Concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios

Resolución de 22 de junio (BOE de 03/07/2023)

Historial académico, docente e investigador

Proyectos docente e investigador

Resumen del tema elegido

Candidato: Jesús Montejo Gámez

Área de didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Plaza 14/8/2023, noviembre de 2023

Concurso público para la adjudicación de plazas de Profesor Titular de Universidad

Resolución de 22-06-2023, de la Universidad de Granada (publicada en BOE el 03-07-2023)

Departamento de Didáctica de la Matemática
Código de la plaza: 14/8/2023

Historial
Proyecto docente e investigador
Resumen de tema elegido

Jesús Montejo Gámez

Presentación: 23 de noviembre de 2023

La presente memoria contiene el historial académico, docente e investigador del candidato Jesús Montejo Gámez, así como sus proyectos investigador y docente, y el resumen del tema elegido para optar a la plaza de Profesor Titular de Universidad con código 14/8/2023, cuyo perfil de docencia es "Bases Matemáticas para la educación primaria", y cuyo perfil de investigación es "Modelización matemática en la formación inicial de maestros de Educación Primaria". Esta plaza, adscrita al área de conocimiento de Didáctica de la Matemática y al departamento de Didáctica de la Matemática, fue publicada en la *Resolución de 22-06-2023, de la Universidad de Granada, por la que se convoca concurso de acceso a plazas de cuerpos docentes universitarios* (publicada en el BOE de 03-07-2023).

UNIVERSIDAD DE GRANADA

QUÉ ALEGRÍA MÁS TONTA...

Normativa aplicable

La Universidad de Granada, en su Resolución de 22-06-2023 (publicada en el BOE del 03-07-2023) convocó a concurso a plazas de cuerpos docentes universitarios.

En la disposición transitoria décima primera de la Ley Orgánica 2/2023, de 22 de marzo, del Sistema Universitario, se establece que las convocatorias para la cobertura de plazas de personal docente e investigador oficialmente publicadas antes del 31 de diciembre de 2023, podrán regirse por la normativa vigente antes de la entrada en vigor de esta Ley Orgánica. Por tanto, la convocatoria de este concurso se ajusta a los términos previstos en el artículo 52 de la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades, modificada por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril y de acuerdo a la normativa vigente: Real Decreto 1313/2007, de 5 de octubre, por el que se regula el régimen de los concursos de acceso a cuerpos docentes universitarios, artículo 114 de los Estatutos de la Universidad de Granada, aprobados por Decreto 231/2011, de 12 de julio del Consejo de Gobierno de la Comunidad Autónoma de Andalucía, (BOJA de 28 de julio) y la Normativa de aplicación de la Universidad de Granada (NPAUGR) que regula el procedimiento de los concursos de acceso a los cuerpos docentes universitarios, aprobada en Consejo de Gobierno de la Universidad de Granada el 27 de septiembre de 2011, (BOJA de 10 de octubre).

Las plazas de la convocatoria se ofertan atendiendo a la tasa de reposición de efectivos fijada en un máximo del 120 por cien por el artículo 20.Uno.1 de la Ley 22/2021, de 28 de diciembre, de Presupuestos Generales del Estado para el año 2022 (BOE de 29 de diciembre) y en el artículo 13.1 de la Ley 3/2020, de 28 de diciembre, del Presupuesto de la Comunidad Autónoma de Andalucía para el año 2021 (BOE del 20 de enero), y una vez obtenida la autorización por Orden de 31 de enero de 2023, de la Consejería de Universidad, Investigación e Innovación, en los términos establecidos por la legislación vigente, según lo dispuesto en el Decreto 54/2013, y la Resolución de 21 de noviembre de 2022, de la Universidad de Granada, complementaria a la Resolución de 13 de junio de 2022, de esta Universidad, por la que se publica la Oferta de Empleo Público (OEP) del personal docente e investigador para el año 2022 (BOJA de 24 de noviembre). Entre las plazas ofertadas se encuentra la de código 14/8/PCD2023, adscrita al área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, bajo el perfil de docencia "Bases Matemáticas para la educaci'on primaria" y perfil de investigación "Modelización matemática en la formación inicial de maestros de educación primaria", a la que D. Jesús Montejo Gámez aspira.

El artículo 9.5.b) de la NPAUGR establece que en el acto de presentación de las pruebas, los/as aspirantes harán entrega de la siguiente documentación:
1. Historial académico, docente e investigador, por quintuplicado, así como un ejemplar de las publicaciones y documentos acreditativos de lo consignado en el mismo.
2. Proyectos docente e investigador, por quintuplicado, que propone el candidato conforme a los perfiles docente e investigador de la plaza.
3. Resumen del tema, por quintuplicado, elegido libremente entre los presentados en su proyecto docente para su exposición oral.
La presente memoria se entrega en tiempo y forma en cumplimiento de esta normativa.

Granada, a 22 de noviembre de 2023.

Índice

Parte I

Historial académico, docente e investigador

Diligencia de Refrendo del historial

El abajo firmante, **D. Jesús Montejo Gámez**, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, con DNI 77335372 B, se responsabiliza de la veracidad de los datos contenidos en el presente historial académico, docente e investigador, así como de las pruebas documentales que se aportan para acreditar los méritos reflejados.

En Granada, a 22 de noviembre de 2023

Resumen libre del Historial

Soy Profesor Contratado Doctor en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, investigador del grupo PAIDI "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (ref. FQM-193) y miembro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y de la comisión de Educación de la Real Sociedad Matemática Española. Mi perfil docente abarca la educación matemática de los futuros maestros de educación primaria y a la formación pedagógica de los futuros profesores de educación secundaria y bachillerato. Mi perfil investigador se centra en el aprendizaje de la modelización matemática, sus conexiones con la estimación y el pensamiento algebraico, así como sus implicaciones para la formación del profesorado. También estoy interesado en el desarrollo de modos de aprendizaje virtual de las matemáticas a través de herramientas tecnológicas.

Los méritos que se consignan en el presente historial académico, docente e investigador reflejan mi trayectoria profesional, que se ha construido bajo la convicción de que todos los ciudadanos deben saber matemáticas, utilizarlas con sentido y percibirlas como imprescindibles, de que el profesorado de primaria y secundaria deben potenciar esas competencias, y de que mi obligación como formador de profesorado es proporcionar herramientas para apoyar a los docentes en su labor.

Mi perfil docente es el idóneo para esta plaza, ya que acumulo una amplia experiencia de más de 650 h en la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria", experiencia que se ve complementada con asignaturas diversas como las de practicum, o las del máster de profesorado, así como por evaluaciones positivas por parte de la Universidad de Granada y de mi propio alumnado. Esta trayectoria como formador de profesores me ha permitido obtener dos tramos docentes (quinquenios).

Desde el punto de vista investigador, he publicado 14 artículos en revistas indexadas, 8 de ellos de alto impacto, y 20 capítulos de libro, 6 de los cuales se encuentran en editoriales como Springer o Routledge, que se sitúan en los primeros puestos del Ranking SPI internacional de educación. Estos méritos son complementarios a los 6 artículo en revistas de alto impacto que publiqué en el área de matemática aplicada y mi participación en diferentes proyectos de investigación, que me han reportado el reconocimiento de dos tramos de investigación (sexenios) evaluados por la CNEAI.

Finalmente, entiendo que la labor del educador matemático y del formador de profesores como agente social debe incluir la difusión de ideas matemáticas y de educación matemática. Esto me ha llevado a implicarme en la comisión de educación de la RSME, impartir cursos en Centro del Profesorado de Granada y colaborar en actividades como el International Modelling Challenge, la Semana de la Ciencia y La Noche Europea de los Investigadores. Recientemente, y de forma adicional, he empezado a colaborar en contratos de transferencia en el seno de mi grupo de investigación, que considero de gran relevancia en la trayectoria profesional del profesorado universitario a medio plazo.

Considero que estos méritos, que me han permitido obtener además tres tramos autonómicos de la Junta de Andalucía, acreditan mi perfil y competencia profesional para optar a la plaza que se oferta en el presente concurso. A continuación se detallan los méritos siguiendo los puntos que figuran como Anexo IV de la convocatoria del concurso.[1]

[1]Se han omitido los apartados que en este caso no proceden.

Datos personales y profesionales

1.1. Datos personales

Nombre: Jesús

Apellidos: Montejo Gámez

DNI:

Expedido:

Fecha de nacimiento:

Lugar de nacimiento:

Nacionalidad:

Domicilio:

Localidad y provincia:

País: España

Código postal:

Teléfono:

1.2. Datos profesionales

Categoría: Profesor Contratado Doctor

Fecha de inicio: 4 de marzo de 2021

Organismo: Universidad de Granada

Departamento: Didáctica de la Matemática

Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática

Centro: Facultad de Ciencias de la Educación

Dirección: Campus Universitario de Cartuja, s/n

Localidad y provincia: Granada (Granada)

País: España

Código postal: 18071

Teléfono: (00 34) 958 24 97 26

E-mail: `jmontejo@ugr.es`

Grupo de investigación: Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (ref. FQM-193, grupo PAIDI de la Junta de Andalucía)

ORCID iD: 0000-0001-9461-6348

Web of Science Researcher ID: AAB-3385-2019

Títulos académicos

2.1. Títulos universitarios

TITULACIÓN: Licenciado en Matemáticas
UNIVERSIDAD: Universidad de Granada
CENTRO: Facultad de Ciencias
FECHA: 25 de julio de 2005
CALIFICACIÓN: 2,74 (escala de 0 al 4)

TITULACIÓN: Diploma de Estudios Avanzados (DEA)
PROGRAMA DE DOCTORADO: Física y Matemáticas
UNIVERSIDAD: Universidad de Granada
CENTRO: Facultad de Ciencias
FECHA: 18 de julio de 2008
CALIFICACIÓN: Sobresaliente

TITULACIÓN: Máster Universitario en Física y Matemáticas
UNIVERSIDAD: Universidad de Granada
CENTRO: Facultad de Ciencias
FECHA: 13 de abril de 2009
CALIFICACIÓN: 3 (escala del 1 al 4)

Titulación: Doctor por la Universidad de Granada
Programa de doctorado: Física y Matemáticas
Universidad: Universidad de Granada
Centro: Facultad de Ciencias
Fecha: 4 de marzo de 2011
Título de la tesis: *Estudio de procesos cuánticos disipativos mediante ecuaciones en derivadas parciales en la formulación de Schrödinger*
Dirigida por: José Luis López Fernández
Calificación: Sobresaliente *Cum Laude* (por unanimidad)

2.2. Otros títulos

Titulación: Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP)
Universidad: Universidad de Granada
Fecha: 22 de marzo de 2006
Calificación: Notable

Titulación: First Certificate in English (nivel B2)
Universidad: University of Cambridge
Fecha: 25 de julio de 2012
Calificación: Grade C

Titulación: Competencia en inglés (nivel C1)
Universidad: Universidad de Córdoba
Fecha: 11 de julio de 2017
Calificación: Competente

Titulación: Experto en docencia universitaria
Universidad: Universidad de Córdoba
Fecha: 8 de noviembre de 2018
Calificación: Apto

Puestos docentes desempeñados

Categoría: Profesor Sustituto Interino
Universidad: Universidad de Extremadura
Facultad: Facultad de Educación de Badajoz
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 14 de febrero de 2014
Fecha de cese o finalización: 5 de marzo de 2014

Categoría: Profesor Adjunto
Universidad: Universidad Internacional de la Rioja
Facultad: Facultad de Educación
Régimen de dedicación: Tiempo parcial (38 h a la semana)
Fecha de nombramiento o contrato: 2 de octubre de 2014
Fecha de cese o finalización: 20 de febrero de 2015

Categoría: Profesor Sustituto Interino
Universidad: Universidad de Granada
Facultad: Facultad de Educación, Economía y Tecnología de Ceuta
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 23 de febrero de 2015
Fecha de cese o finalización: 29 de octubre de 2015

Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Universidad: Universidad de Granada
Facultad: Facultad de Educación, Economía y Tecnología de Ceuta
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 30 de octubre de 2015
Fecha de cese o finalización: 13 de septiembre de 2016

Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Universidad: Universidad de Córdoba
Facultad: Facultad de Ciencias de la Educación
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 13 de septiembre de 2016
Fecha de cese o finalización: 13 de septiembre de 2017

Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Universidad: Universidad de Granada
Facultad: Facultad de Ciencias de la Educación
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 14 de septiembre de 2014
Fecha de cese o finalización: 29 de octubre de 2020

Categoría: Profesor Contratado Doctor interino
Universidad: Universidad de Granada
Facultad: Facultad de Ciencias de la Educación
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 30 de octubre de 2020
Fecha de cese o finalización: Actualmente

Categoría: Profesor Contratado Doctor indefinido
Universidad: Universidad de Granada
Facultad: Facultad de Ciencias de la Educación
Régimen de dedicación: Tiempo completo
Fecha de nombramiento o contrato: 4 de marzo de 2021
Fecha de cese o finalización: Actualmente

Becas, ayudas y premios recibidos

Denominación: Movilidad de alumnos en programas de doctorado con Mención de Calidad
Convocatoria: 2006
Periodo de disfrute: Curso 2006/2007
Entidad financiadora: Ministerio de Educación y Ciencia
Cuantía: 2 500 €
Centro: Facultad de Ciencias
Institución: Universidad de Granada

Denominación: Ayuda predoctoral de Formación de Personal Investigador (FPI)
Referencia: Asociada al proyecto MTM2005-02446
Fecha de inicio: 1 de diciembre de 2006
Fecha de finalización: 30 de noviembre de 2010
Entidad financiadora: Ministerio de Educación y Ciencia
Centro: Facultad de Ciencias (departamento de Matemática Aplicada)
Institución: Universidad de Granada

Denominación: Subvención de la modalidad B del Programa de estancias de movilidad de profesores e investigadores en centros extranjeros de enseñanza superior e investigación (José Castillejo)
Referencia: CAS18/00474
Periodo de disfrute: 1 de mayo de 2019-31 de julio de 2019
Entidad financiadora: Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades
Cuantía: 10 260 €
Centro: Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education
Institución: Universiteit Utrecht

Actividad docente desempeñada

5.1. Enseñanzas de grado

5.1.1. Docencia impartida

Titulación: Arquitectura Técnica (Universidad de Granada)
Asignatura: Cálculo Matemático (1º curso)
Categoría: Contratado RD 63/2006
Fechas: Curso 08/09 (40 h en total)

Titulación: Arquitectura Técnica (Universidad de Granada)
Asignatura: Álgebra lineal (1º curso)
Categoría: Contratado RD 63/2006
Fechas: Cursos 08/09 y 09/10 (30 h en total)

Titulación: Licenciatura en LADE y Derecho (Universidad de Granada)
Asignatura: Matemáticas Empresariales II (2º curso)
Categoría: Contratado RD 63/2006
Fechas: Curso 09/10 (9 h en total)

Titulación: Grado de Educación Primaria (Universidad de Extremadura)
Asignatura: Didáctica de las matemáticas II (3º curso)
Categoría: Profesor Sustituto Interino
Fechas: Curso 14/15 (10 h en total)

Titulación: Grado de educación infantil (Universidad Internacional de la Rioja)
Asignatura: Didáctica de las matemáticas en educación infantil (2º curso)
Categoría: Profesor adjunto
Fechas: 08/10/2014 - 23/02/2015 (39 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad Internacional de la Rioja)
Asignatura: Didáctica de las matemáticas en educación primaria (4º curso)
Categoría: Profesor adjunto
Fechas: 08/10/2014 - 23/02/2015 (76 h en total)

Titulación: Grado de educación primaria (Universidad Internacional de la Rioja)
Asignatura: Complementos de Formación (3º curso)
Categoría: Profesor adjunto
Fechas: 08/10/2014 - 23/02/2015 (135 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Asignatura: Diseño y desarrollo del currículo en educación primaria (3º curso)
Categoría: Profesor Sustituto Interino
Fechas: Curso 14/15 (105 h en total)

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Asignatura: Desarrollo del pensamiento matemático infantil (3º curso)
Categoría: Profesor Sustituto Interino y Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Cursos 14/15 y 15/16 (75 h en total)

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Asignatura: Bases matemáticas para la educación infantil (2º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16 (22.5 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Asignatura: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16 (45 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Asignatura: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ed. primaria (2º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16 (45 h en total)

Titulación: Grado de educación infantil (Universidad de Córdoba)
Asignatura: Desarrollo del Pensamiento Matemático (1º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 16/17 (90 h en total)

Titulación: Grado de educación primaria (Universidad de Córdoba)
Asignatura: Didáctica de la Geometría y de la Estadística (3º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 16/17 (90 h en total)

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Asignatura: Bases matemáticas para la educación infantil (2º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 17/18 (15 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCEE Granada)
Asignatura: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor, Profesor Contratado Doctor interino y Profesor Contratado Doctor indefinido
Fechas: Desde el curso 17/18 hasta la actualidad (650 h en total)

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Asignatura: Desarrollo del pensamiento matemático (3º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 18/19 (15 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Asignatura: Competencias matemáticas en educación primaria (4º curso)

Categoría: Profesor Ayudante Doctor, Profesor Contratado Doctor interino y Profesor Contratado Doctor indefinido
Fechas: Cursos 19/20, 20/21 y 21/22 (165 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Asignatura: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria (2º curso)
Categoría: Profesor Contratado Doctor indefinido
Fechas: Curso 22/23 (15 h en total)

5.1.2. Tutorización de prácticas

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Asignatura: Practicum II (4º curso)
Categoría: Profesor Sustituto Interino y Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Cursos 14/15 y 15/16 (34.5 h en total)

Titulación: Grado de educación infantil (Universidad de Córdoba)
Asignatura: Practicum I (2º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 16/17 (20 h en total)

Titulación: Grado de educación primaria (Universidad de Córdoba)
Asignatura: Practicum II (3º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 16/17 (40 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Asignatura: Practicum I (3º curso)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Cursos 17/18 y 18/19 (79.6 h en total)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Asignatura: Practicum II (4º curso)

Categoría: Profesor Ayudante Doctor, Profesor Contratado Doctor interino y Profesor Contratado Doctor indefinido
Fechas: Desde el curso 17/18 hasta la actualidad (240 h en total)

5.1.3. Trabajos Fin de Grado dirigidos

Titulación: Grado de educación primaria (Universidad de Extremadura)
Categoría: Investigador visitante
Fechas: Curso 13/14
Número de trabajos dirigidos: 1

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16
Número de trabajos dirigidos: 6

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16
Número de trabajos dirigidos: 4

Titulación: Grado de educación primaria (Universidad de Córdoba)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 16/17
Número de trabajos dirigidos: 3

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor, Profesor Contratado Doctor interino y Profesor Contratado Doctor indefinido
Fechas: Desde el curso 18/19 hasta la actualidad
Número de trabajos dirigidos: 13

Titulación: Grado en matemáticas (UNED, tutor externo)
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 19/20
Número de trabajos dirigidos: 1

5.1.4. Indicadores de calidad de la docencia de grado impartida

Indicador: Evaluación de la actividad docente del profesorado en opinión del alumnado (Centro andaluz de Prospectiva)

Periodo: Curso 08/09

Asignaturas: Álgebra lineal y Cálculo matemático (1º curso de Arquitectura Técnica)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5):

- ✓ Álgebra lineal: 3,86
- ✓ Cálculo matemático: 5,00

Indicador: Evaluación sobre la calidad de la actividad docente (Vicerrectorado de Calidad de la Universidad de Granada)

Periodo: Desde el curso 08/09 hasta el curso 11/12

Asignaturas: Evaluación global de la docencia

Evidencia: Valoración de excelente (92,68 sobre 100)

Indicador: Evaluación de la actividad docente del profesorado de la Universidad de Extremadura

Periodo: Curso 13/14

Asignatura: Didáctica de las matemáticas II (dos grupos del 3º curso del grado de educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 0 a 10):

- ✓ Grupo 1: 7,49
- ✓ Grupo 2: 7,45

Indicador: Cuestionario de Opinión del alumnado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 15/16

Asignaturas: Desarrollo del pensamiento matemático infantil (3º curso del grado en educación infantil), Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria (2 grupos del 2º curso del grado en educación primaria) y Diseño y desarrollo del currículo en educación primaria (3º curso del grado en educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5)

- ✓ Desarrollo del pensamiento matemático infantil: 4,73
- ✓ Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria (A): 4,79
- ✓ Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria (B): 4,82
- ✓ Diseño y desarrollo del currículo en educación primaria: 4,84

Indicador: Evaluación de la actividad docente del profesorado de la Universidad de Granada (Unidad de Calidad, Innovación y Prospectiva)

Periodo: Cursos 14/15 y 15/16

Asignaturas: Evaluación global de la docencia

Evidencia: Valoración de excelente (96,77)

Indicador: Evaluación de la actividad docente del profesorado (Vicerrectorado de Estudiantes de la Universidad de Córdoba)

Periodo: Curso 16/17

Asignaturas: Desarrollo del pensamiento matemático (1º curso del grado de educación infantil) y Didáctica de la Geometría y la Estadística (3º curso del grado de educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5):

✓ Desarrollo del pensamiento matemático: 4,51

✓ Didáctica de la Geometría y la Estadística: 4,62

Indicador: Cuestionario de opinión del alumnado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 17/18

Asignatura: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso del grado en educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5): 4,52

Indicador: Evaluación de la Actuación Docente del Profesorado en Opinión del Estudiantado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 18/19

Asignatura: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso del grado en educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5): 4,4

Indicador: Evaluación de la actividad docente del profesorado de la Universidad de Granada (Unidad de Calidad, Innovación y Prospectiva)

Periodo: Cursos 15/16, 17/18 y 18/19

Asignaturas: Evaluación global de la docencia

Evidencia: Valoración de excelente (96,9)

Indicador: Evaluación de la Actuación Docente del Profesorado en Opinión del Estudiantado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 19/20

Asignaturas: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso del grado en educación primaria) y Competencias matemáticas para la educación primaria (4º curso del grado en educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5):

- ✓ Bases matemáticas para la educación primaria: 4,96
- ✓ Competencias matemáticas para la educación primaria: 5

Indicador: Evaluación de la actividad docente del profesorado de la Universidad de Granada (Unidad de Calidad, Innovación y Prospectiva)

Periodo: Cursos 15/16, 17/18, 18/19 y 19/20

Asignaturas: Evaluación global de la docencia

Evidencia: Valoración de excelente (97)

Indicador: Evaluación de la Actuación Docente del Profesorado en Opinión del Estudiantado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 20/21

Asignaturas: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso del grado en educación primaria) y Competencias matemáticas para la educación primaria (4º curso del grado en educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5):

- ✓ Bases matemáticas para la educación primaria: 5
- ✓ Competencias matemáticas para la educación primaria: 5

Indicador: Evaluación de la Actuación Docente del Profesorado en Opinión del Estudiantado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 21/22

Asignaturas: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso del grado en educación primaria) y Competencias matemáticas para la educación primaria (4º curso del grado en educación primaria)

Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5):

- ✓ Bases matemáticas para la educación primaria: 4,83
- ✓ Competencias matemáticas para la educación primaria: 4,56

Indicador: Evaluación de la Actuación Docente del Profesorado en Opinión del Estudiantado (Universidad de Granada)

Periodo: Curso 22/23
Asignatura: Bases matemáticas para la educación primaria (1º curso del grado en educación primaria)
Evidencia: Resultados de la evaluación (escala de 1 a 5):
✓ Bases matemáticas para la educación primaria: 4,922

5.2. Enseñanzas de posgrado

5.2.1. Docencia impartida

Titulación: Máster interuniversitario en Física y Matemáticas (FisyMat)
Asignatura: Modelado con EDP's: Técnicas asintóticas y procesos multiescala
Categoría: Investigador contratado con cargo a proyecto
Fechas: Cursos 12/13 y 13/14 (60 h en total)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Ceuta)
Asignatura: Complementos para la formación disciplinar. Especialidad: Tecnología
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16 (40 h en total)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Ceuta)
Asignatura: Aprendizaje y enseñanza de la tecnología
Categoría: Profesor Ayudante Doctor
Fechas: Curso 15/16 (40 h en total)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Asignatura: Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas
Categoría: Profesor Ayudante Doctor, Profesor Contratado Doctor interino y Profesor Contratado Doctor indefinido
Fechas: Desde el curso 18/19 hasta la actualidad (150 h en total)

5.2.2. Trabajos Fin de Máster dirigidos

Titulación: Máster interuniversitario en Física y Matemáticas (FisyMat)

Categoría: Investigador contratado con cargo a proyecto

Fechas: Curso 12/13

Número de trabajos dirigidos: 1 (codirigido)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Ceuta)

Categoría: Profesor Ayudante Doctor

Fechas: Curso 15/16

Número de trabajos dirigidos: 3

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Granada)

Categoría: Profesor Ayudante Doctor, Profesor Contratado Doctor interino y Profesor Contratado Doctor indefinido

Fechas: Desde el curso 17/18 hasta la actualidad

Número de trabajos dirigidos: 24 (3 codirigidos)

Titulación: Máster universitario en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada, Campus de Granada)

Categoría: Profesor Contratado Doctor indefinido

Fechas: Desde el curso 21/22 hasta la actualidad

Número de trabajos dirigidos: 2 (2 codirigidos)

Titulación: Máster universitario en Matemáticas (Universidad de Granada, Campus de Granada)

Categoría: Profesor Contratado Doctor indefinido

Fechas: Desde el curso 17/18 hasta la actualidad

Número de trabajos dirigidos: 1

5.3. Enseñanza no reglada

Centro: Centro de Profesorado (CEP) de Granada
Materia: Practicum de educación primaria
Actividad: Presentación de la ponencia *La tutorización del Practicum II de Educación Primaria (especialidad profundización currrículo básico)*, de 2h de duración.
Fecha: 13 de febrero de 2018

Centro: Centro de Profesorado (CEP) de Granada
Materia: Material multibase y regletas en educación primaria
Actividad: Presentación del *Taller de material multibase y regletas para la educación primaria* de 5 h de duración
Fecha: mayo y octubre de 2018, y octubre de 2021 (tres talleres para un total de 15 h)

Centro: Centro de Profesorado (CEP) de Granada
Materia: Resolución de problemas en educación primaria
Actividad: Presentación del taller *Resolución de problemas matemáticos en el aula de primaria* de 2 h de duración
Fecha: Marzo de 2019, 2020 y 2021 (tres talleres para un total de 6 h)

Centro: Centro de Profesorado (CEP) de Almería
Materia: Resolución de problemas en el aula de primaria
Actividad: Presentación del taller *Resolución de problemas en el aula de primaria* de 3 h de duración
Fecha: Abril de 2022 (un total de 3 h)

Centro: Centro de Profesorado (CEP) de Almería
Materia: Sentido matemático en el aula de primaria
Actividad: Presentación de los talleres *Variables de tarea y análisis de tareas*, y *Materiales para trabajar el sentido matemático* de 3 h de duración cada uno
Fecha: Febrero de 2023 (un total de 6 h)

Contribuciones de carácter docente

Contribución: Participación en Proyecto de Innovación Docente (Universidad de Granada)

Título: Implicación de buenos maestros de matemáticas en la mejora de la formación inicial de maestros en didáctica de las matemáticas, código 15-85.

Periodo: 28/09/2015 - 17/07/2017

Coordinador y nº de participantes: Isidoro Segovia Álex (12 participantes)

Contribución: Participación en Proyecto de Innovación Docente (Universidad de Granada)

Título: Acciones formativas para alumnos de nuevo ingreso, como apoyo a los planes de mejora de las titulaciones de la UGR en Ceuta, código 15-81

Periodo: 28/09/2015 - 25/07/2017

Coordinador y nº de participantes: Ana E. Marín Jiménez (17 participantes)

Contribución: Colaboración en Proyecto de Innovación Docente (Universidad de Córdoba)

Título: Permeando las paredes del aula: aprendizaje basado en proyectos reales, con la colaboración de profesionales, juegos de rol, análisis de casos y uso de TICs, para la adquisición de competencias profesionales y la mejora de la empleabilidad, código 2017-1-5013

Periodo: Curso 17/18

Coordinador y nº de participantes: Encarnación T. Taguas (14 participantes)

Contribución: Colaboración en Proyecto de Innovación Docente (Universidad de Córdoba)

Título: Corresponsabilidad en el proceso de aprendizaje como elemento de motivación para el desarrollo de competencias profesionales en ingeniería y enseñanza de las matemáticas, código 2018-1-5018

Periodo: Curso 18/19
Coordinador y nº de participantes: Elvira Fernández de Ahumada (15 participantes)

Contribución: Participación en Equipo Docente (Universidad de Granada)
Título: Coordinación docente del departamento de Didáctica de la Matemática
Periodo: Curso 21/22
Coordinador y nº de participantes: Rafael Ramírez Uclés (25 participantes)

Contribución: Coordinación y ponencia en Equipo Docente (Universidad de Granada)
Título: Adaptación de la formación del profesorado al currículo LOMLOE: Sentidos matemáticos en Educación Primaria
Periodo: Curso 22/23
Coordinador y nº de participantes: Jesús Montejo Gámez (27 participantes)

Participación en proyectos de investigación subvencionados en convocatorias públicas

Tipo de participación: Investigador

Título y referencia del proyecto: Estabilidad y efectos dispersivos de EDPS en mecánica cuántica/de fluidos y problemas cinéticos de radiación, referencia MTM2005-02446.

Entidad financiadora: Ministerio de Educación y Ciencia

Investigador principal: Juan S. Soler Vizcaíno

Periodo de duración: 01/12/2006 - 30/12/2008 (2 años)

Tipo de participación: Investigador

Título y referencia del proyecto: BIOMAT: estudio de modelos de desarrollo y movilidad celular, referencia P05-FQM-1268

Entidad financiadora: Proyectos de excelencia, año 2005. Consejería de economía, innovación y ciencia, Junta de Andalucía.

Investigador principal: Juan S. Soler Vizcaíno

Periodo de duración: 01/12/2006 - 31/12/2008 (2 años)

Tipo de participación: Investigador

Título y referencia del proyecto: Modelo físico–matemático y análisis de los datos de la misión espacial Planck (ESA), referencia P05-FQM-792

Entidad financiadora: Proyectos de excelencia, año 2005. Consejería de economía, innovación y ciencia, Junta de Andalucía.

Investigador principal: Eduardo Battaner

Periodo de duración: 01/01/2007 - 31/12/2009 (3 años)

Tipo de participación: Investigador
Título y referencia del proyecto: Efectos no conservativos y cuánticos para las ecuaciones cinéticas e hidrodinámicas de sistemas colisionales complicados, referencia HI2006-0111.
Entidad financiadora: Acciones integradas de investigación, 2006. Unión Europea.
Investigador principal: Maria Josefa Cáceres Granados.
Periodo de duración: 01/01/2007 - 31/12/2009 (3 años)

Tipo de participación: Investigador
Título y referencia del proyecto: Modelización y análisis matemático de fenómenos no lineales en teoría cinética de EDP'S con origen en biomedicina (dinámica tumoral y vías de señalización) y astrofísica, referencia MTM2008-05271
Entidad financiadora: Proyectos de I+D+i, año 2011. Ministerio de ciencia e innovación.
Investigador principal: Juan S. Soler Vizcaíno
Cantidad: 134 915 €
Periodo de duración: 01/01/2009 - 31/12/2011 (3 años)

Tipo de participación: Investigador
Título y referencia del proyecto: Biomat: modelos matemáticos en vías de señalización originados en dinámica tumoral, sistemas complejos multicelulares, neurociencia y coagulación sanguínea, referencia P08-FQM-04267.
Entidad financiadora: Proyectos de excelencia, año 2011. Consejería de economía, innovación y ciencia, Junta de Andalucía.
Investigador principal: Juan S. Soler Vizcaíno
Cantidad: 199 500,03 €
Periodo de duración: 13/01/2009 - 13/12/2011 (3 años)

Tipo de participación: Investigador
Título y referencia del proyecto: Ecuaciones de evolución para sistemas complejos en ciencias de la vida y teoría cinética, referencia MTM2011-23384.
Entidad financiadora: Proyectos de I+D+i, año 2011. Ministerio de ciencia e innovación.
Investigador principal: Juan S. Soler Vizcaíno
Cantidad: 127 050 €
Periodo de duración: 01/01/2012 - 30/12/2014 (3 años)

Tipo de participación: Investigador

Título y referencia del proyecto: Modelado matemático de sistemas complejos en ciencias de la vida: de la dinámica tumoral al comportamiento colectivo de especies (BIOMAT), referencia P12-FQM-954

Entidad financiadora: Proyectos de investigación de excelencia de la Consejería de economía, innovación, ciencia y empleo. Convocatoria 2012

Investigador principal: Juan S. Soler Vizcaíno

Cantidad: 145 569 €

Periodo de duración: 30/01/2014 - 16/07/2019

Tipo de participación: Investigador

Título y referencia del proyecto: Título: La enseñanza de las matemáticas en España en el Siglo XVIII. Descripción y análisis comparado de libros de texto, referencia EDU2016-78764-P

Entidad financiadora: Proyectos de I+D+i, año 2016. Ministerio de Economía y Competitividad.

Investigador principal: Alexander Maz Machado

Cantidad: 29 403€

Periodo de duración: 30/12/2016 - 29/12/2019 (3 años)

Tipo de participación: Organizador de actividades vinculadas al proyecto

Título y referencia del proyecto: II Plan de divulgación de la Ciencia y la Innovación de la Universidad de Granada, referencia FCT-17-12340

Entidad financiadora: Universidad de Granada

Responsable: Ana Isabel García López

Cantidad: 76 650 €

Periodo de duración: 01/01/2018 - 31/03/2019 (15 meses)

Tipo de participación: Investigador

Título y referencia del proyecto: Pensamiento funcional en educación Primaria: relaciones funcionales, representaciones y generalización, referencia EDU2016-75771-P

Entidad financiadora: Proyectos de I+D+i, año 2016. Ministerio de Economía y Competitividad

Investigador principal: Marta Molina González

Cantidad: 94 017 €

Periodo de duración: 01/01/2018 - 01/10/2019 (21 meses)

Tipo de participación: Investigador
Título y referencia del proyecto: Researchers Square / Open Researchers
Entidad financiadora: Universidad de Granada: Acciones de coordinación y apoyo de la Unión Europea.
Investigador principal: Ana Isabel García López / Margarita Sánchez Romero (responsables de la UGR)
Cantidad: 327 298,82 € (cuantía total sumando los diferentes años)
Periodo de duración: Años 2015, 2016, 2018, 2021 y 2023.

Participación en otros proyectos de investigación subvencionados y en contratos de investigación

8.1. Participación en otros proyectos subvencionados

TIPO DE PARTICIPACIÓN: Investigador

TÍTULO Y REFERENCIA DEL PROYECTO: Efecto del peso de la mochila sobre parámetros biomecánicos de la locomoción den soldados de infantería, la composición corporal y el estado físico.

ENTIDAD FINANCIADORA: Centro mixto Universidad de Granada - Mando de Adiestramiento y Doctrina del Ejército de Tierra (CEMIX)

INVESTIGADOR PRINCIPAL: José Mª Heredia Jiménez

CANTIDAD FINANCIADA: 6 000 €

PERIODO DE DURACIÓN: abril de 2016-octubre de 2017 (18 meses)

8.2. Contratos de investigación

TIPO DE CONTRATO: Investigador contratado con cargo al proyecto de investigación P08-FQM-04267

INSTITUCIÓN Y DEPARTAMENTO: Universidad de Granada, departamento de Matemática Aplicada

DEDICACIÓN: Tiempo parcial

PERIODO DE DURACIÓN: 01/02/2012 - 31/10/2012 (9 meses)

TIPO DE CONTRATO: Investigador contratado con cargo al proyecto MTM2011-23384

INSTITUCIÓN Y DEPARTAMENTO: Universidad de Granada, departamento de Matemática Aplicada

DEDICACIÓN: Tiempo completo

PERIODO DE DURACIÓN: 15/12/2013 - 14/12/2013 (1 año)

TIPO DE CONTRATO: Contrato de transferencia (artículo 83 LOU)
ENTIDAD: Sistemas Virtuales de Aprendizaje S. L.
DEDICACIÓN: Tiempo parcial
PERIODO DE DURACIÓN: 11/02/2022 - 11/04/2022 (2 meses)

TIPO DE CONTRATO: Contrato de transferencia (artículo 83 LOU)
ENTIDAD: Sistemas Virtuales de Aprendizaje S. L.
DEDICACIÓN: Tiempo parcial
PERIODO DE DURACIÓN: 11/04/2023 - 11/08/2023 (4 meses)

Trabajos de investigación dirigidos

9.1. Trabajos Fin de Máster de investigación

Titulación: Máster interuniversitario en Física y Matemáticas (FisyMAt)
Curso: 12/13
Título y autora: *Transferencia de energía en la fotosíntesis*, de Ana Isabel R. B. (trabajo codirigido)
Calificación: Notable (7.5)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Curso: 17/18
Título y autor: *¿Influye la notación matemática en el aprendizaje de las progresiones aritméticas?* de Guillermo S. G. (trabajo codirigido)
Calificación: Notable (7.6)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Curso: 18/19
Título y autora: *Hacia una notación de consenso para el aprendizaje de las sucesiones*, de Natalia M. P. (trabajo codirigido)
Calificación: Sobresaliente (10)

Titulación: Máster universitario en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Curso: 21/22

Título y autora: *Análisis de errores de estudiantes de 4º ESO en trigonometría*, de Guillermo S-G. M. (trabajo codirigido)
Calificación: Sobresaliente (9)

Titulación: Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Curso: 22/23
Título y autora: *Introducción de elementos conceptuales del álgebra para la resolución de ecuaciones matriciales preuniversitarios. Una investigación de diseño*, de Roberto A. F.
Calificación: Notable (7.5)

Titulación: Máster universitario en Didáctica de la Matemática (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Curso: 22/23
Título y autora: *Estrategias de medición del área del alumnado de 3º de primaria*, de Lucía L. R. (trabajo codirigido)
Calificación: Notable (8.5)

9.2. Trabajos Fin de Grado de investigación

Titulación: Grado en educación infantil (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Curso: 15/16
Título y autoras: *Aprendizaje de la secuencia de numerales en la infancia*, de Mouna B.F., Yasmina L.D. y Nora M. M.
Calificación: Sobresaliente (9.5)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FEET de Ceuta)
Curso: 15/16
Título y autora: *Aplicación de un programa de intervención para mejorar el cálculo (restas con llevadas) utilizando el método ABN.*
Calificación: Aprobado (5.5)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)

Curso: 18/19
Título y autora: *Desarrollo de modelos matemáticos en educación primaria: caracterización e implicaciones educativas*, de Juana María M. F.
Calificación: Notable (8.9)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Curso: 18/19
Título y autor: *Impacto de la enseñanza de las estrategias de cálculo mental en las habilidades de atención y de memoria*, de David L. V.
Calificación: Sobresaliente (9.5)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Curso: 21/22
Título y autor: *Impacto de la práctica de la educación física sobra la memoria de trabajo*, de Georgiana L.
Calificación: Notable (8.9)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Curso: 21/22
Título y autor: *Investigación sobre la resolución de problemas aritméticos de estructura aditiva en educación primaria*, de Manuel M. B.
Calificación: Notable (8)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Curso: 21/22
Título y autor: *Programa de intervención para alumnado sordo en la asignatura de matemáticas a través de la lengua de signos*, de Victoria Eugenia N. S.
Calificación: Matrícula de Honor (9.8)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Curso: 22/23
Título y autor: *Investigación de enseñanza en Educación Primaria basada en el sentido de la medida y magnitud de superficie*, de José Manuel F. F.
Calificación: Notable (7.9)

Titulación: Grado en educación primaria (Universidad de Granada, FCCE Granada)
Curso: 22/23
Título y autor: *Una alternativa para la enseñanza de fracciones en el uso de materiales didácticos*, de Maria Teresa R-V. M.
Calificación: Notable (7.9)

Publicaciones (artículos)

10.1. Publicaciones recogidas en las bases de datos de Web of Science o Scopus

Autores: López, J. L., Montejo–Gámez, J.
Título: A hydrodynamic approach to multidimensional dissipation-based Schrödinger models from quantum Fokker–Planck dynamics
Revista, volumen y páginas: Physica D 238, 622-644.
Fecha de publicación: 2009
Base de datos y ranking: WoS, 21/204 (Q1) en JCR (Index 2009)
DOI: https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.12.006

Autores: López, J. L., Montejo–Gámez, J.
Título: On a rigorous interpretation of the quantum Schrödinger-Langevin operador in bounded domains with applications
Revista, volumen y páginas: Journal of Mathematical Analysis and Applications 383 (2), 365-378.
Fecha de publicación: 2011
Base de datos y ranking: WoS, 41/289 (Q1) en JCR (Index 2011)
DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.05.024

Autores: Jüngel, A., López, J. L., Montejo–Gámez, J.
Título: A new derivation of the quantum Navier-Stokes equations in the Wigner-Fokker-Planck approach
Revista, volumen y páginas: Journal of Statistical Physics, 145(6), 1661-1673.
Fecha de publicación: 2011
Base de datos y ranking: WoS, 20/55 (Q2) en JCR (Index 2011)
DOI: https://doi.org/10.1007/s10955-011-0388-3

Autores: López, J. L., Montejo-Gámez, J.
Título: On viscous quantum hydrodynamics associated with nonlinear Schrödinger-Doebner-Goldin models
Revista, volumen y páginas: Kinetic and Related Models, 5 (3), 517–536
Fecha de publicación: 2012
Base de datos y ranking: WoS, 48/295 (Q1) en JCR (Index 2012)
DOI: https://doi.org/10.3934/krm.2012.5.517

Autores: Guerrero, P., López, J. L. , Montejo-Gámez, J., Nieto, J. J.
Título: Wellposedness of a nonlinear Schrödinger equation of logarithmic type modeling quantum dissipation
Revista, volumen y páginas: Journal of Nonlinear Science, 22, 231-263
Fecha de publicación: 2012
Base de datos y ranking: WoS, 31/247 (Q1) en JCR (Index 2012)
DOI: https://doi.org/10.1007/s00332-012-9123-8

Autores: Guerrero, P., López, J. L. , Montejo-Gámez, J.
Título: A wavefunction description of quantum Fokker-Planck dissipation: derivation and numerical approximation of transient dynamics
Revista, volumen y páginas: J. Physics A: Math Theor 47, 035303 (21 páginas)
Fecha de publicación: 2014
Base de datos y ranking: WoS, 16/54 (Q2) en JCR (Index 2014)
DOI: https://doi.org/10.1088/1751-8113/47/3/035303

Autores: Gutiérrez-Braojos, C., Montejo-Gamez, J., Marin, A., y Campaña, J. R.
Título: Hybrid Learning Environment: Collaborative or competitive learning?
Revista, volumen y páginas: Virtual Reality, 23, 411 - 423
Fecha de publicación: 2019
Base de datos y ranking: WoS y Scopus. Rankings:
- ✓ 15/108 (Q1) en JCR (Index 2019)
- ✓ 9/84 (Q1) en Scopus Source List (2019)

DOI: https://doi.org/10.1007/s10055-018-0358-z

Autores: Gutiérrez-Braojos, C., Montejo-Gámez, J., Poza Vilches, F. y Marín-Jiménez, A.E.
Título: Evaluation of research on the Knowledge Building pedagogy: a mixed methodological approach

Revista, volumen y páginas: RELIEVE, 26(1), art. 6 (22 pages)
Fecha de publicación: 2020
Base de datos y ranking: Scopus, 429/1254 (Q2) en Scopus Source List (2019)
DOI: http://doi.org/10.7203/relieve.26.1.16671

Autores: Arroyo, R., De La Hoz-Ruiz, J., y Montejo-Gámez, J.
Título: The 2030 Challenge in the Quality of Higher Education: Metacognitive, Motivational and Structural Factors, Predictive of Written Argumentation, for the Dissemination of Sustainable Knowledge
Revista, volumen y páginas: Sustainability, 12, 8266 (18 páginas)
Fecha de publicación: 2021
Base de datos y ranking: WoS y Scopus. Rankings:
- ✓ 64/150 (Q2) en JCR (Index 2019)
- ✓ 132/679 (Q1) en Scopus Source List (2019)

DOI: https://doi.org/10.3390/su12198266

Autores: Adamuz-Povedano, N., Fernández-Ahumada, E., García-Pérez, T., Montejo-Gámez, J.
Título: Developing Number Sense: An Approach to Initiate Algebraic Thinking in Primary Education
Revista, volumen y páginas: Mathematics, 9(5), 518 (25 páginas)
Fecha de publicación: 2021
Base de datos y ranking: WoS. Ranking:
- ✓ 18/470 (Q1) en JCR (Index 2020)

DOI: https://doi.org/10.3390/math9050518

Autores: Licciardello, F., Consoli, S., Cirelli, G., Castillo, C., Fernández-Ahumada, E., Montejo-Gámez, J., Taguas, E.V.
Título: A virtual experience of gamification to promote technical and social competences in Hydrological Science
Revista, volumen y páginas: Technology, Knowledge and Learning 26, 985–997
Fecha de publicación: 2021
Base de datos y ranking: Scopus. Ranking:
- ✓ 210/1275 (Q1) en SJR (Index 2020)

DOI: https://doi.org/10.1007/s10758-021-09510-9

Autores: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N.

Título: A Tool for the Analysis and Characterization of School Mathematical Models
Revista, volumen y páginas: Mathematics, 9(13), 1569 (16 páginas)
Fecha de publicación: 2021
Base de datos y ranking: WoS. Ranking:
- ✓ 18/470 (Q1) en JCR (Index 2020)

DOI: https://doi.org/10.3390/math9131569

Autores: Gutiérrez-Braojos, C., Daniela, L., Montejo-Gámez, J., y Aliaga, F.
Título: Developing and Comparing Indices to Evaluate Community Knowledge Building in an Educational Research Course
Revista, volumen y páginas: Sustainability, 14(17), 10603 (18 páginas)
Fecha de publicación: 2022
Base de datos y ranking: WoS y Scopus. Rankings:
- ✓ 64/150 (Q2) en JCR (Index 2019)
- ✓ 132/679 (Q1) en Scopus Source List (2019)

DOI: https://doi.org/10.3390/su141710603

10.2. Publicaciones recogidas en otras bases de datos

Autores: Amador-Saelices, M. V., Montejo-Gámez, J.
Título: Una trayectoria hipotética de aprendizaje para las expresiones algebraicas basada en análisis de errores
Revista, volumen y páginas: Épsilon, 93, 7-30
Fecha de publicación: 2016
Base de datos: Dialnet, DICE, Latindex
URL: https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon93_1_0.pdf

Autores: Seglar-Camúñez, M., Montejo-Gámez, J.
Título: Desarrollo de procesos matemáticos a través del juego en Educación Infantil
Revista, volumen y páginas: Épsilon, 95, 69-76
Fecha de publicación: 2017
Base de datos: Dialnet, DICE, Latindex
URL: https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon95_4.pdf

Autores: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E y Adamuz-Povedano, N.

Título: ¿Cómo modelizan los futuros profesores en situaciones de área y perímetro? El papel de las unidades y de las fórmulas
Revista, volumen y páginas: Modelling in Science Education and Learning, 12 (1), 5-20
Fecha de publicación: 2019
Base de datos: Dialnet, Latindex
DOI: https://doi.org/10.4995/msel.2019.11001

Autores: Miñarro-Fernández, J. M. y Montejo-Gámez, J.
Título: Modelización para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Primaria: una experiencia de aula.
Revista, volumen y páginas: UNIÓN, 19(68) (20 páginas)
Fecha de publicación: 2023
Base de datos: Fisem, Latindex

10.3. Otras publicaciones en revistas

Autores: López, J. L., Montejo-Gámez, J.
Título: On the derivation and mathematical analysis of some quantum–mechanical models accounting for Fokker–Planck type dissipation: Phase space, Schrödinger and hydrodynamic descriptions
Revista, volumen y páginas: Nanoscale Systems MMTA,2, 49-80
Fecha de publicación: 2013
DOI: https://doi.org/10.2478/nsmmt-2013-0004

Autores: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., León-Mantero, C., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N.
Título: Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria
Revista, volumen y páginas: SUMA, 87, 31-40
Fecha de publicación: 2018

Autores: Rodríguez-Muñiz, Luis J., Ferrando, I. y Montejo-Gámez, J.
Título: Oportunidades, retos y necesidades de la educación matemática
Revista, volumen y páginas: Cuadernos de Pedagogía, 531, 14-19
Fecha de publicación: 2022

Publicaciones (capítulos de libro)

Autores: Montejo-Gámez, J., Maz, A., Fernández-Ahumada, E.
Título: Análisis sobre el aprendizaje de la modelización para la resolución de problemas de matemáticas
Libro y páginas: Investigación en pensamiento numérico y algebraico: 2017 (pp. 67-80)
Fecha de publicación: 2017
Editorial: Universidad Rey Juan Carlos, SEIEM
URL: https://www.ugr.es/~jmontejo/JMG-AMM-EFA_PNA2017_67-80.pdf

Autores: Campaña, J. R., Marín-Jiménez, A. E., Montejo-Gámez, J y Gutiérrez-Braojos, C.
Título: Innovación en educación usando pensamiento computacional y robótica
Libro y páginas: Investigación e innovación en la universidad, un enfoque multidisciplinar (pp. 143-152)
Fecha de publicación: 2018
Editorial: Ediciones Aljibe, 9/53 (Q1) en el ranking SPI nacional (Educación, año 2018)
URL: https://www.ugr.es/~jmontejo/JC-AM-JM-CG_Aljibe.pdf

Autores: Gutiérrez-Braojos, C., Montejo-Gámez, J., Marin Jiménez, A. y Martínez-Martínez, A.
Título: Positive interdependence in blended learning environments. Is it worth collaborating?
Libro y páginas: Learning Strategies and Constructionism in Modern Education Settings (pp. 50-68)
Fecha de publicación: 2018
Editorial: IGI-Global, 13/50 (Q2) en el Ranking SPI internacional (Educación, año 2018)
DOI: https://doi.org/10.4018/978-1-5225-5430-1.ch004

Autores: Gutiérrez-Braojos, C., Montejo-Gámez, J., Eugenia Marín-Jiménez, A. y Poza-Vilches, F.

Título: A Review of Educational Innovation from a Knowledge-building Pedagogy Perspective

Libro y páginas: The Future of Innovation and Technology in Education: Policies and Practices for Teaching and Learning Excellence (pp. 41-54)

Fecha de publicación: 2018

Editorial: Emerald Publishing Limited, 55/429 (Q1) en el ranking SPI internacional (General, año 2018)

DOI: https://doi.org/10.1108/978-1-78756-555-520181005

Autores: Gutiérrez-Braojos, C., Montejo-Gámez, J., Ma, L., Chen, B., de Escalona-Fernández, M. M., Scardamalia, M. y Bereiter, C.

Título: Exploring collective cognitive responsibility through the emergence and flow of forms of engagement in a knowledge building community

Libro y páginas: Didactics of Smart Pedagogy (pp. 213–232)

Fecha de publicación: 2019

Editorial: Springer International Publishing, 2/50 (Q1) en ranking SPI internacional (Educación, año 2018)

DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-01551-0_11

Autores: Montejo-Gámez, J y Marín-Jiménez, A. E.

Título: Autoeficacia para la enseñanza de las matemáticas de los maestros en formación inicial en el campus de Ceuta

Libro y páginas: Innovación docente e investigación en Educación y en Ciencias Sociales (pp. 1179-1190)

Fecha de publicación: 2019

Editorial: Dykinson, 12/53 (Q1) en el ranking SPI nacional (Educación, año 2018)

URL: https://www.ugr.es/~jmontejo/JMG-AMJ_Dykinson_1179-1190.pdf

Autores: Arroyo, R., Puertas, S., Montejo-Gámez, J.

Título: Ansiedad del alumnado de un centro de Educación Primaria y su relación con factores personales y académicos

Libro y páginas: Innovación Educativa en la Sociedad Digital (pp. 1991-2002)

Fecha de publicación: 2020

Editorial: Dykinson, 12/53 (Q1) en el ranking SPI nacional (Educación, año 2018)

URL: https://www.ugr.es/~jmontejo/RA-SP-JM_Dykinson_1991-2002.pdf

Autores: Fernández-Ahumada, E., Montejo-Gámez, J., Sánchez-Zamora, P., Benlloch-González, L., Ortiz-Medina, M., Beato, C, Taguas, E. V.

Título: Development of professional skills in higher education: Problem-based learning supported by immersive worlds

Libro y páginas: New Pespectives in Virtual and Augmented Reality (pp. 64-81)

Fecha de publicación: 2020

Editorial: Routledge, 1/50 (Q1) en el ranking SPI internacional (Educación, año 2018)

DOI: https://doi.org/10.4324/9781003001874-5

Autores: López Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando, I. Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E., Mallavibarrena, R.

Título: La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato

Libro y páginas: Libro blanco de las matemáticas (pp. 1-94)

Fecha de publicación: 2020

Editorial: Fundación Ramón Areces y Real Sociedad Matemática Española. La editorial Fundación Ramón Areces se sitúa en la posición 235/384 (Q3) en el ranking SPI nacional (General, año 2018)

URL: https://www.fundacionareces.es/recursos/doc/portal/2020/10/14/la-educacion-matematica-en-las-ensenanzas-obligatorias-y-el-bachillerato.pdf

Autores: Rodríguez-Muñiz, L. J., Crespo, R., Díaz, I., Fioravanti, M., García-Raffi, L. M., González-Vasco, I., González, L., Lafuente, M., Montejo-Gámez, J., Ortega, F., Mallavibarrena, R.

Título: Los estudios de matemáticas en el ámbito universitario

Libro y páginas: Libro blanco de las matemáticas (pp. 95-162)

Fecha de publicación: 2020

Editorial: Fundación Ramón Areces y Real Sociedad Matemática Española. La editorial Fundación Ramón Areces se sitúa en la posición 235/384 (Q3) en el ranking SPI nacional (General, año 2018)

URL: https://www.fundacionareces.es/recursos/doc/portal/2020/10/14/los-estudios-de-matematicas-en-el-ambito-universitario.pdf

Autores: Taguas, E. V., Fernández-Ahumada, E., Ortiz-Medina, L., Castillo-Carrión, S., Beato, M. C, Alarcón, P., Martínez, J. J., Pérez, C., del Campillo, M. C., Tarquis, A. M., Montejo-Gámez, J., Guerrero-Ginel, J.E.

Título: Encouraging immersion in the soil sciences through virtual conferences where ideas are shared among avatars to improve educational background of young scientists

Libro y páginas: New Pespectives in Virtual and Augmented Reality (pp. 224-239)

Fecha de publicación: 2020
Editorial: Routledge, 1/50 (Q1) en el ranking SPI internacional (Educación, año 2018)
DOI: https://doi.org/10.4324/9781003001874-15

Autores: Montejo-Gámez, J., Fernández-Plaza, J. A. Ramírez-Uclés, R.
Título: Talento matemático en la resolución de un problema de generalización
Libro y páginas: Investigación en educación matemática. Homenaje a Enrique Castro (pp. 121-138)
Fecha de publicación: 2020
Editorial: Octaedro, 4/50 (Q1) en el ranking SPI nacional (Educación, año 2018)

Autores: Montejo-Gámez, J. Amador-Saelices, V., Fernández-Plaza, J. A.
Título: Teaching Mathematics to Reflect on the Covid-19 Pandemic: Best Practices
Libro y páginas: Remote Learning in Times of Pandemic. Issues, Implications and Best Practice (pp. 148-163)
Fecha de publicación: 2021
Editorial: Routledge, 1/50 (Q1) en el ranking SPI internacional (Educación, año 2018)
DOI: https://doi.org/10.4324/9781003167594

Autores: Arroyo, R., Fernández-Lancho, E., Montejo-Gámez, J.
Título: Bringing Education Closer to the Advantages of the Internet of Things: An e-Learning-Based Course to Scientific Multilingual Writing Instruction
Libro y páginas: The Internet of Things for Education: A New Actor on the Stage (pp. 165-182)
Fecha de publicación: 2021
Editorial: Routledge, 2/50 (Q1) en el ranking SPI internacional (Educación, año 2018)
DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-85720-2_10

Autores: Montejo-Gámez, J., Amador-Saelices, M. V. y López Centella, E.
Título: Game-based approach to reasoning, problem solving and communication for high school students
Libro y páginas: International Approaches and Practices for Gamifying Mathematics (pp. 189-215)
Fecha de publicación: 2022

Editorial: IGI-Global, 13/50 (Q2) en el Ranking SPI internacional (Educación, año 2018)
DOI: https://doi.org/10.4018/978-1-7998-9660-9.ch010

Autores: Montejo-Gámez, J., Marín-Jiménez, A. E., Martín-Rojas, R.
Título: ¿Creen los estudiantes del Campus de Ceuta que serán buenos maestros de matemáticas?
Libro y páginas: Nuevas tendencias en investigación. La transferencia de conocimiento de la universidad a la sociedad (pp. 1-10)
Fecha de publicación: 2022
Editorial: Aranzadi Thomson Reuters

Autores: Ramírez Uclés, R., y Montejo-Gámez, J.
Título: Tareas de formación para favorecer el sentido de la medida en la formación inicial del profesorado
Libro y páginas: Investigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia (pp. 307-327)
Fecha de publicación: 2022
Editorial: Octaedro, 4/50 (Q1) en el ranking SPI nacional (Educación, año 2018)

Autores: Martín-Rojas, R., García-Morales, V. J., Marín-Jiménez, A. E., Montejo-Gámez, J.
Título: Auditar la innovación en pequeñas y medianas empresas
Libro y páginas: International Handbook of Innovation and Assessment of the Quality of Higher Education and Research. Vol. 1 (pp. 1-10).
Fecha de publicación: 2022
Editorial: Thomson Reuters-Civitas

Autores: Nieto, M. A., Rute-Pérez, S. y Montejo-Gámez, J.
Título: Desarrollo de la memoria de trabajo del alumnado de primaria como vía para aliviar dificultades en matemáticas.
Libro y páginas: Acercamiento multidisciplinar para la investigación e intervención en contextos educativos (pp. 357-366)
Fecha de publicación: 2022
Editorial: Dykinson, 12/53 (Q1) en el ranking SPI nacional (Educación, año 2018)

Comunicaciones y ponencias presentadas a congresos

NOMBRE DEL CONGRESO: Jornadas de EDP's y aplicaciones (Nacional)
TÍTULO Y TIPO DE PARTICIPACIÓN: Un modelo de Schrödinger disipativo basado en la ecuación de WFP (comunicación oral)
LUGAR Y FECHA: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada), diciembre de 2008
ENTIDAD ORGANIZADORA: Kinetic-Grupo de investigación en teoría cinética

NOMBRE DEL CONGRESO: CHAOS 2009 (Internacional)
TÍTULO Y TIPO DE PARTICIPACIÓN: Wavefunction approach to Wigner-Fokker-Planck hydrodynamics by dissipation-based logarithmic Schrödinger models (comunicación oral)
LUGAR Y FECHA: Chania, Creta (Grecia), junio de 2009
ENTIDAD ORGANIZADORA: Chaotic Modelling & Simulation International Conference

NOMBRE DEL CONGRESO: XXI CEDYA y XI CMA (Nacional)
TÍTULO Y TIPO DE PARTICIPACIÓN: Aproximación a la dinámica de Wigner-Fokker-Planck mediante una ecuación de Schrödinger disipativa de tipo logarítmico (comunicación oral)
LUGAR Y FECHA: Universidad de Castilla-La Mancha, septiembre de 2009
ENTIDADES ORGANIZADORAS: Universidad de Castilla-La Mancha, IMACI y SEMA

NOMBRE DEL CONGRESO: Applied PDEs in Physics, Biology and Social Sciences (Internacional)
TÍTULO Y TIPO DE PARTICIPACIÓN: On the initial–boundary value problem associated with a nonlinear dissipative Schroedinger equation (póster)
LUGAR Y FECHA: Centre de Reçerça Matemàtica (CRM), Barcelona, septiembre de 2012

Entidades organizadoras: European Science Foundation

Nombre del congreso: Spring School in nonlinear partial differential equations (Internacional)

Título y tipo de participación: On the initial–boundary problem associated with a nonlinear dissipative Schroedinger equation (comunicación oral)

Lugar y fecha: Bruselas, junio de 2012

Entidad organizadora: Université Libre de Bruxelles

Nombre del congreso: Theory and numerics of kinetic equations (Internacional)

Título y tipo de participación: On the description of quantum Fokker-Planck dynamics in the Schrödinger picture (comunicación oral)

Lugar y fecha: Saarland University, Saarbrucken (Alemanina), mayo de 2013

Entidad organizadora: Saarland University

Nombre del congreso: 3^{rd} meeting of young researchers modelling biological processes (Internacional)

Título y tipo de participación: On quantum models of excitation transfer in photosynthesis (ponencia invitada)

Lugar y fecha: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada), junio de 2013

Entidad organizadora: Programa de doctorado FisyMat y RSME

Nombre del congreso: 17 Jornadas sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Nacional)

Título y tipo de participación: Análisis de errores y caminos de aprendizaje en la iniciación al álgebra para alumnos de 1º de ESO (comunicación oral)

Lugar y fecha: Cartagena, julio de 2015

Entidad organizadora: FESPM

Nombre del congreso: XIX simposio de la SEIEM (Nacional)

Título y tipo de participación: Caminos de aprendizaje para la iniciación al álgebra basados en análisis didáctico/de errores (póster)

Lugar y fecha: Alicante, septiembre de 2015

Entidad organizadora: SEIEM

Nombre del congreso: IX Congreso Internacional de Docencia Universitaria (Internacional)
Título y tipo de participación: Acción tutorial para la integración de los alumnos del campus de Ceuta en la vida universitaria (comunicación oral)
Lugar y fecha: Murcia, abril de 2016
Entidad organizadora: Universidad de Murcia

Nombre del congreso: XIII FECIES (Nacional)
Autor, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Implicación de buenos maestros de matemáticas en la mejora de la formación inicial de maestros en el campus de Ceuta (comunicación dentro del simposio "Innovación y acción tutorial en los estudios de grado en el campus de Ceuta")
Lugar y fecha: Granada, julio de 2016
Entidad organizadora: Grupo de investigación CTS-261 (Universidad de Granada)

Nombre del congreso: IX CIDUI (Nacional)
Autores, título y tipo de participación: Marín-Jiménez, A., Montejo-Gámez, J. y Campaña, J.R., Una propuesta para el refuerzo de conceptos matemáticos a través de Kahoot! (comunicación)
Lugar y fecha: Girona, julio de 2016
Entidad organizadora: Universidades de Catalunya

Nombre del congreso: XIV FECIES (Nacional)
Autor, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Marín-Jiménez, A., Fernández-Ahumada, E., Análisis de las prácticas de maestros en formación inicial: los enfoques de Ceuta y de Córdoba (comunicación)
Lugar y fecha: Granada, junio de 2017
Entidad organizadora: Grupo de investigación CTS-261 (Universidad de Granada)

Nombre del congreso: VIII CIBEM (Internacional)
Título y tipo de participación: Nuevos restos de la educación matemática: soluciones creativas (coordinación de minicurso de la RSME)
Lugar y fecha: Madrid, julio de 2017
Entidad organizadora: FESPM

Nombre del congreso: VIII CIBEM (Internacional)

Autores, título y tipo de participación: Tres comunicaciones:

✓ Montejo-Gámez, J. y Amador-Saelices, V., "¿Cuánto cuesta emprender?" Un proyecto para aprender matemáticas desde un enfoque por competencias

✓ Montejo-Gámez, J. y Amador-Saelices, V., Desarrollo de procesos matemáticos en educación secundaria a través de juegos

✓ Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz, N., y León-Mantero, C., Competencia matemática del alumnado de grado de Educación Primaria: un análisis de necesidades

Lugar y fecha: Madrid, julio de 2017

Entidad organizadora: FESPM

Nombre del congreso: ECER 2017 (Internacional)

Autores, título y tipo de participación: Dos comunicaciones orales:

✓ Computer supported collaborative learning: Collaborative or competitive goal structures?

✓ Knowledge Building: Indices of Impacting Builders to Assess the Collective Cognitive Responsibility

Lugar y fecha: Copenhagen, agosto de 2017

Entidad organizadora: European Educational Research Association

Nombre del congreso: XXI Simposio de la SEIEM (Nacional)

Autores, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., y León-Mantero, C., Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades (comunicación)

Lugar y fecha: Zaragoza, septiembre de 2017

Entidad organizadora: SEIEM

Nombre del congreso: XXI Simposio de la SEIEM (Nacional)

Título y tipo de participación: Metodologías activas y su relación con las actitudes hacia la estadística en educación secundaria (póster)

Lugar y fecha: Zaragoza, septiembre de 2017

Entidad organizadora: Universidad de Zaragoza y SEIEM

Nombre del congreso: CIREI (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: Tres comunicaciones orales virtuales junto con Gutiérrez-Braojos, C., Marín-Jiménez, A., Muñoz de Escalona, M. y Amador-Saelices, V.:

✓ Blended Learning: collaborative or competitive goal structures?

✓ Efectos de las dinámicas de aprendizaje competitivo y colaborativo en la regulación de conflicto sociocognitivo

✓ Hacia la construcción de índices para evaluar la responsabilidad cognitiva colectiva en entornos de aprendizaje virtuales

Lugar y fecha: On line, diciembre de 2017

Entidad organizadora: Universidad de Alcalá, UFRGS y Universidade Aberta

Nombre del congreso: VI Jornadas de modelización matemática (Nacional)

Título y tipo de participación: Más allá de las fórmulas (o como los futuros profesores actúan en situaciones de medida) (comunicación oral)

Lugar y fecha: Valencia, mayo de 2018

Entidad organizadora: Universidades de Valencia y Politécnica de Valencia

Nombre del congreso: XXII Simposio de la SEIEM (Nacional)

Autores, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N., Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados, ¿cómo surge un modelo? (comunicación)

Lugar y fecha: Gijón, septiembre de 2018

Entidad organizadora: Universidad de Oviedo y SEIEM

Nombre del congreso: XXII Simposio de la SEIEM (Nacional)

Título y tipo de participación: Dos pósters, titulados:

✓ Los significados como una componente fundamental de un modelo matemático: un análisis exploratorio en educación secundaria

✓ Conocimiento matemático en la enseñanza de la división desde la práctica profesional: un estudio de caso

Lugar y fecha: Gijón, septiembre de 2018

Entidad organizadora: Universidad de Oviedo y SEIEM

Nombre del congreso: CERME11 (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E, On the notion of mathematical model in educational research: Insights from a new proposal (comunicación)

Lugar y fecha: Utrecht (Países Bajos), febrero de 2019

Entidad organizadora: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University

Nombre del congreso: III CIVEEST (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Amador-Saelices, V., Ideas y actitudes del alumnado de educación secundaria en su primer contacto con la estadística (comunicación)

Lugar y fecha: On line, febrero de 2019

Entidad organizadora: Universidad de Granada

Nombre del congreso: XXIII Simposio de la SEIEM (Nacional)

Autores, Título y tipo de participación: Fernández-Ahumada, E. y Montejo-Gámez, J., Dificultades en el aprendizaje matemático del profesorado en formación: análisis de las premisas utilizadas al modelizar (comunicación)

Lugar y fecha: Valladolid, septiembre de 2019

Entidad organizadora: Universidad de Valladolid y SEIEM

Nombre del congreso: ECER 2020 (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J. y Marín-Jiménez, A., Outcome Expectancy to Teach Mathematics of Preservice Elementary School Teachers: The Importance of Sociocultural Factors (comunicación evaluada por pares y aceptada)

Lugar y fecha: septiembre de 2020 (evento suspendido debido al COVID-19)

Entidad organizadora: European Educational Research Association

Nombre del congreso: ERPA International Science and Mathematics Education Congress (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: Fernández-Ahumada, E., Adamuz-Povedano, N., Montejo-Gámez, J. y Martínez-Jiménez, E., Exploring mathematical skills of students accessing Elementary Teachers' degree (comunicación oral)

Lugar y fecha: On line, abril de 2020

Entidad organizadora: ERPA

Nombre del congreso: European Conference in Educational Research (ECER 2021) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: J. Montejo-Gámez y Marín-Jiménez, A. E., Outcome expectancy to teach mathematics of preservice elementary school teachers: the importance of sociocultural factors (comunicación)

Lugar y fecha: On line, septiembre de 2021

Entidad organizadora: EERA

Nombre del congreso: Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: E. Fernández-Ahumada, N. Adamuz-Povedano, E. Martínez-Jiménez y J. Montejo-Gámez, How is number sense assessed in the early years of mathematical learning? (comunicación)

Lugar y fecha: On line, febrero de 2022

Entidad organizadora: European Society for Research in Mathematics Education (ERME)

Nombre del congreso: Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: J. Montejo-Gámez, E. Fernández-Ahumada, J. Montejo-Gámez, On the information that prospective teachers assume when modelling and its impact on the modelling outcomes (comunicación)

Lugar y fecha: On line, febrero de 2022

Entidad organizadora: European Society for Research in Mathematics Education (ERME)

Nombre del congreso: The 20th International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA20) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: J. Montejo-Gámez, E. López-Centella y E. Fernández-Ahumada, What is the Shape of a Bunch of Grapes?: The Role of Geometry when Solving Estimation Problems (comunicación)

Lugar y fecha: On line, septiembre de 2022

Entidad organizadora: International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications

Nombre del congreso: XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas (Nacional)

Autores, Título y tipo de participación: J. Montejo-Gámez y R. Álvarez Arroyo, Tareas con sentido (de la medida) en Educación Primaria (taller)

Lugar y fecha: Granada, julio de 2023

Entidad organizadora: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES

Nombre del congreso: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: E. Fernández-Ahumada, N. Adamuz-Povedano, J. Montejo-Gámez, E. Martínez-Jimenez, Investigating teaching practices in relation to the development of number sense in the first year of primary education: a case study (comunicación)

Lugar y fecha: Budapest, julio de 2023

Entidad organizadora: European Society for Research in Mathematics Education (ERME)

Nombre del congreso: Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: E. López-Centella y J. Montejo-Gámez, Analysis of models used by student primary teachers when addressing a geometric estimation task (comunicación)

Lugar y fecha: Budapest, julio de 2023

Entidad organizadora: European Society for Research in Mathematics Education (ERME)

Nombre del congreso: CIMIE23 - XI Multidisciplinary International Congress of Educational Research (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: E. Martínez-Jiménez, N. Adamuz-Povedano, E. Fernandez-Ahumada, J. Montejo-Gámez, Tertulias Dialógicas en Educación Matemática: reflexionar, compartir y construir conocimiento en comunidad (comunicación)

Lugar y fecha: Santander, julio de 2023

Entidad organizadora: AMIE - Multidisciplinary Educational Research Association

Nombre del congreso: European Conference in Educational Research (ECER 2023) (Internacional)

Autores, Título y tipo de participación: J. Montejo-Gámez, E. Fernández-Ahumada, N. Adamuz- Povedano, E. Martínez-Jiménez, An Inquiry-Based Approach for Teaching Mathematical Modelling to Prospective Primary Teachers (comunicación)

Lugar y fecha: Glasgow, agosto de 2023

Entidad organizadora: EERA

Nombre del congreso: XXVI Simposio de la SEIEM (Nacional)
Autores, Título y tipo de participación: Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E. y Adamuz-Povedano, N., Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados, ¿cómo surge un modelo? (comunicación)
Lugar y fecha: Logroño, septiembre de 2023
Entidad organizadora: Universidad de La Rioja y SEIEM

Estancias en centros nacionales y extranjeros de investigación

Centro receptor e Institución: Centre de Reçerça Matemàtica (Universidad autónoma de Barcelona)
Localidad y país: Barcelona, España
Periodo: 09/04/2011 - 17/04/2011
Financiación: Centre de Reçerça Matemàtica

Centro receptor e Institución: Facultad de Educación de Badajoz (Universidad de Extremadura)
Localidad y país: Badajoz, España
Periodo: 01/03/2014 - 31/07/2014

Centro receptor e Institución: Freudenthal Institute for Mathematics and Science Education, Universiteit Utrecht
Localidad y país: Utrecht, Países Bajos
Periodo: 01/05/2019 - 31/07/2019
Financiación: Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (ayuda dentro del programa José Castillejo)

Puestos de gestión desempeñados y servicios prestados en instituciones de carácter académico e investigador

Institución: Real Sociedad Matemática Española
Servicio prestado: Miembro de la Comisión de Educación de la RSME
Periodo: 01/02/2016- Actualmente

Institución: Universidad de Córdoba (programa de Doctorado Ingeniería agraria, alimentaria, forestal y de desarrollo rural sostenible)
Servicio prestado: Miembro de la Comisión de Seguimiento Anual
Periodo: Desde el curso 16/17 hasta el 19/20

Institución: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada
Servicio prestado: Miembro de la Comisión de Practicum
Periodo: Desde diciembre de 2020 hasta la actualidad

Cursos y seminarios recibidos

15.1. Seminarios de perfil investigador

Centro u organismo: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)
Seminario: Second international course of mathematical analysis in Andalucia
Fecha de celebración: 20-24 de septiembre de 2004

Centro u organismo: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)
Seminario: Mathematics and Life Science: Tumor growth and stem cells
Fecha de celebración: 11-15 de junio de 2007

Centro u organismo: Centre de Reçerça Matemàtica
Seminario: Advanced Course on Topics in PDE's and applications
Fecha de celebración: 5-9 de mayo de 2008

Centro u organismo: Institute of Pure and Applied Mathematics (University of California Los Angeles, EEUU)
Seminario: Asympthotic methods for dissipative particle systems
Fecha de celebración: 18-22 de mayo de 2009

Centro u organismo: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)
Seminario: Mathematics & life sciences: Mathematical models in biology
Fecha de celebración: 28 de junio - 2 de julio de 2010

Centro u organismo: Carmen de la Victoria (Universidad de Granada)

Seminario: International Workshop on Quantum Mechanics and Dynamical Systems
Fecha de celebración: 8-10 de octubre de 2011

Centro u organismo: Universidad Internacional Menéndez Pelayo (Santander)
Seminario: Frontiers of Mathematics III
Fecha de celebración: 13-17 de agosto de 2012

Centro u organismo: Universidad Internacional Menéndez Pelayo (Santander)
Seminario: School of Mathematics “Lluis Santaló”. Mathematics of planet earth: Scientifical challenges in a sustainable planet
Fecha de celebración: 15-19 de julio de 2013

Centro u organismo: Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada
Seminario: Workshop on PDE’s: Modelling, analysis and numerical simulations
Fecha de celebración: 15-19 de septiembre de 2014

Centro u organismo: Facultad de CC de la Educación (Universidad de Granada)
Seminario: Investigación en educación matemática. Homenaje al profesor Luis Rico
Fecha de celebración: 27-29 de febrero de 2016

Centro u organismo: Facultad de CC de la Educación (Universidad de Granada)
Seminario: Aspectos metodológicos para el análisis del conocimiento profesional del profesor en prácticas matemáticas de aula
Fecha de celebración: 11-12 de febrero de 2016

Centro u organismo: Unidad de Calidad, innovación y prospectiva de la Universidad de Granada
Materia: Herramientas informáticas para el análisis de datos y aplicación de ecuaciones estructurales. Programas R y Lisrel
Fecha de celebración: 29 de febrero - 18 de marzo de 2016

Centro u organismo: Unidad de Calidad, innovación y prospectiva de la Universidad de Granada
Seminario: Investigación basada en diseños experimentales para las Ciencias Sociales
Fecha de celebración: 22-25 de febrero de 2018

15.2. Cursos y seminarios de formación docente

Centro u organismo: Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales (Universidad de Granada)
Materia: Redes sociales y reputación digital: el papel de la marca personal e institucional
Fecha de celebración: 14/06/2012 (4 horas en total)

Centro u organismo: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)
Materia: Introducción al cálculo Científico con Octave
Fecha de celebración: 04/02/2013-15/03/2013 (35 horas en total)

Centro u organismo: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)
Materia: Herramientas TIC de apoyo docente
Fecha de celebración: 04/02/2013-15/02/2013 (35 horas en total)

Centro u organismo: Facultad de Ciencias (Universidad de Granada)
Materia: Android para principiantes: programación básica
Fecha de celebración: 04/02/2013-15/03/2013 (25 horas en total)

Centro u organismo: Unidad de Calidad, innovación y prospectiva de la Universidad de Granada
Materia: Iniciación a la docencia universitaria
Fecha de celebración: 14/09/2015-30/05/2016 (200 horas en total)

Centro u organismo: FEET Ceuta (Universidad de Granada)
Materia: Crear, innovar y emprender: los retos de una sociedad de la complejidad y de la incertidumbre
Fecha de celebración: 28/01/2016-10/02/2016 (50 horas en total)

Centro u organismo: Facultad de Económicas de la Universidad de Alcalá, RSME y FESPM
Materia: IX escuela de educación matemática Miguel de Guzmán. Qué enseñar y cómo hacerlo: metodologías activas

Fecha de celebración: 06/07/2016-08/07/2016 (20 horas en total)

Centro u organismo: Centro Internacional de Estudios Matemáticos (Castro Urdiales, Cantabria)
Materia: Seminario ForPromat: Perspectivas en la formación inicial de profesores de matemáticas
Fecha de celebración: 16/12/2016-18/12/2016 (20 horas en total)

Centro u organismo: Universidad de Córdoba
Materia: Mejorar la sesión expositiva y la participación del alumnado (2ª edición)
Fecha de celebración: 02/05/2017-03/05/2017 (10 horas en total)

Centro u organismo: Universidad de Córdoba
Materia: Retos actuales en la acción tutorial (2ª edición)
Fecha de celebración: 19/06/2017 - 20/06/2017 (8 horas en total)

Centro u organismo: Unidad de Calidad, Innovación y Prospectiva de la Universidad de Granada
Materia: Diseño, gestión y explotación de la página web personal
Fecha de celebración: 06/06/2018 - 21/06/2018 (22 horas en total)

Centro u organismo: Universidad de La Laguna, RSME y FESPM
Materia: X escuela de educación matemática Miguel de Guzmán. La resolución de problemas como parte del quehacer matemático
Fecha de celebración: 11/07/2018-13/07/2018 (20 horas en total)

Centro u organismo: Unidad de Calidad, Innovación y Prospectiva de la Universidad de Granada
Materia: Herramientas de uso docente para el trabajo colaborativo (2ª edición)
Fecha de celebración: 18/02/2019 - 08/03/2019 (20 horas en total)

Centro u organismo: Centro Internacional de Estudios Matemáticos (Castro Urdiales, Cantabria)

Materia: Jornadas para el análisis y propuestas sobre el curriculum de matemáticas en el bachillerato
Fecha de celebración: 06/03/2020 - 08/03/2020 (20 horas en total)

Centro u organismo: Unidad de Calidad, Innovación Docente y Prospectiva (Universidad de Granada)
Materia: Cómo sacar el máximo provecho a tu I+D (3ª Edición)
Fecha de celebración: 09/03/2022 - 21/03/2022 (20 horas en total)

Periodos de actividad investigadora y de actividad docente reconocidos

TIPO DE RECONOCIMIENTO: 4 trienios
PERIODO: Desde 5 de mayo de 2023

TIPO DE RECONOCIMIENTO: 3 tramos autonómicos de la Junta de Andalucía
PERIODO: 2009-2018 (10 años)

TIPO DE RECONOCIMIENTO: 2 componentes por méritos docentes (quinquenios) concedidos por la Universidad de Granada
PERIODO: Hasta 30 de abril de 2019

TIPO DE RECONOCIMIENTO: 2 tramos de investigación (sexenios) evaluados por la CNEAI
PERIODO: Hasta 31 de diciembre de 2021

Otros méritos docentes o de investigación

17.1. Otros méritos docentes

MÉRITO: Coordinador de talleres de formación complementaria al Practicum II de Educación infantil

INSTITUCIÓN Y PERIODO: Universidad de Granada (FEET de Ceuta), curso 15/16

MÉRITO: Colaborador con el grupo docente nº 40, coordinado por Alexander Maz

INSTITUCIÓN Y PERIODO: Universidad de Córdoba, curso 16/17

MÉRITO: Colaborador con el proyecto "Aula experimental de educación infantil La Casita"

INSTITUCIÓN Y PERIODO: Universidad de Córdoba (Facultad de Ciencias de la Educación), curso 16/17

MÉRITO: Tutor dentro del Plan de Acción Tutorial de la Facultad de Ciencias de la Educación

INSTITUCIÓN Y PERIODO: Universidad de Córdoba, curso 16/17

MÉRITO: Vocal del Tribunal de Evaluación de TFG del grado en educación primaria (convocatoria de junio)

INSTITUCIÓN Y PERIODO: Universidad de Córdoba (Facultad de Ciencias de la Educación), curso 16/17

MÉRITO: Miembro de comisión evaluadora de TFM del Máster Universitario de Profesorado en Enseñanza Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (especialidad Matemáticas)

Institución y periodo: Universidad de Granada, desde el curso 17/18 hasta el 22/23 (42 trabajos evaluados)

Mérito: Tutor de grupos dentro del Plan de Acción tutorial de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada.
Institución y periodo: Universidad de Granada, desde el curso 21/22 hasta el 22/23 (2 grupos tutorizados)

Mérito: Tutor de alumnado NEAE dentro del Máster universitario en profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Universidad de Granada, Campus de Granada)
Institución y periodo: Universidad de Granada, desde el curso 22/23 (1 alumna tutorizada)

Mérito: Vocal del Tribunal de Evaluación de TFG del grado en educación primaria (convocatoria de junio)
Institución y periodo: Universidad de Granada, curso 22/23

17.2. Otros méritos de investigación

Mérito: Miembro de la organización del ISAMA-BRIDGES'2003 (Internacional)
Institución y periodo: Universidad de Granada (Facultad de Ciencias), 23-26 de julio de 2003

Mérito: Secretario del comité organizador del congreso Topics in PDE's and applications 2008
Institución y periodo: Universidad de Granada (Fundación Euroárabe), 7-11 de abril de 2008

Mérito: Secretario del comité organizador del Congreso BIOMAT 2008 (Internacional)
Institución y periodo: Universidad de Granada (Facultad de Ciencias), 9-13 de junio de 2008

Mérito: Secretario del comité organizador del Congreso BIOMAT 2009 (Internacional)
Institución y periodo: Universidad de Granada (Facultad de Ciencias), 1-5 de junio de 2009

Mérito: Miembro del comité organizador del XXII Simposio de la SEIEM

Institución y periodo: Universidad de Oviedo (Facultad de la Laboral), 5-8 de septiembre de 2018

Mérito: Miembro del comité organizador del III Congreso SEI2019
Institución y periodo: Universidad de Granada (Facultad de Ciencias de la Educación), 24-26 de abril de 2019

Mérito: Revisor para las revistas PNA, Mathematics y Education Sciences
Periodo: Años 2020, 2021 y 2022 (7 manuscritos revisados)

Mérito: Revisor para el XXIV Simposio de la SEIEM
Periodo: Año 2020

Mérito: Miembro del comité organizador del Congreso Internacional Virtual de Comunicación Inclusiva Multilingüe
Institución y periodo: Universidad de Granada, 27-29 de abril de 2021

Mérito: Miembro del equipo editorial de la revista Épsilon
Institución y periodo: Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales, desde enero de 2023

Otros méritos

MÉRITO: Ponente invitado al IV y al V Ciclo de conferencias Matemáticas
ORGANIZADOR, LUGAR Y FECHA: Asociación de alumnos de matemáticas AMAT, Facultad de Ciencias. 17/03/2009 y 30/03/2011

MÉRITO: Coordinador de talleres y actividades para la Noche Europea de los Investigadores
ORGANIZADOR Y FECHA: Universidad de Granada, años 2015-2018

MÉRITO: Coordinador de talleres y actividades para la feria de la Ciencia
ORGANIZADOR Y FECHA: Parque de las Ciencias de Granada, años 2019, 2022 y 2023

MÉRITO: Participante y coordinador de talleres y actividades para la Semana de la Ciencia
ORGANIZADOR Y FECHA: Universidad de Granada, año 2022

MÉRITO: Organizador de una actividad en el Festival Solidario de la Ciencia
ORGANIZADOR Y FECHA: Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada, año 2023

MÉRITO: Participación en actividades del aula científica permanente
ORGANIZADOR Y FECHA: Universidad de Granada, año 2023

Parte II

Proyecto investigador: *“Factores que determinan la modelización de situaciones de estimación geométricas”*

Introducción

La motivación del presente proyecto surgió de forma coordinada con propia trayectoria docente en el grado de educación primaria. Desde un primer momento, observé que gran parte del alumnado del grado era solvente en la ejecución de procedimientos vinculados a contenidos que excedían del nivel de primaria. También percibí, sin embargo que la gran mayoría de ellos apenas daba sentido a aquellos procedimientos que ejecutaba, la Figura 1.1 ilustra algunos ejemplos que generaron mi percepción. Esta, además, es consistente con numerosos estudios realizados con maestros en formación inicial que revelan las dificultades que presenta este alumnado con destrezas transversales al contenido matemático (Aydin y Ozgeldi, 2019; Kaasila et al., 2010; Olande, 2014; Verschaffel et al., 2005) y, especialmente, en las conexiones extramatemáticas (Aydin y Ozgeldi, 2019; Luo, 2009; Sáenz, 2009). Dichas dificultades resultan significativas, ya que hay un amplio consenso entre los investigadores de que el conocimiento especializado del profesor debe sobrepasar la aplicación de procedimientos para incluir procesos matemáticos, diversidad de usos y, en términos generales, una comprensión más profunda de los contenidos escolares (véanse, p. e., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2013; Godino et al., 2017; Rico y Moreno, 2016; Rowland et al., 2005).

