $w \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} w \neq 0$ , y por lo tanto la función holomorfa

$$\widehat{H}_0 : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \widehat{H}_0 := e^{\frac{2\pi i F}{w}},$$

es  $R$ -invariante y puede ser inducida a una función holomorfa  $H_0 : A = \mathfrak{p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  de forma que  $H_0 \circ \mathfrak{p} = \widehat{H}_0$ . Además, como hemos visto antes,  $X_1^*$  es propia y acotada

superior o inferiormente, por lo que la misma propiedad es cierta para la aplicación armónica  $H = \log |H_0| : A \rightarrow \mathbb{R}$  (téngase en cuenta que  $\operatorname{Re} w \neq 0$ ). Esto prueba que  $A$  es de tipo parabólico (disco punteado) y acaba la demostración del teorema.  $\square$

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Obsérvese que el hecho de que cualquier isometría del grupo  $G$  deja fija una recta espacial de  $\mathbb{L}^3$  ha jugado un papel fundamental en esta demostración. Ése es el motivo de que este Teorema no haya sido establecido hasta no descartar las isometrías elípticas y parabólicas.

Además en el transcurso de la demostración hemos probado las siguientes propiedades:

**Corolario 6.4** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  una inmersión maximal de tipo finito y denotemos por  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  a su levantamiento  $G$ -periódico. Sea  $A \subset \mathcal{S}$  un final anular. Entonces,

- El homomorfismo de grupos  $(\psi|_A)_* : \Pi_1(A) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{L}^3/G) = G$  es inyectivo, es decir, los levantamientos de  $A$  a  $\widehat{\mathcal{S}}$  son simplemente conexos.
- Si denotamos por  $R \in G$  la isometría tal que  $\psi_*(\Pi_1(A)) = \langle R \rangle \subset G$ , entonces la inmersión inducida  $Y : A \rightarrow \mathbb{L}^3/\langle R \rangle$  es propia y es un embebimiento fuera de un conjunto compacto.

*Demostración* : La primera de las propiedades la vimos al comienzo de la demostración del teorema, mientras que la segunda es consecuencia directa de la Afirmación II.  $\square$

### 6.3. DESCARTANDO ISOMETRÍAS HIPERBÓLICAS

Una vez que hemos estudiado la estructura conforme de las superficies maximales de tipo finito en las variedades  $\mathbb{L}^3/G$  estamos en condiciones de demostrar que el grupo  $G$  no puede contener movimientos helicoidales hiperbólicos (i.e., con eje espacial) ortocronos. En esta sección supondremos que  $G \subset \operatorname{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$ , es decir,  $G$  contiene sólo isometrías positivas y ortocronas (ver Sección 1.1).

En estas condiciones, por la Proposición 6.2 sabemos que  $G$  consta de traslaciones espaciales y/o movimientos helicoidales hiperbólicos. El siguiente lema nos muestra que no pueden darse las dos posibilidades al mismo tiempo.

**Lema 6.5** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  una superficie maximal de tipo finito,  $G \subset \operatorname{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$ . Si el grupo  $G$  contiene una traslación (espacial), entonces  $G$  consiste sólo de traslaciones y su rango es a lo más 2.

Además en este caso (es decir, cuando el grupo  $G$  sea traslacional),  $\mathcal{S}$  es compacta si y sólo si  $G$  tiene rango dos.

*Demostración:* Sea  $T \in G$  dicha traslación, y  $w$  su vector de traslación asociado. Si  $G = \langle T \rangle$  el lema es trivialmente cierto. Supongamos por tanto que existe  $R \in G$  algebraicamente independiente con  $T$ . Veamos primero que  $G$  es un grupo abeliano de rango 2. Por la Proposición 6.2,  $R$  será o bien una traslación espacial, o bien un movimiento helicoidal hiperbólico. En caso de que  $R$  sea una traslación llamaremos  $T' := R$ , mientras que si  $R$  es un movimiento helicoidal definiremos  $T' := R^{-1} \circ T \circ R$ . En ambos casos  $T'$  es una traslación espacial, cuyo vector de traslación denotaremos por  $w'$ .

Veamos que  $w$  y  $w'$  han de ser linealmente independientes. Obviamente si  $T' = R$  esto es cierto. Supongamos por tanto que  $R$  es un movimiento helicoidal hiperbólico de eje  $\ell$  y vector de traslación  $v \in \ell$ . En este caso es fácil ver que  $w' = \vec{R}^{-1}(w)$ , por lo que si  $w$  y  $w'$  fuesen linealmente dependientes  $w$  sería un vector propio de  $\vec{R}$ , con lo que el grupo  $G' = \langle T, R \rangle$  actuaría (de forma propia y discontinua) sobre el eje  $\ell$  mediante traslaciones, y sería por tanto un grupo cíclico. Es decir, existirían  $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  tales que  $T^m = R^n$  sobre la recta  $\ell$ , y por tanto  $T^m \circ R^{-n}$  sería una isometría lineal (distinta de la identidad, ya que  $R$  es un movimiento hiperbólico y ortocrono), lo que contradice que la acción de  $G$  sea propia y discontinua.

Consideremos ahora el grafo entero  $\mathcal{G} := \mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))$  definido a partir del multigrafo finito  $\widehat{\psi}$  como se indica en el Lema 6.1, que también es invariante por las isometrías de  $G$ . Como  $\mathcal{G}$  es un grafo entero sobre cualquier plano espacial, en particular lo será sobre el plano  $\Pi$  generado por los vectores  $w$  y  $w'$ . Por lo tanto  $\mathcal{G}/G_1$  es un toro topológico, siendo  $G_1 = \langle T, T' \rangle$ , y como consecuencia también lo es cualquier superficie que sea recubierta por él, en particular  $\mathcal{G}/G$ . Esto demuestra que  $G$  es un grupo abeliano de rango 2.

También se deduce de esto que  $G_1$  es un subgrupo de índice finito en  $G$ , con lo que si  $R$  fuese un movimiento hiperbólico existiría un  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $R^n \in G_1$ . Pero en ese caso  $R^n$  sería una traslación, lo que es absurdo.

Finalmente, observemos que la compacidad de  $\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{S}}/G$  equivale a la de  $\mathcal{G}/G$ , ya que  $G$  contiene exclusivamente traslaciones. Por tanto la última afirmación del lema se sigue de que  $\mathcal{G}/G$  es compacta si y sólo si  $G$  tiene rango dos.  $\square$

En la demostración del resultado principal de esta sección juega un papel esencial el siguiente teorema de Mess [Mess], que también puede ser encontrado en [GM]:

**Teorema (Mess)** *Si  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  es un grupo actuando de forma propia y discontinua sobre  $\mathbb{L}^3$ ,  $G$  no puede ser isomorfo al grupo fundamental de una superficie compacta de característica de Euler negativa.*

**Proposición 6.6** *No existen superficies maximales  $G$ -periódicas de tipo finito con  $G \subset \text{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$  conteniendo movimientos helicoidales hiperbólicos.*

*Demostración:* Supongamos por reducción al absurdo que existe una superficie  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  maximal de tipo finito, y sea  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  su levantamiento  $G$ -periódico.

La demostración de la proposición pasa por utilizar el resultado de Mess citado anteriormente, es decir, construir una superficie compacta con característica de Euler negativa y cuyo grupo fundamental sea  $G$ . Para ello consideremos el grafo entero  $\mathcal{G} := \mathcal{G}^+(\widehat{\psi}(\widehat{\mathcal{S}}))$  definido en el Lema 6.1. Puesto que todas las isometrías de  $G$  conservan la orientación temporal,  $\mathcal{G}$  es también invariante bajo la acción de  $G$ , y por tanto  $\mathcal{G}/G$  es una superficie (topológica) cuyo grupo fundamental es  $G$ . Para obtener la contradicción sólo nos resta demostrar que dicha superficie es compacta y con característica de Euler negativa. Al ser  $\mathcal{G}/G$  un subconjunto cerrado de  $\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{S}}/G$ , para ver que  $\mathcal{G}/G$  es compacta basta ver que  $\mathcal{S}$  lo es.

En el Teorema 6.3 vimos que la superficie tiene tipo conforme finito. Veamos que en este caso no puede tener finales. En efecto, consideremos un final anular  $A \subset \mathcal{S}$  que no contenga puntos singulares y sea  $\widehat{A} \subset \widehat{\mathcal{S}}$  un levantamiento suyo, que sabemos que es un dominio simplemente conexo (Corolario 6.4). Por lo tanto existe  $R \in G$  tal que  $\widehat{A}/\langle R \rangle \equiv A$  (aquí estamos utilizando el mismo nombre para las isometrías de  $G$  y las isometrías inducidas en  $\widehat{\mathcal{S}}$ ). Sea  $\widehat{N} : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{H}_+^2$  la aplicación de Gauss de  $\widehat{\psi}|_A$ , que es una aplicación conforme. Puesto que  $N \circ R = \vec{R} \circ N$  podemos inducir de forma natural una aplicación conforme

$$N : A \rightarrow \mathbb{H}_+^2/\langle \vec{R} \rangle,$$

y además el correspondiente homomorfismo de grupos,

$$N_* : \Pi_1(A) \equiv \langle R \rangle \rightarrow \Pi_1(\mathbb{H}_+^2/\langle \vec{R} \rangle) \equiv \langle \vec{R} \rangle,$$

es un isomorfismo de grupos.

Por la Proposición 6.2 y el Lema 6.5 sabemos que  $G$  consta exclusivamente de movimientos helicoidales hiperbólicos, por lo que  $\vec{R}$  es una rotación hiperbólica. Esto implica que el cociente  $\mathbb{H}_+^2/\langle \vec{R} \rangle$  es conformemente equivalente a un anillo  $\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < r\}$ , para cierto  $r > 1$ . Por otro lado,  $\mathcal{S}_0$  tiene tipo conforme finito, con lo que sabemos que  $A$  es biholomorfo a un disco punteado  $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ . Por lo tanto la correspondiente aplicación, que seguiremos denotando por  $N : \mathbb{D}^* \rightarrow \mathcal{A}$ , es una aplicación conforme entre un disco punteado y un anillo. Como consecuencia del Teorema de la singularidad evitable de Riemann,  $N$  extiende de manera conforme al punto  $z = 0$ . Pero esto quiere

decir que la imagen de la curva que genera la homología de  $A \equiv \mathbb{D}^*$  es homotópicamente trivial, lo que contradice que  $N_*$  es un isomorfismo y demuestra que la superficie  $S$  es compacta.

Para finalizar debemos asegurarnos de que  $\mathcal{G}/G$  tiene característica de Euler negativa. En efecto, obviamente  $\mathcal{G}/G$  no puede ser una esfera y si fuese un toro, entonces  $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Veamos que esto no es posible. Para ello consideremos generadores  $R$  y  $R'$  de  $G$  que sean movimientos helicoidales hiperbólicos. Del hecho de que  $R$  y  $R'$  conmutan es fácil ver que las partes lineales asociadas,  $\vec{R}$  y  $\vec{R}'$ , han de tener el mismo eje, que llamaremos  $\ell$ , y que (tras un cambio en el origen del sistema de referencia si es necesario) los vectores de traslación de ambos movimientos,  $v$  y  $v'$ , están en la dirección de dicho eje. Pero entonces  $R$  y  $R'$  actúan de forma propia y discontinua sobre la recta  $\ell$  mediante traslaciones, con lo que existirán  $n, m \in \mathbb{Z}$  tales que  $nv = mv'$ . Pero entonces, o bien  $R^n = (R')^m$  (lo que contradice que  $G \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ), o bien  $R^n \circ (R')^{-m}$  tiene puntos fijos (lo que contradice que la acción sea propia y discontinua). Esto prueba que  $\mathcal{G}/G$  tiene característica de Euler negativa y finaliza la demostración.  $\square$

## 6.4. CONCLUSIONES

Como consecuencia de las Proposiciones 6.2 y 6.6 y el Lema 6.5 demostrados en las secciones anteriores hemos obtenido el siguiente resultado:

**Teorema 6.7** *Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  una superficie maximal de tipo finito,  $G \neq \{Id\}$ . Supongamos que  $G \subset Iso_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$ . Entonces  $G$  es un grupo de traslaciones espaciales de rango uno o dos.*

*Además  $\mathcal{S}$  es compacta si y sólo si  $G$  tiene rango dos.*

En esta sección estableceremos algunas consecuencias de este resultado. En particular, demostraremos la completitud de las superficies de tipo finito en los cocientes  $\mathbb{L}^3/G$  y daremos una clasificación general de los posibles grupos de isometrías de una superficie maximal periódica de tipo finito. Teniendo en cuenta la equivalencia entre estas superficies y las superficies en 3-variedades cocientes de  $\mathbb{L}^3$  descrita al comienzo del Capítulo 5 esto es equivalente a clasificar las 3-variedades de Lorentz completas y

llanas que admiten una superficie maximal de tipo finito.