La discusión sobre el tipo de conocimiento esperable del profesorado de primaria se aborda con mayor profundidad en el proyecto docente de la presente memoria. Este proyecto se centra en una respuesta de potencial valor para abordar las dificultades ilustradas en la Figura 1.1, como es la modelización matemática. En efecto, los beneficios de incluir la modelización como parte de la educación matemática escolar son hoy en día reconocidos por los currículos de los diferentes niveles educativos y por los investigadores en educación matemática, tanto a nivel nacional (I. Ferrando, 2019) como internacional (Arleback y Albarracín, 2019; G. A. Stillman et al., 2015). En el ámbito de la formación inicial del profesorado, que es el que nos ocupa, el trabajo con tareas de modelización es idóneo, ya que plantear este tipo de tareas a futuros profesores les proporciona ejemplos de enseñanza que después ellos mismos pueden aplicar (Doerr, 2007), estimulando así su reflexión sobre el significado de los contenidos matemáticos escolares (Kaiser et al., 2006). Además, la

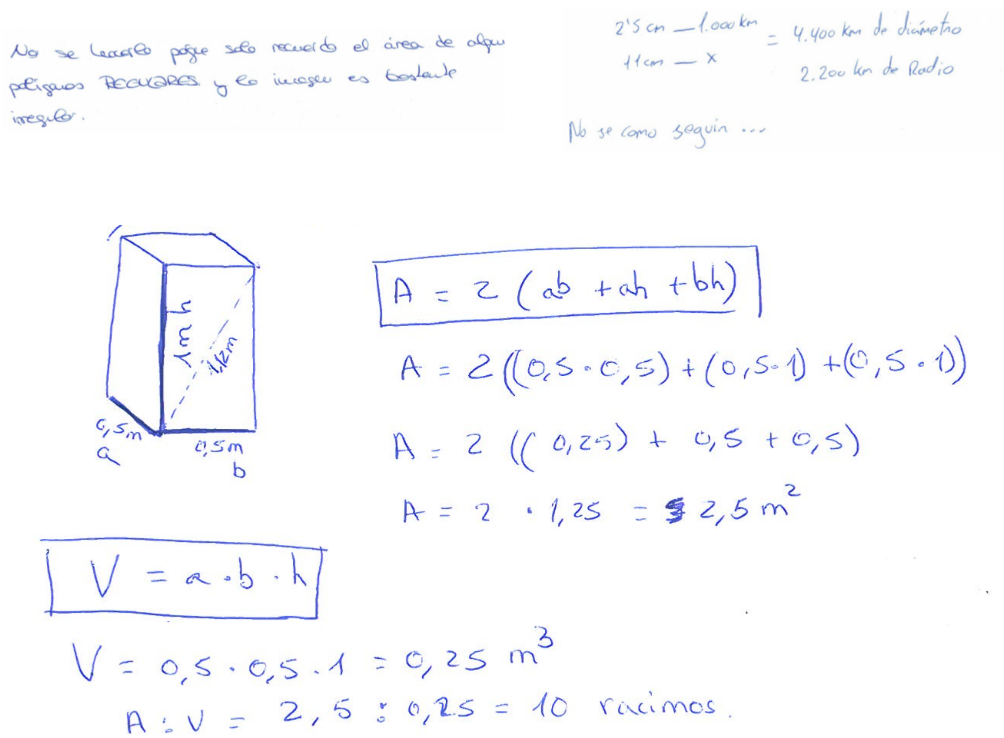


Figura 1.1: Respuestas de estudiantes del grado de Educación primaria ante problemas abiertos

modelización contribuye al fomento de actividades propias de la práctica matemática como el razonamiento, la formulación de hipótesis para la resolución de problemas (Fernández-Ahumada y Montejo-Gámez, 2019; Kämmerer, 2023) y la comunicación matemática (Barquero, 2022). En el contexto concreto de la formación inicial de maestros de primaria, surge el interés por la investigación de tareas que estimulen estas actividades a partir de la aplicación de contenido matemático de la educación primaria. Las tareas de estimación son relevantes en este sentido, y constituyen el foco teórico del presente trabajo.

Existe una familia amplia de tareas de estimación, denominadas *Problemas de Fermi* (Arleback, 2009) cuya utilidad para trabajar diferentes destrezas de modelización queda sustentada por numerosos estudios (véase Albarracín y Gorgorió, 2014; Arleback y Albarracín, 2019). De forma particular, las tareas de *contabilización de grandes cantidades distribuidas sobre una región delimitada* han sido estudiadas con especial detalle (por ejemplo, I. Ferrando et al., 2017; L. Ferrando, 2021). Segura (2022) analizó este tipo de tareas en el contexto de la formación inicial de maestros de primaria en términos de cuatro planes de resolución básicos que, de alguna manera caracterizan este tipo de tareas de estimación. En efecto, los planes de resolución encontrados por Segura (2022) emergen para diferentes situaciones dependientes de ciertas variables de tarea. No obstante, los contextos de las tareas para las que emergen estos planes de resolución comparten propiedades geométricas comunes. En primer lugar, las situaciones en las que se plantean estas tareas

(i) permiten alcanzar estimaciones razonables asumiendo que la región está totalmente ocupada o que los objetos están distribuidos de manera uniforme en ella. Además, (ii) los objetos a contabilizar que involucran son de área mucho menor que la región sobre la que se realiza la estimación, por lo que el carácter acotado de la región no condiciona excesivamente la respuesta dada. En consecuencia, ignorar la forma geométrica concreta de los objetos a contabilizar no genera gran impacto en la precisión de la estimación resultante. En tercer lugar, finalmente, se trata de tareas *esencialmente* bidimensionales, es decir, (iii) admiten estimaciones sensatas que ignoran el carácter tridimensional de la región en la que se estima.

Este es el punto de partida del proyecto investigador que se presenta. En el contexto de los resultados sobre tareas de estimación mencionados, es pertinente cuestionar en qué medida estas propiedades de las tareas de estimación de grandes cantidades determinan la emergencia de los planes de resolución discutidos por Segura (2022). Es decir, se propone estudiar la respuestas que dan los estudiantes del grado de educación primaria a tareas en las que no se verifique alguna de las propiedades (i), (ii) o (iii) para observar si las aproximaciones que hacen los estudiantes son equiparables a las ya conocidas para las tareas de estimación de grandes cantidades en regiones delimitadas, y ver si hay algún momento *límite* en el que las propiedades mencionadas generan un cambio en las respuestas. De manera tentativa, y para orientar al lector, se pretende abordar la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo son los modelos planteados por estudiantes del grado de primaria al abordar tareas de estimación que dependen de propiedades geométricas del contexto de la tarea, y cuál es la dependencia de esos modelos respecto a estas propiedades?*

La estructura de la memoria de proyecto que se presenta es la siguiente: el capítulo 2 describe el enfoque teórico que se da a la estimación, que incluye la discusión del concepto de modelización y de modelo matemático en el ámbito escolar. También se discute la pertinencia de trabajar modelización en la formación inicial del profesorado de matemáticas, así como el papel de la estimación como una herramienta de utilidad en este sentido. Finalmente, se describen algunos antecedentes a esta investigación, que incluyen las categorías descritas por Segura (2022). El tercer capítulo detalla los objetivos del proyecto, mientras que el cuarto describe la metodología a seguir, que incluye los instrumentos, procedimientos y los hitos a lograr para completar el proyecto. Por último, el capítulo 5 recoge los resultados esperados del proyecto, su repercusión y difusión y posibles líneas futuras de trabajo.

Marco teórico y antecedentes

Este capítulo describe el concepto de modelización y de modelo matemático que se asume en el proyecto, la pertinencia de trabajar la modelización y el rol de las tareas de estimación para este fin y los resultados que anteceden a la investigación que se presenta.

2.1. Modelización en las matemáticas escolares

En las últimas décadas la modelización matemática se ha convertido en un ámbito crucial en educación matemática (Barquero, 2019), de manera que diferentes países la han ido incorporando gradualmente en sus currículos (Cabassut y Ferrando, 2013; H. M. Doerr y English, 2003; G. Stillman, 2000). Además, han proliferado proyectos internacionales orientados al diseño de recursos que pueden apoyar el aprendizaje de la modelización, como por ejemplo LEMA, PRIMAS (Dorier & García, 2013), MASCIL (García et al., 2018; MASCIL, 2016) o MERIA (2016). Del mismo modo, la modelización está generando un interés creciente entre los investigadores en educación matemática tanto a nivel internacional (Arleback, 2009; Czocher, 2016, 2018; I. Ferrando & Albarracín, 2019; Peter-Koop, 2009) como a nivel nacional (puede verse una síntesis de las contribuciones nacionales en I. Ferrando, 2019), interés que se ha extendido al contexto de formación inicial de profesorado de primaria (Barquero et al., 2018; Huincahue Arcos et al., 2018; Sevinc y Lesh, 2018; Wess y Greefrath, 2019).

Dado que la enseñanza de la modelización ha constituido un foco de interés específico en educación matemática (Blum et al., 2007), el concepto de *modelización* ha sido discutido desde diversas perspectivas (puede verse una síntesis en Kaiser, 2014). No existe en consecuencia una definición consensuada de modelización en el ámbito escolar, por lo que se considera necesario establecer una noción que será la que se asuma en la investigación.

2.1.1. Conceptualización

El análisis de las diferentes aproximaciones presentes en la literatura revela características dispares, que observadas en su conjunto caracterizan lo que se entiende por modelización matemática en el ámbito educativo:

Se trata de actividad escolar. En este sentido, Chevallard et al. (1997) señalaron que el conocimiento matemático es una actividad humana e incidieron en que gran parte de la actividad matemática puede identificarse con una actividad de modelización. Desde la misma perspectiva, Barquero (2015) describió la modelización como una actividad matemática funcional, en contraste con la actividad matemática formal.

Está relacionada con la resolución de problemas. La modelización surge a partir de una cuestión sobre cierto sistema de interés, por lo que está asociada a la resolución de problemas. A este respecto, Castro y Castro (1997) identificaron modelización y resolución de problemas, mientras que otros investigadores apuntaron que el fin de la modelización debe ser la producción de conocimiento sobre el sistema de estudio, sin restringirse a responder una cuestión concreta (Montoya Delgadillo et al., 2017). Una tercera perspectiva asume la integración de ambos enfoques según el nivel de destreza del estudiante. De esta forma la modelización para surge en estados de aprendizaje más básicos y se desarrolla para resolver problemas concretos, mientras que la modelización de surge en estados de aprendizaje más avanzados y se desarrolla para extraer un esquema general que permita crear conocimiento sobre el sistema (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Es de carácter procesual. La actividad de modelización se desarrolla a lo largo de un proceso que se divide en diferentes etapas. Bajo este enfoque, Blum y Leiß (2007) propusieron un esquema cíclico donde la modelización se explica a partir de las diferentes transiciones del proceso, que se detalla más adelante. De forma análoga, Arleback y Albarracín (2019) propusieron una descripción basada en diagramas de la secuencia temporal de las actividades realizadas por estudiantes al abordar situaciones de modelización.

Tiene una dimensión cognitiva. La modelización contribuye a la adquisición de ciertas destrezas matemáticas específicas. Bajo esta perspectiva, Blomhoj y Hojgaard (2003) definieron la competencia de modelización matemática como aquella que permite al individuo llevar a cabo el proceso de modelización completo, idea que fue desarrollada por Niss y Højgaard (2019), incluyéndola dentro del proyecto KOM como una competencia matemática que debe desarrollarse en la etapa escolar. Por su parte, Maaß (2006) describió un conjunto de acciones que caracterizan las competencias de modelización que se desarrollan durante la modelización, estableciendo una conexión con la dimensión procesual.

Implica la obtención de un modelo. Modelizar implica trabajar para obtener un modelo matemático, o producto final de la modelización (Sriraman, 2006) que será más o menos explícito al finalizar la actividad. Los modelos matemáticos escolares involucran un cambio de lenguaje entre el mundo real y las matemáticas, (Blum & Borromeo-Ferri, 2009; Niss,

2012) o entre diferentes descripciones matemáticas (García et al., 2006) y se basa en ciertas representaciones para expresar la conexión entre los diferentes elementos del sistema real y su matematización (Lesh y Harel, 2003; Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada, 2019).

La síntesis de las características discutidas permite entender la modelización matemática como *la actividad escolar que surge a partir de una pregunta sobre cierto sistema, se desarrolla mediante el proceso de creación, aplicación y evaluación de un modelo matemático que permita construir conocimiento acerca del sistema, y contribuye al desarrollo de destrezas matemáticas vinculadas al proceso*, que será la definición que se asume en el presente proyecto.

El ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007)

Bajo la conceptualización proporcionada, el formador de maestros que esté interesado en trabajar la modelización debe facilitar que su alumnado desarrolle este proceso de "creación, aplicación y evaluación" de un modelo matemático. Esta dimensión procesual de la modelización ha sido conceptualizado de diferentes maneras en la literatura que han sido revisados en diferentes ocasiones como Borromeo-Ferri (2006), Kaiser (2014) o Greefrath y Vorhölter (2016), por ejemplo. Uno de los esquemas teóricos más extendidos es el propuesto por Blum y Leiß (2007) (puede verse una discusión más amplia en Blum y Borromeo-Ferri, 2009). Este ciclo se articula en torno a siete pasos que organizan la actividad de modelización: (i) *comprensión* en el que la tarea de modelización tiene que ser asimilada; (ii)*simplificación/estructuración*, en la que se introducen hipótesis y se organizan las ideas para construir el modelo; (iii) *matematización*, en la que se introducen las herramientas matemáticas; (iv) *trabajar matemático*, que produce resultados (matemáticos) que (v) se interpretan (*interpretación*) y (vi) validan en el mundo real (*validación*). El ciclo finaliza con (vii) la *exposición* de los resultados obtenidos.

Borromeo-Ferri (2006) describió este ciclo desde una perspectiva cognitiva, idealizando la actividad de modelización como un proceso de avance del modelo que se busca desarrollar. De esta manera, identificó seis *fases* de desarrollo (*situación real, representación mental de la situación, modelo real, modelo matemático, resultado matemático* y *resultado real*) y de *transiciones* entre fases para referirse a las acciones propias de los pasos del ciclo de *BluLei07* que los modelizadores llevan a (figura 2.1). Borromeo-Ferri (2006) discutió la complejidad que genera diferenciar entre las diferentes fases, que genera obstáculos para entender qué tipo de acciones hay involucradas dentro de las transiciones. A pesar de ello, las transiciones del ciclo de Blum y Leiß (2007) dan una aproximación conceptual suficientemente válida al conjunto de procesos en los que se estructura la actividad de modelización. Montejo-Gámez y Fernández-Plaza (s.f.) propusieron una caracterización de 20 categorías que caracterizan las acciones propias de cada una de las siete transiciones. Estas deben entenderse como una forma de organizar las acciones que se espera que los estudiantes hagan para resolver una tarea de modelización referida a cierto sistema

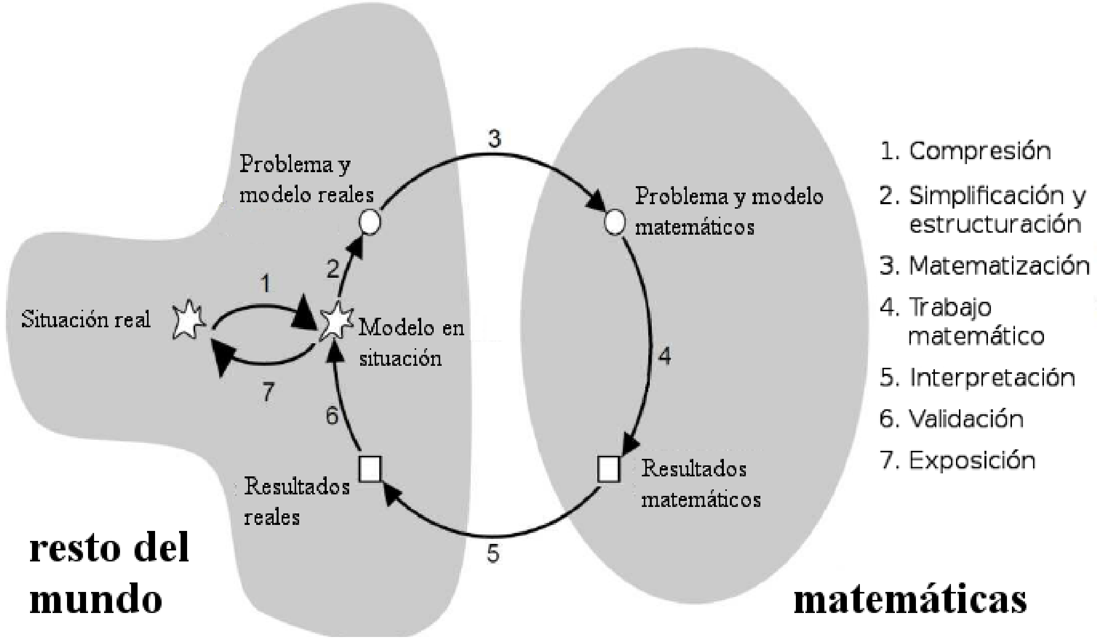


Figura 2.1: Fases y transiciones en el ciclo de modelización (Adaptado de Blum y Leiß, 2007)

presentado en contexto. La Tabla 2.1 sintetiza y esquematiza estas acciones.

En la transición de comprensión, estos autores proporcionan dos categorías: *(i) Explicar el problema*, que consiste en explicar la tarea a resolver utilizando palabras propias, e *(ii) Identificar la información en el enunciado,* que implica reconocer datos importantes e información útil dentro del enunciado de la tarea.

Dentro de la transición de simplificación/estructuración se pueden encontrar seis categorías. *(i) Dibujar la situación*, que supone dibujar (fiel o esquemáticamente) el sistema real al que se refiere la tarea para facilitar su resolución. *(ii) Usar y formular hipótesis*, que involucra usar en el modelo o ignorar (de forma implícita o explícita) ciertas propiedades del sistema contextualizado para propiciar la aplicación de las matemáticas. *(iii) Identificar y asignar variables,* que implica reconocer cantidades en el sistema contextualizado que son relevantes para resolver la tarea. *(iv) Obtener información y estimar datos*, que conlleva la búsqueda y obtención autónoma de valores realistas (búsqueda en diferentes fuentes o estimaciones directas o sencillas) de datos necesarios para responder a la tarea. *(v) Analizar casos particulares*, que está relacionada con la recolección y descripción sistemática (usando tablas, por ejemplo) de información observable sobre el fenómeno de interés de la tarea. Y, finalmente, *(vi) Descubrir patrones* que significa encontrar regularidades del sistema real que ayudan a resolver la tarea y expresarla de forma no matemática.

En la transición de matematización, hay tres categorías: *(i) Reformular matemáticamente*, que consiste en utilizar términos matemáticos para expresar preguntas o afirmaciones

Transicion	Categoría
Comprensión	*Explicar el problema* *Identificar información en el enunciado*
Simplificación/ Estructuración	*Dibujar la situación* *Usar y formular hipótesis* *Identificar y asignar variables y parámetros* *Obtener información y estimar datos* *Analizar casos particulares* *Descubrir patrones*
Matematización	*Reformular matemáticamente* *Introducir lenguaje formal* *Aplicar ideas matemáticas en otros contextos*
Trabajo matemático	*Aplicar procedimientos matemáticos* *Diseñar estrategias para resolver problemas* *Simular para obtener resultados matemáticos*
Interpretación	*Analizar la verosimilitud del modelo* *Identificar implicaciones dentro del contexto*
Validación	*Evaluar la utilidad del modelo* *Modificar para aproximarse a la realidad*
Exposición	*Explicar el modelo* *Discutir el modelo*

Tabla 2.1: Categorías de acciones dentro de cada transición del ciclo de modelización

sobre el sistema contextualizado sin usar formalismo matemático. *(ii) Introducir lenguaje formal,* que involucra el uso autónomo de formalismo matemático adecuado a la tarea para expresar información o razonamiento sobre el sistema contextualizado. Y, finalmente, *(iii) Aplicar ideas matemáticas a otros contextos*, que conlleva el empleo autónomo de contenido matemático para reflejar ideas del sistema contextualizado u obtener conocimiento sobre dicho sistema.

Dentro de la categoría de trabajo matemático se tienen otras tres categorías *(i) Desarrollar procedimientos matemáticos*, que involucra la aplicación de procedimientos matemáticos directamente asociados con contenido escolar. *(ii) Diseñar estrategias para resolver problemas*, que supone desarrollar y describir planes para abordar una pregunta matemática que supone un desafío para los estudiantes. Y, finalmente, *(iii) Simular para obtener resultados matemáticos,* que implica utilizar herramientas tecnológicas para encontrar respuestas matemáticas a preguntas matemáticas.

La transición de interpretación se compone de dos categorías: *(i) Analizar la verosimilitud del modelo,* que se refiere a las acciones para distinguir si el modelo obtenido es verosímil dentro del contexto de la tarea (hipótesis admisibles, unidades de medida o signo correctos, magnitud de sus resultados numéricos proporcionado, etc.), y *(ii) Identificar implicaciones dentro del contexto,* que supone evaluar las implicaciones de aplicar un modelo matemático para dar información sobre el sistema contextualizado y expresar esas implicaciones usando el lenguaje propio del contexto.

En la transición de validación, finalmente, Montejo-Gámez y Fernández-Plaza (s.f.) también consideraron dos categorías: *(i) Evaluar la utilidad del modelo*, que involucra utilizar diferentes estrategias para saber si la respuesta que da un modelo a la tarea es válida o no, y *(ii) Modificar para ajustarse a la realidad*, que implica modificar de forma autónoma un modelo desarrollado previamente con el fin de que este se ajuste mejor a datos reales. Esto supone cambiar (eliminar, añadir) hipótesis o elementos del modelo.

Por último, la transición de exposición contiene dos categorías: *(i) Explicar el modelo,* es decir,sintetizar por escrito o de forma verbal las ideas principales de un modelo mismo (hipótesis, justificación, variables, etc.), los resultados obtenidos y la validación de los mismos llevada a cabo, y *(ii) Discutir el modelo,* que involucra dar argumentos que apoyen o critiquen el modelo desarrollado y responder a preguntas sobre el mismo.

2.1.2. Noción de *modelo matemático* en investigación educativa

El segundo elemento de relevancia en el proyecto investigador que debe ser conceptualizado es el de modelo matemático desde el punto de vista educativo. Esta dimensión de la modelización ha sido discutida por diferentes autores (I. Ferrando et al., 2017; Lesh et al., 2000), quedándonos en este proyecto con la interpretación de Montejo-Gámez y Fernández-Ahumada (2019). Bajo esta aproximación, un modelo matemático se entiende como *un conjunto de preguntas y afirmaciones matemáticas sobre cierto sistema (real) que expresa, utilizando diferentes representaciones, información relevante que permite aplicar matemátics para obtener conocimiento nuevo sobre el sistema.* De esta manera, Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano (2021) señalaron que describir un modelo matemático involucra atender a tres componentes:

i) El *sistema*, que es el conjunto de relaciones y objetos reales propios del contexto de una tarea que son útiles para adquirir nuevo conocimiento, así como las preguntas explícitas acerca de este contexto que estimulan la adquisición de conocimiento. Estas *relaciones* se entienden como todas aquellas afirmaciones sin contenido matemático que expresan información relevante sobre el contexto, mientras que los *objetos* son esos elementos del contexto a los que hacen referencia las relaciones. Finalmente, las *preguntas* son aquellas cuestiones explícitas que no involucran contenido matemático y deben ser respondidas usando el modelo. El sistema queda determinado por el contexto para el que se crea el modelo y, por tanto, tiene su mismo nivel de abstracción. Al igual que la pregunta que motiva la creación del modelo, el conocimiento que se obtiene con el mismo que está desprovisto de contenido matemático se considera también parte de esta componente del modelo.

ii) La *matematización* contiene aquellas afirmaciones y entidades matemáticas que abstraen la información del sistema que es relevante para su modelización, así como las preguntas matemáticas explícitas. Dentro de esta componente se distinguen cinco tipos: *resultados y variables, propiedades y conceptos,* y *preguntas* matemáticas. Los resultados son todas aquellas afirmaciones que involucran contenido matemático y que conducen a una respuesta a la tarea que motiva la creación del modelo, mientras que las variables son esas cantidades relevantes a las que se refieren los resultados. Por su parte, las propiedades son las afirmaciones puramente matemáticas que sustentan los resultados, mientras que los conceptos son aquellos a los que se refieren las propiedades. La Tabla 2.2 muestra visualmente las relaciones entre las afirmaciones y los objetos involucrados en la matematización de un modelo. Finalmente, las preguntas (matemáticas) son aquellas cuestiones que involucran contenido matemático y que se plantean explícitamente en una producción escrita. La matematización describe todo conocimiento matemático que se aplica al sistema para obtener conocimiento sobre la situación sobre la que se trabaja.

	Afirmaciones	Objetos involucrados
Conocimiento aplicado al sistema	*Resultados*	*Variables*
Conocimiento matemático	*Propiedades*	*Conceptos*

Tabla 2.2: Elementos de la matematización de un modelo de acuerdo a Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano, 2021

iii) Las *representaciones* engloban la evidencia que expresa conocimiento o razonamientos sobre el modelo: fragmentos de texto que contienen afirmaciones en lenguaje natural (representaciones verbales), expresiones numéricas o algebraicas (simbólicas), gráficos, dibujos o diagramas (pictóricas) o tablas (tabulares). Las representaciones recogen la evidencia directamente observable que contiene una producción escrita, por lo que analizarlas es lo que da acceso al resto de componentes de un modelo matemático escolar.

La terna sistema-matematización-representaciones permitió a Montejo-Gámez, Amador-Saelices et al. (2021) proporcionar una herramienta de análisis para analizar modelos escolares, que es la que se utilizará para alcanzar los objetivos del proyecto. Dada su naturaleza, se emplaza su descripción al capítulo de metodología.

2.2. Modelización en la formación inicial de profesorado de primaria

En esta sección se discute la pertinencia de trabajar la modelización en el contexto de la formación universitaria de maestros de primaria, y se señala en particular el uso de las tareas de estimación que se investigan en el proyecto.

2.2.1. Pertinencia

Para analizar la idoneidad de trabajar modelización con futuros maestros de primaria, debe recurrirse a los modelos de conocimiento de profesorado de matemáticas. Muchos de ellos inciden en que el profesorado debe dominar el contenido matemático que imparte y superarlo, ya sea mediante una comprensión más profunda del mismo (Rowland et al., 2005) o del manejo de procesos matemáticos y la diversidad de significados vinculados a ese contenido (Godino et al., 2017). En este sentido, Carrillo et al. (2013) señalan el conocimiento de la estructura matemática y el conocimiento de la práctica matemática como subdominios que integran el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. La revisión de los modelos de conocimiento del profesorado, por tanto, ilustra la relevancia que los diferentes autores otorgan a las destrezas matemáticas que no se restringen a la aplicación del contenido a impartir. A pesar de esta importancia, la investigación ha encontrado que los maestros de educación primaria en formación inicial presentan muchas dificultades con este tipo destrezas: razonamiento (Kaasila et al., 2010), capacidad de establecer conexiones entre contenidos (Aydin & Ozgeldi, 2019; Olande, 2014) resolución de problemas (Olande, 2014; Verschaffel et al., 2005) o aplicación de conocimiento a contextos extramatemáticos (Aydin y Ozgeldi, 2019; Luo, 2009; Sáenz, 2009).

En este escenario, y dado que no es esperable una transferencia automática entre el conocimiento del contenido y las destrezas vinculadas a la práctica matemática (Niss, 1999), los resultados mencionados invitan a abordar la educación matemática de los maestros de primaria haciendo énfasis en estas. La modelización matemática es una actividad que puede contribuir a ello como se discute a continuación. En este sentido, García et al. (2006) subrayaron el doble valor didáctico de la modelización, ya que esta se puede emplear como recurso para el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos, así como para el desarrollo de destrezas específicas. Estas incluyen habilidades de resolución de problemas (Niss & Højgaard, 2019), de representación (Leshrer & Schauble, 2003) y promueve la reflexión sobre la importancia de las matemáticas (Kaiser et al., 2006), de manera que motiva a los estudiantes a comprometerse en la aplicación contenido matemático escolar a situaciones reales (De Lange, 2003). De igual forma, el aprendizaje de la modelización contribuye a la comprensión de fenómenos propios de las disciplinas STEM y de la Economía, por lo que es idóneo para la aplicación autónoma de las matemáticas a otras áreas de conocimiento (Arleback y Albarracín, 2019; Gravemeijer y Doorman, 1999).

Respecto al conocimiento vinculado a las prácticas de enseñanza, la modelización matemática supone un apoyo para el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido de los futuros maestros (Huincahue Arcos et al., 2018). En efecto, Doerr (2007) señaló que los profesores de matemáticas en formación necesitan experiencias sobre modelización, ya que estas les proporcionan un conjunto de contextos y herramientas para la enseñanza que no solo potencian su reflexión sobre el significado de los conceptos matemáticos (Kaiser et al., 2006; Kumar et al., 2017), sino que constituyen ejemplos prácticos que posteriormente ellos mismos pueden utilizar como docentes. Así, el aprendizaje a través de modelización matemática ayuda a los futuros profesores a reconocer contextos donde plantear tareas y diseñar situaciones de aprendizaje para alumnos de primaria. Por último, debe destacarse que habituar a los futuros maestros a tareas de modelización contribuye a mejorar su predisposición a implementarlas en el aula. En este sentido, Burkhardt (2004) apuntó hacia un posible rechazo del profesorado a implementar experiencias de modelización, debido a que la enseñanza se vuelve más abierta y menos predecible. Un contacto adecuado en el periodo de formación inicial contribuye a que los futuros maestros valoren el potencial de la modelización como recurso para la enseñanza de las matemáticas.

2.2.2. El papel de la estimación. Problemas de Fermi y tareas de estimación geométricas

Al igual que sucede con la riqueza de perspectivas desde las que los diferentes autores contemplan la modelización, la integración de esta actividad escolar en el aula es una cuestión que se aborda desde diferentes prácticas de enseñanza. Se comentan algunas relevantes, que culminan con la pertinencia del empleo de tareas de estimación. En este contexto se definen las tareas de estimación geométricas, que son las que se abordan en el proyecto.

Aproximaciones a la enseñanza de la modelización

Las prácticas de enseñanza de la modelización que se han documentado en la literatura se fundamentan en el planteamiento de una tarea lo más sencilla posible, presentada en contexto real y que plantea una pregunta abierta de interés en el contexto con la expectativa de desencadenar las destrezas de modelización, por una parte, o en el establecimiento de un proceso dialéctico de interacción con el profesorado. Una de las aproximaciones más relevantes en este sentido es la que surge desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (véase la conceptualización en García et al., 2006). Bajo esta perspectiva, la actividad de modelización se organiza según *recorridos de estudio e investigación*, una herramienta metodológica que articula un proceso de indagación compartida entre estudiantes y profesores que abarca enseñanza, diagnóstico y evaluación. De esta manera, la propuesta de la Teoría Antropológica de lo Didáctico integra investigación y enseñanza de la modelización, que se contemplan como actividades propias de las matemáticas. Pueden verse ejemplos de recorridos de estudio e investigación aplicados a la formación de maestros de educación primaria en (Barquero et al., 2015, 2018).

Dentro de la literatura norteamericana destaca la perspectiva *Modelos y modelización* (Lesh & Doerr, 2003). Este enfoque propone trabajar la modelización con el fin de estimular el desarrollo de sistemas conceptuales por parte de los estudiantes, que faciliten su comprensión del contenido matemático escolar. Bajo esta perspectiva, se el diseño de *actividades de estímulo de la modelización* (Lesh et al., 2000) a partir de seis principios. El *principio de realidad* establece que una actividad de modelizacion debe ser significativa para los estudiantes, es decir, acorde a sus conocimientos. Además, la actividad debe ser lo más sencilla posible, según el *principio de prototipo efectivo*. También es necesario que incluya criterios que los estudiantes puedan usar para revisar sus modelos *(principio de autoevaluación)* y crear documentación para revelar cómo resolvieron la tarea *(principio de documentación)*. Por su parte, el *principio de construcción del modelo* afirma que los estudiantes deben proporcionar una explicación o modelo explícito. Finalmente, el *principio de habilidad compartida y reutilización* establece que debe estimularse la producción de soluciones compartibles y reutilizables. Un ejemplo de tarea diseñada bajo estos principios puede verse en Montejo-Gámez et al. (2018).

En el ámbito europeo predominan trabajos fundamentados en el desarrollo de competencias vinculadas al ciclo de modelización. En líneas generales, estos autores proponen el diseño de tareas de formulación muy sencilla, basadas en contextos reales y cuyo interés nace del propio contexto. Este tipo de tareas persiguen que sea el interés de los estudiantes por dar respuesta a esa pregunta sencilla lo que desencadene el la actividad a través de las diferentes transiciones del ciclo. Pueden verse algunos ejemplos de tareas de estas características en Blum y Borromeo-Ferri (2009) e información adicional sobre este enfoque en W. Blum y Leiss (2008). La incorporación de esta aproximación didáctica a la formación inicial del profesorado de primaria fue discutida en profundidad por Borromeo-Ferri (2018). Una aproximación didáctica similar es aquella basada en los denominados *problemas de Fermi* (Arleback, 2009), denominados así por en honor del clásico problema planteado por Enrico Fermi consistente en estimar la cantidad de afinadores de piano de la ciudad de Chicago y que, por sus características, se han escogido para el proyecto.

Problemas de Fermi y tareas de estimación geométrica

Los problemas de Fermi son “open, non-standard problems requiring the students to make assumptions about the problem situation and estimate relevant quantities before engaging in, often, simple calculations” *[problemas abiertos, no estándar, que requiere que los estudiantes hagan hipótesis acerca de la situación del problema y estimen cantidades relevantes antes de involucrarse en, a menudo, cálculos simples]* (Arleback, 2009, p. 331). Se trata de tareas de estimación de cantidades grandes que han demostrado ser útiles para promover todas las actividades involucradas en la modelización (Albarracín y Gorgorió, 2014; Arleback y Albarracín, 2019). En efecto, si se atiende a las acciones que caracterizan el ciclo, la resolución de un problema de Fermi implica acciones como seleccionar información relevante de un contexto real, elegir cantidades de interés como variables del modelo, recoger o estimar datos sobre las mismas (transición de simplificación/estructuración), diseñar estrategias de cálculo y efectuar dichos cálculos (trabajo matemático), y reconocer y contrastar la validez de los resultados obtenidos (interpretación y validación), lo que hace que los problemas de Fermi sea una aproximación didáctica relevante para abordar la modelización.

En el contexto de formación inicial del profesorado de primaria, además, este tipo de tareas tiene el valor añadido de que permiten trabajar las destrezas vinculadas a estas transiciones sin necesidad de abordar contenidos matemáticos de niveles de secundaria o superiores. Debe destacarse también que la estimación ha emergido en este proyecto como una forma particular de estimular la actividad de modelización de los futuros maestros. Sin embargo, la actividad de estimación entendida como un "juicio sobre el valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite" (Segovia et al., 1989, p. 18) ya había sido señalada por diferentes autores como una actividad idónea en formación inicial del profesorado de primaria, ya que estimula su reflexión sobre el orden de magnitud de los números (De Castro et al., 2004), y la pertinencia de encontrar valores exactos o aproximados a problemas contextualizados, ampliando así la perspectiva de este alumnado universitario sobre las matemáticas (Segovia y Castro, 2009).

Las tareas de contabilización de grandes cantidades distribuidas sobre una región delimitada estudiadas por Segura (2022) son un ejemplo de tareas de estimación implementadas con éxito en estudios de grado en educación primaria. El planteamiento de la presente investigación, motivado por la introducción de variantes en las situaciones reales sobre las que demanda la estimación, lleva a considerar otro tipo de tareas: Las tareas **de estimación geométricas**. Estas se van a entender como *aquellos problemas de estimación en los que las propiedades geométricas de los elementos del sistema real involucrados resultan relevantes para obtener una respuesta*. En particular, estas tareas obligan a poner en juego formas y propiedades geométricas y suelen involucrar también destrezas asociadas a la medida, capacidades que en los problemas de Fermi más estudiados no son relevantes. El principal valor educativo de estas tareas de estimación geométricas radica en este punto, ya que contribuyen a que los futuros maestros elijan formas para describir situaciones reales, abstraigan o seleccionen propiedades geométricas que ayuden a simplificar cálculos sin alterar la estimación y adquieran consciencia de la magnitud de ciertas medidas. El apartado de metodología describe cómo se interpretan las tareas de estimación geométricas para este proyecto, en función de las motivaciones del mismo. Esto llevó a diseñar las tareas que se muestran en el Anexo A y constituyen ejemplos de estas tareas.

2.3. Antecedentes

Como se señaló previamente, la investigación sobre problemas de Fermi orientados a las tareas de contabilización de grandes cantidades sobre una superficie delimitada ha sido especialmente prolífica. En particular, Albarracín y Gorgorió (2014) y I. Ferrando et al. (2017) identificaron, desde diferentes metodologías, las estrategias que los estudiantes de educación secundaria aplicaron para resolver tareas de este tipo. Estas estrategias fueron contrastadas por los mismos autores en estudios como el de FerAlb21, que incluyó alumnado de educación primaria.

En el contexto de formación inicial de maestros de primaria, Segura (2022) describió y discutió cuatro categorías que sintetizan los planes de resolución que emergieron al plantear secuencias de tareas de este tipo a estudiantes del grado de magisterio, y que sirven de referencia básica para el proyecto. Se describen brevemente a continuación, y se hará referencia a ellas de ahora en adelante:

- ✓ *Recuento exhaustivo*, que engloba todas aquellas estrategias que buscan cuantificar directamente la cantidad de objetos que se desea estimar.
- ✓ *Linealización*, cuyas estrategias están orientadas a reducir la tarea a un problema unidimensional para después dar la estimación final utilizando la respuesta al problema unidimensional planteado. El ejemplo más usual de estrategia de esta categoría se basa en distribuir idealmente los objetos a contabilizar en una retícula de filas y columnas, y aprovechar esta distribución para la estimación.
- ✓ *Unidad Base*. Las estrategias de esta categoría consisten en la selección de un subconjunto de la región inicial (la unidad base) sobre la que se establece una primera estimación, y la multiplicación de dicha estimación por el número de unidades base que componen la región inicial. Esta unidad base puede ser de diferente naturaleza, pudiendo consistir tan solo en un objeto (reduciendo así la estimación a un problema de comparación multiplicativa de áreas), o en un subconjunto destacado de la región inicial.
- ✓ *Densidad*, que se fundamentan en calcular el número de objetos que ocupan una unidad de área (metro cuadrado, por ejemplo) y multiplicarlo por el área de la superficie sobre la que se estima.

Segura (2022) también prestó atención a ciertas *variables de contexto*, que son de interés por su conexión con la pregunta de investigación planteada: la *disposición* de los objetos a contabilizar en la superficie (ordenados o desordenados), su *tamaño* en relación con el de la superficie (pequeño, mediano o grande), el *tamaño de la superficie* en relación al resolutor (pequeño, mediano o grande) y *forma* de los objetos (homogéneos o heterogéneos, tanto de tamaño como de forma, regulares o irregulares).

En este punto es pertinente recordar que las tareas estudiadas por Segovia (2020) presentan ciertas características en común:

(i) (Distribución uniforme de objetos) Permiten alcanzar estimaciones razonables asumiendo que la región está totalmente ocupada o que los objetos están distribuidos de manera uniforme en ella.

(ii) (Tamaño pequeño de los objetos en relación a la región) Los objetos a contabilizar que involucran son de dimensiones mucho menores que la región sobre la que se realiza la estimación, por lo que el carácter acotado de esta no condiciona la respuesta dada. En consecuencia, ignorar la forma geométrica concreta de los objetos a contabilizar no genera impacto en la precisión de la estimación resultante.

(iii) (Bidimensionalidad) Admiten estimaciones sensatas que ignoran el carácter tridimensional de la región en la que se estima.

Dado que el foco de este proyecto es observar si estas características determinan las respuestas del alumnado, por lo que se describen a continuación resultados sobre tareas de estimación en los que algunas de estas condiciones no se verifican, que existen aunque no son abundantes.

En relación a la característica (i), Montejo-Gámez et al. (2023) investigaron los modelos que surgen para estimar cantidades cuya distribución irregular sobre la región inicial es evidente en un caso . Este estudio dio lugar las siguientes categorías relacionadas con las descritas previamente. (a) Modelos de *retícula*, comparables a la categoría de Unidad base, y fundamentados en la descomposición de la imagen sobre la que se propone la estimación en una cuadrícula y el cálculo del área real que representa el cuadrado unidad. De esta manera, el conteo de los cuadrados que contienen a personas permite calcular el área de la zona ocupada por la gente y la estimación se obtiene multiplicando este área por el número de personas que caben en 1 metro cuadrado. (b) Modelos de *descomposición*, comparables con la categoría de Densidad, y que parten de la zona ocupada por personas para descomponerla en figuras cuya área es calculable utilizando fórmulas escolares. En este caso, Montejo-Gámez et al. (2023) observaron configuraciones en las que estas figuras estaban igualmente ocupadas, o desigualmente ocupadas. (c) Modelos de *ocupación parcial*, también vinculados a la categoría de Densidad, que se basan en dar una estimación de la razón de ocupación del rectángulo de la imagen dada en la tarea, es decir, la fracción del rectángulo que estiman que está ocupada por gente en el dibujo. Este estudio ilustra que la introducción del carácter irregular fomenta estrategias de densidad, y hace desaparecer aproximaciones más sencillas, como las de linealización o recuento exhaustivo.

En relación a las tareas de estimación de geometría dimensional (ii) y (iii), Sevinc y Ferrando (2022) investigaron las estimaciones proporcionadas por estudiantes del grado de primaria del número de rollos de papel que caben en un armario dado. Encontraron modelos que involucran propiedades geométricas como la orientación de los rollos, o su distribución. Montejo-Gámez et al. (2024) señalaron que estos modelos no son genuinamente tridimensionales, ya que los rollos se pueden apilar en capas, lo que llevó a aproximaciones bidimensionales por parte de los estudiantes. Estos autores señalaron la pertinencia de considerar objetos de geometría tridimensional irregular o deformable, y encontraron para este último caso tres categorías de modelos admisibles (sin errores evidentes) para estimar la cantidad de racimos de uva que caben en una caja ortoédrica de dimensiones dadas: (a) Modelos *de capas*, relacionados con la categoría de Linealización, que obtienen una estimación de la cantidad de racimos que cubren una cara de la caja (generalmente la base), y multiplican por el número de capas. (b) Modelos *de razón entre volúmenes*, que estiman a partir de la división entre el volumen de la caja y de un racimo. (c) Modelos *de razones entre longitudes*, que completan la estimación multiplicando las tres razones entre las medidas de la caja y las correspondientes medidas del racimo (matematizado como un ortoedro de manera tácita). La conexión entre estos modelos y las categorías de Segura (2022) es más controvertida, ya en ambas se pueden admitir interpretaciones de densidad (Montejo-Gámez et al., 2024) e incluso de unidad base (López-Centella y Montejo-Gámez, 2023), y en el caso de los modelos de razones entre longitudes también hay una componente de Linealización involucrada.

Objetivos del proyecto

En virtud de las características de las tareas más estudiadas en la literatura y de los antecedentes encontrados se han identificado tres propiedades geométricas relevantes para focalizar la investigación en ellos: (i) la **Distribución** de los objetos a contabilizar dentro de la región en la que se propone la tarea, (ii) el **Tamaño relativo de los objetos** frente al de la región y (iii) la **Dimensión** en la que se puede abordar la tarea.

En este contexto, el objetivo general que se plantea en el proyecto es conocer los modelos que proponen los estudiantes del primer curso del grado en educación primaria al abordar tareas de estimación geométricas en regiones delimitadas y evaluar la dependencia de estos modelos frente a los factores Distribución, Tamaño relativo y Dimensión. Este objetivo se concreta en los siguientes objetivos específicos:

O1. Caracterizar los modelos propuestos por el alumnado para abordar tareas de estimación geométricas en las que los factores Distribución, Tamaño relativo y Dimensión son variables. Este objetivo implica:

> O1.1. Caracterizar los modelos propuestos por el alumnado para abordar tareas en los que el factor *Distribución* es variable.
>
> O1.2. Ídem para tareas en los que el factor *Tamaño relativo de los objetos* es variable.
>
> O1.3. Ídem para tareas en los que el factor *Dimensión* es variable.

O2. Evaluar la dependencia de los modelos propuestos por el alumnado respecto de los factores Distribución, Tamaño relativo y Dimensión. Este objetivo implica:

> O2.1. Evaluar la dependencia de los modelos propuestos por el alumnado respecto del factor *Distribución*, prestando atención a los casos *límite* en los que el alumnado cambia de estrategia.
>
> O2.2. Ídem para el factor *Tamaño relativo de los objetos*.

O2.3. Ídem para el factor *Dimensión*.

O3. Identificar las características novedosas que introduce el alumnado en sus modelos en función de los factores considerados y compararlos con las existentes en la literatura. Conjeturar el *impacto* de cada factor sobre la tarea de estimación. Este objetivo implica:

O3.1. En caso de que los modelos sean dependientes del factor *Distribución*, describir las características cualitativas que van modificándose en los modelos según varía este factor.

O3.2. Ídem para el factor Tamaño relativo de los objetos.

O3.3. Ídem para el factor Dimensión.

Metodología

Para lograr los objetivos planteados, el proyecto se estructura en torno a tres estudios que se desarrollarán de manera secuenciada en el tiempo a lo largo de tres cursos académicos. En cada uno de ellos se considerará la dependencia respecto de solo uno de los factores considerados, de la siguiente manera.

✓ E1 estará dedicado estudiar la dependencia del factor *Distribución* y se implementará en el presente curso (23/24).

✓ E2 estará dedicado al factor *Tamaño relativo de los objetos* y se implementará en el curso 24/25.

✓ E3 estará dedicado al factor *Dimensión* y se implementará en el curso 25/26.

Teniendo en cuenta esta jerarquía, los tres estudios tendrán el mismo planteamiento y desarrollo dentro del curso académico que le corresponde a cada uno. Concretamente, se han planteado estudios exploratorios basados en datos cualitativos (Cohen et al., 2012), de manera que cada estudio aborda los tres primeros objetivos para el factor correspondiente (esto es, Ej aborda O1.j., O2.j y O3.j para j=1, 2 y 3).

4.1. Tipo de estudio y muestra

La muestra de cada estudio estará compuesta por dos grupos de estudiantes de las Universidades de Granada y de La Rioja [1]. Se trata del alumnado de las asignaturas "Bases matemáticas para la educación primaria" de la Universidad de Granada (que se imparte en el primer semestre) y "Matemáticas básicas para maestros" de la Universidad de la Rioja (que se imparte en el segundo semestre). Ambas asignaturas pertenecen al primer curso del grado en educación primaria, por lo que, salvo casos excepcionales, estos

[1]Muchas gracias a Alberto Magreñán y a Lara Orcos (Universidad de La Rioja) por su colaboración

participantes han cursado al menos las materias de matemáticas de 4^o de ESO de la rama de ciencias sociales. Estos estudiantes, por otra parte, no suelen tener experiencia previa con la modelización.

Atendiendo al promedio de alumnos que se matriculan en las dos asignaturas durante los últimos años, se espera que cada uno de los grupos englobe alrededor de 80 estudiantes al año, lo que implica que cada estudio contará con 160 participantes. En consecuencia, la muestra para la investigación en su conjunto será de 480 maestros en formación inicial.

4.2. Instrumentos y procedimientos de recogida de información

Para determinar las tareas de estimación geométrica que se utilizarán como instrumentos de recogida de información en el estudio se consideran tres modalidades para cada factor. De esta manera:

✓ El factor Distribución puede tomar los valores (a) *Uniforme*, (b) *Grupos irregulares* o (c)*Objetos aislados.*

✓ El factor Tamaño relativo de los objetos puede tomar los valores (a) *Pequeño*, (b) *Intermedio* o (c)*Grande.*

✓ El factor Dimensión puede tomar los valores (a) *2D*, (b) *Reducible a 2D* (objetos apilables, por ejemplo) (c)*3D.*

En las tareas de contabilización de grandes cantidades más estudiadas en la literatura se cumple que la Distribución es Uniforme, el Tamaño relativo de los objetos es Pequeño y la Dimensión es 2D. Por tanto, serán estos los valores de referencia de los factores que no están evaluados en un estudio. Esto implica, por ejemplo, que en E1, en el que se evalúa la dependencia del factor Distribución, las situaciones que se planteen tendrán un Tamaño relativo de los objetos Pequeño y Dimensión 2D. La Figura 4.1 muestra los valores de los factores fijados en cada uno de los estudios siguiendo este criterio, que condujo a diseñar un total de 9 tareas, 3 para cada estudio. El Anexo A recoge dichas tareas, que constituyen el conjunto de instrumentos de recogida de información para el proyecto.

La secuencia de tres tareas propia de cada estudio será suministrada a los estudiantes de las dos universidades, que tendrán una hora y media para resolver las tres tareas de la secuencia de forma individual. La única diferencia entre los participantes de las dos universidades es que resolverán las tareas en orden inverso, con el fin de analizar la tendencia a *mantener* los modelos en un sentido u otro. Esto significa que en el estudio 1, por ejemplo, los participantes de la Universidad de Granada resolverán la secuencia E1.1 - E1.2 - E1.3, mientras que los de la Universidad de La Rioja resolverán E1.3 - E1.2 - E1.1.

	Distribución	Tamaño relativo de los objetos	Dimensión
E1	Varía	Pequeño	2D
E2	Uniforme	Varía	2D
E3	Uniforme	Pequeño	Varía

Figura 4.1: Valores de los factores fijados en los estudios. El factor marcado en gris toma todos los valores en el estudio correspondiente

Considerando el tamaño de la muestra esperado, este procedimiento de recogida de información proporcionará 240 producciones por grupo, lo que implica 480 registros escritos para cada estudio. Por tanto, la investigación completa analizará 1 440 producciones escritas.

4.3. Procedimientos de análisis de datos

A continuación se describen los procedimientos de análisis para alcanzar cada uno de los objetivos definidos en el proyecto.

4.3.1. Caracterización de los modelos

Para abordar los objetivos Oi.1. (i=1, 2, 3) se emplerará un análisis estructurado en tres etapas, que se repetirá para todas las producciones de cada tarea. La primera de ellas está destinada a identificar *unidades de análisis* útiles para caracterizar las producciones asociadas a esa tarea, esto es, elementos específicos de las producciones que permiten reconocer los modelos subyacentes. Para ello se utiliza la herramienta desarrollada por Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano (2021), que es consistente con la definición de modelo presentada en el marco teórico.

El análisis de una producción con esta herramienta es profundo y comienza con las representaciones. La identificación de afirmaciones involucradas en los elementos de representación permite distinguir las relaciones y los resultados matemáticos del modelo. De ellos se extraen los objetos y las variables empleadas, respectivamente. Por último, el análisis de los resultados permite abstraer las propiedades y los conceptos matemáticos involucrados. El seguimiento de esta estrategia a lo largo de todas las representaciones permite obtener todos los elementos del sistema y de la matematización que componen el modelo estudiado. La síntesis de todos ellos permite conjeturar una caracterización del modelo analizado que facilita valorar su grado de generalidad. La Figura 4.2 muestra una plantilla para analizar un informe escrito a partir, mientras que el Anexo B contiene un ejemplo completo de análisis a partir de esta herramienta. El resultado de este procedimiento para una producción escrita es la caracterización completa del modelo subyacente a ella. (el Anexo

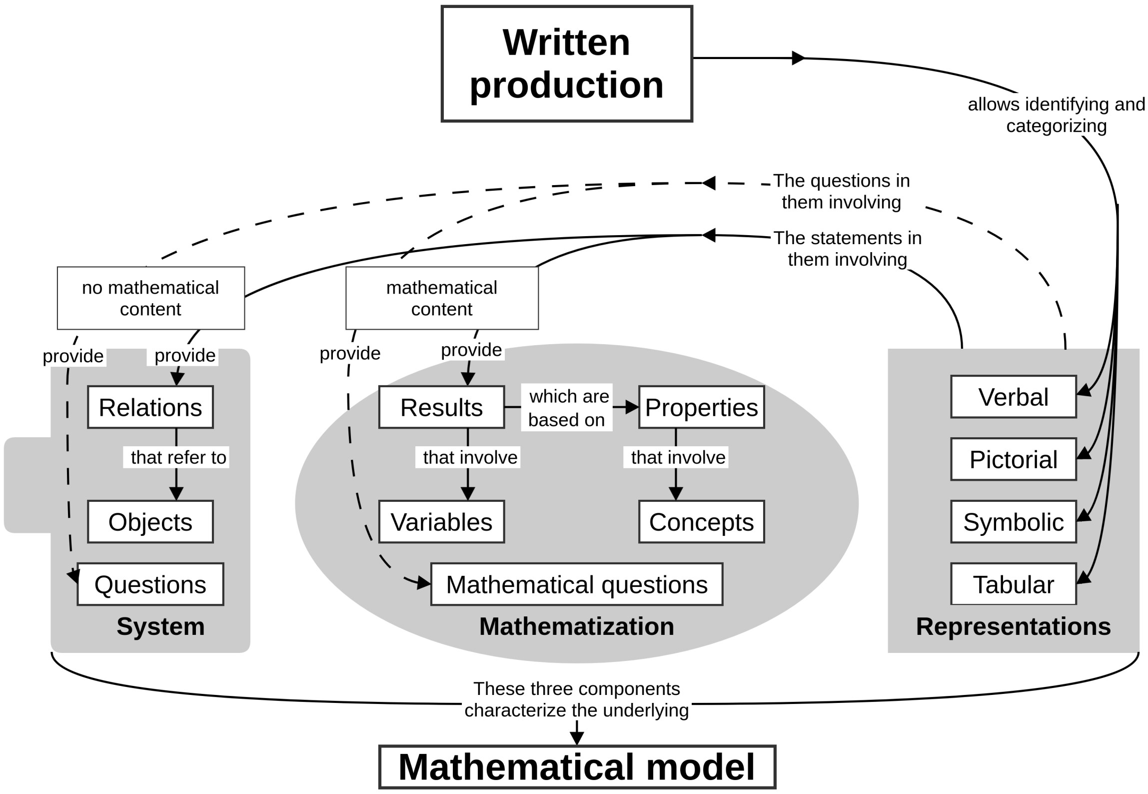


Figura 4.2: Flujo del análisis propuesto por Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano (2021).

B muestra un ejemplo completo de análisis para una producción que resuelve la tarea E1.2). Esta caracterización es profunda, pero dada la gran cantidad de datos que se van a analizar, no resulta operativa. Por esta razón, se propone utilizar este tipo de análisis un número limitado de veces hasta abstraer *unidades de análisis* que resumen la información más relevante del modelo. Montejo-Gámez et al. (2023), por ejemplo, llevaron a cabo esta estrategia para la tarea E1.2, obteniendo las unidades de análisis: (i) la *fórmula*, que recoge los cálculos hechos para lograr la estimación, (ii) los *datos aportados*, que recoge las estimaciones que recogió el alumnado de forma autónoma para construir su estimación y (iii) los dibujos, que describen gráficamente la aproximación hecha. Se propone, por tanto, hacer una selección aleatoria de diez producciones para una tarea y desarrollar el análisis completo en búsqueda de las unidades de análisis relevantes. Si no es suficiente, se pueden ir escogiendo más producciones hasta determinarlas, lo que concluiría la primera etapa del análisis.

Una vez identificadas las unidades de análisis, la segunda etapa consiste en analizar todas las producciones en términos de las unidades de análisis. Una vez culminada esta etapa, en la tercera se buscan los grupos emergentes de modelos en función de los valores asignados a las unidades de análisis de cada producción. Montejo-Gámez et al. (2023) y

Montejo-Gámez et al. (2024) siguieron este análisis basado en tres etapas para obtener las categorías descritas en la sección de antecedentes. El procedimiento anterior, descrito para una tarea, se repetirá para las dos tareas restantes de la secuencia, de manera que se obtendrán tres categorizaciones de modelos (que posiblemente tengan elementos comunes), lo que conduce a lograr el objetivo Oi.1 (i=1, 2, 3).

4.3.2. Evaluación de la dependencia respecto de los factores

Para evaluar la dependencia de las categorías obtenidas respecto del factor correspondiente dentro de cada estudio (objetivos Oi.2, i=1, 2, 3) se elaborarán las tablas de contingencia Categorías-Tareas en la que se incluyen tantas filas como categorías se hayan observado en total, y tres columnas (una por tarea). La Figura 4.3 ilustra un ejemplo en el que se habrían encontrado en total cinco categorías, pero en la tarea E1.1. solo se habrían manifestado 4 de ellas. El test Chi-cuadrado asociado a esta tabla de contingencia da una primera intuición sobre la dependencia de las categorías obtenidas en función de las tareas.

	E1.1	E1.2	E1.3
C1	30	40	10
C2	23	20	0
C3	16	14	0
C4	0	1	60
C5	21	15	10

Figura 4.3: Ejemplo de tabla de contingencia si se encontraran cinco categorías de modelos en las tres tareas del primer estudio

Si el test Chi-cuadrado arroja dependencia significativa, deben analizarse todos los pares de tareas (pares de columnas) para contrastar la dependencia de las estrategias tarea por tarea. Por ejemplo, en la tabla de la Figura 4.3 no habría diferencias significativas entre los modelos generados para E1.1 y E1.2, pero sí para E1.3 y las otras dos tareas. Si no arrojara diferencias significativas, no se podría concluir que los modelos asociados a la secuencia dependan del factor.

Debe señalarse que este procedimiento debe hacerse por separado en cada uno de los grupos. En efecto, el orden en el que se desarrollan las tareas podría influir en la tendencia del alumnado a mantener su modelo en función de si la siguiente tarea es factible con el modelo desarrollado para la anterior. Por ejemplo, si un estudiante ha resuelto de forma solvente la tarea E1.2, es de entrada más factible que sepa hacer la E1.1 que el caso contrario (saber la E1.2 habiendo hecho la E1.1). Esta hipótesis se debe contrastar comparando las evaluaciones de dependencia hechas en cada grupo y extrayendo conclusiones pertinentes.

4.3.3. Identificación del impacto del factor

Finalmente, para alcanzar los objetivos Oi.3 (i= 1, 2, 3) se recuperarán las categorías asociadas a aquellos pares de tareas cuyas diferencias han resultado signficativas y se describen sus características cualitativas a partir de las unidades de análisis señaladas para cada tarea. La diferencia entre esas unidades de análisis, junto con la observación de las categorías en las que la diferencia de frecuencias sea mayor darán la medida del impacto del factor analizado sobre los modelos desarrollados. Por ejemplo, en la tabla de la Figura 4.3 la categoría C4 es la que marca mayores diferencias entre E1.3 y las demás tareas, seguida de C2, por lo que el análisis del impacto del factor debería fundamentarse en las características cualitativas de esas categorías de modelos.

4.4. Hitos, relación con los objetivos y cronograma

El desarrollo del proyecto se articulará en torno a la consecución de 15 hitos que estructuran las tareas a llevar a cabo durante el proyecto. La tabla 4.4 muestra el cronograma de los mismos, indicando el tiempo estimado de duración de cada uno. Dado el carácter periódico del diseño del proyecto, se utiliza la misma descripción para los hitos que tendrán lugar en las mismas fechas del calendario.

Hitos *H01, H06* y *H11.* Recogida de datos en la Universidad de Granada (diciembre) y en La Universidad de La Rioja (febrero). Durante este periodo se realizan revisiones de la literatura y se completan las tareas relacionadas con la difusión del trabajo.

Hitos *H02, H07* y *H12.* Análisis de las producciones escritas. Implica, para cada tarea, la identificación de las unidades de análisis, el análisis en términos de dichas unidades y las categorizaciones de los modelos vinculados a la tarea.

Hitos *H03, H08* y *H13.* Evaluación de la dependencia respecto del factor correspondiente: elaboración de tabla de contingencia y realización de los tests Chi-cuadrado pertinentes.

Hitos *H04, H09* y *H14.* Identificación del impacto del factor correspondiente, proporcionando las características cualitativas que materializan el efecto del factor sobre los modelos.

Hitos *H05, H10* y *H15.* Redacción de la memoria sobre el proyecto, y redacción de artículos y comunicaciones a congresos para dar visibilidad al trabajo. En este periodo también es pertinente buscar en la literatura nuevas referencias relacionadas con tareas de estimación geométricas.

Fecha	Hito	Descripción	Objetivos
		Estudio E1	
Dic. 23 - Feb. 24	H01	1^a recogida de datos	O1.1
Marzo 24-Mayo 24	H02	Caracterización modelos Ej	O1.1
Junio 24-Julio 24	H03	Ev. dep. respecto Distribución	O2.1
Julio 24-Sept. 24	H04	Impacto factor Distribución	O3.1
Oct. 24-Nov 24	H05	Memoria 1 y difusión	O1.1, O2.1, O3.1
		Estudio E2	
Dic. 24 - Feb. 25	H06	2^a recogida de datos	O1.2
Marzo 25-Mayo 25	H07	Caracterización modelos Ej	O1.2
Junio 25-Julio 25	H08	Ev. dep. respecto Tamaño rel. objetos	O2.2
Julio 25-Sept. 25	H09	Impacto factor Tamaño rel. objetos	O3.2
Oct. 25-Nov 25	H10	Memoria 2 y difusión	O1.2, O2.2, O3.2
		Estudio E3	
Dic. 25 - Feb. 26	H11	3^a recogida de datos	O1.3
Marzo 26-Mayo 26	H12	Caracterización modelos Ej	O1.3
Junio 26-Julio 26	H13	Ev. dep. respecto Dimensión	O2.3
Julio 26-Sept. 26	H14	Impacto factor Dimensión	O3.3
Oct. 26-Nov 26	H15	Memoria 3 y difusión	O1.3, O2.3, O3.3

Tabla 4.1: Cronograma con los hitos del proyecto y relación con los objetivos

4.5. Posibles amenazas para el desarrollo del proyecto y respuestas previstas

La mayor amenaza que se cierne sobre el proyecto radica en el carácter abierto de las tareas, que puede generar que el alumnado las deje en blanco, o invierta excesivo tiempo en una única tarea, con las subsiguientes pérdida de datos. En este sentido, los investigadores se guardan la potestad de intervenir para activar a los estudiantes o formular preguntas para la reflexión sin dar respuestas definitivas. La compartición y discusión pautada de respuestas entre el alumnado, sin que el investigador haga valoraciones, puede contribuir a controlar los tiempos en la recogida de datos.

Otra posible amenaza sobre el mismo es la eventual pérdida de información debido a que el estudio se fundamenta en el análisis de producciones escritas, por lo que se deja de tener en cuenta mucha información sobre el proceso que puede ser esencial para comprender los modelos. La posible respuesta que se puede dar es recoger información sobre el proceso que complemente la información recogida. El tipo de análisis desarrollado en Montejo-Gámez et al. (2018) puede ser útil con este fin.

Una tercera dificultad que podría encontrarse a lo largo del desarrollo del trabajo está relacionada con la influencia de otras variables de tarea. Por ejemplo, la tarea E1.1 tiene una imagen en la que no se puede medir, y no está claro la región sobre la que se estima (sería una variable a considerar en esa tarea) mientras que en E1.2 no existe esta dificultad. El hecho de que estos factores sean influyentes es una incógnita, pero en el caso de que ocurrieran se plantearían modificaciones de las tareas para alinear la mayor cantidad de variables entre dos tareas de la misma secuencia.

Finalmente, deben señalarse algunas características del proyecto que podrían constituir debilidades, pero que son intrínsecas al diseño. En primer lugar, en la investigación mezclan datos de dos grupos que, en principio podrían tener diferente nivel. En este caso, se podría realizar una evaluación previa y contraste de igualdad de medias para descartar esta posibilidad. En segundo lugar, el estudio tiene carácter transversal en el sentido de que los estudiantes cuyos datos se emplean para evaluar el impacto del factor Dimensión, por ejemplo, son diferentes de los que se usan para evaluar el impacto de Distribución. En este sentido, el diseño de la investigación ha quedado subordinado al de los programas de las asignaturas, ya que en otro caso sería menos factible llevarlo a cabo (una investigación que ocupara más sesiones sería más difícil de implementar) debido a la alta carga que presentan las asignaturas en las que se desarrolla la investigación. Para terminar, debe señalarse que los posibles resultados de dependencia de los modelos respecto de un factor se obtienen fijando los otros dos factores, y queda la incógnita de cuáles serían los resultados modificando otras variables. Esta questión sería objeto de futuras investigaciones y se comenta en el capítulo final.

Resultados esperados, repercusión y líneas de trabajo futuro

La expectativas sobre los resultados del proyecto se exponen organizados en torno a los objetivos del mismo. En cuanto a los posibles modelos que pueden surgir (objetivo O1), mi experiencia como investigador y profesor me induce a pensar que se obtendrán en todos los casos modelos novedosos frente a los conocidos, aunque las ideas fundamentales serán similares. Esta percepción está apoyada por la literatura, como es el caso de los trabajos de Montejo-Gámez et al. (2024) y López-Centella y Montejo-Gámez (2023), en los que se obtienen categorías diferentes para una misma tarea, pero en ambos casos hay conexiones con las categorías de Segura (2022). En este sentido, la intencionalidad del proyecto está más en la línea de buscar diferencias que similitudes, ya que se buscan situaciones en las que el alumnado cambia su aproximación a un problema. Por estas razones se tenderá a buscar categorías diferentes en todas las secuencias. En cualquier caso, es esperable que la tercera, focalizada en el factor Dimensión, genere mayor riqueza de modelos que en las otras dos secuencias.

En cuanto a la dependencia de los modelos frente a los factores considerados (objetivo O2), es de esperar que se observe dependencia respecto de los tres factores. En el caso del factor Distribución, el estudio de Montejo-Gámez et al. (2023) muestra modelos como el de retícula que, aunque está relacionado con la categoría de linealización, parte de una idea muy diferente (asignar al contexto una unidad de área propia), por lo que la expectativa es que se obtengan ideas similares, novedosas frente a las categorías extraidas en la literatura. En cuanto al factor *tamaño relativo*, no hay duda de que la tarea E2.3 es muy diferente a E2.1, por lo que se espera obtener que sí hay dependencia. En este caso, el interés está en el momento que el que se cambia, ya que la situación en E2.2 no es cómoda de estimar teniendo en cuenta la geometría del antifaz, pero hacerlo utilizando ideas de densidad resultaría demasiado aproximado. Quizá se obtengan dependencias diferentes en función del orden en el que se resuelvan las tareas, en este sentido la comparativa entre los grupos puede ser la clave.

Finalmente, en cuanto a las características novedosas, se espera que el factor Dimensión introduzca riqueza en la matematización de los objetos, especialmente en E3.3., tarea para la que se han observado diferentes aproximaciones geométricas al racimo (López-Centella y Montejo-Gámez, 2023; Montejo-Gámez et al., 2024). En el caso del factor Tamaño relativo, es esperable que E2.3. conduzca a configuraciones de interés para situar los antifaces sobre el papel, aunque quizá esto no ocurra en los estudiantes que comiencen con E2.1. El factor Distribución, por último puede ser el que menos riqueza aporte, dado que la tarea novedosa (E1.3) puede abordarse utilizando la unidad base, que es una estrategia conocida.

Respecto a la repercusión y difusión de los resultados, el proyecto desarrolla ideas novedosas que constituyen aportaciones al cuerpo de conocimiento de la educación matemática. En efecto, el Anexo A incluye nueve tareas, y solo tres de ellas están ampliamente documentadas en la literatura, por lo que cualquiera de los elementos novedosos discutidos previamente supondrían una contribución de interés para la investigación en educación matemática. Además, la estrategia de caracterización de modelos a través de unidades de análisis resulta eficaz y supone una aportación para estudios centrados en modelos. Del mismo modo, el uso de la tabla de contingencia para establecer la dependencia de las categorías frente a las tareas es un recurso potente que puede tener alcance en otras situaciones. Finalmente, la identificación de factores que involucran un cambio en la manera de aproximar la tarea de los estudiantes sería de gran interés, ya que daría claves para diseñar tareas que fomenten la modelización. Estos argumentos muestran que el desarrollo del proyecto proporcionará evidencias significativas que podrán ser documentadas y publicadas en revistas de alta repercusión. Del mismo modo, los resultados parciales podrán constituir contribuciones a congresos de relevancia nacional, como el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) o internacional como el Congress of European Researchers in Mathematics Education (CERME) o, más específicamente, las conferencias del International Conference on the Teaching of Mathematics and Applications (ICTMA).

Para concluir, se señalan algunas líneas de investigación que podrían desarrollarse en el futuro. Como se ha comentado, la caracterización de los modelos que emergen al resolver muchas de las tareas planteadas en el estudio ya son resultados en sí mismos. Su carácter preliminar invitaría a clarificar y profundizar en las categorías obtenidas, en muestras más amplias. De hecho, tareas como E3.3. pueden resultar excesivamente complejas para estudiantes de grados de magisterio. Plantearlas en otros contextos educativos quizá contribuiría a descubrir mayor riqueza y profundidad en la comprensión del alcance de la tarea. En segundo lugar, sería de interés profundizar en la dependencia de los modelos frente a los factores. Anteriormente se ha señalado que el proyecto analiza la dependencia de los modelos respecto a un factor fijando los otros dos factores. Sería de interés evaluar estas dependencias considerando otros factores o modificando dos de ellos y fijando uno. Por último, es necesario evaluar el alcance de las tareas de modelización geométrica como herramienta de valor potencial en la formación inicial del profesorado de primaria. La literatura apoya el potencial de los problemas de Fermi, y este tipo de tareas mantiene los beneficios de aquellos e incluye la necesidad de utilizar propiedades geométricas (las tareas E2.2. y E3.3 son ejemplos de ello). Contrastar la validez de estas tareas para trabajar las competencias de modelización es también una cuestión de interés que podría ser objeto de investigaciones futuras.

Parte III

Proyecto docente: *“Bases Matemáticas para la Educación Primaria”*

Introducción

Este proyecto docente desarrolla una propuesta didáctica para la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria" del grado en educación primaria de la Universidad de Granada, que se imparte en la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada con arreglo al plan de estudios vigente (Universidad de Granada, 2009) y siguiendo las directrices que establece la guía docente de la asignatura (Universidad de Granada, 2023a).