Para un grupo  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  utilizaremos la siguiente notación

$$G_+ = G \cap \text{Iso}_+(\mathbb{L}^3) \quad G^\uparrow = G \cap \text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^3) \quad G_+^\uparrow = G \cap \text{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3).$$

Obsérvese que todos estos grupos tienen índice finito en  $G$  por lo que las correspondientes 3-variedades  $\mathbb{L}^3/G_+$ ,  $\mathbb{L}^3/G^\uparrow$  y  $\mathbb{L}^3/G_+^\uparrow$  son recubridores finitos de  $\mathbb{L}^3/G$ . Por lo tanto, dada una inmersión maximal de tipo finito  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  podemos considerar los correspondientes levantamientos  $\psi_+ : \mathcal{S}_+ \rightarrow \mathbb{L}^3/G_+$ ,  $\psi^\uparrow : \mathcal{S}^\uparrow \rightarrow \mathbb{L}^3/G^\uparrow$ , y  $\psi_+^\uparrow : \mathcal{S}_+^\uparrow \rightarrow \mathbb{L}^3/G_+^\uparrow$ , que siguen siendo de tipo finito.

**Proposición 6.8** *Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  una inmersión maximal de tipo finito. Entonces  $\psi$  es completa y propia.*

*Además el soporte conforme  $\mathcal{S}_0$  de  $\psi$  tiene tipo conforme finito, y en el caso de que  $G \subset \text{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$  (es decir,  $G$  es un grupo de traslaciones), los datos de Weierstrass extienden a los finales y  $\Phi$  tiene polos en estos puntos.*

*Demostración:* Pasando a un recubridor finito si es necesario (lo cual no afecta a la hora de probar el Corolario) podemos suponer que  $G \subset \text{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$ . Puesto que  $\widehat{\psi}$  es un multigrafo, en particular es una aplicación propia y por tanto lo mismo es cierto para  $\psi$ . Además sabemos que  $\mathcal{S}$  es compacta si y solamente si  $G$  tiene rango dos (Teorema 6.7). En ese caso la completitud es trivial, por lo que supondremos que  $G$  es cíclico. La demostración de la completitud en este caso es una adaptación de la utilizada en el caso de superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  (Corolario 3.2).

Sea  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  el levantamiento  $G$ -periódico de  $\psi$  y  $(g, \phi_3)$  los datos de Weierstrass de su reparametrización conforme,  $\widehat{\psi}_0 : \widehat{\mathcal{S}}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3$ . Puesto que estos datos son invariantes por traslaciones, podemos inducirlos a unos datos, que seguiremos llamando  $(g, \phi_3)$  en el cociente  $\psi_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  (ver Sección 1.3). Como  $\mathcal{S}_0$  tiene tipo conforme finito (Teorema 6.3), para ver que la superficie es completa basta ver que cada final anular  $A \subset \mathcal{S}_0$  lo es.

Por el Teorema de la singularidad evitable de Riemann  $g$  extiende a los finales con  $|g| \neq 1$ . Supondremos que hemos orientado la superficie de forma que  $|g| \leq 1$ . Por lo tanto, achicando  $A$  lo suficiente para que no contenga puntos singulares,  $|g|^2 < 1 - \varepsilon$  en  $A$ ,  $\varepsilon > 0$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $G$  consiste de traslaciones

horizontales, por lo que  $\mathbb{L}^3/G = \Delta \times \mathbb{R}$  donde  $\Delta$  es un cilindro espacial llano y  $\mathbb{R}$  denota la componente temporal. Denotaremos por  $\pi : \mathbb{L}^3/G = \Delta \times \mathbb{R} \rightarrow \Delta$  a la proyección canónica. Puesto que  $\pi \circ \psi$  es un recubridor (ramificado) la métrica euclídea de  $\Delta$ ,  $ds_0^2$ , se levanta a una métrica completa en  $\mathcal{S}$ . Como además

$$(\pi \circ \psi)^*(ds_0^2) = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 \leq \left| \frac{\phi_3}{g} \right|^2,$$

deducimos que la métrica  $|\frac{\phi_3}{g}|^2$  es completa y en consecuencia también lo es la métrica de  $\psi_0$  restringida a  $A$  ya que

$$ds^2|_A = \frac{1}{4}|\phi_3|^2(|g| - 1/|g|)^2 \geq \frac{\varepsilon^2}{4} \left| \frac{\phi_3}{g} \right|^2.$$

Además la completitud de  $|\frac{\phi_3}{g}|^2$  implica que  $\frac{\phi_3}{g}$  (y por tanto también  $\phi_3$ ) extiende de forma meromorfa a los finales (ver [Oss]).  $\square$

El siguiente lema nos ayudará a describir los generadores del grupo  $G$  en caso de que no sea un grupo de isometrías positivas y ortocronas.

**Lema 6.9** *Sea  $G \subset \text{Iso}(\mathbb{L}^3)$  tal que existe una superficie maximal  $G$ -periódica de tipo finito. Dada  $R \in G$ ,  $R \notin \text{Iso}_+^\uparrow(\mathbb{L}^3)$ , existe cierto sistema de referencia de  $\mathbb{L}^3$  en el que  $R$  se escribe como:*

- Si  $R$  es positiva y no ortocrona,  $R((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, -x_2, -x_3) + (\delta, 0, 0)$ ,  $\delta \neq 0$ .
- Si  $R$  es negativa y ortocrona,  $R(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_3) + (\delta, 0, 0)$ ,  $\delta \neq 0$ .
- Si  $R$  es negativa y no ortocrona,  $R(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3) + (0, \delta, 0)$ ,  $\delta \neq 0$ .

*Demostración:* Observemos que en todos estos casos  $R^2$  debe ser una traslación (Teorema 6.7).

Si además  $R \in \text{Iso}_+^\downarrow(\mathbb{L}^3)$ , por la Proposición 6.2 debe ser un movimiento hiperbólico. Consideremos el sistema de referencia en el que  $R$  se escribe como detallamos en la Observación 1.1. Puesto que  $R^2$  es una traslación espacial, el ángulo de  $R$  debe ser cero, y por tanto  $R$  tiene la expresión descrita en el lema.

Supongamos que  $R \in \text{Iso}_-(\mathbb{L}^3)$ . Como  $\vec{R}^2 = (-\vec{R})^2 = \text{Id}$ , deducimos que  $-R \in \text{Iso}_+(\mathbb{L}^3)$  es, o bien un movimiento hiperbólico de ángulo cero, o bien un movimiento elíptico de ángulo  $\pi$ , o bien una traslación. En el primero de los casos  $\vec{R}$  es una simetría respecto de un plano espacial (caso no ortocrono), en el segundo es una simetría respecto de un plano temporal ( $R$  ortocrona), mientras que el último caso no es posible, ya que  $R$  no tiene puntos fijos. De esto se deduce que es posible elegir un sistema de referencia en el que  $R$  se escriba como en el enunciado del lema.  $\square$

**Teorema 6.10 (Clasificación general)** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/G$  una superficie maximal de tipo finito,  $G \neq \{Id\}$ , y supongamos que  $G \neq G_+^\uparrow$ . Definamos las siguientes isometrías:

$$R_0((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + \delta, -x_2, -x_3), \quad R_1((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + \delta, -x_2, x_3),$$

$$R_2((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2 + \nu, -x_3),$$

donde  $\delta, \nu \neq 0$ .

Entonces existe un sistema de referencia de  $\mathbb{L}^3$  en el que los generadores de  $G$  se escriben de la siguiente forma:

	CARÁCTER $\curvearrowright$ DE $G$	RANGO DE $G_+^\uparrow \rightsquigarrow$	$rg(G_+^\uparrow)=1$	$rg(G_+^\uparrow)=2$
$[G : G_+^\uparrow] = 2$	(a) $G = G_+$ (b) $G = G^\uparrow$ (c) $G_+^\uparrow = G_+ = G^\uparrow$		$G = \langle R_0 \rangle$ $G = \langle R_1 \rangle$ $G = \langle R_2 \rangle$ ,	$G = \langle R_0, T_0 \rangle$ $G = \langle R_1, T_1 \rangle$ , $G = \langle R_2, T_2 \rangle$
$[G : G_+^\uparrow] = 4$	(d) $G$ contiene isometrías de todo tipo		no existen	$G = \langle R_0, R_2 \rangle$

donde  $T_0(x) = T_1(x) = x + (0, \lambda, 0)$  y  $T_2(x) = x + (\lambda, \mu, 0)$ ,  $\lambda \neq 0$ .

*Demostración:* Sea  $\mathcal{G} := \mathcal{G}^+(\psi(\mathcal{S}))$  el grafo entero definido como en el Lema 6.1 y consideremos las isometrías  $R_0, R_1$  y  $R_2$  definidas en el enunciado del teorema.

Supongamos que  $G_+^\uparrow$  es cíclico. En ese caso es fácil ver que, si  $G_+^\uparrow$  tiene índice dos en  $G$  (casos (a), (b) y (c)),  $G$  debe estar generado por un movimiento  $R$  tal que  $G_+^\uparrow = \langle R^2 \rangle$ . Dicho movimiento puede ser una isometría positiva y no ortocrona (si  $G$  está en las condiciones del caso (a)), negativa y ortocrona (caso (b)), o negativa y no ortocrona (caso (c)). En virtud del Lema 6.9, existe un sistema de referencia en el que la expresión de  $R$  coincide con la de  $R_0, R_1$  ó  $R_2$  respectivamente.

Para concluir el estudio de los casos (a), (b) y (c) supongamos que  $G_+^\uparrow$  tiene rango dos. En este caso es posible encontrar generadores  $T, R$  para  $G$  de forma que  $G_+^\uparrow = \langle T, R^2 \rangle$  y coincidiendo la expresión de  $R$ , en cierto sistema de referencia, con la de  $R_0, R_1$  y  $R_2$  en cada uno de los casos (a),(b) y (c). Veamos ahora cuál es la expresión del vector de traslación  $v = (v_1, v_2, v_3)$  de  $T$ . Para ello consideraremos la traslación auxiliar  $T' :=$



$$R^{-1} \circ T \circ R \in G_+^\uparrow.$$

En el caso en que  $R = R_0$ , el vector asociado de  $T'$  es  $(v_1, -v_2, -v_3)$ . Puesto que  $T' \in G_+^\uparrow = \langle T, R_0^2 \rangle$  deducimos que existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $v_1 = n\delta$ . Por otro lado la isometría  $T_0 := T' \circ R_0^{-n} \in G$  no puede tener puntos fijos, lo que nos dice que  $n$  debe ser par. Es decir,  $T_0$  es una traslación de vector  $(0, v_2, v_3)$ . Como además este vector ha de ser espacial, después de un cambio de base que mantenga fijo el vector  $(1, 0, 0)$  (lo cual no afecta a la expresión de  $R_0$ ) podemos suponer que el vector de traslación es de la forma  $(0, \lambda, 0)$ , lo que termina el apartado (a) del teorema.

Si  $R = R_1$ , la traslación  $T'$  tiene ahora como vector asociado al vector  $(v_1, -v_2, v_3)$ . Veamos que  $v_2 \neq 0$ . En efecto, si  $v_2 = 0$  entonces  $T' = T$  con lo que  $G$  sería conmutativo. Por otro lado, puesto que en este caso  $G = G^\uparrow$ , el grafo  $\mathcal{G}$  es invariante por  $G$  y podemos considerar la superficie cociente  $\mathcal{G}/G$ . Como  $R_1$  es negativa y ortocrona revierte la orientación de  $\mathcal{G}$  con lo que  $\mathcal{G}/G$  es un botella de Klein. Por tanto su grupo fundamental, que es isomorfo a  $G$ , no puede ser conmutativo. Esto nos dice que  $v_2 \neq 0$  y en consecuencia, como  $T' \in G_+^\uparrow = \langle R_1^2, T \rangle$ , forzosamente  $v_3 = 0$  y  $v_1 = n\delta$  para cierto  $n \in \mathbb{Z}$ . Además  $T_1 := T' \circ R_1^{-n} \in G$  no puede tener puntos fijos, con lo que  $n$  debe ser par y por tanto  $T_1$  es una traslación de vector  $(0, \lambda, 0)$ , donde  $\lambda = v_2$ . Con esto se demuestra el caso (b).

Para el apartado (c) del Teorema ( $R = R_2$ ), el vector de  $T'$  es de la forma  $(v_1, v_2, -v_3)$ . Veamos que  $v_3 = 0$ . En efecto, como  $T' \in G_+^\uparrow = \langle R_2^2, T \rangle$ , si  $v_3 \neq 0$  entonces  $v_1 = 0$  y  $v_2 = n\nu$  para cierto  $n \in \mathbb{Z}$ . En consecuencia, la isometría  $T' \circ R_2^{-n}$  es, o bien una simetría con puntos fijos (cuando  $n$  es impar), o bien una traslación de vector temporal ( $n$  par). Ambos casos son imposibles, con lo que  $v_3 = 0$ . Por tanto eligiendo  $T_2 = T'$  obtenemos la conclusión indicada en el teorema.