La educación matemática de los ciudadanos del mañana es una cuestión primordial que viene siendo discutida por múltiples agentes sociales y educativos: familias, instituciones educativas, gobiernos e investigadores. En los últimos años, además, este debate se ha intensificado gracias el desarrollo de programas internacionales como PISA (*Programme for International Students Assessment*), véase Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2015a), o TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), véase Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2015b), orientados a evaluar la competencia matemática de los escolares, en los que el sistema educativo español obtiene resultados que usualmente están por debajo de las expectativas de la opinión publica (puede verse un análisis comparativo de los resultados españoles en PISA y TIMSS en López Beltrán et al., 2020) y que dirigen el debate educativo hacia la calidad del profesorado de matemáticas. Es complejo evaluar la repercusión real que tiene el profesorado sobre sus estudiantes. Por una parte, hay estudios que documentan el impacto de la calidad del profesorado de matemáticas sobre el rendimiento de sus alumnos (Alagumalai & Buchdahl, 2021; Alharbi et al., 2020; Baumer et al., 2010; Hill et al., 2008) y otros que subrayan que este impacto es pronunciado en niveles más bajos (Konstantopoulos, 2011; Rivkin et al., 2005). Por otra parte, los propios informes PISA o TIMSS muestran que existe diferencia de resultados entre zonas de diferentes niveles socioculturales, por lo que una lectura superficial de las evaluaciones negativas puede conducir a juicios simplista (Rodríguez-Muñiz et al., 2022). No obstante, más allá de la responsabilidad que se le puede atribuir realmente, este ejemplo ilustra la enorme repercusión social del profesorado de matemáticas especialmente en el nivel de educación primaria, donde la crítica sobre su conocimiento matemático suele ser más acusada. Se evidencia entonces la necesidad de proporcionar a los futuros maestros una educación matemática lo más solida posible dentro del contexto universitario actual. Los formadores de maestros de matemáticas de los estudios de grado tenemos el compromiso de aportar esfuerzos y herramientas para ello. El presente proyecto asume este compromiso como punto de partida profesional y personal, y lo hace en relación a la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria", que es la que mayor relevancia concede al conocimiento del contenido matemático de los estudiantes del grado en educación primaria en la Universidad de Granada.

Para enmarcar la propuesta de enseñanza que se desarrolla en el proyecto es necesario señalar tres antecedentes, complementarios al contexto general que se presentará a continuación, que han condicionado su diseño y desarrollo. El primer antecedente es personal: desde mi perspectiva, la reflexión sobre qué matemáticas debe saber un maestro de educación primaria debe ser ineludible y renovable a lo largo de la trayectoria de un formador de profesorado, ya que el resultado de la misma determina nuestro posicionamiento docente y, por ende, será lo que el formador transmitirá a los maestros del día de mañana. Esto obliga a explorar diferentes perspectivas teóricas y diseñar propuestas de enseñanza coherentes con ellos. La literatura en educación matemática da cuenta de muchas de ellas, (Carrillo et al., 2013; Godino et al., 2017; Hill et al., 2008; Rowland et al., 2005; Scheiner, 2015; Shulman, 1986), aunque desde el trabajo seminal de Shulman (1986) existe consenso generalizado en cuanto a la existencia de dos subdominios principales: conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido. En otras palabras, los maestros deben tener conocimiento sobre las matemáticas que imparten y sobre cómo llevarlas al aula.

La reflexión compartida en el seno del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada ha dado lugar a enfoques propios en este sentido. Uno de ellos es el *Análisis Didáctico* (Flores & Rico, 2015; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2013; Rico, 1997), que constituye el segundo antecedente clave que enmarca el proyecto. El Análisis Didáctico proporciona una herramienta de diseño curricular estructurado en torno a cuatro subanálisis que dan respuesta a preguntas primordiales que deben abordarse al planficar la enseñanza de las matemáticas: (i) ¿Qué matemáticas enseñar y cómo entenderlas?, que da lugar al *análisis de contenido*, (ii) ¿Qué se espera que el alumnado aprenda?, que origina el *análisis cognitivo*, (iii) ¿Cómo enseñar matemáticas?, relacionada con el *análisis de instrucción* y (iv) ¿Cómo saber si el alumnado ha aprendido?, que está vinculado al *análisis evaluativo*. Estos análisis, en su conjunto, permiten establecer un proceso cíclico de diseño-implementación-evaluación y rediseño análogo a otras estrategias propias de la literatura en educación matemática como el *Ciclo de enseñanza de las matemáticas* (Simon, 1995) o la investigación basada en diseño (Bakker, 2019; Molina et al., 2011). La repercusión del Análisis Didáctico dentro del departamento trasciende la planificación de una única asignatura, ya que da sentido a la organización de las materias obligatorias que imparte el área en el grado de educación primaria. En efecto, el debate profundo que se generó dentro del departamento para articular las asignaturas del área en el plan de estudios actual (Universidad de Granada, 2009) condujo a la siguiente configuración (Segovia, 2020): la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria", que se aborda en este proyecto y se imparte en el primer curso, está más relacionada con el análisis de contenido, mientras que la asignatura de "Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en educación primaria", que se imparte en el segundo curso, surgió en conexión con el análisis cognitivo y "Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en educación primaria", propia del tercer curso, se relaciona mayormente con el análisis de instrucción. En consecuencia, las herramientas del análisis de contenido (Fernández-Plaza, 2016) serán especialmente relevantes en la propuesta, como se explicará más adelante.

Finalmente, el tercer antecedente crucial que enmarca el proyecto es el reciente cambio de normativa curricular en la educación primaria. En efecto, la entrada en vigor de la Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE) y los subsiguientes desarrollos curriculares que esta nueva ley orgánica ha establecido introducen elementos curriculares que implican una reinterpretación de la enseñanza de las matemáticas en primaria. Los más destacados en relación a la asignatura que nos ocupa son las *competencias específicas* de matemáticas, que se erigen como organizadores de los criterios de evaluación de la materia. Además, los bloques de contenidos usuales han sido reemplazados por *saberes básicos*, que en matemáticas se articulan en torno a los *sentidos matemáticos*. Estos van más allá de los bloques habituales (números, geometría, medida, estadística y probabilidad) e introducen el *sentido algebraico y pensamiento computacional* y el *sentido socioafectivo* con la misma jerarquía que aquellos.

Estos cambios repercutirán a los maestros en formación que actualmente cursan la asignatura de "Bases matemáticas para la educación primaria". Además, algunas de las ideas que introduce el nuevo currículo LOMLOE han sido desarrolladas y promocionadas desde este departamento, como son las de sentido y sentidos matemáticos (Comité Español de Matemáticas, 2021; Rico & Moreno, 2016; Ruiz-Hidalgo & Flores, 2022), y la introducción de destrezas algebraicas en la educación primaria (Burgos, 2023; Torres et al., 2022). En consecuencia, el compromiso de partida de proporcionar a los estudiantes del grado de primaria una educación matemática de calidad se ve catalizado por el compromiso de tomar la iniciativa en la creación de propuestas formativas concretas que acerquen los cambios curriculares de la LOMLOE a los futuros maestros de matemáticas. Desde la coordinación de la asignatura se han dado algunos pasos en esta dirección, como fue la organización de un Equipo Docente en el marco de la XI Convocatoria de Equipos docentes de formación inicial del profesorado y equipos docentes de formación continua, que condujo a la reestructuración consensuada de los contenidos de la asignatura. Con este proyecto se busca consolidar la reestructuración y concretarla en recursos de enseñanza específicos. Para ello, se prestará atención al tratamiento de los contenidos relacionados con números y su conexión con el álgebra en primaria, que son los que se han visto más fuertemente afectados por la reestructuración llevada a cabo.

En virtud de los antecedentes señalados, la estructuración del proyecto es la siguiente. El capítulo 2 está dedicado a contextualizar la propuesta desde los ámbitos institucional, curricular y profesional. A su vez, el capítulo 3 detalla las ideas teóricas que sustentan el análisis didáctico y son más relevantes para la asignatura. Finalmente, el capítulo 4 describe los elementos curriculares en coherencia con la guía docente de la asignatura.

Contexto de la propuesta

2.1. Contexto institucional

A continuación se revisan los aspectos institucionales que contextualizan el proyecto, que van desde una reflexión sobre el rol de la universidad como agente social y el de las universidades españolas dentro del Espacio Europeo de Educación superior, hasta una descripción de la universidad, la facultad y el departamento en los que se enmarca esta plaza.

2.1.1. El papel de la institución universitaria en la sociedad del siglo XXI

La institución universitaria actual es un ente de gestión administrativa y académica que constituye un ámbito propio en el que confluyen fuerzas de muy distinta índole con intereses no siempre coincidentes, y que desempeña su labor en interacción continua con su entorno. En particular es una institución que está al servicio de la sociedad y ocupa un papel central en el desarrollo cultural, económico y social de un país. En este sentido, la Declaración Mundial sobre Educación Superior para el siglo XXI (UNESCO, 1998) expresa la necesidad de las universidades de atender las demandas sociales, culturales y educativas en los siguientes términos:

> La relevancia de la educación superior debe evaluarse según la correspondencia entre lo que la sociedad espere de las instituciones y lo que ellas hacen. Ello requiere visión ética, imparcialidad política, capacidad crítica y, al mismo tiempo, una mejor articulación con los problemas de la sociedad y del mundo del trabajo, basando las orientaciones a largo plazo en las necesidades y finalidades de la sociedad, incluyendo el respeto a la cultura y la protección ambiental (Artículo 6, a).

Por tanto, la dimensión social de la Universidad debe entenderse en términos de las respuestas que esta da a las demandas de la sociedad, y estas respuestas deben darse desde una visión crítica y apoyada en el conocimiento.

La principal demanda que recibe la Universidad es crear, desarrollar, transmitir y criticar la ciencia, la técnica y la cultura. Para ello esta institución se convierte en depositaria del conocimiento y debe desarrollar la función de ser vehículo de continuidad cultural y de transformación social. Esta "continuidad cultural" supone la transmisión libre del pensamiento, el sentido crítico y la libertad de expresión sin concesiones a intereses "utilitaristas" (Martínez, 2016). Sin embargo, la hegemonía de la Universidad como gestora del conocimiento requiere de un permanente ejercicio de transformación y acoplamiento a las nuevas demandas sociales. La idea de una Universidad endogámica en la que la transmisión de saberes se perpetúa de espaldas a la realidad social está quedando cada vez más atrás, y dando lugar a un modelo en el que la institución universitaria genera un clima de serenidad que permita el análisis crítico de las estructuras sociales desde perspectivas tan dinámicas como diversas. El fomento de la cooperación intercultural que se está desarrollando en Europa a través de programas de investigación e intercambio de profesorado, es otro factor de transformación social (López, 2016). Tal vez sea esta búsqueda de cooperación intercultural la función más novedosa de la nueva universidad.

En cualquier caso, el impacto más directo de Universidad en la sociedad está fundamentado en la Educación, que impulsa el crecimiento intelectual y el fomento de la capacidad de asimilación y crítica que exige un esfuerzo continuo de revisión de los valores desde los que juzgar y tomar posición ante la realidad. Por tanto, la propia definición de su función exige la adaptación al entorno que justifica su existencia. Por otro lado, y desde una perspectiva académica, el avance de las ciencias y su diversificación hacen imprescindible una mayor especialización y una formación más intensiva en la investigación y la transferencia de conocimientos. La misión de la Universidad es, cada vez más, no solo la transmisión de conocimientos ya existentes sino también la de formar para investigar y como crear nuevos desarrollos. De forma paralela, los cambios introducidos por el uso extendido de las tecnologías de la información y la comunicación suponen una revolución de enorme calado que afecta a la forma de transmitir el conocimiento y que, por si mismos, serían suficiente justificación para acometer cambios profundos en todas las fases del sistema educativo. El propio paradigma de la formación a lo largo de la vida implica repensar la función educativa y específicamente el papel de las universidades en la sociedad del conocimiento.

El sistema educativo y, en especial, las universidades han de favorecer el equilibrio entre las demandas de la sociedad con otras funciones propias. En este sentido, UNESCO (1998) señala que

> es necesaria una nueva visión de la educación superior, que combine las demandas de universalidad de la educación superior con el imperativo de una mayor adecuación, con la finalidad de responder a las expectativas de la sociedad en que opera. Esta visión acentúa los principios de libertad académica y autonomía institucional y, al mismo tiempo, enfatiza la necesidad de que la sociedad se haga responsable de ella.

En otras palabras, una visión utilitarista puede envilecer o distorsionar la misión de la universidad, ya que la función principal del profesorado universitario es comunicar y fomentar la ciencia, contribuir al desarrollo económico y social de su entorno, así como ayudar a la consolidación y extensión de la cultura y la democracia. Las universidades perderían su identidad desde el momento en el que se olvide de la preservación y transmisión crítica del conocimiento y de los valores sociales, o bien no incidan en las cualidades y capacidades de los estudiantes, o sencillamente presten poca atención en incrementar la base de conocimiento de la sociedad a través de los procesos de investigación básica o aplicada.

El proceso educativo es un proceso complejo, resultado de la interacción entre agentes como son los estudiantes, los docentes y las estructuras organizativas, que están inmersos en una realidad social donde lo económico, lo político y lo profesional añaden complejidad que hace difícil definir con precisión la finalidad de la misma (Fernández-Lamarra & Coppola, 2016). En consecuencia, el proceso educativo debe considerarse como un ente dinámico en continua transformación. En particular, los agentes educativos también están sufriendo cambios importantes, pues junto al desarrollo de nuevas formas de aprendizaje, centradas en el estudiante y en el uso de instrumentos tecnológicos, se asiste a la importancia creciente de la formación continuada durante toda la vida profesional y un desarrollo empresarial sustentado en una adecuada gestión del conocimiento. Todos estos cambios motivaron que la Comisión de las Comunidades Europeas (1995) sugiriese acciones concretas, entre las que destacan (i) El logro de un equilibrio entre la adquisición de conocimiento y el perfeccionamiento en la capacitación metodológica ("saber" y "saber hacer"); (ii) el incremento de la actividad de adquirir nuevos conocimientos; (iii) la integración de la vida académica con la profesional y social y (iv) el desarrollo y dominio de lenguas no maternas como garantía de agilidad intelectual y de la identidad de la ciudadanía europea. Estas acciones debían estar en el marco de un tejido universitario europeo que actuase de forma coordinada, generando así el germen del Espacio Europeo de Educación Superior.

2.1.2. El Espacio Europeo de Educación Superior

El Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) es una propuesta de modelo organizativo supranacional para la educación superior en Europa, que nació con el objetivo principal de formar a las futuras generaciones de universitarios para que sean capaces de atender las demandas de la globalización y de la sociedad del conocimiento. El EEES engloba a más de 8000 instituciones de educación superior (IES) y a más de 25 millones de estudiantes, y constituye una muestra más de la construcción europea comenzada a mediados del pasado siglo.

En contraste con la creencia generalizada, el EEES nació con el objetivo de compatibilizar aumentar su compatibilidad y comparabilidad, respetando su diversidad. Es decir, no se pretende implantar un sistema único de educación superior en toda Europa, sino establecer criterios y mecanismos que faciliten la adopción de un sistema comparable de titulaciones universitarias, el establecimiento de objetivos comunes y el refuerzo de las estrategias que hagan a las universidades europeas más atractivas y competitivas internacionalmente.

Actualmente en el EEES se integran los países de la Unión Europea, junto con otros como Turquía. Los objetivos estratégicos para la creación del EEES, según la Declaración de

Bolonia (1999), se centran en

i) Adoptar un sistema de titulaciones comprensible y comparable para promover las oportunidades de trabajo y la competitividad internacional de los sistemas educativos superiores europeos mediante, entre otros mecanismos, la introducción de un suplemento europeo al título. Es decir, las nuevas titulaciones no tienen por qué ser las mismas para todos los países firmantes. La convergencia europea se da sólo a nivel de reconocimiento de titulación, pero no de conocimientos, por lo que cada universidad de cada país tiene plena libertad para diseñar sus propios planes de estudios. Puesto que este sistema del Suplemento Europeo al título ofrece información unificada en dos o más lenguas del EEES y personalizada para cada titulado universitario, sobre los estudios cursados, los resultados obtenidos, las capacidades profesionales adquiridas y el nivel de su titulación el sistema nacional de educación superior.

ii) Establecer un sistema de titulaciones basado en dos niveles principales. La titulación del primer nivel será pertinente para el mercado de trabajo europeo, ofreciendo un nivel de cualificación apropiado. El segundo nivel, que requerirá haber superado el primero, ha de conducir a titulaciones de posgrado, tipo máster o doctorado.

iii) Establecer un sistema común de créditos para fomentar la comparabilidad de los estudios y promover la movilidad de los estudiantes y titulados, regulado en el Real Decreto 1125/2003 y denominado ECTS (European Credit Transfer and accumulation System).

iv) Fomentar la movilidad, con especial atención al acceso a los estudios de otras universidades europeas y a las diferentes oportunidades de formación y servicios relacionados. Y así mismo para buscar el reconocimiento y valoración de periodos de investigación en contextos europeos relacionados con la docencia y la formación, sin perjuicio para los derechos adquiridos.

v) Impulsar la cooperación europea para garantizar la calidad y para desarrollar unos criterios y unas metodologías educativas comparables.

vi) Promover la dimensión europea de la educación superior y en particular, el desarrollo curricular, la cooperación institucional, esquemas de movilidad y programas integrados de estudios, de formación y de investigación.

El Sistema Europeo de Transferencia de ECTS y el Suplemento al Diploma son las dos piedras angulares del EEES, ya que se concibieron con el objetivo de dar más transparencia a los diferentes sistemas de educación superior dentro de Europa y permiten facilitar el reconocimiento de las titulaciones lo que favorece una movilidad más flexible y sencilla tanto de los estudiantes como de los egresados. A continuación se describe brevemente en qué consisten dichas herramientas.

El crédito ECTS y el Suplemento al Diploma

El ECTS es un sistema que se basa en la carga de trabajo del estudiante que se considera necesaria para la consecución de los objetivos de un programa. Estos objetivos se especifican en términos de los resultados del aprendizaje y de las competencias que se han de adquirir. Por medio del ECTS, los programas de estudio resultan comparables para todos los estudiantes implicados, tanto locales como extranjeros. El uso de este sistema, por tanto, facilita la movilidad y el reconocimiento académico mutuo, ayuda a las universidades a organizar y revisar sus programas de estudios, es utilizable para diversos programas y modalidades de enseñanza y hace que la educación superior europea sea más atractiva para los estudiantes de otros continentes que deseen formarse en Europa.

La novedad que aportan los créditos ECTS y su ventaja fundamental es que se sustentan en el esfuerzo de formación global del estudiante, cualquiera que sea el modo de aprendizaje. Por ello, los créditos ECTS se definen tomando como base el número de horas de aprendizaje de todo tipo que debe invertir un estudiante medio para lograr los resultados fijados en una cierta unidad de aprendizaje, como puede ser una asignatura. Dichas horas de aprendizaje pueden consistir en la asistencia a clases tradicionales, el desarrollo de ejercicios prácticos, la búsqueda de información para el desarrollo de un trabajo, el desempeño de un periodo de prácticas en una empresa, un museo o una clínica o la participación en actividades virtuales. Por tanto, puede afirmarse que los créditos ECTS miden toda forma de aprendizaje en una época en la que las vías de aprendizaje son múltiples. Por tanto, podemos afirmar que la adopción del sistema ECTS constituye una reformulación conceptual. Comporta un nuevo modelo educativo que orienta las programaciones y metodologías centrándolas en el aprendizaje del alumnado, no exclusivamente en las horas lectivas. Un crédito es equivalente a un tiempo de trabajo de entre 25 y 30 horas, dentro y fuera del aula. En la asignación de créditos de cada materia, por tanto, se computa el número de horas de trabajo requeridas para la adquisición por los estudiantes de las competencias correspondientes.

El suplemento (europeo) al diploma es el otro instrumento clave de transparencia para la movilidad en el EEES. Es un documento anexo a un título de educación superior que proporciona una descripción estandarizada de la naturaleza, el nivel, el contexto, el contenido y el rango de los estudios seguidos y completados con éxito por el estudiante titulado. El suplemento proporciona transparencia y facilita el reconocimiento académico y profesional de las cualificaciones (diplomas, títulos, certificados, etc.). Pretende proporcionar a los que lo lean la información indispensable para que puedan entender qué estudios se han cursado y qué resultados ha obtenido un estudiante. Por tanto, favorece la movilidad de estudiantes y egresados gracias a la mayor confianza que se puede crear en universidades, administraciones y empresas de otros países del EEES.

Para la Universidad Española, la implementación del EEES ha sido uno de los retos más importantes a los que se ha enfrentado en los últimos años. Este proceso ha obligado a un replanteamiento de la educación universitaria, que resulta difícil desde las concepciones pedagógicas más tradicionales. Asimismo, el hecho de pasar a unos planes de estudios centrados en competencias incide significativamente en diferentes aspectos de la cultura pedagógica institucional. Por ejemplo, la función docente pasa a ser una función colegiada, algo que ya sucede en el ámbito de la investigación, como resultado de la promoción del trabajo en equipo en convocatorias competitivas. Asimismo, se fomentan fórmulas más flexibles de ordenación docente, la necesidad del aprendizaje cooperativo entre los estudiantes, o el relativismo en los contenidos disciplinares, ya que lo que importa en este modelo es desarrollar ciertas competencias sobre el contenido utilizado para desarrollarlas.

Evolución de las directrices del Espacio Europeo de Educación Superior. Implicaciones y horizonte

Respecto a sus antecedentes, podemos mencionar que con motivo del 900 aniversario de la Universidad de Bolonia (Italia), los rectores universitarios firmaron, el 18 de septiembre de 1988, la denominada *Magna Charta Universitatum*, en la que se establecieron los principios fundamentales que deben sustentar la universidad para que pueda contribuir a forjar el desarrollo cultural, científico y técnico de la humanidad al final del segundo milenio. Estos principios fueron (i) preservar la libertad de investigación y enseñanza; (ii) seleccionar el profesorado por el principio de indisociabilidad entre la actividad investigadora y la actividad docente; (iii) garantizar a los estudiantes la salvaguarda de las libertades y condiciones necesarias para atender sus objetivos en materia de cultura y de formación, y (iv) favorecer entre las universidades el intercambio de información y documentación así como el de iniciativas científicas comunes. Diez años después, los ministros responsables de la Educación Superior de Francia, Reino Unido, Italia y Alemania, países que firmaron en 1988 la Carta Magna, realizaron una declaración conjunta, conocida como Declaración de La Sorbona, en la que se sentaron las bases para promover la convergencia europea entre los sistemas nacionales de educación superior con el objeto de potenciar y armonizar el diseño del Sistema de Educación Superior Europeo. Mediante esta Declaración se quiso hacer hincapié en que, debido al intenso proceso europeo, ya no era justificable hablar de Europa sólo por el euro, los bancos o la economía, sino que también debería hablarse de una Europa Social y del Conocimiento. No obstante, fue con la Declaración de Bolonia (1999), firmada el 19 de junio de 1999 por Ministros con competencias en Educación Superior de 29 países europeos y que da su nombre al Proceso de Bolonia, cuando el EEES recibió un impulso decisivo. Es en ese momento cuando se reconoció que la consecución de estos principios, dada la diversidad de sistemas de Educación Superior existentes en Europa, la diversidad cultural y lingüística, las nuevas necesidades y expectativas de la sociedad, y la evolución de los conocimientos científicos, requiere de esfuerzos permanentes de apoyo y seguimiento. Desde ese año, 1999, cada dos años se ha celebrado una Cumbre Ministerial para realizar un balance de los progresos realizados y establecer los objetivos para la cumbre siguiente.

De esta manera, la primera conferencia de seguimiento del proceso iniciado en Bolonia fue en Praga en mayo de 2001. En el Comunicado de Praga se confirmaron los objetivos establecidos en Bolonia y se introdujeron como líneas adicionales: (i) El aprendizaje a lo largo de la vida como elemento esencial para alcanzar una mayor competitividad europea, mejorando la cohesión social, la igualdad de oportunidades y la calidad de vida. (ii) El rol activo de las Universidades, de las instituciones de educación superior y de los estudiantes en el desarrollo del proceso de convergencia. (iii) La promoción del atractivo del EEES mediante el desarrollo de sistemas de garantía de la calidad y de mecanismos de certificación y de acreditación.

En la Declaración de Berlín, en septiembre de 2003, se admitió la incorporación de nuevos miembros al proceso de Bolonia, llegándose a 40 países comprometidos en la aplicación de los objetivos y principios de dicha declaración y se dio un nuevo impulso al proceso, contemplando la necesidad de la integración de la investigación como componente indispensable en el ámbito de la educación superior europea con el objeto de considerarlas como pilares fundamentales de una sociedad basada en el conocimiento y, de ese modo, incluir el nivel de doctorado como un tercer ciclo suplementario a los dos ciclos principales de la educación (artículo 8.2 del RD 55/2005). También se destacó la necesidad de fijar indicadores del aseguramiento de la calidad, del sistema educativo estructurado en dos ciclos y del reconocimiento de los grados y periodos de estudio, con el objetivo de poder tomar a tiempo, si fuese necesario, mediadas correctivas.

El Comunicado de Bergen (Noruega), en mayo de 2005, tuvo como objetivo estudiar el progreso del proceso de Bolonia y el establecimiento de nuevas directrices, reforzando la vinculación entre educación superior e investigación con la plena incorporación del doctorado como elemento fundamental de conexión entre los espacios de educación superior e investigación. También se hizo hincapié en el desarrollo de la dimensión social de la educación superior mejorando las condiciones de igualdad en el acceso y la acogida y atención a los estudiantes y los recursos financieros, así como en la dimensión internacional de la educación europea bajo soporte del apoyo decidido a la movilidad de los estudiantes y personal universitario, incrementando la cooperación con terceros países y la mayor visibilidad internacional.

Siguiendo la agenda establecida, en mayo de 2007, tuvo lugar la conferencia de ministros de educación superior en Londres. En el Comunicado de Londres se verificaron los procesos desde la reunión celebrada en Bergen. Entre los temas más destacados estaban los referentes a los programas de doctorado y la figura del doctorando. Destacándose la necesidad de incrementar la presencia de la investigación en los dos primeros ciclos. Además, indicó que los gobiernos deben promover de manera eficaz la representación de los estudiantes en el tercer ciclo. Adicionalmente, se acordó que en los informes para 2009 debían recogerse las innovaciones emprendidas con el objetivo de incentivar la movilidad y las propuestas para evaluarla en el futuro. Asimismo, se propuso la creación de una red para informar y facilitar becas y ayudas.

La cumbre ministerial de Lovaina en abril de 2009, puso de manifiesto los retos a los que debe hacer frente el EEES hasta el año 2020. Se propuso al Grupo de Seguimiento de Bolonia la preparación de un plan de trabajo hasta 2012 para avanzar en las prioridades identificadas en dicho comunicado y, en relación con las recomendaciones de los informes presentados, se incidió en la futura integración de los resultados de la evaluación independiente del Proceso de Bolonia. También, se encomendó a un grupo de trabajo que continuase su cooperación en el desarrollo de la dimensión europea de la garantía de calidad y, en particular, que garantizase que el Registro Europeo de Garantía de Calidad sea evaluado externamente, teniendo en cuenta las opiniones de los interesados.

En marzo de 2010, se celebró en Budapest y Viena la "Conferencia Ministerial sobre el Aniversario del Proceso de Bolonia" organizada conjuntamente por Hungría y Austria, con las delegaciones de los 46 países que formaban parte del EEES y con la novedad de la participación de otros 30 que no son miembros pero que estaban interesados en el proceso y en una mayor comprensión mutua de sus respectivos sistemas de educación superior. En la Cumbre de Bucarest (Rumanía) en abril de 2012, se establecieron las prioridades de acción para el período 2012-2015. Entre estas prioridades destacaron las siguientes: favorecer las condiciones que fomentan el aprendizaje centrado en el estudiante, los métodos de enseñanza innovadores y el entorno propicio y estimulante de trabajo y aprendizaje; permitir a las agencias registradas en el EQAR que puedan desarrollar sus actividades en todo el EEES siempre que cumplan con la legislación nacional; mejorar la empleabilidad, el aprendizaje permanente, y la resolución de problemas y habilidades empresariales a través de la cooperación con los empleadores; asegurar que los marcos de cualificaciones y la implantación de los ECTS y el suplemento europeo al título se basan en los resultados del aprendizaje; y fomentar alianzas de conocimiento basadas en la investigación y la tecnología.

En la conferencia ministerial de Ereván (EHEA, 2015) se plantearon los objetivos de (i) aumentar la calidad y relevancia del aprendizaje y la enseñanza promoviendo la innovación docente en entornos de aprendizaje centrados en el alumno y usando medios tecnológicos. (ii) Fomentar la empleabilidad de los graduados y su adaptación a los rápidos cambios que están sufriendo los mercados de trabajo, caracterizados por el rápido desarrollo tecnológico, la emergencia de nuevos perfiles profesionales y el emprendimiento como autoempleo, garantizando equilibrio entre teoría y práctica y facilitando la movilidad internacional. (iii) Hacer los sistemas más inclusivos, dado que la población de los países pertenecientes al EEES es cada vez más diversificada, debido a la inmigración y a los cambios demográficos. La igualdad de género y la igualdad de oportunidades para aquellos estudiantes procedentes de entornos más desfavorecidos fueron señalados también como claves. (iv) Implementar reformas estructurales para garantizar la consolidación y el éxito del EEES en el largo plazo. Para ello se debe determinar una estructura de grado y de sistemas de créditos comunes, estándares comunes para la garantía de la calidad y cooperación para el desarrollo de los programas de movilidad.

En la conferencia ministerial de París (EHEA, 2018) se plasmaron las mejoras y esfuerzos que deben continuar haciendo los sistemas educativos de cada país integrante del EEES. Entre ellos destacaron (i) Establecer una estructura soportada por pares basada en la solidaridad, cooperación y aprendizaje mutuo, así como crear un sistema compatible con la estructura de calificaciones de la EHEA, mediante la unificación de todas las notas/escalas de primer y segundo ciclo de grado a través del ECTS. (ii) cumplir con los objetivos de reconocimiento establecidos en la Convención de Lisboa y asegurar la calidad mediante el cumplimiento de normas y directrices en el área de instituciones universitarias europeas. (iii) Establecer la innovación en el aprendizaje y la enseñanza a través de sinergias entre universidades. En este sentido se destacó el papel que juega la digitalización en todas las áreas de la sociedad y que aumenta el potencial de las estrategias de aprendizaje en las instituciones universitarias. De este modo los estudiantes y profesores podrán actuar creativamente en un ambiente digitalizado.

En la conferencia de Roma (EHEA, 2020) estableció que, con la finalidad es lograr una Europa sostenible, cohesionada y pacífica, el EEES debía construir un espacio inclusivo, innovador e interconectado para 2030. (i) Inclusivo, en el que todos los estudiantes tengan acceso equitativo a la educación y apoyo para completar su formación. (ii) Innovador y con la capacidad de introducir métodos de enseñanza y evaluación mejor alineados y cercanos a la investigación. (iii) Interconectado para fortalecer la cooperación internacional, el intercambio de conocimiento y la movilidad de profesores y estudiantes. Esta conferencia subrayó el papel fundamental que debe tener la educación superior en el logro de los Objetivos de Desarrollo Sostenible de las Naciones Unidas para 2030 e hizo especial hincapié en preparar a los estudiantes para nuevas actividades “verdes”, buscando mantener el sello de calidad propio de los miembros de la conferencia. La próxima conferencia ministerial sobre el EEES está fijada para el próximo mayo de 2024 y tendrá lugar en Tirana. En ella, se espera consensuar acciones para profundizar en el proceso de Bolonia y establecer las prioridades de la Educación Superior en los años venideros.

A modo de conclusión, se puede afirmar que el modelo del EEES ha supuesto la integración de la educación superior en el contexto europeo y ha conllevado una serie de implicaciones económicas, sociales y culturales. No obstante, aún queda mucho camino por recorrer y muchas dificultades contra las que luchar para conseguir un modelo homogéneo y eficiente. Resulta pues fundamental aprender de los fallos cometidos en el pasado para plantear nuevos objetivos estratégicos para la educación superior, que tiendan hacia el horizonte común de la excelencia mediante la inclusión, la sostenibilidad y la cultura de paz.

2.1.3. El sistema universitario español

La universidad es una de las instituciones con más antigüedad y una de las pocas que ha perdurado durante siglos. Sus orígenes se remontan a la Edad Media, cuando el saber y la educación se encontraban relegados a las escuelas existentes en los monasterios y catedrales. Algunas de estas escuelas alcanzan el grado de *Studium Generale*, recibían alumnos de fuera de sus diócesis y concedían títulos que tenían validez fuera de ellas. Contaban con estatutos y con privilegios otorgados por el poder civil, ampliados posteriormente por el papado. A partir del siglo XII, los profesores empezaron a agruparse en defensa de la disciplina escolar, proceso que evolucionó dando lugar a las universidades. Parece estar probado que la primera universidad en nacer fue la Universidad de Bolonia, a comienzos del siglo XIII. Fue la primera en tener estudios reconocidos universalmente y estatutos propios. Posteriormente apareció la Universidad de París, bajo el nombre de Colegio de Sorbona y, precisamente para evitar que los universitarios ingleses se desplazasen al continente para estudiar en ella recibiendo la educación parisina, se crea la Universidad de Oxford, la más antigua de habla inglesa. En el siglo XIV, por desavenencias de un grupo de profesores de la Universidad de Oxford, se crea la Universidad de Cambridge y después las de Padua, Nápoles, Toulouse, Praga, Viena, Heilderberg y Colonia, entre otras.

En España, la universidad más antigua documentada es la Universidad de Palencia, que desapareció rápidamente. El rey leonés Alfonso IX fundó entre 1218-1219 el *Studium Salmantino*, actual Universidad de Salamanca. Alfonso X le otorgó su Estatuto en 1254, y un año más tarde el papa Alejandro IV otorgó validez universal a los títulos de Salamanca (salvo en Bolonia y París). En ese mismo siglo se crearon la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad de Valladolid. Desde ese momento hasta la actualidad, las universidades españolas han ido aumentando su oferta. Actualmente, según el informe de Datos y Cifras del Sistema Universitario Español (Ministerio de universidades., 2023) en el curso 21-22 había en España 86 universidades, 50 públicas y 36 privadas. Se contabilizaron 1072 centros universitarios entre escuelas y facultades, 565 institutos universitarios de investigación, 53 escuelas de doctorado, 55 hospitales universitarios y 77 fundaciones. En cuanto a la oferta de estudios universitarios, en el curso mencionado se impartieron 3 112 titulaciones de grado (el 72,6 % de ellas en universidades públicas), lo que supone un incrementeo del 18 % respecto del curso 14-15 (desde 2 637 hasta 3 112). El número de plazas de nuevo ingreso ofertadas por los estudios de grado en las universidades públicas presenciales fue de 242 611. Respecto a las titulaciones de posgrado, en el curso 21-22 se impartieron 3 735 másteres universitarios (el 74,5 % en universidades públicas) y 1 185 titulaciones de Doctorado.

Marco normativo

La Constitución Española de 1978 reconoce en su Artículo 27.10 la autonomía de las universidades. El funcionamiento de las mismas experimentó una transformación profunda con la integración del sistema universitario español en el EEES en 1999, que afectó aspectos normativos, estructurales, educativos y de desarrollo de las labores universitarias (docencia, investigación y gestión). Por ello, es necesario establecer el marco jurídico-legal en el que se enmarca el proyecto docente. Dado que la convocatoria de la plaza circunscribe esta a la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre de Universidades, conocida como LOU (BOE 24-12-2001), modificada por la Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001 de 21 de diciembre de Universidades, denominada LOMLOU (BOE 13-04-2007), la discusión se restringirá a la mencionada normativa. Asimismo, por su especial relevancia, se comentará el contenido del Real Decreto 1393/2007, modificado por el Real Decreto 43/2015, que establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales en nuestro país y también se comentará el Real Decreto 1791/2010 del Estatuto del Estudiante Universitario.

La LOU. El principal motivo para la aparición de esta ley fue la voluntad de mejorar y dinamizar la estructura universitaria con el fin de adaptarla a las necesidades de una sociedad cuyo desarrollo se basaba, cada vez en mayor medida, en la generación, difusión y aplicación del conocimiento. Asimismo, la LOU sentó las bases para la integración del sistema universitario español en el EEES. En este sentido, la exposición de motivos de la LOU declara: "Estos nuevos escenarios y desafíos requieren nuevas formas de abordarlos y el sistema universitario español está en su mejor momento histórico para responder a un reto de enorme trascendencia: articular la sociedad del conocimiento en nuestro país". Su promulgación conllevó modificaciones en una multitud de direcciones, aunque también mantuvo similitudes en la estructura y funciones de la Universidad de la legislación previa. Destacamos en primer lugar las similitudes respecto a la legislación anterior:

i) Las Universidades siguen estructuradas en Centros (art. 7 y 8), bien sean estos Facultades, Escuelas Técnicas o Politécnicas Superiores y Escuelas Universitarias, que son los encargados de la organización de las enseñanzas y de los procesos académicos, administrativos y de gestión conducentes a la obtención de títulos oficiales (art. 8.1).

ii) Los Departamentos son los encargados de coordinar las enseñanzas de una/varias áreas de conocimiento en uno/varios centros y apoyar las iniciativas investigadoras y docentes del profesorado (art. 9.1).

iii) Se mantienen los Institutos Universitarios de Investigación dedicados a la investigación científica y técnica o a la creación artística (art. 10.1).

iv) Se mantienen los Órganos de Gobierno y Representación de las Universidades (Título III, Capítulo I) aunque hay diferencias en cuanto a su composición, elección y funciones, destacando la creciente importancia del Consejo Social, como órgano de participación de la sociedad en la Universidad (art. 14.1) y la elección del Rector por sufragio universal.

Respecto a los principales cambios introducidos por la LOU, los principales son los siguientes:

i) Cambios en las funciones de gobierno, representación, control y asesoramiento, correspondiendo cada una de éstas a un órgano distinto en la estructura de la Universidad, pretendiendo reforzar los procesos ejecutivos de toma de decisiones por parte del Rector y del Consejo de Gobierno, además de establecer esquemas de coparticipación y corresponsabilidad entre sociedad y la Universidad.

ii) Cambios en el Consejo de Coordinación Universitaria, como máximo órgano consultivo y de coordinación del sistema universitario, configurado como foro de encuentro y debate entre las tres administraciones que convergen en el sistema universitario (estatal, autonómica y universitaria).

iii) Cambios en las condiciones y requisitos para la creación, reconocimiento, funcionamiento y régimen jurídico de las Universidades, de acuerdo a la naturaleza pública o privada de las mismas.

iv) Cambio en las pruebas de acceso a los cuerpos docentes universitarios, estableciendo un sistema de habilitación nacional previa al concurso a las plazas ofertadas por las Universidades.

v) Introducción de mecanismo de garantía de la calidad, con la creación de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA).

vii) Cambios en el acceso a la Universidad, siendo las Universidades las que tienen potestad para establecer los mecanismos de acceso a las mismas.

viii) Cambios en la composición del personal docente, modificando todas las figuras de profesorado contratado (se modifica las características y funciones de los ayudantes, ayudantes doctores y profesores asociados; se crea la figura de los contratados doctores; cambio de tipo de contrato desde contrato administrativo a contrato laboral).

La LOMLOU. Tras varios años de funcionamiento de la Ley Orgánica 6/2001 de Universidades, la detección de deficiencias y las nuevas exigencias del entorno educativo universitario llevaron la modificación de ésta con la promulgación de la Ley Orgánica 4/2007. Como se indica en su exposición de motivos, con dicho cambio normativo se apuesta decididamente por la armonización de los sistemas educativos superiores en el marco del espacio europeo de educación superior y asume la necesidad de una profunda reforma en la estructura y organización de las enseñanzas, basada en tres ciclos: Grado, Máster y Doctorado. Se da así respuesta al deseo de la comunidad universitaria de asentar los principios de un espacio común, basado en la movilidad, el reconocimiento de titulaciones y la formación a lo largo de la vida. Entre las principales modificaciones que incorporó la Ley Orgánica 4/2007 (LOMLOU) destacan las siguientes:

i) Mayor flexibilidad de creación de nuevas titulaciones y su inscripción en un Registro, superando el modelo de catálogo cerrado.

ii) Nuevo sistema de acceso al profesorado a través de una jerarquía de contratos laborales y de funcionario basados en acreditaciones expedidas por la ANECA.

iii) Apuesta por la investigación y la transferencia del conocimiento a la sociedad, potenciando los mecanismos de transferencia al sector productivo de los resultados de la investigación universitaria.

iv) Mayores derechos del alumnado, de los profesores y del personal de administración y servicio.

v) Se potencia el papel y la responsabilidad de todos los agentes del sistema universitario, articulando mejor la relación entre ellos.

Concreciones curriculares. Estructuración de los estudios universitarios. Posteriormente, y en relación con la estructura de los estudios universitarios, el Real Decreto 1393/2007, para la Ordenación de las Enseñanzas Universitarias Oficiales, estableció que las enseñanzas universitarias conducentes a la obtención de títulos de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional se estructuraban en tres ciclos, denominados respectivamente Grado, Máster y Doctorado, los cuales se describirán más adelante. Dicho decreto estableció la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales, así como las directrices, condiciones y el procedimiento de verificación y acreditación, que deberán superar los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos, previamente a su inclusión en el Registro de Universidades, Centros y Títulos (RUCT) para permitir el desarrollo de una estructura de las enseñanzas universitarias oficiales, de acuerdo con las líneas generales emanadas del EEES. Cabe mencionar también el Real Decreto 43/2015 por el que se modifican la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales y el Real Decreto 99/2011 por el que se regulan las enseñanzas oficiales de doctorado (unido al anterior). Dicho decreto recoge que en la elaboración de los planes de estudios, la Universidad deberá primar la formación básica y generalista, mientras que en la elaboración de los planes de estudios conducentes a la obtención del título de Máster Universitario, las Universidades primarán la especialización de los estudiantes. Por tanto, con ambos decretos (Real Decreto 1393/2007 modificado por el Real Decreto 43/2015) quedó establecida la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales en enseñanzas de grado, máster y doctorado. A continuación se describen las principales características de las distintas enseñanzas universitarias según recoge el Real Decreto 43/2015, que se encuadra en las directrices del EEES.

Las *enseñanzas de grado* tienen como finalidad la obtención por parte del estudiante de una formación general, en una o varias disciplinas, orientada a la preparación para el ejercicio de actividades de carácter profesional. La superación de estas enseñanzas da derecho a la obtención del título de Graduado o Graduada, con la denominación específica que, en cada caso, figure en el Registro de Universidades, Centros y Títulos. En el Suplemento Europeo al Título se hará referencia a la rama de conocimiento en la que se incardine el título. Los planes de estudios conducentes a la obtención del título de Graduado han de tener entre 180 y 240 créditos ECTS, conteniendo la formación teórica y práctica que el estudiante deba adquirir: aspectos básicos de la rama de conocimiento, materias obligatorias u optativas, seminarios, prácticas externas, trabajos dirigidos u otras actividades formativas. Estas enseñanzas concluyen con la elaboración y defensa de un trabajo de fin de grado.

Las *enseñanzas de máster* tienen la finalidad de que los estudiantes adquieran una formación avanzada. En su elaboración las universidades han de primar la formación especializada. La superación de las enseñanzas de máster da derecho a la obtención del título de Máster Universitario, con la denominación específica que figure en el Registro de Universidades, Centros y Títulos. Los planes de estudios conducentes a la obtención de los títulos de Máster Universitario han de tener entre 60 y 120 créditos ECTS, conteniendo toda la formación teórica y práctica que el estudiante debe adquirir: materias obligatorias, materias optativas, seminarios, prácticas externas, trabajos dirigidos, trabajo de fin de máster, actividades de evaluación, y otras que resulten necesarias según las características propias de cada título. Estas enseñanzas concluyen con la elaboración y defensa pública de un trabajo de fin de máster.

Las *enseñanzas de doctorado*, cuyo fin es la formación avanzada del estudiante en técnicas de investigación, pueden incorporar cursos, seminarios u otras actividades orientados a la formación investigadora. Para obtener el título de Doctor o Doctora es necesario haber superado un periodo de formación y un periodo de investigación. Dichas enseñanzas incluyen como parte esencial la elaboración y presentación de la Tesis Doctoral, consistente en un trabajo original de investigación elaborado por el candidato que ha de ser defendido públicamente.

Actualizaciones de la LOMLOU. Finalmente, es necesario mencionar que la LOMLOU recogida en el RD 1393/2007 de 29 de octubre ha tenido varias actualizaciones. Alcubilla (2021) destaca las siguientes actualizaciones y nuevas leyes que afectan a la normativa actual:

Real Decreto 1791/2010, de 30 de diciembre, por el que se aprueba el Estatuto del Estudiante Universitario.

Real Decreto 99/2011, de 28 de enero, por el que se regulan las enseñanzas oficiales de doctorado. Última modificación el 3 de junio de 2016.

Ley 2/2011, de 4 de marzo, de Economía Sostenible desde el ahorro y la eficiencia energética, la promoción de las energías limpias y su I+D+i a la racionalización de la construcción residencial, como mediante deberes de mantenimiento de un entorno público eficiente para el desarrollo económico, a lo que apuntan claramente los principios de mejora de la competitividad o de estabilidad de las finanzas públicas.

Real Decreto 1027/2011, de 15 de julio, por el que se establece el Marco Español de Cualificaciones para la Educación Superior. Última modificación el 7 de febrero de 2015.

Decreto Legislativo 1/2013, de 8 de enero, por el que se aprueba el Texto Refundido de la Ley Andaluza de Universidades. La última modificación fue el 29 de diciembre de 2016. La presente Ley tiene por objeto la ordenación y coordinación del sistema universitario andaluz, así como la regulación de las actividades de enseñanza universitaria realizadas en Andalucía, todo ello en ejercicio de las competencias atribuidas a la Comunidad Autónoma de Andalucía por su Estatuto, con respeto al principio de la autonomía universitaria y en el marco de la legislación estatal y del EEES.

Real Decreto 412/2014, de 6 de junio, por el que se establece la normativa básica de los procedimientos de admisión a las enseñanzas universitarias oficiales de Grado.

Ley 15/2014, de 16 de septiembre, de racionalización del Sector Público y otras medidas de reforma administrativa. En el artículo 8 se crea el organismo público de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA). La última modificación es del 28 de junio de 2017.

Real Decreto 5/2015, de 30 de octubre, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley del Estatuto Básico del Empleado Público.

Real Decreto 1067/2015, de 27 de noviembre, por el que se crea la Agencia Estatal de Investigación y se aprueba su Estatuto.

Resolución de 11 de mayo de 2017, de la Secretaría General de Universidades, por la que se publica el Acuerdo del Consejo de Universidades de 10 de mayo de 2017, por el que se ordenan las enseñanzas universitarias oficiales de Grado.

Real Decreto 103/2019, de 1 de marzo, por el que se aprueba el Estatuto del personal investigador predoctoral en formación.

La universidad española como agente social

La visión de la Universidad como motor de la sociedad actual para potenciar el desarrollo científico, técnico y cultural se toma como punto de partida en este apartado. La LOMLOU establece en su primer artículo que la Universidad realiza el servicio público de la educación superior mediante la investigación, la docencia y el estudio, asignándole como funciones específicas (i) la creación, desarrollo, transmisión y crítica de la ciencia, de la técnica y de la cultura, (ii) la preparación para el ejercicio de actividades profesionales que exijan la aplicación de conocimientos y métodos científicos o para la creación artística, (iii) la difusión, la valoración y la transferencia del conocimiento al servicio de la cultura, de la calidad de la vida y del desarrollo económico y (iv) la difusión del conocimiento y la cultura a través de la extensión universitaria y la formación a lo largo de toda la vida.

Las leyes universitarias regulan de este modo el carácter docente, investigador y de apoyo al entorno socio-económico de la Universidad, y que en definitiva debe constituir la actividad del profesorado universitario. La Universidad establece tres áreas de actividad relacionadas entre sí para llevar a cabo sus funciones docentes, investigadoras y de apoyo al entorno socio-económico: (i) docencia, encaminada a preparar a los futuros profesionales e investigadores; (ii) investigación, relacionada con la creación científica y el desarrollo tecnológico y (iii) transferencia de conocimiento, para llevar las novedades del conocimiento obtenidos por la investigación a la realidad social.

La calidad en la enseñanza universitaria. La actividad docente es una de las principales tareas de la Universidad, y la que identifica a la institución como agente social. Por esta razón, las universidades españolas han mostrado interés creciente por mejorar la calidad de la enseñanza que proporcionan. Según UNESCO (1998), la calidad de la enseñanza superior debe abordarse desde una perspectiva multidimensional: enseñanzas y programas académicos, investigación y becas, personal, estudiantes, infraestructuras, servicios a la comunidad y al mundo universitario. Además, la garantía de la calidad y su mejora continua requiere de la existencia de un organismo nacional independiente que establezca mecanismos de evaluación interna y externa. De acuerdo con Bricall (2000), todo sistema de garantía de la calidad debe (i) preparar mecanismos para la acreditación de instituciones o programas, asegurando de esta forma un mínimo común de calidad, (ii) mejorar la gestión, la docencia y la investigación, (iii) servir de instrumento para rendir cuentas a los agentes interesados en la labor universitaria, como el gobierno o la sociedad en general, (iv) garantizar la transparencia y el suministro de información púbica, y (v) operar como mecanismo para decidir una financiación diferencial de las universidades.

En el contexto del Espacio Europeo de Educación Superior, la Declaración de Bolonia promulgó criterios para asegurar internamente la calidad:

i) Garantía de calidad. Las instituciones deben incluir en su gestión estratégica una política pública de garantía de calidad. Del mismo modo, deben someterse a de forma periódica a un proceso externo de garantía de calidad.

ii) Diseño y aprobación de programas. Las instituciones deben tener procesos para el diseño y la aprobación de las programaciones didácticas. Estas se deben diseñar de manera que cumplan los objetivos establecidos para las mismas, incluyendo los resultados esperados del aprendizaje.

iii) Enseñanza, aprendizaje y evaluación centrados en el estudiante. Las instituciones deben asegurarse de que los programas se imparten de manera que animen a los estudiantes a participar activamente en la creación del proceso de aprendizaje y de que la evaluación de los estudiantes refleje este enfoque.

iv) Admisión, evolución, reconocimiento y certificación de los estudiantes. Las instituciones deben aplicar de manera consistente normas preestablecidas y públicas que abarquen todos los procedimientos por los que pasa un alumno a lo largo de sus estudios.

v) Personal docente. Las instituciones deben asegurar la competencia de su profesorado. Asimismo, deben utilizar procesos justos y transparentes para la contratación y el desarrollo de su personal.

vi) Recursos para el aprendizaje y apoyo a los estudiantes. Las instituciones deben contar con una financiación suficiente para desarrollar las actividades de enseñanza y aprendizaje y asegurarse de que se ofrece a los estudiantes apoyo y recursos de aprendizaje suficientes y fácilmente accesibles.

vii) Gestión de la información. Las instituciones deben asegurarse de que recopilan, analizan y usan la información pertinente para la gestión eficaz de sus programas y otras actividades. Del mismo modo, deben publicar información clara, precisa, objetiva, actualizada y fácilmente accesible sobre sus actividades y programas.

viii) Seguimiento continuo y evaluación periódica de los programas. Las instituciones deben hacer seguimiento y evaluar periódicamente sus programas para garantizar que logran sus objetivos y responden a las necesidades de los estudiantes y de la sociedad. Dichas evaluaciones deben dar lugar a una mejora continua del programa.

La mejora de la calidad de las instituciones de educación superior universitaria se viene desarrollando gracias a la aplicación de programas de evaluación de la calidad como AUDIT y DOCENTIA. AUDIT, que sigue el principio de mejora continua de la calidad, persigue fortalecer el desarrollo de los sistemas de garantía interna de calidad de las universidades y sus centros. Por su parte, el programa DOCENTIA tiene como propósito fundamental apoyar a las instituciones de educación superior españolas en el diseño de mecanismos propios para gestionar la calidad de la actividad docente del profesorado universitario. Un dato que ilustra su repercusión es la notable participación en el programa del conjunto de las universidades españolas, dado que más de setenta universidades con títulos ya implantados o presentados a verificación están involucradas en éste desde hace ya varios años. Por otro lado, junto a la destacada participación en el programa, también es reseñable que DOCENTIA ha fomentado que universidades como la de Granada, con sistemas ya en marcha, hayan adaptado y mejorado sus modelos de garantía de la calidad.

En cuanto al personal docente e investigador de las universidades, se ha buscado garantizar la calidad a través del sistema de acreditaciones para el acceso a las figuras contractuales universitarias. La misión de esta acreditación es doble: guiar la carrera profesional del personal docente e investigador y poner a disposición de las universidades candidatos acreditados con contrastada solvencia profesional en docencia e investigación. También existen procesos de evaluación para la concesión de complementos retributivos que premien el desempeño del personal docente e investigador universitario. Así, la actividad investigadora se evalúa cada seis años (sexenios) por la Comisión Nacional de Evaluación de la Investigación (CNEAI-ANECA) mientras que la actividad docente se reconoce en periodos de cinco años (quinquenios) por parte de las propias universidades.

2.1.4. La Universidad de Granada

La Universidad de Granada es una de las universidades españolas más destacadas en cuanto a volumen de alumnado y producción científica. Se proporciona una breve reseña sobre su evolución histórica, que se completan con algunos datos académicos relevantes para contextualizar el proyecto.

Fundación y trayectoria

La creación de la Universidad de Granada fue un ejemplo de la intensa actividad intelectual que tuvo lugar en España durante el Renacimiento y de la importancia de la religión y la cultura durante el reinado de Carlos V, quien la fundó en 1531, lo que convierte a la Universidad de Granada en la más antigua de toda Andalucía. El emperador, preocupado por la enseñanza pública, firmó la Real Cédula que ordenaba edificar en Granada un “Colegio de Lógica e Philosophia e teología e Canones e Gramática e Casos de Conciencia”. El Papa Clemente VII expidió después la Bula de Fundación, situando así la Universidad de Granada al mismo nivel que el resto de las principales instituciones académicas de ese momento histórico.

Nacida como tantas otras universidades en el Renacimiento, la Universidad de Granada sufrió altibajos y momentos de inestabilidad. En sus inicios, la institución granadina continuó la tradición de la Universidad Árabe de Yusuf I (Madraza, siglo XIV). Durante el siglo XVI, fue la Compañía de Jesús la que ejerció una gran influencia sobre la institución, que a lo largo del siglo XVII organizó un sistema de enseñanza dotado de un plan de estudios extenso y fundamentado en un profundo conocimiento de las ciencias y de las letras. En el siglo XVIII, bajo la influencia política y cultural de la Francia borbónica, se produjeron dos hechos que tuvieron repercusión sobre la Universidad de Granada: (i) la concesión de importantes bienes de los jesuitas que, tras las desamortizaciones de Mendizábal, permitieron una mayor dotación económica a las universidades, aumentando así el número de cátedras y de alumnos. (ii) La llegada de las primeras reformas de planes de estudios aprobadas por el Consejo de Castilla en 1776. Posteriormente, en el siglo XIX, la Universidad Española en general entró en contacto con los movimientos y humanistas presentes en Europa inspirados en la secularización y la libertad de enseñanza. Destacaron en este sentido las figuras de Giner de los Ríos y Bartolomé Cossio, así como las reformas de Calomarde (1824), Gil de Zárate (1845), Moyano (1851) y la propia Ley General de Educación (1970), que modifican sustancialmente el desarrollo de la Universidad en general. Desde al lo menos finales del siglo XIX la Universidad de Granada, como otras del país, fue espacio de estudio y formación, pero también de democratización.

Oferta formativa, comunidad universitaria y datos de investigación

Hoy en día, la Universidad de Granada cuenta con más de 70 000 estudiantes matriculados en enseñanzas regladas. Acoge alumnado de toda Andalucía y del resto de comunidades Españolas y se ha convertido, además, en uno de los principales focos de atracción del estudiantado internacional debido, entre otros factores, a los atractivos climatológicos, el contraste geográfico, la tradición histórica de la institución y los grandes atractivos arquitectónicos y culturales que posee la cuidad de Granada. Esos atractivos extraacadémicos no desmerecen la calidad de la Universidad de Granada, que en la actualidad se encuentra entre las 300 mejores universidades del mundo y la cuarta de España, según el *Shanghai Academic Ranking of World Universities* de 2023. Además, la Universidad está fuertemente comprometida con una gestión eficaz y eficiente, con el conocimiento y su transferencia, con la innovación docente y la calidad de sus servicios. El liderazgo en investigación, la mejora constante de su actividad a través de las TIC, la internacionalización y la igualdad de oportunidades son también señas de identidad de nuestra institución.

Las instalaciones de la Universidad de Granada se localizan en los campus de Granada, Ceuta y Melilla, siendo una institución pionera en poseer campus en dos continentes. En la ciudad de Granada los edificios universitarios están diseminados en diversos puntos del casco urbano, lo que otorga a la ciudad un estilo universitario propio integrado de pleno en la vida de la cuidad. Consta de tres grandes campus, Fuentenueva y Cartuja y

Campus de la Salud o PTS, además de otra serie de centros repartidos por toda la ciudad, como Traductores, Medicina, Arquitectura o Derecho. Los centros docentes adscritos a la Universidad de Granada se encuentran repartidos en siete campus universitarios, de los cuales cinco están en la ciudad de Granada (Cartuja, Centro, Fuentenueva, Aynadamar y Ciencias de la Salud) y como se ha indicado, hay otro en la ciudad de Ceuta y otro en la ciudad de Melilla.

En cuanto a su oferta formativa, en el curso 23-24 la Universidad de Granada ha ofertado 96 títulos de grado: 15 de Artes y Humanidades, 11 de Ciencias, 12 de Ciencias de la salud, 33 de Ciencias Sociales y Jurídicas, 8 de Ingeniería y Arquitectura y 17 Dobles títulos. También ha ofertado 126 Másteres oficiales: 20 de Artes y Humanidades, 20 de Ciencias, 25 de Ciencias de la Salud, 39 de Ciencias Sociales y Jurídicas y 22 de Ingeniería y Arquitectura. Además, imparte 28 programas de doctorado: 4 en Artes y Humanidades, 7 en Ciencias, 6 en Ciencias de la saludo, 8 en Ciencias Sociales y Jurídicas y 3 en Ingeniería y Arquitectura. Finalmente, la Universidad de Granada ofrece también cursos de verano y algunas enseñanzas propias.

La oferta formativa descrita proporciona formación a cerca de 70 000 estudiantes, como se ha señalado anteriormente. En su memoria académica de 2022-2023, la Universidad de Granada indica que en ese curso tuvo matriculados alrededor de 47 000 estudiantes de grado (30 00 mujeres y 17 000 hombres, aproximadamente), en torno a 6500 estudiantes de máster (3900 mujeres y 2600 hombres) y 4000 estudiantes de doctorado, además de 8500 adicionales matriculados en enseñanzas y resto de oferta formativa (Universidad de Granada, 2023b). En ese curso impartieron docencia en la Universidad de Granada aproximadamente 3800 profesores (1550 mujeres y 2250 hombres), y trabajaron en la misma en torno a 2600 miembros del Personal Técnico de Gestión, Administración y Servicios (1400 mujeres y 1200 hombres).

Respecto de la investigación, finalmente, la memoria académica recoge que en 2022 se publicaron un total de 3578 artículos citables, de los cuales un 98,94 % tuvieron factor de impacto (Universidad de Granada, 2023b). Además, el 52,4 % de dichos trabajos estaban indexados en el cuartil Q1. Por otra parte, un 56,3 % de las publicaciones se realizaron en colaboración con algún socio internacional, lo que ilustra las redes de trabajo internacionales que han desarrollado los grupos de investigación de la Universidad de Granada. Estos datos sobre investigación, además de posicionar a la Universidad de Granada en puestos altos del ranking de Shangai, han contribuido a que los diferentes grupos de investigación de esta universidad lograran 17 millones de € distribuidos en 131 proyectos competitivos en convocatorias nacionales (con una tasa de éxito del 45 %) y 47 millones en 84 proyectos internacionales (con una tasa de éxito del 13,75 %).

Finalmente, debe señalarse que la Universidad de Granada lleva fomentando desde hace años una importante dimensión internacional a través de su Vicerrectorado de Internacionalización. La importancia de la presencia de estudiantes internacionales se manifiesta sobre todo a través de los numerosos acuerdos de movilidad firmados con instituciones europeas de Educación Superior y en los programas de movilidad ERASMUS, en los cuales ha venido ocupando las primeras posiciones tanto en recepción como en el envío de estudiantes. La participación de la Universidad de Granada en la Alianza Universitaria Europea Arqus es otro indicador de la proyección internacional que ha adquirido esta institución universitaria.

2.1.5. La Facultad de Ciencias de la Educación de Granada

El espacio institucional en el que se desarrolla la enseñanza de la asignatura "Bases Matemáticas para la educación primaria" es la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, que se rige por la legislación vigente de la Junta de Andalucía y las leyes de rango superior del Ministerio de Educación y Ciencia, que regulan el funcionamiento de la Universidad y mencionadas previamente.

Creación y trayectoria

La Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada fue creada por Decreto de la Junta de Andalucía 158/1992, de 1 de septiembre (BOJA de 29 de octubre de 1992), tras la autorización de su creación por el Consejo de Universidades el día 6 de abril de 1992 y una vez aprobada por el Claustro de esta Universidad celebrado el 25 de junio del mismo año. Con la creación de esta Facultad quedaron integrados los estudios de Pedagogía y de Magisterio, por lo que se puede considerar que no se "creó" un centro nuevo, sino que se integraron instituciones universitarias avaladas por la historia y el prestigio de las Escuelas Normales y las Facultades de Filosofía y Letras (Sección de Pedagogía), instituciones ambas de amplia repercusión en la vida académica y cultural de Granada.

La Escuela Normal Seminario de Maestros de Instrucción Primaria había sido inaugurada en 1846 para impartir los estudios de maestro. En 1849 pasó a ser Escuela Normal Superior de un total de nueve que había en España. En ella, se impartían enseñanzas de los grados elemental y superior de la carrera de maestro. Posteriormente, en 1858, se inauguró la Escuela Normal Superior de Maestras de Granada, que en el curso 1861-62 ya contaba con sesenta y nueve alumnas. En 1933 se inauguró el edificio de la Normal en la Gran Vía, que recibió denominaciones diversas. Un ejemplo de ellas es el de "Escuela de Magisterio Andrés Manjón Unificada", nombre adoptado cuando en 1964 se unificaron las secciones masculina y femenina, llegando a tener en el curso 1966-67 una matrícula de 568 alumnos. Con la aparición de la Ley General de Educación de 1970, y la subsiguiente creación de la Educación General Básica (EGB), se dispuso que fuera la Universidad la que se ocupara de la formación de los maestros, y se determinó que las Escuelas Normales se integraran en la Universidad como Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado, con el fin de seguir con su misión de formar profesores de EGB. De esta manera, la Escuela Normal de Granada fue incorporada a la Universidad de Granada en 1971 tras el acuerdo del Consejo de Rectores, y comenzó a ser Escuela Universitaria de Profesorado de EGB. La Ley de Reforma Universitaria LRU de 1983 confirmó a las Escuelas Universitarias como parte integrante de la Universidad, y la Escuela Universitaria de Formación de Profesorado de EGB de Granada quedó amparada bajo esta normativa, impartiendo desde 1984 las distintas titulaciones de Preescolar (antecedente de la actual Titulación de Maestro de Educación Infantil) y EGB.

La transformación de la Escuela Universitaria en Facultad de Ciencias de la Educación fue la respuesta que la Universidad de Granada dio a las exigencias de modernización del sistema universitario, así como a las demandas de la sociedad en el ámbito de la educación. El 26 de abril de 1989, la Facultad se trasladó al actual edificio del Campus Universitario de Cartuja, que fue oficialmente inaugurado el día 24 de enero de 1990, en el que en la actualidad se imparten los Grados correspondientes al Título oficial de Maestro en Educación Primaria e Infantil, además del Grado de Educación Primaria bilingüe, y dos dobles grados de Educación Primara y Estudios ingleses, y Educación Primaria y Estudios Franceses.

Espacios y recursos disponibles

La actividad de la Facultad de Ciencias de la Educación se desarrolla en tres edificios propios, ambos disponen de Conserjería localizada junto a la entrada principal, y del pabellón de La Cartuja. El primero es el Edificio Central, en el que se distribuyen los siguientes espacios: aulas de Docencia (15 aulas de docencia), aula Magna, aula Andrés Manjón, aula de Medios Audiovisuales, 2 Aulas de Música, 1 aula de expresión Corporal, 2 aulas de Informática, 4 Laboratorios: Biología, Geología, Física y Química e Idiomas, biblioteca, sala de Juntas, servicio de Apoyo a la Investigación, secretaría de la Facultad, despachos del Decanato, delegación de Alumnos, servicio de Cafetería y Comedor, así como los departamentos y despachos de los profesores. El segundo es el Edificio Aulario, compuesto por 12 Aulas para docencia, 1 aula de Plástica, 1 aula de Informática, 1 aula de Tecnología Educativa, 1 aula de grabado, 1 laboratorio de fotografía, y el servicio de Medios Digitales y Visuales, así como departamentos y despachos de los profesores. El tercero es el Edificio Biblioteca, en el que además se encuentra el servicio de copistería y algunas aulas. En cuanto a los recursos disponibles, destacan los siguientes:

i) Servicio de apoyo a la investigación, diseñado para apoyar a profesorado y alumnado de tercer ciclo de la facultad en el desarrollo de su investigación. Cuenta con la ayuda de dos auxiliares que facilitan el acceso y uso del material disponible. También puede ser utilizado por alumnos de la Facultad con autorización por escrito de algún profesor o profesora con el que esté colaborando en sus investigaciones. Las tareas que se pueden realizar, entre otras, incluyen las de análisis de datos, tratamiento de textos, transcripción de entrevistas, o análisis de material audiovisual.

ii) Servicio de medios audiovisuales y tecnología digital. Está ubicado en la parte posterior del Aula 8 (Aula de Tecnología Educativa). Consta de un hall multiuso, sala de control de imagen y sonido, locutorio/plató con cortina chroma-key y despacho. Además, a través de las Aulas Magna y Andrés Manjón, debidamente acondicionadas, se mantendrá un mayor apoyo tecnológico a Jornadas, Congresos y demás actividades culturales.

iii) La biblioteca de la Facultad dispone de un total de 180 puestos de lectura. Cuenta además con las dependencias para el trabajo de los bibliotecarios y un depósito suplementario en el sótano de la facultad. Los fondos de la Biblioteca contienen más de 17 400 libros, 150 revistas de publicación periódica y unas sección específica de tesis doctorales en papel, además de material audiovisual. Los fondos están especializados en las materias propias de las asignaturas que se imparten en la Facultad. Desde la Biblioteca también se puede acceder a los recursos electrónicos que la Universidad de Granada pone a disposición de la comunidad universitaria.

2.1.6. El Departamento de Didáctica de la Matemática

El departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granadas está asociado al área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. Conforme a lo establecido en el artículo 14.3 de los Estatutos de la Universidad de Granada, el departamento englobar tres secciones departamentales adscritas a tres Facultades diferentes: la de Educación, Economía y Tecnología de Ceuta, la de Ciencias de la Educación de Granada y la de Ciencias de la Educación y del Deporte de Melilla.

Creación y trayectoria

Este departamento se creó en el curso académico 1985-1986, cuando la Junta de Gobierno de la Universidad de Granada puso en marcha el proceso de constitución de los nuevos Departamentos Universitarios. Entonces, los 23 profesores de Matemática y su Didáctica de las distintas Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB de la Universidad de Granada, distribuidos en los campus de Almería, Ceuta, Granada, Jaén y Melilla, tomaron la decisión unánime de adscribirse al Área de Didáctica de la Matemática, constituyéndose así el departamento. La sede del departamento estuvo fijada inicialmente en la Escuela Universitaria del Profesorado de Enseñanza General Básica (antigua Escuela Normal de Granada) y a partir de 1992, en la Facultad de Ciencias de la Educación. La creación de la Facultad supuso una mejora sustancial en las infraestructuras del Departamento en un momento de cambios importantes en sus programas de estudios (diplomaturas, licenciaturas y doctorado) que habían supuesto un incremento notable en su profesorado en la sección de Granada. En el curso 1992/1993, al crearse las Universidades de Almería y Jaén por segregación de la Universidad de Granada, cuatro profesores de Didáctica de la Matemática que impartían docencia en Jaén y otros seis que impartían docencia en Almería pasaron a formar parte de departamentos de sus respectivas Universidades. En 2006, en el marco del I Plan Nacional de Evaluación de la Calidad (1995-2000) el Departamento pasó por un proceso de evaluación y posteriormente por la aprobación de un Plan de Mejora.

Profesorado, actividad docente y científica

En la actualidad el departamento de Didáctica de la Matemática cuenta con 31 profesores, una investigadora en formación con financiación obtenida en concursos competitivos y una estudiante de máster. En cuanto a la docencia en estudios de grado, el departamento imparte 3 asignaturas en el grado de educación infantil (2 obligatorias y una optativa) y 4 asignaturas en el grado de educación primaria (3 obligatorias, siendo estas ofertadas como optativas en el grado en matemáticas) y en el grado en educación primaria bilingüe, además de participar en los *practicum* de los correspondientes grados. El departamento también imparte docencia en el Máster en Didáctica de la Matemática y en el Máster de profesorado de educación secundaria y bachillerato. Además, algunos de sus miembros participan en otros másteres y colaboran con el centro de profesorado de Granada en cursos de formación continua del profesorado de educación primaria e infantil, así como en múltiples actividades de divulgación y difusión de prácticas de enseñanza de las matemáticas.

Respecto a la actividad investigadora, el departamento coordina un máster específico de investigación en Didáctica de la Matemática, que recoge el legado que vienen dejando sus miembros desde la creación de un programa de doctorado propio en 1988. Este condujo a que se defendieran las 6 Tesis Doctorales de Didáctica de la Matemática durante el curso 1993-1994. En 2006 el Programa de Doctorado del Departamento obtuvo la mención de calidad y en el curso 2007-2008 fue transformado en Máster Oficial de Investigación, independiente del Doctorado en Educación, adaptándose a las exigencias del Espacio Europeo de Educación Superior. En la actualidad y ubicadas en el máster de investigación en Didáctica de la Matemática, se mantienen las siguientes líneas de investigación: Didáctica de la Matemática, Pensamiento Numérico; Didáctica de la Probabilidad y Estadística; Diseño desarrollo y evaluación del currículo; Formación de Profesores de Matemática y Teoría y métodos de investigación en Educación Matemática. Los nuevos estudios de Doctorado en Educación incluyen la línea de investigación del Departamento, Educación Matemática, formada por tres equipos con categoría de grupos PAIDI de la Junta de Andalucía: *Datos, Educación y Sociedad* (SEJ-622), *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (FQM-193) y *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística* (FQM-126). Todo este trabajo ha conducido a la defensa de alrededor de cien tesis doctorales, a la obtención de financiación de proyectos en convocatorias competitivas y a la coordinación de la revista de investigación PNA en el seno del departamento. De forma incipiente, además, se están iniciando acciones de transferencia de conocimiento materializadas en colaboraciones con empresas que ofrecen enseñanza online a alumnado de primaria. La actividad profesional que se ha descrito refleja la importante representación del citado departamento en la formación de profesores y de profesionales de la educación matemática.

En cuanto a los recursos disponibles, el departamento cuenta con un seminario en el que hay instalada una aula virtual, lo que permite trabajar sesiones no presenciales especialmente del Máster en Didáctica de la Matemática. Este seminario, además, dispone de una gran variedad de materiales manipulativos idóneos para el aprendizaje de las matemáticas en edades tempranas, que son indispensables para la docencia práctica en los grados de educación infantil y primaria.

2.2. Contexto curricular

Esta sección describe la estructura general de los estudios universitarios de grado en el contexto del Espacio Europeo de Educación Superior, prestando especial atención al grado en Educación Primaria, al que se circunscribe la asignatura que ocupa el perfil docente de la plaza, y a la propia ubicación de la asignatura en el actual plan de estudios.

2.2.1. Los estudios universitarios oficiales de grado

En el contexto de los tres ciclos de formación universitaria de Grado, Máster y Doctorado establecidos en el EEES, este proyecto se enfoca en los estudios de grado. Este nivel comprende las enseñanzas universitarias de primer ciclo y tiene como objetivo lograr la capacitación de los estudiantes para integrarse en el ámbito laboral europeo con una cualificación profesional apropiada. Estas enseñanzas han de contribuir al desarrollo de competencias generales básicas y otras competencias transversales relacionadas con la formación integral del estudiante. La superación del Grado da derecho a la obtención del correspondiente título. Este título de grado corresponde con el nivel 5 de la Clasificación Internacional Normalizada de la Educación de la UNESCO, versión 1997 y con el nivel 6 del European Qualifications Framework, propuesto por la Comisión de la UE. Todos los títulos de Grado constan de 240 créditos ECTS (4 cursos académicos, a diferencia del resto de las universidades europeas que corresponde a 3 cursos), lo que permite una mayor presencia de enseñanzas prácticas, prácticas externas y movilidad, que son objetivos esenciales de la reforma emprendida.

Los contenidos de los planes de estudios conducentes a la obtención de títulos universitarios oficiales de grado se han tenido que ordenar distinguiendo entre contenidos formativos comunes, establecidos en las directrices generales propias de cada título, y los contenidos específicos determinados discrecionalmente por la Universidad. Asimismo, las directrices generales propias de cada título de Grado han indicado el número de créditos que se debía asignar a los contenidos formativos comunes en sus respectivos planes de estudio. Este número de créditos está entre el 60 % y el 75 % del número total de créditos asignados a la titulación. El reconocimiento de los títulos universitarios oficiales de Grado tras la verificación del plan de estudios culmina con la inscripción en el Registro de universidades, centros y títulos tal y como establece el Real Decreto 15/09, de 12 de septiembre de 2008 (BOE 25 de septiembre de 2008).

Con el objetivo explícito de realizar estudios y supuestos prácticos útiles en el diseño de un título de grado adaptado al EEES, una red de universidades españolas en colaboración con la ANECA diseñaron los denominados *libros blancos*. Estos constituyen propuestas no vinculantes, pero con valor como instrumento para la reflexión, que se presentaron ante el Consejo de Coordinación Universitaria y el Ministerio de Educación y Ciencia para su información y consideración. Estos libros blancos recogían numerosos aspectos fundamentales en el diseño de un modelo de título de grado: análisis de los estudios correspondientes o afines en Europa, características de la titulación europea seleccionada, estudios de inserción laboral de los titulados durante el último quinquenio, y perfiles y competencias profesionales, entre otros aspectos. En su desarrollo, las universidades participantes llevaron a cabo un trabajo exhaustivo, debatiendo y valorando distintos modelos, con el objetivo de alcanzar un modelo final consensuado que recogiese todos los aspectos relevantes del título objeto de estudio. Estos libros blancos han permitido elaborar unos planes de estudios acordes a la normativa actual.

2.2.2. El grado en Educación Primaria en la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada

El plan de estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria (Universidad de Granada, 2009) se enmarca en las directrices y recomendaciones del EEES. Posee un perfil profesional que ha ido adaptándose a las circunstancias sociales de nuestro país. Actualmente, este queda recogido en la Ley Orgánica de Educación y en la correspondiente Ley de Educación de Andalucía. El diseño del grado queda rubricado por la orden ECI/3857/2007 en la que se establecen los requisitos para la ratificación de los títulos universitarios oficiales que habilitan para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria y en la Ley Andaluza de Universidades. En la Universidad de Granada, este grado se imparte en los campus de Ceuta, de Melilla y de Granada, donde se oferta en la Facultad de Ciencias de la Educación y en el centro adscrito La Inmaculada. Aunque el grado es único para los cuatro centros, sus optativas y profesorado están adaptados a cada centro.

La descripción del título en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada (Memoria Primaria 2015) parte de un aspecto básico e importante en la formación del Maestro y recogido en el marco general de Ley Orgánica de Educación de 2/2006: se considera la Educación Primaria como la etapa educativa obligatoria responsable de la educación integral de la ciudadanía. Esta labor de educación integral que deben dar los maestros determina la formación inicial que deben recibir en los estudios de grado, que a partir del Real Decreto 1393/2007 y de la Orden ECI/3857/2007 recibieron mayor relevancia en forma de mayor carga lectiva y equiparación con otras titulaciones. Esto ha representado cambios importantes y significativos como la ampliación del número de créditos dedicados a las prácticas escolares.

El plan de estudios de las enseñanzas para la obtención del título de graduado en Educación Primaria responde a las necesidades sociales de la profesión relacionada con la docencia de escolares en edades de 6-12 años. Fue publicado en el Boletín Oficial de la Junta de Andalucía (BOJA 4 de agosto de 2014) con fecha resolución de 18 de julio de 2014, de la Universidad de Granada y está estructurado como se muestra en la figura 2.1.

TIPO DE MATERIA	CRÉDITOS
Formación básica	60
Obligatorias	100
Optativas	30
Prácticas externas	44
Trabajo fin de Grado	6
CRÉDITOS TOTALES	240

Nº	MÓDULO	MATERIA	Créditos
1.	**Aprendizaje y desarrollo de la personalidad**		**18**
		Psicología	12
		Dificultades de aprendizaje	6
2.	**Procesos y contextos educativos**		**30**
		Educación	18
		Didáctica	12
3.	**Sociedad, familia y escuela**		**12**
		Sociología	6
		Acción tutorial en Educación Primaria	6

Figura 2.1: Distribución de créditos en el grado en educación primaria (arriba) y distribución de los 60 créditos de formación básica (abajo). Fuente: elaboración propia a partir de la página web de la Universidad de Granada.