Finalmente, resta demostrar el caso (d). Supongamos primero que  $G_+^\uparrow$  es cíclico,  $G_+^\uparrow = \langle T \rangle$ . En este caso  $G^\uparrow$  estará generado por una isometría  $R \in G$  negativa y ortocrona tal que  $R^2 = T$ . Por otro lado  $G_+ = \langle R' \rangle$  con  $R'$  positiva y no ortocrona tal que  $(R')^2 = T = R^2$ , con lo que  $G = \langle R, R' \rangle$ . Fijemos un sistema de referencia para el que  $R' = R_0$  (Lema 6.9). Puesto que  $R$  debe ser una simetría deslizante respecto de cierto plano temporal (Lema 6.9), y como  $R^2 = R_0^2$ , deducimos que dicho plano contiene al eje  $x_1$ , con lo cual, después de un cambio de base que mantenga dicho eje (que no afecta a la expresión de  $R_0$ ) tenemos que  $R((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, -x_2, x_3) + (\delta, \lambda, 0)$ . Finalmente observemos que  $(R \circ R_0)^2 \in G_+^\uparrow = \langle R_0^2 \rangle$  con lo que  $\lambda = 0$ . Pero esto implica que la isometría  $R^{-1} \circ R_0$  tiene puntos fijos, lo que nos lleva a contradicción.

Por último, supongamos que  $G_+^\uparrow$  tiene rango dos. En este caso  $G = \langle R_0, R \rangle$ , con  $R$  negativa y ortocrona. Además, puesto que  $R_0^2$  es una traslación de vector  $(2\delta, 0, 0)$ , de-

ducimos que el subgrupo  $H$  de isometrías de  $G_+^\uparrow$  que actúan por traslaciones sobre el eje  $x_1$  es no trivial, y por tanto isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $H = \langle R_0^2 \rangle$ . Por otro lado, en virtud del Lema 6.9,  $\vec{R}$  debe ser una simetría respecto de cierto plano temporal. Además como el grupo  $\vec{G} := \{\vec{S} : S \in G\}$  tiene cuatro elementos, en particular ha de ser un grupo abeliano, con lo que  $\vec{R}$  y  $\vec{R}_0$  conmutan. De esto se sigue que, o bien el plano de simetría de  $\vec{R}$  es el plano  $x_1 = 0$ , o bien el eje  $x_1$  está contenido en dicho plano. El primero de los casos no es posible, ya que de ser así  $R \circ R_0$  tendría puntos fijos. Por tanto la recta  $x_1$  está contenida en el plano (temporal) de simetría de  $\vec{R}$ . Después de un cambio de base que conserve el eje  $x_1$  podemos suponer que el plano es el  $x_2 = 0$  (osérvese que esto no afecta a la expresión de  $R_0$ ). Por tanto  $R((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, -x_2, x_3) + (v_1, v_2, v_3)$ , y además podemos suponer que  $v_1 \geq 0$ . De hecho, salvo reemplazar  $R$  por  $R \circ R_0^{2n}$ , para cierto  $n \in \mathbb{Z}$ , podemos suponer que  $0 \leq v_1 < 2\delta$ . Veamos ahora que  $v_3 = 0$ . En efecto, como  $R^2$ ,  $R_0^2$  y  $(R \circ R_0)^2$  pertenecen a  $G_+^\uparrow$ , y dicho grupo que tiene rango dos, sus vectores de traslación deben ser linealmente dependientes. De esto se deduce que  $v_2 v_3 = 0$ . Supongamos por reducción al absurdo que  $v_3 \neq 0$ . Entonces  $v_2 = 0$  y la traslación  $R_0^2 \circ R^2 \circ (R_0 \circ R)^{-2} \in G$  tiene como vector asociado  $(0, 0, 2v_3)$ , lo que contradice la Proposición 6.2, que afirmaba que todas las traslaciones de  $G_+^\uparrow$  deben ser espaciales. Esto prueba que  $v_3 = 0$  y por tanto  $R^2 \in H = \langle R_0^2 \rangle$ , lo que implica que  $v_1 = m\delta$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Por las simplificaciones hechas anteriormente deducimos que  $v_1 = \delta$  (nótese que  $R$  no puede tener puntos fijos, por lo que  $v_1 \neq 0$ ). Así, la isometría  $R \circ R_0^{-1}$  coincide con  $R_2$  para  $\lambda = v_2$ , lo que finaliza la demostración.  $\square$

# SUPERFICIES INVARIANTES POR TRASLACIONES

---

# 7

En este capítulo estudiaremos las propiedades globales de las superficies maximales periódicas y de tipo finito (ver Definición 5.4) que son invariantes por un grupo generado por una (superficies *simplemente periódicas*) o dos (superficies *doblemente periódicas*) traslaciones espaciales. De hecho como vimos en el Capítulo 6 que estas son las únicas superficies periódicas de tipo finito salvo recubridores finitos (Teoremas 6.7 y 6.10).

Análogamente al estudio que hicimos en la Sección 3.2 para las superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ , en esta parte de la memoria describiremos el comportamiento asintótico de estas superficies, daremos una fórmula que liga ciertos invariantes asociados a este comportamiento asintótico con la topología de la superficie, y estableceremos un teorema de representación analítica para estas superficies que nos permitirá construir nuevos ejemplos.

Antes de comenzar es conveniente resaltar que, como vimos en la Sección 1.3, si  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  es una superficie maximal invariante por un grupo de traslaciones  $G$ , sus datos de Weierstrass son también invariantes por la acción de  $G$  y por tanto pueden ser inducidos a datos holomorfos para la inmersión  $\psi : \mathcal{S} = \widehat{\mathcal{S}}/G \rightarrow \mathbb{L}^3/G$ , de forma que se verifica la Ecuación (1.5).

Cuando la superficie  $\psi$  (o equivalentemente  $\widehat{\psi}$ ) tiene singularidades aisladas, los datos de Weierstrass están definidos sobre su soporte conforme,  $\mathcal{S}_0$ . Como vimos en la Proposición 6.8, cuando la superficie es de tipo finito (lo cual asumiremos a partir de ahora)  $\mathcal{S}_0$  es biholomorfa a una superficie de Riemann compacta y con borde  $\overline{\mathcal{S}_0}$  menos una cantidad finita de puntos. Además los datos de Weierstrass extienden de forma meromorfa a estos puntos y  $\Phi$  tiene polos en ellos.

Por otra parte, si denotamos por  $\mathfrak{S}$  al doble de  $\mathcal{S}_0$  y por  $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  a la reflexión especular (ver Subsección 1.5.3), puesto que la 1-forma vectorial  $\Phi$  verifica  $J^*(\Phi) = -\overline{\Phi}$ , esto nos permite extender  $\Phi$  (y por tanto  $g$  y  $\phi_3$ ) a todo  $\mathfrak{S}$ .

## 7.1. FINALES DE UNA SUPERFICIE SIMPLEMENTE PERIÓDICA

Como vimos en el Teorema 6.7, los cocientes de las superficies doblemente periódicas son superficies compactas, con lo que el estudio del comportamiento asintótico carece de sentido. Sin embargo esto no es así en el caso simplemente periódico, en el que la superficie cociente sí tiene finales.

Por lo tanto, durante esta sección  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  denotará una superficie maximal de tipo finito, donde  $\langle T \rangle$  es un grupo cíclico generado por una traslación espacial  $T$ . Como hasta ahora,  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  representará su levantamiento simplemente periódico, mientras que  $\mathcal{S}_0$  será el soporte conforme de  $\psi$  y  $\psi_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  la correspondiente reparametrización conforme. Por último denotaremos por  $(g, \phi_3)$  los datos de Weierstrass de  $\psi_0$  (definidos sobre  $\mathcal{S}_0$ ).

Como vimos en la Proposición 6.8, la 1-forma vectorial  $\Phi$  tiene polos en los finales de  $\mathcal{S}_0$ . Si orientamos la superficie de forma que  $|g| \leq 1$  en  $\mathcal{S}_0$ , el orden de  $\Phi$  en los finales coincide con el de la 1-forma  $\omega := \frac{\phi_3}{g}$ .

**Lema 7.1** *La 1-forma  $\omega = \frac{\phi_3}{g}$  tiene polos simples en los finales.*

*Como consecuencia, alrededor de un final  $\psi$  es asintótica a un semi-cilindro espacial totalmente geodésico en  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ , posiblemente con multiplicidad (es decir, recubriéndolo un número finito de veces).*

*Demostración:* Consideremos un final de la superficie. Después de aplicar una isometría de  $\mathbb{L}^3$  podemos suponer que el plano tangente de la superficie en el final es horizontal, es decir  $g$  extiende al final con el valor cero.

Sea  $(\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}, z)$  una carta conforme alrededor de un final ( $z = 0$  se corresponde con el final) de forma que  $g(z) = z^p$  para cierto  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 1$ . Supongamos que el desarrollo de la 1-forma  $\omega$  en este parámetro  $z$  es de la forma

$$\omega = \left( \sum_{j=-q}^{+\infty} c_j z^j \right) dz, \quad c_j \in \mathbb{C}, \quad c_{-q} \neq 0, \quad (7.1)$$

para cierto  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 1$ . Veamos que  $q = 1$ . Razonando por reducción al absurdo supongamos que  $q \geq 2$ .

Sea  $\widehat{\psi} : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{L}^3$  el levantamiento de  $\psi$ . Denotaremos por  $\widehat{\mathbb{D}}^* \subset \widehat{\mathcal{S}}$  un levantamiento de  $\mathbb{D}^*$ . En el Corolario 6.4 vimos que  $\widehat{\mathbb{D}}^*$  es simplemente conexo por tanto utilizaremos la identificación

$$\widehat{\mathbb{D}}^* \equiv \{u \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(u) < 0\},$$

con lo que el correspondiente recubridor vendrá dado por

$$\pi_0 : \widehat{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{D}^*, \quad \pi_0(u) = e^u.$$

Asimismo, los datos de Weierstrass de  $\widehat{\psi}|_{\widehat{\mathbb{D}}^*}$ ,  $(\widehat{g}, \widehat{\phi}_3)$ , vendrán dados por el pullback de los datos de  $\psi|_{\mathbb{D}^*}$  vía el recubridor  $\pi_0$ .

Utilizando notación compleja y gracias a la Ecuación (1.2), podemos escribir

$$\pi \circ \widehat{\psi} = \frac{-i}{2} \left( \int (\widehat{g}^2 \widehat{\omega} + \overline{\widehat{\omega}}) \right),$$

donde  $\pi : \mathbb{L}^3 \rightarrow \{x_3 = 0\} \equiv \mathbb{C}$  es la proyección ortogonal correspondiente y  $\widehat{\omega} = \widehat{\phi}_3 / \widehat{g}$ .

Por lo tanto, teniendo en cuenta la expresión de  $\omega$  en (7.1) tenemos que

$$(\pi \circ \widehat{\psi})(u) = \frac{i \overline{c_{-q}}}{2(q-1)} e^{(1-q)\bar{u}} + h(u) \quad \forall u \in \widehat{\mathbb{D}}^*, \quad (7.2)$$

para cierta función  $h : \widehat{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{C}$  diferenciable y acotada tal que  $\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = 0$  sobre las bandas de la forma  $\{u \in \widehat{\mathbb{D}}^* : |\operatorname{Im}(u)| < C\}$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ .

Como consecuencia de la ecuación (7.2), para cada  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \arg((\pi \circ \widehat{\psi})(r + i\theta)) = \frac{\pi}{2} - \arg(c_{-q}) + (q-1)\theta.$$

En particular, para cada  $k \in \mathbb{Z}$  el grafo

$$S_k := \widehat{\psi} \left( \{u \in \widehat{\mathbb{D}}^* : \operatorname{Im}(u) \in [\frac{2\pi k}{q-1}, \frac{2\pi(k+1)}{q-1}]\} \right) \subset \widehat{\psi}(\widehat{\mathbb{D}}^*)$$

se proyecta vía  $\pi$  en una región del plano  $\{x_3 = 0\} \equiv \mathbb{C}$  que contiene, salvo por un conjunto compacto, el complemento de un sector, de ángulo tan pequeño como queramos, que tiene por bisectriz a la semirrecta  $\{w : \arg(w) = \frac{\pi}{2} - \arg(c_{-q})\}$ .