2.2.3. La asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria

La asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria" del grado en educación primaria de la Universidad de Granada, que ocupa el perfil de docencia de la plaza objeto del concurso, se adscribe al área de conocimiento de Didáctica de la Matemática, que en este caso se imparte por el profesorado del departamento de Didáctica de la Matemática de esta universidad. Este departamento tiene asignados 28 créditos dentro del grado en educación primaria (figura 2.2). Como se señaló ya en la introducción del proyecto, la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria", del primer curso, se ocupa del contenido matemático. A su vez, las asignaturas "Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria" y "Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas en educación primaria", del segundo y tercer curso respectivamente, están más enfocadas en el conocimiento didáctico del contenido. La asignatura "Competencias matemáticas en educación primaria", por otra parte, es optativa dentro de la mención de profundización en el currículo básico. Esta oferta de asignaturas, aunque no resulta suficiente para dar cobertura a la educación matemática que debería poseer un maestro de Educación Primaria, no es desdeñable en relación a la carga docente que imparte el área de Didáctica de la Matemática en el grado de maestro de otras instituciones universitarias nacionales.

Materias obligatorias			
Módulo	Créditos	Materia	Créditos
Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	22	Bases matemáticas en la Educación Primaria	9
		Enseñanza y aprendizaje de la Matemáticas en la Educación Primaria	6
		Diseño y desarrollo del currículum de Matemáticas en la Educación Primaria	7
Materias optativas (mención de profundización en el currículo básico)			
		Competencias matemáticas en Educación Primaria	6

Figura 2.2: Distribución de los créditos que imparte el área de Didáctica de la Matemática en el grado en educación primaria según el actual plan de estudios. Fuente: elaboración propia a partir de la página web de la Universidad de Granada.

2.3. Contexto profesional

Como se ha comentado, la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria” está adscrita en la Universidad de Granada al departamento de Didáctica de la Matemática. El hecho de que la formación matemática de los futuros maestros de educación primaria esté a cargo de profesorado e investigadores especialistas en educación matemática, aunque de sentido común, no es una realidad generalizada en las universidades nacionales. De hecho, la disciplina de Didáctica de la Matemática está reconocida como *área de conocimiento* por el Consejo de Universidades desde 1984, una fecha relativamente moderna si la comparamos con otras áreas de la matemática. Esta situación hace necesaria una reflexión sobre cuál es la identidad de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica y sobre cómo debe entenderse la asignatura de contenido matemático desde esta disciplina.

2.3.1. Didáctica de la Matemática como área de conocimiento

Desde el año 1984 en el que fue reconocida por el Consejo de Universidades como área de conocimiento, la Didáctica de la Matemática ha ido asentándose como disciplina científica. El departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada ha desarrollado durante este periodo un trabajo destacado en este sentido, tanto a nivel investigador como a nivel docente, y está considerado como uno de los mayores exponentes del desarrollo y consolidación de la Didáctica de la Matemática en los ámbitos nacional e internacional. Durante este proceso consolidación, ha sido necesario definir, dar identidad diferenciada y relacionar la Didáctica de la Matemática con otras disciplinas.

Definición, identidad y evolución

A continuación se discute la naturaleza del área como disciplina de conocimiento, su identidad diferenciada y su relación con otras disciplinas.

¿Qué es la Didáctica de la Matemática? En cuanto a su definición, existe cierta controversia sobre la entidad de la Didáctica de la Matemática. Rico et al. (2000) argumentaron que se debe distinguir entre *Educación Matemática* y *Didáctica de la Matemática*, ya que consideran que la primera es un sistema complejo que engloba conocimiento matemático, finalidades formativas, agentes educativos y planificación de la enseñanza, así como todas las interacciones entre estos elementos. Sin embargo, la Didáctica de la Matemática es la disciplina que investiga los problemas que surgen en la educación matemática y propone acciones fundamentadas para abordar dichos problemas. Siguiendo esta línea de pensamiento, el fin fundamental de la educación matemática es el desarrollo máximo de las capacidades de los ciudadanos a través del aprendizaje de las matemáticas (Rico & Lupiáñez, 2008) mientras que el fin de la Didáctica de la Matemática es el diseño de herramientas para facilitar la educación matemática (Rico, 2012). Frente a este planteamiento, Steiner (1985) considera estos dos términos como equivalentes y señala que esta Educación Matemática admite, además, una interpretación global dialéctica como disciplina científica y sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica. En general, en el ambiente europeo se utiliza el término *Mathematics Education* para referirse al conjunto de teorías e investigaciones relacionadas con el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas (Godino, 1995). La concepción del área que se asume en este proyecto se sitúa en un punto intermedio: se asume que la labor del investigador/docente en Didáctica de la Matemática no tiene el alcance suficiente para abarcar la dimensión de la educación matemática, pero se considera que los problemas, las herramientas y las perspectivas que se asumen en la Didáctica de la Matemática deben tener impacto sobre todo este sistema de conocimientos, instituciones, planes de formación y finalidades educativas que intervienen para enseñar Matemáticas.

Identidad diferenciada del área. En cuanto a la identidad diferenciada de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica es pertinente plantear dos preguntas:

¿En que sentido es la Didáctica de la Matemática una disciplina científica?
En general una teoría científica conlleva un conjunto de profesionales que están de acuerdo (al menos de forma tácita) sobre cuáles son los problemas esenciales en la teoría y cuáles son las metodologías que dicha teoría admite como válidas. Se reúnen trabajo personal para proponer ideas con una reflexión grupal para contrastar y difundir estas ideas. Ante

la extrema complejidad de los problemas en Didáctica de la Matemática, Steiner (1985) indicó que se producen dos reacciones extremas: (i) los que afirman que la enseñanza de las Matemáticas es esencialmente un arte y por tanto no tiene sentido hablar de la Didáctica de la Matemática como Ciencia y (ii) aquellos que admiten el carácter científico de la disciplina a partir del estudio meticuloso de un aspecto parcial. Godino (1995) señaló que la exigencia de la existencia de un único paradigma de Kuhn es innecesariamente fuerte cuando se habla de ciencias sociales. Como argumentó Shulman (1986), en estas disciplinas la coexistencia de escuelas competitivas de pensamiento no es solo científica sino que demuestra la madurez de estas disciplinas, ya que favorece el desarrollo de diversas estrategias de investigación a partir de diferentes enfoques.

¿Posee la Didáctica de la Matemática entidad independiente de otras disciplinas?

Hoy en día existe acuerdo de que las teorías de enseñanza y aprendizaje tienen entidad propia. Para comprender la independencia de la Didáctica de la Matemática de la didáctica general, Godino (1995) proporcionó tres argumentos. El primero es que los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza deben entenderse no solo en términos de factores psicopedagógicos, sociales o culturales, sino también teniendo en cuenta la particularidad de los conocimientos objeto de aprendizaje. En segundo lugar, hizo hincapié en que las teorías didácticas generales resultan insuficientes para la enseñanza de las matemáticas debido a la complejidad de los fenómenos educativos relacionados con las matemáticas. Por último, señaló que la investigación específica en Didáctica de la Matemática favorece el surgimiento de nuevos planteamientos y de formulaciones más audaces que puedan mejorar las teorías relacionadas con la enseñanza de las Matemáticas. Las teorías y técnicas generales de instrucción no son adecuadas para algunas teorías que se están construyendo en Didáctica de la Matemática. En estos casos, los investigadores han reflexionado sobre los procesos de comunicación de las Matemáticas se han visto obligado a ejercer la profesión del especialista en Didáctica. En este sentido no nos cabe duda de que la Didáctica de la Matemática tiene entidad diferenciada respecto de las teorías generales de la enseñanza.

Para comprender la independencia respecto a otras ciencias como psicología cognitiva, psicología educativa o Matemáticas, Brousseau (1989) distinguió dos concepciones científicas: la concepción pluridisciplinar aplicada, bajo la cual la Didáctica de la Matemática se reduce a "tecnología" fundada en otras ciencias, y la concepción fundamental o matemática en la que existe una teoría del hecho didáctico en matemáticas con fundamento y metodología propios. La escuela francesa, a la que pertenece el propio Brousseau, aboga por la construcción de la Didáctica de la Matemática bajo esta concepción fundamental. Steiner (1985) afirmó, por su parte, que la Didáctica de la Matemática debe tender hacia la transdisciplinariedad de Piaget, que se fundamenta en una concepción de la investigación en la que no hay frontera bien definida entre disciplinas y engloba las interacciones entre proyectos de investigación especializados. Por su parte, Lesh y Sriraman (2010) reflexionaron también sobre la naturaleza del campo de investigación de Didáctica de la Matemática. Estos autores se decantaron por concebir a los especialistas en esta disciplina como ingenieros o científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares y con motivaciones basadas en la necesidad de resolver problemas reales como base para elaborar teorías relevantes. La posición desde la que se ha enfocado el proyecto investigador en esta memoria está en esta línea de pensamiento.

Consolidación institucional de la disciplina A partir del reconocimiento por el Consejo de Universidades de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento en 1984 y de la Ley de Reforma Universitaria (LRU) del mismo año comenzaron a crearse departamentos universitarios en torno a la Didáctica de la Matemática. Este soporte institucional ha sido determinante para el desarrollo de la disciplina, desarrollo que se ha materializado a través de la formación de programas de doctorado específicos y de la defensa de tesis doctorales, así como el desarrollo de proyectos de investigación competitivos.

La formación de grupos de profesionales en torno a intereses en problemas de investigación en el área constituye otro indicador de la consolidación institucional de la misma. A nivel nacional se constituyó en 1997 la Sociedad de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), mientras que a nivel internacional existen institutos de investigación específicos como el CINVESTAV en México, el IDM en Alemania o el Hans Freudenthal Institute en Países Bajos. Además, en el contexto de profesionalización actual de los investigadores, se hace necesaria la existencia de revistas periódicas de investigación en el área, que poco a poco van consolidándose en la literatura de la Educación, con publicaciones como *Journal for Research in Mathematics Education* o *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), entre otras. Asimismo, la publicación de *handbooks*, la celebración congresos internacionales como PME (Psychology of Mathematics Education), CERME (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education) o los ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) Studies dejan patente la consolidación de nuestra disciplina, que hoy en día cuenta con objetivos y métodos propios.

Relación con otras disciplinas

Para situar la Didáctica de la Matemática en relación a otras disciplinas se presentan dos modelos. El primero es el tetraedro que propuesto por Higginson (1980), que puede verse en la figura 2.3 (a la derecha). Para Higginson, son las Matemáticas, la Psicología, la Sociología y la Filosofía las disciplinas sobre las que se fundamenta la Didáctica de la Matemática, ya que esas disciplinas trabajan sobre las preguntas básicas de las que parte nuestra disciplina: qué enseñar (Matemáticas), por qué (Filosofía), a quién y dónde (Sociología), cuándo y cómo (Psicología). Así, la Didáctica de la Matemática se describe en términos de las interacciones entre aquellos campos. Por su parte, Steiner (1990) describió la Didáctica de la Matemática como parte de un sistema más complejo que denomina "Sistema de Enseñanza de la Matemática" (SEM en la figura 2.3). Dentro de este sistema hay otras componentes que incluyen la clase de matemáticas y la formación de profesores, entre otros. Para Steiner (1990), las ciencias de referencia para la Didáctica de la Matemática son las Matemáticas (M), la Epistemología y Filosofía de las Matemáticas (EFM), la Psicología (PS) o la Sociología (S). Este autor también situó la actividad de teorización (TEM) como

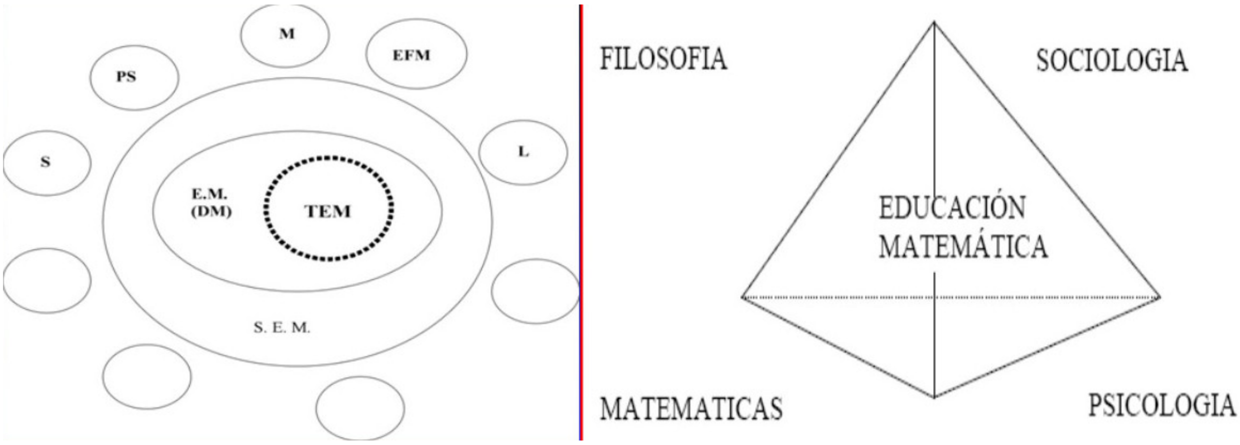


Figura 2.3: Descripciones gráficas de la relación de la Didáctica de la Matemática (Educación Matemática para los autores) con otras disciplinas. A la izquierda está el modelo de Steiner y a la derecha el modelo de Higginson. Fuente: Godino (1995).

parte de la Didáctica de la Matemática.

2.3.2. Deontología profesional

La deontología de la profesión del docente se interpreta aquí como aquella de la persona que *enseña*. Mis experiencias como profesor, sin embargo, me dejan dudas sobre qué significa *enseñar*, ya que cada vez se fortalece más mi creencia de que los alumnos aprenden en función de sus capacidades y actitudes, y que la acción sobre el conocimiento de otra persona, tal y como se representa en la imagen clásica del docente, no es verosímil. Me resulta más plausible (y me reconforta más) la idea del docente como apoyo, un profesional que estudia el proceso de aprendizaje de sus alumnos y es capaz de articular mecanismos para optimizar este aprendizaje. Este tipo de docente se reconoce a sí mismo como *modelo intelectual* (y también personal) y lucha por ser un profesional verosímil y de confianza para su alumnado, alguien en que ellos confían a todos los niveles. Bajo esta concepción, los docentes tenemos (mucha) más capacidad de llegar al alumno y realizar nuestra labor de educadores de la que asumimos en general al entrar al aula. Debemos, por tanto, cuidar todos los detalles de nuestra conducta, tanto en el aula como en otros ámbitos.

A pesar de este enfoque holístico que concedo a la docencia, considero que no es realista creer que las prácticas de enseñanza sustentan por sí solas el proceso educativo del alumnado. Estas prácticas deben ser un eje vertebrador de este proceso a mi entender, pero en una labor de trabajo coordinado con otros agentes (como familias o la propia responsabilidad del alumnado). En este sentido, creo que se deja demasiada carga de responsabilidad a los maestros de primaria sobre la educación de su alumnado, sobre todo en las primeras etapas, no ya en la Universidad donde se supone el alumno ya llega *educado*. En todo caso, y como comenté anteriormente, los profesores debemos ser conscientes de que somos un modelo de conducta de los alumnos incluso cuando no nos lo proponemos.

Ejercer de formador de maestros de primaria acentúa la importancia de nuestra actitud, ya que está puede permear en los futuros maestros a los que formamos y , por ende, llegar a los ciudadanos del mañana. En este sentido, los docentes debemos aspirar al doble reto de ser excelentes profesionales para ser buenos ciudadanos y de ser excelentes ciudadanos para ser buenos profesionales. Considero que un docente excelente debe poseer tres capacidades profesionales esenciales. La reflexión en torno a qué grado de desarrollo de estas capacidades poseemos y cómo podemos trabajar para mejorar este desarrollo definen, desde mi perspectiva personal, la deontología profesional del docente.

Dominio de los contenidos. La evolución rápida de la sociedad obliga a que un buen docente esté correctamente formado, tanto en los contenidos de su asignatura como en las tendencias de investigación relacionadas con la misma. Es necesario poseer un grado de profundidad de conocimientos lo suficientemente amplios para ejercer de especialista, además de gran capacidad autodidacta. El dominio de los contenidos requiere de un proceso de continua revisión, una misma asignatura puede evolucionar a lo largo del tiempo en función del modelo de graduado que necesite la sociedad.

Capacidad didáctica. En España no se recibe de forma sistemática ninguna preparación para ser profesores universitarios. En general, sólo se cuenta con la experiencia vivida en la que tenemos como referente a nuestros propios profesores. Aquellos que recordamos como docentes excelentes y que tratamos de imitar, pero también muchos otros que no lo eran y evitamos emular. Es responsabilidad del profesor instruirse en prácticas y metodologías docentes adecuadas. Es fácil (a veces demasiado) caer en la “tentación” de acusar a alumno o sistema educativo de los malos resultados de la educación. Un profesional docente debe buscar continuamente recursos para mejorar el aprendizaje de los alumnos, dejando aparca su valoración sobre los factores que no está a su alcance controlar. Por supuesto, la experiencia va dotando al profesional de estos recursos, siempre que éste posea la siguiente capacidad: la actitud.

Actitud positiva. Si no se enfocan los conflictos y las dificultades en la labor docente de forma positiva no se pueden desarrollar las capacidades anteriores. Si hay alumnos alumnos que no adquieren un aprendizaje adecuado y el docente no es crítico con su propia labor, no pondrá en marcha otros recursos para luchar por mejorar la situación. Esta capacidad de presentar actitud positiva tiene dos dimensiones: (i) Vocación. Se trata de una capacidad muy difícil de detectar puesto que no se puede saber hasta que se es profesor. El gusto por la enseñanza nace con nosotros, pero en mi opinión también se hace con la experiencia docente. Para mí, la sensación de saber que alguien vuelve a casa tras haber aprendido algo gracias a mí es una sensación indescriptible. Siento que eso es vocación y esa sensación me impulsa a seguir mejorando a pesar de no siempre recibir recompensa o reconocimiento externo. (ii) Empatía. El docente es uno de los pocos profesionales que puede empatizar con sus *clientes* (su alumnado), ya que antes estuvo en su lugar. Esta particularidad de cambio de rol, el traspasar la frontera, colocarse en el puesto de aquél que compartió con nosotros sus conocimientos, confiere a la profesión docente una sensación de legado y de responsabilidad. Como mencioné antes, el docente debe inspirar la confianza (en todos los sentidos) de quien está en la situación de aprender de él y por ello debe explorar en su propia experiencia como alumno para conocer qué pueden necesitar los estudiantes, para así mejorar su aprendizaje.

Como formador de futuros maestros, siento que mi deontología de profesor atesora un grado de repercusión algo mayor que el resto de mis compañeros, ya que mi labor en este sentido es doble: no solo debo reflexionar sobre mis propias experiencias, sino que debo transmitir a mis alumnos la importancia de llevar a cabo esta reflexión y ayudarles a que desarrollen ellos mismos su propia deontología. En este sentido surge la cuestión de cómo *enseñar* a que mis alumnos reflexionen sobre estas cuestiones. Hoy en día, si soy sincero, me siento incapaz de abordar esta cuestión (en parte por mi experiencia aún no demasiado extensa y en parte por esta irresponsabilidad de la inmediatez que impera), pero lucho por predicar con el ejemplo en el día a día del aula y apelando a su madurez y responsabilidad personal. En este caso, considero que la experiencia de los años me ayudará a comprender cómo puedo afrontar esta última cuestión.

Marcos teórico y conceptual del proyecto

Los fundamentos teóricos y conceptuales que sustentan el planteamiento que se hace en este proyecto docente se organizan en torno a los tres antecedentes señalados en la introducción. En primer lugar, la reflexión permanente del formador del profesorado sobre qué matemáticas debe conocer un maestro de primaria, que conduce a discutir algunos modelos de conocimiento especializado del profesor de matemáticas, así como su conexión con la asignatura de "Bases matemáticas para la educación primaria", cuestión que ocupa la primera sección de este capítulo. En segundo lugar, el desarrollo del Análisis Didáctico como herramienta que organiza las asignaturas del departamento, a cuya discusión se dedica la segunda sección. En ella se prestará especial atención a los organizadores propios del análisis de contenido, que son los más relacionados con la asignatura. En tercer lugar, el currículo LOMLOE de la educación primaria y su repercusión en la formación inicial del profesorado, que lleva a presentar los elementos curriculares novedosos que esta introduce en la tercera sección del capítulo. Se presta especial atención a las competencias específicas de la materia y a los sentidos matemáticos novedosos que se introducen en la educación primaria, que son el elemento de mayor impacto en la enseñanza de la asignatura. Finalmente, se dedica una última sección a extraer implicaciones de la discusión teórica realizada, que determinan el planteamiento de la asignatura desarrollado más adelante.

3.1. Conocimiento del profesorado de matemáticas. Conexión con la asignatura

Una de las cuestiones más complejas y relevantes que debemos responder los formadores de profesorado de matemáticas es la de *qué matemáticas debe saber un maestro de educación primaria*. Por supuesto, el currículo de la propia educación primaria establece ideas específicas (contenidos o, como en el caso de la LOMLOE, *sentidos*) sobre el conocimiento que debe promover en su alumnado. No obstante, existe un amplio consenso entre múltiples autores en educación matemática de que el conocimiento del profesorado debe superar con mucho el contenido que debe impartir. En efecto, la comprensión y conceptualización del conocimiento propio del profesor de matemáticas han sido abordadas desde diferentes perspectivas, dando lugar a modelos teóricos para matizar el significado de los dominios de conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido propuestos por Shulman (1986).

The *Knowledge quartet*. Este modelo fue propuesto por Rowland et al. (2005), que señalaron cuatro dimensiones observadas del conocimiento matemático del profesor. La primera es la *fundación*, que los autores relacionan con la comprensión del contenido de Shulman (1986). Esta dimensión contiene el conocimiento matemático de uso común y el de la investigación didáctica, así como las creencias del profesor sobre las matemáticas y su didáctica. En relación al conocimiento didáctico del contenido, Rowland et al. (2005) identifican las dimensiones *transformación*, que incluye el conocimiento para presentar los contenidos de forma que sean comprensibles; *conexión*, que incluye el conocimiento necesario para organizar los contenidos y las tareas de forma coherente; y finalmente, *contingencia*, que incluye el conocimiento para dar respuesta a las necesidades del alumnado y tomar decisiones interpretando las situaciones que se dan en el aula para favorecer el aprendizaje.

Modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Otro modelo de conocimiento del profesorado de interés es el propuesto desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino et al., 2017), desarrollado en el seno del departamento. Desde esta perspectiva, los conocimientos y las competencias del profesor de matemáticas (CCDM) se pueden contemplar desde seis facetas. Cinco de ellas están más relacionadas con el conocimiento didáctico: (i) sobre cómo aprende el alumnado (faceta *cognitiva*), (ii) cuáles son sus emociones respecto a las matemáticas (*afectiva*), (iii) las formas de comunicarse con ellos (*interaccional*), (iv) la gestión de recursos para apoyar la enseñanza (*mediacional*), y el contexto educativo en el que imparte su enseñanza (*ecológica*). La última faceta es la *epistémica*, que está más vinculada con el conocimiento del contenido. Esta faceta epistémica involucra conocimiento matemático del contenido *per se*, que puede ser de uso común como o también ampliado, de carácter más profundo. Godino et al. (2017) señalaron que la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático incluye la diversidad de significados de los contenidos matemáticos que se imparten, así como la diversidad de objetos y procedimientos relacionados con estos contenidos.

***Mathematical Knowledge for Teaching*.** Una tercera conceptualización del conocimiento matemático del profesor de matemáticas es el denominado *conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT, por sus siglas en inglés), desarrollado por Hill et al. (2008). Estos autores parten de la dualidad entre conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido de Shulman (1986) y proponen tres subdominios para cada uno de estos dominios. Así, el conocimiento del contenido incluye *conocimiento del contenido de uso común*, que es el que debe poseer cualquier ciudadano, el *conocimiento del contenido especializado*, que es aquel que es aplicable específicamente para la enseñanza, y el *conocimiento del contenido horizonte*, que involucra la consciencia sobre las relaciones entre los contenidos a lo largo del currículo. Por su parte, el conocimiento didáctico del contenido incluye el *conocimiento del contenido y los estudiantes*, relacionado con cómo aprende el alumnado, el *conocimiento del contenido y la enseñanza*, vinculado a la secuenciación de tareas y planificación de la enseñanza, y finalmente el *conocimiento del contenido y el currículo*, que se refiere a aspectos normativos.

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Un cuarto modelo, surgido de la crítica al MKT, es el propuesto por (Carrillo et al., 2013). Estos autores hicieron hincapié en que las características de las matemáticas requieren que el conocimiento del profesor que las imparte sea especializado, y utilizaron esta condición para desarrollar el modelo MTSK (por sus siglas en inglés). Esta conceptualización también respeta la dualidad propuesta por Shu86 y también incluye tres subdominios dentro de cada tipo de conocimiento. Dentro del conocimiento matemático se distinguen el *conocimiento de los temas*, que incluye contenidos, representaciones y conexiones con la realidad, el *conocimiento de la estructura de la matemática*, que involucra la identificación de conexiones intramatemáticas, y el *conocimiento de la práctica matemática*, que abarca aquellas maneras de actuar propias del trabajo matemático. A su vez, el conocimiento didáctico del contenido engloba el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*, relacionado con el uso estrategias y materiales, el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*, vinculado a cómo es el aprendizaje del alumnado, y el *conocimiento de los estándares del aprendizaje de las matemáticas* que se refiere al currículo y también a otros referentes sobre los objetivos de aprendizaje que deben alcanzar los estudiantes.

Conexión con la asignatura

Los modelos de conocimiento del profesorado descritos permiten constatar la pertinencia de la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria" como instrumento formativo para los futuros maestros de educación primaria. La Figura 3.1 representa idealizaciones del posicionamiento de la asignatura respecto a tres de ellos, que permite visualizar la pertinencia señalada, que también se discute a continuación.

Dentro del Knowledge quartet (Rowland et al., 2005), la asignatura está fuertemente relacionada con la dimensión de fundación, que es la centrada en el contenido, aunque la comprensión de dicho contenido también puede repercutir en la gestión de contenidos y tareas, lo que establece cierto vínculo con la dimensión de conexión. De forma similar, la faceta mediacional propia del CCDM (Godino et al., 2017) también guarda conexión con "Bases matemáticas para la educación primaria". Esta conexión es más potente que la señalada con el modelo de Rowland et al. (2005) debido a que esta faceta mediacional incluye

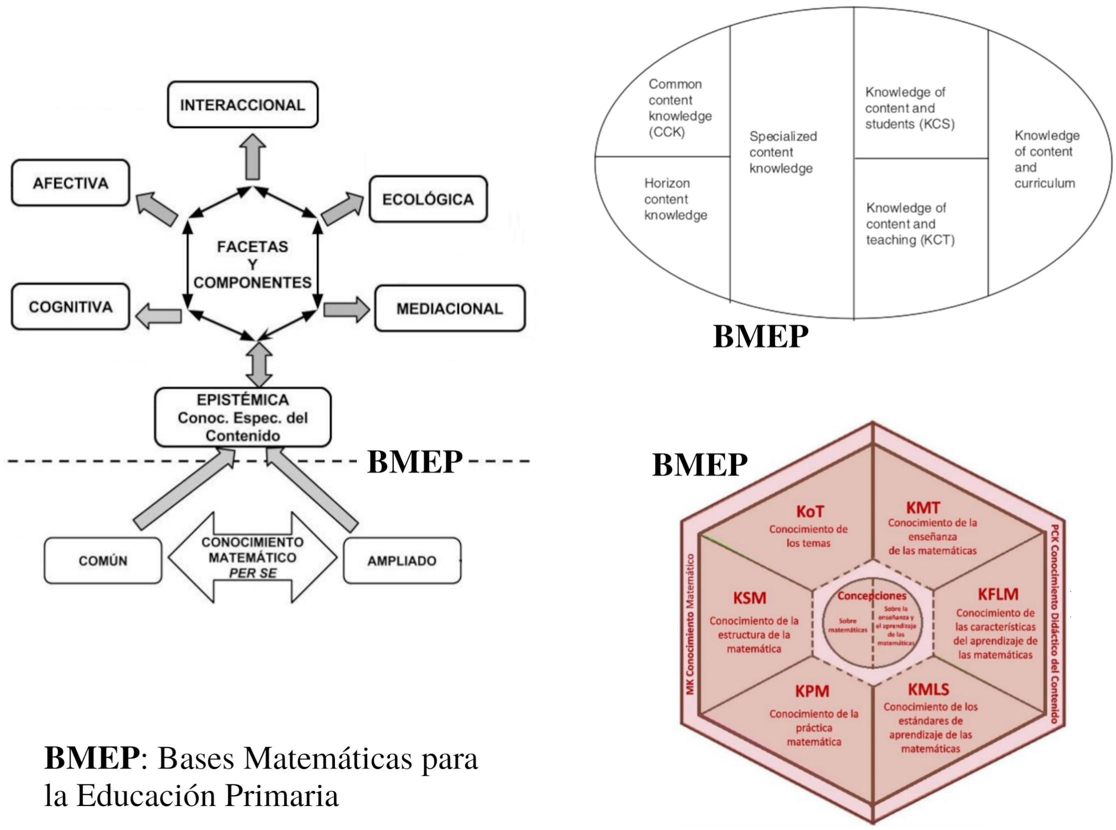


Figura 3.1: Representación idealizada del posicionamiento de la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria” respecto a los modelos CCDM (izquierda), MKT (derecha, arriba) y MTSK (Fuente: Elaboración propia a partir de Godino et al., 2017, Ball et al., 2008 y Vasco et al., 2016).

el trabajo con materiales manipulativos, que es un aspecto destacado de la asignatura. No obstante, es la faceta epistémica del modelo CCDM la que da mayor sentido a la impartición de la materia, ya que es la que pone el foco en el conocimiento de significados, objetos y procedimientos asociados al contenido escolar. En cuanto al modelo MKT (Hill et al., 2008), los tres subdominios del conocimiento del contenido están fuertemente relacionados con "Bases matemáticas para la educación primaria" y, de forma similar a lo que sucede con los otros modelos, también se puede añadir el conocimiento del contenido y la enseñanza (por razones similares). Se pueden esgrimir argumentos similares para establecer la conexión entre el MTSK (Carrillo et al., 2013) y la asignatura: en la componente del conocimiento didáctico del contenido existe cierta relación con el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, mientras que en la componente del conocimiento del contenido, se observa que los tres dominios del modelo se corresponden con destrezas asociadas a "Bases matemáticas para la educación primaria".

En síntesis, se puede afirmar que los modelos de conocimiento del profesorado discutidos permiten ubicar la asignatura como parte del conocimiento deseable para el profesor, principalmente en lo que respecta al conocimiento del contenido. Revisando las componentes de los modelos, se observa que este conocimiento del contenido deseable para el profesorado debe superar el conocimiento de conceptos y aplicación de procedimientos propios de la educación matemática para incluir riqueza de significados y representacione, y conocimiento de conexiones intramatemáticas. Estas ideas se recogerán y ampliarán más adelante.

3.2. El Análisis Didáctico como herramienta para organizar la enseñanza

El Análisis Didáctico es un marco teórico, asociado a una herramienta de planificación, que se ha gestado en el departamento y que, como se ha comentado previamente, subyace a la lógica organizativa de las asignaturas que este imparte en el grado de educación primaria. Surgió con la intención de definir y aglutinar diferentes *organizadores del currículo*, que son "aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (Rico, 1997, p. 45). Esta noción fue introducida para aportar reflexión curricular centrada en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de los temas de la matemática escolar. Para ello, los organizadores del currículo recorren los aspectos fundamentales a tener en cuenta al abordar la planificación de la enseñanza de las matemáticas. Respecto a la cuestión de *qué matemáticas enseñar y cómo entenderlas* consideró antecedentes históricos y significados de los contenidos matemáticos, sistemas de representación que permiten expresarlos, o fenómenos que se describen utilizándolos. Respecto a la cuestión de *qué se espera que el alumnado aprenda*, consideró las expectativas, o las limitaciones de aprendizaje. Respecto a la cuestión de *cómo enseñar matemáticas*, Rico (1997) incluyó el diseño y selección de tareas o uso de materiales y recursos, entre otros.

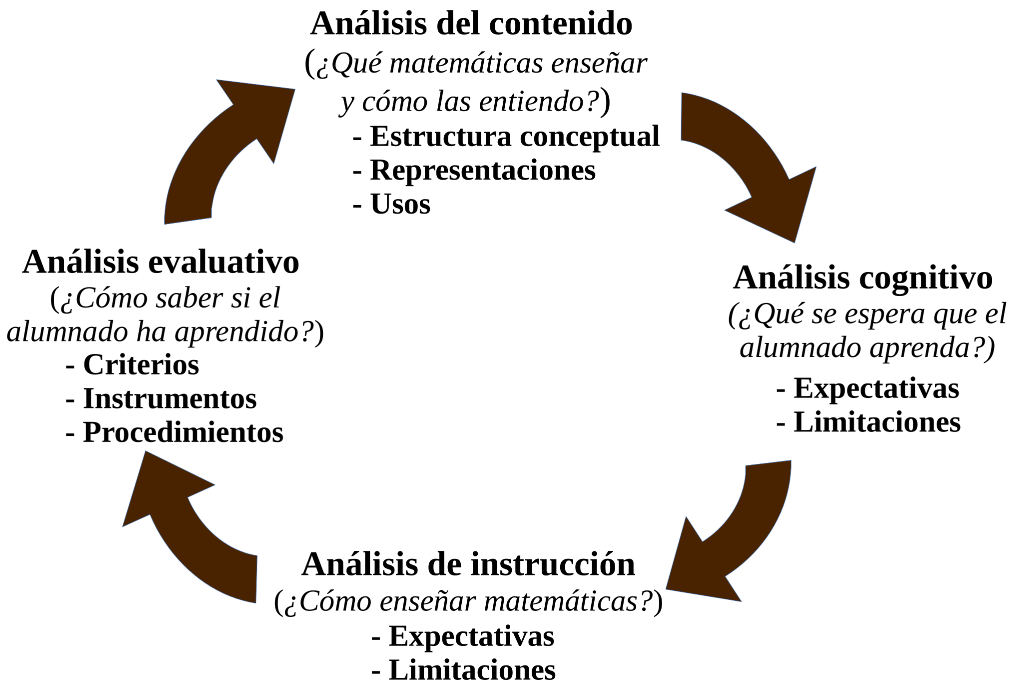


Figura 3.2: Representación de los elementos del análisis didáctico considerados en este proyecto

Las ideas de Rico (1997) fueron recogidas por Gómez (2007) y Lupiáñez (2009), que propusieron un procedimiento cíclico de planificación de la enseñanza vinculado a los organizadores del currículo. Este fue denominado *Análisis Didáctico* y ha ido evolucionando a lo largo de los últimos años. Rico y Moreno (2016) recogieron las ideas y procedimientos asociados al Análisis Didáctico, tal y como se plantean actualmente. Estos se organizan en torno a cuatro procedimientos, o subanálisis, que abordan las dimensiones fundamentales de la planificación curricular: el análisis de contenido, vinculado con los conceptos y procedimientos propios del tema a impartir, el análisis cognitivo, relacionado con los aspectos del aprendizaje propios del tema, el análisis de instrucción, que reflexiona sobre cuestiones de enseñanza y el análisis evaluativo, que se ocupa de la evaluación de la propuesta desarrollada. La Figura 3.2 sintetiza los focos de atención propios de cada análisis, que se describen brevemente a continuación.

El *análisis de contenido* es el procedimiento orientado a indagar en el significado del contenido matemático escolar. Dado que es el subanálisis más relevante para el presente proyecto, se dedica a continuación una subsección específica para especificar sus elementos.

El *análisis cognitivo*, ubicado en la dimensión cognitiva, es el procedimiento orientado a indagar en la problemática del aprendizaje de ese tema matemático por parte de los escolares, e involucra la identificación de dos tipos de elementos. En primer lugar, las *expectativas de aprendizaje*, que en este proyecto se van a interpretar como las acciones observables que los estudiantes son capaces de desarrollar si han desarrollado el aprendizaje esperado. Una expectativa de aprendizaje vinculada al tema de números racionales es "Resolver problemas que involucran números racionales utilizando la representación más adecuada". En segundo lugar, el análisis cognitivo se ocupa de las *limitaciones de aprendizaje*, que incluyen los *errores* o acciones incorrectas cometidas al desarrollar un procedimiento asociado al tema (quedan evidenciadas al observar el trabajo del estudiante) y las *dificultades* o conflictos que pueden sufrir los alumnos y que causan los errores (no son evidentes y solo se pueden conjeturar en virtud del trabajo de los estudiantes).

El *análisis de instrucción* está relacionado con las prácticas de enseñanza. Se trata del procedimiento orientado a seleccionar, diseñar y secuenciar las tareas que pondrá en juego, así como los materiales y recursos idóneos para que los estudiantes alcancen las expectativas de aprendizaje (superando las dificultades). En consecuencia, durante el análisis de instrucción el formador debe obtener (i) un conjunto de *tareas* o actividades que se pondrán en juego para lograr las expectativas de aprendizaje. Cada tarea debe identificar diferentes variables de tarea que permitan conocer su intencionalidad y ubicarla en el contexto del tema: finalidad, expectativas de aprendizaje que se trabajan, complejidad (en orden creciente: reproducción, conexión o reflexión), contenidos con los que está relacionada contexto en el que se enmarca y modos de uso de los conceptos involucrados (contexto y categoría). Por otra parte, el análisis de instrucción permite obtener (ii) el conjunto de *recursos* necesarios para trabajar las tareas y (iii) la *metodología* a seguir para implementarlas, que implica indicar el tipo de agrupamiento, el modo en cómo se plantean las tareas y la organización temporal de las mismas.

El *análisis evaluativo* está relacionado con la revisión de las prácticas de enseñanza desarrolladas como producto de los restantes análisis. Involucra la identificación de (i) *criterios de evaluación*, que describen cómo conocer si se han alcanzado las expectativas de aprendizaje, (ii) *instrumentos de evaluación* que permitan recoger información sobre el desarrollo de la enseñanza y que permitan valorarla y (iii) *procedimientos de evaluación* lo más objetivos y coherentes posibles, que permitan valorar la información recogida y utilizarla para tomar decisiones razonadas de cara a la próxima implementación de la unidad diseñada o al inicio de la planificación del tema siguiente.

Dada su potencia y versatilidad, las herramientas que proporciona el Análisis Didáctico pueden ser interpretadas desde diferentes perspectivas de formación del profesorado y de investigación educativa. Lupiáñez et al. (2007), por ejemplo, emplearon ideas del Análisis Didáctico en el contexto de la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria", mientras que Rojas (2014) desarrolló un análisis de la conexión entre esta herramienta y el modelo MTSK descrito previamente. En ambos casos se contempló el Análisis Didáctico como conocimiento propio de profesorado en formación. Gómez (2002), por su parte enfatizó la validez potencial del Análisis Didáctico para la investigación. Concretamente para la implementación de investigaciones basadas en diseño (Bakker, 2019; Doorman, 2019; Molina et al., 2011), dado que los resultados del análisis evaluativo pueden utilizarse como retroalimentación sobre los demás análisis, generando así un proceso cíclico que también produce conocimiento operativo del profesorado. Estas dos aplicaciones del Análisis Didáctico son pertinentes, pero no corresponden con la utilidad que tiene en el presente proyecto. Aquí se emplea la herramienta con la finalidad de planificar la enseñanza de “Bases matemáticas para la educación primaria”, vista como una asignatura de contenido matemático. De esta manera, los estudiantes están emplazados a desarrollar su conocimiento matemático en el marco del conocimiento del profesorado y el análisis didáctico está al servicio del formador para estimular ese conocimiento matemático. Dadas las características de la asignatura, son las ideas del análisis de contenido las más relevantes para lograr esos objetivos. Se dedica el siguiente apartado a discutirlas con más detalle.

3.2.1. El análisis de contenido

El análisis de contenido constituye la componente del Análisis Didáctico que se ocupa de los conceptos, procedimientos y actitudes involucrados en el tema a desarrollar (Fernández-Plaza, 2016). En este proyecto, el análisis de contenido se organiza en torno a tres dimensiones:
La *estructura conceptual* se refiere al conjunto de relaciones, objetos y procedimientos matemáticos propios del tema. Involucra la identificación de seis tipos de elementos, distribuidos en dos niveles de complejidad (vease tabla 3.1). En el nivel de complejidad más bajo están las *propiedades*, que son las afirmaciones más sencillas sobre los contenidos que deben conocer los estudiantes (por ejemplo, el criterio para distinguir fracciones equivalentes). También se encuentran los *conceptos*, que son los objetos matemáticos a los que se refieren las propiedades (fracciones equivalentes, siguiendo el ejemplo anterior). Finalmente, están los *algoritmos*, que son aquellos procedimientos elementales que permiten trabajar con los conceptos del tema: los algoritmos usuales de la suma, resta, multiplicación o división de fracciones o la obtención de la fracción generatriz de un decimal dado usando una regla estudiada, por ejemplo. En el nivel de complejidad más alto están las *proposiciones*, que son relaciones más complejas que se pueden deducir (regla para obtener la fracción generatriz de un número decimal dado). También se encuentran las *estructuras*, que son los objetos matemáticos que integran diferentes conceptos, propiedades o proposiciones involucradas en el tema (fracción generatriz de un decimal). Por último están las *estrategias*, que son procedimientos más complejos que pueden ser abiertos o dejar a la elección de los propios estudiantes: la división de fracciones usando el modelo de área o la obtención razonada de la fracción generatriz de un decimal periódico puro, por ejemplo. Obsérvese

	Relaciones	Objetos matemáticos	Procedimientos
Mayor complejidad	*Proposiciones*	*Estructuras*	*Estrategias*
Menor complejidad	*Propiedades*	*Conceptos*	*Algoritmos*

Tabla 3.1: Organización de los elementos dentro de la estructura conceptual

que los niveles de complejidad señalados son subjetivos y se deja al formador el criterio para elegirlos. La intencionalidad de introducirlos se basa en incitar a la reflexión sobre qué ideas considera el docente más simples y cuáles más complejas en función de su contexto y de sus objetivos.

Las *representaciones* son las formas de expresión de los diferentes conceptos o estructuras asociadas al tema. Pueden organizarse en función de los sistemas de representación en los que se expresan: verbal (expresiones de tipo "un medio", por ejemplo), manipulativo (sectores circulares de cartulina), pictórico (dibujos de esos sectores), o simbólico (expresiones de tipo "1/2" o 50 %).

Los *modos de uso* son aquellas situaciones propias de ciertos contextos en los que los contenidos del tema son aplicables. En la interpretación del análisis didáctico que se sigue en este proyecto, los modos de uso se van a identificar a través de dos elementos, siguiendo la lógica de dos niveles empleada previamente. En primer lugar, el conjunto de *contextos de uso* en los que el contenido tiene aplicabilidad: personal (saber cuánto queso me sirven si pido "cuarto y mitad" en el supermercado), social (interpretar el dato de que el $45,9\,\%$ de la riqueza mundial está en manos del 0,7 % de la población), profesional (conocer el precio sin IVA de una mercancía recibida si con el 7 % de IVA costó 214 euros) o científico (significado de que el número de reproducción instantáneo de la pandemia del coronavirus sea actualemente 0.9). En segundo lugar, el conjunto de *categorías de uso*, que recoge la abstracción de un conjunto de situaciones en las que la utilidad del contenido queda de manifiesto. La obtención de fracciones de fracciones (2/3 de medio litro de agua) es, por ejemplo, una categoría de uso de la multiplicación de fracciones.

La revisión de las herramientas propias del análisis de contenido revela tres focos de atención fundamentales para comprender los contenidos escolares: estructura conceptual, representaciones y usos. La revisión de las matemáticas propias de primaria desde estos focos de atención será un eje vertebrador de la propuesta didáctica del proyecto que se presenta más adelante.

3.3. Impacto del currículo LOMLOE en la asignatura

La implantación de la LOMLOE ha involucrado un cambio curricular en el nivel de educación primaria que propone una reinterpretación profunda del aprendizaje a diferentes niveles, que tiene alta repercusión en la enseñanza de las matemáticas. De forma específica, El Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (en BOE del 2 de marzo de 2022, en adelante RD 157/2022) introdujo nociones como la de *competencia específicas*, *saberes básicos* o *situaciones de aprendizaje* que no quedan suficientemente explicados por la propia negativa y resultan controvertidos. Además, las concreciones curriculares elaboradas por la Junta de Andalucía, como la proporcionada por la Instrucción 12/2022, de 23 de junio, han generado aún mayor controversia, ya que establecen conexiones entre saberes y criterios de evaluación que limitan en gran medida el alcance de las competencias y pueden interpretarse como contrarias al espíritu del Real Decreto. El resultado es que el profesorado de primaria afronta el desafío de implementar reformas sin disponer de recursos adecuados para tal fin.

Desde nuestra posición de profesorado universitario, en el departamento carecemos de potestad para actuar sobre las prácticas de enseñanza que se desarrollan en los centros de primaria. Sin embargo, sí podemos actuar sobre los futuros maestros a través de la formación inicial que proporcionamos. Para ello, Moreno (2022) señaló que es fundamental primero comprender el contexto en el que surge esta normativa. Desde una perspectiva psicopedagógica, se recoge la tradición de autores como Bruner, Dewey o Freinet, que sitúan al alumnado en el centro del proceso de enseñanza son los precursores, de Ausubel et al. (1983), que discute la necesidad de generar *aprendizaje significativo*, o de Wittrock (1986), que habla de los *sentidos atribuidos* al contenido matemático. Desde una perspectiva institucional, debe tenerse en cuenta el contexto europeo en el que estamos inmersos, en el que desde el Consejo Europeo de Lisboa predomina el enfoque basado en competencias. Bajo esta perspectiva, la formación básica prepara al individuo para un aprendizaje permanente, en el que los contenidos son un vehículo y no una finalidad, lo que impacta sobre las expectativas del aprendizaje: se da un enfoque transversal a la enseñanza, donde los contenidos pasan a ser instrumentos y el fin es la resolución de problemas reales. Estas ideas llevadas a las matemáticas se materializan en conceptos como la *alfabetización matemática*, que es el conjunto de capacidades que permiten al individuo aplicar matemáticas para resolver situaciones en otros contextos (OCDE, 2003, 2013, 2020). Este tipo de aprendizaje matemático es, por tanto, el que se demanda en el contexto europeo actual y el que se evalúa en las pruebas PISA.

Un primer análisis sobre las dos perspectivas descritas descubre el posicionamiento del que parte el currículo LOMLOE: (i) la finalidad de la educación es desarrollar competencias, es decir capacidad de resolver problemas reales, y (ii) desarrollar las competencias genera un aprendizaje significativo. El modo en que estos principios se materializan a través del RD 157/2022 se ilustra en la figura 3.3. Si atendemos a las finalidades de la educación, la primera noción relevante que encontramos es el denominado *perfil de salida*, que proporciona la concreción de los desarrollos mínimos de las competencias clave en cada nivel educativo. Se introducen además las *competencias específicas* dentro de cada materia, que son el elemento de conexión entre dicha materia y las competencias clave. Las competencias específicas de matemáticas incluyen dos focalizadas en la dimensión afectiva de las matemáticas, lo que también supone una novedad. Los criterios de evaluación de las materias, además, se describen como concreciones de las competencias específicas, lo que evidencia la relevancia que esta normativa le concede a estas competencias específicas.

También debe destacarse, por otra parte, que los bloques de contenido han sido reemplazados por *saberes básicos*, que aúnan los conocimientos, destrezas y actitudes cuyo aprendizaje es necesario para adquirir las competencias específicas. La descripción de los saberes básicos en la materia de matemáticas se materializa a través de los *sentidos matemáticos*. En este punto surge el conflicto sobre cómo deben entender el profesorado

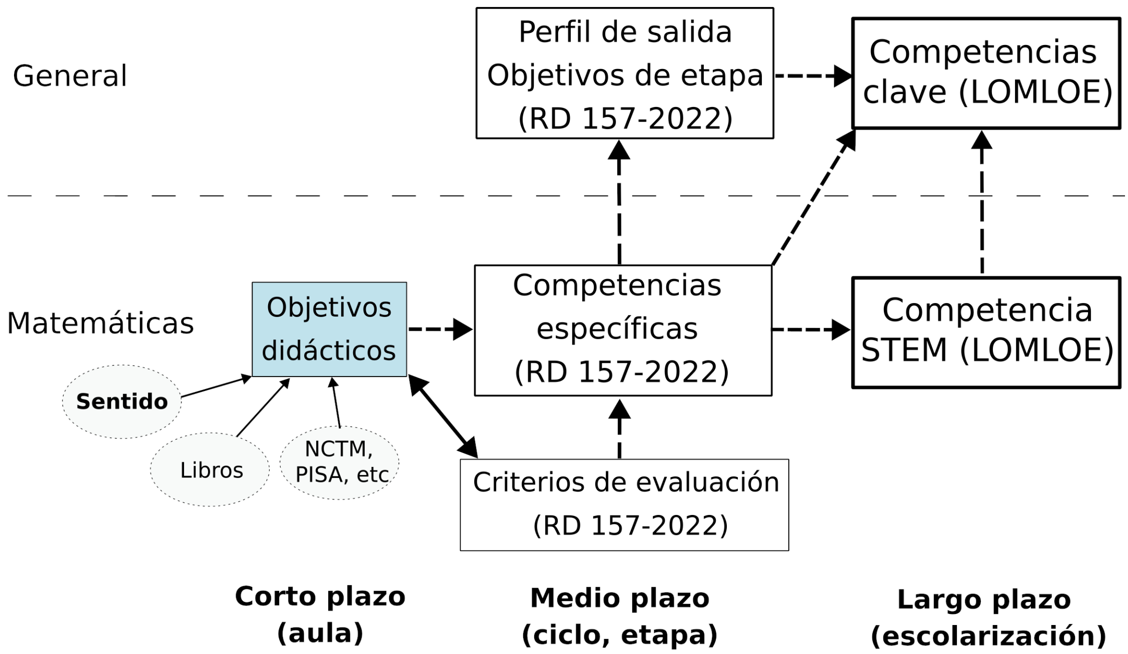


Figura 3.3: Conexiones entre los elementos curriculares establecidos en el RD 157/2022

estos sentidos matemáticos. En el departamento de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada hay cierta tradición bajo la que se interpretan desde el punto de vista cognitivo, de acuerdo a la interpretación de Flores y Rico (2015). Bajo este punto de vista, los sentidos son una característica del alumnado: aprender implica desarrollar un sentido. Sin embargo, el enfoque adoptado en el currículo es similar al propuesto por el Comité Español de Matemáticas (2021), en el que los sentidos son saberes, que incluyen conceptos y contenidos. Ruiz-Hidalgo (2023) proporcionó una elegante intepretación en la que el *sentido* recae sobre los tres agentes del triángulo didáctico: contenido, alumnado y profesorado. Así, el contenido matemático adquiere cierto sentido en una situación, el alumnado tiene que darle sentido, y el profesorado da herramientas que ayudan a dar sentido. En el contexto de la asignatura “Bases Matemáticas para la educación primaria” lo relevante de los sentidos es que añaden el álgebra y la dimensión afectiva al los bloques de contenido usuales hasta ahora. De esta manera, el currículo contempla seis sentidos matemáticos: numérico, de la medida, espacial, algebraico, estocástico y socioafectivo, situación que repercute en el contenido de la asignatura.

Si se atiende a cuestiones metodológicas, el RD 157/2022 introduce las *situaciones de aprendizaje,* que se definen como “situaciones y actividades que implican el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a competencias clave y competencias específicas y que contribuyen a la adquisición y desarrollo de las mismas” (Artículo 2, f). La conjunción de varias situaciones de aprendizaje con una lógica común da lugar a una *unidad de programación*, que debe constituir el elemento básico de la planificación de la enseñanza bajo esta normativa. Otras recomendaciones metodológicas que se hacen están relacionadas con el empleo de *Diseños Universales de Aprendizaje* y con el diseño de situaciones con trasfondo social (pueden verse algunos ejemplos en INTEF. Ministerio de Educación y Formación Profesional., 2022). La implementación de estas ideas en las aulas de primaria está siendo uno de los puntos más conflictivos de la reforma curricular. En cualquier caso, no se prestará atención a ello en este proyecto, ya que es una cuestión más didáctica que de contenido matemático.

En resumen, la normativa LOMLOE introduce diferentes novedades que deben abordarse desde la formación inicial del profesorado. En particular, hay dos elementos que impactan especialmente sobre "Bases matemáticas para la educación primaria": la introducción de los sentidos algebraico y socioafectivo como saberes básicos que deben conocer los alumnos de primaria, y el uso de competencias específicas como elemento de conexión entre las competencias clave y las materias concretas. Se dedican los tres próximos apartados a profundizar en estos dos elementos.

3.3.1. Sentido algebraico y pensamiento computacional

Es indudable que la introducción del sentido algebraico junto con el pensamiento computacional en el currículo de la educación primaria debe repercutir en las asignaturas del grado. En este caso particular, es también necesaria la formación matemática específica del alumnado, ya que una fracción importante del mismo proviene de itinerarios formativos que no incluyen álgebra (Fernández-Ahumada et al., s.f.), o la abandonaron hace al menos tres años. En este sentido, Burgos (2023) señaló que la formación inicial de los maestros debe incluir formación específica en dos sentidos: para formar algebraicamente a los que no conocen los contenidos, y para ampliar la concepción del alumnado sobre el álgebra más a allá del manejo de símbolos y la resolución de ecuaciones. La asignatura "Bases matemática para la educación primaria" es la que recoge la responsabilidad de integrar ideas algebraicas adaptadas a primaria en la formación inicial del profesorado de primaria. Esto recupera la pregunta fundamental que motivó este proyecto, aplicada a este sentido en particular: *¿Qué destrezas algebraicas y computacionales debe tener un maestro de primaria?*

La aproximación que se hace para responder esta pregunta se fundamenta en la reflexión sobre los elementos curriculares que propone el RD 157/2022 para la educación primaria, así como en los marcos teóricos que se derivan de la investigación sobre pensamiento algebraico en este nivel educativo. A continuación se discuten estos elementos y se extraen implicaciones para dar respuestas prácticas a la compleja cuestión planteada. Dado que el pensamiento computacional tiene una entidad propia y se incluyó dentro del algebraico "por cuestiones organizativas" (RD 157/2022, p. 24486, preámbulo de la materia de matemáticas), se le dedica un apartado específico al final de la sección.

Referentes conceptuales y teóricos

El primer foco de atención conceptual que debe señalarse es el propuesto por el Comité Español de Matemáticas (2021), que establece seis *grandes ideas* para el álgebra escolar en los niveles preuniversitarios: *Patrones, Modelo matemático, Operadores, Variable, Igualdad y desigualdad* y *Relaciones y funciones*, que se quedan en cinco en el caso de la educación primaria (la idea "operadores" no se contempla en primaria). El currículo de primera se alinea con esta propuesta pero simplificándola, de manera que el RD 157/2022 define el sentido algebraico a partir de tres componentes:

1. Patrones, que incluye las estrategias de identificación, descripción oral, descubrimiento de elementos ocultos y extensión de secuencias a partir de las regularidades en una colección de números, figuras o imágenes.

2. Modelo matemático, que se refiere al proceso guiado de modelización (dibujos, esquemas, diagramas, objetos manipulables, dramatizaciones...) en la comprensión y resolución de problemas de la vida cotidiana.

3. Relaciones y funciones, que engloba la (i) expresión de relaciones de igualdad y desigualdad mediante los signos $=$ y $\neq$ entre expresiones que incluyan operaciones y la (ii) representación de la igualdad como expresión de una relación de equivalencia entre dos elementos y obtención de datos sencillos desconocidos (representados por medio de un símbolo) en cualquiera de los dos elementos.

El sentido algebraico en el currículo también contiene una cuarta componente, *Pensamiento computacional,* que abordaremos de manera independiente más adelante.

El segundo foco de interés viene de la investigación educativa. Este proyecto se fundamenta específicamente en dos perspectivas que se desarrollan actualmente en el departamento. La primera es el *Razonamiento Algebraico Elemental* (Burgos, 2023), que se fundamenta en dos consideraciones que en otras aproximaciones no están explícitas: (i) el álgebra ha estado siempre en el currículo y constituye un eje vertebrador de los demás sentidos, por lo que puede trabajarse de manera transversal a otros contenidos matemáticos, y (ii) los modos de razonamiento proporcional son propios del álgebra. Esta segunda consideración lleva a proponer cinco *grandes ideas*, donde la inclusión es la novedad más destacable frente a las del Comité Español de Matemáticas (2021) y las del currículo: *Ecuaciones, expresiones, igualdad y desigualdad, Razonamiento proporcional, Pensamiento funcional, Aritmética generalizada* y *Variables.* De acuerdo con estas grandes ideas, el desarrollo del Razonamiento Algebraico Elemental en el alumnado implica desarrollar las siguientes destrezas:

1. Usar de manera sistemática símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones.

2. Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos (fundamentalmente, de los conjuntos de números, las operaciones definidas en éstos y sus relaciones).

3. Identificar patrones y regularidades y emplear funciones para modelizar situaciones intra- o extra-matemáticas.

4. Operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con expresiones simbólico-literales para obtener una respuesta interpretable en la situación modelizada.

Otra aproximación a la enseñanza del álgebra en primaria basada en la investigación es la propuesta que proviene de la corriente *Early algebra* (Kaput, 2008; Soares et al., 2006), que surgió en el contexto de la investigación sobre razonamiento con el fin de conceptualizar los mecanismos del razonamiento inductivo en escolares. Cañadas (2023) señaló que las cuatro *prácticas* algebraicas escolares fundamentales son *Generalizar, Representar, Razonar* y *Justificar* y subrayó cuatro aproximaciones que permiten materializar esas prácticas: los *Patrones,* la *Aritmética generalizada,* las *Funciones* y las *Ecuaciones e inecuaciones.* En este contexto, el aprendizaje del álgebra temprana debe perseguir el desarrollo de las siguientes destrezas (Russell et al., 2017): (1) *Notar un patrón* o regularidad, (2) *Escribir una conjetura*, (3) *Investigar su validez*, (4) *Argumentar* por qué ocurre y (5) *Comparar la conjetura con otras operaciones*, considerando un conjunto de expresiones similares. La reflexión sobre esta y las conceptualizaciones explicadas antes permite dar una primera aproximación a las destrezas algebraicas que sustentan la propuesta desarrollada en este proyecto.

Implicaciones para la asignatura

Para diseñar la propuestas de formación del profesorado en destrezas algebraicas para la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria" se han tomado las concepciones descritas previamente junto con las restricciones de tiempo propias del alto volumen de contenido de la asignatura. Esto ha conducido a configurar las expectativas de aprendizaje del alumnado en torno a cuatro focos de atención:

1. Relaciones binarias, que incluye la interpretación de signos como " $=$ " (resp. " $\leq$ " o " $\geq$ ", " $<$ " o " $>$ " como relaciones de equivalencia (resp. orden) entre los miembros a ambos lados del signo, el uso de la misma para encontrar valores desconocidos que satisfagan relaciones dadas, y el manejo de propiedades de las operaciones para hacer transformaciones sencillas en igualdades y desigualdades.

2. Patrones, que engloba la identificación de atributos variables e invariantes en una secuencia dada (numérica o de objetos), la creación autónoma de secuencias numéricas o de objetos que siguen cierta regularidad dada, la descripción de las regularidades de una secuencia dada usando diferentes representaciones, y la predicción razonada de términos desconocidos de una secuencia dada.

3. Funciones y razonamiento proporcional, que involucra la identificación y representación autónoma, usando letras, de variables dependientes e independientes. También implica las capacidades de expresar relaciones de dependencia funcional (proporcionalidad, relaciones lineales o afines) usando " $=$ " para especificar la relación, de usar estas relaciones para predecir el valor de una variable dependiente a partir de la independiente y de encontrar la inversa de una relación funcional dada.

4. Modelización, que implica la creación autónoma de tablas o gráficos para familiarizarse con fenómenos de la vida cotidiana, la representación con lenguaje algebraico de situaciones contextualizadas y la resolución de ecuaciones para extraer conclusiones sobre dichas situaciones, y la creación de enunciados que se resuelvan utilizando ecuaciones, tablas o gráficas.

Las expectativas de aprendizaje para la asignatura que se derivan de estos focos de atención se concretan en el apartado dedicado a las expectativas de aprendizaje del siguiente capítulo, y se especifican a nivel de aula en la exposición del tema elegido (parte final de la presente memoria).

Pensamiento computacional e implicaciones para la asignatura

Aunque la integración del pensamiento computacional en la enseñanza resulta razonable *per se*, la relevancia que tiene hoy en día la tecnología hace que esta integración sea indispensable. Es más discutible si este pensamiento computacional es o no una competencia de índole matemática, lo que conduce a la reflexión sobre qué matemáticas hay involucradas en el pensamiento computacional (NCTM, 2003), y si esas matemáticas son de naturaleza algebraica.

En el planteamiento del Comité Español de Matemáticas (2021), el pensamiento computacional no se integra en los sentidos matemáticos, ya que no se identifica con contenido matemático escolar. No obstante, se reconoce la pertinencia de su aprendizaje más allá de su conexión con la tecnología, debido a que el pensamiento computacional involucra procesos de análisis y razonamiento propios que, en algunos casos, guarda conexión con el pensamiento matemático: *abstracción de patrones* a partir de situaciones reales, descomposición de procesos en otros más sencillos, o *determinación de las herramientas* que mejor se adecúan a cierto problema.

El RD 157/2022, por su parte, confiere al pensamiento computacional la categoría de saber básico, y lo integra como componente del sentido algebraico (aunque, como se ha señalado previamente, lo hace por cuestiones organizativas). Esta componente incluye un único descriptor, *Pensamiento computacional,* que hace mención a estrategias para la interpretación de algoritmos sencillos (rutinas, instrucciones con pasos ordenados, etc). No obstante, y al igual que el CEMat, la normativa curricular reconoce el carácter procesual de este tipo de pensamiento y proporciona una competencia específica dedicada expresamente a trabajar las destrezas asociadas, que incluyen la organización de datos, la descomposición de problemas en partes, la generalización de patrones y la aplicación y creación de algoritmos. Se describe con más precisión en la sección dedicada a las competencias específicas.

En virtud de estas consideraciones, se reconoce la pertinencia de trabajar destrezas asociadas al pensamiento computacional de forma transversal a los contenidos de la asignatura. De forma específica, se propone organizar las expectativas de aprendizaje del alumnado en torno a tres focos de atención:

1. Ejecutar conjuntos de pasos estructurados, que incluye acciones como resolver operaciones utilizando algoritmos (los usuales u otros alternativos explicados o ejemplificados previamente), ubicarse o recorrer trayectorias en el espacio a partir de instrucciones, trazar formas o construcciones geométricas a partir de propiedades proporcionadas verbalmente, ejecutar transformaciones de figuras en el plano a partir de una definición dada o seguir secuencias de pasos para construir mosaicos utilizando herramientas de geometría dinámica.

2. Crear reglas generales o modificarlas a partir de situaciones particulares. Engloba acciones como crear sistemas de numeración que verifiquen ciertas propiedades, explicar una regla general para el cambio de base entre sistemas de numeración, crear y enunciar reglas personales para operar con materiales manipulativos en diferentes bases, deducir los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas a partir de la manipulación (de naturales con el ábaco, de fracciones con las tiras o con los modelos de área), o proporcionar instrucciones para definir figuras / explicar trayectorias verbalmente a partir de representaciones pictóricas.

3.3.2. Sentido socioafectivo

La inclusión del sentido socioafectivo es coherente con la triple interpretación como conocimientos, destrezas y actitudes que tienen los saberes básicos. Además, una revisión detallada de currículos anteriores pone de manifiesto que la consideración de la dimensión afectiva como una característica a desarrollar en el alumnado de primaria no es novedosa (el bloque 1 del currículo de la LOMCE es un ejemplo de ello). Sin embargo, la complejidad de tener en cuenta aspectos relacionados con este sentido en las prácticas de enseñanza de las matemáticas es mayúscula, por lo que es de interés analizar la normativa y mirar a la investigación para conocer qué tipo de destrezas debemos trabajar con los estudiantes del grado de maestro en una asignatura como “Bases matemáticas para la educación primaria”.

Referentes conceptuales y teóricos

Al atender a la normativa curricular de la LOMLOE se observa que, al igual que sucede con el pensamiento computacional, esta aborda la dimensión afectiva a través de dos elementos curriculares. Desde los saberes básicos, el sentido socioafectivo incluye dos componentes:

1. Creencias, actitudes y emociones, que está relacionada con la estrategias de identificación y expresión de las emociones ante las matemáticas y con la curiosidad e iniciativa en el aprendizaje de las matemáticas.

2. Trabajo en equipo, inclusión, respeto y diversidad. Esta componente incluye, en primer lugar, dos descriptores generales, uno de ellos dedicado a la identificación y rechazo de actitudes discriminatorias, al desarrollo de actitudes inclusivas y la aceptación de la diversidad, mientras que el segundo se refiere a la participación activa en el trabajo en equipo, interacciones positivas y respeto por el trabajo de los demás. En segundo lugar, esta componente del sentido socioafectivo también contiene un descriptor específico para las matemáticas, conectado con su contribución a los distintos ámbitos del conocimiento humano y a la adopción de una perspectiva de género.

Desde las competencias específicas, el RD 157/2022 proporciona dos competencias específicas focalizadas en la dimensión afectiva. La séptima competencia, alineada con la primera componente del sentido socioafectivo, se focaliza en la aceptación del error, la perseverancia y el gusto por las matemáticas. Por su parte, la octava competencia está vinculada a la segunda componente, y se focaliza en el respeto por los demás, el trabajo en equipo y la creación de relaciones saludables. En síntesis, se observa que la normativa adopta dos focos principales para trabajar la dimensión afectiva. Por una parte,la gestión de las emociones propias, aceptación del error y perseverancia en el aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, la gestión de la interacción con los iguales para promover un entorno inclusivo.

Una mirada a la investigación educativa sobre el dominio afectivo en matemáticas permite matizar los dos focos de atención en los que se centra el currículo. En este sentido, Gómez Chacón (2023) destacó el carácter cíclico del esquema emociones-actitudes-creencias, de manera que las emociones cristalizan en actitudes, estas se consolidan en creencias, y las creencias condicionan nuevas emociones. Debe también destacarse la diferenciación entre actitudes *hacia la matemática*, que son aquellas en las que incide la normativa (primera componente del sentido, séptima competencia), y actitudes *matemáticas*, que son las que debe adoptar el alumnado para abordar situaciones desde el punto de vista del matemático. En este sentido, Gómez Chacón (2023) hizo hincapié en la *identidad* del alumnado como matemático, que en la formación de profesores debe ampliarse a la identidad como profesor de matemáticas (Gómez-Chacón, 2020).

Teniendo en cuenta estas consideraciones se pueden ampliar los aspectos afectivos a tener en cuenta en la formación inicial de maestros hasta siete dimensiones. Las tres primeras son específicas para las matemáticas, a saber (i) *Perseverancia*, aceptación del error o apertura a cambios de estrategia (Gómez-Chacón & Barbero, 2020), (ii) *Curiosidad* y percepción de las matemáticas como un reto, e (iii) *Identidad* de los futuros maestros: como "matemático" (resolutor de problemas) y como profesor de matemáticas. Las cuatro restantes pueden surgir en el aula de matemáticas, pero no son específicas: (iv) *Trabajo en equipo, Inclusión, Gestión de conflictos* y cuestiones de *Género.*

Abarcar los último cuatro aspectos señalados puede sobrepasar la competencia del formador de profesorado, al menos desde la asignatura de "Bases matemáticas para la educación primaria", por lo que el proyecto centra su atención en los tres primeros focos, como se describe a continuación.

Implicaciones para la asignatura

De forma coherente a los aspectos marcados por el currículo y matizados por la investigación, se propone organizar las expectativas de aprendizaje de los estudiantes de grado en torno a tres focos de atención:

1. Perseverancia, que incluye actitudes como la aceptación del error o la apertura a cambios de estrategia. Este foco se puede trabajar a partir de tareas en las que se prohíba el uso de algunas herramientas como la regla de tres o con secuencias de problemas de dificultad creciente, en las que se vayan eliminando o complicando datos numéricos, por ejemplo.

2. Curiosidad, que tiene que ver con la percepción de matemáticas como reto. Para trabajar este foco es fundamental trabajar con niveles de dificultad adaptables para que las situaciones propuestas no sean inaccesibles ni excesivamente sencillas. Por ejemplo, una tarea en la que se propongan figuras geométricas sencillas, se pida dibujar su *centro* y se vayan complicando las figuras para obtener una definición de "centro" de un polígono cualquiera.

3. Identidad, que se relaciona con la percepción que tiene un estudiante entre él y las matemáticas (o la enseñanza de las matemáticas). Para trabajar la identidad como resolutor de problemas, por ejemplo, se sugiere proponer un conjunto de tareas abiertas con diferentes soluciones, discutir diferentes estrategias, validarlas y proponer que cada estudiante indique la que más le convence, su competencia sobre la tarea y sus emociones en relación a la misma.

Estos focos de atención deben atenderse de forma transversal, como sugieren los ejemplos que se han mencionado. No obstante, la implementación de este tipo de actividades es compleja, y debe trabajarse con más profundidad.

3.3.3. Competencias específicas. Pertinencia en la asignatura y ejemplos

La introducción de competencias específicas de matemáticas en el currículo de la LOMLOE repercute sobre la asignatura de "Bases matemáticas para la educación primaria" en dos sentidos que se tendrán en cuenta en este proyecto. Desde el punto de vista de la planificación de la asignatura, en primer lugar, las competencias específicas dan una clave para organizar las expectativas de aprendizaje de la misma. En efecto, en la normativa curricular de primaria, las competencias específicas sirven de conexión entre la concreción de las materias concretas (en este caso, las matemáticas) y la generalidad de las competencias clave. Las competencias asociadas al grado de educación primaria son igualmente generales y no está claro cómo se pueden trabajar desde la asignatura. Recoger las ideas de las competencias específicas ofrece la oportunidad de establecer expectativas de aprendizaje intermedias que relacionen esas competencias con las destrezas que se trabajan en el día a día del aula, lo que facilita la labor del formador de maestros.

Desde el punto de vista del aprendizaje de los futuros maestros, en segundo lugar, las competencias específicas dan ideas concretas sobre el tipo de destrezas matemáticas transversales a los contenidos que debe desarrollar el alumnado. Llevada al contexto formativo de los estudiantes del grado de primaria, la descripción de competencias específicas recupera la idea de que el conocimiento del profesorado deber ir más allá de los contenidos que imparte.

Esta idea se recoge en los modelos de conocimiento del profesorado discutidos previamente, que señalan destrezas como una comprensión más profunda de los contenidos (Rowland et al., 2005), el conocimiento de su estructura matemática, incluyendo la conexión entre diferentes conceptos Carrillo et al. (2013), el manejo de contenidos académicos superiores (Scheiner, 2015), el dominio de procesos y de diversidad de significados asociados a los conceptos matemáticos que se enseñan (Godino et al., 2017), o el desarrollo de un conocimiento especializado asociado a las prácticas de enseñanza (Hill et al., 2008). Además, el contexto educativo predominante en la actualidad está basado en el desarrollo de competencias, que afecta a todos los niveles educativos desde la educación primaria hasta las enseñanzas universitarias. En este escenario, la formación universitaria de los estudios de grado debe contribuir al desarrollo de la *competencia matemática* de los futuros maestros. De esta manera, un planteamiento de la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista competencial será de utilidad en el contexto de la asignatura no solo por su contribución al desarrollo matemático de los estudiantes del grado de primaria, sino también porque puede aportar conocimiento didáctico orientado a la futura labor de maestros de matemáticas por competencias.

A continuación, se describen brevemente algunos ejemplos de competencias específicas para ilustrar el tipo de destrezas deseables en el contexto formativo de la asignatura.

Procesos del National Council of Teachers of Mathematics

Una de las propuestas pioneras a la hora de definir destrezas matemáticas transversales a los contenidos fue la del National Council of Teachers of Mathematics, que estableció un conjunto de principios sobre la enseñanza de las matemáticas y organizó las expectativas de aprendizaje de los escolares desde el nivel de educación infantil hasta el bachillerato en torno a estándares, entendiendo los estándares como "descripciones de lo que la enseñanza matemática debería lograr que los estudiantes conozcan y hagan" (NCTM, 2003). Concretamente, NCTM (2003) establece dos grupos de estándares: de contenidos y de procesos. Los estándares de contenidos se refieren a los conceptos y procedimientos escolares habituales y se estructuran en cinco bloques: *números y operaciones, álgebra, geometría, medida* y *análisis de datos y probabilidad*. A su vez, los procesos son capacidades matemáticas transversales a los contenidos que deben desarrollarse en la etapa escolar. NCTM (2003) establece cinco bloques de estándares vinculados a los procesos: *resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones* y *representación*.

Competencias específicas del currículo LOMLOE de primaria

La nueva normativa curricular proporciona una segunda conceptualización que resulta de utilidad. En su Artículo 2.c), el RD 157/2022 define las competencias específicas como "desempeños que el alumnado debe poder desplegar en actividades o en situaciones cuyo abordaje requiere de los saberes básicos de cada área o ámbito". Esta definición conduce a ocho competencias vinculadas a la materia de matemáticas, que se pueden sintetizar de la siguiente manera:

1. Interpretar las matemáticas en la vida cotidiana.
2. Resolver problemas e interpretar/validar soluciones.
3. Razonar: formular/comprobar conjeturas y plantear problemas.
4. Pensamiento computacional: Sistematizar procesos/Usar tecnología.
5. Establecer conexiones intra y extra-matemáticas.
6. Comunicar y representar.
7. Aceptar el error y perseverar.
8. Crear relaciones saludables y trabajar en equipo.

Estas competencias se distribuyen en tres grandes grupos: las competencias específicas 1, 2, 3, 5 y 6 son de índole puramente matemáticas, y están desarrolladas de acuerdo al esquema desarrollado por el NCTM (2003). Por su parte, la cuarta competencia está dedicada al pensamiento computacional, mientras que las dos últimas se ocupan del dominio afectivo, como se discutió previamente.

Capacidades matemáticas del marco PISA

Otra concepción de interés sobre las acciones que debe desarrollar un individuo matemáticamente competente es la alfabetización matemática, utilizada para las evaluaciones PISA (OCDE, 2003, 2013, 2020). En el marco PISA 2012, la alfabetización matemática es "la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las Matemáticas en distintos contextos" (OCDE, 2013). El desarrollo adecuado de los procesos de formulación, empleo e interpretación de las matemáticas está basado en siete capacidades que subyacen a la ejecución de los procesos y son transversales a los conceptos usuales en Matemáticas: (i) *comunicación*, que permite reconocer un problema, expresarlo adecuadamente y transmitir las soluciones encontradas; (ii) *matematización*, que implica asociar un problema matemático adecuado a un problema real; (iii) *representación*, que involucra la comprensión y uso competente de diferentes sistemas de representación de situaciones reales o ideas matemáticas; (iv) *razonamiento y argumentación*, que conlleva extraer conclusiones y elaborar justificaciones matemáticas; (v) *diseño de estrategias para resolver problemas*, que capacita al individuo para utilizar heurísticos o establecer planes a la hora de abordar una situación problemática; (vi) *uso de lenguaje simbólico, formal y técnico y de operaciones*, que es fundamental para la aplicación de las matemáticas a la resolución de problemas; y (vii) *uso de herramientas matemáticas*, que habilita para utilizar instrumentos de medida, de dibujo o tecnología para desarrollar los procesos matemáticos.

Las competencias matemáticas del proyecto KOM

Una última aproximación a las competencias específicas fue introducida por Niss y Højgaard (2011) y consolidada por Niss y Højgaard (2019). Este enfoque propone una noción de competencia matemática basada en el desarrollo de ciertas competencias[1], que los autores definen como "las capacidades para actuar de forma apropiada en situaciones que involucran cierto tipo de desafío matemático" (p. 49). De esta forma, se describen ocho competencias matemáticas, que quedan organizadas en torno a dos grupos. Cuatro de ellas están relacionadas con la habilidad de plantear y responder preguntas relacionadas con las matemáticas: (i) *pensamiento matemático*, que involucra conocer las preguntas propias de las matemáticas, plantearlas y saber qué tipo de respuesta es esperable; (ii)*manejo de problemas matemáticos*, que involucra detectar, formular y acotar el alcance de diferentes problemas matemáticos tanto puros como aplicados y resolver problemas ya formulados; (iii)*modelización*, que involucra trabajar con modelos existentes y desarrollar otros propios; y (iv) *razonamiento*, que involucra la capacidad de seguir y evaluar razonamientos dados, verbalmente o por escrito. Las últimas cuatro competencias son las que capacitan para manejar herramientas y lenguaje matemático: (v) *representación* que involucra la capacidad de cambiar entre sistemas de representación y elegir la más adecuada en función de la situación a resolver, (vi) *simbolismo y formalismo,* que involucra la capacidad de trabajar con lenguaje simbólico, (vii) *comunicación*, que involucra la capacidad de interpretar y expresar ideas matemáticas dada en diferentes formatos y (viii) *ayudas y herramientas*, que involucra utilizar de forma reflexiva diferentes herramientas y recursos manipulativos.

Implicaciones para la asignatura

La revisión de los diferentes marcos de competencias específicas en matemáticas revela puntos en común que deben considerarse en la planificación de "Bases matemáticas para la educación primaria". En primer lugar, tres de las cuatro propuestas incluyen explícitamente competencias relacionadas con conexiones intramatemáticas o con el pensamiento matemático, lo que pone de relevancia la necesidad de que los futuros maestros conozcan la **estructura conceptual** del contenido matemático sobre los que trabaja. En segundo lugar, todas las propuestas manifiestan expresamente la relevancia del manejo y conexión de diferentes **representaciones** de los contenidos escolares, cuestión que es también capital para el futuro profesorado ya que el conocimiento de diferentes representaciones de un concepto matemático le proporciona más herramientas para abordar la enseñanza del concepto. De igual manera, todos los marcos recogidos enfatizan la importancia de la aplicación de las matemáticas a contextos reales, por lo que todos consideran que conocer **los usos** de un contenido involucra un mayor nivel de competencia en la aplicación del contenido. En el caso de los maestros en formación, esta diferencia de nivel es más notable, en tanto que el dominio de múltiples usos capacita al docente para crear mayor cantidad y calidad de ejemplos y diseñar tareas que den sentido al contenido matemático que enseñan.

[1] Los autores hablan de *competencies* que conforman la *competence*. Por tanto, son las *competencies* las que hacen el papel de competencias específicas

3.4. Implicaciones. Principios del diseño

Una vez revisados los aspectos teóricos considerados, que fueron motivados por los antecedentes de la propuesta, se pueden extraer una serie de implicaciones sobre la planificación de la asignatura. Estas, que se describen a continuación, constituyen los principios del diseño del presente proyecto.

1) **Necesidad de revisar la planificación de la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria",** con el fin de adaptar la educación matemática de los futuros maestros al espíritu de la nueva normativa curricular. El curso pasado ya se dieron algunos pasos en esa dirección, como la organización de un Equipo Docente para debatir aspectos conceptuales y teóricos, algunos de los cuales se han incorporado a este proyecto. Esta acción culminó en la reestructuración del temario en la guía docente de la asignatura (el Anexo C muestra las guías docentes de los dos últimos cursos con el fin de ilustrar esta reestructuración) y ahora se hace necesario consolidar la distribución de contenidos propuesta y materializarla con material docente y recursos que la hagan efectiva. Mi posición como coordinador de la asignatura me lleva asumir el liderazgo en este sentido.

2) **Necesidad de integrar el sentido algebraico, el pensamiento computacional y el sentido socioafectivo** en la asignatura. De forma coherente con las discusiones presentadas, se ha estimado que las destrezas asociadas al sentido algebraico deben tener un espacio específico, mientras que el pensamiento computacional y la dimensión afectiva pueden trabajarse de forma transversal a lo largo de las unidades de trabajo.

3) **Pertinencia de introducir competencias específicas** en la asignatura, que conecten los con la generalidad de las competencias asociadas a la misma, y que introduzcan destrezas matemáticas que superen el conocimiento del contenido propio de primaria.

4) **Idoneidad del Análisis Didáctico como herramienta para de diseño** coherente con el resto de implicaciones. En particular, se ha observado que los organizadores propios del análisis de contenido, a saber, estructura conceptual, representaciones y usos, están estrechamente relacionados con competencias específicas de interés en la asignatura. Esta coincidencia es, además, consistente con la interpretación que dio Ruiz-Hidalgo (2023) de sentido matemático, que se construye a partir de los mismos organizadores. Por tanto, resulta idóneo organizar la reflexión sobre el contenido matemático de los futuros maestros en torno a su estructura conceptual, sus representaciones y sus usos. El temario de la asignatura "Bases matemáticas para la educación primaria" que se propone sigue este enfoque, tal y como se muestra en el siguiente capítulo.

Elementos curriculares

Este capítulo describe el conjunto de contenidos, expectativas de aprendizaje, aspectos metodológicos y de evaluación que se proponen en el presente proyecto docente de la asignatura "Bases matemáticas para la Educación Primaria". En todas las secciones del capítulo se parte de la guía docente de la asignatura, que es el referente institucional de la propuesta y se concretan los elementos curriculares según las implicaciones derivadas en el capítulo anterior.

4.1. Contenidos

4.1.1. Breve descripción de contenidos (según la memoria de verificación del grado)

Estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos de los mismos, utilizando materiales y recursos sobre los bloques de matemáticas de Educación Primaria: Números y operaciones; La medida, estimación y cálculo; Geometría (las formas y figuras y sus propiedades); Tratamiento de la información. Azar y probabilidad. Los contenidos transversales de matemáticas en Educación Primaria: Sentido numérico, Resolución de problemas, Uso de las nuevas tecnologías en matemáticas, Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

4.1.2. Temario detallado de la asignatura

A continuación se proporciona la descripción el temario que establece la guía docente. El Anexo D muestra una propuesta de concreción de los mismos para llevarlos al aula.

A) En gran grupo

Unidad 1: Números y álgebra

1.1. Números. Clasificación, propiedades, representaciones y usos
1.2. Interpretación de las operaciones. Planteamiento y resolución de problemas aritméticos
1.3. Estrategias de cálculo y algoritmos. Propiedades de los números y las operaciones

1.4. Patrones y relaciones. Interpretación y representaciones.

Unidad 2: Geometría
2.1. Elementos geométricos en el plano y en el espacio. Representaciones y visualización
2.2. Propiedades de figuras planas y cuerpos: Modelización geométrica
2.3. Transformaciones en el plano y regularidades
2.4. Razonamiento y prueba en Geometría

Unidad 3: Medida
3.1. Percepción de las magnitudes escolares: longitud, superficie, volumen, amplitud, masa, capacidad, tiempo y dinero
3.2. Unidades de medida: tipos, elección de unidades y conversión
3.3. Medición directa. Estrategias personales
3.4. Medición indirecta. Interpretación de las fórmulas escolares
3.5. Estimación de medidas

Unidad 4: Estadística y probabilidad
4.1. Estudios estadísticos. Recogida de información, tipos de datos y variables
4.2. Representación de datos: tablas, gráficos y medidas estadísticas. Interpretaciones
4.3. Extracción de conclusiones e inferencia estadística
4.4. Percepción de fenómenos aleatorios y cuantificación de la incertidumbre

Como se puede ver, la guía organiza los contenidos en cuatro unidades: números y álgebra, geometría, medida y estadística y probabilidad. En virtud de la discusión teórica hecha, se ha considerado los cuatro focos obtenidos sobre destrezas algebraicas son lo suficientemente relevantes como para dedicar una sección de la primera unidad a destrezas algebraicas. No obstante, el carácter transversal del sentido algebraico manifestado por Burgos (2023) está presente de manera transversal en otras unidades. De igual manera, el pensamiento computacional y el sentido socioafectivo estarán presentes de forma transversal, como se indicó previamente en el marco teórico.

B) En seminarios de grupos reducidos

Las prácticas están asociadas a los cuatro bloques básicos de contenido (Aritmética, Geometría, Magnitudes y su medida y Estadística y probabilidad) y se realizarán a través del uso de materiales manipulativos y/o recursos informáticos. Este diseño de prácticas de laboratorio persigue un doble objetivo: En primer lugar, se pretende que los estudiantes, en pequeños grupos y de manera autónoma, exploren y experimenten actividades matemáticas para introducirse en el trabajo con nuevas nociones matemáticas o para profundizar en el estudio de nociones ya introducidas en sesiones anteriores- En segundo lugar, estas actividades contribuyen a conocer y utilizar un gran número de materiales y recursos, tanto manipulativos como tecnológicos, que pueden emplearse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación primaria.

Los núcleos temáticos de los cuatro bloques de prácticas se corresponden con los bloques de contenidos de la Educación Primaria:

- ✓ Aritmética: Sistemas de numeración; cálculo: algoritmos y métodos; problemas aritméticos; fracciones y decimales.
- ✓ Geometría: Polígonos: clasificación y propiedades; patrones y formas; poliedros: clasificación y elementos básicos; transformaciones geométricas.
- ✓ Magnitudes y medida: Medidas directas e indirectas; instrumentos de medida; sistema métrico decimal.
- ✓ Estadística y probabilidad: Organización de datos; interpretación de de información en medios de comunicación; fenómenos relacionados con el azar.

C) Prácticas de campo

Las prácticas a realizar en el exterior tendrán un carácter más trasversal e interdisciplinar que las prácticas de laboratorio. En el desarrollo de estas prácticas podrán estar implicadas otras áreas de conocimiento. Como ejemplos de algunas prácticas que se pueden realizar citamos dos: itinerarios fotográficos y visitas al Parque de las Ciencias o centro similar

4.2. Expectativas de aprendizaje

La guía docente de la asignatura (véase el Anexo C) establece dos referencias sobre las expectativas de aprendizaje que deben desarrollar los estudiantes mientras cursan las "Bases matemáticas para la educación primaria": Las competencias generales y específicas fijadas del plan de estudios (Universidad de Granada, 2009) y que están vinculadas a la asignatura, y los resultados de aprendizaje. Además, la discusión sobre los aspectos teóricos motivados por los antecedentes de este proyecto ha dejado de manifiesto la conexión de la asignatura con determinados dominios del conocimiento del profesorado. Por otra parte, se ha argumentado la pertinencia de fijar expectativas de aprendizaje intermedias que enlacen las de largo plazo (como son las competencias de la asignatura, los resultados de aprendizaje y estos dominios de conocimiento del profesorado) con el trabajo de clase.

Esta situación ha llevado a definir un conjunto de expectativas de aprendizaje estructuradas en torno a tres niveles de concreción:

i) **Criterios de evaluación,** que son un conjunto de seis expectativas de aprendizaje generales que estructuran a las demás en torno a los elementos del análisis de contenido. Dos de estos criterios de evaluación están relacionados con los conceptos y procedimientos matemáticos de primaria (conocimiento de *estructura conceptual*), otros dos con el manejo autónomo de diferentes *representaciones* y las dos últimas con la resolución de problemas presentados en contextos reales (conocimiento de *modos de uso*).
Nótese que se ha escogido el término *criterio de evaluación* para designar este nivel de concreción por dos razones. La primera es que el término "Competencias

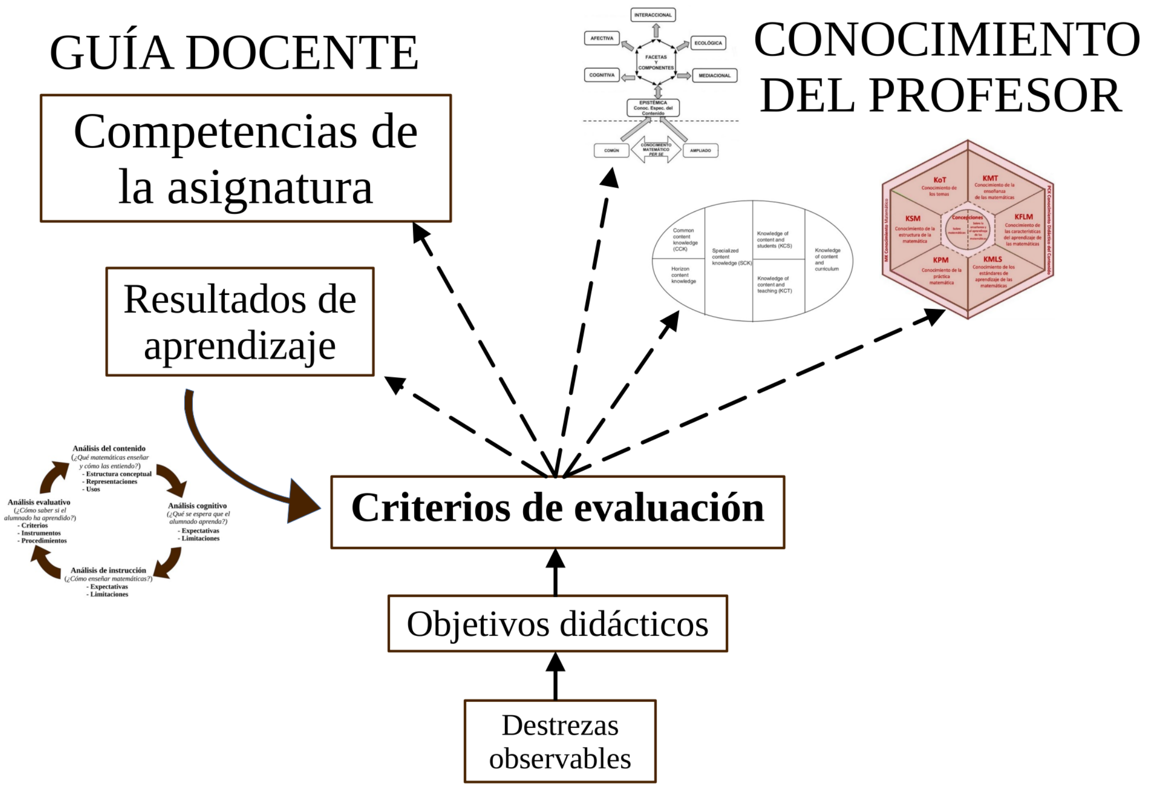


Figura 4.1: Organización de las expectativas de aprendizaje que se contemplan en el proyecto

específicas” en el contexto universitario ya se utiliza con un sentido más general (son específicas del grado universitario, y no de la materia), por lo que se optó por evitar ambigüedades. En segundo lugar, se busca utilizar estas seis expectativas como referentes de la evaluación, respetando así también la lógica del currículo de primaria, y el término escogido es idóneo para reflejar esta intención.

ii) **Objetivos didácticos,** que describen marcan un nivel de concreción intermedio entre los criterios de evaluación y las expectativas que se pueden trabajar en el aula.

iii) **Destrezas observables,** que son estas expectativas que se pueden trabajar directamente a partir de tareas o prácticas.

La Figura 4.1 refleja las conexiones entre las expectativas de aprendizaje de referencia para la asignatura.

4.2.1. Expectativas de aprendizaje de la guía docente

A continuación, se van describiendo todas ellas, desde las competencias y los resultados esperables del aprendizaje incluidos en la guía docente, hasta los criterios de evaluación y los objetivos didácticos de las cuatro unidades. La concreción de las destrezas observables se omite del cuerpo de texto, para evitar complejidad excesiva, pero se muestran en el Anexo E, donde puede consultarse.

Competencias generales y específicas

El conjunto de competencias generales y específicas que recoge la guía docente de la asignatura son las siguientes:

CG01. Analizar y sintetizar la información.
CG05. Comunicar oralmente y por escrito con orden y claridad.
CG06. Buscar, seleccionar, utilizar y presentar la información usando los medios tecnológicos adecuados.
CG08. Trabajar en equipo.
CG13. Investigar y seguir aprendiendo con autonomía.

CE01. Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
CE09. Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible
CE11. Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación. Discernir selectivamente la información audiovisual que contribuya a los aprendizajes, a la formación cívica y a la riqueza cultural.
CE50. Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones especiales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.)
CE52. Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas
CE53. Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana
CE55. Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes.

El desarrollo de estas competencias se considera también ligado a los propósitos enunciados en la Agenda 2030 de Naciones Unidas como Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) (UNESCO., 2015). Específicamente con tres de ellos:

ODS 4. *Educación de calidad:* Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos.
ODS 5. *Igualdad de género:* Lograr la igualdad entre los géneros y empoderar a todas las mujeres y las niñas.
ODS10. *Reducción de desigualdades:* Promover la inclusión social, económica y política de las personas.

Resultados esperables del aprendizaje

La guía docente también propone los siguientes resultados esperables del aprendizaje:

RE01.Conocer y relacionar los principales conceptos, estructuras y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de Educación Primaria.
RE02. Comprender y emplear adecuadamente los hechos y las propiedades de los conceptos y estructuras matemáticos.
RE03. Utilizar correctamente procedimientos matemáticos de forma escrita y simbólica.
RE04. Analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas.
RE05. Manejar y relacionar los diferentes modos de representar los conceptos y procedimientos matemáticos propios de Educación primaria.
RE06. Modelizar fenómenos de diferentes disciplinas con nociones y herramientas matemáticas básicas.
RE07. Enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos.
RE08. Utilizar modelos manipulativos, gráficos, simbólicos y tecnológicos para expresar relaciones, propiedades y operaciones matemáticas.
RE09. Emplear el lenguaje simbólico en matemáticas y relacionarlo con el lenguaje cotidiano.
RE10. Conocer y manejar la estructura básica del currículo de matemáticas de Educación Primaria en cuanto a sus contenidos, y describirla con claridad y precisión.
RE11. Percibir el conocimiento matemático como parte de nuestra cultura, con un carácter interdisciplinar y socialmente útil.
RE12. Valorar la labor educativa en matemáticas como un compromiso profesional, ético y social.

4.2.2. Criterios de evaluación y objetivos didácticos

Los criterios de evaluación escogidos son transversales a las unidades y recogen ideas de concreción similar a la de los resultados esperable, pero organizadas en términos de los organizadores propuestos por el análisis de contenido.

Criterios de evaluación

Sobre conceptos y procedimientos matemáticos (Estructura conceptual):

E1. Conceptos y procedimientos: Dominar los conceptos y aplicar los procedimientos propios de las matemáticas de la educación primaria.

E2. Discurso profesional: Argumentar sobre el contenido matemático de la educación primaria desde la perspectiva profesional del maestro: trabajar con sistemas de numeración en bases no decimales, relacionar las operaciones con contextos reales y con acciones reales vinculadas a recursos manipulativos, discutir los algoritmos de las operaciones, razonar con formas y transformaciones geométricas, discutir fórmulas escolares e interpretar las medidas estadísticas.

Sobre representaciones:

E3. Diversidad de representaciones: Expresar el contenido matemático de la educación primaria utilizando múltiples representaciones, estableciendo las conexiones entre diferentes representaciones del mismo concepto, y eligiendo de forma autónoma la mejor representación en función de la situación a resolver.

E4. Uso de materiales: Utilizar diferentes recursos manipulativos y digitales para ejecutar procedimientos matemáticos escolares de la educación primaria, razonar sobre formas y transformaciones geométricas, efectuar estimaciones razonadas de medidas o interpretar datos.

Sobre resolución de problemas en contexto (Modos de uso):

E5. Aplicación a contextos: Aplicar contenido matemático escolar de la educación primaria para resolver problemas presentados en contexto y utilizando diferentes estrategias.

E.6 Planteamiento de problemas: Plantear enunciados que den sentido a la aplicación del contenido matemático escolar en situaciones contextualizadas.

Objetivos didácticos

Unidad 1: Números y álgebra

O_1. Identificar y describir los usos que se hacen los diferentes tipos de números.

O_2. Utilizar representaciones manipulativas y pictóricas de los diferentes tipos de números para expresarlos y compararalos.

O_3. Utilizar los principios del sistema decimal de numeración y discutir sus analogías y diferencias con sistemas con otras bases de numeración.

O_4. Cambiar de forma autónoma entre diferentes representaciones simbólicas de un mismo número racional para elegir la óptima en cada situación.

O_5. Interpretar las operaciones aritméticas en situaciones contextualizadas.

O_6. Resolver las operaciones aritméticas usando representaciones manipulativas y a través de su interpretación.

O_7. Resolver problemas aritméticos usando representaciones pictóricas apropiadas a las interpretaciones de las operaciones que lo resuelven.

O_8. Discutir diferentes algoritmos de las operaciones aritméticas y utilizarlos para resolver las operaciones.

O_9 Plantear problemas que se resuelvan utilizando operaciones aritméticas que surgen bajo cierta interpretación

O_{10} Reconocer los símbolos “ $=$ ”, “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ”, “ $<$ ” o “ $>$ ” como relaciones binarias entre cantidades fijas o variables.

O_{11}. Identificar y razonar con relaciones algebraicas utilizando diferentes representaciones.

O_{12}. Plantear y resolver problemas utilizando representaciones algebraicas.

Unidad 2: Geometría

O_1. Utilizar diferentes representaciones para reconocer e identificar propiedades geométricas de figuras planas y cuerpos geométricos.

O_2. Identificar propiedades de figuras planas y cuerpos geométricos, y utilizar estas propiedades para construir ejemplos de ellas y clasificarlas

O_3. Aplicar movimientos del plano a figuras dadas, de forma razonada y usando Geogebra.

O_4. Detectar regularidades en figuras planas y construir figuras con dichas regularidades.

O_5. Resolver y plantear problemas de modelización geométrica.

O_6. Razonar de forma inductiva y deductiva con formas y transformaciones geométricas.

Tema 6: Magnitudes y su medida

O_1. Trabajar con las distintas magnitudes escolares, así como las unidades del S. I. asociadas, y el cambio de unidad.

O_2. Distinguir entre procedimientos directos e indirectos de medición. Efectuar mediciones tanto directas (manejando instrumentos de medición) como indirectas (estimando o haciendo cálculos sencillos).

O_3. Obtener medidas de longitud utilizando diferentes estrategias.

O_4. Obtener medidas de área utilizando diferentes estrategias.

O_5. Resolver problemas relacionados con la medida.

Tema 7: Introducción a la estadística y a la probabilidad

O_1. Reconocer situaciones y contextos donde la estadística tiene funcionalidad e identificar los elementos básicos de un estudio estadístico que sea adecuado a estas situaciones.

O_2. Obtener las medidas estadísticas pertinentes (tablas, gráficas, medidas de posición central y medidas de dispersión) en función de las características de un conjunto de datos dado.

O_3. Interpretar y extraer conclusiones de informes estadísticos básicos.

O_4. Elaborar de forma autónoma informes estadísticos básicos para tomar decisiones en situaciones contextualizadas, proporcionando argumentos coherentes basados en tablas, gráficas o medidas estadísticas.

O_5. Identificar fenómenos y experimentos aleatorios, enunciar sucesos asociados y asignar probabilidades a esos sucesos.

La Figura 4.2 refleja la relación entre los criterios de evaluación establecidos y los objetivos didácticos dentro de cada una de las unidades.

Unidad	Objetivo	E1	E2	E3	E4	E5	E6
U1	O_1					■	■
U1	O_2			■	■		
U1	O_3		■		■		
U1	O_4	■	■	■		■	
U1	O_5		■			■	
U1	O_6		■	■	■		
U1	O_7			■		■	
U1	O_8	■	■		■		
U1	O_9						■
U1	O_{10}	■					
U1	O_{11}			■		■	
U1	O_{12}			■		■	■
U2	O_1	■		■		■	
U2	O_2	■	■	■	■		
U2	O_3	■			■		
U2	O_4		■		■		
U2	O_5			■		■	■
U2	O_6		■	■			
U3	O_1	■					
U3	O_2	■	■		■		
U3	O_3	■				■	
U3	O_4	■	■				
U3	O_5			■		■	
U4	O_1	■				■	
U4	O_2	■		■	■	■	
U4	O_3					■	
U4	O_4		■			■	
U4	O_5	■		■		■	

Figura 4.2: Relación entre los objetivos didácticos y los criterios de evaluación definidos

4.3. Metodología docente

Se organizan en torno a las estrategias metodológicas, la programación temporal del curso y los recursos útiles para trabajar la asignatura.

4.3.1. Estrategias metodológicas

La guía docente de la asignatura indica que la metodología se debe combinar diferentes estrategias:

MD01. *Aprendizaje cooperativo.* Desarrollar aprendizajes activos y significativos de forma cooperativa. Esta metodología es la predominante en los seminarios de trabajo en grupos reducidos, en los que el alumnado trabaja con materiales manipulativos.
MD02. *Aprendizaje por proyectos.* Realización de proyectos para la resolución de un problema, aplicando habilidades y conocimientos adquiridos, metodología que se emplea para trabajar de forma práctica la estadística a través del desarrollo de un estudio diseñado por los estudiantes.
MD03. *Estudio de casos.* Adquisición de aprendizajes mediante el análisis de casos reales o simulados. El análisis de algunos algoritmos se desarrolla a partir del visionado compartido de vídeos, lo que ejemplifica el uso de esta metodología.
MD04. *Aprendizaje basado en problemas.* Desarrollar aprendizajes activos a través de la resolución de problemas, que se utiliza para introducir los sistemas de numeración y para trabajar la estimación de medidas.

4.3.2. Programación temporal

Con el ánimo de obtener precisión, la programación de la asignatura se ha ajustado a un grupo específico: $1^o d$ C del próximo curso 2024-2025. En este caso, se obtiene una programación de *15 semanas* de sesiones presenciales, que daría lugar a 28 sesiones de trabajo en gran grupo y 14 de seminarios con materiales en grupos reducidos. Las Figuras 4.3 y 4.4 muestran el detalle de los contenidos de las sesiones.

En este escenario y dada la carga docente de la asignatura, se estipula que cada estudiante disfrute 67.5 horas de sesiones presenciales: 45 horas de sesiones teórico-prácticas en gran grupo (alrededor de 75 estudiantes) y 22.5 en grupos reducidos (en torno a 25 estudiantes por subgrupo), donde se trabajarán las prácticas con materiales manipulativos. Ese tiempo, junto con las 3.75 horas estimadas para la evaluación, las 0.75 horas de tutoría individual, las 3 horas de tutoría grupal, las 120 horas de estudio individual y las 30 horas que se estiman de estudio en grupo suman un total de 225 horas, que es el tiempo total que se planea que los estudiantes inviertan para trabajar la asignatura. En el caso de las actividades presenciales, la estimación de 67.5 horas de clase presencial trata de poner de manifiesto un tratamiento equilibrado de os diferentes temas, de la teoría y de la práctica. En el caso de las actividades no presenciales, pretende servir de orientación al alumno acerca del tiempo de dedicación para que la asignatura sea superada satisfactoriamente.

Sesión	Fecha(s)	Contenido/actividad	Unidad
	10 S (M)	Presentación de la asignatura	
	11 S (X)	Sesión de seminarios libre	
1	13 S (V)	Usos y representaciones de los naturales	Unidad 1
2	17 S (M)	Sistemas de numeración y SND	
P1	18 S (X)	*Práctica 1: representaciones y SN*	
3	20 S (V)	Cifras en un SN: interpret. y forma pol.	
4	24 S (M)	Usos y repr. de enteros y racionales	
P2	25 S (X)	***Evaluación Práctica 1***	
5	27 S (V)	Fracciones, % y decimales. Conexiones	
6	1 O (M)	Operaciones con naturales: EA	
P3	2 O (X)	*Práctica 2: operaciones con naturales*	
7	4 O (V)	Operaciones con naturales: EM	
8	8 O (M)	Operaciones con enteros y racionales	
P4	9 O (X)	*Práctica 3: operaciones fracciones*	
9	11 O (V)	Operaciones con racionales. Problemas	
10	15 O (M)	Algoritmos de las operaciones	
P5	16 O (X)	*Práctica 4: problemas con materiales*	
11	18 O (V)	Usos y repr. del álgebra. La igualdad	
12	22 O (M)	Relaciones de orden y patrones	
P6	23 O (X)	***Evaluación Prácticas 2-4***	
13	25 O (V)	Funciones. Proporcionalidad	
		Inicio prueba vocabulario Geometría	
14	29 O (M)	Representaciones en Geometría	Unidad 2

Figura 4.3: Distribución temporal de las sesiones presenciales del 10 de septiembre al 29 de octubre. Las 'P' indican las sesiones de seminarios de prácticas

P7	30 O (X)	*Práctica 5: Polígonos*	Unidad 2
	1 N (V)	Festivo Nacional	
15	5 N (M)	Prop. formas y modelización geométrica	Unidad 2
P8	6 N (X)	*Práctica 6: Poliedros*	
16	8 N (V)	Mov. planos. Traslaciones y rotaciones.	
17	12 N (M)	Rotaciones y símetrías. Recubr. plano	
P9	13 N (X)	*Práctica 7: Transformaciones en el plano*	
18	15 N (V)	Razonamiento en geometría plana	
19	19 N (M)	Razonamiento en geometría espacial	
P10	20 N (X)	***Evaluación Prácticas 5-7***	
		Fin prueba vocabulario Geometría	
20	22 N (V)	Percepción magnitudes. Unidades medida	Unidad 3
21	26 N (M)	Medición directa e indirecta. Longitudes	
P11	27 N (X)	*Práctica 8: Medición directa*	
22	29 N (V)	Longitudes y áreas: estrategias personales	
23	3 D (M)	Áreas: interpretación fórmulas escolares	
P12	4 D (X)	***Práctica 9: Estimación de medidas***	
24	6 D (V)	Festivo nacional	
25	10 D (M)	Estudios estadísticos y tipos de datos	Unidad 4
P13	11 D (X)	*Práctica 10: Un estudio estadístico (I)*	
26	13 D (V)	Datos cualitativos: repr. y medidas estad.	
27	17 D (M)	Datos cuantitativos: repr. y medidas est.	
P14	18 D (X)	*Práctica 10: Un estudio estadístico (II)*	
28	20 D (V)	Azar y probabilidad	

Figura 4.4: Distribución temporal de las sesiones presenciales del 30 de octubre al 20 de diciembre. Las 'P' indican las sesiones de seminarios de prácticas

Por supuesto, esta programación temporal surge de la distribución semanal del tiempo total de la asignatura según el concepto de crédito ECTS y no pretende establecer un horario inflexible del trabajo del alumno ni del profesor. La distribución de las 45 horas de sesiones teórico-prácticas y las 22.5 h de seminarios con materiales entre las 14 semanas dan lugar a proponer 2 sesiones teórico-practicas de 1.5 h y una de seminarios a la semana, que se propone que trabajen de manera equitativa el temario de la asignatura. El presente proyecto propone la distribución temporal de las sesiones que se muestra en las figuras (4.3) y (4.4)

En relación con las metodologías activas señaladas previamente, el trabajo en los seminarios se desarrollará con materiales manipulativos, se basará en aprendizaje cooperativo en equipos de 3-5 integrantes, estableciéndose también algunas sesiones de estas características durante el trabajo en las sesiones teóricas. En estas sesiones teóricas se combinaran sesiones expositivas, que serán utilizadas como hilo conductor entre las diferentes ideas, y el aprendizaje basado en problemas. De esta manera, se busca establecer una dialéctica en la que las ideas matemáticas emergen de las tareas planteadas y de la propia discusión en torno a ellas.

4.3.3. Recursos

El papel de los recursos en esta asignatura es fundamental para su desarrollo. Además de los recursos habituales (material de escritura, cañón en el aula y la plataforma de apoyo a la docencia PRADO), el uso de la calculadora, de instrumentos de dibujo como la regla o el compás son recomendables para el desarrollo de las sesiones teórico-prácticas. Sin embargo, es en el trabajo en los seminarios donde los recursos para el aprendizaje de las matemáticas son la herramienta básica de trabajo. A continuación se listan los que se propone usar para esta asignatura:

Para trabajar la Unidad 1 (Números y álgebra), que incluye las cuatro primeras prácticas los materiales de referencia son: bloques multibase y ábaco vertical para los números naturales, y las tiras de fracciones y las transparencias de fracciones para los racionales. Estos materiales se trabajan de forma conjunta en los seminarios, como se explicará en el tema desarrollado y se ilustra en las prácticas de la unidad (Anexo G)

Para trabajar la Unidad 2 (Geometría), que incluye las prácticas 5, 6 y 7, se utilizan el Geoplano para las figuras planas, el polidrón para los poliedros y el GeoGebra para las transformaciones en el plano.

Para trabajar la Unidad 3 (Medida), que engloba las prácticas 8 y 9, se utilizan múltiples instrumentos de medida: regla, cinta métrica, varas de medir, calibres, balanza clásica, balanza romana, recipientes graduados, entre otros.

Para trabajar la Unidad 4 (Estadística y probabilidad), que está relacionada con la práctica 10, se propone utilizar hojas de cálculo o la herramienta TUVA.

4.4. Evaluación

En relación a la evaluación, la guía docente establece distingue tres modalidades de evaluación, que se revisan en los tres primeros apartados. El último está dedicado a concretar los instrumentos mencionados por la guía docente.

4.4.1. Evaluación ordinaria

La evaluación del nivel de adquisición de las competencias, en convocatoria ordinaria, será continua y formativa, atendiendo a los aspectos del desarrollo de la materia, en la que se aprecie el trabajo individual y en grupo, así como el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos y su aplicación práctica. Para optar a evaluación continua será imprescindible que el docente disponga de observaciones de cada estudiante en un porcentaje igual o superior al 70 % de las clases prácticas impartidas. Estas observaciones se centrarán en su forma de trabajar, su compromiso con la asignatura, la dedicación a la misma o las destrezas que manifiesta, entre otras.

La calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los diferentes apartados que integran el sistema de evaluación:

1) Valoración de una o varias pruebas escritas.

2) Valoración de tareas y pequeños proyectos, realizados individualmente o en equipo. En ellos se evaluarán la presentación, redacción y claridad de ideas, estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo que argumenta, capacidad y riqueza de la crítica que se hace, y actualización de la bibliografía consultada.

3) Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo, y en las sesiones de puesta en común.

La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente. El peso de cada uno de ellos es el siguiente:
- Instrumento 1): 50 %
- Instrumento 2): 40 %
- Instrumento 3) : 10 %

Estos pesos solo serán efectivos si el profesor tiene observaciones de cada alumno correspondientes al 70 % de los seminarios. El alumno que no cumpla este requisito, deberá acudir a la convocatoria extraordinaria.

4.4.2. Evaluación extraordinaria

La evaluación extraordinaria de la asignatura pretende apreciar el aprendizaje significativo de los estudiantes respecto a los contenidos teóricos de la asignatura y su aplicación práctica.

Si un estudiante hubiese superado alguno de los apartados (1) o (2) que conforman la evaluación ordinaria de la asignatura, sólo debe superar las pruebas escritas que se refieran a los apartados no superados en dicha convocatoria, si así lo desea. En otro caso, es decir, si el estudiante no ha superado ninguno de los apartados recogidos en la evaluación ordinaria, en esta convocatoria debe superar una, o varias, pruebas escritas, teórica y práctica con peso en la calificación global correspondiente al 100 %. La calificación final deberá recoger la superación de las distintas pruebas.

4.4.3. Evaluación Única Final

De acuerdo al procedimiento establecido en los artículos 6 y 8 de la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada aprobada por Consejo de Gobierno el 20 de mayo de 2013, el alumnado podrá acogerse, mediante petición formulada al director del departamento, a una evaluación única final que incluirá las pruebas teóricas y prácticas necesarias para acreditar que han adquirido las competencias descritas en la guía docente.

Aquellos estudiantes que tengan concedida la condición de evaluación única, por no cumplir con el método de evaluación continua por los motivos recogidos en la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada (Universidad de Granada., 2016), debe superar una, o varias, pruebas escritas acerca de sus conocimientos teóricos (50 % en la calificación global) y prácticos (50 % en la calificación global). La Calificación final deberá recoger la superación de las distintas pruebas.

4.4.4. Concreción de los instrumentos de evaluación

Para concretar los instrumentos de evaluación indicados en la guía docente se propone utilizar los criterios de evaluación definidos previamente de forma coherente con los criterios de calificación establecidos en la guía. Para ello se consideran las siguientes ponderaciones:

E1. Conceptos y procedimientos: 10 %
E2. Discurso profesional: 20 %
E3. Diversidad de representaciones: 15 %
E4. Uso de materiales: 20 %
E5. Aplicación a contextos: 15 %
E6. Planteamiento de problemas: 20 %

Estas ponderaciones permiten distribuir los criterios a lo largo de los instrumentos señalados por la guía docente, haciendo así posible una deseable evaluación criterial. En este proyecto se propone la siguiente concreción de los instrumentos:

Concreción del instrumento 1). Para materializar el instrumento 1), se propone un examen teórico-práctico a desarrollar durante dos horas. El examen evaluará los criterios E1, E3, E5 y E6, de manera que los criterios E1 y E6 tengan el 20 % de la calificación del examen, mientras que E3 y E5 tenga el 30 % de la calificación del examen. Estos criterios recogerán equitativamente los contenidos de las cuatro unidades, de manera que el peso de todas ellas sea el mismo.

Concreción del instrumento 2). El instrumento 2) será utilizado para valorar el trabajo en los seminarios de prácticas a partir de los criterios de evluación E2 y E4, cuya calificación se promediará para obtener la calificación de este instrumento. Para ello se diseñarán un conjunto de tareas relacionadas con los materiales y sus implicaciones didácticas que podrán evaluarse mediante puesta en común, entregando tareas o pequeños proyectos durante los seminarios de prácticas.

Concreción del instrumento 3). El grado de participación y actitud se valorará mediante registros de participación en dos actividades, que quedan vinculadas a E6, en las que el profesor pedirá a los estudiantes que diseñen problemas para trabajar contenidos vistos en clase. Estas tareas se pueden revisar mediante el foro de la asignatura, que está habilitado en PRADO, o entrega presencial durante las sesiones en gran grupo. Las respuestas de valor que los estudiantes den a sus compañeros constituirán evidencias de su actitud y participación.

Parte IV

Resumen del tema elegido. Unidad 1: *“Números y álgebra”*

Números y álgebra

El tema elegido para el resumen es la Unidad 1 del proyecto, dedicada a números y álgebra. Esta unidad es la que mejor representa la reestructuración de la asignatura de "Bases matemáticas para la educación primaria" con motivo de la modificación del currículo de primaria. Por ello, y siguiendo el espíritu del proyecto, se ha seleccionado con la intencionalidad de consolidar la propuesta de adaptación de la asignatura a la normativa curricular del RD 157/2022 y, en general, a la propuesta educativa de la LOMLOE.

Este resumen de la unidad 1 se organiza del siguiente modo: en primer lugar se dedica un primer apartado a describir brevemente ideas teóricas que motivan el planteamiento hecho. Dado que gran parte de la reflexión teórica se hizo en el capítulo dedicado a ello, el apartado se centrará en aspectos específicos que no se especificaron en ese momento. Los siguientes apartados detallan los elmentos curriculares de la unidad, dentro de la lógica marcada por el proyecto: objetivos didácticos y destrezas observables, contenidos, metodología (que hará hincapié en el desarrollo de las sesiones en el aula y en la ejemplificación de las tareas) y evaluación. De forma adicional, se ha desarrollado material docente para trabajar la unidad que puede consultarse en el Anexo F, que contiene las notas de clase y actividades para practicar y de reflexión, y el Anexo G, que contiene los guiones de prácticas que acompañarían en los seminarios a la implementación de la Unidad en las sesiones de clase en gran grupo.

1.1. Motivación y planteamiento

Las novedades que presenta esta unidad respecto al planteamiento de la guía docente anterior (y respecto a otras propuestas de formación de profesorado) están relacionadas con su contenido pero, sobre todo, con su estructura. Respecto al contenido, la unidad integra las destrezas relacionadas con el álgebra, como se argumentó previamente. En cuanto a su estructura, se propone un esquema inspirado en las ideas del análisis de contenido. De esta manera, la unidad se configura en torno a tres elementos: (i) números, que apelan a la estructura de los conjuntos numéricos, sus usos y representaciones y, (ii) operaciones y

(iii) *relaciones*, que se ocupan de las acciones básicas que se pueden hacer con números. El álgebra surge así como la formulación matemática de relaciones binarias y de dependencia entre cantidades, que además aporta representaciones útiles para resolver situaciones aritméticas. Siguiendo las ideas de Burgos (2023), las situaciones de proporcionalidad emergen en este contexto como un tipo particular de relación que admite representaciones (y formulaciones simbólicas) propias del álgebra. Bajo este planteamiento, la unidad se organiza en tres secciones, cuyo contenido se discute brevemente.

La primera sección está dedicada al estudio de los conjuntos numéricos, de forma transversal a los mismos y siguiendo los organizadores del análisis de contenido (Fernández-Plaza, 2016). De esta manera, el triplete estructura conceptual, representaciones, usos se interpreta dentro de la primera sección de la siguiente forma. En primer lugar se reflexiona sobre el carácter abstracto de los números y la existencia de conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales), que surgen de manera natural para responder a problemas reales. Estas ideas ponen de manifiesto la importancia de explorar los usos de los diferentes tipos de número, y sus representaciones. El estudio de las representaciones da la oportunidad de presentar diferentes materiales y mostrar que el uso de símbolos es la forma más efectiva de representar cardinales de conjuntos, partes o razones. En este sentido, es particularmente relevante cómo la unidad trabaja los racionales como un conjunto numérico que tiene diferentes representaciones simbólicas, cada una adaptada a diferentes contextos.

La segunda sección de la unidad aborda las operaciones aritméticas desde la resolución de problemas verbales. Este campo fue extensamente estudiado a finales del siglo XX, dando lugar a una literatura consolidada que alberga planteamientos dispares pero con puntos en común, que han intentado recogerse en la unidad (puede verse una revisión más extensa de la mayoría en Nesher, 1992). El denominador común de todos ellos es el reconocimiento de situaciones de *estructura aditiva* que engloban los problemas de suma y los de resta, y situaciones de *estructura multiplicativa*, que aglutinan los problemas de multiplicación y división. Dada su utilidad, este planteamiento se respeta en la unidad.

Por el contrario, uno de los puntos más controvertidos en la investigación en problemas aritméticos verbales es la clasificación de los enunciados, ya que existen diferentes enfoques que ofrecen resultados diferenciados. Una de las ideas más destacadas en este sentido es la de los *modelos implícitos* (Fischbein et al., 1985), según la cual los niños aplican una operación u otra para resolver un problema aritmético siguiendo una ciertas concepciones previas. Por ejemplo, en situaciones en los que hay cantidades que se juntan los niños reconocen una suma, mientras que si hay un conjunto y se separa en subconjuntos, la tendencia es a restar. Este enfoque cognitivo contrasta con trabajos como los de Vergnaud o Schwartz, que contemplan las situaciones multiplicativas desde el análisis dimensional (Schwartz, 1981; Vergnaud, 1983, 1988), en los que una multiplicación puede ser una transformación de una medida (*"6 cajas"*, por ejemplo) en otra (*lápices*) siempre que haya una regla de transformación (*"caben cinco lápices en cada caja"*). Una tercera aproximación es el enfoque textual (Nesher, 1988; Nesher & Katriel, 1977), que clasifica los enunciados según su estructura sintáctica. Las investigaciones basadas en estas ideas condujeron a clasificar los enunciados de problemas aritméticos: los de estructura aditiva dieron lugar a las categorías de *cambio, combinación* y *comparación* (Hershkovitz & Nesher, 2003), mientras que los de estructura multiplicativa originaron las categorías de *transformación*, *comparación multiplicativa* y *producto cartesiano* (Nesher, 1988).

Las clasificaciones obtenidas a través del enfoque textual se recogen en la unidad, pero son limitadas ya que se restringen a enunciados verbales y no profundizan en el significado de las operaciones. Esta dificultad llevó a adaptar la idea de los modelos implícitos, dando lugar a la noción de *intepretación de una operación.* En el planteamiento de la unidad, la interpretación de una operación recoge las acciones reales que se matematizan con esa operación. Las interpretaciones tiene, por tanto dos sentidos: (i) matematizar esas acciones reales y (ii) concretar la abstracción de las operaciones matemáticas para realizarlas (usando materiales o discutiendo los algoritmos, por ejemplo). La unidad proporciona categorías de interpretaciones para las operaciones aritméticas con los tres conjuntos numéricos de referencia y las aplica para resolver y para plantear problemas aritméticos con elementos de estos conjuntos numéricos.

Finalmente, la tercera sección de la unidad se ocupa de las relaciones entre números, y en este contexto se introduce el álgebra. En consonancia con la primera sección de la unidad, esta tercera también discute las representaciones propias del álgebra, lo que da paso al lenguaje algebraico y al uso de tablas y gráficos, y los usos, que permite hablar de relaciones. Esta es la idea central de la sección, ya que da lugar a trabajar situaciones de aritmética generalizada, propiedades de operaciones, ecuaciones, patrones y funciones sin más que verlas como diferentes tipos de relaciones en los que intervienen cantidades conocidas o desconocidas. Como se ha indicado, este contexto da paso a ver las situaciones de proporcionalidad como funciones a las que se pueden aplicar las herramientas del álgebra. Estas ideas cierran la unidad, cuya concreción curricular se proporciona a continuación.

1.2. Objetivos didácticos y destrezas observables

La formulación precisa de las destrezas observables a perseguir durante el tema se describe en relación a los objetivos didácticos presentados en el capítulo anterior:

O_1. Identificar y describir los usos que se hacen los diferentes tipos de números

a) Dada una situación cotidiana, reconocer acciones en las que emergen los usos de los números naturales, negativos y racionales.

b) Recíprocamente, crear ejemplos de situaciones cotidianas de los usos de los diferentes tipos de números.

O_2. Utilizar representaciones manipulativas y pictóricas de los diferentes tipos de números para expresarlos y compararalos.

a) Reconocer las diferentes representaciones verbales, manipulativas o pictóricas que son útiles para describir situaciones contextualizadas en las que aparecen números naturales, enteros o racionales.

b) Elegir y utilizar las representaciones más adecuadas para identificar relaciones de orden entre números naturales, enteros o racionales.

c) Reconocer las fracciones equivalentes como representantes del mismo número racional a partir de diferentes representaciones pictóricas y manipulativas.

O_3. Utilizar los principios del sistema decimal de numeración y discutir sus analogías y diferencias con sistemas con otras bases de numeración.

a) Diferenciar el concepto de número de los signos que empleamos para representarlo.

b) Justificar la necesidad del uso de sistemas de numeración para expresar cantidades y la necesidad de usar signos y reglas definidas para organizar un sistema de numeración, dando especial importancia a la existencia de un principio de agrupación con cierta base.

c) Dar argumentos sobre si cierto sistema de numeración cumple o no los principios aditivo, multiplicativo o de posición.

d) Seguir procesos de agrupamiento para expresar cantidades pequeñas a través de sus cifras en sistemas de numeración de distintas bases, de forma manipulativa (material multibase, agrupamiento de palillos y ábaco vertical) y pictórica.

e) Seguir procesos de desagrupamiento para conocer la cantidad de elementos que representan cifras dadas en diferentes bases de numeración, de forma manipulativa (material multibase, agrupamiento de palillos y ábaco vertical), pictórica y a través de la expresión polinómica de las cifras en dicha base.

O_4. Cambiar de forma autónoma entre diferentes representaciones simbólicas de un mismo número racional para elegir la óptima en cada situación.

a) Identificar una fracción, un porcentaje o un decimal con de diferentes representaciones pictóricas o basadas en materiales. Recíprocamente, crear representaciones pictóricas o basadas en materiales de fracciones, decimales y porcentajes dados.

b) Identificar los porcentajes con las fracciones escritas con denominador 100. Usar esta identificación para expresar cualquier fracción como porcentaje y viceversa.

c) Obtener la expresión decimal de una fracción cualquiera. Recíprocamente, dado un decimal finito o periódico, obtener una fracción generatriz de dicho decimal.

d) Obtener la expresión decimal de un porcentaje. Recíprocamente, dado un decimal finito o periódico, expresarlo en forma de porcentaje.

e) Elegir la representación óptima para resolver situaciones contextualizadas.

O_5. Interpretar las operaciones aritméticas en situaciones contextualizadas.

a) Dada una situación contextualizada, reconocer los enunciados que se resuelven utilizando operaciones aritméticas con números naturales a partir de las interpretaciones unitarias o binarias de dichas operaciones.

b) Dada una situación contextualizada, reconocer los enunciados que se resuelven utilizando operaciones aritméticas con números enteros a partir de las interpretaciones unitarias o binarias de dichas operaciones.

c) Dada una situación contextualizada, reconocer los enunciados que se resuelven utilizando operaciones aritméticas con números racionales a partir de las interpretaciones unitarias o binarias de dichas operaciones.

O_6. Resolver las operaciones aritméticas usando representaciones manipulativas y a través de su interpretación

a) Utilizar diferentes representaciones manipulativas (bloques multibase, ábaco vertical, regletas) y pictóricas (modelos cardinales, de área o recta numérica) para resolver operaciones aritméticas con naturales a partir de la interpretación de las mismas.

b) Utilizar representaciones manipulativas (tiras de fracciones) y pictóricas (modelos de medida o diagramas de sectores) para resolver las operaciones aditivas con racionales a través de su interpretación.

c) Utilizar representaciones manipulativas (transparencias de fracciones) o pictóricas (modelos de área) para resolver las operaciones multiplicativas a partir de una interpretación adecuada.

O_7. Resolver problemas aritméticos usando representaciones pictóricas adecuadas a las interpretaciones de las operaciones que lo resuelven

a) Utilizar, de forma justificada, representaciones pictóricas adecuadas para resolver problemas contextualizados de estructura aditiva y multiplicativa que involucran números naturales.

b) Resolver problemas de divisibilidad a partir de representaciones pictóricas propias de las operaciones aritméticas y del álgebra.

c) Resolver problemas con números racionales utilizando representaciones pictóricas adecuadas.

O_8. Discutir diferentes algoritmos de las operaciones aritméticas y utilizarlos para resolver las operaciones

a) Emplear de forma razonada los algoritmos usuales de las operaciones con números naturales y decimales y compararlos de forma crítica con otros algoritmos.

b) Emplear de forma razonada los algoritmos usuales de las operaciones con fracciones, y compararlos con otros algoritmos.

c) Justificar los algoritmos usuales a partir de la resolución de las operaciones utilizando materiales o representaciones pictóricas convenientes.

O_9. Plantear problemas que se resuelvan utilizando operaciones aritméticas que surgen bajo cierta interpretación

a) Dada una operación con números naturales y una de sus interpretanciones, plantear un enunciado en el que emerja esa operación con la interpretación dada.

b) Dada una operación con números racionales y una de sus interpretanciones, plantear un enunciado en el que emerja esa operación con la interpretación dada.

O_{10}. Reconocer los símbolos “ = ”, “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ”, “ < ” o “ > ” como relaciones binarias entre cantidades fijas o variables.

a) Aplicar y reconocer propiedades de los números en situaciones de igualdad/desigualdad.

b) Encontrar valores numéricos desconocidos que satisfacen una relación establecida.

c) Utilizar los símbolos de igualdad y desigualdad para expresar relaciones válidas

O_{11}. Identificar y razonar con relaciones algebraicas utilizando diferentes representaciones.

a) Identificar patrones, expresarlos utilizando representaciones tabulares y con lenguaje algebraico, y obtener términos desconocidos usando esas representaciones.

b) Identificar relaciones funcionales en contextos reales, expresarlos utilizando representaciones tabulares, gráficas y con lenguaje algebraico, y usar esas representaciones para extraer conclusiones sobre la relación.

c) Reconocer situaciones de proporcionalidad y proporcionalidad inversa utilizando tablas o representaciones algebraicas, y utilizar estas representaciones para resolverlas.

O_{12}. Plantear y resolver problemas utilizando representaciones algebraicas.

a) Seleccionar de forma autónoma una representación algebraica (tabla o lenguaje) para resolver situaciones presentadas en un contexto real que involucran relaciones binarias o funcionales.

b) Dada una representación tabular, gráfica o algebraica de una relación binara o de una función, plantear enunciados que se resuelven usando esa relación o función.

1.3. Contenidos

La secuencia de contenidos a trabajar durante la unidad es la siguiente:

Sección 1. Conjuntos numéricos. Usos y representaciones de los números

1.1. Números y sistemas de representación en la educación primaria

1.1.1. Números naturales, enteros y racionales

1.1.2. Sistemas de representación de los números

1.2. Números naturales: usos y representaciones. El Sistema de Numeración Decimal

1.2.1 Usos de los números naturales

1.2.2. Representaciones verbales, manipulativas y pictóricas de los naturales

1.2.3. Representaciones simbólicas de los naturales. Sistemas de Numeración

1.2.4. Sistemas de numeración decimal y en otras bases

1.3. Números enteros: usos y representaciones
  1.3.1. Usos de los números negativos
  1.3.2. Representaciones de los números enteros
1.4. Números racionales: usos y representaciones. Decimales, fracciones y porcentajes
  1.4.1. Usos de los racionales
  1.4.2. Representaciones verbales, manipulativas y pictóricas
  1.4.3. Números decimales
  1.4.4. Fracciones
  1.4.5. Porcentajes
  1.4.6. Conexiones entre las representaciones simbólicas de los racionales

Sección 2. Operaciones. Interpretación, problemas aritméticos y algoritmos
2.1. Interpretación de las operaciones con números naturales. Problemas aritméticos
  2.1.1. Operaciones de estructura aditiva
  2.1.2. Resolución y planteamiento de problemas de estructura aditiva
  2.1.3. Interpretación de las operaciones de estructura multiplicativa
  2.1.4. Resolución y planteamiento de problemas de estructura multiplicativa
  2.1.5. Divisibilidad
2.2. Interpretación de las operaciones con números negativos
  2.2.1. Operaciones de estructura aditiva
  2.2.2. Operaciones de estructura multiplicativa
  2.2.3. Interpretaciones matemáticas de las operaciones con números negativos
2.3. Interpretación de las operaciones con números racionales. Resolución de problemas
  2.3.1. Operaciones de estructura aditiva
  2.3.2. Operaciones de estructura multiplicativa
  2.3.3 Resolución y planteamiento de problemas con números racionales
2.4. Algoritmos y estrategias de cálculo
  2.4.1. Algoritmos de cálculo con números naturales y decimales
  2.4.2. Algoritmos de cálculo con fracciones

Sección 3. Relaciones numéricas y algebraicas. Proporcionalidad
3.1. Usos y representaciones del álgebra en primaria
  3.1.1. Usos del álgebra
  3.1.2. Representaciones novedosas del álgebra
3.2. Relaciones numéricas
  3.2.1. Igualdad
  3.2.2. Relaciones de orden
3.3. Relaciones de dependencia entre variables. Proporcionalidad

3.3.1. Patrones
3.3.2. Funciones
3.3.3. Proporcionalidad

Esta secuencia de contenidos está relacionada con los objetivos didácticos según se muestra en la Figura 1.1, que ilustra que las tres secciones se pueden considerar unidades de trabajo independientes.

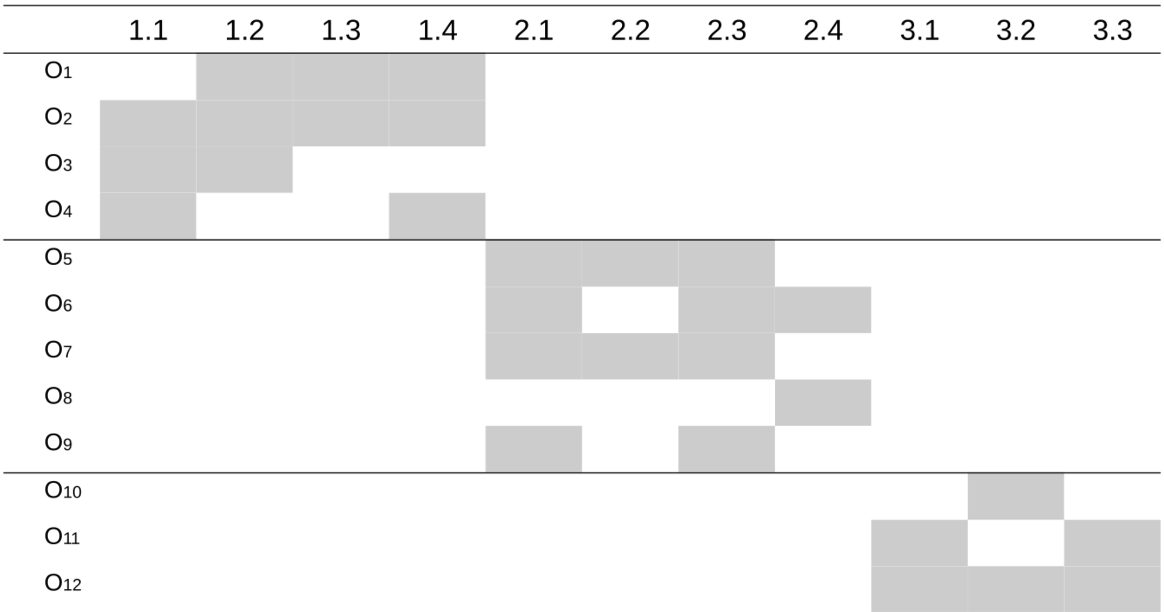


Figura 1.1: Relación entre los objetivos didácticos y los contenidos de la unidad

1.4. Metodología

De acuerdo al cronograma presentado en la Figura 4.3, las sesiones de trabajo en el aula dedicadas a la Unidad 1 son 19: 13 de ellas son de sesiones en gran grupo y seis de seminarios de prácticas. La distribución temporal de las sesiones del tema, así como la conexión con los objetivos y los contenidos se sintetizan en la Figura 1.2. A continuación se describe brevemente el planteamiento de las mismas.

El trabajo en el aula se sustenta a partir de tres tipos de tareas:

(i) *Tareas de motivación*, que son de carácter abierto e involucran reflexión que visibiliza la necesidad del contenido a trabajar. Por ejemplo, en la sesión 2 se propone al alumnado que olvide lo que sabe de números e invente formas de expresar cantidades. Conforme van dando respuestas se incrementa el cardinal del conjunto cuya cantidad hay que expresar, lo que va dando sentido a la creación de sistemas de numeración. Otro ejemplo de tareas de motivación se muestra en la Figura 1.3 (arriba).

	Título	Objetivos didácticos y contenidos
1	Usos y representaciones de los naturales	Objetivos O_1 y O_2; Contenidos 1.1., 1.2
2	Sistemas de numeración y SND	Objetivos O_2 y O_2; Contenido 1.2.
P1	*Práctica 1: representaciones y SN*	Objetivos O_2 y O_3; Contenidos 1.2 y 1.4
3	Cifras en un SN: interpret. y forma polinómica	Objetivo O_3; Contenidos 1.1 y 1.2
4	Usos y repr. de enteros y racionales	Objetivos O_1 y O_2; Contenidos 1.3 y 1.4
P2	***Evaluación Práctica 1***	
5	Fracciones, % y decimales. Conexiones	Objetivo O_4; Contenido 1.4
6	Operaciones con naturales: EA	Objetivos O_5, O_7 y O_9; Contenido 2.1
P3	*Práctica 2: operaciones con naturales*	Objetivos O_5 y O_6; Contenido 2.1
7	Operaciones con naturales: EM	Objetivos O_5, O_7 y O_9; Contenido 2.1
8	Operaciones con enteros y racionales	Objetivo O_5; Contenidos 2.2 y 2.3
P4	*Práctica 3: operaciones fracciones*	Objetivos O_5 y O_6; Contenido 2.3
9	Operaciones con racionales. Problemas	Objetivos O_5, O_7 y O_9; Contenido 2.3
10	Algoritmos de las operaciones	Objetivo O_8; Contenido 2.4
P5	*Práctica 4: problemas con materiales*	Objetivo O_7; Contenidos 2.1 y 2.3
11	Usos y repr. del álgebra. La igualdad	Objetivos O_{10} y O_{12}; Contenidos 3.1 y 3.2
12	Relaciones de orden y patrones	Objetivos O_{10} y O_{11}; Contenidos 3.2 y 3.3
P6	***Evaluación Prácticas 2-4***	
13	Funciones. Proporcionalidad	Objetivos O_{11} y O_{12}; Contenidos 3.2 y 3.3

Figura 1.2: Distribución temporal de las sesiones y conexión con los objetivos específicos y contenidos del tema

Actividad 2.8. Resuelve el siguiente enunciado utilizando dos representaciones diferentes:

El dueño de un restaurante llama a Ana y Beltrán como camareros de apoyo: A ella la llaman cada 4 días y a él cada 6. Si hoy han coincidido, ***¿cuándo volverán a coincidir?***

Actividad 3.1. Completa los huecos para que se cumplan las siguientes relaciones. Indica todas las posibles soluciones en cada caso:

i) *69 =__·23*

ii) __· *11=2·3 + 2·8*

iii) *0=(2-__)·___*

iv) 5+3 Distinto de 3+___

Indica las propiedades de las operaciones que has empleado para dar respuesta a cada apartado.

Figura 1.3: Ejemplos de tareas de motivación (arriba) y de práctica (debajo)

Actividad 1.15 (Reparto justo). Dos pastores que tienen 5 y 3 panes, respectivamente, se encuentran a un cazador con hambre. Reparten los panes y comen igual cantidad los tres. Al despedirse, el cazador les da 8 monedas.**¿Cómo deben repartirlas?**

P1.23 (Elección autónoma de representación: "monogamia complicada"). En una ciudad, 1/4 de los hombres están casados con 2/5 de las mujeres. Si nunca se casan con forasteros (son todos heterosexuales y no gustan los *poliamores*) **¿Cuál es la porción de solteros en dicha ciudad?**

Figura 1.4: Ejemplos de tareas de reflexión

(ii) *Tareas de práctica,* que sirven para consolidar ideas trabajadas. Resolver problemas verbales aritméticos con números naturales utilizando diferentes representaciones pictóricas, o el segundo enunciado que se muestra en la Figura **??** son ejemplos de tareas de este tipo.

(iii) *Tareas de reflexión,* que se emplean para cerrar un conjunto de ideas y visibilizar su alcance. Por ejemplo, solicitar al alumnado la formulación algebraica de problemas aritméticos (de combinación, por ejemplo) ayuda a ver la potencia de esa representación y justifica de alguna manera el cambio de signo al "pasar al otro lado" del signo igual. Otros dos ejemplos de tareas de reflexión, en este caso sobre la importancia de las representaciones pictóricas se muestran en la Figura 1.4.

El empleo de estos tres tipos de tareas permiten articular las sesiones de trabajo, que combinan diferentes tipos de metodologías docentes. En las sesiones de teoría, en gran grupo, el funcionamiento habitual alterna metodología basada en problemas y expositiva. Esta alternancia se fundamenta en el planteamiento de una tarea de motivación, que conduce a la reflexión del alumnado en gran grupo, y cuya respuesta da pie a un periodo expositivo por parte del docente, en el que se dan un conjunto de ideas que se refuerzan con tareas de práctica. En las sesiones en grupos reducidos predomina el trabajo colaborativo en pequeños grupos de 4-5 estudiantes. Estos grupos resuelven usando los materiales de referencia de cada sesión los guiones de prácticas que se muestran en el Anexo G. Esos guiones contienen tareas de motivación, de práctica y de reflexión sobre los materiales, algunas de ellas evaluables.

Breve descripción de las sesiones en gran grupo. La unidad se inicia invitando a la reflexión sobre qué es un número y los diferentes números que hay. Se discrimina la noción abstracta de lo puramente simbólico, idea que conduce la importancia de las representaciones y de los usos de los números naturales, que se revisan sin considerar las representaciones simbólicas. En a segunda sesión, se plantea la tarea de motivación descrita previamente, en la que se desafía al alumnado a crear un sistema para expresar cantidades. La exploración de sus respuestas motiva la noción de sistema de numeración y sus propiedades, que se repasan. Se hace hincapié en la propiedad de agrupación, que conecta con los seminarios de prácticas. En la tercera sesión teórica (habiendo ya trabajado con material multibase), se plantea la noción de cifra y se proponen actividades de práctica sobre las cifras en diferentes bases y su conexión con las representaciones multibase y la forma polinómica, lo que cierra el análisis de las representaciones simbólicas de los naturales.

A continuación se plantean los usos y representaciones de los enteros y los racionales, y el análisis de las representaciones simbólicas de los racionales a partir de sus usos. Se pone de manifiesto que los decimales son consistentes con el sistema de numeración decimal, pero que el trabajo con decimales escapa de los racionales. Ante la pregunta de cómo identificar un racional, se plantea la idea de razón, y con ella las fracciones, que permiten caracterizar los números racionales a partir de la noción de *fracciones equivalentes*. Finalmente, se visibiliza que los porcentajes son una representación adicional de los racionales, y se plantean tareas de reflexión sobre las conexiones entre representaciones y otras como las que se muestran en la Figura 1.4, que ponen de manifiesto la necesidad de utilizar representaciones adecuadas a cada stuación. Esto cierra la sección 1.

La sección 2 se inicia ilustrando el vínculo entre las situaciones de suma y de resta, lo que da sentido a trabajar las situaciones de estructura aditiva. Se proponen tareas de motivación que ilustran las diferentes interpretaciones de la suma y la resta, que se revisan y se consolidan con tareas de práctica. La siguiente sesión es análoga, esta vez con las operaciones multiplicativas, en las que se incluyen tareas de motivación como la que se muestra en la Figura 1.3 para ilustrar el sentido de trabajar la divisibilidad, cuestión que cierra el trabajo con la estructura multiplicativa. En la tercera sesión de la sección surge el interrogante de hasta qué punto se pueden llevar las interpretaciones de las operaciones con naturales a otros conjuntos numéricos, lo que permite discutir las interpretaciones de las operaciones con negativos y con racionales. Se plantean tareas de práctica, que ocupan esa y la cuarta sesión, en las que se resuelven operaciones utilizando diferentes representaciones pictóricas. La última sesión dedicada a las operaciones se focaliza en los algoritmos: en ella, se plantean tareas de reflexión sobre las ventajas e inconvenientes de diferentes algoritmos.

Para trabajar la sección 3 se recupera la lógica de la unidad y se argumenta que las matemáticas expresan relaciones, y que el tratamiento de las mismas requiere herramientas específicas (tablas, gráficas, *letras*), lo que da sentido a trabajar el álgebra. Respetando la analogía con el trabajo con números, se revisan los usos y las representaciones algebraicas y, a continuación, se trabajan diferentes tareas de práctica como la que se ilustra en la Figura 1.3 para mostrar que la igualdad es simétrica y para dar sentido a las ecuaciones como igualdades en las que hay cantidades desconocidas.

En la siguiente sesión, se proponen tareas similares con las desigualdades y se ponen ejemplos de relaciones unívocas y no unívocas, para motivar la existencia de diferentes tipos de relaciones. Esta discusión lleva a presentar los patrones, que se trabajan con tareas de práctica. En la última sesión se ilustra que los patrones se pueden cuantificar, lo que genera relaciones de dependencia numérica (funciones), que se ejemplifican utilizando diferentes representaciones. Algunos de ellos guardan relaciones de proporcionalidad, que se presenta como un caso particular de función. La sesión (y la sección) se cierran resolviendo problemas de proporcionalidad utilizando tablas y gráficas.

Breve descripción de las sesiones en grupo reducido . Estas sesiones se descomponen en dos tipos: de trabajo y de evaluación. Las sesiones de trabajo (P1, P3, P4 y P5) se realizan en grupos de 4-5 compañeros, que resuelven las tareas del guión de prácticas correspondiente utilizando el material manipulativo de referencia. De esta manera, en la sesión P1 se trabaja la representación y la comparación usando el material multibase y las tiras de fracciones; en P3 se trabajan actividades de resolución de operaciones aritméticas en diferentes bases a través del material multibase y del ábaco vertical. En P4 se resuelven operaciones aritméticas con fracciones utilizando las tiras y las transparencias de fracciones. Finalmente, en la sesión P5 se resuelven problemas en los que el papel de los materiales (multibase y tiras de fracciones) es más simbólico que numérico. El Anexo G ilustra estos problemas.

Las sesiones de evaluación (P2 y P6), finalmente, tienen dos partes. En la primera media hora, se ponen en común en grupo mediano las respuestas a una serie de actividades que se dejan con este fin, y se resuelven dudas sobre ellas. El resto de la sesión se dedica a la evaluación, en la que el profesor propone tareas que el alumnado tiene que resolver.

1.5. Evaluación

Dadas las características de la asignatura, no se considera pertinente evaluar solo la unidad, por lo que este apartado se limita a ilustrar posibles contribuciones de este tema a los instrumentos definidos por la guía docente. De forma consistente con el apartado de evaluación del capítulo anterior, las propuestas de evaluación de esta unidad se definen en términos de los criterios y los instrumentos de evaluación, que se describen a continuación.

Criterios de evaluación

Como se argumentó en el capítulo anterior, los criterios de evaluación son comunes a todas las unidades. Su descripción simplificada es la siguiente:

E1. Conceptos y procedimientos: 10 %
E2. Discurso profesional: 20 %
E3. Diversidad de representaciones: 15 %
E4. Uso de materiales: 20 %
E5. Aplicación a contextos: 15 %
E6. Planteamiento de problemas: 20 %

Instrumentos de evaluación

De acuerdo a la guía docente, y de forma consistente con la discusión previa, se consideran por una parte tareas para evaluar E1, E3, E5 y E6, que serán la contribución de la unidad al Instrumento 1, y por otra parte tareas para E2 y E4, que contribuirán al instrumento 2.

Contribución al instrumento 1. Se propone una tarea que puede formar parte del examen final de la asignatura y que permite evaluar el grado de consecución de E3 y E5:

Jesús y Francisco cuentan que engordaron lo mismo durante las fiestas. Los dos alcanzaron cuatro terceras partes de su peso ideal (que es el mismo para los dos) tras Nochevieja. Sin embargo, nueve días después ya habían empezado a quemar lo ganado: Jesús adelgazó una cuarta parte de ese peso ideal, mientras que Francisco asegura que adelgazó una cuarta parte de lo que pesaba tras Nochevieja.

Justifica razonadamente si alguno de los dos puede dejar ya la dieta.

Esta tarea se podría calificar a partir del siguiente sistema de indicadores:

I1.1) Identificación de los todos.
I1.2) Elección una representación que facilita la resolución.
I1.3) Cálculos/procedimientos dentro de la interpretación hecha.
I1.4) Respuesta coherente con los resultados obtenidos y con el contexto.

Del mismo modo se propone la siguiente tarea, que puede contribuir a evaluar E6:

Plantea y resuelve los enunciados de dos problemas:

i) Uno que se resuelva dividiendo 16 entre 5, de manera que esta operación tenga la interpretación de resta repetida.

ii) Otro que se resuelva utilizando la siguiente igualdad $C + 2 = 18$, *donde* C *es la edad de Carlos.* Esta tarea se podría calificar a partir del siguiente sistema de indicadores:

I2.1) El enunciado dado en i) cumple la condición pedida
I2.2) El enunciado dado en i) es claro y se entiende
I2.3) El enunciado dado en ij) se resuelve con la ecuación indicada.
I2.4) El enunciado dado en i) es claro y se entiende.

Contribución al instrumento 2. Para evaluar E2 y E4 se propone una tarea como la siguiente, para resolver **de forma oral:**

Resuelve las operaciones $123_{5)} + 4_{5)}$ *utilizando el material multibase y el ábaco vertical y justifica razonadamente qué interpretación de la operación estás poniendo en juego en cada caso.*

Esta tarea se podría calificar a partir del siguiente sistema de indicadores:

I3.1) Procedimiento de resolución de la operación con el material multibase
I3.2) Interpretación señalada y calidad de la justificación dada
I3.3) Procedimiento de resolución de la operación con el ábaco vertical
I3.4) Interpretación señaladoa y calidad de la justificación dada

Parte V

Referencias

Referencias

Alagumalai, S., & Buchdahl, N. (2021). PISA 2012: Examining the influence of prior knowledge, time-on-task, school-level effects on achievements in mathematical literacy processes- Interpret, employ and formulate. *Australian Journal of Education*, *65*(2), 173-194.

Albarracín, L., & Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(86), 79-96.

Alcubilla, E. A. (2021). *Código de Universidades. Códigos electrónicos. Agencia Estatal Boletin Oficial del Estado.*

Alharbi, M., Almatham, K., & Alsalouli, M. (2020). Mathematics Teachers' Professional Traits that Affect Mathematical Achievement for Fourth-grade Students according to the TIMSS 2015 Results: A Comparative Study among Singapore, Hong Kong, Japan, and Saudi Arabia. *International Journal of Educational Research*, *104*, 101671.

Arleback, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *3*(6), 331-364.

Arleback, J. B., & Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM. Mathematics Education*, *1*(51), 979-990.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa un punto de vista cognoscitivo.* México Trillas. Significado y Aprendizaje.

Aydin, U., & Ozgeldi, M. (2019). The PISA Tasks: Unveiling Prospective Elementary Mathematics Teachers' Difficulties with Contextual, Conceptual, and Procedural knowledge. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *1*(63), 105-123.

Bakker, A. (2019). *Design research in education. A practical guide for Early Career Researchers.* New York: Routledge.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *5*(59), 389-407.

Barquero, B. (2015). Teaching Modelling at University Level: the institutional relativity of study and research paths. *Bolema*, *52*(29), 593-612.

Barquero, B. (2019). Una perspectiva internacional sobre la enseñanza y aprendizaje de la modelización matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano & A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 19-22). Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Barquero, B. (2022). *Moving Beyond Mute Modelling Praxeologies: an Study and Research Path for Teacher Education About the Cake Box. Comunicación presentada en ICTMA20.*

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2015). A study and research path on mathematical modelling for teacher education. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 809-815). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME.

Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM. Mathematics Education*, *1*(50), 31-43.

Baumer, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., Klusmann, U., Krauss, S., Neubrand, M., & Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180.

Blomhoj, M., & Hojgaard, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, *3*(22), 123-139.

Blum & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58.

Blum, Galbraith, P., Henn, H. W., & Niss, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Blum & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. e. a. Haines (Ed.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Blum, W., & Leiss, D. (2008). Investigating Quality Mathematics Teaching - the DISUM Project. En C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), *Proceedings of MADIF-5* (pp. 3-16). Linköping: SMDF.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM Mathematics Education*, *2*(38), 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Cham: Springer.

Bricall, J. M. (2000). *Informe Universidad 2000, Conferencia de Rectores de las universidades españolas.*

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. Etudes en Didactique des Mathématiques. *Article occasionnel*, *2*, 1-17.

Burgos, M. J. (2023). *Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores. Ponencia presentada en el Equipo Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática.*

Burgos, M. (2023). *Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores*. Universidad de Almería.

Burkhardt, H. (2004). Establishing Modelling in the Curriculum: Barriers and Levers. En H. W. Henn & W. Blum (Eds.), *Applications and Modelling in Mathematics Education: Pre-Conference* (pp. 53-58). Dortmund, Germany: ICMI.

Cabassut, R., & Ferrando, I. (2013). Modelling in French and Spanish syllabus of Secondary Education. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 1845-1854). Antalya, Turquía: Middle East Technical University; ERME.

Cañadas, M. C. (2023). *Pensamiento algebraico en educación primaria desde la perspectiva del early algebra. Ponencia presentada en el Equipo Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática.*

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8, the eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2012). *Research methods in education (6th ed.)*. Routledge.

Comisión de las Comunidades Europeas. (1995). *Enseñar y aprender. Hacia la sociedad congnitiva*. Bruselas: Comunidad Europea.

Comité Español de Matemáticas. (2021). *Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en edu- cación no universitaria.*

Czocher, J. A. (2016). Introducing modeling activity diagrams as a tool to connect mathematical modeling to mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(18), 77-106.

Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, *2*(99), 137-159.

De Castro, C., Castro, E., & Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro & E. D. la Torre. (Eds.), *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183-194). Universidad da Coruña.

De Lange, J. (2003). Mathematics for literacy. En B. L. Madison & L. A. Steen (Eds.), *Quantitative literacy. Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 75-89). Princeton, NJ: The National Council on Education; the Disciplines.

Doerr. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, L. Henn & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education.The 14th ICMI Study* (pp. 69-78). New York: Springer.

Doerr, H. M., & English, L. D. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*(34), 110-136.

Doorman, M. (2019). Design and research for developing local instruction theories. *Avances de investigación en Educación Matemática*, (15), 29-42.

Dorier, J. L., & García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, *6*(45), 837-849.

EHEA. (2015). *EHEA ministerial conference. Yereván Communiqué.*

EHEA. (2018). *EHEA ministerial conference. Paris Communiqué.*

EHEA. (2020). *EHEA ministerial conference. Rome Ministerial Communiqué.*

Fernández-Ahumada, E., & Montejo-Gámez, J. (2019). Dificultades en el aprendizaje matemático del profesorado en formación: análisis de las premisas utilizadas al modelizar. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano & A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 19-22). Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Fernández-Ahumada, E., Montejo-Gámez, J., & Torralbo, M. (s.f.). *Mathematical literacy of prospective elementary teachers: Does the educational background matter?*

Fernández-Lamarra, N., & Coppola, N. (2016). La Evaluación de la Docencia Universitaria desde un Abordaje Institucional. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa*, *3*(1), 37-50.

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis del contenido. En L. Rico & A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-118). Madrid: Pirámide.

Ferrando, I. (2019). Avances en las investigaciones en España sobre el uso de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano & A. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 43-64). Valladolid: SEIEM.

Ferrando, I., & Albarracín, L. (2019). *Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: Analysis of emerging models*. Mathematics Education Research Journal.

Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., & Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de los problemas de Fermi. *Bolema*, *31*(57), 220-242.

Ferrando, L., I. y Albarracín. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal*, 61-78.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Martino, M. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, *1*(16), 3-17.

Flores, P., & Rico, L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Madrid: Pirámide.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, *3*(38), 226-246.

García, F. J., Romero, R., Abril, A. M., & Quesada, A. (2018). Proyecto europeo “Matemáticas y Ciencias para la vida”. *Alambique*, (92), 77-79.

Godino, J. D. (1995). *Perspectiva de la didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. Documento de trabajo del curso de doctorado Teoría de la educación Matemática.* Universidad de Granada.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema*, *57*(31), 90-113.

Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M. C. Penalva, G. Torregosa & J. Valls (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Universidad de Granada.

Gómez Chacón, I. (2023). *Sentido socioafectivo en matemáticas. Ponencia presentada en el Equipo Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática.*

Gómez-Chacón, I. (2020). Promoting the mathematics teacher self-identity. Design heuristics for didactical materials. *Journal of Educational Sciences and Psychology*, *VIII-LXX*(1/2018), 15-27.

Gómez-Chacón, I., & Barbero, M. (2020). ¿Es la confusión beneficiosa en Matemáticas? Emociones epistémicas y razonamiento regresivo en Secundaria. *Uno: Revista de Didácticaa de las Matemáticas, Monográfico Emociones en Matemáticas*, (88), 7-16.

Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, *1-3*(39), 111-129.

Greefrath, G., & Vorhölter, K. (2016). *Teaching and Learning Mathematical Modelling: Approaches and Developments from German Speaking Countries.* Cham: Springer.

Hershkovitz, S., & Nesher, P. (2003). The Role of Schemes in Solving Word Problems. *The Mathematics Educator*, *2*(7), 1-24.

Higginson, W. (1980). On the foundations of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *2*(1), 3-7.

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and instruction*, *4*(26), 430-511.

Huincahue Arcos, J., Borromeo-Ferri, R., & Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las ciencias*, *1*(36), 99-115.

INTEF. Ministerio de Educación y Formación Profesional. (2022). *Situaciones de aprendizaje.*

Kaasila, R., Pehkonen, E., & Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding on division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, *3*(73), 247-261.

Kaiser, G. (2014). Mathematical modelling and applications in education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education.* (pp. 396-404). Springer, Dordrecht.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *ZDM Mathematics Education*, *2*(38), 82-85.

Kämmerer, M. (2023). *Students' use of assumptions to solve a modelling task with much or little personal interest in the real-world context of the task. Comunicación presentada en CERME13.*

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En M. B. J.J. Kaput D.W. Carraher (Ed.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Konstantopoulos, S. (2011). Teacher effects in early grades: Evidence from a randomized study. *Teachers College Record*, *7*(113), 1541-1565.

Kumar, R., Subramaniam, K., & Naik, S. S. (2017). Teachers' construction of meanings of signed quantities and integer operation. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(20), 557-590.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem Solving, Modeling, and Local Conceptual Development. *Mathematical Thinking and Learning*, *2*(5), 157-189.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. Lelly & R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-646). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of mathematics education. Seeing new frontiers* (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.