Pero esto contradice la segunda de las afirmaciones del Corolario 6.4, que asegura que  $\widehat{\psi}$  es un embebimiento alrededor del final, y por tanto grafo sobre un dominio del plano  $\{x_3 = 0\}$  alrededor del final. Con esto queda demostrado que  $q = 1$ , lo que acaba la primera parte del lema.

Para la parte final, escribamos

$$\omega = \left(\frac{c}{z} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j\right), \quad z \in \mathbb{D}^*, \quad (7.3)$$

donde  $c \in \mathbb{C}^*$ . Sea  $n \in \mathbb{N}$  el natural tal que  $\psi_*(\Pi_1(\mathbb{D}^*)) = \langle T^n \rangle \subset G = \langle T \rangle$ . Es decir,

$$\pm nv = \widehat{\psi}(u + 2\pi i) - \widehat{\psi}(u), \quad u \in \widehat{\mathbb{D}}^*,$$

donde  $v \in \mathbb{L}^3$  es el vector de traslación de  $T$ . Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.2) y (7.3) es inmediato comprobar que

$$\pm nv = \operatorname{Re}(2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \Phi) = (-\pi \bar{c}, 0) \in \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \quad (7.4)$$

Después de un giro alrededor del eje  $x_3$  podemos suponer que el vector  $v$  está en la dirección positiva del eje  $x_1$ , lo cual implica en particular que  $c \in \mathbb{R}$ . Obsérvese que esto no afecta a la simplificación anterior de que el final es horizontal.

Integrando la representación de Weierstrass obtenemos la siguiente expresión para  $\widehat{\psi}$  en  $\widehat{\mathbb{D}}^*$  (salvo traslación),

$$\widehat{\psi}(u) = \left(\frac{-ic\bar{u}}{2}, 0\right) + H(u), \quad (7.5)$$

donde  $H : \widehat{\mathbb{D}}^* \rightarrow \mathbb{R}^3 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{R}$  es una función diferenciable y acotada tal que  $\lim_{u \rightarrow \infty} H(u) = (0, \mu)$  sobre las bandas de la forma  $\{u \in \widehat{\mathbb{D}}^* : |\operatorname{Im}(u)| < C\}$ ,  $C \in \mathbb{R}^+$ , para cierto  $\mu \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, cuando  $\operatorname{Re}(u)$  diverge a  $-\infty$  la superficie es asintótica a un plano horizontal. Además las semirrectas con  $\operatorname{Im}(u)$  constante son aplicadas en curvas asintóticas a una semirrecta paralela al eje  $x_2$  (el perpendicular al vector  $v$ ), lo que termina la demostración del lema.  $\square$

Este lema motiva las siguientes definiciones de *multiplicidad* y *signatura* de un final. La multiplicidad es definida como el natural  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\psi_*(\Pi_1(A)) = \langle T^n \rangle \subset G = \langle T \rangle, \quad (7.6)$$

siendo  $A \subset \mathcal{S}$  un entorno alrededor del final. Cuando la multiplicidad es  $n = 1$  diremos que el final es *de tipo Scherk*.

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Puesto que cualesquiera dos levantamientos diferentes de  $A$  difieren por una traslación  $T^m$ ,  $0 < m < n$ , es inmediato concluir que  $\widehat{\psi}$  (y por lo tanto  $\psi$ ) no es un embebimiento si algún final tiene multiplicidad mayor que uno.

Por su parte, la signatura es simplemente un signo que utilizaremos para distinguir entre los dos posibles semi-cilindros a los que el final puede ser asintótico.

**Definición 7.1 (Signatura)** Sea  $\Delta$  el plano (temporal) ortogonal al vector de traslación de  $T$ . Fijemos una componente conexa  $\Delta^+$  de  $\Delta \cap \text{Ext}(\mathcal{C}_0)$ . Dado un plano temporal  $\Sigma \subset \mathbb{L}^3$  invariante por  $T$  y orientado de forma que su vector normal  $\nu$  esté contenido en  $\Delta^+$ , denotaremos por  $H^+$  y  $H^-$  a las dos componentes conexas de  $\mathbb{L}^3 \setminus \Sigma$  que contienen a la dirección orientada dada por  $\nu$  y  $-\nu$  respectivamente. Diremos que un final tiene signatura  $\varepsilon = 1$  si, dado  $A \subset \mathcal{S}$  un entorno anular alrededor del final,  $\psi(A) \subset H^+ / \langle T \rangle$  fuera de un compacto y signatura  $\varepsilon = -1$  en caso contrario.

Nótese que esta definición no depende del plano temporal  $\Sigma$  elegido sino sólomente de la elección de  $\Pi^+$ .

Como consecuencia de todo lo expuesto anteriormente obtenemos la siguiente proposición. Antes de enunciarla *rescataremos* la siguiente notación, utilizada ya en la Sección 3.1. Como ya sabemos  $\mathcal{S}_0$  es biholomorfa a una superficie compacta (con borde)  $\overline{\mathcal{S}}_0$  menos una cantidad finita de puntos interiores, donde el borde de  $\overline{\mathcal{S}}_0$  consta de una unión disjunta de curvas de Jordan analíticas, que se corresponden con las singularidades. En la siguiente proposición  $\overline{\mathcal{S}}$  representará la superficie compacta y sin borde obtenida de  $\overline{\mathcal{S}}_0$  después de identificar cada curva del borde a un solo punto.

**Proposición 7.2** Sea  $\psi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle$  una inmersión maximal de tipo finito, y sea  $\overline{\mathcal{S}}$  la compactificación de  $\mathcal{S}$  descrita anteriormente.

Sea  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  un plano espacial invariante por  $T$ . El cociente  $\Pi / \langle T \rangle$  es naturalmente difeomorfo a una esfera menos dos puntos, que denotaremos<sup>1</sup> por  $\infty_+$ ,  $\infty_-$ . Por último, sea  $\pi : \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle \rightarrow \Pi / \langle T \rangle$  la correspondiente proyección ortogonal (en el sentido Lorentziano). Consideremos ahora la composición  $\pi \circ \psi : \mathcal{S} \rightarrow \Pi / \langle T \rangle$  que sabemos que es un recubridor ramificado con un número finito de hojas (ver Definición 5.4).

Entonces,

<sup>1</sup>los subíndices  $+$  y  $-$  elegidos para estos dos puntos se corresponden con la elección de  $H^+$  y  $H^-$  establecida en la Definición 7.1.

- (I)  $\pi \circ \psi$  extiende de forma natural a un recubridor ramificado  $h : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \Pi/\langle T \rangle \cup \{\infty_+, \infty_-\}$  mediante  $h(P_j) = \infty_+$  si la signatura de  $P_j$  es positiva y  $h(P_j) = \infty_-$  en caso contrario.
- (II) Cada final  $P_j$  es un punto de ramificación de  $h$ , y el número de vueltas del recubridor en él es justamente su multiplicidad  $n_j$ . Por tanto, si reordenamos los finales para que  $\{P_1, \dots, P_s\}$ ,  $s < r$ , sean los finales con signatura positiva, y  $\{P_{s+1}, \dots, P_r\}$  los de signatura negativa, el número de hojas del recubridor es  $\sum_{j=1}^s n_j = \sum_{j=s+1}^r n_j$ .
- (III) La inmersión  $\psi$  es un embebimiento si y sólo si  $r = 2$  y  $w_1 = w_2 = 1$ . Es decir, hay solamente dos finales y son de tipo Scherk. En este caso, la envolvente convexa del grafo  $\widehat{\psi}(\widehat{\mathcal{S}})$  es, o bien una banda (si los dos finales son paralelos), o bien una región angular paralela a una de las cuatro regiones delimitadas por los dos planos tangentes en los finales.

*Demostración:* La primera de las afirmaciones es trivial a partir del Lema 7.1 y la Definición 7.1.

La segunda es consecuencia de que, dado un entorno anular  $A \subset \mathcal{S}$  alrededor de un final  $P_j$ , del Corolario 6.4 y de la propia definición de multiplicidad de un final se deduce que  $\psi(A)$  está embebido de forma natural en el cociente  $\mathbb{L}^3/\langle T^{n_j} \rangle$  y por tanto tenemos la siguiente descomposición:

$$\pi \circ \psi|_A : A \xrightarrow{h_1} \Pi/\langle T^{n_j} \rangle \xrightarrow{h_2} \Pi/\langle T \rangle,$$

donde la primera de las aplicaciones,  $h_1$ , es inyectiva y la segunda es un recubridor de  $n_j$  hojas. Por lo que concluimos que el número de vueltas de  $h$  alrededor de  $P_j$  es  $n_j$ . Como consecuencia, el número de hojas de  $h$ , que puede ser calculado contando el número total de vueltas alrededor del punto  $\infty_+$  coincide trivialmente con el indicado en el enunciado de la proposición.

Por último, la tercera de las afirmaciones se deduce de forma inmediata de (II) y del comportamiento asintótico de los finales visto en el Lema 7.1.  $\square$

**Observación 7.1** De la proposición anterior se deduce que, si  $\{P_1, \dots, P_s, P_{s+1}, \dots, P_r\}$  son los finales de la superficie ordenados de manera que  $\{P_1, \dots, P_s\}$  sean los de signatura positiva y el resto los de signatura negativa, entonces

$$\sum_{j=1}^s n_j = \sum_{j=s+1}^r n_j.$$

Esta relación también puede ser deducida del hecho de que la suma de los residuos de  $\Phi$  en la superficie compacta (con borde)  $\bar{\mathcal{S}}_0$  debe ser cero (fórmula de Stokes).



En efecto, de las Ecuaciones (7.4) y (7.5) en la demostración del Lema 7.1 se deduce que, si  $\varepsilon_j$  es la signatura del final  $P_j$  entonces

$$-\varepsilon_j n_j v = \operatorname{Re}(2\pi i \operatorname{Res}(\Phi, P_j)),$$

lo que nos lleva a la relación anterior.

## 7.2. UNA FÓRMULA TIPO JORGE-MEEKS

A continuación estableceremos una fórmula para superficies maximales simple y doblemente periódicas análoga a la dada por la Ecuación 3.1 en la Sección 3.1 para superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ . La idea es la misma, aplicar la fórmula de Riemann-Hurwitz para el recubridor ramificado  $h = \pi \circ \psi : \mathcal{S} \rightarrow \Pi/G$ , siendo  $\Pi \subset \mathbb{L}^3$  un plano espacial invariante por las traslaciones de  $G$  y  $\pi : \mathbb{L}^3/G \rightarrow \Pi/G$  la correspondiente proyección ortogonal.

Para aplicar esta fórmula necesitamos que las superficies implicadas sean compactas. Esto es trivial en el caso doblemente periódico, mientras que, como vimos en la Proposición 7.2, en el caso simplemente periódico ( $G = \langle T \rangle$ ) este recubridor extiende a los finales de la superficie,  $h : \bar{\mathcal{S}} \rightarrow \Pi/\langle T \rangle \cup \{\infty_+, \infty_-\} \equiv \bar{\mathbb{C}}$ , de forma que estos puntos son de ramificación.

Por tanto los puntos de ramificación de  $h$  son los finales (en caso de que los haya) y las singularidades de la superficie maximal  $\psi$ . Los correspondientes índices de ramificación fueron descritos en el Lema 2.1 y la Proposición 7.2. Un razonamiento análogo al de la Sección 3.1 nos lleva a la siguiente relación:

$$\chi(\bar{\mathcal{S}}) = W_\infty - V_s - \frac{V_l}{2} - \deg(g) + k_1. \quad (7.7)$$

Donde  $\chi(\bar{\mathcal{S}})$  es la característica de Euler de la superficie compacta (con borde)  $\bar{\mathcal{S}}$ ,  $V_s$  es la suma de los órdenes de  $\Phi$  en las singularidades espaciales,  $V_l$  la de los órdenes de los ceros de  $\Phi$  en las curvas singulares (que es un número par),  $\deg(g)$  representa el grado de la aplicación de Gauss  $g$  (vista como aplicación del doble de  $\bar{\mathcal{S}}$ ,  $\mathfrak{S}$ , en  $\bar{\mathbb{C}}$ ) y  $k_1$  es el número de singularidades luminosas. Por último, en el caso simplemente periódico  $W_\infty := \sum_{j=1}^r (n_j - 1)$ , siendo  $n_j$  la multiplicidad de los finales de la superficie, mientras que en el caso doblemente periódico  $W_\infty := 0$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  De la misma forma que ocurría en la Ecuación (3.1), la relación anterior puede ser deducida a través del cómputo del número de ceros y polos de la 1-forma  $\phi_3$  de la representación de Weierstrass en la superficie de Riemann compacta  $\mathfrak{S}$ .

### 7.3. REPRESENTACIÓN ANALÍTICA

En esta sección estableceremos un teorema de representación analítica para superficies simple y doblemente periódicas de tipo finito que nos permitirá construir nuevos ejemplos de estas superficies (Sección 7.4).