Leshrer, R., & Schauble, L. (2003). Origins and evaluation of model-based reasoning in mathematics and science. En R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 59-70). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

López, A. L. (2016). Propuesta de modelo de evaluación de la Innovación Social Universitaria Responsable (ISUR). *Estudios sobre Educación*, *30*, 71-93.

López Beltrán, M., Albarracín, L., Ferrando, I., Montejo-Gámez, J., Ramos, P., Serradó, A., Thibaut, E., & Mallavibarrena, R. (2020). La educación matemática en las enseñanzas obligatorias y el bachillerato. En D. Martín de Diego, T. Chacón Rebollo, G. Curbera Costello, F. Marcellán Españo & M. Siles Molina (Eds.), *Libro blanco de las matemáticas* (pp. 1-94). Madrid: Fundación Ramón Areces y Real Sociedad Matemática Española.

López-Centella, E., & Montejo-Gámez, J. (2023). *Analysis of models used by student primary teachers when addressing a geometric estimation task. Comunicación presentada en el CERME13.*

Luo, F. (2009). Evaluating the Effectiveness and Insights of PreService Elementary Teachers' Abilities to Construct Word Problems for Fraction Multiplication. *Journal of Mathematics Education*, *1*(2), 83-98.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez & M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-102). Granada: Comares.

Lupiáñez, J., Molina, M., Flores, P., & Segovia, I. (2007). Mathematics primary teacher training in the context of the European Higher Education Area. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences*, *4*(4), 223-232.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies. *ZDM Mathematics Education*, *38*(2), 113-142.

Martínez, J. M. (2016). Las reformas en el gobierno de las universidades públicas españolas. Autonomía y rendición de cuentas. *La Cuestión Universitaria*, *3*, 36-46.

MASCIL. (2016). *MASCIL project: information an classroom material.*

MERIA. (2016). *MERIA practical guide to inquiry based mathematics teaching.*

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte. (2015a). *PISA 2015, programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español.*

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte. (2015b). *TIMSS 2015. Estudio internacional de tendencias en matemáticas y ciencias. IEA. Informe español: resultados y contexto.*

Ministerio de universidades. (2023). *Datos y cifras del sistema universitario español. Publicación 2022-2023.*

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *1*(29), 75-88.

Montejo-Gámez, J., Amador-Saelices, M. V., & Fernández-Plaza, J. A. (2021). *Teaching mathematics to reflect on the COVID-19 pandemic: best practices.*

Montejo-Gámez, J., & Fernández-Ahumada, E. (2019). On the notion of mathematical model in educational research: Insights from a new proposal. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *11 th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1232-1239). Utrecht: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University, Netherlands.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., & Adamuz-Povedano, N. (2021). A Tool for the Analysis and Characterization of School Mathematical Models. *Mathematics*, 1569-1585.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., León-Mantero, C., Jiménez-Fanjul, N., & Adamuz-Povedano, N. (2018). Destrezas de modelización en la formación inicial de maestros de Educación Primaria. *SUMA*, (87), 31-4.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Martínez-Jiménez, E., & Adamuz-Povedano, N. (2023). Análisis de modelos para la estimación de cantidades irregularmente distribuidas. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 387-394). SEIEM.

Montejo-Gámez, J., & Fernández-Plaza, J. A. (s.f.). *"Flatten the curve": From mathematical discussion on the pandemic to characterisation of the transitions in the modelling cycle.*

Montejo-Gámez, J., López Centella, E., & Fernández-Ahumada, E. (2024). Solving Estimation Tasks: Novel Features of the Emerging Models When Three-dimensional Geometry Becomes Relevant. En G. K. V. Geiger & H.-S. Siller (Eds.), *Researching mathematical modelling education in disruptive/challenging times* (En prensa). Springer.

Montoya Delgadillo, E., Viola, F., & Vivier, L. (2017). Choosing a Mathematical Working Space in a modelling task: The influence of teaching. En T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME10* (pp. 956-963). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education; ERME.

Moreno, A. (2022). *El currículo de matemáticas de la LOMLOE en Educación Primaria. Ponencia presentada en el Equipo Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática.*

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la Educación matemática. National Council of Teachers of Mathematics.* Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. En M. B. J. Hiebert (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 19-41). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1992). Solving multiplication word problems. En R. H. G. Leinhardt R. Putnam (Ed.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 189-220). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P., & Katriel, T. (1977). A semantic analysis of addition and substraction word problems in arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, (8), 251-269.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(40), 1-24.

Niss, M. (2012). Models and modelling in mathematics education. *Newletter of the European Mathematical Society*, *86*, 49-52.

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark.* Roskilde.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, (102), 9-28.

OCDE. (2003). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

OCDE. (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012 Matemáticas, Lectura y Ciencias.* Madrid: Ministerio de Eduación, Cultura y Deporte.

OCDE. (2020). *Marco para prueba de matemáticas PISA 2021 (versión preliminar).* Madrid: Ministerio de Educación y Formación profesional.

Olande, O. (2014). Graphical artefacts: Taxonomy of students' response to test items. *Educ Stud Math*, *85*, 53-74.

Peter-Koop, A. (2009). Teaching and understanding mathematical modelling through Fermi-problem. En B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education* (pp. 131-146). New York: Springer.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín & L. Puig (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: Ice - Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 39-63.

Rico, L., & Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L., & Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria.* Madrid: Pirámide.

Rico, L., Sierra, M., & Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En L. Rico & D. Madrid (Eds.), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares.* Madrid: Síntesis.

Rivkin, S. G., Hanushek, E. A., & Kain, J. F. (2005). Teachers, schools, and academic achievement. *Econometrica*, *2*(73), 417-458.

Rodríguez-Muñiz, L., Ferrando, I., & Montejo-Gámez, J. (2022). Oportunidades, retos y necesidades de la educación matemática. *Cuadernos de Pedagogía*, (531), 14-18.

Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos.*

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*(8), 255-281.

Ruiz-Hidalgo, J. (2023). *Sentido matemático (e insensibilidad). Ponencia presentada en el Equipo Docente del Departamento de Didáctica de la Matemática.*

Ruiz-Hidalgo, J., & Flores, P. (2022). Sentido matemático escolar. En L. Blanco, N. Climent, M. González, A. Moreno, G. Sánchez-Matamoros & C. de Castro C. Jiménez. (Eds.), *Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática* (pp. 55-79). Universidad de Granada.

Russell, J., Schifter, D., & Bastable, V. (2017). *Connecting arithmetic to algebra. Strategies for building algebraic thinking in the elementary grades.* Heinemann.

Sáenz, C. (2009). The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA). *Educational Studies in Mathematics*, (71), 123-143.

Scheiner, T. (2015). Lessons we have (not) learned from past and current conceptualizations of mathematics teachers' knowledge. En V. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the 9th Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 3248-3253). Prague, Czech Republic: CERME 9.

Schwartz, J. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication and division word problems*. Massachussets: MIT.

Segovia, I. (2020). *La formación de maestros en didáctica de la matemática en la Universidad de Granada. Ponencia impartida dentro del proyecto de coordinación docente del departamento de Didáctica de la Matemática.*

Segovia, I., & Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 499-536.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.

Segura, C. J. (2022). Flexibilidad y rendimiento en la resolución de problemas de estimación en contexto real. Un estudio con futuros maestros.

Sevinc, S., & Ferrando, I. (2022). *Turkish and Spanish Prospective Mathematics Teachers' Solutions to a Fermi-Based Modeling Problem in a Global Covid Pandemic. Comunicación presentada en CERME12.*

Sevinc, S., & Lesh, R. (2018). Training mathematics teachers for realistic math problems: a case of modeling-based teacher education courses. *ZDM. Mathematics Education*, (50), 301-314.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *2*(15), 4-14.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *2*(26), 114-145.

Soares, J., Blanton, M., & Kaput, J. (2006). Thinking algebraically across the elementary school curriculum. *Teaching Children Mathematics*, *12*(5), 228-235.

Sriraman, B. (2006). Conceptualizing the model-eliciting perspective of mathematical problem solving. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the CERME 4* (pp. 1686-1695). Sant Feliu de Guíxols: FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Steiner, H. G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics*, *5*(2), 11-17.

Steiner, H. G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *6*, 194-197.

Stillman, G. (2000). Impact of prior knowledge of task context on approaches to applications tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, *3*(19), 333-361.

Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S. (2015). Cultural, Social, Cognitive and Research Influences on Mathematical Modelling Education. En G. A. S. et al. (Ed.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 1-32). Springer International Publishing Switzerland.

Torres, M., Bizuela, B., Cañadas, M., & Moreno, A. (2022). Introducing Tables to Second-Grade Elementary Students in an Algebraic Thinking Context. *Mathematics*, (10), 56.

UNESCO. (1998). *Declaración mundial sobre educación superior para el siglo XXI.*

UNESCO. (2015). *La Agenda para el Desarrollo Sostenible.*

Universidad de Granada. (2009). *Grado en Maestro en Educación Primaria. Universidad de Granada. Boletín oficial de la Universidad de Granada.*

Universidad de Granada. (2016). *Normativa de evaluación y de calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada.*

Universidad de Granada. (2023a). *Guía docente de la asignatura Bases matemáticas para la educación primaria, curso 2023-2024.*

Universidad de Granada. (2023b). *Memoria académica. Curso académico 2022-2023.*

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trayectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*, 9-35.

Vasco, D., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema*, *54*(30), 222-239.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En M. L. R. Lesh (Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En M. B. J. Hiebert (Ed.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-162). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Verschaffel, L., Janssens, S., & Janssen, R. (2005). The development of mathematical competence in Flemish preservice elementary school teachers. *Teaching and Teacher Education*, *1*(21), 49-63.

Wess, R., & Greefrath, G. (2019). Professional competencies for teaching mathematical modelling-supporting the modelling-specific task competency of prospective teachers in the teaching laboratory. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1232-1239). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group; Freudenthal Institute, Utrecht University; ERME.

Wittrock, M. (1986). Student's thought processes. En M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on Teaching.* New York: Macmillan Publishing Company.

Parte VI

Anexos

A. Secuencia de tareas para el proyecto investigador

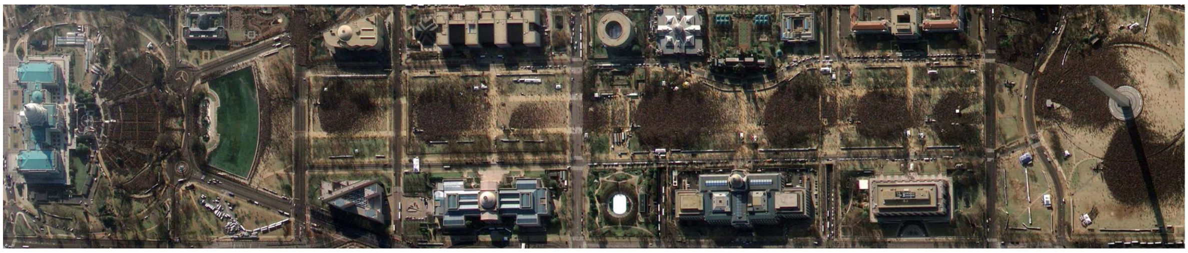
Tareas para el estudio E1

Tarea E1.1 *La imagen muestra la Gran Vía de Madrid en la manifestación del 11 de M. ¿Cuántas personas personas asistieron a la manifestación? Justifica con detalle tu respuesta.*

VALORES DE LOS FACTORES: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: 2D

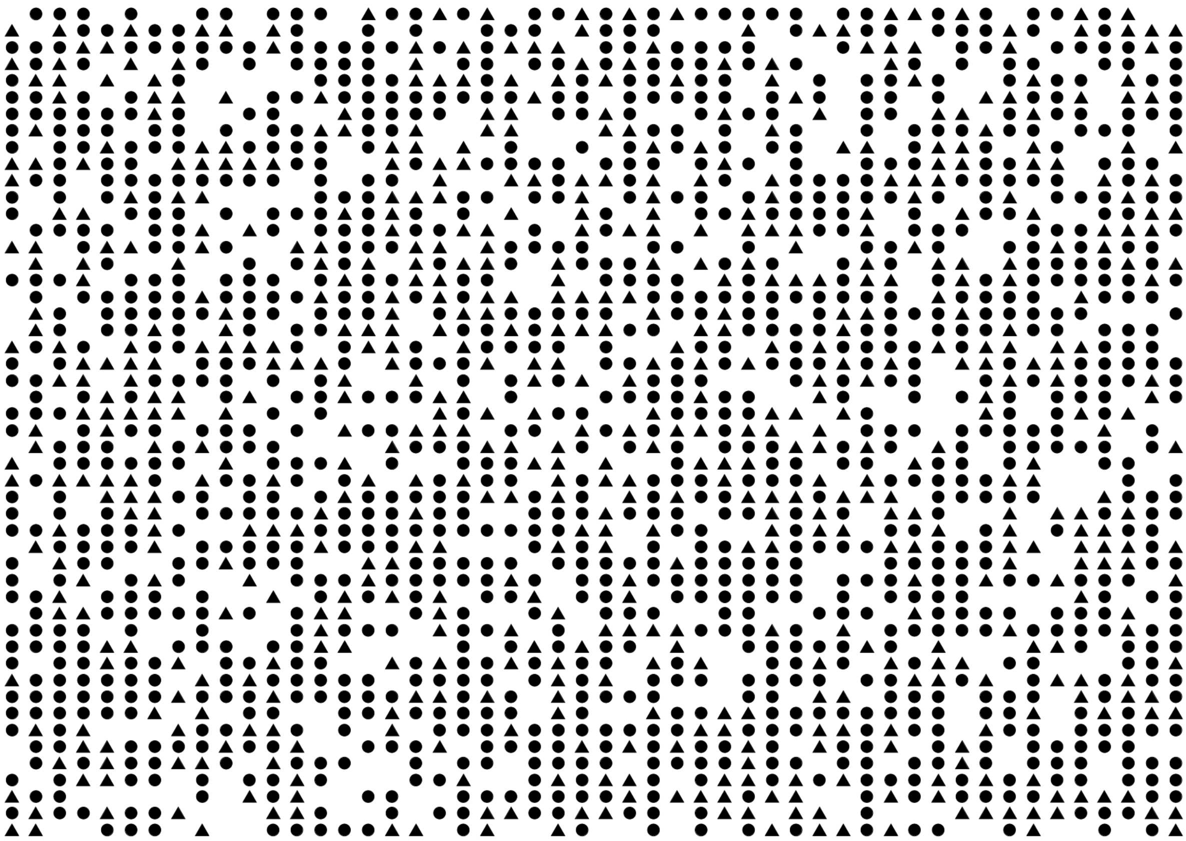
Tarea E1.2. *La imagen muestra una fotografía de la investidura del presidente Barack Obama. ¿Cuántas personas asistieron al evento? Justifica con detalle tu respuesta.*

Valores de los factores: Distribución: Grupos irregulares, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: 2D



Tarea E1.3. *¿Cuántos huecos en blanco muestra la imagen? Justifica con detalle tu respuesta.*

Valores de los factores: Distribución: Objetos aislados, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: 2D



Tareas para el estudio E2

Tarea E2.1. *Se quieren recortar antifaces en una cartulina de 1 m x 0,5 m, ¿cuántos se pueden recortar? Justifica con detalle tu respuesta*

Valores de los factores: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: 2D

Tarea E2.2. *Se quieren recortar antifaces en una cartulina de 594 cm x 481 cm, ¿cuántos se pueden recortar? Justifica con detalle tu respuesta*

Valores de los factores: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Mediano y Dimensión: 2D

Tarea E2.3. *Se quieren recortar antifaces en una cartulina de dimensiones 40 cm x 20 cm, ¿cuántos se pueden recortar? Justifica con detalle tu respuesta*

Valores de los factores: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Grande y Dimensión: 2D

Tareas para el estudio E3

Tarea E3.1. *¿Cuántas palomitas de maiz hacen falta para cubrir el suelo de la clase?*

Valores de los factores: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: 2D

Tarea E3.2. *¿Cuántas latas de refresco caben en una caja de dimensiones 1 m x 1 m x 0,5 m? Justifica con detalle tu respuesta*

Valores de los factores: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: Reducible a 2D

Tarea E3.3. *¿Cuántos racimos de uva caben en una caja de dimensiones 1 m x 1 m x 0,5 m? Justifica con detalle tu respuesta*

Valores de los factores: Distribución: Uniforme, Tamaño relativo de los objetos: Pequeño y Dimensión: 3D.

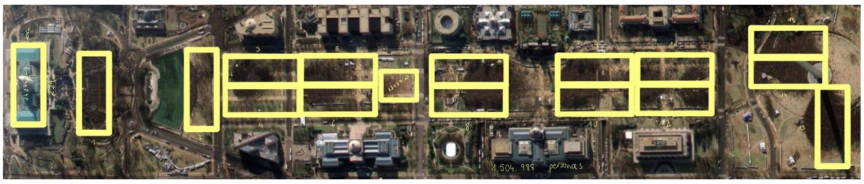
B. Ejemplo de análisis de una producción escrita

Tarea y producción con informe del estudiante

Enunciado (Seguidores del presidente) Barack Obama fue elegido presidente de los Estados Unidos de América en 2009. La asistencia a su ceremonia de investidura fue histórica, y se puede ver en la fotografía de debajo.

Proporciona una estimación de la cantidad de personas que asistieron a la ceremonia de investidura de Obama. Explica tu solución.

Producción escrita



Estimando que el edificio tiene forma rectangular y conociendo sus dimensiones **(106 x 229)**, hemos calculado su área total **(b • a = 106 x 229= 24.274 m^2)**, de tal forma que el rectángulo sobre el que se asienta el capitolio lo hemos reproducido 15 veces y media sobre el plano adjunto. Asimismo, considerando que por cada metro cuadrado hay 4 personas, en cada rectángulo habría 97.096 personas **(24.274 • 4 = 97.096 personas)**. Por lo tanto, teniendo en cuenta esta cantidad de personas, las hemos multiplicado por la cantidad de rectángulos plasmados en la imagen **(97.096 • 15,5 = 1.504.988 personas).** Finalmente, basándonos en el cálculo anterior, concluimos que a la investidura de Obama acudieron aproximadamente 1.504.988 personas.

Caracterización del modelo subyacente

Sistema	**Matematización**	**Representaciones**
Relaciones - En la superficie que ocupa la planta del Capitolio caben 97 096 personas - A la investidura de Obama acudieron 1 504 988 personas (respuesta a la pregunta	Resultados - La planta del edificio (Capitolio) es rectangular, de dimensiones 106 m x 229 m y 24 274 m^2 de área - La superficie ocupada por personas se aproxima por 15 veces y media la superficie ocupada por la planta del Capitolio - En cada m^2 caben 4 personas	Verbales - *"Estimando que el edificio tiene forma rectangular"* - *"...de tal forma que el rectángulo sobre el que se asienta el capitolio lo hemos reproducido 15 veces y media sobre el plano adjunto"* - *"...considerando que en cada metro cuadrado caben 4 personas"*
Objetos - Capitolio	Variables - Área del Capitolio (AC) - Área total ocupada por personas en el parque (AP) - Nº de veces que cabe el capitolio en el área ocupada por personas (nC) - Nº de personas que caben en 1 m^2 (d)	Pictóricas 
	Propiedades - Fórmula del área del rectángulo - Propiedad extensiva del área - Invarianza del área frente a movimientos rígidos Conceptos - Rectángulo - Área - Densidad (personas/m^2)	Simbólicas (integradas en el discurso verbal): - **(106 x 229)**. - **(b • a = 106 x 229= 24.274 m^2)** - 97.096 personas **(24.274 • 4 = 97.096 personas)**. - **(97.096 • 15,5 = 1.504.988 personas)** - 1.504.988 personas - Incluyen algunos símbolos no numéricos como la fórmula del área del rectángulo y "m^2" - No usan símbolos propios para las personas como unidad de medida ni para las variables utilizadas.
Caracterización del modelo empleado: El número de personas P que asistieron a la investidura se puede estimar mediante P = AP d = AC nC d		

C. Guías docentes de la asignatura “Bases matemáticas para la educación primaria”

Se adjuntan dos ejemplares de la guía docente de la asignatura. En primer lugar se encuentra la versión actual (curso 23-24), y posteriormente se incluye la guía de otros cursos, que permite observar las modificaciones hechas en la organización de los contenidos.

Contenido de las guías docentes

- ✓ Datos académicos y administrativos de la asignatura
- ✓ Prerrequisitos y recomendaciones
- ✓ Breve descripción de contenidos (según memoria de verificación del grado).
- ✓ Competencias generales y específicas.
- ✓ Objetivos (expresados como resultados esperables de la enseñanza).
- ✓ Temario detallado de la asignatura.
- ✓ Bibliografía y enlaces recomendados.
- ✓ Metodología docente.
- ✓ Evaluación.
- ✓ Información adicional.

Guía docente de la asignatura

Bases Matemáticas en la Educación Primaria (2571113)

Fecha de aprobación: Guía provisional

Grado	Grado en Educación Primaria	Rama	Ciencias Sociales y Jurídicas
Módulo	Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas	Materia	Bases Matemáticas en la Educación Primaria

Curso	1º	Semestre	1º	Créditos	9	Tipo	Obligatoria

PRERREQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES

Tener conocimientos adecuados sobre las matemáticas de la Educación Primaria.

BREVE DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS (Según memoria de verificación del Grado)

- Estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos de los mismos, utilizando materiales y recursos sobre los bloques de matemáticas de Educación Primaria: Números y operaciones; Medida, estimación y cálculo; Geometría (las formas y figuras y sus propiedades); Tratamiento de la información, azar y probabilidad.
- Los contenidos transversales de matemáticas en Educación Primaria: Sentido numérico; Resolución de problemas; Uso de las nuevas tecnologías en matemáticas; Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

COMPETENCIAS ASOCIADAS A MATERIA/ASIGNATURA

COMPETENCIAS GENERALES

- CG01 - Analizar y sintetizar la información
- CG05 - Comunicar oralmente y por escrito con orden y claridad, en la propia lengua y en una segunda lengua
- CG06 - Buscar, seleccionar, utilizar y presentar la información usando medios tecnológicos avanzados
- CG08 - Trabajar en equipo y comunicarse en grupos multidisciplinares
- CG13 - Investigar y seguir aprendiendo con autonomía

COMPETENCIAS ESPECÍFICAS

- CE01 - Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos
- CE09 - Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible
- CE11 - Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación. Discernir selectivamente la información audiovisual que contribuya a los aprendizajes, a la formación cívica y a la riqueza cultural
- CE50 - Adquirir competencias matemáticas básicas (numéricas, cálculo, geométricas, representaciones especiales, estimación y medida, organización e interpretación de la información, etc.)
- CE52 - Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas
- CE53 - Plantear y resolver problemas vinculados con la vida cotidiana
- CE55 - Desarrollar y evaluar contenidos del currículo mediante recursos didácticos apropiados y promover las competencias correspondientes en los estudiantes

RESULTADOS DE APRENDIZAJE (Objetivos)

- Conocer y relacionar los principales conceptos, estructuras y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de Educación Primaria.
- Comprender y emplear adecuadamente los hechos y las propiedades de los conceptos y estructuras matemáticos.
- Utilizar correctamente procedimientos matemáticos de forma escrita y simbólica.
- Analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas.
- Manejar y relacionar los diferentes modos de representar los conceptos y procedimientos matemáticos propios de Educación Primaria.
- Modelizar fenómenos de diferentes disciplinas con nociones y herramientas matemáticas básicas.
- Enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos.
- Utilizar modelos manipulativos, gráficos, simbólicos y tecnológicos para expresar relaciones, propiedades y operaciones matemáticas.
- Emplear el lenguaje simbólico en matemáticas y relacionarlo con el lenguaje cotidiano.
- Conocer y manejar la estructura básica del currículo de matemáticas de Educación Primaria en cuanto a sus contenidos, y describirla con claridad y precisión.
- Percibir el conocimiento matemático como parte de nuestra cultura, con un carácter interdisciplinar y socialmente útil.
- Valorar la labor educativa en matemáticas como un compromiso profesional, ético y social.

PROGRAMA DE CONTENIDOS TEÓRICOS Y PRÁCTICOS

TEÓRICO

Unidad 1: Números y álgebra
1.1. Números. Clasificación, propiedades, representaciones y usos
1.2. Interpretación de las operaciones. Planteamiento y resolución de problemas aritméticos
1.3. Estrategias de cálculo y algoritmos. Propiedades de los números y las operaciones
1.4. Patrones y relaciones. Interpretación y representaciones.
Unidad 2: Geometría

2.1. Elementos geométricos en el plano y en el espacio. Representaciones y visualización
2.2. Propiedades de figuras planas y cuerpos: Modelización geométrica
2.3. Transformaciones en el plano y regularidades
2.4. Razonamiento y prueba en Geometría
Unidad 3: Medida
3.1. Percepción de las magnitudes escolares: longitud, superficie, volumen, amplitud, masa, capacidad, tiempo y dinero
3.2. Unidades de medida: tipos, elección de unidades y conversión
3.3. Medición directa. Estrategias personales.
3.4. Medición indirecta. Interpretación de las fórmulas escolares
3.5. Estimación de medidas
Unidad 4: Estadística y probabilidad
4.1. Estudios estadísticos. Recogida de información, tipos de datos y variables
4.2. Representación de datos: tablas, gráficos y medidas estadísticas. Interpretaciones
4.3. Extracción de conclusiones e inferencia estadística
4.4. Percepción de fenómenos aleatorios y cuantificación de la incertidumbre

PRÁCTICO

Las prácticas en pequeños grupos están asociadas a los cuatro bloques básicos de contenido (Aritmética, Geometría, Magnitudes y su medida, y Estadística y probabilidad) y se realizarán a través del uso de materiales manipulativos y/o recursos informáticos. Este diseño de prácticas de laboratorio persigue un doble objetivo.
En primer lugar, se pretende que los estudiantes, en pequeños grupos y de manera autónoma, exploren y experimenten actividades matemáticas para introducirse en el trabajo con nuevas nociones matemáticas o para profundizar en el estudio de nociones ya introducidas en sesiones anteriores. En segundo lugar, estas actividades contribuyen a conocer y utilizar un gran número de materiales y recursos, tanto manipulativos como tecnológicos, que pueden emplearse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.
Algunos de los núcleos temáticos de los cuatro bloques de prácticas son los siguientes:

1. Aritmética: Sistemas de numeración; algoritmos y métodos de cálculo; problemas aritméticos; fracciones y decimales.
2. Geometría: Polígonos: clasificación y propiedades; patrones y formas; poliedros: clasificación y elementos básicos; transformaciones geométricas.
3. Magnitudes y medida: Medidas directas e indirectas; instrumentos de medida; sistema métrico decimal.
4. Estadística y probabilidad: Organización de datos; interpretación de información en medios de comunicación; fenómenos relacionados con el azar.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA FUNDAMENTAL

- CARRILLO, J., CONTRERAS, L. C., CLIMENT, N., MONTES, M. A., ESCUDERO, D. I. Y FLORES, E. (2016). Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria. Paraninfo.
- CHAPIN, S. H., & JOHNSON, A. (2006). Math Matters: Understanding the Math You Teach
- Grades K-8 (2nd Ed.). Math solutions publications.
- SEGOVIA. I. Y RICO, L. (Coord.) (2011). Matemáticas para maestros de educación primaria. Pirámide.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

A) Libros que ocupan todos los contenidos

- ALSINA, Á. (2019). Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años). Graó.
- BLANCO, L., CLIMENTE, N., GONZÁLEZ, M. T., MORENO, A., SÁNCHEZ-MATAMOROS, G., DE CASTRO, C. Y JIMÉNEZ, C. (Eds.) (2023), Aportaciones al desarrollo del currículo desde la investigación en educación matemática. Editorial Universidad de Granada.
- CALVO, C., CARRILLO, A., DE LA FUENTE, A., DE LEÓN, M., GONZÁLEZ, M. J., GORDALIZA, A., GUEVARA, I., LÁZARO, C., MONZÓ, O., MORENO, A. J., RODRÍGUEZ, L. J., RODRÍGUEZ, J. Y SERRADÓ, A. (2021). Bases para la elaboración de un currículo de Matemáticas en Educación no Universitaria. Comité Español de Matemáticas.
- CASTRO, E. (Edt) (2001). Didáctica de la matemática en la Educación primaria. Síntesis.
- CHAMORRO, C. (Coord.) (2003). Didáctica de las matemáticas para primaria. Pearson-Prentice Hall.
- GODINO, J. D. (Dir.) (2004). Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. (Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino
- LLINARES, S. Y SANCHEZ, V. (1988). Fracciones. Síntesis.
- MAZA, C. (1991). Enseñanza de la suma y de la resta. Síntesis.
- RESNICK, L. Y FORD, W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Paidós-MEC.
- VAN DE WALLE, J. A. (2009) Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally. Longman, New York.

B1) Centrados en números y álgebra

- BURGOS, M. (2023). Razonamiento algebraico elemental. Implicaciones en la formación de profesores. Servicio de publicaciones de la Universidad de Almería.
- CAÑADAS, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 73, 7-13.
- CASTRO E., RICO L., CASTRO E. (1988) Números y operaciones. Fundamento para una aritmética escolar. Síntesis.
- CENTENO, J. (1988). Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué? Síntesis.
- GARCÍA-PEREZ, M. T. Y ADAMUZ-POVEDANO, N. (2019). Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico. Fundamentos, recursos y actividades para iniciar el aprendizaje. Octaedro.
- GOMEZ B. (1988). Numeración y Cálculo. Síntesis.

B2) Centrados en geometría

- ALSINA, C., BURGUES, C., FORTUNY, J. M. (1987). Invitación a la didáctica de la geometría. Síntesis.
- ALSINA, C., BURGUES, C., FORTUNY, J. M. (1988). Materiales para construir la geometría. Síntesis.
- GUILLEN G. (1991). Poliedros. Síntesis.

B3) Centrados en medida

- CHAMORRO, C., BELMONTE, J. M. (1988) El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. Síntesis.
- OLMO, A., MORENO, F. y GIL, F. (1988) Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas? Síntesis.
- SEGOVIA, I., CASTRO E., CASTRO E. y RICO L. (1989). Estimación en cálculo y medida. Síntesis.

B4) Centrados en estadística y probabilidad

- GODINO, J. D., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1987) Azar y probabilidad. Síntesis.

OTROS RECURSOS:

- Libros de texto de Matemáticas de Educación Primaria.
- Materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas de Educación Primaria.

ENLACES RECOMENDADOS

- http://nlvm.usu.edu/es/ (español)
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/ (español)
- http://clic.xtec.cat/db/listact_es.jsp (español)
- https://www.geogebra.org/m/dby8grkb (español)
- https://es.mathigon.org/ (español)
- https://www.geogebra.org/?lang=es-ES (español)
- https://tuvalabs.com/ (español)
- https://pensamientoalgebraico.es/es/actividades/primaria-6-11-anos (español)
- http://illuminations.nctm.org/mobile/ (inglés)
- https://nrich.maths.org/ (inglés)

METODOLOGÍA DOCENTE

- MD01 - Aprendizaje cooperativo. Desarrollar aprendizajes activos y significativos de forma cooperativa.
- MD02 - Aprendizaje por proyectos. Realización de proyectos para la resolución de un problema, aplicando habilidades y conocimientos adquiridos.
- MD03 - Estudio de casos. Adquisición de aprendizajes mediante el análisis de casos reales o simulados.
- MD04 - Aprendizaje basado en problemas. Desarrollar aprendizajes activos a través de la resolución de problemas.

EVALUACIÓN (instrumentos de evaluación, criterios de evaluación y porcentaje sobre la calificación final)

EVALUACIÓN ORDINARIA

La evaluación del nivel de adquisición de las competencias, en convocatoria ordinaria, será continua y formativa, atendiendo a los aspectos del desarrollo de la materia, en la que se aprecie el trabajo individual y en grupo, así como el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos y su aplicación práctica. Para optar a evaluación continua será imprescindible que el docente disponga de observaciones de cada estudiante en un porcentaje igual o superior al 70% de las clases prácticas impartidas. Estas observaciones se centrarán en su forma de trabajar, su compromiso con la asignatura, la dedicación a la misma o las destrezas que manifiesta, entre otras.
La calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los diferentes apartados que integran el sistema de evaluación:
(1) Valoración de una o varias pruebas escritas.
(2) Valoración de tareas y pequeños proyectos, realizados individualmente o en equipo. En ellos se evaluarán la presentación, redacción y claridad de ideas, estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo que argumenta, capacidad y riqueza de la crítica que se hace, y actualización de la bibliografía consultada.
(3) Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo, y en las sesiones de puesta en común.
La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente; el peso de cada uno de ello es:

- apartado (1): 50 %

- apartado (2): 40 %
- apartado (3): 10 %

En caso de no superar alguno de los anteriores apartados, que conforman la evaluación ordinaria de la asignatura, el estudiante tendrá que superar una prueba final, en convocatoria de evaluación extraordinaria.

EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

La evaluación extraordinaria de la asignatura pretende apreciar el aprendizaje significativo de los estudiantes respecto a los contenidos teóricos de la asignatura y su aplicación práctica. Si un estudiante hubiese superado alguno de los apartados (1) o (2) que conforman la evaluación ordinaria de la asignatura, sólo debe superar las pruebas escritas que se refieran a los apartados no superados en dicha convocatoria, si así lo desea. En otro caso, es decir, si el estudiante no ha superado ninguno de los apartados recogidos en la evaluación ordinaria, en esta convocatoria debe superar una, o varias, pruebas escritas, teórica y práctica con peso en la calificación global correspondiente al 100%. La Calificación final deberá recoger la superación de las distintas pruebas.

EVALUACIÓN ÚNICA FINAL

De acuerdo al procedimiento establecido en los artículos 6 y 8 de la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada aprobada por Consejo de Gobierno el 20 de mayo de 2013, el alumnado podrá acogerse, mediante petición formulada al director del departamento, a una evaluación única final que incluirá las pruebas teóricas y prácticas necesarias para acreditar que han adquirido las competencias descritas en esta Guía Docente.
Aquellos estudiantes que tengan concedida la condición de evaluación única, por no cumplir con el método de evaluación continua por los motivos recogidos en la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada (http://secretariageneral.ugr.es/pages/normativa/fichasugr/ncg7121/!), debe superar una, o varias, pruebas escritas acerca de sus conocimientos teóricos (50% en la calificación global) y prácticos (50% en la calificación global). La Calificación final deberá recoger la superación de las distintas pruebas.

INFORMACIÓN ADICIONAL

En aquellas pruebas de evaluación que requieran o tengan previsto la utilización de audio y/o video durante el desarrollo de la misma, este uso se hará conforme a las directrices establecidas en las instrucciones y recomendaciones para la aplicación de la normativa de protección de datos, intimidad personal o domiciliaria marcadas por la Secretaria General u órgano competente de la UGR.
Siguiendo las indicaciones recogidas en la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada (https://www.ugr.es/universidad/normativa/texto-consolidado-normativa-evaluacion-calificacion-estudiantes-universidad-granada), destacamos lo recogido en el artículo 15 sobre la originalidad de los trabajos presentados por los alumnos:

1. La Universidad de Granada fomentará el respeto a la propiedad intelectual y transmitirá a los estudiantes que el plagio es una práctica contraria a los principios que rigen la formación universitaria. Para ello procederá a reconocer la autoría de los trabajos y su protección de acuerdo con la propiedad intelectual según establezca la legislación vigente.

El plagio, entendido como la presentación de un trabajo u obra hecho por otra persona como propio o la copia de textos sin citar su procedencia y dándolos como de elaboración propia, conllevará automáticamente la calificación numérica de cero en la asignatura en la que se hubiera detectado, independientemente del resto de las calificaciones que el estudiante hubiera obtenido. Esta consecuencia debe entenderse sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudieran incurrir los estudiantes que plagien.

GUIA DOCENTE DE LA ASIGNATURA

BASES MATEMÁTICAS PARA LA EDUCACIÓN PRIMARIA

Curso
(Fecha última actualización:)
(Fecha de aprobación:)

MÓDULO	MATERIA	CURSO	SEMESTRE	CRÉDITOS	TIPO
Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	Bases matemáticas para la educación primaria	1º	1	9	Obligatoria

Palabras Clave: Contenidos matemáticos escolares, Representación, Materiales y recursos, Aplicaciones y Resolución de problemas.

PROFESOR DEL GRUPO H	TUTORÍAS
Nombre y apellidos: Jesús Montejo Gámez **Correo elecrónico:** jmontejo@ugr.es	**Despacho:** 403 (piso más alto posible en las escaleras de la biblioteca). **Horarios:** Lunes, de 17:30 h a 19:30 h (tarde) Viernes, de 10:00 h a 14:00 h (mañana)

GRADO EN EL QUE SE IMPARTE	OTROS GRADOS A LOS QUE SE PODRÍA OFERTAR
Grado en Educación Primaria	Grado en Matemáticas

PRERREQUISITOS Y RECOMENDACIONES

Tener conocimientos adecuados sobre los contenidos matemáticos de la Educación Primaria

BREVE DESCRIPCIÓN DE CONTENIDOS (SEGÚN MEMORIA DE VERIFICACIÓN DEL GRADO)

Estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sus formas de representación y modelización, fenomenología y aspectos históricos de los mismos, utilizando materiales y recursos sobre los bloques de matemáticas de Educación Primaria: Números y operaciones; La medida, estimación y cálculo; Geometría (las formas y figuras y sus propiedades); Tratamiento de la información. Azar y probabilidad.
Los contenidos transversales de matemáticas en Educación Primaria: Sentido numérico, Resolución de problemas, Uso de las nuevas tecnologías en matemáticas, Dimensión histórica, social y cultural de las matemáticas.

COMPETENCIAS GENERALES Y ESPECÍFICAS

- Analizar y sintetizar la información.
- Comunicar oralmente y por escrito con orden y claridad.
- Buscar, seleccionar, utilizar y presentar la información usando los medios tecnológicos adecuados.
- Trabajar en equipo.
- Investigar y seguir aprendiendo con autonomía.

- Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible desde el papel que corresponde a la Educación Matemática.
- Conocer cuáles son los contenidos de Matemáticas en el currículo de Educación Primaria y su organización en el mismo
- Desarrollar competencias matemáticas básicas (pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y emplear soportes y herramientas tecnológicas) sobre los bloques de contenido de las matemáticas escolares.
- Conocer las matemáticas de la Educación Primaria, su relación interdisciplinar con las demás áreas y los conocimientos didácticos referidos a su historia, fenomenología, sistemas de representación y modelización.
- Conocer y utilizar materiales y recursos didácticos así como tecnologías de la información y de la comunicación, que sirven para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Analizar, razonar y comunicar propuestas matemáticas
- Plantear y resolver problemas de matemáticas vinculados con la vida cotidiana.
- Valorar la relación entre matemáticas y ciencias como uno de los pilares del pensamiento científico.

OBJETIVOS (EXPRESADOS COMO RESULTADOS ESPERABLES DE LA ENSEÑANZA)

- Conocer y relacionar los principales conceptos, estructuras y procedimientos que conforman los temas de las matemáticas escolares de Educación Primaria.
- Comprender y emplear adecuadamente los hechos y las propiedades de los conceptos y estructuras matemáticos.
- Utilizar correctamente procedimientos matemáticos de forma escrita y simbólica.
- Analizar, razonar y comunicar eficazmente argumentaciones matemáticas.
- Manejar y relacionar los diferentes modos de representar los conceptos y procedimientos matemáticos propios de Educación primaria.
- Modelizar fenómenos de diferentes disciplinas con nociones y herramientas matemáticas básicas.
- Enunciar, formular y resolver problemas matemáticos mediante diferentes estrategias en una variedad de situaciones y contextos.
- Utilizar modelos manipulativos, gráficos, simbólicos y tecnológicos para expresar relaciones, propiedades y operaciones matemáticas.
- Emplear el lenguaje simbólico en matemáticas y relacionarlo con el lenguaje cotidiano.
- Conocer y manejar la estructura básica del currículo de matemáticas de Educación Primaria en cuanto a sus contenidos, y describirla con claridad y precisión.
- Percibir el conocimiento matemático como parte de nuestra cultura, con un carácter interdisciplinar y socialmente útil.
- Valorar la labor educativa en matemáticas como un compromiso profesional, ético y social.

TEMARIO DETALLADO DE LA ASIGNATURA

A) EN GRAN GRUPO

- **Tema 1. EL NÚMERO NATURAL. SISTEMAS DE NUMERACIÓN.** Número natural. Concepto y usos. Cuantificación y ordenación. Sistemas de Numeración: Sistemas Posicionales. El Sistema de Numeración Decimal.
- **Tema 2. ARITMÉTICA**. Estructura aditiva: suma y resta de números naturales; conceptos y propiedades; usos. Estructura multiplicativa: producto y división de números naturales; conceptos y propiedades; usos. Divisibilidad. Cálculo mental y Estimación. La calculadora en el aula. Los problemas

aritméticos. Resolución de Problemas. Introducción a los números enteros.

- **Tema 3. NÚMEROS RACIONALES.** Concepto y significados de fracción. Operaciones con fracciones. Equivalencia de fracciones. El número racional. Operaciones con racionales. Propiedades. Ordenación de racionales. Representación gráfica. Números decimales. Representación decimal de los números racionales. Operaciones con decimales. Ordenación de decimales. Razón y proporción. Porcentajes.
- **Tema 4. FIGURAS GEOMÉTRICAS.** Las formas y el entorno. La geometría y sus aplicaciones. Elementos fundamentales, del plano y del espacio: relaciones y propiedades. Figuras en el plano (polígonos y círculos) y cuerpos en el espacio (poliedros y cuerpos de revolución): elementos y propiedades. Representaciones planas de los cuerpos geométricos. Visualización espacial.
- **Tema 5. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS PLANAS. ORIENTACIÓN ESPACIAL**. Isometrías en el plano: traslaciones, giros y simetrías; composición de movimientos. Regularidades: simetrías, frisos y rosetones. Recubrimientos del plano. Posiciones en el plano y en el espacio: sistemas de coordenadas. Mapas, planos y redes.
- **Tema 6. MAGNITUDES Y SU MEDIDA.** Idea de magnitud. Cantidad. Tipos de magnitudes. Las magnitudes longitud, superficie, volumen, amplitud, capacidad, tiempo y dinero. Medida directa de magnitudes; sistemas de unidades de medida; evolución histórica Medida indirecta de magnitudes: proporcionalidad aritmética y geométrica. Estimación y aproximación en la medida.
- **Tema 7. INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA Y A LA PROBABILIDAD.** La Estadística y sus aplicaciones. Estudios estadísticos: Población, censo y muestra. Variables estadísticas, distribución. Tablas y gráficos. Medidas de posición central. Medidas de dispersión. Fenómenos y experimentos aleatorios. Sucesos. Probabilidad: asignación subjetiva; estimación frecuencial y asignación clásica (regla de Laplace).

B) EN SEMINARIOS DE GRUPOS REDUCIDOS
Las prácticas están asociadas a los cuatro bloques básicos de contenido (Aritmética, Geometría, Magnitudes y su medida y Estadística y probabilidad) y se realizarán a través del uso de materiales manipulativos y/o recursos informáticos. Este diseño de prácticas de laboratorio persigue un doble objetivo: En primer lugar, se pretende que los estudiantes, en pequeños grupos y de manera autónoma, exploren y experimenten actividades matemáticas para introducirse en el trabajo con nuevas nociones matemáticas o para profundizar en el estudio de nociones ya introducidas en sesiones anteriores .En segundo lugar, estas actividades contribuyen a conocer y utilizar un gran número de materiales y recursos, tanto manipulativos como tecnológicos, que pueden emplearse en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en Educación primaria.

los núcleos temáticos de los cuatro bloques de prácticas se corresponden con los bloques de contenidos de la Educación Primaria

- Aritmética: Sistemas de numeración; cálculo: algoritmos y métodos; problemas aritméticos; fracciones y decimales.
- Geometría: Polígonos: clasificación y propiedades; patrones y formas; poliedros: clasificación y elementos básicos; transformaciones geométricas.
- Magnitudes y medida: Medidas directas e indirectas; instrumentos de medida; sistema métrico decimal.
- Estadística y probabilidad: Organización de datos; interpretación de de información en medios de comunicación; fenómenos relacionados con el azar.

C) PRÁCTICAS DE CAMPO
Las prácticas a realizar en el exterior tendrán un carácter más trasversal e interdisciplinar que las prácticas de laboratorio. En el desarrollo de estas prácticas podrán estar implicadas otras áreas de conocimiento. Como ejemplos de algunas prácticas que se pueden realizar citamos dos: itinerarios fotográficos y visitas al Parque de las Ciencias o centro similar

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA FUNDAMENTAL:

- CASTRO, E. (Edt.)(2001). *Didáctica de la matemática en la Educación primaria.* Madrid: Síntesis.
- GODINO, J. D. (Dir.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. (Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino, y en la fotocopiadora de la Facultad)
- SEGOVIA. I. Y RICO, L. (Coord.) (2011). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Madrid: Pirámide.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA:

- ALSINA, C., BURGUES, C., FORTUNY, J. Mª. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis.
- ALSINA, C., BURGUES, C., FORTUNY, J. M. (1988). *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis.
- CASTRO E., RICO L., CASTRO E. (1988) *Números y operaciones. Fundamento para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- CENTENO, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.
- CHAMORRO, C. (Coord..) (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson-Prentice Hall.
- CHAMORRO, C., BELMONTE, J. M. (1988) *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales*. Madrid: Síntesis.
- GODINO, J. D., BATANERO, C. y CAÑIZARES, M. J. (1987) *Azar y probabilidad.* Madrid: Síntesis.
- GOMEZ B. (1988). *Numeración y Cálculo*. Madrid: Síntesis.
- GUILLEN G. (1991). *Poliedros.* Madrid: Síntesis.
- LLINARES, S. Y SANCHEZ, V. (1988). *Fracciones.* Madrid: Síntesis.
- MAZA, C. (1991). *Enseñanza de la suma y de la resta*. Madrid: Síntesis.
- OLMO, A., MORENO, F. y GIL, F. (1988) *Superficie y volumen. ¿Algo mas que el trabajo con formulas?.* Madrid: Síntesis.
- RESNICK, L. Y FORD, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Madrid: Paidós-MEC.
- SEGOVIA, I., CASTRO E., CASTRO E. y RICO L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid: Síntesis.
- VAN DE WALLE, J. A.. (2009) *Elementary and Middle School Mathematics. Teaching Developmentally*. Longman, New York.

Se recomienda además la consulta de libros de texto de Enseñanza Primaria

ENLACES RECOMENDADOS

Ejemplos de páginas con recursos educativos virtuales o unidades didácticas:
http://nlvm.usu.edu/es/ (español)
http://illuminations.nctm.org/ (inglés)
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/ (español)
http://clic.xtec.cat/db/listact_es.jsp (español)

METODOLOGÍA DOCENTE

Combinará diferentes estrategias:

- **Lecciones magistrales** (Clases teóricas-expositivas, en gran grupo). La lección magistral se utilizará para presentar, orientar y sintetizar algunos de los temas básicos del programa. El profesor presentará los temas del programa, facilitando la comprensión de aquellos contenidos teóricos que tengan mayor complejidad, guiando las reflexiones y análisis de los alumnos basadas en las lecturas de los textos recomendados en la bibliografía y moderará posibles debates. Los alumnos tendrán la oportunidad de resolver tareas matemáticas que pueden ejemplificar o introducir los contenidos tratados.

- **Actividades prácticas** (Clases prácticas o grupos de trabajo). Las actividades prácticas podrán tener dos orientaciones, laboratorio e informática. En las prácticas de laboratorio, el alumno trabajará con materiales didácticos manipulativos y las prácticas desarrolladas en el aula de informática, se centrarán en el manejo de software educativo y recursos de Internet. En ambos casos, los materiales y recursos considerados se centran en los contenidos del temario y promueven la adquisición de conceptos y el desarrollo de destrezas que debe dominar un maestro en relación con la enseñanza de las matemáticas (análisis semántico de problemas, justificación de propiedades o técnicas matemáticas, entre otras). En estas prácticas se priorizará la actuación de los alumnos, primero individualmente, y luego en grupos de 4 ó 5 alumnos. El profesor presentará las actividades, atenderá a las dudas, animará y orientará el trabajo de los alumnos y las puestas en común. Para ello se requiere de algún documento mediador que sirva de guía a las prácticas, tales como cuadernos, guiones u otros, que proporcionen instrucciones y muestren las actividades pertinentes. Será obligatoria la asistencia a al menos el 70% de estas clases prácticas.
- **Actividades no presenciales individuales** (Trabajo autónomo y estudio individual). La actividad básica es el estudio, por parte del alumno, de los contenidos indicados en el temario, empleando los documentos recomendados, así como la resolución de tareas correspondientes a esos contenidos. La elaboración de resúmenes e informes que sinteticen la información básica de cada tema, también forma parte del trabajo individual y facilitará y promoverá su memorización y comprensión. Estos informes deberán presentarse con una ortografía y redacción cuidada.
  Por otro lado, los alumnos realizarán trabajos en los que afrontarán un problema, recopilarán y organizarán información para resolverlo y redactarán el informe correspondiente. Algunos trabajos podrán tener carácter transversal participando distintas áreas de conocimiento.
- **Actividades no presenciales grupales** (estudio y trabajo en grupo). Estas actividades implicarán la reflexión, discusión, debate y redacción de informes con los medios tecnológicos adecuados por parte de todos los miembros del equipo de los trabajos de prácticas y otros trabajos como los que se sugieren en las prácticas de exteriores.
- **Tutorías académicas.** Reuniones periódicas individuales y/o grupales entre el profesorado y el alumnado para guiar, supervisar y orientar las distintas actividades académicas propuestas (con un número mínimo de reuniones obligatorias). Algunas de estas acciones tutoriales se llevarán a cabo mediante plataformas virtuales.

De manera resumida las metodologías activas de enseñanza-aprendizaje se distribuyen de la siguiente forma:

Aprendizaje cooperativo MD1	Aprendizaje por proyectos MD2	Estudio de casos MD3	Aprendizaje b. en problemas MD4	Metodología expositiva MD5	Contrato de aprendizaje MD6
30-50 %	10-20 %	0-10 %	10-20 %	30-50%	0-10 %

PROGRAMACIÓN TEMPORAL

La programación que se presenta es orientativa; cada profesor la adaptará a las características del grupo de estudiantes así como a las circunstancias del calendario académico; también, cada profesor articulará las actividades teóricas y prácticas de acuerdo con el modelo didáctico que considere más adecuado.

El horario, en el caso de las actividades presenciales, trata de poner de manifiesto un tratamiento equilibrado de

los diferentes temas, de la teoría y de la práctica. En el caso de las Actividades no presenciales, pretende servir de orientación al alumno acerca del tiempo de dedicación para que la asignatura sea superada satisfactoriamente. La temporalidad surge de la distribución semanal del tiempo total de la asignatura según el concepto de crédito ECTS y no pretende establecer un horario inflexible del trabajo del alumno ni del profesor.
En la semana 7ª que refleja **A-E** en lugar de un tema, estará dedicada a los ajustes pertinentes del programa según el desarrollo del curso y evaluación.

	Tema	Actividades presenciales (NOTA: Modificar según la metodología docente propuesta para la asignatura)				Actividades no presenciales (NOTA: Modificar según la metodología docente propuesta para la asignatura)				
		Sesiones teóricas (horas)	Sesiones prácticas (horas)	Grupos reducidos (horas)	Exámenes (horas)	Tutorías individuales (horas)	Tutorías grupales (horas)	Estudio y trabajo individual del alumno (horas)	Trabajo en grupo (horas)	TOTAL
Semana 1	1º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 2	1º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 3	2º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 4	2º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 5	3º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 6	3º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 7	**A-E**	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 8	4º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 9	4º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 10	5º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 11	5º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 12	6º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 13	6º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 14	7º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75
Semana 15	7º	2	1	1.50		0,05	0,2	8	2	14.75

Periodo exámenes	Evaluación final				3.25						3.75
Total horas		30	15	22.5	3.75		0.75	3	120	30	225

EVALUACIÓN

A) EVALUACIÓN ORDINARIA:

- Constatación, del dominio de los contenidos, teóricos y prácticos, y elaboración crítica de los mismos a través de los instrumentos detallados en los apartados 1, 2 y 3 y del desarrollo de las competencias generales "Trabajo en equipo" y "Comunicación oral y escrita con orden y claridad" a través de los instrumentos detallados en los apartados 2 y 3.
- A lo largo de la asignatura se proveerán referentes al alumno para que cumpla el prerrequisito de esta asignatura: disponer de un conocimiento adecuado de las Matemáticas de Educación Primaria. El profesor evaluará este conocimiento por medio de los instrumentos detallados en los apartados 1 y 2.

1) Valoración de una o varias pruebas escritas. La calificación obtenida en una prueba escrita global y final, en su caso, será la que se asigne en este apartado.

2) Trabajos realizados, individualmente o en equipo, atendiendo a la presentación, redacción y claridad de ideas, estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo que argumenta, capacidad y riqueza de la crítica que se hace, y actualización de la bibliografía consultada.

3) Valoración del grado de implicación y actitud del alumnado manifestada en su participación en las consultas, exposiciones y debates; así como en la elaboración de los trabajos, individuales o en equipo, y en las sesiones de puesta en común. Asistencia a clase, seminarios, conferencias, tutorías, sesiones de grupo.

- La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente; el peso de cada uno de ello es:
  - apartado 1: 50 %
  - apartado 2: 40 %
  - apartado 3 : 10 %
- De acuerdo al procedimiento establecido en los artículos 6 y 8 de la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada aprobada por Consejo de Gobierno el 20 de mayo de 2013, el alumnado podrá acogerse, mediante petición formulada al director del departamento, a una evaluación única final que incluirá las pruebas teóricas y prácticas necesarias para acreditar que han adquirido las competencias descritas en esta Guía Docente.

B) EVALUACIÓN EXTRAORDINARIA

La evaluación extraordinaria de la asignatura pretende apreciar el aprendizaje significativo de los estudiantes respecto a los contenidos teóricos de la asignatura y su aplicación práctica. Así es que, si un estudiante hubiese superado alguno de los apartados que conforman la evaluación ordinaria de la asignatura, puede elegir preservar la calificación de aquellos apartados que hubiesen sido superados en dicha evaluación ordinaria. En este caso, el estudiante será calificado atendiendo a los apartados y pesos que conforman dicha evaluación y tan sólo debe superar las pruebas escritas que se refieran a cada uno de los aspectos no superados en aquella.

Para el resto de estudiantes, la calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los siguientes aspectos:

1) Valoración de una o dos pruebas escritas.
2) Trabajos realizados individualmente atendiendo a la presentación, redacción y claridad de ideas,

estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo que argumenta, capacidad y riqueza de la crítica que se hace, y actualización de la bibliografía consultada.

La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente; el peso de cada uno de ellos es:
- apartado 1: 85 %
- apartado 2: 15 %

C) EVALUACIÓN ÚNICA FINAL (ESTABLECIDA EN LA "NORMATIVA DE EVALUACIÓN Y DE CALIFICACIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA")

Aquellos estudiantes que no puedan cumplir con el método de evaluación continua por los motivos recogidos en la Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada (http://secretariageneral.ugr.es/pages/normativa/fichasugr/ncg7121/!) o cualquier otra causa debidamente justificada que les impida seguir el régimen de evaluación continua, podrán acogerse a la realización de una evaluación única final en la que se aprecie el aprendizaje significativo de los contenidos teóricos y su aplicación práctica. En este sentido, la calificación global corresponderá a la puntuación ponderada de los siguientes aspectos, que integran el sistema de evaluación:

1) Valoración de una o varias pruebas.

2) Trabajos realizados individualmente atendiendo a la presentación, redacción y claridad de ideas, estructura y nivel científico, creatividad, justificación de lo que argumenta, capacidad y riqueza de la crítica que se hace, y actualización de la bibliografía consultada.

La Calificación final deberá recoger la superación de los distintos apartados de la evaluación de manera independiente; el peso de cada uno de ellos es:
- apartado 1: 85 %
- apartado 2: 15 %

INFORMACIÓN ADICIONAL

Siguiendo las indicaciones recogidas en la nueva Normativa de Evaluación y de Calificación de los estudiantes de la Universidad de Granada (http://secretariageneral.ugr.es/pages/normativa/fichasugr/ncg7121/!), destacamos lo recogido en el artículo 15 sobre la originalidad de los trabajos presentados por los alumnos:

1. La Universidad de Granada fomentará el respeto a la propiedad intelectual y transmitirá a los estudiantes que el plagio es una práctica contraria a los principios que rigen la formación universitaria. Para ello procederá a reconocer la autoría de los trabajos y su protección de acuerdo con la propiedad intelectual según establezca la legislación vigente.
2. El plagio, entendido como la presentación de un trabajo u obra hecho por otra persona como propio o la copia de textos sin citar su procedencia y dándolos como de elaboración propia, conllevará automáticamente la calificación numérica de cero en la asignatura en la que se hubiera detectado, independientemente del resto de las calificaciones que el estudiante hubiera obtenido. Esta consecuencia debe entenderse sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudieran incurrir los estudiantes que plagien.

D. Secuenciación exhaustiva de los contenidos de la guía docente

A continuación se incluye una propuesta de concreción de los contenidos de la guía docente. Cada unidad está acompañada de una tabla que ilustra la relación entre los contenidos de la guía docente y la concreción desarrollada.

Unidad 1: Números y álgebra

Sección 1. Conjuntos numéricos. Usos y representaciones de los números

1.1. Números y sistemas de representación en la educación primaria

1.1.1. Números naturales, enteros y racionales

1.1.2. Sistemas de representación de los números

1.2. Números naturales: usos y representaciones. El Sistema de Numeración Decimal

1.2.1 Usos de los números naturales

1.2.2. Representaciones verbales, manipulativas y pictóricas de los naturales

1.2.3. Representaciones simbólicas de los naturales. Sistemas de Numeración

1.2.4. Sistemas de numeración decimal y en otras bases

1.3. Números enteros: usos y representaciones

1.3.1. Usos de los números negativos

1.3.2. Representaciones de los números enteros

1.4. Números racionales: usos y representaciones. Decimales, fracciones y porcentajes

1.4.1. Usos de los racionales

1.4.2. Representaciones verbales, manipulativas y pictóricas

1.4.3. Números decimales

1.4.4. Fracciones

1.4.5. Porcentajes

1.4.6. Conexiones entre las representaciones simbólicas de los racionales

Sección 2. Operaciones. Interpretación, problemas aritméticos y algoritmos

- 2.1. Interpretación de las operaciones con números naturales. Problemas aritméticos
  - 2.1.1. Operaciones de estructura aditiva
  - 2.1.2. Resolución y planteamiento de problemas de estructura aditiva
  - 2.1.3. Interpretación de las operaciones de estructura multiplicativa
  - 2.1.4. Resolución y planteamiento de problemas de estructura multiplicativa
  - 2.1.5. Divisibilidad
- 2.2. Interpretación de las operaciones con números negativos
  - 2.2.1. Operaciones de estructura aditiva
  - 2.2.2. Operaciones de estructura multiplicativa
  - 2.2.3. Interpretaciones matemáticas de las operaciones con números negativos
- 2.3. Interpretación de las operaciones con números racionales. Resolución de problemas
  - 2.3.1. Operaciones de estructura aditiva
  - 2.3.2. Operaciones de estructura multiplicativa
  - 2.3.3 Resolución y planteamiento de problemas con números racionales
- 2.4. Algoritmos y estrategias de cálculo
  - 2.4.1. Algoritmos de cálculo con números naturales y decimales
  - 2.4.2. Algoritmos de cálculo con fracciones

Sección 3. Relaciones numéricas y algebraicas. Proporcionalidad

- 3.1. Usos y representaciones del álgebra en primaria
  - 3.1.1. Usos del álgebra
  - 3.1.2. Representaciones novedosas del álgebra
- 3.2. Relaciones numéricas
  - 3.2.1. Igualdad
  - 3.2.2. Relaciones de orden
- 3.3. Relaciones de dependencia entre variables. Proporcionalidad
  - 3.3.1. Patrones
  - 3.3.2. Funciones
  - 3.3.3. Proporcionalidad

La Figura D.1 ilustra la conexión entre esta concreción de contenidos para la Unidad 1 y los que figuran en la guía docente.

Contenidos propuestos	**Contenidos de la Guía Docente actual (Unidad 1)**
1.1. Conjuntos numéricos en educación primaria 1.2. Números naturales: usos y representaciones. El Sistema de Numeración Decimal 1.3. Números enteros: usos y representaciones 1.4. Números racionales: usos y representaciones. Decimales, fracciones y porcentajes	GD1.1. Números. Clasificación, propiedades, representaciones y usos GD1.2. Interpretación de las operaciones. Planteamiento y resolución de problemas aritméticos GD1.3. Estrategias de cálculo y algoritmos. Propiedades de los números y las operaciones GD1.4. Patrones y relaciones. Interpretación y representaciones
2.1. Interpretación de las operaciones con números naturales. Problemas aritméticos 2.2. Interpretación de las operaciones con números negativos 2.3. Interpretación de las operaciones con números racionales. Planteamiento y resolución de problemas 2.4. Algoritmos y estrategias de cálculo	
3.1. Usos y representaciones del álgebra en primaria 3.2. Relaciones numéricas 3.3. Patrones 3.4. Relaciones funcionales. Proporcionalidad	

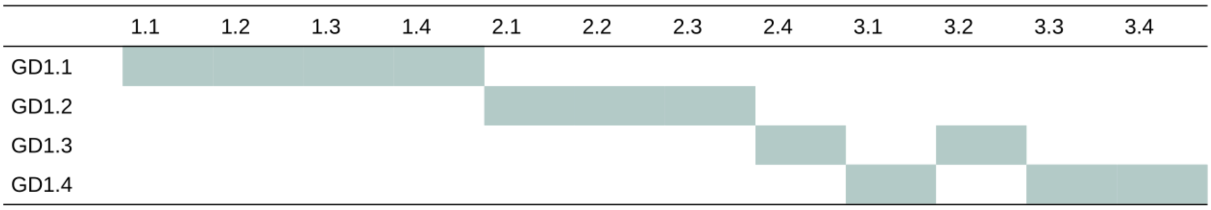


Figura D.1: Conexión entre la concreción desarrollada y los contenidos de la guía docente

Unidad 2: Geometría

1. Representaciones en Geometría. Visualización y orientación
   1.1. Representaciones manipulativas
   1.2. Representaciones pictóricas
   1.3. Representaciones verbales
2. Elementos geométricos en el plano y en el espacio. Propiedades de figuras planas y cuerpos. Modelización geométrica
   2.1. Propiedades de figuras planas y cuerpos geométricos. Clasificaciones
   2.2. Usos de las formas. Problemas de modelización geométrica
3. Transformaciones en el plano y regularidades
   3.1.Traslaciones y frisos
   3.2. Simetrías y figuras simétricas
   3.3. Rotaciones y figuras rotacionalmente simétricas

3.4. Mosaicos y teselaciones del plano

4. Razonamiento y prueba en Geometría

4.1. Conjeturas en geometría plana y espacial

4.2. Contraejemplos y demostraciones en geometría plana y espacial

La Figura D.2 ilustra la conexión entre esta concreción de contenidos para la Unidad 2 y los que figuran en la guía docente.

Contenidos propuestos	**Contenidos de la Guía Docente actual (Unidad 2)**
1. Representaciones en Geometría. Orientación y visualización	GD 1. Elementos geométricos en el plano y en el espacio. Representaciones y visualización
2. Elementos geométricos en el plano y en el espacio. Propiedades de figuras planas y cuerpos. Modelización geométrica	GD2. Propiedades de figuras planas y cuerpos: Modelización geométrica
3. Transformaciones en el plano y regularidades	GD3. Transformaciones en el plano y regularidades
4. Razonamiento y prueba en Geometría	GD4. Razonamiento y prueba en Geometría

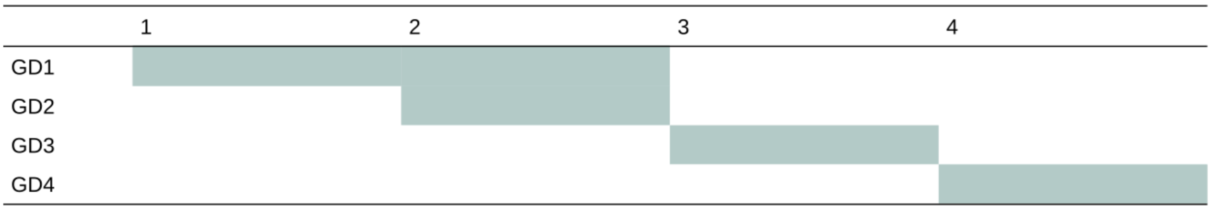


Figura D.2: Conexión entre la concreción desarrollada y los contenidos de la guía docente

Unidad 3: Medida

1. Percepción de las magnitudes escolares: longitud, superficie, volumen, amplitud, masa, capacidad, tiempo y dinero

1.1. Magnitud, medición y medida. Ejemplos

1.2. Magnitudes escolares

2. Unidades de medida

2.1. Necesidad de consensuar la unidad de medida: Unidades estandarizadas. El Sistema Internacional de Medida y el Sistema Métrico Decimal

2.2. Cambio entre unidades de medida. Factores de conversión

3. Medición directa e indirecta

3.1. Medición directa. Instrumentos para las magnitudes escolares

3.2. Medición indirecta y otras estrategias para obtener medidas

4. Estrategias para obtener medidas de longitud y de área. Interpretación de las fórmulas escolares

4.1. Longitudes. El Teorema de Pitágoras

4.2. Áreas: estrategias personales de medición indirecta
4.3. Áreas: interpretación de las fórmulas escolares
5. Estimación de medidas

La Figura D.3 ilustra la conexión entre esta concreción de contenidos para la Unidad 3 y los que figuran en la guía docente.

Contenidos propuestos	**Contenidos de la Guía Docente actual (Unidad 3)**
1. Percepción de las magnitudes escolares: longitud, superficie, volumen, amplitud, masa, capacidad, tiempo y dinero	GD1. Percepción de las magnitudes escolares: longitud, superficie, volumen, amplitud, masa, capacidad, tiempo y dinero
2. Unidades de medida	GD2. Unidades de medida: tipos, elección de unidades y conversión
3. Medición directa e indirecta	GD3. Medición directa. Estrategias personales.
4. Estrategias para obtener medidas de longitud y de área. Interpretación de las fórmulas escolares	GD4. Medición indirecta. Interpretación de las fórmulas escolares
5. Estimación de medidas	GD5. Estimación de medidas

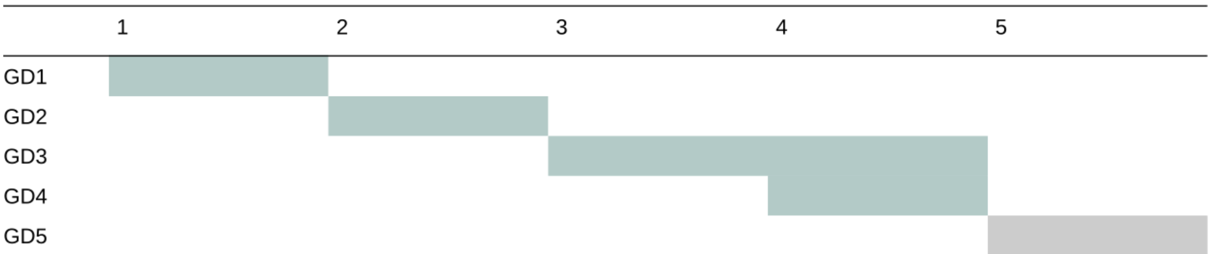


Figura D.3: Conexión entre la concreción desarrollada y los contenidos de la guía docente

Unidad 4: Estadística y probabilidad

1. Estudios estadísticos. Recogida de información, tipos de datos y variables
   1.1. Azar y estadística
   1.2. Elementos de un estudio estadístico y estrategias de recogida de información
   1.3. Tipos de datos y variables. Ejemplos
2. Representación de datos: tablas, gráficos y medidas estadísticas
   2.1. Datos cualitativos nominales
   2.2. Datos cualitativos ordinales
   2.3. Datos cuantitativos discretos
   2.4. Datos cuantitativos continuos
   2.5. Síntesis de las representaciones estadísticas
3. Extracción de conclusiones e inferencia estadística
   3.1. Interpretaciones de gráficos

3.2. Interpretación de medidas estadísticas

4. Percepción de fenómenos aleatorios y cuantificación de la incertidumbre

4.1. Azar y probabilidad

4.2. Experimentos aleatorios y deterministas. Espacio muestral

4.3. Asignación de probabilidades

La Figura D.4 ilustra la conexión entre esta concreción de contenidos para la Unidad 4 y los que figuran en la guía docente.

Contenidos propuestos	**Contenidos de la Guía Docente actual (Unidad 4)**
1. Estudios estadísticos, recogida de información. Tipos de datos y variables	GD1. Estudios estadísticos. Recogida de información, tipos de datos y variables
2. Representación de datos: tablas, gráficos y medidas estadísticas	GD2. Representación de datos: tablas, gráficos y medidas estadísticas. Interpretaciones
3. Extracción de conclusiones e inferencia estadística	GD3. Extracción de conclusiones e inferencia estadística
4. Percepción de fenómenos aleatorios y cuantificación de la incertidumbre	GD4. Percepción de fenómenos aleatorios y cuantificación de la incertidumbre

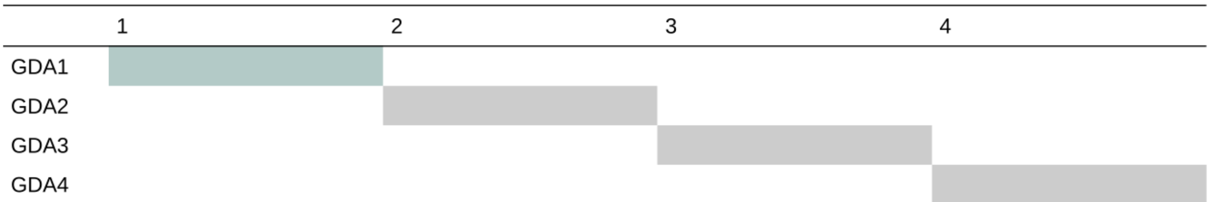


Figura D.4: Conexión entre la concreción desarrollada y los contenidos de la guía docente

E. Destrezas observables de la asignatura

A continuación se incluye el conjunto de objetivos didácticos del tema desglosados en destrezas observables que representan el nivel de mayor concreción de las expectativas de aprendizaje propuestas para asignatura.

Unidad 1: Números y álgebra

O_1. Identificar y describir los usos que se hacen los diferentes tipos de números

a) Dada una situación cotidiana, reconocer acciones en las que emergen los usos de los números naturales, negativos y racionales.

b) Recíprocamente, crear ejemplos de situaciones cotidianas de los usos de los diferentes tipos de números.

O_2. Utilizar representaciones manipulativas y pictóricas de los diferentes tipos de números para expresarlos y compararaloss.

a) Reconocer las diferentes representaciones verbales, manipulativas o pictóricas que son útiles para describir situaciones contextualizadas en las que aparecen números naturales, enteros o racionales.

b) Elegir y utilizar las representaciones más adecuadas para identificar relaciones de orden entre números naturales, enteros o racionales.

c) Reconocer las fracciones equivalentes como representantes del mismo número racional a partir de diferentes representaciones pictóricas y manipulativas.

O_3. Utilizar los principios del sistema decimal de numeración y discutir sus analogías y diferencias con sistemas con otras bases de numeración.

a) Diferenciar el concepto de número de los signos que empleamos para representarlo.

b) Justificar la necesidad del uso de sistemas de numeración para expresar cantidades y la necesidad de usar signos y reglas definidas para organizar un sistema de numeración, dando especial importancia a la existencia de un principio de agrupación con cierta base.

c) Dar argumentos sobre si cierto sistema de numeración cumple o no los principios aditivo, multiplicativo o de posición.

d) Seguir procesos de agrupamiento para expresar cantidades pequeñas a través de sus cifras en sistemas de numeración de distintas bases, de forma manipulativa (material multibase, agrupamiento de palillos y ábaco vertical) y pictórica.

e) Seguir procesos de desagrupamiento para conocer la cantidad de elementos que representan cifras dadas en diferentes bases de numeración, de forma manipulativa (material multibase, agrupamiento de palillos y ábaco vertical), pictórica y a través de la expresión polinómica de las cifras en dicha base.

O_4. Cambiar de forma autónoma entre diferentes representaciones simbólicas de un mismo número racional para elegir la óptima en cada situación.

a) Identificar una fracción, un porcentaje o un decimal con de diferentes representaciones pictóricas o basadas en materiales. Recíprocamente, crear representaciones pictóricas o basadas en materiales de fracciones, decimales y porcentajes dados.

b) Identificar los porcentajes con las fracciones escritas con denominador 100. Usar esta identificación para expresar cualquier fracción como porcentaje y viceversa.

c) Obtener la expresión decimal de una fracción cualquiera. Recíprocamente, dado un decimal finito o periódico, obtener una fracción generatriz de dicho decimal.

d) Obtener la expresión decimal de un porcentaje. Recíprocamente, dado un decimal finito o periódico, expresarlo en forma de porcentaje.

e) Elegir la representación óptima para resolver situaciones contextualizadas.

O_5. Interpretar las operaciones aritméticas en situaciones contextualizadas.

a) Dada una situación contextualizada, reconocer los enunciados que se resuelven utilizando operaciones aritméticas con números naturales a partir de las interpretaciones unitarias o binarias de dichas operaciones.

b) Dada una situación contextualizada, reconocer los enunciados que se resuelven utilizando operaciones aritméticas con números enteros a partir de las interpretaciones unitarias o binarias de dichas operaciones.

c) Dada una situación contextualizada, reconocer los enunciados que se resuelven utilizando operaciones aritméticas con números racionales a partir de las interpretaciones unitarias o binarias de dichas operaciones.

O_6. Resolver las operaciones aritméticas usando representaciones manipulativas y a través de su interpretación

a) Utilizar diferentes representaciones manipulativas (bloques multibase, ábaco vertical, regletas) y pictóricas (modelos cardinales, de área o recta numérica) para resolver operaciones aritméticas con naturales a partir de la interpretación de las mismas.

b) Utilizar representaciones manipulativas (tiras de fracciones) y pictóricas (modelos de medida o diagramas de sectores) para resolver las operaciones aditivas con racionales a través de su interpretación.

c) Utilizar representaciones manipulativas (transparencias de fracciones) o pictóricas (modelos de área) para resolver las operaciones multiplicativas a partir de una interpretación adecuada.

O_7. Resolver problemas aritméticos usando representaciones pictóricas adecuadas a las interpretaciones de las operaciones que lo resuelven

a) Utilizar, de forma justificada, representaciones pictóricas adecuadas para resolver problemas contextualizados de estructura aditiva y multiplicativa que involucran números naturales.

b) Resolver problemas de divisibilidad a partir de representaciones pictóricas propias de las operaciones aritméticas y del álgebra.

c) Resolver problemas con números racionales utilizando representaciones pictóricas adecuadas.

O_8. Discutir diferentes algoritmos de las operaciones aritméticas y utilizarlos para resolver las operaciones

a) Emplear de forma razonada los algoritmos usuales de las operaciones con números naturales y decimales y compararlos de forma crítica con otros algoritmos.

b) Emplear de forma razonada los algoritmos usuales de las operaciones con fracciones, y compararlos con otros algoritmos.

c) Justificar los algoritmos usuales a partir de la resolución de las operaciones utilizando materiales o representaciones pictóricas convenientes.

O_9. Plantear problemas que se resuelvan utilizando operaciones aritméticas que surgen bajo cierta interpretación

a) Dada una operación con números naturales y una de sus interpretanciones, plantear un enunciado en el que emerja esa operación con la interpretación dada.

b) Dada una operación con números racionales y una de sus interpretanciones, plantear un enunciado en el que emerja esa operación con la interpretación dada.

O_{10}. Reconocer los símbolos “ $=$ ”, “ $\leq$ ”, “ $\geq$ ”, “ $<$ ” o “ $>$ ” como relaciones binarias entre cantidades fijas o variables.

a) Aplicar y reconocer propiedades de los números en situaciones de igualdad/desigualdad.

b) Encontrar valores numéricos desconocidos que satisfacen una relación establecida.

c) Utilizar los símbolos de igualdad y desigualdad para expresar relaciones válidas

O_{11}. Identificar y razonar con relaciones algebraicas utilizando diferentes representaciones.

a) Identificar patrones, expresarlos utilizando representaciones tabulares y con lenguaje algebraico, y obtener términos desconocidos usando esas representaciones.

b) Identificar relaciones funcionales en contextos reales, expresarlos utilizando representaciones tabulares, gráficas y con lenguaje algebraico, y usar esas representaciones para extraer conclusiones sobre la relación.

c) Reconocer situaciones de proporcionalidad y proporcionalidad inversa utilizando tablas o representaciones algebraicas, y utilizar estas representaciones para resolverlas.

O_{12}. Plantear y resolver problemas utilizando representaciones algebraicas.

a) Seleccionar de forma autónoma una representación algebraica (tabla o lenguaje) para resolver situaciones presentadas en un contexto real que involucran relaciones binarias o funcionales.

b) Dada una representación tabular, gráfica o algebraica de una relación binara o de una función, plantear enunciados que se resuelven usando esa relación o función.

Unidad 2: Geometría

O_1. Utilizar diferentes representaciones para reconocer e identificar propiedades geométricas de figuras planas y cuerpos geométricos

a) Elaborar razonadamente perspectivas, desarrollos planos y vistas (planta, alzado y perfil) de cuerpos geométricos dados. Recíprocamente, reconocer cuerpos geométrico a partir de perspectivas, vistas o desarrollos planos.

b) Dada una representación visual de una forma geométrica o de un recorrido en el espacio, formular verbalmente estas propiedades y elaborar definiciones de conceptos geométricos basados en las mismas.

c) Dada una definición verbal de un concepto geométrico, proporcionar ejemplos de ese concepto y situaciones contextualizadas donde el concepto es aplicable.

d) Elegir de forma autónoma sistemas de referencia adecuados a situaciones realistas a la hora de obtener información útil para resolver un problema y razonar a partir de ellos utilizando referencias implícitas (salida del sol, puntos cardinales, cuadrícula, etc.).

O_2. Identificar propiedades de figuras planas y cuerpos geométricos, y utilizar estas propiedades para construir ejemplos de ellas y clasificarlas

a) Dibujar o construir, utilizando representaciones manipulativas o pictóricas, formas geométricas que cumplan propiedades dadas.

b) Dado un conjunto de figuras planas, establecer clasificaciones de los mismos basadas en propiedades geométricas. Recíprocamente, dada una clasificación hecha, identificar el criterio utilizado para realizarla.

c) Dado un conjunto de cuerpos geométricos, establecer clasificaciones de los mismos basadas en propiedades geométricas. Recíprocamente, dada una clasificación hecha, identificar el criterio utilizado para realizarla.

O_3. Aplicar movimientos del plano a figuras dadas, de forma razonada y usando Geogebra.

a) Dada una figura plana **F** y un vector v, obtener de forma razonada la figura **F'** resultante de trasladar **F** según el vector v.

b) Dada una figura plana **F**, un punto O y un sentido de giro (horario/antihorario), obtener de forma razonada la figura **F'** resultante de rotar **F** respecto de O según el ángulo y el sentido dados.

c) Dada una figura plana **F** y una recta **r**, obtener de forma razonada la figura **F'** resultante de hacer la simetría de **F** respecto del eje **r**.

d) Utilizar las herramientas adecuadas de Geogebra para aplicar cada uno de los movimientos en el plano, tanto usando órdenes las específicas a cada movimiento, como de forma razonada (siguiendo razonamientos análogos a los apartados a)-c) de antes).

O_4. Detectar regularidades en figuras planas y construir figuras con dichas regularidades.

a) Identificar frisos y el vector que los genera. Recíprocamente, construir frisos a partir de una figura y un vector.

b) Detectar de forma razonada los ejes de simetría de una figura dada. Recíprocamente, construir figuras simétricas a partir de una figura o un eje dados.

c) Identificar figuras rotacionalmente simétricas, identificando el centro y el ángulo de rotación. Recíprocamente, construir figuras rotacionalmente simétricas a partir de una figura dada, un centro o un ángulo dados.

d) Detectar la celda fundamental en un mosaico y construir mosaicos a partir de una celda fundamental utilizando las transformaciones adecuadas.

O_5. Resolver y plantear problemas de modelización geométrica.

a) Reconocer elementos y formas geométricas dentro de situaciones presentadas en contexto y utilizando un vocabulario adecuado.

b) Utilizar propiedades de formas geométricas abstractas para dar respuesta a problemas o razonar sobre situaciones contextualizadas.

c) Plantear enunciados sencillos de problemas que se resuelvan aplicando una propiedad geométrica dada.

O_6. Razonar de forma inductiva y deductiva con formas y transformaciones geométricas.

a) Representar de forma autónoma situaciones geométricas planteadas en contextos reales o matemáticos, usando representaciones manipulativas o Geogebra, y extraer conjeturas a partir de los fenómenos observados.

b) Utilizar razonamientos deductivos o contraejemplos para argumentar la veracidad o falsedad de afirmaciones realizadas sobre formas geométricas.

c) Aplicar razonamientos deductivos basados en transformaciones, regularidades y orientación para resolver problemas presentados en contextos reales o matemáticos.

Tema 6: Magnitudes y su medida

O_1. Trabajar con las distintas magnitudes escolares, así como las unidades del S. I. asociadas, y el cambio de unidad.

a) Identificar las magnitudes escolares en situaciones contextualizadas.

b) Conocer y trabajar con las unidades del Sistema Internacional de medida. Efectuar cambios de unidad utilizando factores de conversión.

O_2. Distinguir entre procedimientos directos e indirectos de medición. Efectuar mediciones tanto directas (manejando instrumentos de medición) como indirectas (estimando o haciendo cálculos sencillos).

a) Justificar razonadamente si un procedimiento de medición dado es directo o indirecto, indicando el intermediario si es necesario.

b) Dada una magnitud escolar, describir procedimientos de medición directos e indirectos relacionados con esa magnitud.

c) Utilizar instrumentos de medida para obtener medidas de magnitudes escolares.

d) Estimar ciertas medidas de forma directa o a través de cáculos sencillos.

O_3. Obtener medidas de longitud utilizando diferentes estrategias

a) Obtener perímetros de figuras planas situadas en retículas, en las que hay una unidad de medida natural (diferente de las del SI).

b) Utilizar el teorema de Pitágoras para obtener longitudes desconocidas en situaciones contextualizadas.

O_4. Obtener medidas de área utilizando diferentes estrategias

a) Utilizar estrategias basadas en reiteración de la unidad para obtener áreas de figuras planas situadas en retículas, en las que hay una unidad de medida natural (diferente de las del SI).

b) Utilizar las fórmulas usuales para calcular áreas de figuras planas. Obtener razonadamente las de algunos polígonos.

c) Calcular de forma razonada áreas de poliedros.

O_5. Resolver problemas relacionados con la medida.

a) Elegir de forma autónoma unidades de medida que facilitan el cálculo de medidas en situaciones matemáticas o contextualizadas.

b) Elaborar estrategias personales para hacer mediciones indirectas o estimaciones de magnitudes en una situación contextualizada.

c) Elegir de forma autónoma escalas/equivalencias entre magnitudes para obtener mediciones en situaciones contextualizadas.

Tema 7: Introducción a la estadística y a la probabilidad

O_1. Reconocer situaciones y contextos donde la estadística tiene funcionalidad e identificar los elementos básicos de un estudio estadístico que sea adecuado a estas situaciones.

a) Identificar la muestra y la población de un estudio estadístico dado. Seleccionar la población y la muestra adecuadas para desarrollar un estudio estadístico ante una situación contextualizada.

b) Identificar las variables estadísticas de un estudio dado, distinguiendo entre cuantitativas (discretas y continuas) y cualitativas (nominales y ordinales). Enunciar variables estadísticas de todos los tipos que sean aplicables a una situación contextualizada.

c) Elaborar cuestionarios para recoger información útil sobre diferentes tipos de variables estadísticas.

O_2. Obtener las medidas estadísticas pertinentes (tablas, gráficas, medidas de posición central y medidas de dispersión) en función de las características de un conjunto de datos dado.

a) Calcular las frecuencias (absolutas, relativas, acumuladas) y elaborar las tablas y gráficas estadísticas que sean más adecuadas a un conjunto de datos dado, utilizando hoja de cálculo cuando sea útil.

b) Calcular (o estimar) medidas de posición central (moda, media y mediana) a partir de un conjunto datos (o tablas de frecuencias), eligiendo la medida más adecuada a la situación y utilizando hoja de cálculo cuando sea útil.

c) Conocer medidas de dispersión sencillas (varianza, desviación típica y rango) y estimarlas a partir de tablas o gráficos estadísticos.

O_3. Interpretar y extraer conclusiones de informes estadísticos básicos.

a) Dar respuesta a preguntas contextualizadas a partir de la observación de tablas y gráficas estadísticas.

b) Interpretar las medidas de posición central (media, mediana y moda) y usarlo para dar respuestas a situaciones contextualizadas.

c) Interpretar las medidas de dispersión, reconociendo la asociación entre su valor y la fiabilidad de las medidas de posición central. Usar esta interpretación para dar respuestas a situaciones contextualizadas.

O_4. Elaborar de forma autónoma informes estadísticos básicos para tomar decisiones en situaciones contextualizadas, proporcionando argumentos coherentes basados en tablas, gráficas o medidas estadísticas.

O_5. Identificar fenómenos y experimentos aleatorios, enunciar sucesos asociados y asignar probabilidades a esos sucesos.

a) Reconocer qué fenómenos o experimentos dados son aleatorios. Recíprocamente, dar ejemplos de fenómenos aleatorios dentro de una situación contextualizada.

b) Obtener el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio e identificar sucesos asociados. Enunciar los sucesos en lenguaje natural y a partir de los elementos del espacio muestral.

c) Seleccionar la forma más útil de asignar probabilidad a un suceso: subjetivamente, frecuentistamente o utilizando la Regla de Laplace.

F. Notas de clase y actividades para trabajar la Unidad 1

A continuación se incluyen las notas de clase y las actividades que se proponen a los estudiantes para trabajar la Unidad 1. La estructura del documento es coherente con los contenidos de la Unidad: *Sección 1. Conjuntos numéricos. Usos y representaciones de los números*

1.1. Números y sistemas de representación en la educación primaria

1.2. Números naturales: usos y representaciones. El Sistema de Numeración Decimal

1.3. Números enteros: usos y representaciones

1.4. Números racionales: usos y representaciones. Decimales, fracciones y porcentajes

Sección 2. Operaciones. Interpretación, problemas aritméticos y algoritmos

2.1. Interpretación de las operaciones con números naturales. Problemas aritméticos

2.2. Interpretación de las operaciones con números negativos

2.3. Interpretación de las operaciones con números racionales. Resolución de problemas

2.4. Algoritmos y estrategias de cálculo

Sección 3. Relaciones numéricas y algebraicas. Proporcionalidad

3.1. Usos y representaciones del álgebra en primaria

3.2. Relaciones numéricas

3.3. Relaciones de dependencia entre variables. Proporcionalidad

Unidad 1: Números y álgebra

Notas de clase y guion de trabajo

El número es el concepto fundamental de la matemática escolar, y es en la educación primaria donde se debe trabajar esta noción con profundidad. En esta unidad, el estudio de los números tendrá tres focos de atención, que organizan las tres secciones de la unidad. En primer lugar, se atenderá a los **conjuntos numéricos** relevantes en primaria, prestando especial atención a sus usos y representaciones. En segundo lugar, se prestará atención a **las operaciones**, su conexión con los contextos reales y los algoritmos de cálculo. En tercer lugar, se estudiarán el tratamiento de las **relaciones** numéricas y algebraicas, de acuerdo al currículo de primaria establecido por la LOMLOE.

Sección 1: Conjuntos numéricos. Usos y representaciones de los números

A pesar de que los números están presentes en múltiples aspectos de la vida cotidiana, alcanzar una comprensión profunda del concepto de número es una tarea ardua. La identificación instintiva de los números con los símbolos que empleamos para expresarlos restringe el concepto a una mera representación (Figura 1.1), lo que sugiere la necesidad de abordar la enseñanza teniendo en cuenta mayor riqueza conceptual.

Figura 1.1. Diferentes representaciones del mismo número

Esta riqueza se puede buscar en la matemática disciplinar, en la que se establecen diferentes *conjuntos numéricos* que se construyen unos a partir de otros. El conjunto de los *naturales* es la base para construir todos los demás, por lo que la conceptualización del número comienza por la del *número natural*. Las nociones matemáticas usuales de número natural se fundamentan en sus usos *cardinal* (para cuantificar colecciones) y *ordinal* (para establecer orden). Estas nociones no se pueden recoger de forma directa en las matemáticas escolares, pero ponen de manifiesto la importancia de los usos que tienen los números para comprenderlos. Dicha importancia se ve reforzada con la actual normativa curricular, basada en competencias, en la se fomenta un aprendizaje de las matemáticas aplicadas a contextos reales.

Estas ideas subrayan la importancia de concebir los números como objetos abstractos que van más allá de su representación simbólica y cuya utilidad fundamental es comprender la realidad. Se plantean entonces tres preguntas clave para abordar la enseñanza de los números en la educación primaria:

1) ¿Qué conjuntos numéricos se trabajan en la educación primaria?

2) ¿Para qué se usan esos números?

3) ¿De qué forma se pueden representar y cuál es la conexión entre las distintas representaciones?

La discusión sobre estas preguntas estructuran la presente unidad: en la primera subsección se describen los conjuntos numéricos relevantes en primaria y se indican los sistemas de representación útiles para su aprendizaje. Las tres siguientes subsecciones pormenorizan en los usos y representaciones específicas para cada conjunto numérico.

1.1. Números y sistemas de representación en la educación primaria

1.1.1. Números naturales, enteros y racionales

Los conjuntos numéricos que se definen en matemáticas se muestran en la Figura 1.2.

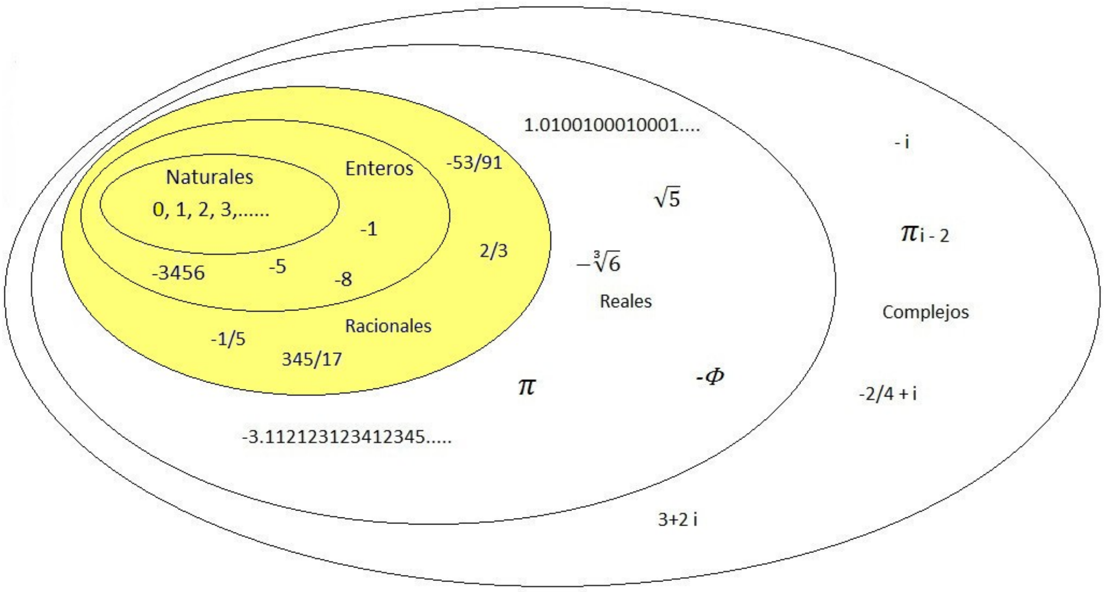


Figura 1.2. Conjuntos numéricos en matemáticas: en primaria nos interesan los naturales, los enteros y los racionales

El fundamental en matemáticas, que es permite construir todos los demás, es el conjunto de los números naturales (1, 2, 3, etc.) que surgen para expresar la cantidad de elementos de una colección. A partir de ellos se pueden definir los números negativos (p.e, -1, -5, -13, etc.), que aparecen para designar cantidades faltantes o distancias respecto a una cantidad de referencia. La unión de los naturales y los negativos constituye el conjunto de los *números enteros*. Por otra parte, la necesidad de expresar partes de un todo o razones entre naturales da lugar a los *números racionales* (p.e., 1/3, 7/6, -0.34, 6.11111…, etc.). También existen otros dos conjuntos numéricos de interés en las matemáticas disciplinares. En primer lugar están los *números reales* (p.e. π, $-\sqrt{3}$, 1.101001000…, etc.), que se construyen para expresar matemáticamente el *continuo:* encontrar límites o encontrar la variación de cantidades que cambián. En segundo lugar, y finalmente, están los *números complejos* (p.e, i, 2-3i, $-i\sqrt{5}$, etc.), que se construyen para dar sentido a las raíces cuadradas de números negativos.

El estudio de los reales se inicia en la educación secundaria, mientras que el de los complejos tiene lugar en bachillerato y en la enseñanza superior. Por su parte, los números naturales, enteros y racionales son los que surgen con mayor facilidad dentro de contextos reales, y en consecuencia son los que deben trabajarse en la educación primaria. Dedicaremos a ellos el resto de la unidad.

1.1.2. Sistemas de representación de los números

La forma en la que representamos los números influye de manera importante sobre su aprendizaje. Es por ello necesario tener en cuenta en su enseñanza diferentes *sistemas de representación.* En esta unidad consideraremos los siguientes:

i) *Verbal,* que consiste en el uso de palabras para designar números. Expresiones como “Tres”, “séptimo”, “menos cinco”, “un cuarto” o “cero coma dos” son ejemplos de representaciones verbales de números.

ii) *Manipulativo,* que consiste en el empleo de materiales físicos para trabajar con números. El ábaco es un ejemplo de representación manipulativa de los números naturales, que tendrá especial relevancia en esta unidad.

iii) *Pictórico,* que consiste en la utilización de dibujos para expresar números. La recta numérica ejemplifica una representación pictórica de los números.

iv) *Tabular,* que consiste en el uso de tablas para representar relaciones numéricas.

v) *Simbólico,* que consiste en el trabajo con signos específicamente creados para trabajar con números. Los números romanos (p.e., I, VII, IX, L, etc.), el sistema de numeración decimal (p.e, 1, 7, 9, 50), o las fracciones (p.e, 1/2, 7/3, 29/100, etc.) son representaciones simbólicas de los números.

1.2. Números naturales: usos y representaciones. El Sistema de Numeración Decimal

1.2.1. Usos de los números naturales

Los usos de los números naturales recogen las ideas intuitivas básicas que se tienen sobre los números. En este caso, se han organizado en tres categorías fundamentales:

a) Etiqueta, que recoge las ocasiones en el que los números se utilizan para identificar objetos o personas. El número del DNI o el dorsal de un corredor en una carrera son ejemplos de este uso.

b) Ordinal, que engloba las situaciones en las que se emplean números para comparar o discriminar dentro de una colección de objetos. Decir que Japón quedó séptima en el ranking PISA o escribir “1”, “2” y “3” en el podio de una competición son ejemplos de este uso.

c) Cardinal, que incluye los casos en los que usan los números para cuantificar colecciones siguiendo diferentes procedimientos (conteo, subitización, estimación o cálculo). La expresión de medidas de magnitudes es también un uso cardinal de los naturales. Por ejemplo, si alguien nos dice que tiene 6 monedas en la cartera o que mide *175 cm* está haciendo en ambos casos un uso cardinal de los números naturales.

1.2.2. Representaciones verbales, manipulativas y pictóricas de los naturales

Las **representaciones verbales** de los números naturales se suelen denominar *numerales* y están tradicionalmente vinculados al uso de los números involucrado. De esta manera existen *numerales cardinales*, que son los que expresan cantidades de elmentos de colecciones (p. e. “uno”, “catorce”, etc.) y los *numerales ordinales*, que expresan la posición que indica el número dentro de una lista ordenada (p.e, “primero”, “decimocuarto”, etc.).

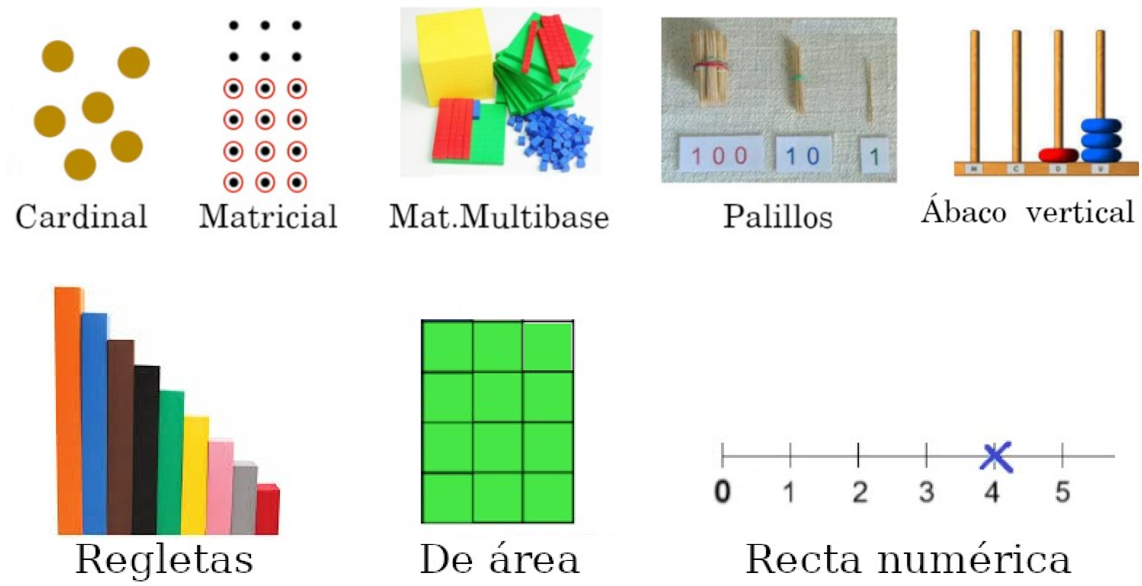


Figura 1.3. Ejemplos de representaciones manipulativas y pictóricas de los números naturales

Las **representaciones manipulativas** propias de los números naturales incluyen el *material multibase* o el *ábaco vertical* (Figura 1.3.), que se trabajan en las prácticas de la unidad. Estos materiales, de carácter cardinal, están diseñados para el aprendizaje del sistema de numeración, por lo que son idóneos para trabajar los agrupamientos en decenas, centenas, unidades de millar, etc., los algoritmos de las operaciones aditivas cuando estas involucran llevadas y, en el caso del ábaco, el valor posicional de las cifras. Materiales como como *los palillos* (Figura 1.3.) y la *caja de numeración*[1] son también útiles en este sentido. Existen además otras representaciones manipulativas

1 https://digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/52742/Actas%20FIM%20Caja.pdf?sequence=1

como el *numicon*[2], que es útil para trabajar relaciones numéricas como descomposiciones aditivas, tablas de multiplicar y relaciones de divisibilidad desde el uso cardinal, y las *regletas* (Figura 1.3.), de carácter ordinal, que facilitan la comprensión de las relaciones de igualdad y desigualdad, así como la visualización de relaciones numéricas aditivas.

En cuanto a las **representaciones pictóricas,** estas incluyen los dibujos de las representaciones manipulativas, con sus mismas propiedades, a los que se unen representaciones específicamente pictóricas. Entre ellas están los *modelos cardinales* (Figura 1.3.) que representan cada unidad con un objeto, y que pueden emplearse para la comprensión y resolución de problemas verbales, y para interpretar las operaciones cuando se presentan en contexto, como se discutirá más adelante. Un caso particular de modelos cardinales son los *matriciales,* en los que los objetos se disponen de manera organizada en retículas (Figura 1.3.), y que son pertinentes para aprender las tablas de multiplicar, visualizar las relaciones de divisibilidad e identificar números primos. Muy relacionados con los matriciales están los *modelos de área* (Figura 1.3.), que presentan aplicaciones similares pero tienen más sentido cuando se trabaja en contextos relacionados con magnitudes continuas (los matriciales resultan más verosímiles en situaciones en las que los números se refieren a objetos distinguibles). Otras representaciones pictóricas, más cercanas al uso ordinal de los números, son los *modelos de medida,* en los que la magnitud del número se visualiza a través de su longitud. Los dibujos de las regletas serían ejemplos de modelos de medida, que presentan aplicaciones similares a la versión manipulativa. Una última representación pictórica relevante viene dada por la *recta numérica* (Figura 1.3.), que es de interés para representar el orden de los números y a interpretar operaciones aditivas.

El estudio de las **representaciones simbólicas** de los naturales dan lugar a los sistemas de numeración. Dada su relevancia, se dedican las dos próximas subsecciones a ellos.

1.2.3. Representaciones simbólicas de los naturales. Sistemas de Numeración

La obtención de una representación simbólica de los naturales que sea exhaustiva y que permita operar con facilidad es uno de los avances más importantes en la historia de las matemáticas, y posiblemente en el desarrollo de la ciencia.

Para percibir su relevancia, imaginemos que desconocemos el significado de símbolos como "1", "2", "3", etc. En esta situación, el problema de representar una cantidad se convierte en un auténtico desafío. Por ejemplo, para expresar la cantidad de agujeros que tenemos en la nariz o la de dedos que tiene una mano se puede recurrir a una representación cardinal. Pero si queremos expresar la cantidad de días del mes de enero, los modelos cardinales resultan poco operativos. En este contexto, es natural recurrir al uso de *signos* que representen ciertas cantidades, y ciertas reglas que conecten los signos que se utilizan. Se estaría creando un *sistema de numeración.*

Un ***sistema de numeración*** *es un conjunto finito de signos y reglas de formación que permiten expresar de forma única cualquier cantidad de objetos.*

2 http://www.numicon.es/

Algunos de los sistemas de numeración que han surgido a lo largo de las diferentes civilizaciones se muestran en la Figura 1.4. Las representaciones manipulativas, como las dadas por el material multibase o el ábaco también son ejemplos de sistemas de numeración en las que los signos utilizados son objetos físicos.

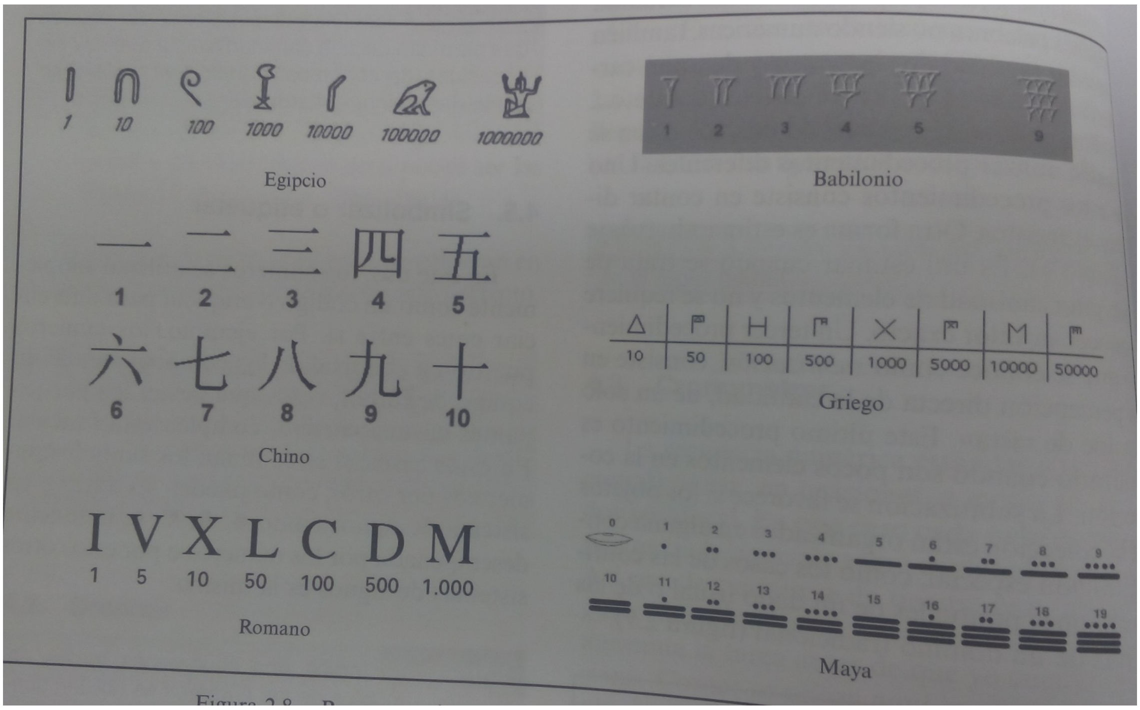


Figura 1.4. Ejemplos de sistemas de numeración

La validez de un sistema de numeración depende de la facilidad que este ofrece para expresar *cualquier cantidad.* Hay **propiedades de los sistemas de numeración** que son positivas para ello:

i) **Propiedad de agrupación.** Los sistemas de numeración que presentan esta propiedad son los que se organizan en grupos formados por una cantidad *b* de unidades (fija), que se denominada *base*. De esta manera, se elige un signo nuevo (o una nueva posición) para representar grupos de *b* unidades, grupos de *b* grupos de *b* unidades, y así sucesivamente. En los sistemas que tienen la propiedad de agrupación la base determina la representación de las cantidades de esta manera.

Por ejemplo, los signos del sistema egipcio y el maya que se muestran en la Figura 1.4. cumplen la propiedad de agrupación con bases 10 y 5, respectivamente. Los bloques multibase proporcionan también sistemas de numeración que cumplen esta propiedad, y tienen la misma base que el material utilizado: los bloques de base 5, por ejemplo, son un ejemplo de sistema de numeración de base 5. Por el contrario, el sistema romano no presenta esta propiedad: "V", por ejemplo, se utiliza para representar cinco "I", pero "X" surge para solo dos "V".

ii) **Propiedad aditiva.** En los sistemas con esta propiedad, la cantidad representada por un conjunto de signos equivale a la suma de los valores de los signos. Por ejemplo, el sistema egipcio y el griego presentan la propiedad aditiva, como se ilustra en la Figura 1.5. Los bloques multibase son otro ejemplo de sistema de numeración con esta propiedad. Hay sistemas, como el romano, que cumplen esta propiedad parcialmente: en "VI" sí se cumple esta propiedad, pero sin embargo en "IV" la cantidad representada por "I" está restando.

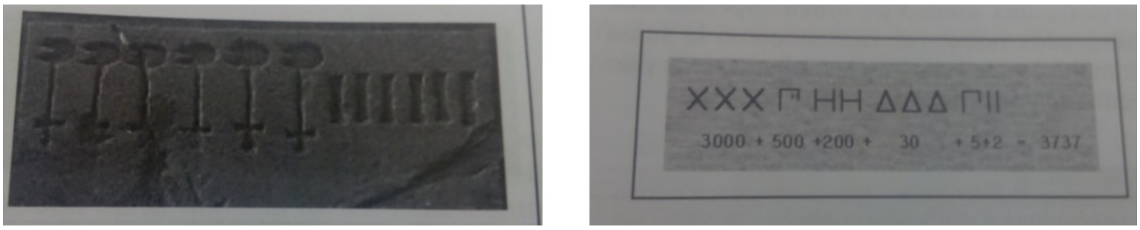


Figura 1.5. Ejemplos de sistemas de numeración con la propiedad aditiva. Izquierda: Jeroglífico egipcio. Derecha: Sistema de numeración griego antiguo.

iii) **Propiedad multiplicativa**. Los sistemas de numeración con esta propiedad utilizan símbolos para indicar las veces que se repite el valor de otros de los símbolos empleados. Por ejemplo, el sistema de numeración chino presenta la propiedad multiplicativa, como se ilustra en la Figura 1.6. (izquierda). En sistemas como los bloques multibase o el ábaco vertical, esta propiedad no se verifica.

iv) **Propiedad del valor posicional**. En los sistemas que presentan esta propiedad, un mismo signo representa cantidades diferentes en función de la posición en la que este signo se escribe. Un ejemplo de sistema con esta propiedad es el babilónico, en el que la posición de la derecha se emplea para expresar cantidades hasta 60, a la izquierda se escriben la cantidad de grupos de 60, y así sucesivamente. El ábaco vertical también cumple la propiedad del valor posicional, pero el material multibase no lo hace.

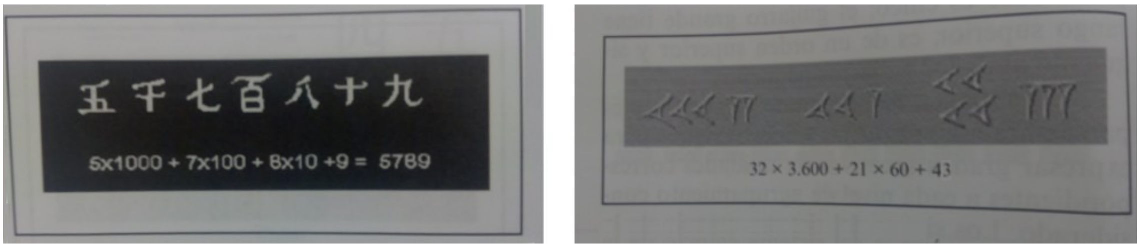


Figura 1.6. Izquierda: representación de un número en el sistema chino, que presenta la propiedad multiplicativa. Derecha: representación de un número en el sistema babilónico, que presenta la propiedad del valor posicional

1.2.4. Sistemas de numeración decimal y en otras bases

A continuación se discuten las propiedades del sistema de numeración usual, así como las de sistemas en otras bases, que incitan la reflexión del profesorado sobre cómo se forman los números, de forma similar a la que deben abordar los niños cuando aprenden nuestro sistema de numeración.

<u>*El Sistema de Numeración Decimal: propiedades y sistemas en otras bases. Ejemplos*</u>

El sistema de numeración que se emplea actualmente casi de forma generalizada tiene origen indoarábigo y se denomina *Sistema de Numeración Decimal.* Como su nombre indica es de base 10 (los dedos de las manos de una persona) y se construye por tanto a partir de diez signos signos: "0", "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7", "8" y "9". El Sistema de Numeración Decimal se emplea para los usos cardinal y ordinal, añadiéndose a la escritura de los números el símbolo “ º ” cuando se quiere incidir en el uso ordinal. Tiene un sistema de representación verbal coherente (p.e., “uno”, “quince”, “treinta y cuatro”, etc.), que también tiene su versión ordinal (p.e. “primero”, “decimoquinto”, “trigésimocuarto”, etc.).

Como se ha comentado previamente, el Sistema de Numeración Decimal cumple la propiedad de agrupación con base 10. Los grupos que se van formando tienen sus representaciones verbales: el grupo de 10 se denomina *decena*, el grupo de 10 grupos de 10 es la *centena*, y así sucesivamente.

Tabla 1.1. *Representaciones verbales y simbólicas de los primeros grupos que se conforman en el Sistema Numérico Decimal*

Grupo	Representación verbal	Representación simbólica
Unidad	“Uno”	1
Decena	“Diez”	10
Centena	“Cien”	100
Unidad de millar	“Mil”	1 000
Decena de millar	“Diez mil”	10 000
Centena de millar	“Cien mil”	100 000
Millón	“Un millón”	1 000 000
Decena de millón	“Diez millones”	10 000 000
Centena de millón	“Cien millones”	100 000 000
Millar de millón	“Mil millones”	1 000 000 000

La Tabla 1.1. muestra las representaciones simbólicas y verbales de los primeros grupos que se utilizan en este sistema. En ella también se observa que el Sistema de Numeración Decimal cumple la propiedad del valor posicional. De esta manera, cuando se representa un número natural, las unidades se sitúan a la derecha, las decenas inmediatamente a su izquierda, las centenas a la izquierda de las decenas, etc. En cuanto a las propiedades aditiva y multiplicativa, el Sistema de Numeración decimal no las cumple exactamente, pero sí en cierto sentido, situación que se ilustra en el Ejemplo 1.1.

EJEMPLO 1.1. El número 352 representa la cantidad que se obtiene al sumar 2 unidades, 5 decenas y 3 centenas, es decir, es el resultado de la siguiente operación:

$$352 = 2\cdot 1+5\cdot 10+3\cdot 100$$

i) El Sistema de Numeración Decimal **no** presenta la propiedad aditiva, porque en 352 aparecen los signos “2”, “5” y “3”, y 352 no coincide con la suma 2+5+3. Sin embargo, si se asume que el valor de “2” es el de una unidad (2·1), el valor de “5” es el de una decena (5·10) y el de “3” es el de una centena (3·100), entonces la cantidad representada sí es la suma de esos valores. La propiedad aditiva está presente de esta manera en nuestro sistema de numeración.

ii) De forma similar, la propiedad multiplicativa **no** se cumple, ya que no aparecen símbolos que multiplican a otros en la propia escritura del número. Las multiplicaciones 2·1, 5·10 y 3·100 vinculadas a 352 están implícitas, y las reconocemos por la posición de los valores 2, 5 y 3 en la cantidad representada (en 523, por ejemplo, los signos serían los mismos pero estas multiplicaciones serían otras). Se puede decir, por tanto, que la propiedad multiplicativa no se cumple en el Sistema de Numeración Decimal, pero está presente a través de la posición de los signos en las representaciones.

El funcionamiento del Sistema de Numeración Decimal se puede extrapolar a otras bases, dando lugar a sistemas de numeración coherentes. Estos aparecen en algunas situaciones reales, como es el caso del sistema *binario*, de base 2, que utiliza los signos “0” y “1” y que se surge en computación (el lenguaje-máquina solo tiene dos modalidades, y toda la información que recibe debe expresarse usando solo dos signos). En esta disciplina también aparece el sistema *hexadecimal*, de base 16, que utiliza los signos “0”,…,”8”, “9”, “A”, “B”, “C”, “D”, “E” y “F” y que es útil para expresar direcciones de memoria en discos duros, por ejemplo. Otro ejemplo es el sistema *quinario,* de base 5, que utiliza los signos “0”, “1”, “3”, “3”, “4” y “5” y que se utilizó como base del sistema maya a causa de los dedos que tenemos en una mano. El estudio de sistemas en diferentes bases parte de la idea clave de *cifra*, que se discute e interpreta a continuación.

Cifras en un sistema de numeración. Interpretación

El elemento clave para expresar los elementos de una colección usando un sistema de numeración de base *b* está constituido por sus *cifras* en esa base.

*Las **cifras** de la cantidad de elementos de una colección en cierta base b son el conjunto de signos que se emplean para representar la cantidad de elementos de esa colección tras agruparlos sucesivamente en grupos de b elementos.*

Se plantea entonces la siguiente cuestión: *¿Cómo obtener las cifras en cierta base de una colección dada?*

Ilustramos las respuesta en torno al análisis de casos particulares basados en la colección de la Figura 1.7. y utilizando diferentes bases: diez, seis, doce, dos y catorce. Se invita al lector a hacer las agrupaciones para comprobar que se obtiene lo que se va indicando, el uso (o el dibujo) de los bloques de la base indicada es útil para ello:

1) Al emplear la **base diez**, observamos que se puede hacer 1 grupo de diez soles, y quedan 3 soles sin agrupar. Por tanto las cifras en base diez de la cantidad de soles son $13_{10)}$. Nótese que se ha empleado un subíndice para indicar la base en la que se está trabajando. Este subíndice se eliminará por claridad (ya que el sistema de base 10 es el

que usamos de forma natural) salvo que se quiera distinguir de otras bases, por lo que se indicará que hay 13 soles. La interpretación de estas cifras es que, tras agrupar los soles en agrupaciones sucesivas de diez elementos se obtiene:

(i) 3 unidades sin agrupar en grupos de 10 (decenas),

(ii) 1 decena sin agrupar en grupos de grupos de 10 (grupos de 100, o centenas), y

(iii) no se formaron centenas

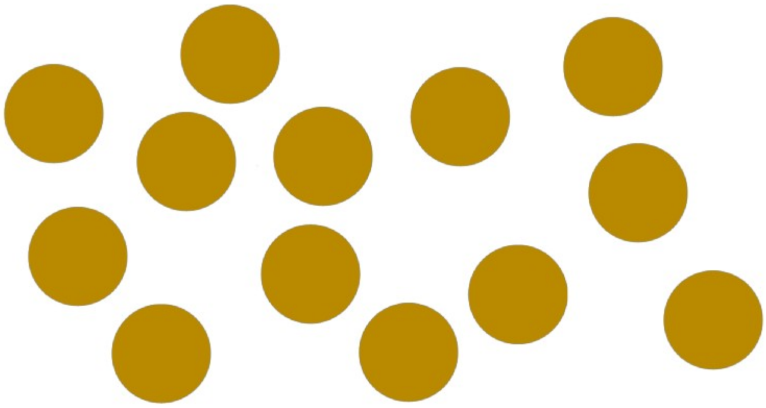


Figura 1.7. Colección de ejemplo para obtener sus cifras en diferentes bases

2) Al emplear la base **seis**, observamos que se pueden hacer 2 grupos de seis soles, y queda 1 sol sin agrupar. Por tanto las cifras en base seis de la cantidad de soles son $21_{6)}$, lo que significa que, tras agrupar los soles en agrupaciones sucesivas de seis elementos se obtiene:

(i) 1 unidad sin agrupar en grupos de 6,

(ii) 2 grupos de 6 sin agrupar en grupos de grupos de 6 (grupos de 36), y

(iii) no se formaron grupos de 36.

3) Al emplear la base **doce**, observamos que se puede hacer 1 grupos de doce soles, y queda 1 sol sin agrupar. Por tanto las cifras en base doce de la cantidad de soles son $11_{12)}$, lo que significa que, tras agrupar los soles en agrupaciones sucesivas de doce elementos se obtiene:

(i) 1 unidad sin agrupar en grupos de 12,

(ii) 1 grupo de 12 sin agrupar en grupos de grupos de 12 (grupos de 144), y

(iii) no se formaron grupos de 144.

4) Al emplear la base **dos**, observamos que se pueden hacer 6 grupos de 2, y queda 1 sol sin agrupar. Como 6 es mayor que la base, se puede seguir agrupando, dando lugar a 3 grupos de grupos de 2 (grupos de 4), y no queda ningún grupo de 2 sin agrupar. Dado que 3 sigue siendo mayor que dos, se puede seguir agrupando, de manera que queda 1 grupo de grupos de 4 (grupo de 8), y queda un grupo de 4 sin agrupar. Por tanto, tras agrupar los soles en agrupaciones sucesivas de dos elementos se obtiene:

(i) 1 unidad sin agrupar en grupos de 2,

(ii) no se quedaron grupos de 2 sin agrupar en grupos superiores,

(iii) 1 grupo de 4 sin agrupar en grupos superiores,

(iv) 1 grupo de 8, y

(v) no se formaron grupos de 16.

En consecuencia, las cifras de la cantidad en base dos son $1101_{2)}$. Nótese cómo se ha utilizado el símbolo “0” en la segunda posición (desde la derecha) para indicar que no se quedaron grupos de 2 sin agrupar en grupos de tamaño superior.

5) Si agrupamos los soles en **base catorce**, finalmente, vemos que no hay soles para conformar un grupo de catorce, por lo que las cifras en base catorce deben estar formadas por un único signo. Se plantea entonces el conflicto de *cómo expresar trece unidades utilizando un único signo*. La solución que se da usualmente es utilizar letras, de manera que se utiliza “A” para expresar que quedaron diez unidades (o grupos) sin agrupar, “B” si fueron once, “C” si fueron doce, etc. En este ejemplo concreto, se tomaría “D” para expresar que quedaron trece unidades sin agrupar, por lo que las cifras en base catorce de la cantidad de soles que aparecen en la Figura 1.7. son $D_{14)}$. Esto significa que al agrupar los soles en agrupaciones sucesivas de catorce elementos quedan trece unidades sin agrupar.

De manera análoga, si tenemos una cantidad cuyas cifras en base catorce son $CBA_{14)}$, esto significa que si se tomaran los elementos de la cantidad representara y se hicieran con ellos agrupaciones sucesivas de catorce elementos, se obtendrían:

(i) diez unidades sin agrupar en grupos de 14 (representadas por “A”),

(ii) once grupos de 14 sin agrupar en grupos superiores (representados por “B”),

(iii) doce grupos de 196 (14^2) sin agrupar en grupos superiores, y

(iv) no se formarían grupos de 14^3 elementos.

OBSERVACIÓN: Nótese que los sistemas de base *b* emplean exactamente *b* signos para expresar cualquier cantidad. Es decir, el sistema de base diez necesita 10 signos (de “0” a “9”), mientras que el de base cuatro modo necesita 4 (de “0” a “3”), por ejemplo. En sistemas de base mayor que diez se suele recurrir al uso de letras, como se indicó. Por ejemplo, en base 12 se utilizan los signos de “0” a “9”, además de “A” para representar diez y “B” para representar once (ya no son necesarios más, ya que si se tuvieran doce unidades ya se formaría un grupo). De forma análoga, en base catorce se usan “0”,… “9”, “A”, “B”, “C” y “D”, mientras que en base 16 se necesita hasta el signo “F” para representar quince unidades.

Esto implica que expresiones como $1301_{2)}$ no o $92_{7)}$ no son correctas, ya que representan situaciones en las que se podría seguir agrupando (se deja al lector la actividad de comprobar que las expresiones correctas son $10101_{2)}$ y $122_{7)}$, respectivamente).

<u>*Forma polinómica de unas cifras*</u>

El ejemplo de las cifras $CBA_{14)}$, analizado previamente, ilustra que los sistemas de numeración en diferentes bases permiten expresar cualquier cantidad, pero conducen a una pérdida de intuición sobre la magnitud de las cantidades que se están representando.

Se plantea en este punto la siguiente cuestión: *¿Cómo conocer la cantidad que representan unas cifras dadas en cierta base b?*

Para responder a esta pregunta consideramos las cifras 352 (en base 10). En el Ejemplo 1.1. se puso de manifiesto que “2” representa 2 unidades, mientras que “5” representa 5 decenas (grupos de diez) y “3” representa 3 centenas (grupos de cien). Ese caso pone de manifiesto **que cada cifra representa una cantidad que depende de la posición de esa cifra y de la base del sistema de numeración**. En los casos de las cifras obtenidas previamente para la colección de la Figura 1.7. en diferentes bases, obtenemos que:

1) Si consideramos las cifras $13_{10)}$,

- “3” representa 3 unidades,

- “1” representa 1 decena, que son $1 \cdot 10 = 10$ unidades.

Esto permite recuperar la cantidad de soles que había en la figura

$$13_{10)} \rightarrow 3 \cdot 1 + 1 \cdot 10,$$

operación que tiene como resultado 13, que coincide con la cantidad de soles. Al trabajar con la base 10, esta operación no es más que la descomposición en unidades y decenas que se trabaja habitualmente en primaria. Es de interés explorar qué ocurre en otras bases.

2) Si consideramos las cifras $21_{6)}$,

- “1” representa 1 unidad,

- “2” representa 2 grupos de 6, que son $2 \cdot 6 = 12$ unidades.

Esto permite recuperar la cantidad de soles que había en la figura a partir de sus cifras en base 6

$$21_{6)} \rightarrow 1 \cdot 1 + 2 \cdot 6,$$

operación que también tiene como resultado 13, algo que es natural porque estas cifras también representan la cantidad de soles.

3) Si consideramos las cifras $11_{12)}$,

- El “1” a la derecha representa 1 unidad,

- El “1” a la izquierda representa 1 grupos de 12, que son $1 \cdot 12 = 12$ unidades.

Esto permite recuperar la cantidad de soles que había en la figura a partir de sus cifras en base 12.

$$11_{12)} \rightarrow 1 \cdot 1 + 1 \cdot 12,$$

que da de nuevo 13 como resultado.

4) El caso de las cifras $1101_{2)}$ es más rico. En ellas,

- El “1” más a la derecha representa 1 unidad,

- “0” representa que no hay grupos de 2 unidades, es decir, $0 \cdot 2=0$ unidades,

- El “1” a la izquierda de “0” representa 1 grupo de 4 unidades, es decir, $1 \cdot 4=4$ unidades,

- El “1” más a la izquierda representa 1 grupo de 8 unidades, es decir, $1 \cdot 8=8$ unidades.

Esto permite recuperar la cantidad de soles que había en la figura a partir de sus cifras en base 2.

$$1101_{2)} \to 1\cdot 1 + 0\cdot 2+1\cdot 4+1\cdot 8,$$

que vuelve a proporcionar como resultado los 13 soles de la figura. Si se tiene en cuenta que los valores 1, 2, 4, 8, etc. son las potencias de 2 (la base del sistema), entonces la expresión de arriba se puede escribir de la siguiente manera:

$$1101_{2)} \to 1\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3,$$

expresión que se conoce como **forma polinómica** de las cifras $1101_{2)}$.

EJEMPLOS 1.2.

1) La forma polinómica de las cifras $2021_{3)}$ es la siguiente:

$$2021_{3)} \to 1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1+0\cdot 3^2+2\cdot 3^3.$$

Como $1\cdot 3^0 + 2\cdot 3^1+0\cdot 3^2+2\cdot 3^3 = 1\cdot 1 + 2\cdot 3+0\cdot 9+2\cdot 27 = 1 + 6 + 0 + 54 = 61$, se sabe que las cifras $2021_{3)}$ representan 61 elementos.

2) La forma polinómica de las cifras $305_{7)}$ es la siguiente:

$$305_{7)} \to 5\cdot 7^0 + 0\cdot 7^1+3\cdot 7^2.$$

Como $5\cdot 7^0 + 0\cdot 7^1+3\cdot 7^2 = 5\cdot 1+ 0\cdot 7 + 3\cdot 49 = 5 + 0 + 147$, tenemos que las cifras $305_{7)}$ representan 147 elementos.

3) La forma polinómica de las cifras $CBA_{14)}$ es la siguiente:

$$CBA_{14)} \to 10\cdot 14^0 + 11\cdot 14^1+12\cdot 14^2,$$

Como $5\cdot 7^0 + 0\cdot 7^1+3\cdot 7^2 = 5\cdot 1+ 0\cdot 7 + 3\cdot 49 = 5 + 0 + 147$, tenemos que las cifras $305_{7)}$ representan 147 elementos.

La forma polinómica de unas cifras permite recuperar la cantidad que se representa con esas cifras, que coincide con su expresión en base 10, por lo que es una forma de conocer las cifras en base 10 a partir de unas cifras dadas. En otras palabras, consiste en el procedimiento inverso al de agrupación, que permitía identificar las cifras en cierta base a partir de una colección dada, como se ha discutido previamente. La combinación de agrupaciones y uso de formas polinómicas permite establecer cambios de base de sistema de numeración. No obstante, no se profundiza en esta cuestión porque no se considera prioritaria en la formación inicial del profesorado de primaria.

Actividad 1.1. Observa que en las cifras 276 (en base 10), “6” representa 6 unidades, mientras que “7” representa 70 (7·10) unidades:

i) Indica cuántas unidades representa cada signo en las cifras $531_{9)}$, $E07_{16)}$, y $532A_{11)}$.

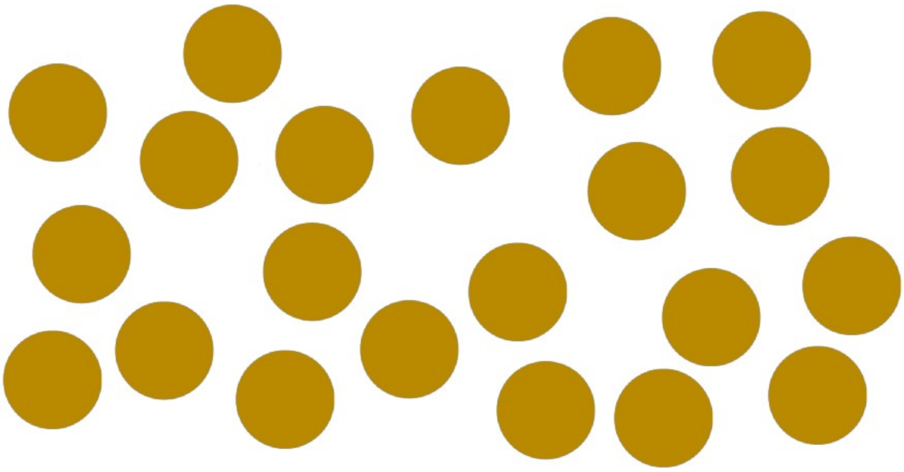
ii) ¿Cuántas unidades representa un 6 que está en la 1ª posición (desde la derecha) de unas cifras en base 4? ¿Y en la 2ª posición? ¿Y en la 3ª? ¿Y en la posición 34? ¿Y en una posición cualquiera *n*?

iii) Misma actividad, pero cambiando la base 4 por la base 9. Repite para una base cualquiera *b*.

iv) Utiliza tus respuestas a los apartados anteriores para dar una fórmula general que describa la forma polinómica de las siguientes cifras:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0\ _{b)}$$

Actividad 1.2. Escribe las cifras las bases 3, 5, 8, 13 y 16 de los soles que hay en la siguiente colección:



Halla sus expresiones polinómicas y comprueba que todas ofrecen el mismo resultado.

Actividad 1.3. Dadas las cifras $2301_{4)}$, escribe las cifras de la misma cantidad, pero expresadas en base 7. Repite la actividad pero dando las cifras en base 16.

SUGERENCIA: Elabora un esquema que muestre las conexiones entre la representación pictórica de una colección, sus cifras en una base, la forma polinómica y la cantidad (expresada en base 10). Úsalo para ver cómo llegar de las cifras en una base a otra.

1.3. Números enteros: usos y representaciones

El conjunto de los números enteros incluye a los naturales, por lo que los usos de estos números son también aplicables a los enteros. Por ello, el interés de la sección es observar los usos específicos de los números negativos. Del mismo modo, se comentan las representaciones de interés cuando se consideran los negativos.

1.3.1. Usos de los números negativos

Los usos específicos de los números negativos se pueden organizar en dos categorías:

a) **Cantidad faltante** o deuda, que surge para expresar el cardinal que tiene una colección a la que faltan elementos o el resultado de quitar a una colección una cantidad de elementos mayor de los que contiene. En esta categoría se incluye también el uso puramente matemático de los negativos: los resultados de restas en los que el minuendo es menor que el sustraendo.

Por ejemplo, cuando la aplicación del banco indica que el saldo de una cuenta es de -2 € o cuando el sistema de una tienda de ropa indica que el stock de pantalones es "-5", se están utilizando los negativos como cantidades faltantes.

b) **Medida con dirección,** que surge para expresar medidas de magnitudes respecto de cierto punto de referencia en la que se sitúa el cero, y en donde las cantidades positivas se vinculan con avances o crecimientos.

Por ejemplo, si el termómetro indica que la temperatura es de -3º, se está haciendo este uso de los negativos (hay 3 grados por debajo de la temperatura de referencia, que es la de congelación del agua). Del mismo modo, el botón -2 en un ascensor indica que se dirige a la planta que está 2 niveles por debajo de la planta baja, por lo que es otro ejemplo de este uso de los negativos.

Actividad 1.4. Encuentra al menos dos ejemplos adicionales de situaciones en las que se utilizan los negativos con los usos mencionados.

1.3.2. Representaciones de los números enteros

La **representación verbal** de los números negativos se construye añadiendo el término "menos" al número natural que representa su magnitud (p.e., "menos seis", "menos treinta y dos", etc.). En cuanto a las representaciones manipulativas, se pueden emplear las mismas que para los naturales siempre que se diferencien las cantidades negativas. Igual ocurre con las **representaciones pictóricas**, aunque en este caso debe destacarse la recta numérica, que está íntimamente ligada al uso de los negativos como medida con dirección (Figura 1.8), y que por tanto es útil para comprender las sumas y restas concatenadas y para la resolución de problemas en contextos de distancias. En niveles más avanzados, se puede utilizar esta representación para visualizar las reglas de cálculo con negativos (por qué al multiplicar negativos se obtiene un positivo, por ejemplo). Finalmente, las **representaciones simbólicas** de los enteros, al igual que las verbales, se construyen añadiendo "-" a la representación de un número natural.

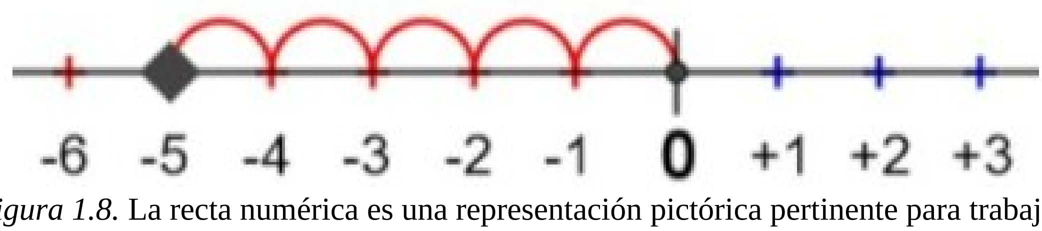


Figura 1.8. La recta numérica es una representación pictórica pertinente para trabajar con números negativos

1.4. Números racionales: usos y representaciones. Decimales, fracciones y %

Al igual que ocurre con los enteros, el conjunto de los números racionales contiene al de los naturales, por lo que esta sección se fijará en los usos de los racionales que no son naturales. De igual forma, se incidirá en las representaciones que aportan recursos nuevos para trabajar los números racionales que no son naturales (fracciones, decimales y porcentajes).

1.4.1. Usos de los racionales

Los usos novedosos de los números racionales se pueden categorizar en dos grupos:

a) **Porción** o parte-todo, que surge para expresar partes de un objeto o cantidad de referencia fijada (pueden ser una parte mayor que la propia unidad, cuando el número racional es mayor que 1). Este uso incluye los casos en los que se dan medidas con precisión. Por ejemplo, si digo que bebí 3/4 de una botella de agua, estoy haciendo uso de la fracción 3/4 como porción (el objeto de referencia es la botella en este caso). De igual manera, una báscula indicando que una sandía tiene una masa de 4.56 kg también está empleando 4.56 con este uso (en este caso la cantidad de referencia sería el kilogramo).

b) **Razón** o parte-parte, que aparece para expresar comparaciones multiplicativas entre dos cantidades o magnitudes dinámicas independientes, esto es, en las que una no es parte de la otra dentro del contexto. Incluye ritmos de crecimiento -velocidades-, o magnitudes físicas que se definen para relacionar otras (como la densidad o la aceleración). Por ejemplo, si en una receta tenemos que echar 2 tazas de arroz por 3 de agua, se puede decir que el arroz es 2/3 del agua en la receta, empleando así la fracción 2/3 con el uso de razón. De igual manera, si María camina 5 km al día y Marcos camina 5 km, entonces decir que María camina 3/5 partes la distancia que camina Marcos es un ejemplo de uso de 3/5 como razón.

EJEMPLO 1.3 / OBSERVACIÓN:

Debe señalarse que las dos categorías de uso pueden solaparse en algunas situaciones reales. Por ejemplo, si se dice que la vivienda ha subido un 10% en el último año, se está estableciendo la razón entre el precio que tenía la vivienda el año pasado y la subida, que son cantidades en principio independientes, por lo que se tendría un ejemplo de 10% como razón. Sin embargo, también se puede argumentar que se está expresando la comparación en relación al precio del año pasado, como una parte de este, por lo que estaría usando el 10% como porción.

Dado que ambas argumentaciones son razonables, se establece la diferencia entre los dos usos en función del contexto: en el uso como porción, el número racional establece una relación estática (no variable) entre dos cantidades relacionadas en el contexto. Por el contrario, en el uso como razón se comparan cantidades independientes en el contexto y que pueden ser variables. Por tanto, el empleo de 10% en este caso sería un ejemplo del uso como razón ya que prevalece el hecho de que el precio de la vivienda puede variar, y es en principio independiente del precio del año pasado.

Actividad 1.5. Encuentra al menos dos ejemplos adicionales de situaciones en las que se utilizan los números racionales con los usos mencionados.

1.4.2. Representaciones verbales, manipulativas y pictóricas

Las **representaciones verbales** de los números racionales están vinculadas al uso de fracciones (p.e. “un cuarto”, “la mitad”, “seis quintas partes”, etc.), los decimales (p.e., “tres coma siete”, “cero coma quince”, etc.) y los porcentajes (p.e., “un 25 por ciento”).

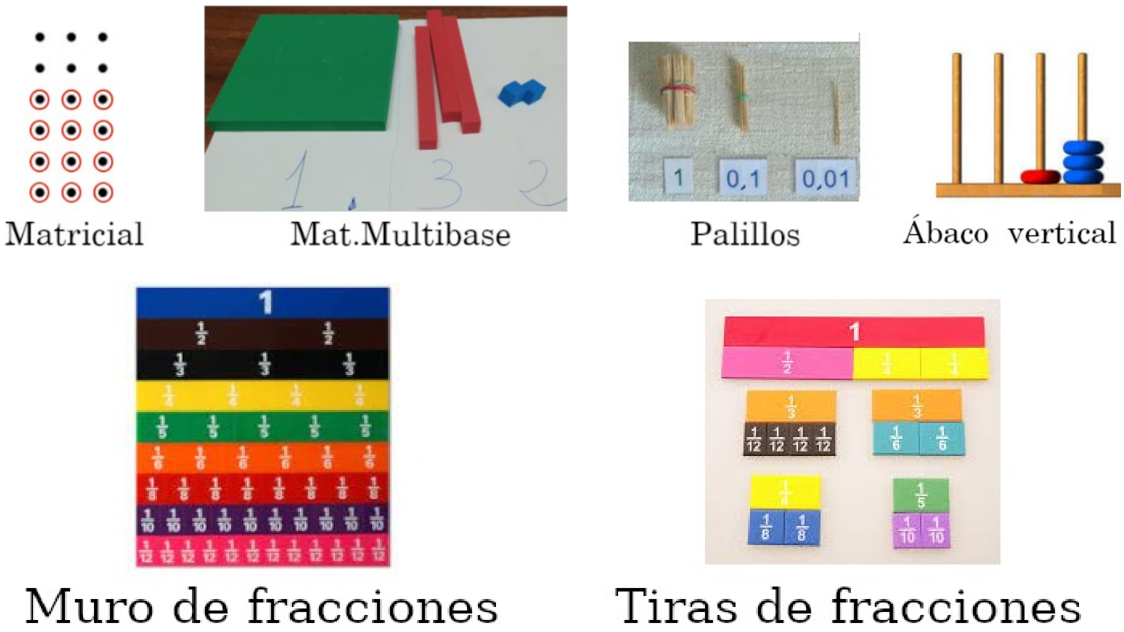


Figura 1.9. Ejemplos de representaciones manipulativas y pictóricas de los números racionales

Las **representaciones manipulativas** de los racionales incluyen el material multibase, los palillos y el ábaco vertical (Figura 1.9), que se pueden adaptar al uso decimales para trabajar el propio concepto de número decimal como la expresión de partes de la unidad y la ordenación de decimales, así como los algoritmos de las operaciones aditivas con este tipo de números. Otra representación manipulativa de interés está constituida por las *tiras de fracciones* (Figura 1.9), que son de utilidad para visualizar la ordenación y equivalencia de fracciones, así como para resolver operaciones aditivas de forma intuitiva y visualizar la necesidad de introducir el común denominador en los algoritmos de estas operaciones. Los *diagramas de sectores* son también una alternativa de interés para comparar fracciones y observar equivalencias.

Las **representaciones pictóricas**, al igual que ocurría con los números naturales, pueden incluir dibujos de los materiales manipulativos. Además, es posible también utilizar modelos cardinales (matriciales) para representar fracciones (Figura 1.9.) o para resolver operaciones multiplicativas con ellas. Otras representaciones pictóricas de interés son los modelos de medida como *el muro de fracciones* (Figura 1.9.), que consiste en un rectángulo dividido en líneas horizontales donde están dibujadas las tiras, y que es pertinente para representar equivalencias de fracciones y resolver las operaciones aditivas con ellas. También son de relevancia las representaciones que ofrecen los modelos de área, especialmente las versiones rectangulares (Figura 1.10), ya que permiten representar simultáneamente dos fracciones lo que facilita la resolución de todas las operaciones aritmética y la representación de problemas de fracciones y proporcionalidad. Finalmente, debe mencionarse también la recta numérica, que facilia la inspección del orden y equivalencia entre fracciones, principalmente.

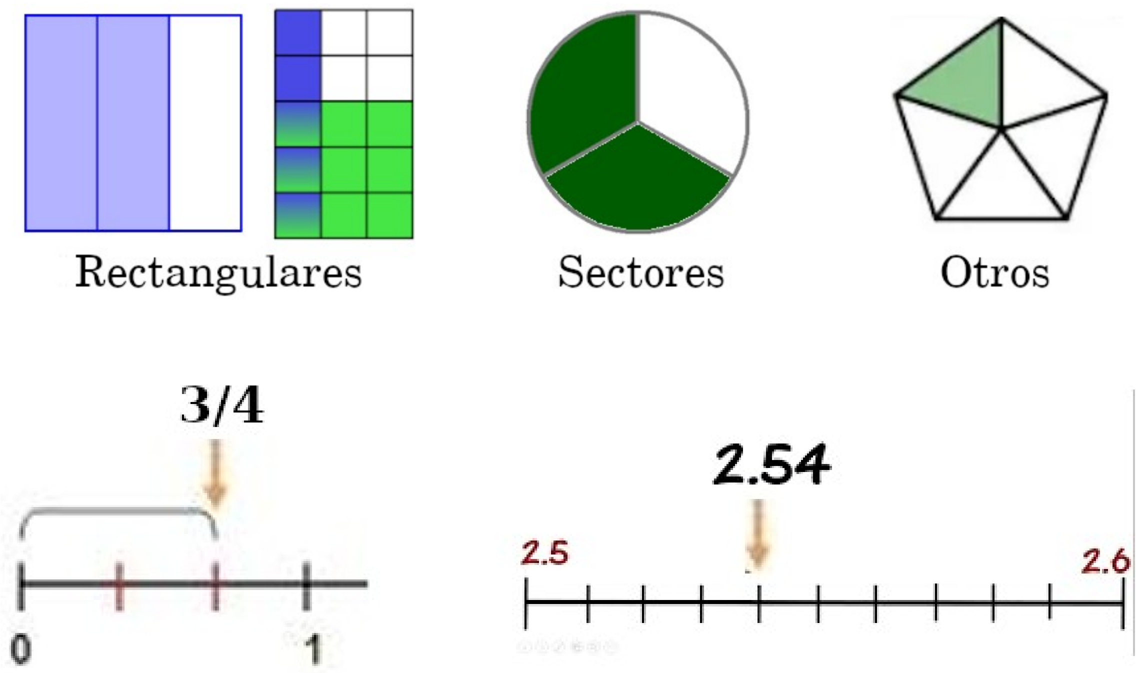


Figura 1.10. Ejemplos de representaciones pictóricas de los números racionales. Arriba: Modelos de área. Debajo: Recta numérica

Las **representaciones simbólicas** de los racionales incluyen los números decimales, las fracciones y los porcentajes. Dada la importancia de todas ellas en las matemáticas de la educación primaria, las próximas subsecciones se dedican a describirlas y ejemplificarlas, así como a analizar las conexiones entre ellas.

1.4.3. Números decimales

Como se discutió previamente, la representación simbólica de los naturales surge a partir de su uso más frecuente: expresar la cantidad de elementos de cualquier colección (cardinal). La respuesta a esta necesidad da lugar al Sistema de Numeración Decimal, que se estructura a partir de grupos de unidades (decenas, centenas, etc.). Dado que el uso más frecuente de los racionales es el de expresar partes (uso como porción), se plantea la cuestión de cómo expresar partes usando el Sistema de Numeración Decimal. Para responder esta cuestión, se extienden las reglas de este sistema para representar partes de la unidad: (i) Se consideran divisiones sucesivas de la unidad (y sus partes) en diez partes iguales más pequeñas. (ii) La cantidad de partes de una unidad (o de una parte) que se representan se escriben a la derecha de la cantidad de unidades (o de partes). (iii) Se emplea un signo nuevo (“,” o “.”) para distinguir la representación de las unidades completas de la representación de las partes.

Tabla 1.2. *Representaciones verbales y simbólicas de las primeras partes que se utilizan para expresar los números decimales*

Parte	Representación verbal	Representación simbólica
Unidad	“Uno”	1
Décima	“Una décima” / “Cero coma uno ”	0.1
Centésima	“Una centésima” / “Cero coma cero 1”	0.01
Milésima	“Una milésima” / “Cero coma cero cero 1”	0.001

La Tabla 1.2. muestra las representaciones simbólicas y verbales de las primeras partes que se utilizan y que pueden ampliarse para representar partes de la unidad todo lo pequeñas que se desee respetando la coherencia del Sistema de Numeración Decimal. Esta es la **representación decimal** de los números racionales**.**

EJEMPLOS 1.4 (Interpretación de los decimales).

1) Cuando se afirma que se emplearon *0.6 kg* de arroz para hacer una paella, se está indicando que se utilizaron 6 décimas partes de un kilogramo para hacer la paella. En este caso se hace un uso del número racional 0.6 como porción (parte del kg empleada).

2) Si se dice que la concentración del calcio en la sangre de una persona es *0.09 kg*/l, quiere decir que en cada litro de sangre de esa persona hay 9 centésimas partes de un kilogramo de calcio. Aquí se está haciendo un uso de 0.09 como razón (relación entre la cantidad de calcio y los litros de sangre).

3) Si nos dicen que el banco nos pagará 3.4 € mensuales de interés por sus ahorros, esto significa que nos pagará cada mes 3 € y 4 décimas partes de un €. En este ejemplo se está haciendo un uso de 3.4 como porción (parte del € que se añade a los 3 € de interés).

4) Si sabemos que un jugador de fútbol mide *1.87 m*, conocemos que su altura es igual a un metro más 8 décimas y 7 centésimas de metro. Aquí se vuelve a hacer un uso de 1.87 como porción (partes de un metro que se añaden a 1 m para expresar la altura del jugador).

Los ejemplos comentados ilustran que la elección de decimales para expresar números racionales está más vinculada al uso de porción que al de razón.

Actividad 1.6 (Ordenación de decimales). Indica cuál de los decimales es el mayor de cada uno de los siguientes pares. Justifica tus respuestas:

i) *0.35* y *0.3500*

ii) *0.45* y *0.045*

iii) *1.9825* y *1.98241*

iv) *3.333333....* y *3.330331332…*

Utiliza tus respuestas para proporcionar un criterio general para ordenar decimales.

Dado que las representaciones decimales se pueden expandir indefinidamente a la derecha, es pertinente distinguir diferentes *tipos de números decimales:*

i) *Finitos,* que tienen una cantidad finita de cifras decimales: *0.762, 3.981* y *3.4* son ejemplos de decimales finitos.

ii) *Infinitos periódicos,* que contienen un *periodo* o cantidad de decimales que se repiten indefinidamente. Si la parte decimal de un número está compuesta únicamente por su periodo, se trata de un decimal periódico *puro.* Dos ejemplos de decimales periódicos puros son $0.77777...=0.\hat{7}$ y $3.482482482...=3.\widehat{482}$. Si, por el contrario, la parte decimal contiene algunas cifras que no forman parte del periodo, se trata de un decimal periódico *mixto:* $1.234444...=1.23\hat{4}$ y $0.9818181...=0.9\widehat{81}$ son ejemplos de esta clase de decimales.

iii) *Infinitos no periódicos*, que contienen una cantidad infinita de decimales en la que no hay ninguna cantidad de ellos que se repita indefinidamente. Ejemplos de estos decimales son $\pi=3.141592...$, $\sqrt{2}=1.4142...$. o $3.1234567...$.

La inclusión de la representación decimal permite expresar cantidades como estos decimales infinitos no periódicos. Estos decimales **no representan números racionales,** lo que ilustra que la expresión de partes de la unidad (uso como porción) no es exclusiva de los números racionales.

Es recomendable disponer de una representación de los racionales que fuera *propia* de este conjunto numérico, es decir, no incluyera a otro tipo de números. Las fracciones tienen esa característica, como se discute a continuación.

1.4.4. Fracciones

Las fracciones son expresiones de comparación (como porción o como razón) que se construyen a partir de dos números naturales:

*Una **fracción** es un par ordenado de números naturales a/b, donde a es el **numerador** y b el **denominador** de la fracción.*

La comparación expresada por una fracción se establece en términos de un referente o *todo*. De esta manera, el denominador indica la cantidad de partes en las que se divide ese todo para poder comparar, y el numerador indica las partes que se toman para expresar la comparación.

EJEMPLOS 1.5 (Interpretación de numerador y denominador de una fracción).

1) *"Si vertemos el agua de una botella en cinco vasos y bebemos cuatro de ellos, estamos bebiendo 4/5 del agua de la botella"*.

En esta afirmación el 5 indica la cantidad de partes en las que dividimos la botella para poder expresar lo que bebimos (en este ejemplo son los cinco vasos), mientras que el 4 indica los vasos que bebimos. El uso que se hace del 4/5 en este ejemplo es el de porción (parte del agua de la botella que nos bebimos).

2) *"Si repartimos 3 pizzas entre 4 personas, cada uno come 3/4 del total de la pizza"*.

En esta afirmación el 4 indica la cantidad de "porciones" o partes que en las que habría que dividir cada pizza para expresar lo que comieron cuatro personas, mientras que el 3 indica la cantidad de porciones que comió cada persona. El uso que se hace del 3/4 en este ejemplo es el de razón (relación entre la pizza disponible y las personas que la comieron).

3) *"Por cada 7€ del precio de los polvorones que compré, pagué solo 6€, por lo que me descontaron 1/7 del precio"*.

En esta afirmación el 7 indica las partes en las que hay que dividir el precio para poder expresar el descuento, mientras que el 1 indica las partes que se descontaron si el precio se divide en 7. El uso que se hace de 1/7 en este caso es el de porción (parte del precio que no se pagó).

4) *"Juan ha cobrado 200€ y Victoria 300€. Por tanto, Juan ha cobrado 2/3 de lo que ha cobrado Victoria"*.

En esta afirmación, el 3 de la fracción indica la cantidad de partes en las que hay que dividir la ganancia de mi primo para expresar lo que he ganado yo, mientras que el 2 indica la cantidad de esas partes que hay que tomar para expresar mi ganancia. El uso que se hace de 2/3 en este caso es el de razón (relación entre dos ganancias independientes).

Los ejemplos ilustran que las fracciones están vinculadas por igual a los dos usos de los números racionales.

Actividad 1.7 (Ordenación de fracciones). Indica cuál de las fracciones es mayor en cada uno de los siguientes casos. Justifica tus respuestas:

i) *3/4* y *9/4*

ii) 2/7 y *2/5*

iii) *3/8* y *4/7*

iv) *3/5* y *2/3*

Utiliza tus respuestas para proporcionar un criterio general para ordenar fracciones (sin recurrir a los decimales).

Como se ha indicado, las fracciones surgen para expresar comparaciones. Sin embargo, *no lo hacen de manera única*: una misma comparación se puede expresar utilizando múltiples fracciones diferentes. Para ilustrarlo, consideramos las siguientes situaciones (vinculadas al quinto apartado de los Ejemplos 1.5.):

a) *“Juan ha cobrado 200€ y Victoria 300€”.*

b) *“Juan ha cobrado 20€ y Victoria 30€”.*

c) *“Juan ha cobrado 2€ y Victoria 3€”.*

d) *“Juan ha cobrado 16€ y Victoria 24€”.*

Las fracciones que expresan la comparativa entre los cobros de Juan y de Victoria son diversas: 200/300, 20/30, 2/3 y 16/24. Sin embargo, la comparativa entre los cobros es idéntica siempre. Es razonable que las representaciones fraccionarias que expresan la misma comparación estén relacionadas: son las **fracciones equivalentes**.

Actividad 1.8 (Fracciones equivalentes). Encuentra seis fracciones equivalentes a 4/12. Podéis usar para ello modelos de medida como el siguiente: https://es.mathigon.org/polypad#fraction-bars

En vista de lo obtenido:

i) Enuncia un criterio para saber si dos fracciones dadas son equivalentes.

ii) Indica cómo construir fracciones equivalentes a una fracción dada.

Actividad 1.9 (Fracciones irreducibles). Encuentra fracciones que sean *irreducibles* y equivalentes a 100/55, 42/63 y 56/32.

i) Indica una estrategia para encontrar una fracción irreducible que se a equivalente a una fracción dada.

ii) Enuncia un criterio para saber si una fracción dada es irreducible.

Las nociones de fracciones equivalentes y de fracción irreducible ilustran cómo las fracciones caracterizan los números racionales:

*Un **número racional** es un conjunto de todas las fracciones equivalentes entre sí.*

Con esta definición queda de manifiesto que **todas las fracciones se corresponden con algún número racional** (a diferencia de lo que sucede con los decimales), y viceversa. Del mismo modo, el conjunto numérico de los racionales se puede ver como la abstracción matemática de todas las comparaciones posibles entre números naturales.

Además, se suele tomar la fracción irreducible como representante habitual de cada comparación. Por ejemplo, en las situaciones a), b), c) y d) dadas previamente, las comparaciones entre 2 y 3, entre 200 y 300 y entre 4000 y 6000 se expresan con el mismo número racional, que se suele representar por 2/3.

1.4.5. Porcentajes

Aunque usualmente los porcentajes se trabajan en la matemática escolar de manera independiente a fracciones y decimales, el énfasis que se viene haciendo sobre las diferentes representaciones de los números invita a establecer la conexión entre número racional y porcentaje. Bajo esta perspectiva, los *porcentajes* son representaciones simbólicas de los números racionales que expresan una comparación entre naturales tomando el 100 como referente. En otras palabras, un porcentaje **es una forma alternativa de expresar una fracción *a/b* a través del numerador de la fracción equivalente a *a/b* que tiene denominador 100**. Para indicar que un número natural expresa un porcentaje se utiliza el símbolo “%”.

EJEMPLOS 1.6 (Interpretación de los porcentajes).

1) *“Si tenía 100€ y he ganado 25, mi ganancia es del 25% de lo que tenía”*.

En esta afirmación, la fracción que expresa la comparación entre la ganancia y el dinero inicial es 25/100, por lo que el porcentaje asociado es 25%. Siguiendo el argumento dado en el Ejemplo 1.3. previo, el uso que se hace del porcentaje es el de razón (relación entre las dos ganancias).

2) *“Un libro cuesta 20€ pero me descuentan 2, por lo que me descuentan el 10%*.

En esta afirmación el descuento corresponde a la fracción 2/20, que es equivalente a 10/100, por lo que la representación en porcentaje de la comparación es de 10%. El uso de los racionales que se manifiesta en este ejemplo es el de porción (parte del precio que no se pagó).

3) *“Una carrera tiene 12 km pero Ana se retiró a los 6 km: recorrió el 50 % de la carrera”*.

En esta afirmación, la fracción que expresa la comparación entre la distancia recorrida y la total de la carrera es 6/12, que es equivalente a 50/100, por lo que el porcentaje asociado es 50%. Se pone de manifiesto el uso de 50% como porción (parte de la carrera que Ana recorrió).

4) “En 2018 España tenía una deuda de mil millones, pero ahora es de 1150 millones, por lo que la deuda ha aumentado un 15%”.

En esta afirmación, el aumento de la deuda es de 150 millones, por lo que la fracción que representa la relación entre ese aumento y la deuda inicial es 150/1000, que es equivalente a 15/100. Por tanto, el aumento de la deuda es del 15%. El mismo argumento expresado en el ejemplo 1) sustenta que el uso de los racionales que se emplea en este ejemplo es el de razón (relación entre el aumento de la deuda y la deuda inicial).

5) *"Un pantano está al 13% de su capacidad"*.