**Teorema 7.3** Sea  $\mathfrak{S}$  una superficie de Riemann (sin borde) compacta.

Supongamos que  $\mathfrak{S}$  admite una involución antiholomorfa  $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  de tal forma que el conjunto de sus puntos fijos consista de  $k_1$  curvas analíticas  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_1}$  disjuntas dos a dos y tales que  $\mathfrak{S} \setminus \cup_j \gamma_j$  tiene dos componentes conexas cuyas clausuras denotaremos por  $\overline{\mathcal{S}}_0$  y  $\overline{\mathcal{S}}_0^* = J(\overline{\mathcal{S}}_0)$ .

Consideremos  $(g, \phi_3)$  datos meromorfos satisfaciendo

- $J \circ g = 1/\bar{g}$  y  $|g| < 1$  en  $\overline{\mathcal{S}}_0 \setminus \partial(\overline{\mathcal{S}}_0)$ .
- La 1-forma vectorial  $\Phi$  satisface  $J^*(\Phi) = -\bar{\Phi}$ .
- O bien  $\Phi$  tiene todos sus polos simples (Caso I), o bien es holomorfa (Caso II).
- El grupo  $G$  formado por las traslaciones de vectores  $v = \text{Re} \int_{\gamma} \Phi$ ,  $\gamma \subset \overline{\mathcal{S}}_0$  curva cerrada, es un grupo cíclico en el caso I, o un grupo de rango dos que actúa de forma propia y discontinua en  $\mathbb{L}^3$  (caso II).

Finalmente definamos  $\mathcal{S}_0 := \overline{\mathcal{S}}_0 \setminus \{P_1, \dots, P_r\}$ , siendo  $\{P_1, \dots, P_r\}$  los polos de  $\Phi$  (caso de que existan), y

$$\psi_0 : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathbb{L}^3/G \quad \psi_0(p) := \text{Re} \int_{p_0}^p \Phi$$

donde  $p_0 \in \mathcal{S}_0$  es un punto arbitrario.

Entonces,  $\psi_0$  está bien definida e induce una inmersión maximal de tipo finito de  $\mathcal{S}$  en  $\mathbb{L}^3/G$ , donde  $\mathcal{S}$  se obtiene de  $\mathcal{S}_0$  identificando cada curva del borde a un solo punto. Dicha inmersión tiene  $k_1 + k_2$  singularidades, siendo  $k_2$  el número de ceros  $\Phi$  en  $\mathcal{S}_0 \setminus \cup_j \gamma_j$  contados sin multiplicidad.

**Corolario 7.4 (Caso embebido)** *La superficie construida en el Teorema anterior es embebida si, y solamente si, se verifica una de las siguientes condiciones adicionales:*

- (V.1)  $\Phi$  no se anula en  $\mathcal{S}_0$  (en particular  $k_2 = 0$ ) y  $g|_{\gamma_j} : \gamma_j \rightarrow \mathbb{S}^1$  es inyectiva  $\forall j = 1, \dots, k_1$  (es decir,  $\deg(g) = k_1$ ). Es decir, todas las singularidades son de tipo cónico.
- (V.2) (Sólo en el caso simplemente periódico)  $\mathcal{S}_0$  es biholomorfo a  $\mathbb{C}^*$  menos  $k_1$  discos, siendo ambos finales de tipo Scherk.

La demostración de estos resultados es análoga a las del Teorema 3.5 y el Corolario 3.6 para el caso de superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ .

## 7.4. CONSTRUCCIÓN DE EJEMPLOS

Esta sección está dedicada a la construcción explícita de superficies maximales y embebidas simple y doblemente periódicas de tipo finito. Para ello definiremos superficies compactas  $\mathfrak{S}$  y datos meromorfos  $(g, \phi_3)$  que estén en las condiciones del Teorema 7.3 y el Corolario 7.4. Además veremos que ciertos cocientes de estas superficies proporcionan ejemplos de todos los posibles casos para superficies maximales periódicas de tipo finito descritos en el Teorema 6.10.

FAMILIA I: SUPERFICIES SIMPLEMENTE PERIÓDICAS CON FINALES NO PARALELOS Y UNA SINGULARIDAD EN EL COCIENTE (SUPERFICIES DE TIPO SCHERK)

Consideremos la superficie de Riemann compacta  $\mathfrak{S} = \overline{\mathbb{C}}$ , con la reflexión antiholomorfa  $J(z) = 1/\bar{z}$ . Para cada  $b \in ]0, 1[$  definamos los siguientes datos meromorfos sobre  $\mathfrak{S}$ :

$$g(z) = z, \quad \text{y} \quad \phi_3 = \frac{zdz}{(z^2 - b^2)(b^2z^2 - 1)}.$$

Observemos que, definiendo  $\phi_1$ , y  $\phi_2$  como en (1.3), la 1-forma vectorial  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  tiene polos simples en  $z = b, -b, 1/b, -1/b$ . Así, si denotamos por  $\overline{\mathcal{S}}_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ , es inmediato comprobar que se satisfacen las condiciones del Teorema 7.3 y Corolario 7.4, siendo  $G$  el grupo generado por la traslación  $T$  de vector  $v = \text{Re}(2\pi i \text{Res}(\Phi, b)) = (\frac{-\pi(b^2-1)(b^4-1)}{2b}, 0, 0)$ .

Por tanto la aplicación

$$\psi : \mathcal{S}_0 = \overline{\mathcal{S}}_0 \setminus \{b, -b\} \rightarrow \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle,$$

$$\psi(p) = \mathfrak{p} \left( \int_0^p \Phi \right),$$

donde  $\mathfrak{p} : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle$  es la proyección al espacio cociente, define una superficie maximal y embebida con una singularidad en  $\mathbb{L}^3 / \langle T \rangle$ . La figura 7.1 representa el levantamiento a  $\mathbb{L}^3$  de una de estas superficies.

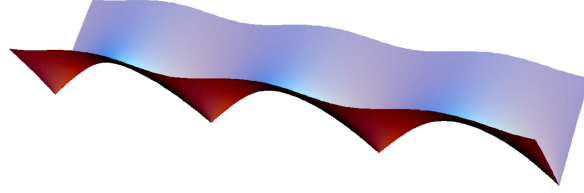


Figura 7.1: Superficie simplemente periódica en  $\mathbb{L}^3$  con finales no paralelos.

Además, la transformación antiholomorfa de  $\mathcal{S}_0$  dada por  $A(z) := -\bar{z}$  satisface  $A^*(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\bar{\phi}_1, -\bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3)$ . Por lo tanto el levantamiento de la superficie en  $\mathbb{L}^3$  es invariante por la isometría

$$R(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, x_3) + \operatorname{Re} \int_0^{A(0)} \Phi = (x_1, -x_2, x_3),$$

y por tanto el cociente de esta superficie por el grupo generado por la isometría  $R_1 := T \circ R$  es una superficie maximal (y embebida) con una singularidad perteneciente al tipo (b) descrito en la clasificación dada en el Teorema 6.10.

#### FAMILIA II: SUPERFICIES SIMPLEMENTE PERIÓDICAS CON FINALES PARALELOS Y DOS SINGULARIDADES EN EL COCIENTE

Para cada  $a, b \in \mathbb{R}^*$  con  $b < a < 1$ ,  $a > 0$ , consideremos la superficie de Riemann compacta de género 1,

$$\mathfrak{S} = \left\{ (z, w) \in \overline{\mathbb{C}^2} : w^2 = \frac{(z-a)(z-b)}{(az-1)(bz-1)} \right\},$$

con la involución antiholomorfa  $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ ,  $J(z, w) = (1/\bar{z}, 1/\bar{w})$ . El conjunto de puntos fijos de  $J$  está formado por dos curvas cerradas, correspondiendo a los dos curvas en  $\mathfrak{S}$  con  $|z| = 1$ . Por tanto, si denotamos por  $\overline{\mathcal{S}_0}$  al dominio:

$$\overline{\mathcal{S}_0} = \{(z, w) \in \mathcal{S}_0 : |z| \leq 1\}$$

y definimos los datos

$$g(z, w) = z \quad \text{y} \quad \phi_3 = \frac{dz}{w(az - 1)(bz - 1)},$$

el Teorema 7.3 y Corolario 7.4 aseguran que la inmersión

$$\psi : \mathcal{S}_0 = \overline{\mathcal{S}_0} \setminus \{(z, w) \in \mathcal{S}_0, z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle$$

dada como en el enunciado del teorema es una superficie maximal y embebida con 2 singularidades en  $\mathbb{L}^3 / \langle T \rangle$ , donde  $T$  es la traslación de vector  $v = \text{Re}(2\pi i \text{Res}(\Phi, 0)) = \text{Re}((\frac{-\pi}{\sqrt{ab}}, \frac{-i\pi}{\sqrt{ab}}, 0))$ . Nótese que el vector  $v$  está en la dirección del eje  $x_1$  si  $b > 0$  y en la dirección del eje  $x_2$  si  $b < 0$ . Un ejemplo de estas superficies (visto como la correspondiente superficie levantada en  $\mathbb{L}^3$ ) está representado en la Figura 7.2.

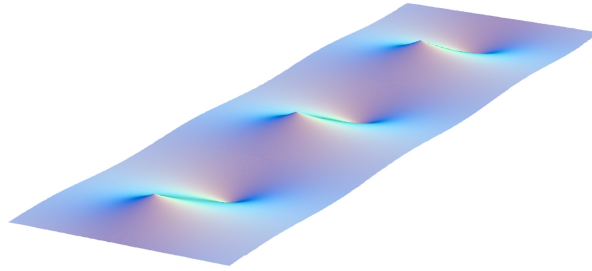


Figura 7.2: Superficie simplemente periódica en  $\mathbb{L}^3$  con finales paralelos.

Además, si hacemos que  $b = -a$ , las siguientes transformaciones de  $\mathcal{S}_0$ :

$$A_0(z, w) = (-\bar{z}, \bar{w}), \quad A_1(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}), \quad A_2(z, w) = (-z, w),$$

se levantan a las siguientes isometrías de  $\mathbb{L}^3$  que dejan invariante el levantamiento de la superficie:

$$R_0(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, -x_3) + \text{Re} \int_a^{A_0(a)} \Phi = (-x_1, x_2, -x_3) + \frac{v}{2},$$

$$R_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3) \quad \text{y} \quad R_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, -x_3) + \text{Re} \int_a^{A_2(a)} \Phi = (x_1, x_2, -x_3) + \frac{v}{2},$$

respectivamente. Así, los cocientes de la superficie en  $\mathbb{L}^3$  por los grupos  $\langle R_0 \rangle$ ,  $\langle T \circ R_1 \rangle$  y  $\langle R_2 \rangle$  porporcionan ejemplos de las superficies descritas en los casos (a), (b) y (c) del teorema 6.10 respectivamente.

FAMILIA III: SUPERFICIES DOBLEMENTE PERIÓDICAS CON 2 SINGULARIDADES EN EL COCIENTE

Para cada  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^*$ ,  $a_1 \neq a_2$ , sea  $\mathfrak{S}$  la superficie de Riemann compacta dada por

$$\mathfrak{S} = \{(z, w) \in \overline{\mathbb{C}}^2 : w^2 = \frac{(z^2 - a_1^2)(z^2 - a_2^2)}{(a_1^2 z^2 - 1)(a_2^2 z^2 - 1)}\},$$

junto con la involución  $J : \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$ ,  $J(z, w) = (1/\bar{z}, 1/\bar{w})$ , de forma que el dominio  $\mathcal{S}_0 = \{(z, w) \in \overline{\mathfrak{S}} : |z| \leq 1\}$  está bordeado por las dos curvas de puntos fijos de  $J$ . Por último consideremos:

$$g(z, w) = z, \quad \text{y} \quad \phi_3 = \frac{zdz}{w(a_1^2 z^2 - 1)(a_2^2 z^2 - 1)}.$$

Entonces, si denotamos por  $T_1$  y  $T_2$  las traslaciones de vectores  $v_i = 2\text{Re} \int_{\gamma_i} \Phi$ ,  $i = 1, 2$ , siendo  $\gamma_1$  (resp.  $\gamma_2$ ) un arco simple en  $\mathcal{S}_0$  uniendo  $a_1$  y  $-a_1$ , (resp.  $a_1$  y  $a_2$ ). Es inmediato comprobar que de hecho  $v_1 = (0, \lambda, 0)$ , y  $v_2 = (\mu, 0, 0)$ , para ciertos  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ . La superficie en la Figura 7.3 muestra un ejemplo de estas superficies.

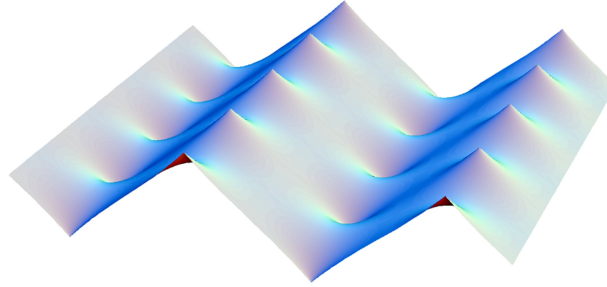


Figura 7.3: Superficie doblemente periódica en  $\mathbb{L}^3$  con dos singularidades.

Como en los casos anteriores, las transformaciones  $A_0(z, w) := (\bar{z}, -\bar{w})$ ,  $A_1(z, w) := (\bar{z}, \bar{w})$  y  $A_2(z, w) := (-z, -w)$  de  $\mathcal{S}_0$  inducen isometrías  $R_0, R_1$  y  $R_2$  de  $\mathbb{L}^3$ , dejando al levantamiento de la superficie invariante. Dichas isometrías son las siguientes:

$$R_0(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_2, -x_3), \quad R_1(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3) \quad \text{y}$$

$$R_2(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - \lambda/2, -x_3).$$

De esta forma, los correspondientes cocientes de la superficie en  $\mathbb{L}^3$  por los grupos  $\langle T_2 \circ R_0, T_1 \rangle$ ,  $\langle T_1 \circ R_1, T_2 \rangle$ ,  $\langle R_2, T_2 \rangle$  y  $\langle T_2 \circ R_0, R_2 \rangle$  proporcionan ejemplos de las superficies correspondientes a los casos (a), (b), (c) y (d) resp. descritos en el Teorema 6.10.

# SUPERFICIES EMBEBIDAS SIMPLEMENTE PERIÓDICAS DE TIPO FINITO

---

# 8

En este capítulo nos centraremos en las superficies maximales de tipo finito y embebidas en los cocientes de la forma  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  donde  $T$  es una traslación de vector espacial. Como ya vimos en el capítulo 5 estas superficies se levantan a grafos maximales con singularidades cónicas en  $\mathbb{L}^3$  e invariantes por la traslación  $T$ . Además, en el Lema 7.1 demostramos cada uno de los dos finales de la superficie es asintótico a un semi-cilindro llano de  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ .

A lo largo de este capítulo supondremos, aplicando una isometría y una homotecia si es necesario, que la traslación  $T$  está dada por

$$T(p) = p + (1, 0, 0), \quad p \in \mathbb{L}^3,$$

y uno de los dos finales de la superficie, que denotaremos por  $E_1$ , es asintótico al semi-cilindro  $\Delta = \{x_3 = 0, x_2 \leq 0\} \subset \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ . Así definimos

$\hat{\mathcal{G}}_n = \{\mathcal{G} \subset \mathbb{L}^3/\langle T \rangle \text{ maximal embebida con } n+1 \text{ singularidades y un final asintótico a } \Delta\}$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Como consecuencia de la normalización que hemos hecho sobre  $T$ , el límite del vector normal en el otro final de una superficie  $\mathcal{G} \in \hat{\mathcal{G}}_n$  (que denotaremos por  $E_2$ ) debe ser perpendicular a  $(1, 0, 0)$ . Es decir, la aplicación de Gauss  $g$  en  $E_2$  debe tomar valores en el intervalo  $] -1, 1[$ .

Nuestro objetivo en este capítulo es describir el espacio  $\hat{\mathcal{G}}_n$ . Al igual que ocurrió con el espacio  $\mathcal{G}_n$  de grafos maximales con  $n + 1$  singularidades en  $\mathbb{L}^3$ , demostraremos que este espacio puede ser dotado de forma natural de una estructura de variedad analítica, esta vez de dimensión  $3n + 2$ . Para ello seguiremos el mismo esquema que el desarrollado en el Capítulo 4 para el espacio  $\mathcal{G}_n$ . Así denotaremos por

$$\hat{\mathcal{M}}_n = \{(\mathcal{G}, \mathbf{m}) : \mathcal{G} \in \hat{\mathcal{G}}_n, \mathbf{m} \in (\mathbb{L}^3/\langle T \rangle)^{n+1} \text{ marca de } \mathcal{G}\}$$

al espacio de superficies marcadas (es decir, con un orden en el conjunto de sus singularidades).

El resultado de unicidad Teorema 4.5 dado para grafos maximales de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  tiene su análogo para el caso simplemente periódico.

**Teorema 8.1 (Unicidad para superficies de  $\hat{\mathcal{G}}_n$ )** Sean  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \hat{\mathcal{G}}_n$ . Supongamos que ambas tienen el mismo conjunto de singularidades y el final no normalizado es asintótico al mismo semi-cilindro de  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ . Entonces ambas superficies coinciden.

*Demostración:* Sean  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  como en el enunciado del teorema. Puesto que la traslación  $T$  tiene como vector asociado el vector  $v = (1, 0, 0)$ , las traslaciones verticales son isometrías bien definidas en  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ . Para cualquier  $t \in \mathbb{R}$ , escribamos  $\mathcal{G}_2(t) = \mathcal{G}_2 + (0, 0, t)$ .

Puesto que el comportamiento asintótico en ambas superficies es el mismo, existe  $t > 0$  suficientemente grande de forma que  $\mathcal{G}_2(t) > \mathcal{G}_1$ , es decir,  $\mathcal{G}_2(t) \cap \mathcal{G}_1 = \emptyset$  y  $\mathcal{G}_2(t)$  está por encima de  $\mathcal{G}_1$ . Sea  $t_0 = \inf\{t > 0 : \mathcal{G}_2(t) > \mathcal{G}_1\}$ . Veamos que  $t_0 = 0$ . Para ello supondremos por reducción al absurdo que  $t_0 > 0$ .

El caso en que  $\mathcal{G}_2(t_0) \cap \mathcal{G}_1 \neq \emptyset$  contenga puntos regulares queda descartado por el principio del máximo.

Por tanto supongamos que  $\mathcal{G}_2(t_0) \cap \mathcal{G}_1 = \emptyset$  (contacto en infinito). Como los finales de ambas superficies son asintóticos a semi-cilindros espaciales y llanos, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño,  $\mathcal{G}_2(t_0 - \epsilon) \cap \mathcal{G}_1$  es una variedad 1-dimensional conteniendo una curva de Jordan  $\Gamma$  bordeando dos anillos paralelos sin puntos regulares,  $E_1 \subset \mathcal{G}_1$  y  $E_2 \subset \mathcal{G}_2(t_0 - \epsilon)$ , con  $E_1 \cap E_2 = \Gamma$ . Sean  $F_1 = \int_{\Gamma} \nu_1$  y  $F_2 = \int_{\Gamma} \nu_2$  los flujos a lo largo de  $\Gamma$  en  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2(t_0 - \epsilon)$  resp. (ver Definición 4.2). No es difícil comprobar que  $F_i$  es ortogonal a  $v = (1, 0, 0)$  y al vector normal límite en el final  $E_i$ . Además  $\langle F_i, F_i \rangle = \langle v, v \rangle$ , y por tanto deducimos que  $F_1 = F_2$ . Sin embargo, la tercera coordenada de  $\nu_1$  es estrictamente mayor que la de  $\nu_2$  a lo largo de  $\Gamma$ , lo que lleva a contradicción. Por tanto  $t_0 = 0$ , y  $\mathcal{G}_2 > \mathcal{G}_1$ . Intercambiando los papeles de  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_2$  se demuestra que ambas superficies son en realidad la misma.  $\square$



## 8.1. ESPACIO DE MODULI

En esta sección demostraremos que el espacio  $\hat{\mathcal{G}}_n$  puede ser dotado de una estructura analítica de dimensión  $3n+2$ . Para ello notemos que  $\hat{\mathcal{G}}_n$  puede ser visto como el cociente del espacio  $\hat{\mathcal{M}}_n$  por la acción del grupo de permutaciones de orden  $n+1$ , por lo que bastará introducir en  $\hat{\mathcal{M}}_n$  una estructura analítica y luego inducirla al espacio cociente.

Siguiendo la “estrategia” del Capítulo 4 para los grafos maximales en  $\mathbb{L}^3$  definimos la aplicación

$$\hat{\Gamma} : \hat{\mathcal{M}}_n \longrightarrow (\mathbb{L}^3 / \langle T \rangle)^{n+1} \times ]-1, 1[,$$

$$\hat{\Gamma}(\mathcal{G}, \mathbf{m}) = (\mathbf{m}, g(E_2)).$$

Como consecuencia del Teorema 8.1, esta aplicación es inyectiva. Para demostrar que además es abierta y puede ser por tanto utilizada para definir en  $\hat{\mathcal{M}}_n$  una estructura analítica de dimensión  $3n+2$ , utilizaremos el mismo argumento que en la Sección 4.2, que trataba el mismo problema pero para el espacio  $\mathcal{G}_n$  de grafos maximales con  $n+1$  singularidades en  $\mathbb{L}^3$ : definir en  $\hat{\mathcal{M}}_n$  una estructura diferenciable de forma que  $\hat{\Gamma}$  sea diferenciable. Así el teorema de invariancia del dominio nos permitirá concluir que  $\hat{\Gamma}$  es abierta.

La organización de esta sección es idéntica a la de la Sección 4.2.

### 8.1.1. ESTRUCTURA CONFORME Y REPRESENTACIÓN DE WEIERSTRASS

Como ya vimos, el soporte conforme de una superficie en  $\hat{\mathcal{G}}_n$  es biholomorfo a un dominio circular (ver Definición 4.3) menos dos puntos, que se corresponden con los finales (Corolario 7.4). Rescataremos la notación de dominios circulares *marcados* establecida en la Definición 4.4, aunque en este caso por conveniencia no normalizaremos los dominios para que la primera de las componentes del borde sea la circunferencia de centro 0 y radio 1.<sup>1</sup>

Así, a partir de ahora denotaremos por  $\hat{\mathcal{T}}_n$  al abierto de  $\mathbb{R}^{3n+1}$  formado por las uplas  $(c_0, c_1, \dots, c_n, r_1, \dots, r_n) \in ]1, +\infty[ \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{R}^+)^n$  tales que los discos cerrados delimitados

<sup>1</sup>Esto se debe a que en este caso el número de finales es dos, por lo que será fundamental fijar dos puntos para que estén contenidos en todos los dominios marcados. Los puntos que elegiremos serán  $z = 0, \infty \in \mathbb{C}$ , por lo que ninguna de las circunferencias del borde del dominio puede encerrar al origen.

por los círculos  $a_j(v)$  de centro  $c_j$  y radio  $r_j$ , con el convenio  $r_0 := c_0 - 1$ , son disjuntos dos a dos y no contienen al origen.

Para cada  $v \in \hat{\mathcal{T}}_n$  denotaremos por  $\Omega(v) \subset \bar{\mathbb{C}}$  el correspondiente dominio circular delimitado por los círculos  $a_j(v)$ ,  $j = 0, \dots, n$ .

**Nota**  $\rightsquigarrow$  Obsérvese que para todo  $v \in \hat{\mathcal{T}}_n$  se cumple que  $1 \in \partial\Omega(v)$ .

Por lo tanto, para cada  $(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) \in \hat{\mathcal{M}}_n$  existe un único  $v \in \hat{\mathcal{T}}_n$  tal que:

- $\mathcal{G} \setminus F$  ( $F$  es el conjunto de singularidades) es biholomorfa a  $\Omega(v) \setminus \{0, \infty\}$ .
- $z = 0$  corresponde al final  $E_1$  normalizado para que fuese asintótico a  $\Delta$ .
- Existe una inmersión maximal y conforme  $\psi : \overline{\Omega(v)} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  tal que  $\psi(\overline{\Omega(v)} \setminus \{0, \infty\}) = \mathcal{G}$  y además  $\psi(a_j(v)) = q_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ , siendo  $\mathfrak{m} = (q_0, \dots, q_n)$ .

Como ya hicimos en la Sección 4.2, para cada  $v \in \hat{\mathcal{T}}_n$ , denotaremos por  $\mathfrak{S}(v)$  al doble de  $\Omega(v)$ , que es una superficie de Riemann compacta de género  $n$ , y por  $J_v : \mathfrak{S}(v) \rightarrow \mathfrak{S}(v)$  a la simetría especular asociada.

Así, los datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  de la superficie son datos meromorfs en  $\mathfrak{S}(v)$ . Además, puesto que estamos suponiendo que la superficie está orientada para que  $|g| \leq 1$  en  $\overline{\Omega(v)}$  y que el final  $z = 0$  es horizontal, teniendo en cuenta las simetrías  $J_v \circ g = 1/\bar{g}$  y  $J_v^*(\phi_3) = -\bar{\phi}_3$  y que  $g$  tiene grado  $n + 1$  (Corolario 7.4), es fácil ver que los divisores para  $g$  y  $\phi_3$  han de tener la siguiente expresión:

$$[g] = \frac{D \cdot 0}{J(D) \cdot J(0)} \quad \text{y} \quad [\phi_3] = \frac{D \cdot J(D)}{\infty \cdot J(\infty)}, \quad (8.1)$$

donde  $D \in \text{Div}_n(\Omega(v))$ .

### 8.1.2. UNA BIYECCIÓN PARA $\hat{\mathcal{M}}_n$

Como consecuencia de (8.1), si  $\varphi_v : \mathfrak{S}(v) \rightarrow \mathcal{J}(v)$  representa la aplicación de Abel-Jacobi de  $\mathfrak{S}(v)$  (ver Sección 1.5), las ecuaciones para el divisor  $D \in \text{Div}_n(\Omega(v))$  son:

$$\varphi_v(D \cdot 0) - \varphi_v(J_v(D \cdot \infty)) = 0, \quad \text{y} \quad \varphi_v(D \cdot J_v(D)) - \varphi_v(\infty \cdot J_v(\infty)) = T(v),$$

donde  $T(v)$  es la imagen vía  $\varphi_v$  de cualquier divisor canónico en  $\mathfrak{S}(v)$ .

Sumando estas dos ecuaciones llegamos a

$$2\varphi_v(D \cdot 0) = T(v) + \varphi_v(0 \cdot \infty \cdot J_v(0) \cdot J_v(\infty)).$$

Con lo esta vez el fibrado espinorial que definiremos será

$$\hat{\mathcal{S}}_n = \{(v, D) \in \mathfrak{Div}_n : 2\varphi_v(D \cdot 0) = T(v) + \varphi_v(0 \cdot \infty \cdot J_v(0) \cdot J_v(\infty))\}. \quad (8.2)$$

Un argumento idéntico al empleado en la demostración del Teorema 4.7 nos permite obtener el siguiente teorema.

**Teorema 8.2**  $\hat{\mathcal{S}}_n$  es una subvariedad diferenciable de dimensión  $3n + 1$  de  $\mathfrak{Div}_n$ .

Ahora definiremos la biyección que nos permitirá dotar a  $\hat{\mathcal{M}}_n$  de una estructura diferenciable. Como ocurría en el caso de las superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ , dada una superficie marcada  $Y = (\mathcal{G}, \mathfrak{m}) \in \hat{\mathcal{M}}_n$  con datos de Weierstrass  $(g, \phi_3)$  el correspondiente divisor  $(v, D) \in \hat{\mathcal{S}}_n$  dado por la Ecuación (8.1) caracteriza a  $(g, \phi_3)$  salvo multiplicación por una constante. Esto se traduce en que la superficie  $Y$  está unívocamente determinada por  $(v, D)$  salvo traslación en  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  y/o simetría con respecto al cilindro llano  $\{x_3 = 0\} \subset \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ .

Así, para distinguir entre dos superficies que difieran en una traslación fijaremos la primera de las singularidades de la marca,  $q_0 \in \mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ , mientras que la posibilidad de que difieran en una simetría horizontal la evitaremos fijando el signo de la tercera coordenada del flujo (ver Definición 4.2) en  $q_0, \epsilon_0 \in \{\pm 1\}$ .

Con esta notación definimos

$$\hat{\mathcal{E}} : \hat{\mathcal{M}}_n \longrightarrow \hat{\mathcal{S}}_n \times \mathbb{L}^3/\langle T \rangle \times \{-1, 1\},$$

$$\hat{\mathcal{E}}(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) = ((v, D), q_0, \epsilon_0).$$

La inyectividad de  $\hat{\mathcal{E}}$  es consecuencia de los comentarios anteriores. La sobreyectividad es consecuencia del siguiente lema, cuya demostración es totalmente análoga a la del Lema 4.8 para superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ .

**Lema 8.3** Sea  $(v, D) \in \hat{\mathcal{S}}_n$ , entonces se cumplen

$$\varphi_v(D \cdot 0) - \varphi_v(J_v(D \cdot 0)) = 0, \quad \text{y} \quad \varphi_v(D \cdot J_v(D)) - \varphi_v(\infty \cdot J_v(\infty)) = T(v).$$

**Proposición 8.4** La aplicación  $\hat{\mathcal{E}}$  es una biyección y por tanto induce una estructura diferenciable sobre  $\hat{\mathcal{M}}_n$  de dimensión  $3n + 4$ .

La demostración de este hecho es similar a la del correspondiente resultado en  $\mathbb{L}^3$  (Proposición 4.9). Sin embargo, hay un detalle más a tener en cuenta en este caso, y es el hecho de que debemos garantizar que la inmersión que construimos a partir de un punto  $X \in \hat{\mathcal{S}}_n$  debe tomar valores en el espacio  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$ , siendo  $T$  la traslación de vector  $v = (1, 0, 0)$ .

*Demostración:* Sea  $x \in \hat{\mathcal{S}}_n$ ,  $x = (v, D)$ . En virtud del Lema 8.3, el Teorema de Abel garantiza la existencia de una única función  $g_x^0$  meromorfa sobre  $\mathfrak{S}(v)$  tal que

$$[g_x^0] = \frac{D \cdot 0}{J_v(D \cdot 0)}, \quad \text{y} \quad g_x^0(1) = 1.$$

Además, puesto que  $J_v(1) = 1$ , es inmediato comprobar que  $g_x^0 \circ J_v = 1/\overline{g_x^0}$ .

Por otro lado, este lema también nos da la existencia de una 1-forma meromorfa  $\phi$  en  $\mathfrak{S}(v)$  cuyo divisor es  $\frac{D \cdot J_v(D)}{\infty \cdot J_v(\infty)}$ . Después de multiplicar por una constante adecuada podemos suponer que  $J_v^*(\phi) = -\bar{\phi}$ . Si consideramos la carta  $(U(v), z = \text{Id}|_{U(v)})$ , donde

$$U(v) = (\Omega(v) \cup \Omega(v)^* \cup a_0(v)) \setminus \{0, \infty, J_v(0), J_v(\infty)\},$$

y escribimos  $\phi(z) = h(z) \frac{dz}{z - c_0(v)}$ ,  $z \in U(v)$ , se deduce fácilmente a partir de lo anterior que  $h(z) \in \mathbb{R}^*$  sobre la curva  $a_0(v) = \{|z - c_0(v)| = r_0(v) = 1 - c_0(v)\}$ . Definiremos

$$\phi_3^0(x) := \frac{1}{h(1)} \phi.$$

Las ecuaciones

$$[\phi_3^0(x)] = \frac{D \cdot J_v(D)}{\infty \cdot J_v(\infty)} \quad \text{y} \quad h_3(1) = 1$$

caracterizan  $\phi_3^0(x)$  como 1-forma meromorfa sobre  $\mathfrak{S}(v)$ .

Por último, puesto que nuestra intención es que la inmersión maximal que definamos a partir de unos datos de Weierstrass  $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  tome valores en  $\mathbb{L}^3/\langle T \rangle$  debemos garantizar que

$$\text{Re} \int_{\gamma_0} (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = (\pm 1, 0, 0),$$

siendo  $\gamma_0$  una curva simple encerrando al final  $z = 0$ . Esto lo conseguiremos multiplicando  $g_x^0$  por cierto número  $\theta_x \in \mathbb{S}^1$  y  $\phi_3^0$  por un real  $r_x \in \mathbb{R}^*$ . Así, la condición anterior se expresa como:

$$\text{Im} \left( \text{Res}_{|z=0} \left( \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\theta_x g_x^0} - \theta_x g_x^0 \right) r_x \phi_3^0 \right) \right) = \pm 2\pi,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\theta_x g_x^0} + \theta_x g_x^0\right)r_x \phi_3^0\right)\right) &= 0, \\ \operatorname{Im}\left(\operatorname{Res}_{z=0}\left(r_x \phi_3^0\right)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $g_x^0$  tiene un cero simple en  $z = 0$  y  $\phi_3$  es regular, si llamamos  $c_x = \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\phi_3^0(x)}{g_x^0} \in \mathbb{C}^*$  la ecuación anterior es equivalente a que  $\theta_x$  y  $r_x$  verifiquen:

$$r_x \theta_x^{-1} = \pm 1 / (c_x \pi). \quad (8.3)$$

Observemos que esta ecuación determina a  $\theta_x \in \mathbb{S}^1$  de forma única mientras que  $r_x \in \mathbb{R}^*$  está determinado salvo un signo.

Por tanto, dado  $\epsilon_0 \in \{-1, 1\}$ , es inmediato comprobar que existen unos únicos  $\theta_x \in \mathbb{S}^1$  y  $r_{x, \epsilon_0} \in \mathbb{R}^*$  verificando (8.3) y de forma que el signo de  $\operatorname{Im} \int_{a_0(v)} r_{x, \epsilon_0} \phi_3^0(x)$  coincida con  $\epsilon_0$ .

Como consecuencia, si para cada  $X = (x, q_0, \epsilon_0) \in \hat{\mathcal{S}}_n \times \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle \times \{-1, 1\}$  definimos

$$g_x = \theta_x g_x^0, \quad \phi_3(x, \epsilon_0) = r_{x, \epsilon_0} \phi_3^0(x), \quad (8.4)$$

el Teorema 7.3 nos asegura que la aplicación

$$\begin{aligned} \psi_X : \overline{\Omega(v)} \setminus \{0, \infty\} &\rightarrow \mathbb{L}^3 / \langle T \rangle, \\ \psi_X(z) &:= q_0 + \operatorname{Re} \int_1^z \left( \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g_X} - g_X \right), \frac{-1}{2} \left( \frac{1}{g_X} + g_X \right), 1 \right) \phi_3(X), \end{aligned}$$

nos proporciona una superficie maximal  $\mathcal{G}_X := \psi_X \left( \overline{\Omega(v)} \setminus \{0, \infty\} \right) \in \hat{\mathcal{G}}_n$ .

Por último, definiendo la marca  $\mathfrak{m}_X$  correspondiente a  $\mathcal{G}_X$  como  $\mathfrak{m}_X = (q_0(X), \dots, q_n(X))$ , con  $q_j(X) = \psi_X(a_j(v))$ ,  $j = 0, \dots, n$ , es inmediato comprobar que  $\mathcal{E}^{-1}(X) = \{(\mathcal{G}_X, \mathfrak{m}_X)\}$ , con lo que se demuestra que  $\mathcal{E}$  es una biyección.  $\square$

### 8.1.3. LA APLICACIÓN $\hat{\Gamma}$ ES ABIERTA

**Teorema 8.5** *La aplicación  $\hat{\Gamma} : \hat{\mathcal{M}}_n \rightarrow (\mathbb{L}^3 / \langle T \rangle)^{n+1} \times ]-1, 1[$  dada por  $\hat{\Gamma}(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) = (\mathfrak{m}, g(\infty))$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  cuando consideramos sobre  $\hat{\mathcal{M}}_n$  la estructura diferenciable inducida por la biyección  $\hat{\mathcal{E}}$ .*

*Demostración:* Análogamente al caso de  $\mathbb{L}^3$  (Teorema 4.12), la demostración se basa en el hecho de que las aplicaciones

$$x \in \hat{\mathcal{S}}_n \mapsto g_x \in \mathcal{C}_n \quad \text{y} \quad x \in \hat{\mathcal{S}}_n \mapsto \phi_3(x, \epsilon_0 = 1) \in \mathcal{H}_n,$$

dadas por (8.4) son diferenciables con regularidad de orden 2 y 1 respectivamente (ver Definiciones 4.12 y 4.13). Este hecho es consecuencia directa (ver la demostración de la Proposición 4.11 en el caso de  $\mathbb{L}^3$ ) de los Lemas A.II y A.IV que demostramos en el Apéndice del Capítulo 4.  $\square$

Y finalmente, aplicando el teorema de invarianza del dominio obtenemos el siguiente resultado sobre la estructura del espacio  $\hat{\mathcal{M}}_n$ .

**Corolario 8.6 (Estructura del espacio  $\hat{\mathcal{M}}_n$ )** *La aplicación  $\hat{\Gamma} : \hat{\mathcal{M}}_n \rightarrow (\mathbb{L}^3/\langle T \rangle)^{n+1} \times ]-1, 1[$  es inyectiva y abierta, y por tanto induce en  $\hat{\mathcal{M}}_n$  una estructura de variedad real analítica de dimensión  $3n + 4$ .*

#### 8.1.4. CONCLUSIONES

Finalmente, como consecuencia del Corolario 8.6 podemos obtener el siguiente resultado sobre la estructura del espacio  $\hat{\mathcal{G}}_n$  de superficies maximales embebidas simplemente periódicas con  $n + 1$  singularidades. Su demostración es totalmente análoga a la del Teorema 4.14 en el contexto de superficies de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$ .

**Teorema 8.7** *La acción  $\lambda : \mathcal{P}_n \times \hat{\mathcal{M}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{M}}_n$ ,  $\lambda(\tau, (\mathcal{G}, \mathfrak{m})) = (\mathcal{G}, \tau(\mathfrak{m}))$ , es propiamente discontinua. Como consecuencia, la correspondiente proyección al cociente  $\mathfrak{p} : \hat{\mathcal{M}}_n \rightarrow \hat{\mathcal{G}}_n$ ,  $\mathfrak{p}(\mathcal{G}, \mathfrak{m}) = \mathcal{G}$ , es un homeomorfismo local y puede ser utilizada para inducir en  $\hat{\mathcal{G}}_n$  una única estructura analítica haciendo a  $\mathfrak{p}$  un recubridor de  $(n + 1)!$  hojas.*

La topología subyacente en esta estructura coincide, no sólo con la topología inducida por la aplicación  $\hat{\mathcal{E}}$ , sino también con la de la convergencia uniforme sobre compactos. La prueba de este hecho es de nuevo similar a la del correspondiente resultado en  $\mathbb{L}^3$  (Teorema 4.15).

**Teorema 8.8 (Topología de  $\mathcal{G}_n$ )** *Sea  $\{G_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de superficies en  $\mathcal{G}_n$ . Entonces  $\{G_k\} \rightarrow G_0 \in \mathcal{G}_n$  en la topología de  $\mathcal{G}_n$  si y sólo si los grafos  $\{G_k\}$  convergen a  $G_0$  uniformemente sobre dominios compactos del plano  $\{x_3 = 0\}$ .*

# PROBLEMAS ABIERTOS

---

- SOBRE LA ESTRUCTURA CONFORME DE LAS SUPERFICIES MAXIMALES:

Una cuestión que permanece abierta es la referente a la estructura conforme de la superficies maximales con singularidades aisladas. Conviene resaltar que en esta memoria hemos establecido algunos resultados parciales en este sentido. Bien imponiendo hipótesis sobre el comportamiento en infinito de la superficie (Teorema 2.3 y Corolario 2.4) o bien imponiendo cierta estructura en el conjunto de las singularidades (Corolario 3.2 y Teorema 6.3), obteniéndose siempre que la estructura conforme subyacente es parabólica (o relativamente parabólica en el caso con borde). Sin embargo, el caso general permanece aún abierto.

- SOBRE EL ESPACIO DE MODULI DE SUPERFICIES EMBEBIDAS DOBLEMENTE PERIÓDICAS:

Como hemos visto, los estudios de los espacios de moduli de los grafos maximales de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  o simplemente periódicos y de tipo finito en  $\mathbb{L}^3$  son análogos. Sin embargo, este esquema no puede ser extrapolado (al menos no en un primer momento) al caso doblemente periódico. La principal novedad de este caso respecto a los anteriores es que ahora el soporte conforme de la superficie cociente

no es biholomorfo a un dominio circular del plano, sino que tiene género uno, con lo se complica el problema de periodos a resolver para poder obtener superficies bien definidas. No obstante, sí que se pueden utilizar las mismas herramientas anteriores para establecer un principio de unicidad para estas superficies y dar información sobre la estructura del correspondiente espacio de moduli.

■ EL BORDE DEL ESPACIO DE MODULI:

Referente al espacio de moduli de las superficies maximales hay otra cuestión que no hemos tratado en esta memoria y que sería de gran utilidad para una mejor comprensión del comportamiento de estas superficies. Se trata del estudio de la frontera de estos espacios. Esto implicaría profundizar en el comportamiento de las sucesiones de grafos maximales con un número fijo de singularidades cuando un grupo de ellas *colapsan* en una sola singularidad.

■ ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES MAXIMALES (NO PERIÓDICAS) CON UN CONJUNTO INFINITO DE SINGULARIDADES AISLADAS:

Como ya citamos anteriormente, existen resultados sobre existencia de superficies con un conjunto de singularidades compacto. En esta memoria hemos tratado el caso con singularidades aisladas y en número infinito, siendo la superficie periódica. No existen sin embargo, resultados de carácter general sobre superficies maximales con una cantidad infinita de singularidades aisladas, tales como existencia, estructura conforme, comportamiento asintótico, etcétera.

■ SUPERFICIES PERIÓDICAS DE TIPO HELICOIDAL:

En nuestro estudio de superficies periódicas nos hemos centrado en aquellas de tipo finito, lo que implica en particular que el multigrafo tiene un número finito de hojas. Por tanto este estudio excluye aquellas superficies invariantes por movimientos helicoidales de eje temporal. Sería interesante obtener resultados de unicidad para el helicoide maximal, en la línea de los ya obtenidos en el ambiente riemanniano.

■ SUPERFICIES CON FLUJO VERTICAL:

Es conocido que la catenoide euclídea es la única superficie minimal no llana propiamente embebida con curvatura total finita y flujo vertical. El resultado análogo en el ambiente lorentziano afirmarí que la catenoide lorentziana es el único grafo minimal con flujo vertical en todas sus singularidades. Este problema permanece aún abierto, si bien en esta memoria hemos obtenido un resultado parcial



---

(Teorema 4.4) imponiendo que todas las singularidades del grafo apunten hacia abajo.



# ÍNDICE ALFABÉTICO

---

- aplicación de Abel-Jacobi, 18
- aplicación de Gauss, 3
- aplicación de Gauss de una superficie maximal, 10
- carta universal, 61
- cono de luz, 1
- crecimiento logarítmico, 53
- curva singular, 22
- datos de Weierstrass, 11
- divisor
  - canónico, 16
  - especial, 88
  - principal, 16
- doble de una superficie, 18
- dominio circular, 59
  - marcado, 59
- fibrado de  $k$ -divisores, 62
- fibrado espinorial, 65
- fibrado jacobiano, 64
  - involución especular del, 68
- final de tipo Scherk, 129
- final de una superficie, 16, 37
- flujo a lo largo de una curva cerrada, 53
- grafo local, 3
- grafo marcado, 52
- Hölder-continuidad, 14
- inmersión
  - completa, 2
  - espacial, 2
- levantamiento de una superficie, 104
- marca
  - de un dominio circular, 59
  - de una superficie o grafo, 52
- multigrafo, 7
- multiplicidad de un final, 129
- operador elíptico, 15
  - estrictamente, 15
- parabolicidad relativa, 27
- plano espacial, temporal o luminoso, 1
- recta espacial, temporal o luminosa, 1
- representación de Weierstrass, 11
- Scherk, final de tipo, 129
- signatura de un final, 129
- singularidad
  - aislada, 4

- cónica, 27
- embebida, 4
- espacial, 21
- luminosa, 21
- soporte conforme, 4
- superficie
  - $G$ -periódica, 103
  - completa, 2
  - de tipo finito, 35
  - doblemente periódica, 125
  - entera, 8, 105
  - espacial, 2
  - incompresible, 105
  - periódica, 103
  - simplemente periódica, 125
- superficie marcada, 52
- teorema de Abel, 18
- tipo conforme finito, 16, 36
- tipo finito, 35
- torque a lo largo de una curva, 53
- variedad Jacobiana, 17
- vector de las constantes de Riemann, 83
- vector espacial, temporal o luminoso, 1
- Weierstrass, representación de, 11

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [ACM] L.J. Alias, R. Chaves, P. Mira: *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz-Minkowski space*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 134 (2003), 289-316.
- [Ahl] L. V. Ahlfors, L. Sario: *Riemann surfaces*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960.
- [BS] R. Bartnik, L. Simon: *Spacelike hypersurfaces with prescribed boundary values and mean curvature*. Comm. Math. Phys., 87 (1982/83), 131-152.
- [Bry] R. Bryant: *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*. Astérisque, 154-155 (1987) (1988), 321-347.
- [Ca] E. Calabi: *Examples of the Bernstein problem for some nonlinear equations*. Proc. Symp. Pure Math., 15, (1970), 223-230.
- [ChY] S. Y. Cheng and S. T. Yau: *Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*. Ann. of Math. (2), Vol. 104 (1976), 407-419.
- [Eck] K. Ecker: *Area maximizing hypersurfaces in Minkowski space having an isolated singularity*. Manuscripta Math., Vol. 56 (1986), 375-397.
- [ER] F. J. M. Estudillo, A. Romero: *Generalized maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* . Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 111, (1992), 515-524.
- [FK] H. M. Farkas, I. Kra: *Riemann surfaces*. Graduate Texts in Math., 72, Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [FL1] I. Fernández, F.J. López: *Periodic maximal surfaces in the Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* . Preprint. ArXiv e-print archive math.DG/0412461.

- [FL2] I. Fernández, F.J. López: *Relative parabolicity of zero mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}_1^3$* . Preprint. ArXiv e-print archive math.DG/0410435.
- [FLS1] I. Fernández, F.J. López, R. Souam: *The space of complete embedded maximal surfaces with isolated singularities in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* . Math. Ann. 332 (2005) 605-643.
- [FLS2] I. Fernández, F. J. López and R. Souam: *The moduli space of embedded singly periodic maximal surfaces with isolated singularities in the Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* . Preprint. ArXiv e-print archive math.DG/0412190.
- [GMM] J. A. Gálvez, A. Martínez, F. Milán: *Flat surfaces in the hyperbolic 3-space*. Math. Ann. 316 (2000) 419-435.
- [GT] D. Gilbarg, N. S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, (1977).
- [GM] W. Goldman, G. A. Margulis: *Flat Lorentz 3-manifolds and cocompact Fuchsian groups*. Contemp. Math. **262**, Amer. Math. Soc., Providence, 2000, 135-145.
- [Gry] A. Grigor'yan: *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc 36 (1999), 135-249.
- [Hub] A. Huber: *On subharmonic functions and differential geometry in the large*. Comment. Math. Helv., **32**, (1957), 13-72.
- [JM] L. Jorge, W.H. Meeks III: *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*. Topology, **2** (1983), 203-221.
- [HS] Z.-X. He, O. Schramm: *Fixed points, Koebe uniformization and circle packings*. Ann. of Math. (2) **137** (1993), no. 2, 369-406.
- [HM] Hoffman, D., Meeks, W.H., III: *The strong half space theorem for minimal surfaces*. Inventiones Math., Vol. **101** (1990), 373-377.
- [Ki] R. M. Kiehn: *Falaco Solitons. Cosmic strings in a swimming pool*. <http://www22.pair.com/csdc/pdf/falsol.pdf>
- [Kly] A. A. Klyachin: *Description of the set of singular entire solutions of the maximal surface equation*. Sbornik Mathematics, **194** (2003), no. 7, 1035-1054.

- [KM] V. A. Klyachin, V.M. Miklyukov: *Geometric structures of tubes and bands of zero mean curvature in Minkowski space*. *Annales Academia Scientiarum Fennicae Mathematica*, **28** (2003) 239-270.
- [KM2] A.A. Klyachin, V.M. Miklyukov: *Existence of solutions with singularities for the maximal surface equation in Minkowski space*. *Russian Acad. Sci.Sb. Math.* **80** (1995), 87-104
- [Kob] O. Kobayashi: *Maximal surfaces with conelike singularities*. *J. Math. Soc. Japan* **36** (1984), no. 4, 609–617.
- [Kus] R. Kusner: *Bubbles, conservation laws and balanced diagrams*. *Geometric Analysis and Computer Graphics, Sci. Res. Inst. Publ., Springer-Verlag*, **17**, (1990), 103-108.
- [LLS] F. J. López, R. López and R. Souam: *Maximal surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* . *Michigan J. of Math.*, **47** (2000), 469-497.
- [Mar] G. A. Margulis: *Complete affine locally flat manifolds with a free fundamental group*. *J. Soviet Math.* **134**, (1987), 129-134.
- [MT] J. E. Marsden, F. J. Tipler: *Maximal hypersurfaces and foliations of constant mean curvature in general relativity*. *Phys. Rep.*, Vol. **66** (1980), no. 3, 109-139.
- [Mess] G. Mess: *Lorentz spacetimes of constant curvature*. Preprint Institut des Hautes Études Scientifiques (1990).
- [Oss] R. Osserman: *A survey of minimal surfaces*. Dover Publications, New York, second edition, 1986.
- [Per] J. Pérez: *Riemann bilinear relations on minimal surfaces*. *Math. Ann.*, **310**, (1998), 307-332.
- [Ros] A. Ros: *Embedded minimal surfaces: forces, topology and symmetries*. *Calc. Var.*, **4**, (1996), 469-496.
- [Sch] R. Schoen: *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*. *J. Differential Geometry*, **18**, (1983), 701-809.
- [Str] K. Strebel: *Quadratic Differentials*. A series of modern surveys in Mathematics **5**, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[UY] M. Umehara , K. Yamada: *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*. Preprint.

[Wolf] J. Wolf: *Spaces of Constant curvature*. McGraw-Hill, New York (1967).