En esta afirmación se está expresando la comparación entre el agua que queda en un pantano y el máximo que podría contener: si este máximo fuera de *100 l*, entonces contendría *13 l* (la fracción asociada es 13/100). El uso que se hace de 13% es el de porción (la parte de agua que queda en el pantano respecto a su capacidad máxima).

Los ejemplos dados ilustran que las fracciones están vinculadas por igual a los dos usos de los números racionales.

1.4.6. Conexiones entre las representaciones simbólicas de los racionales

Las conexiones entre las diferentes representaciones simbólicas de los números racionales se ilustran en la Figura 1.11.

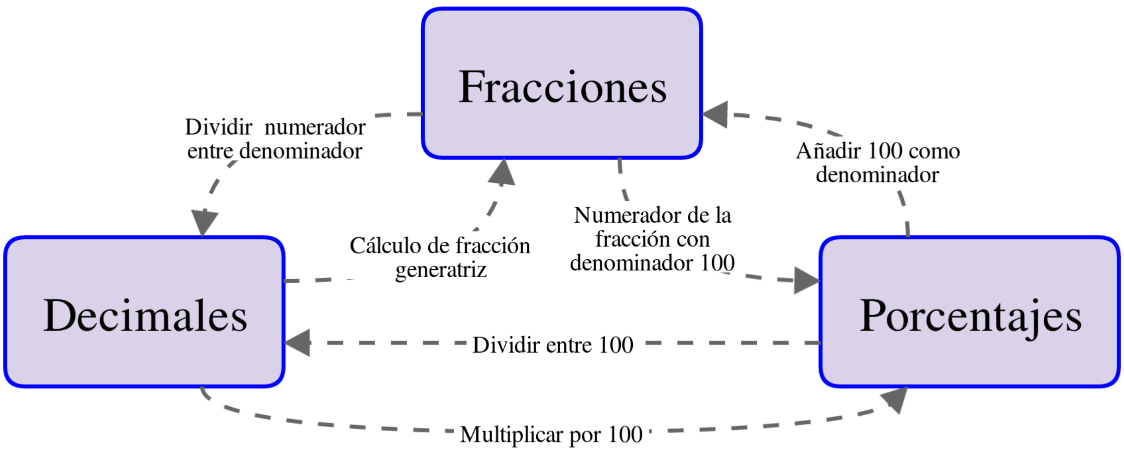


Figura 1.11. Conexiones entre las representaciones simbólicas de los racionales

Algunas de las conexiones son intuitivas, como el paso de fracción a decimal, aunque otras constituyen auténticos problemas matemáticos de relevancia, como es el caso inverso (el cálculo de la *fracción generatriz* de un decimal). No obstante, es necesario que los profesores (i) conozcan estas conexiones y las materialicen, y (ii) elijan de forma autónoma la representación idónea en función de la situación. Con el fin de. Se proponen a continuación un conjunto de actividades para trabajar estas competencias.

Actividad 1.10. (Fracción generatriz de un decimal). Encuentra la fracción que representa los decimales dados en cada caso:

i) (Decimales finitos) 0.3; 4.5; 2.75; 1.76543.

SUGERENCIA: 0.1 representa una décima, que es 1/10 de la unidad. Entonces 0.7 representa 7 décimas, que son 7/10 de la unidad. Se puede razonar del mismo modo con centésimas, milésimas, etc, por lo que 0.65

serían 6 décimas más 5 centésimas.

ii) (Decimales periódicos puros) $0.7777... = 0.\hat{7}$; $2.343434... = 2.\widehat{34}$;

SUGERENCIA: $10 \cdot 0.\hat{5} = 5.\hat{5}$, por lo que $9 \cdot 0.\hat{5} = 10 \cdot 0.\hat{5} - 0.\hat{5} = 5$. De aquí se puede obtener la fracción que representa a $0.\hat{5}$.

iii) (Decimales periódicos mixtos) $0.1\widehat{723}$; $0.34\hat{6}$;

SUGERENCIA: Para eliminar el periodo se debe multiplicar el decimal por 100, o 1 000, o 10 000, etc. según el caso. Luego se razona igual que en ii).

iv) (Decimales infinitos no periódicos) Encuentra cinco decimales infinitos que no representen números racionales.

A partir de las respuestas dadas, extrae las reglas usuales de formación de fracciones generatrices de un decimal.

Actividad 1.11. (Otras conexiones entre representaciones). Usad tres ejemplos para ejemplificar cómo se realizan las siguientes conexiones entre representaciones:

a) Paso de fracción a porcentaje, y viceversa.

b) Paso de porcentaje a decimal, y viceversa.

A partir de los doce ejemplos hechos, extrae reglas generales para establecer las conexiones entre fracción y porcentaje, y entre porcentajes y decimales.

Actividad 1.12 (La batalla). En una batalla participaron *10 000* combatientes. El *34%* de los supervivientes no fuman, mientras que el *63%* de ellos no beben. **¿Cuántos murieron?**

Actividad 1.13 (Descuentos acumulables). Esta mañana un matrimonio discutía: tienen un descuento del 5% en todas sus compras. Además, los jamones, que habitualmente cuestan 200€, tienen un 15% de descuento, que se acumula con el otro. El marido dice que es mejor para ellos recibir primero el 15% y luego el 5%, pero la mujer opina lo contrario. **¿Quién lleva razón?**

Actividad 1.14 (Un tuitero desbocado). Un amigo mío tuiteó lo siguiente:

En TVE acaban de decir que una entrada que vale 200€ es un 100% más cara que una que vale 20€. Es un 1 000% , un 100% serían 40€.

¿En cuál de sus razones llevaba razón y por qué?

Actividad 1.15 (Reparto justo). Dos pastores que tienen 5 y 3 panes, respectivamente, se encuentran a un cazador con hambre. Reparten los panes y comen igual cantidad los tres. Al despedirse, el cazador les da 8 monedas.**¿Cómo deben repartirlas?**

Actividades para practicar sobre la Sección 1

P1.1 (Usos de los números I). Indica qué tipo de números aparecen en cada situación y con qué uso:

i) Lucía vive en la séptima planta, y Marcos en la -1.

ii) La matrícula de mi coche es 3281.

iii) El vendedor se quedó con las dos terceras partes de las ganancias de la venta.

iv) El saldo de mi cuenta es de -4.53 euros.

v) El 40% del bizcocho es harina.

vi) El palacio tiene 42 habitaciones.

vii) Si tenemos 5 bocadillos y queremos comer 3 personas, cada persona come 5/3 de bocadillo.

viii) Ha obtenido un 4 en el examen, y por eso suspende.

ix) Las coordenadas de mi casa son (-4, 5.32)

x) Manuel anota los gastos de su empresa en una hoja de Excel: cuando compró un coche hizo una anotación de *20 000€,* pero cuando le devolvieron la subvención del estado hizo una anotación de -*3 500€.*

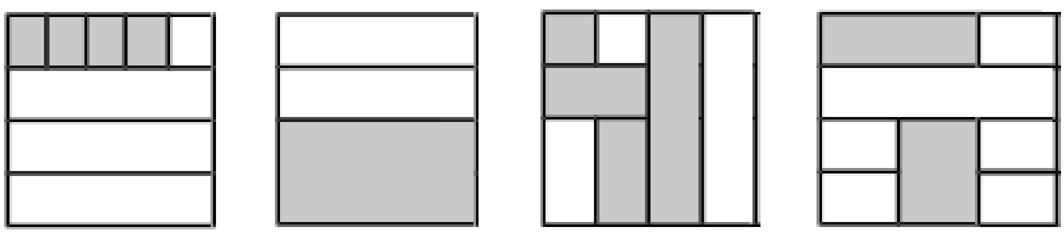
xi) El programa del tiempo anuncia que la humedad relativa del ambiente es del 37%.

xii) En ciclismo los equipos en las carreras tienen nueve componentes. El primer dorsal, que acaba en 1, es siempre para el líder (el mejor corredor). Además, el Tour de Francia asigna los dorsales de la carrera dependiendo de los resultados del año pasado. De esta manera, el ganador del año anterior lleva el 1, y su equipo los dorsales, 2, 3...7, 8. El segundo clasificado llevará el 11 y sus compañeros el 12, ... 18 y así sucesivamente. El cuarto clasificado del año pasado y líder de su equipo lleva, por tanto, el dorsal 31.

xiii) Si hacemos un viaje de *431* km y conducimos 3 personas, cada uno debe conducir *431/3=143.666666…. km*.

P1.2 (Usos de los números II). Recuerda las categorías de uso de los números naturales y propón dos ejemplos de cada categoría. Repite la actividad para los enteros y para los racionales.

P1.3. (Representaciones pictóricas de los racionales I) Observa la figura y expresa con una fracción adecuada la porción del cuadrado que queda sombreada en cada caso y represéntala usando cuatro representaciones diferentes a la dada.



P1.4 (Representaciones pictóricas de los racionales II). Expresa los siguientes números racionales utilizando los modelos cardinal (matricial), de medida, de área (sectores y rectangular) y sobre la recta numérica:

i) 3/4

ii) 9/8

iii) 0.25

iv) 130%

v) 5/3

vi) 2.4

P1.5 (Equivalencia de fracciones usando representaciones pictóricas). Considera las fracciones 3/5 y 7/4:

i) Busca dos ejemplos de fracciones equivalentes a cada una y representa cada grupo de fracciones utilizando el modelo cardinal matricial, de área (cuadrado y de sectores) y el de medida (dibujos de las tiras).

ii) En vista de los resultados, proporciona un criterio para saber si dos fracciones representadas en cualquiera de los modelos son o no equivalentes.

P1.6. (Orden de fracciones usando representaciones pictóricas). Utiliza la representación pictórica que consideres adecuada para ordenar las siguientes parejas de números racionales y encuentra un número racional entre ellos:

i) 4/9 y 5/9 ii) 1/13 y un quinceavo iii) 3/7 y 7/17

P1.7 (Propiedades de los sistemas de numeración I). Crea dos sistemas de numeración con las siguientes condiciones:

i) Ambos sistemas utilizan los mismos símbolos.

ii) Solo uno de los sistemas creados cumple el principio de agrupación (con base siete).

Utiliza ambos sistemas de numeración para expresar las siguientes cantidades: días del fin de semana, días de la semana completa, días de un mes y días de un año.

P1.8 (Propiedades de los sistemas de numeración II). Considera a continuación los siguientes cuatro sistemas de numeración:

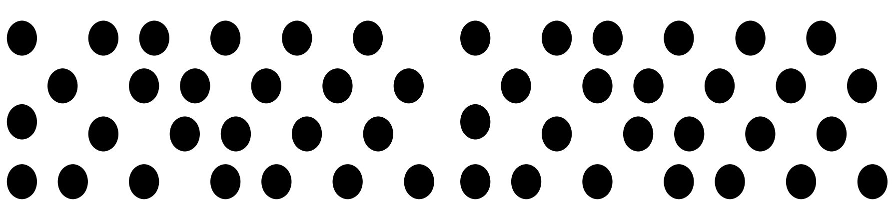
a) El sistema numérico decimal (el que usamos actualmente)

b) El sistema romano

c) Los sistemas inventados en la actividad anterior

Justifica razonadamente si cada uno de los sistemas de numeración considerados cumplen las propiedades aditivas, multiplicativas y de valor posicional.

P1.9 (Cifras en diferentes bases). Utiliza el procedimiento que desees para expresar la cantidad de puntos usando sus cifras en bases tres, ocho, diez y catorce.



P1.10 (Recuperación de la base). El uso de la base diez en el sistema numérico decimal se debe a que los humanos tenemos diez dedos entre ambas manos. En *Omicrón Lejanísimo* ocurre algo similar, su sistema de numeración tiene como base la cantidad de dedos de sus dos manos. ¿Cuántos dedos tendrán sus habitantes en ambas manos si nos informaron de que en Stonehenge (dibujo ejercicio 13b) hay "43" piedras?

P1.11 (Uso de letras en base 12). Al expresar en base 12 el dinero que tengo en el banco, obtengo $ABB_{12)}$. Escribe las cifras en base 12 de

a) El dinero que tendría si gano un euro más

b) El dinero que tendría si pierdo un euro

P1.12 (Cifras correctas en diferentes bases). Las cifras $2BE_{12)}$, $10031_{2)}$ o $5604_{3)}$ no expresan adecuadamente cantidades en bases doce, dos y tres, respectivamente. Explica por qué y escríbelas adecuadamente, justificando tu respuesta.

P1.19 (Interpretación de las cifras en diferentes bases). Al agrupar cierta cantidad de objetos en base 6, obtengo que hay $103_{6)}$. Esto significa que

i) quedaron 3 objetos que no se pudieron integrar en un grupo mayor

ii) todos los grupos de 6 que se obtuvieron se integraron en grupos mayores

iii) quedó 1 grupo de 6x6 que no se pudo integrar en un grupo mayor

Siguiendo esta lógica, di qué significado tienen (en términos del proceso de agrupación) los dígitos señalados dentro de las cifras dadas:

i) El "1" en $104_{5)}$

ii) El "0" en $11011_{2)}$

iii) El "6" en $AB6F_{16)}$

iv) El "7" en $100731_{9)}$

v) El "2" en $234106_{8)}$

vi) La "A" en $A_{13)}$

vii) La "B" en $B00_{33)}$

viii) El "1" en $10_{b)}$ (*b* es una base cualquiera)

P1.20 (Interpretación de fracciones, usos y conexión con porcentajes y decimales). Observa las fracciones que aparecen en los siguientes enunciados:

a) "En una bolsa de frutos secos, las tres cuartas partes del peso son cacahuetes".
b) "Un grifo da 3/4 de su caudal máximo".
c) "Un tejido encoge 1/5 parte después de meterlo en la lavadora"
d) "Tras pagar los impuestos correspondientes, cada uno de mis tres primos ha recibido 1/4 de la herencia de su madre".
e) "Al hornear un bizcocho, su volumen pasa a ser 7/6 del volumen antes de ser horneado".
f) "Si tenemos 5 bocadillos y queremos comer 3 personas, cada persona come 5/3 del total de los bocadillos"

i) Siguiendo la lógica empleada en los Ejemplos 1.5., di qué cantidades expresables con números naturales se están comparando en cada caso y cuál es el referente de cada comparación.

ii) Di qué usos de los racionales se ponen de manifiesto en cada ejemplo

iii) Expresa cada una de esas fracciones como porcentajes y como decimales

P1.21 (Conexión entre decimales y fracciones). Expresad, cuando sea posible, los siguientes decimales como fracciones irreducibles. Justificad razonadamente el proceso de obtención de las fracciones

i) 1.032	Iii) 20.01353535...
ii) 2.183183183...	iv) 1.01001000100001....

P1.22 (Elección autónoma de representación: "actitudes hacia las matemáticas"). Jesús está recordando cómo se comportaron los alumnos de Bases Matemáticas el pasado año. La porción de alumnos que mantuvo una actitud perfecta es de 0.7. La porción de alumnos que no mostraron interés por las matemáticas es 0.11111111... y el resto tuvieron una actitud negativa.

a) ¿Cuántos alumnos en total había el año pasado? (Son menos de 150).

b) ¿Cuántos alumnos en total no mostraron interés por las matemáticas?

P1.23 (Elección autónoma de representación: "monogamia complicada"). En una ciudad, 1/4 de los hombres están casados con 2/5 de las mujeres. Si nunca se casan con forasteros (son todos heterosexuales y no gustan los *poliamores*) **¿Cuál es la porción de solteros en dicha ciudad?**

Actividades de reflexión sobre la Sección 1

R1.1 (Reflexionando sobre las cifras en diferentes bases). Responde de forma justificada a las siguientes cuestiones. Utiliza las representaciones o procedimientos que consideres más adecuados.

i) ¿En qué base b debe escribirse la cantidad de actividades para practicar para que las cifras sean $21_{b)}$?

ii) Escribe las cifras en base tres de la cantidad que se puede expresar como $1 + 3 + 3^3$

iii) Escribe las cifras en base 5 de una cantidad que se puede escribir como $5 \times (5 \times (5 + 4) + 3) + 2$

iv) Di, sin hacer cálculos, qué cantidad representan las siguientes cifras: $1000_{11)}$, $10000000000_{4)}$ o $C000_{14)}$.

v) Sabiendo que $2\times4+ 3\times4^2+4^4 = 312$, escribe las cifras en base cuatro de 312. ¿Cuáles son las cifras en base dos de 252?

R1.2. (Conteo en otras bases). Los sistemas de numeración en bases diferentes de 10 usan los símbolos del sistema numérico decimal, pero usando otras reglas para formar las cifras. Por tanto, llevan asociada una secuencia numérica diferente a la usual. Se trata de explorar este tipo de secuencias y analizar sus características usando una base pequeña y una grande.

i) Representa las cifras en base tres y en base veinte de todas las cantidades desde el uno hasta cincuenta. Puede ser de ayuda utilizar una representación adecuada previa a la escritura de las cifras.

ii) Indica en qué cantidades se alcanzan el $10_{3)}$, $100_{3)}$ y el $1000_{3)}$. ¿Qué va antes de esas cantidades cuando se está contando en base tres? ¿Qué va después?

iii) Indicad en qué cantidades se alcanzan el $10_{20)}$, $100_{20)}$ y el $1000_{20)}$.¿Qué va antes de esas cantidades cuando se está contando en base veinte? ¿Qué va después?

iv) Usando lo que has observado, explica el procedimiento de conteo en base tres y en base veinte. Puedes apoyarte en una representación adecuada.

R1.3. (Algoritmo para escribir las cifras en cualquier base). Para escribir las cifras en base 6 de la cantidad de días de un año bisiesto, un compañero de otro curso sigue los siguientes pasos:

1) Divide 366 entre 6, obteniendo 61 de cociente (y 0 de resto).

2) Divide 61 entre 6, obteniendo 10 de cociente y 1 de resto.

3) Divide 10 entre 6, obteniendo 1 de cociente y 4 de resto.

4) Divide 1 entre 6, obteniendo 0 de cociente y 1 de resto.

5) Concluye que las cifras pedidas son $1410_{6)}$

i) ¿Crees que las cifras dadas son las correctas? Justifica tu respuesta

ii) Repite los cálculos descritos, ¿crees que está aplicando el principio de agrupación? Justifica tu respuesta, indicando en qué momento (o momentos).

iii) Utiliza alguna de las representaciones manipulativa o pictórica de los naturales justificar lo que hace en cada paso.

iv) ¿Se podría repetir una estrategia similar para obtener las cifras en base 12 de la cantidad de días de un año bisiesto? Justifica tu respuesta intentando aplicarla y viendo qué ocurre.

R1.4. (Cambio de base de numeración). Se trata de dar una regla para "cambiar de base". Es decir, dadas dos bases *b* y *B*, y unas cifras en base *b*, ¿cómo se pueden conocer las cifras de la misma cantidad en la base *B*?

Para dar respuesta a esta pregunta

i) Resuelve algunos casos particulares. Para ello, usa los procedimientos que consideres necesarios con el fin de:

- partir de $301_{4)}$ y escribir las cifras de esa cantidad en base tres

- partir de $100011_{2)}$ y escribir las cifras de esa cantidad en base seis

- partir de $10D_{16)}$ y escribir las cifras de esa cantidad en base siete

- partir de $3021_{5)}$ y escribir las cifras de esa cantidad en base once

- partir de $CAE_{15)}$ y escribir las cifras de esa cantidad en base dieciséis

ii) Sintetiza las estrategias seguidas en los casos particulares para dar una estrategia general que permita escribir las cifras en base *B* de una cantidad dada en base *b*.

SUGERENCIA: En clase hemos trabajado con procedimientos de agrupación (con los materiales multibase o con dibujos) y "desagrupación" (con los materiales, con el dibujo o con la forma polinómica). Analiza qué papel tienen esos procedimientos para cambiar de base.

R1.5 (Reflexionando sobre las cifras en diferentes bases). Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) Las fracciones mayores que la unidad no se pueden representar con el modelo de área.

ii) Existen números decimales con 1 000 cifras que no pueden expresarse como una fracción.

iii) Al representar una fracción con el modelo de área, las partes en las que se divide la unidad, tienen que tener toda la misma forma y superficie.

R1.6 (Pronóstico sin complejos). En primavera de 2019 y tras su entrada en el parlamento andaluz, el partido político VOX tenía unas expectativas altas de cara a las elecciones generales del 28 de abril. Este partido fue tachado de machista por algunos sectores sociales, incluso un diario publicó la siguiente noticia.

https://www.eldiario.es/politica/Vox-reduciria-resultados-electorales-votaran_0_886811773.html

En ella informa que *"si solo votaran mujeres, entonces VOX vería reducido su apoyo a la mitad"*. David, un tuitero de cabecera, criticó el titular de la noticia, diciendo que eso significaba que la mitad de los votantes de VOX eran mujeres.

¿Lleva razón David al decir que la noticia significa que la mitad de los votantes de VOX son mujeres? Justifica tu respuesta.

Sección 2: Operaciones. Interpretación, problemas aritméticos y algoritmos

Las operaciones aritméticas tienen un doble valor educativo en la Educación Primaria. En primer lugar, cada operación abstrae un conjunto de acciones reales que se modelizan con dicha operación. Identificarlas y relacionarlas con la operación en diferentes contextos es fundamental a la hora de resolver y plantear problemas aritméticos. Llamaremos *interpretación* de una operación a la organización de dichas acciones en categorías, cuya descripción y discusión ocupará las tres primeras secciones que se dedican a las operaciones (una sección para cada conjunto numérico estudiado). En segundo lugar, las operaciones tienen también un valor algorítmico, que contribuye al desarrollo del pensamiento computacional del alumnado y se comentan en la última sección.

2.1. Interpretación de las operaciones con números naturales. Problemas aritméticos

Son múltiples los trabajos de educación matemática dedicados al análisis y categorización de las operaciones aritméticas con números naturales y los problemas escolares asociados. En gran cantidad de ellos se reconoce la conexión entre los enunciados que se resuelven con una suma y de resta, de manera que una misma situación real puede dar lugar a un problema de suma o de resta, dependiendo de la información que proporcione el enunciado, y la que se pregunte.

EJEMPLO 2.1. Los siguientes dos enunciados describen la misma situación real:

a) *Alba tiene 3 lápices y Alejandro tiene 5, ¿cuántos lápices tienen entre los dos?*

b) *Entre Alba y Alejandro juntan 8 lápices. Si Alba tiene 3 ¿cuántos tiene Alejandro?*

En ambos, la cantidad total de *8* lápices está descompuesta en dos subconjuntos: los *3* que tiene Alba y los *5* que tiene Alejandro. Sin embargo, en el primer enunciado se conocen los lápices de los dos niños, y se pregunta el total: es un problema *de suma*. Por el contrario, en el segundo enunciado se conoce el total y los lápices de Alba, y se pregunta por los de Alejandro: en este caso el problema es *de resta*.

Es por ello usual que se hable conjuntamente de estas situaciones como *problemas de estructura aditiva.* De forma análoga, las situaciones que pueden involucrar una multiplicación o una división se denominan *problemas de estructura multiplicativa.*

EJEMPLO 2.2. Los siguientes dos enunciados describen la misma situación real:

a) *Carlos bebe 2 litros de agua al día, ¿cuánta agua bebe a lo largo de la semana?*

b) *Carlos bebe 14 litros de agua en una semana. Si bebe todos los días la misma cantidad de agua, ¿cuánta agua bebe cada día?*

En ambos, Carlos bebe *2 l* de agua cada día de la semana, por lo que bebe *14 l* a la semana. Sin embargo, en el primer enunciado se informa del agua que bebe cada día y se pregunta por el total de agua que bebe a la semana: es un problema *de* *multiplicación.* A su vez, en el segundo enunciado se informa de el agua consumida en toda la semana (y de que todos los días bebe la misma cantidad de agua) y se pregunta por el agua consumida en un día: es un problema *de división.*

La presente sección adopta este esquema, de manera que las dos primeras subsecciones se dedican a la interpretación conjunta de la suma y de la resta y de la discusión de diferentes problemas de estructura aditiva, respectivamente. A su vez, las dos siguientes subsecciones se ocupan de la interpretación de las operaciones de multiplicación y división de números naturales, y de los problemas de estructura multiplicativa. Finalmente, se dedica la última subsección a revisar nociones básicas de divisibilidad

2.1.1. Interpretación de las operaciones de estructura aditiva

La **suma** de números naturales admite dos interpretaciones. La primera es la *unitaria*: suma como acción de añadir. Se da en situaciones en las que hay una cantidad inicial de referencia que experimenta un cambio al añadirle una segunda cantidad. Esta interpreración es *asimétrica*, ya que los sumandos (cantidad de referencia y cantidad que se añade) tienen papeles no intercambiables.

EJEMPLOS 2.3.

1) Los siguientes enunciados plantean sumas con interpretación unitaria en contexto:

- *Juan tenía 6 cromos y le dan otros 4, ¿cuántos tiene ahora?*

- *Una garrafa contiene 3 l de agua. ¿Cuánta agua tendrá si le echamos 2 l más?*

2) El procedimiento de suma con el ábaco, en el que se representa una cantidad y se le añaden tantas fichas como indica la segunda cantidad (reagrupando cuando es necesario) es un ejemplo de suma unitaria en una representación manipulativa.

3) El procedimiento de suma sobre la recta numérica, en la que se representa el primer sumando y después se avanza tantas veces como indica el segundo sumando, es un ejemplo de suma unitaria en una representación pictórica.

La segunda interpretación de la suma de números naturales es la *binaria*: suma como resultado de juntar. Esta aparece en situaciones en las que hay dos cantidades que tienen la misma importancia. La operación es resultado de la unión física de ambas, y el recuento del conjunto resultante (no hay modificaciones ni cambios a una cantidad dada). Por tanto, la interpretación binaria de la suma es *simétrica*, los dos sumandos tienen papeles intercambiables dentro del contexto real en el que aparece la suma.

EJEMPLOS 2.4.

1) Los siguientes enunciados plantean sumas con interpretación binaria en contexto:

- *Noa tiene 2 botones azules y 4 rosas, ¿cuántos botones tiene en total?*

- *¿Cuántas flores le han regalado a mi madre por su cumpleaños, si recibió seis rosas rojas y cinco claveles blancos?*

2) El procedimiento de suma con el material multibase, en el que se representan los dos sumandos, se juntan todas las piezas y se reagrupan todas juntas, es un ejemplo de suma binaria en una representación manipulativa.

3) El procedimiento de suma a partir de un modelo cardinal, en el que se dibujan por separado los sumandos y después se cuentan todos juntos, ejemplifica la suma binaria en una representación pictórica.

La **resta** también admite interpretación unitaria y binaria. Interpretación unitaria: restar como acción de quitar. Se da en las situaciones en las que hay una cantidad inicial de referencia (el minuendo) que experimenta un cambio al quitarle una segunda cantidad (el sustraendo). Estas situaciones son asimétricas, minuendo y sustraendo tienen un rol diferente en el contexto.

EJEMPLOS 2.5.

1) Los siguientes enunciados plantean restas con interpretación unitaria en contexto:

- *María tenía 5 cromos y perdió 3, ¿cuántos le quedan?*

- *Tengo ahorrados 15 euros. Si me gasto 7, tendré igual que mi hermana. ¿Cuánto dinero tiene ahorrado ella?*

2) Los procedimientos de resta con el ábaco y con el material multibase son ejemplos de resta con interpretación unitaria bajo una representación manipulativa. En ambos casos, se representa el minuendo y se le van quitando tantas piezas como indica el sustraendo (desagrupando convenientemente cuando es necesario).

3) El procedimiento de resta sobre la recta numérica, consistente en representar el minuendo y recorrer "hacia atrás" tantas unidades como indica el sustraendo, es un ejemplo de resta unitaria en una representación pictórica.

La interpretación binaria de la resta (resta como resultado de separar) se da en las situaciones en las que hay un conjunto de objetos conocido (cuya cantidad es el minuendo) descompuesto en dos subconjuntos menores, uno cuya cantidad es conocida (el sustraendo) y otro cuya cantidad es la diferencia entre la cantidad de objetos total y la del subconjunto conocido (el resultado de la resta). En estas situaciones no hay acciones ni cambios, son estáticas.

EJEMPLOS 2.6.

1) Los siguientes enunciados plantean restas con interpretación unitaria en contexto:

- *Antonio tiene botones azules y rosas. Si tiene 10 en total y 4 son azules, ¿cuántos botones rosas tiene?*

- *Tengo en mi armario jerséis de lana y de poliéster, ¿cuántos tengo de lana si hay un total de 7 jerséis y 4 son de poliéster?*

2) El procedimiento de resta con un modelo de medida (las regletas), en las que se coloca el minuendo, debajo el sustraendo y la resta es la regleta que coincide con el resultado de la operación, es un ejemplo de resta binaria en una representación manipulativa.

2.1.2. Resolución y planteamiento de problemas de estructura aditiva

Sería ideal para la enseñanza de la resolución de problemas que el profesorado dispusiera de un *catálogo* o listado lo más rico posible de tareas diferenciadas para trabajar con su alumnado. En general, la complejidad de las situaciones que involucran el contenido matemático dificulta mucho la elaboración de estos catálogos. No obstante, en el caso de las operaciones de estructura aditiva la investigación proporciona una idea completa de los diferentes problemas que se pueden plantear. Hershkovitz y Nesher (2003)[3] proporcionaron una clasificación de 14 tipos de enunciados para trabajar los problemas de estructura aditiva en primaria. Estos se organizan en tres categorías:

i) Problemas de *Cambio*, que describen un aumento o disminución en una cantidad de partida, para dar lugar a una cantidad final. La pregunta puede estar referida a la cantidad de partida, la final o la que aumenta o disminuye. Hay seis tipos, que dependen de si hay aumento o disminución y el dato desconocido (cantidad de partida, final o cantidad de cambio).

EJEMPLOS 2.7.

1) *Susana tiene 8 pelotas y perdió 3, ¿cuántas le quedan?* (problema de Cambio 2: Situación de disminución, se desconoce la cantidad final)

2) *Luis tenía una colección de canicas y acaba de encontrar 6 más, con lo que ahora tiene 13 canicas. ¿Cuántas tenía antes de encontrarse las 6 nuevas?* (problema de Cambio 5: Situación de aumento, se desconoce la cantidad inicial)

ii) Problemas de *Comparación (aditiva)*, que establecen una relación entre dos cantidades: una *referente* y una *referida*, que guardan cierta diferencia. Hay seis tipos de problemas de comparación, que dependen de si se indica “más que” o “menos que” y del dato desconocido (referente, referido o diferencia).

3 Hershkovitz, S. & Nesher, P. (2003). The role of Schemes in Solving Word Problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1-24.

EJEMPLOS 2.8.

1) *Belén tiene 5 caramelos y Ana tiene 12, ¿cuántos caramelos tiene Ana más que Belén?* (problema de Comparación 1: Se indica "mas qué" y se desconoce la diferencia)

2) *Juan tiene 21 años e Isabel 2 menos, ¿cuántos años tiene Isabel?* (problema de Comparación 4: se indica "menos que" y se pregunta por el referido)

iii) Problemas de *Combinación*, que involucran una relación (estática) entre dos subconjuntos de un conjunto y pregunta por la cantidad total de elementos del conjunto o por la cantidad de elementos de uno de los subconjuntos. Hay dos tipos, que dependen de si se desconoce el total o un subconjunto.

EJEMPLOS 2.9.

1) *Fermín tiene 10 euros y Marta tiene 12, ¿cuánto dinero tienen entre los dos?* (problema de Combinación 1: se desconoce el total).

2) *Tengo dos tipos de zapatillas deportivas: 2 pares para correr y el resto para jugar al fútbol. Si tengo en total 6 pares de zapatillas, ¿cuántos pares tengo para jugar al fútbol?* (problema de Combinación 2: se desconoce un subconjunto).

Actividad 2.1 (Resolución de problemas de estructura aditiva). Observa los siguientes enunciados:

a) "*María tiene 3 globos y si pierde 2 tendrá los mismos que Antonio. ¿Cuántos globos tiene Antonio?*"

b) "*María tiene 3 globos y le regalan 2. ¿Cuántos globos tiene María?*"

c) "*María tiene 3 globos, 1 más que Antonio. ¿Cuántos tiene Antonio?*"

d) "*Rosa y Elisa juntan 5 globos. Si Elisa tiene 3, ¿cuántos tiene Rosa?*"

Para cada uno de ellos, indica

i) El tipo de problema de estructura aditiva que ejemplifica cada enunciado

ii) La operación que lo resuelve y con qué interpretación aparece

iii) Cuál de las siguientes representaciones pictórica es más apropiada para resolver cada enunciado: cardinal, recta numérica o modelo de medida.

Estos tres tipos de problemas deben ayudar a trabajar las dos interpretaciones de las operaciones. La Tabla 2.1. ilustra las conexiones entre las categorías de Hershkovitz y Nesher (2003) y las interpretaciones de las operaciones discutidas previamente.

Tabla 2.1. *Interpretaciones de las operaciones de estructura aditiva y tipos de problemas que trabajan esas interpretaciones*

Operaciones e interpretación	Tipo de problema	Descripción
Suma **(unitaria)**	Cambio 1	Aumento, se desconoce la cantidad final
Resta **(unitaria)**	Cambio 2	Disminución, se desconoce la cantidad final
Resta (binaria)	Cambio 3	Aumento, se desconoce la cantidad de cambio
Resta (binaria)	Cambio 4	Disminución, se desconoce la cantidad de cambio
Resta (binaria)	Cambio 5	Aumento, se desconoce la cantidad inicial
Suma (binaria)	Cambio 6	Disminución, se desconoce la cantidad inicial
Resta (binaria)	Comparación 1	Se indica “más que” y se desconoce la diferencia
Resta (binaria)	Comparación 2	Se indica “menos que” y se desconoce la diferencia
Suma **(unitaria)**	Comparación 3	Se indica “más que” y se desconoce el referido
Resta **(unitaria)**	Comparación 4	Se indica “menos que” y se desconoce el referido
Resta (binaria)	Comparación 5	Se indica “más que” y se desconoce el referente
Suma (binaria)	Comparación 6	Se indica “menos que” y se desconoce el referente
Suma (binaria)	Combinación 1	Se desconoce el total
Resta (binaria)	Combinación 2	Se desconoce un subconjunto

De acuerdo a la Tabla 2.1., para trabajar la suma unitaria, se pueden plantear problemas de Cambio 1 o de Comparación 3, mientras que la suma binaria surge en enunciados de Cambio 6, Comparación 6 o Combinación 1. Por su parte, para trabajar la resta unitaria son pertinentes los problemas de Cambio 2 y de Comparación 4, mientras que los enunciados de Cambio 3, 4 y 5, los de Comparación 1, 2 y 5 y los de Combinación 2 se resuelven con restas binarias.

Actividad 2.2 (Planteamiento de problemas de estructura aditiva). Proporciona enunciados que verifiquen las condiciones dadas:

i) Dos problemas de suma unitaria y dos de resta unitaria que sean de diferente tipos según la Tabla 2.1.

ii) Tres problemas de suma binaria y tres de resta binaria que sean de diferente tipo según la Tabla 2.1.

Resuélvelos utilizando la representación pictórica que consideres más adecuada.

2.1.3. Interpretaciones de las operaciones de estructura multiplicativa

Al analizar la **multiplicación** de números naturales, encontramos primero su interpretación unitaria: multiplicación como suma repetida. Esta se da en situaciones en las que la multiplicación *a·b* es el resultado de sumar *a* veces el número *b*. Esta interpretación, por tanto, es asimétrica: el papel de los factores no es intercambiable, por lo que hay situaciones que se identifican con *a·b* pero no con *b·a*. Por esta razón, diremos que *a* es el *multiplicador* (1º factor) y b es el *multiplicando* (2º factor).

EJEMPLOS 2.10.

1) *Jesús camina de lunes a viernes 3 Km para llegar a la facultad. ¿Cuánto recorre a la semana?*

En este enunciado surge la multiplicación *5·3*, el multiplicador es *5* (los días de lunes a viernes, que son las veces que hay que sumar) y el multiplicando es *3* (*km* que recorre al día, la cantidad que se suma).

2) *Paola dio 3 clases particulares a su prima, y recibió 5€ por cada clase, ¿Cuánto dinero recibió por sus clases?*

En este enunciado surge la multiplicación 3·5, el multiplicador es 3 (las clases que dio, que son las veces que hay que sumar) y el multiplicando es 5 (el dinero que recibe por clase, la cantidad que se suma).

3) El procedimiento de multiplicación de una cantidad pequeña por una mayor como *3·17*, por ejemplo, se puede hacer con el ábaco vertical si esta operación se interpreta como suma repetida con multiplicador multiplicador 3 y multiplicando 17. Para ello es suficiente añadir 3 veces la cantidad 17.

La interpretación binaria de la multiplicación tiene dos subcategorías: recuento de combinaciones y producto de medidas. En el primer caso, la multiplicación *a·b* surge para conocer el número de combinaciones que se pueden hacer con un conjunto de *a* elementos y otro de *b* elementos. La segunda subcategoría recoge las situaciones en las que se multiplican dos magnitudes *a* y *b* cuyos papeles en la situación de partida son intercambiables (*metros* por *metros* para dar área, por ejemplo).

EJEMPLOS 2.11.

1) *Tenemos 2 tipos de pasta y 3 tipos de salsa, ¿cuántos platos diferentes podemos cocinar?*

En este enunciado surge la multiplicación *2·3* como recuento de combinaciones.

2) *La superficie de una piscina es de 250 m² y su profundidad es de 2 m, ¿cuántos metros cúbicos de agua son necesarios para llenarla?*

Este problema se resuelve con haciendo 250·2, que surge como producto de medidas.

En el caso de la **división,** es la interpretación unitaria la que contiene dos subcategorías: reparto y agrupación o resta repetida. La división como reparto aparece en situaciones en las que la división de *D* entre *d* es el resultado de repartir una colección de *D* elementos en *d* partes iguales (se conocen el total de elementos y el número de partes en las que se reparte). Por su parte, la división como resta repetida surge cuando la situación requiere agrupar una colección de *D* elementos en grupos de *d* elementos por grupo (se conocen el total de elementos de una y los elementos que tiene cada una de las partes en las que esta se divide).

EJEMPLOS 2.12.

1) *José reparte 20 caramelos entre sus 5 amigos. ¿Cuántos caramelos corresponden a cada uno?*

En este enunciado surge la división de 20 entre 5 como reparto: se conocen el total de caramelos a repartir y la cantidad de partes en las que hay que repartir esos caramelos (5, una parte para cada amigo), y se pregunta por el número de caramelos que tendría cada parte.

2) J*osé reparte 20 caramelos en bolsas iguales de 5 caramelos. ¿Cuántas bolsas obtiene?*

Este enunciado se resuelve con la misma operación que la anterior, pero ahora la división se interpreta como resta repetida: se conocen el total de caramelos y los caramelos que tiene cada parte (5 caramelos por bolsa), y se pregunta por el número de partes que se pueden hacer.

3) El procedimiento de división por un divisor grande se puede resolver con el ábaco vertical si se interpreta la operación como resta repetida. En efecto, para divididr 65 entre 23, se puede representar el 65 e ir quitando 23 todas las veces que se pueda. Ese número de veces será el cociente de la división (2 en este caso) y el número menor que 23 que quede será el resto de la misma (19 en este caso).

La división de naturales también admite una interpretación binaria: operación inversa de la multiplicación (binaria). Este tipo de división aparece en situaciones en las que se plantea una multiplicación cuyos factores son intercambiables en el contexto del enunciado, y cuyo resultado se conoce, pero se desconoce algún factor.

EJEMPLOS 2.13.

1) *Mi equipo de fútbol está buscando equipación para la temporada (camiseta y pantalón). Ya hemos probado 12 equipaciones diferentes usando solo cuatro camisetas distintas, ¿cuántos pantalones distintos usamos?*

En este enunciado la división de 12 entre 2 surge como operación inversa de una multiplicación como recuento de combinaciones (El papel de las camisetas y los pantalones es intercambiable).

2) *El patio rectangular detrás de mi casa tiene 10 m² de superficie. He medido el largo y es de 2 m, ¿puedes decir cuánto mide su ancho?*

En este enunciado la división de 10 entre 2 surge como operación inversa de una multiplicación binaria (producto de medidas).

2.1.4. Resolución y planteamiento de problemas de estructura multiplicativa

La investigación de las situaciones de estructura multiplicativa no arroja una clasificación de problemas tan clara como la que se discutió en el caso aditivo. Sin embargo, se pueden ofrecer algunas ideas para trabajar de forma variada las interpretaciones unitarias y binarias de las operaciones.

Para trabajar las interpretaciones unitarias de la multiplicación y de la división, por una parte, es adecuado proponer situaciones *asimétricas* en las que están involucradas multiplicaciones cuyos factores no sean intercambiables. Una familia de ellas son los problemas de *transformación*, que establecen una relación entre una cantidad inicial (multiplicador), una razón que la transforma (multiplicando) y la cantidad transformada (resultado de la multiplicación). Hay tres tipos de situaciones de transformación, que dependen de si se desconoce una de las cantidades o la razón.

EJEMPLOS 2.14.

1) *Tenemos 5 cajas y 4 lápices por caja, ¿cuántos lápices hay en total?*

En este enunciado, la cantidad inicial viene dada por el número de cajas, que en ese caso es de 5, y la razón queda establecida por los 4 lápices por caja. La cantidad transformada es el número de lápices, que en este problema es la incógnita. Por tanto, este problema se resuelve utilizando la multiplicación 5·4, que se interpreta como suma repetida.

2) *Tenemos 20 lápices y los metemos en 5 cajas (metiendo los mismos en todas las cajas), ¿cuántos lápices metemos en cada caja?*

En este ejemplo, las cantidades inicial, la transformación y la transformadas son las mismas que el caso anterior. La diferencia es que ahora se conocen la cantidad transformada (20 lápices) y la inicial (5 cajas), y se pide la razón que transforma. Se resuelve, por tanto con una división unitaria (como reparto).

3) *Tenemos 20 lápices y los metemos en cajas, de manera que en cada caja meto 4 lápices, ¿cuántas cajas hacen falta?*

Este tercer caso describe la misma situación que los dos anteriores, pero ahora se conocen la cantidad final (20 lápices) y la razón (4 lápices/caja), y se pide la cantidad inicial. Se resuelve, por tanto, con otra división unitaria (como resta repetida).

Otra familia de situaciones asimétricas en las que aparecen las operaciones multiplicativas bajo su interpretación unitaria son los problemas de *comparación* multiplicativa, que relacionan dos cantidades (*referente* y *referida*) a través de la razón de aumento/disminución entre ellas. Hay hasta seis tipos, dependiendo si la comparación es de aumento o disminución, y si se desconocen una cantidad o la razón.

EJEMPLOS 2.14.

1) *Abel tiene 4€ y Beatriz tiene 6 veces el dinero de Abel, ¿cuánto tiene Beatriz?*

Este problema es de aumento: la cantidad referente (*4€*, que es el dinero de Abel) y la razón de cambio son conocidas, y la cantidad referida (el dinero de Beatriz) es el dato desconocido. Se resuelve con la multiplicación *6·4*, que tiene una interpretación como suma repetida (se suman *6* veces los *4€*).

2) *Beatriz tiene 6 veces el dinero de Abel. Si sabemos que ella tiene 24 euros, ¿cuánto tiene Abel?*

En este ejemplo, también de aumento con razón *6*, la cantidad referida es de nuevo el dinero de Beatriz. Ahora, sin embargo, este dato es conocido y lo que se desconoce es el referente (el dinero de Abel). El enunciado se resuelve dividiendo 24 entre 6, que tiene una interpretación unitaria como reparto (repartir los 24€ en 6 partes iguales).

3) *Beatriz tiene 24 euros y Abel tiene 4, ¿cuántas veces tiene menos Abel que Beatriz?*

Este tercer es caso es un problema de disminución, cuya razón es el dato desconocido. La cantidad referente es ahora el dinero de Beatriz, y la cantidad referida es el dinero de Abel. Se resuelve haciendo la división de 24 entre 4, que aquí tiene la interpretación unitaria de resta repetida (las veces que se pueden agrupar los 24€ de Beatriz en grupos de 4€).

Algunos enunciados de comparación multiplicativa resultan algo artificiales: decir, por ejemplo, que “6 es 4 veces menor que 24” es una formulación poco natural en el castellano, donde el “menor” está más asociado a la diferencia aditiva. Esto lleva a que la expresión verbal o escrita de algunos de los problemas de comparación suenen forzados. Se invita al lector a que los revise (principalmente los de disminución) y observe esta circunstancia.

Por otra parte, para trabajar las interpretaciones binarias de las operaciones es adecuado plantear situaciones *simétricas* en las que surjan multiplicaciones en las que los papeles de los factores sean intercambiables. Los problemas de *producto cartesiano,* en los que se establecen todas las posibles combinaciones entre los elementos de dos conjuntos, o los productos de dos medidas, son ejemplos de situaciones simétricas. Se pueden proponer hasta cuatro tipos de ellas, dependiendo de si se proponen combinaciones o producto de medidas, y de si se desconoce el resultado de la multiplicación o un factor.

EJEMPLOS 2.15.

1) *En una heladería quedan tan solo 2 sabores diferentes. Si hay 3 tipos de cucurucho, ¿cuántos helados diferentes puedo pedir?*

Este enunciado presenta un recuento de combinaciones en el que se conocen la cantidad de elementos de los dos conjuntos (2 sabores y 3 cucuruchos) y se desconoce el número de combinaciones. Se resuelve con la multiplicación 2.3, que se interpreta como recuento de combinaciones.

2) *Mi habitación tiene 12 m^2, y su largo es de 3 m, ¿cuál es su ancho?*

En este segundo caso se presenta una situación de producto de medidas en las que se conoce dicho producto y uno de los factores, y se desconoce el otro factor. El enunciado se resuelve con la división de 12 entre 3, que se interpreta como operación inversa de la multiplicación.

OBSERVACIÓN (representaciones para la multiplicación):

La resolución de problemas de recuento de combinaciones se puede abordar con representaciones pictóricas que permiten visualizar estos problemas con facilidad. Una de ellas es la *tabla de doble entrada* (Figura 2.1., izquierda), similar a un modelo de área rectangular, pero en el que se pueden visualizar las combinaciones en un esquema de filas y columnas. La otra es el *diagrama de árbol* (Figura 2.1., izquierda), que facilitan la observación de los casos a través del recorrido de los elementos de uno de los conjuntos (los cucuruchos en la figura) y la consideración de todas las combinaciones de ese elemento con todos los del segundo conjunto (los sabores), a modo de árbol de decisión.

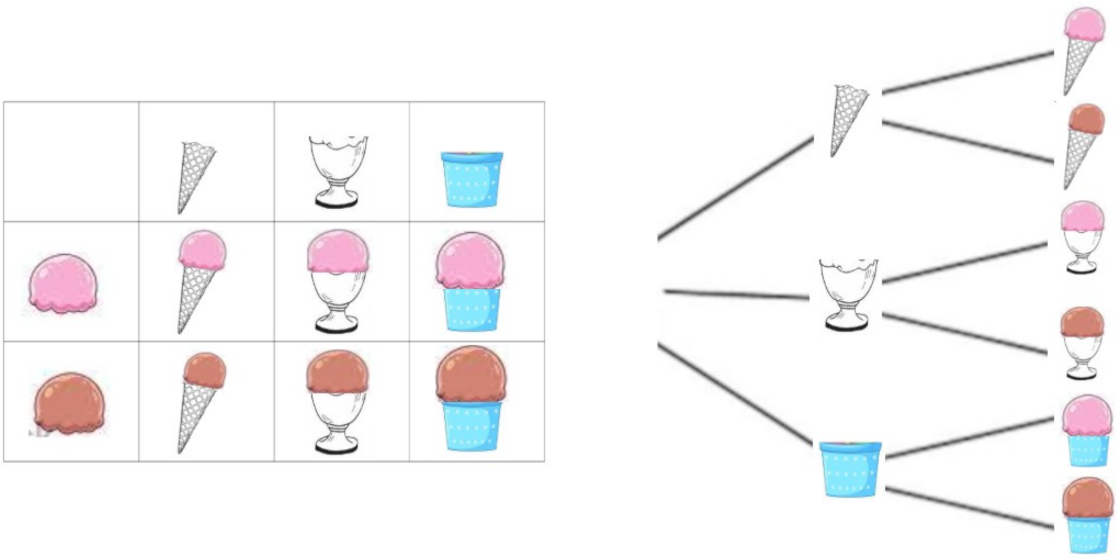


Figura 2.1. Resolución del enunciado 1) de los Ejemplos 2.15 utilizando una tabla de doble entrada (izquierda) y un diagrama de árbol (derecha)

Las representaciones en tabla de doble entrada y diagrama de árbol no se comentaron en la sección anterior ya que no son representaciones de los números en sí, sino que están vinculadas al tratamiento de las operaciones. Estas representaciones pictóricas son específicamente útiles para las operaciones de estructura multiplicativa con interpretaciones binarias, principalmente en situaciones de recuentos de combinaciones.

Actividad 2.3 (Resolución de problemas de estructura multiplicativa).
Observa los siguientes enunciados:

a) “*María tiene 3 globos y si pierde 2 tendrá los mismos que Antonio. ¿Cuántos globos tiene Antonio?*”

b) “*María tiene 3 globos y le regalan 2. ¿Cuántos globos tiene María?*”

c) “*María tiene 3 globos, 1 más que Antonio. ¿Cuántos tiene Antonio?*”

d*) “Rosa y Elisa juntan 5 globos. Si Elisa tiene 3, ¿cuántos tiene Rosa?*”

Para cada uno de ellos

i) Indica la operación que lo resuelve y justifica razonadamente con qué interpretación aparece en el enunciado

ii) Resuélvelos utilizando el modelo cardinal, la recta numérica y un diagrama de árbol. Justifica razonadamente qué representación es más apropiada en cada caso.

Actividad 2.4 (Planteamiento de problemas de estructura multiplicativa). Proporciona enunciados de problemas que cumplan las siguientes condiciones:

i) Se resuelve utilizando *4·5* con una interpretación de suma repetida.

ii) Se resuelve dividiendo 15 entre 3, donde esta división se interpreta como reparto.

iii) Se resuelve dividiendo 15 entre 3, donde esta división se interpreta como resta repetida.

2.1.5. Divisibilidad

Las nociones de divisibilidad surgen vinculadas a situaciones de estructura multiplicativa. Los modelos cardinales matriciales son una representación idónea para visualizarlas. Por ejemplo, si se plantea la actividad de repartir 6 canicas en filas de manera que todas las filas tengan las mismas canicas, esta representación permite visualizar cuatro posibles soluciones que ilustran las cuatro descomposiciones multiplicativas de 6 (Figura 2.2.).

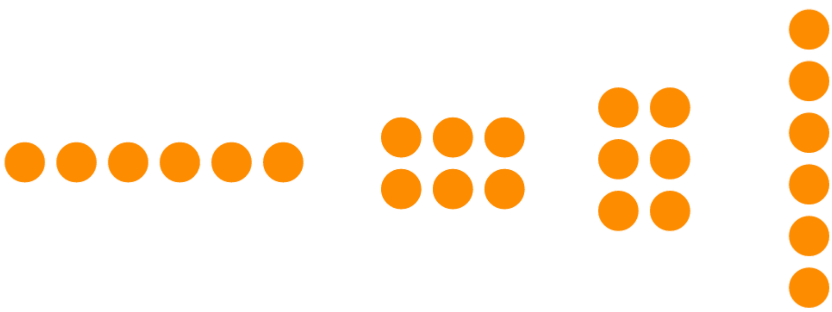


Figura 2.2. Representación de los divisores de 6 a través de un modelo cardinal matricial

Una lectura adecuada de estas cuatro descomposiciones (prestando atención, por ejemplo, a la cantidad de filas que hay en cada dibujo) muestra aquellos números que pueden multiplicarse por otros para dar como resultado 6. Esto motiva las definiciones de *divisor* y *múltiplo* de un número natural.

Dados dos números naturales d y m, se dice que ***d es un divisor de m*** *si existe otro número natural k de manera que m=k·d.*

En este caso, se dice también que ***m es un múltiplo de d.***

Los conceptos de múltiplo y divisor, aunque complejos para el nivel de educación primaria, contribuyen a reforzar la conexión entre operaciones que se establece al hablar de "estructura multiplicativa". La reflexión sobre los mismos a partir de representaciones pictóricas (previa a conocer los algoritmos de factorización) permite observar que los divisores de 6 son 1, 2, 3 y 6 y brinda la oportunidad de visualizar nociones como la de *número primo* en edades tempranas. Las Actividades 2.5., 2.6., 2.7 y 2.8., que se presentan a continuación, tienen este fin.

Actividad 2.5 (Divisores, múltiplos y números primos).

i) Reparte 6 elementos en filas de manera que todas las filas tengan los mismos elementos. Obtén todas las soluciones posibles.

ii) Cuenta las filas que tiene cada solución y anota los números, ¿cuál es la relación entre esos números y 6)

Repite con 3, 4, 5, 8, 11 y 12 elementos. Clasifica estos números según las soluciones que obtengas para cada uno de ellos. ¿Qué criterio de clasificación has usado?

Actividad 2.6. Una empresa tiene que diseñar una cenefa rectangular formada por 12 piezas cuadradas. **Dibuja todos los posibles diseños para esa cenefa.**

Actividad 2.7. Queremos embaldosar el suelo de un baño de dimensiones *2.8 m x 1.8 m* usando baldosas cuadradas y sin partirlas.

i) ¿Cuáles pueden ser las medidas de esas baldosas? Indica todas las posibilidades que encuentres.

ii) ¿Cuáles son las baldosas más grandes que se pueden usar?

Actividad 2.8. Resuelve el siguiente enunciado utilizando dos representaciones diferentes:

El dueño de un restaurante llama a Ana y Beltrán como camareros de apoyo: A ella la llaman cada 4 días y a él cada 6. Si hoy han coincidido, ***¿cuándo volverán a coincidir?***

Las dos últimas actividades planteadas ilustran situaciones que se pueden matematizar buscando relaciones entre los divisores y los múltiplos de dos números naturales dados.

En ellos emergen dos conceptos habituales en la matemática escolar que corren el riesgo de trabajarse de forma descontextualizada: los de *máximo común divisor* y *mínimo común múltiplo.*

*El **máximo común divisor** de dos números naturales a y b es el mayor número natural que es simultáneamente divisor de a y de b. Se denota mcd(a, b).*

*El **mínimo común múltiplo** de dos naturales a y b es el menor número natural que es simultáneamente múltiplo de a y de b. Se denota mcm(a,b).*

Al igual que ocurre con las nociones de divisor y de múltiplo, es recomendable trabajar los conceptos de *mcd* y *mcm* de forma heurística con el alumnado, para distanciar estos conceptos de los procedimientos de cálculo usuales, basados en factorizaciones en números primos. Si se utilizan números naturales menores que 50, por ejemplo, las definiciones dadas permiten calcular *mcd* y *mcm*, lo que ayuda a comprender conceptualmente las ideas y, por otra parte, ilustran la necesidad de encontrar procedimientos de cálculo como los que se presentan después (no se tratan por pertenecer a niveles educativos superiores a primaria).

Actividad 2.9 (Cálculo heurístico de *mcd* y *mcm*). Usando las definiciones dadas, encuentra el máximo común divisor de cada uno de las siguientes parejas de números: 10 y 15; 24 y 30; 14 y 15; 32 y 16.

Repite la actividad, calculando el mínimo común múltiplo de las parejas de números dadas.

2.2. Interpretación de las operaciones con números negativos

Las operaciones aritméticas se pueden interpretar de formas novedosas cuando actúan sobre números negativos. Categorizar dichas interpretaciones es especialmente complejo, debido a que el trabajo con negativos muchas veces se reduce a trabajar con positivos y hacer una lectura *a posteriori* de los resultados obtenidos. Por ejemplo, si se quiere explicar el movimiento de caída de un objeto, la altura final del mismo tras caer se puede expresar con un número negativo, ya que llegó a una altitud más baja de la que partía. Pero también se puede ver con un número positivo si se presta atención solo a la distancia recorrida en la caída. Pueden consultarse otras situaciones que reflejan esta circunstancia en los Ejemplos 2.17 (problema 2) y Ejemplos 2.18 que se presentan más adelante.

Esto hace que las interpretaciones de las operaciones con negativos sean una cuestión delicada, que no se ha investigado con tanta profundidad como en el caso de los naturales. La presente sección, por tanto, está dedicada a dar algunas ideas para que los futuros profesores puedan tratar la introducción a los negativos desde diferentes enfoques. Se respetan para ello los esquemas aditivo y multiplicativo desde las interpretaciones unitaria y binaria y se añade una última subsección en la que se proporcionan interpretaciones *matemáticas* (reglas de cálculo) de las operaciones con números negativos.

2.2.1. Operaciones de estructura aditiva

La primera cuestión de interés que se plantea es la interpretación de la suma de un número negativo. En primer lugar, la interpretación unitaria de la suma es la de avance con dirección. Esta surge en situaciones en las que hay un punto de referencia fijado, una cantidad inicial (que se toma como positiva) y una segunda cantidad que se añade pero que está situada al otro lado del punto de referencia. En segundo lugar, la interpretación binaria de la suma es la de recuento de cantidades faltantes. Esta aparece en problemas en los que se contabilizan cantidades teniendo en cuenta débitos.

EJEMPLOS 2.16.

1) *Rosa hizo ayer una ruta de senderismo partiendo desde su tienda de campaña. Caminó 10 km al E y 5 km hacia el O. ¿A qué distancia quedó de la tienda?*

En este enunciado el punto de referencia es la tienda de campaña y los primeros 10 *km* que camina Rosa marcan la dirección, por lo que el cómputo del camino se puede hacer sumando los dos trayectos, tomando el segundo trayecto como -*5* k*m.* De esta manera, el problema se resuelve con la operación 10+(-5), que surge con la interpretación de avance con dirección.

2) *Tengo dos cuentas en el banco, una con 12€ de saldo y la otra con una deuda de 5€. Si las fusiono, ¿qué saldo me quedará en la cuenta?*

En este segundo caso, el saldo de la cuenta sería la suma del saldo de las dos cuentas (binaria). Dado que una de ellas debía dinero el cómputo del saldo se calcularía interpretando que la segunda cuenta aporta *-5€,* por lo que la operación que resuelve este problema es *12+(-5),* que surge con la interpretación de recuento de cantidades faltantes.

La resta de un número negativo es una operación cuya interpretación resulta más compleja. Desde la perspectiva unitaria, se encontrarían situaciones como “quitar una cantidad negativa”, o “retroceder en una dirección contraria”, que pueden construirse, pero no resultan naturales y se pueden matematizar sin utilizar la resta de un negativo. Por otra parte, la interpretación binaria de la resta de un negativo se interpreta como la eliminación de cantidades faltantes. Aparecen en situaciones en las que se hacen recuentos teniendo en cuenta elementos que se eliminan, y se pregunta por los mismos recuentos si no se hubieran tenido en cuenta las eliminaciones.

EJEMPLOS 2.17.

1) *Una de mis dos cuentas bancarias tenía 5 € de deuda y la fusioné con mi otra, quedando 7 €, ¿qué saldo tenía la cuenta sin deuda?*

Este problema se representa una situación de Combinación 2 (véase la Tabla 2) en la que una de las cantidades es negativa. Esta situación se resolvería con la operación *7-*

(-5) interpretada como una eliminación de cantidades faltantes.

2) *Si Laura paga a Carlos los 6 € que le prestó, le quedarán en el bolsillo 12€. ¿Cuánto tiene Laura?*

En este enunciado se presenta una cantidad desconocida (el dinero que tiene Laura) a las que se le va a quitar otra (6 €) y se conoce el resultado del recuento (12€). Para calcular la cantidad desconocida se podría quitar a los 12€ la deuda de 6€ que va a pagar, de manera que el problema se podría resolver con la resta *12 - (-6)*, que surgiría como una eliminación de cantidades faltantes.

No obstante, sería más sencillo ver este enunciado como de Combinación 1, ya que el dinero que tiene Laura se puede descomponer en dos subconjuntos conocidos: los 6€ que debe pagar y los 12€ que le quedan. Bajo esta óptica, el enunciado se resuelve con la operación *12+6* con la interpretación binaria (acción de juntar).

2.2.2. Operaciones de estructura multiplicativa

En el caso de la multiplicación con números negativos, el estudio de la interpretación unitaria involucraría en principio tres casos dependiendo del papel del número negativo en la operación: *a·(-b), (-a)·b, y (-a)·(-b).* Dado que una suma repetida con un número de sumandos negativo no tiene sentido, los dos últimos casos no representan situaciones reales. Sin embargo, para el caso *a·(-b)* la interpretación unitaria se mantiene (véase el primer enunciado en los Ejemplos 2.18). Por otra parte, la interpretación binaria de la multiplicación pierde sentido con números negativos, ya que los factores en este caso representaban cardinales de conjunto o resultados de medidas (positivos siempre).

En el caso de la división, el estudio de su interpretación unitaria se reduce significativamente, ya que los divisores negativos pierden sentido tanto en la situaciones de reparto como en las de resta repetida. Por tanto, solo es necesario analizar las situaciones en las que el dividendo sea negativo y el divisor positivo. En situaciones de división como resta repetida, esto involucraría hacer grupos de tamaño positivo a partir de una cantidad negativa, algo que tampoco es admisible en situaciones reales. Por el contrario, sí adquiere sentido el reparto de una cantidad negativa en un número positivo de grupos, por lo que la interpretación unitaria de la división se reduce a este caso (véase el segundo enunciado en de los Ejemplos 2.18). Por otra parte, la interpretación binaria de la división se apoya en situaciones de multiplicación binaria, por lo que pierde sentido al igual que esta al considerar números negativos.

EJEMPLOS 2.18.

1) *El termómetro marca hoy una temperatura de 0º, y se prevé que las temperaturas sigan bajando durante los tres días siguientes, a razón de 2 grados al día. ¿A qué temperatura estaremos al final?*

En este problema se fija la referencia de los *0º* y se plantea una bajada (avance en negativo) constante, por lo que la temperatura final se puede calcular con la operación 3·(-2), que aparece como suma repetida.

2) *Los 3 hijos de un empresario repartieron de forma equitativa la deuda de 6 millones que tenía su padre, ¿Qué dinero ganaron tras el reparto?*

En este problema, la cantidad que ganó cada hijo es negativa (su parte del dinero que debía el padre), por lo que se puede matematizar como la división de -6 entre 3, que emergería con la interpretación unitaria de reparto.

2.2.3. Interpretaciones matemáticas de las operaciones con números negativos

La resolución de enunciados que involucran operaciones aritméticas con negativos contribuye a desarrollar la intuición del alumnado sobre las reglas de funcionamiento de estas operaciones. El análisis de las interpretaciones de las operaciones en las situaciones en las que estas conservan su sentido ha dejado de manifiesto algunas de estas reglas, que se han denominado *interpretaciones matemáticas* porque permiten resolver las operaciones recurriendo a otras acciones matemáticas más sencillas (en lugar de las acciones reales que evocan habitualmente las interpretaciones de las operaciones):

i) Sumar un número negativo es equivalente a restar su valor absoluto[4]. De igual manera, restar un número negativo es equivalente a sumar su valor absoluto.

ii) Multiplicar un número positivo por uno negativo es equivalente a multiplicar los valores absolutos y cambiar el signo al resultado.

iii) En divisiones sin resto, dividir un número negativo por uno positivo es equivalente a dividir los valores absolutos y cambiar el signo al resultado.

Estas interpretaciones se derivan de estudiar las operaciones que resuelve situaciones reales. Sin embargo, hay operaciones con enteros, como (-3)·(-7), que difícilmente se pueden encontrar en situaciones reales, pero sí tienen sentido dentro de las matemáticas y el alumnado debe conocer. Esto plantea cuestiones como ¿qué podría significar *(-3)·2* (sumar "menos 3 veces" una cantidad)?, o ¿por qué "menos por menos es más"?, que tienen interés para el profesorado y que no se abordan, pero se dejan como actividad de reflexión al final de la sección (véase R2.1).

2.3. Interpretación de las operaciones con números racionales. Resolución y planteamiento de problemas

En esta sección se revisan las interpretaciones de las operaciones aritméticas cuando se introducen los números racionales, siguiendo también el esquema de estructuras aditiva y multiplicativa. Se dedica una última subsección a la discusión de problemas aritméticos con racionales en conexión con las interpretaciones estudiadas.

2.3.1. Interpretaciones de las operaciones de estructura aditiva

Las interpretaciones de las operaciones de estructura aditiva con números naturales se mantienen cuando estas involucran números racionales. De esta manera, la suma de

4 Recuerda que el valor absoluto de un número es el número con signo positivo. Por ejemplo, el valor absoluto de -3 es 3, el valor absoluto de -6 es 6, etc.

racionales se puede interpretar como acción de añadir (unitaria) o de juntar (binaria), y la resta como acción de quitar (unitaria) o de separar (binaria).

EJEMPLOS 2.19.

1) *Esta mañana he bebido medio litro de agua y después 3/4 l más. ¿Cuánta agua he bebido en total?*

Este problema se resuelve con una suma que se interpreta como acción de añadir.

2) *He cocinado un bizcocho con huevo, azúcar y harina. Si 1/5 de la masa es huevo y 1/7 es azúcar, ¿qué parte del bizcocho es harina?*

En este enunciado aparecen una suma y una resta que emergen bajo la interpretación binaria de las operaciones.

2.3.2. Operaciones de estructura multiplicativa

Para analizar el caso de la multiplicación, debe tenerse en cuenta la asimetría de la interpretación unitaria, lo que lleva a considerar tres casos: natural por racional, racional por natural y racional por racional. En el primero de ellos, la interpretación de suma repetida sigue siendo válida, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.20.

Hice el Camino de Santiago en 7 etapas de 15.5 km, ¿Cuánta distancia caminé?

Este problema se puede resolver con la operación 7·15.5, que aparece con la interpretación de suma repetida (se suman *7* veces los *15.5 km).*

Sin embargo, en los casos en los que el multiplicador es racional se plantea la cuestión sobre qué significa sumar un número racional de veces cierta cantidad. No obstante, hay situaciones de multiplicación de este tipo que sí son fácilmente identificables con situaciones reales, como la que se muestra a continuación.

EJEMPLO 2.21.

Me compré una chaqueta que valía 100 €, pero tenía un descuento del 20%, ¿Cuánto dinero me descontaron?

En este enunciado el descuento supone un 20% de 100€ o, equivalentemente, (1/5)·100. La multiplicación de una fracción por un natural equivale a hacer la fracción de ese natural (dividir 100 en 5 partes y tomar 1).

Esta forma de ver la multiplicación en la que el multiplicador es racional se puede llevar al caso en el que el multiplicando también es racional, como las situaciones de los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLOS 2.22.

1) *Juan tiene un depósito de agua lleno, del que retiró la tercera parte para su*

consumo. 3/4 partes del agua sobrante fueron destinadas para regar el campo, el resto fue cedida a los bomberos. ¿Qué parte del depósito fue destinada a regar el campo?

Resolver el problema involucra hacer las 3/4 de 2/3, lo que se expresa con la operación (3/4)·(2/3). En otras palabras, multiplicar 3/4 por dos tercios se ve como dividir esos dos tercios en 4 partes y tomar 3

2) *Cada vez que se revisa libro, se deja tan solo la décima parte de los errores que había al principio. Sabiendo que un libro se ha revisado dos veces y que aún quedan 5 errores, ¿cuántos tenía antes de la primera revisión?*

En este caso, cada revisión implica tomar la décima parte de los errores, por lo que tras dos revisiones quedan la décima parte de la décima parte de los errores iniciales, acción que se identifica con la operación (1/10)·(1/10).

De esta forma, la interpretación unitaria de la multiplicación de racionales incorpora una subcategoría nueva, que denominaremos **multiplicación como operador**, o fracción de cantidad). Bajo esta interpretación, multiplicar una fracción (*a/b*) por cierta cantidad (natural o racional) consiste en dividir esa cantidad en *b* partes y tomar *a* de ellas. Las situaciones de multiplicación como operador son específicas de los números racionales, y se resuelven de manera sencilla usando la representación del modelo de área. Se deja una actividad que invita a ello.

Actividad 2.10 (Interpretación unitaria de la multiplicación en el modelo de área). Resuelve los enunciados de los Ejemplos 2.22 empleando operaciones y mediante el modelo de área (utiliza para ello la interpretación de la multiplicación como operador).

Por otra parte, la interpretación binaria de la multiplicación conserva su validez solo para la subcategoría de producto de medidas, ya que hacer combinaciones con un conjunto racional de objetos no tiene un sentido claro. Un ejemplo de estas situaciones se muestra a continuación.

EJEMPLO 2.23.

Una habitación tiene 3 m de ancho y 4.5 m de largo, ¿cuál es su área?

Este problema se puede resolver con la operación 3·4.5, que aparece con la interpretación binaria de producto de medidas.

En cuanto a la división con racionales, revisar la interpretación unitaria requiere considerar los casos de división como reparto y como resta repetida. El primero de ellos se conserva en el caso en el que se divide un racional entre un natural, como se muestra en el primer enunciado de los Ejemplos 2.24. Este tipo de división, sin embargo, pero pierde su interpretación cuando el divisor es un número racional (no está claro qué significa repartir una cantidad entre “0.75 partes”). Por su parte, la interpretación como resta repetida conserva la validez al trabajar con racionales en todos los casos, como se ilustra en el segundo enunciado de los Ejemplos 2.24.

EJEMPLOS 2.24.

1) *Si reparto de forma equitativa una garrafa de 3.5 litros de aceite en 5 botellas, ¿cuánta agua echo en cada botella?*

Este enunciado se resuelve dividiendo 3.5 entre 5, y esta división aparece con la interpretación unitaria de reparto.

2) *Para hacer una receta debo usar 2/3 l de cerveza. ¿Cuántas botellas de 1/5 de litro necesito para la receta?*

En este problema se podrían tomar *2/3* de un litro e ir vertiéndolos en botellas de 1/5, por lo que se puede abordar con la división de 2/3 entre 1/5, que aparece con la interpretación unitaria de resta repetida.

La división binaria con racionales conserva sentido solo al considerar situaciones de producto de medidas (al igual que ocurría con la multiplicación). De hecho, la introducción de los números racionales amplía el rango de situaciones que se pueden modelizar a través de divisiones, como aquellas que se resuelven calculando razones entre medidas. Esta circunstancia enriquece la interpretación binaria de la **división** si esta se ve **como razón entre medidas**. Bajo esta aproximación, dividir dos racionales es equivalente a establecer la razón entre ellos, como ocurre en los Ejemplos 2.25.

EJEMPLOS 2.25.

1) *Para llenar una piscina son necesarios 400 m^3 de agua. Si su profundidad es de 1.6 m, ¿cuál es la superficie del fondo de la piscina?*

Dado que el volumen es el resultado del producto de la superficie del fondo por la profundidad, este problema se resuelve dividiendo 400 entre 1.6 con la interpretación de razón entre medidas.

2) *Marisa salió a correr esta mañana, recorriendo 2.3 km en 10 minutos, ¿qué ritmo lleva Marisa?*

Em este caso, el ritmo de Marisa se puede calcular de manera natural usando las razones 2.3/10 (se obtendría su velocidad) o 10/2.3 (se obtendría el tiempo que tarda en hacer un kilómetro), que equivalen a las correspondientes divisiones bajo la interpretación binaria de razón entre medidas.

Nótese, finalmente, que la interpretación de la división como razón de medidas aprovecha la equivalencia entre la división de números naturales y la fracción de números naturales (por ejemplo, la representación decimal de 3/4 es igual que el resultado de dividir 3 entre cuatro). Esta situación se puede aprovechar para dar sentido a la división de fracciones utilizando el modelo de área, se deja una actividad para que el lector practique de qué manera esto se puede hacer.

Actividad 2.11 (Interpretación binaria de la división en el modelo de área). Resuelve los enunciados de los Ejemplos 2.25 empleando operaciones y mediante el modelo de área (utiliza para ello la interpretación de la operación como razón entre medidas).

2.3.3 Resolución y planteamiento de problemas con números racionales

La categorización de situaciones que involucren operaciones con racionales es amplia y difícil de abordar, por lo que esta sección no se dedica a establecer categorizaciones de problemas como se hizo anteriormente. En su lugar, se plantean ejemplos de situaciones para resolverlas utilizando diferentes representaciones. En particular, se busca que el lector identifique las operaciones involucradas en cada una de las situaciones, así como la interpretación con la que esas operaciones aparecen. También se proponen tareas para que el lector diseñen enunciados de de problemas que sean útiles para trabajar las operaciones desde diferentes interpretaciones.

Actividad 2.12 (Resolución de problemas con diferentes representaciones). A continuación se proporcionan varios problemas que involucran números racionales. Se trata de resolverlos usando dos representaciones:

i) A través de las operaciones correspondientes, indicando la interpretación con la que surge cada operación empleada.

ii) Utilizando alguna representación pictórica, justificando esa elección.

Los problemas son los siguientes:

a) *Un libro salió a la venta con un 17% de descuento. Si lo he comprado pagando 16€ y 60 céntimos, ¿cuál era el precio sin descuento?*

b) *Gabri empezó su dieta cuando pesaba 4/3 de su peso ideal. Al terminarla, había perdido una cuarta parte de lo que pesaba antes de ella. ¿Le sirvió a Gabri su dieta para alcanzar un peso menor que el ideal?*

c) *Para una receta necesitamos medio litro de leche. Tengo envases de 1/4 de litro, ¿cuántos necesito? ¿cuánto sobraría si no uso un número exacto de envases completos?*

Actividad 2.13 (Planteamiento de problemas). Proponed enunciados de problemas que cumplan las condiciones dadas en cada caso:

i) Se resuelve con la operación 1/2 + 1/3, que aparece con la interpretación unitaria (acción de añadir).

ii) Se resuelve utilizando (2/5)·(3/4) con la interpretación de operador (unitaria).

iii) Se resuelve dividiendo (2/5) entre 3/4, y la operación aparece con la interpretación unitaria de resta repetida.

iv) Se resuelve dividiendo 3 entre 2/7, operación que surge con la interpretación binaria de razón entre medidas.

2.4. Algoritmos y estrategias de cálculo

En esta se proponen algunas actividades de utilidad para reflexionar sobre los algoritmos usuales y otras variantes, con el fin de que el lector revise el funcionamiento de los mismos y extraiga sus ventajas e inconvenientes.

2.4.1. Algoritmos de cálculo con números naturales y decimales

El Sistema de Numeración Decimal es el fundamento de los algoritmos que se trabajan habitualmente en la educación primaria. Las actividades que se presentan a continuación promueven la discusión sobre estos y la relación con otro tipo de enfoques para el cálculo.

Actividad 2.14 (Algoritmo de la suma basado en el sistema de numeración). Resuelve las siguientes operaciones usando el algoritmo que aprendiste en primaria:

12 898+98 712 32.26 +54.1364

i) Explica de forma resumida el procedimiento seguido en cada caso.

ii) ¿Qué cambia al introducir decimales?

iii) Argumenta las ventajas e inconvenientes que observas a sumar utilizando el algoritmo que aprendiste en primaria

Actividad 2.15 (Algoritmo de la suma basado *en números*). Observad el siguiente vídeo[5] en el que se resuelve una suma utilizando el algoritmo *Abierto Basado en Números (ABN).*

i) Explica de forma resumida el procedimiento seguido en cada caso.

ii) Argumenta las ventajas e inconvenientes que observas a sumar utilizando el algoritmo ABN.

Actividad 2.16 (Algoritmos de la resta). Intentad hacer la operación 145-87 utilizando el algoritmo que aprendiste en primaria y un algoritmo ABN. Explica las ventajas que presenta el ABN para abordar las operaciones, sus puntos débiles y justifica razonadamente si lo prefieres o no al que aprendiste.

Actividad 2.17 (Algoritmo de la multiplicación basado en el sistema de numeración). Resuelve la operación 358·249 usando el algoritmo que aprendiste en primaria.

i) Explica de forma resumida el procedimiento seguido en cada caso.

ii) Argumenta las ventajas e inconvenientes que observas a multiplicar utilizando este algoritmo.

5 https://www.youtube.com/watch?v=MQpHupehAeI

Actividad 2.18 (Algoritmo de la celosía para la multiplicación). Observa el siguiente vídeo[6] donde se aplica un método hindú para multiplicar números naturales.

i) Explica de forma resumida el procedimiento seguido en cada caso.

ii) Argumenta las ventajas e inconvenientes que observas a multiplicar utilizando este algoritmo.

iii) Intenta multiplicar 1.2 por 3.5 utilizando este método y explica cómo se puede extender este algoritmo para la multiplicación de decimales.

Actividad 2.19 (Algoritmo de la división). Considera la división de 358 entre 29:

i) Resuélvela usando el algoritmo que aprendiste en primaria, sin "sacar" decimales. Y explica el procedimiento seguido.

ii) Argumenta las ventajas e inconvenientes que observas a multiplicar utilizando este algoritmo.

iii) Ahora "saca" un decimal. ¿Por qué funciona añadir un 0 al resto?

iv) Divide 3.58 entre 0.29 ¿Por qué da el mismo resultado que la división anterior.

2.4.2. Algoritmos de cálculo con fracciones

En esta subsección se plantean actividades para revisar el funcionamiento y la fundamentación de las reglas de cálculo con fracciones.

Actividad 2.20 (Algoritmos de las operaciones con fracciones).

i) Resuelve las siguientes operaciones utilizando los algoritmos tradicionales: 1/2 + 1/3; 1/2 – 1/3; (3/4)·(5/7); 3/4 dividido entre 5/7

ii) Resuelve las operaciones que puedas utilizando las tiras de fracciones, explicando la interpretación con la que resuelves las operaciones

iii) Misma actividad que el apartado anterior, pero utilizando el modelo de área.

Actividad 2.21 (Justificación de los algoritmos de las operaciones con fracciones). En la Educación Primaria aprendemos las reglas para hacer operaciones con fracciones. Por ejemplo, para multiplicar 2/3 y 4/5 se sigue el siguiente algoritmo:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}$$

i) Utiliza el modelo de área para explicar por qué esa regla funciona en este caso

ii) Calcula (1/2)·(2/3), (7/6)·(1/3) y (3/2)·(4/3) con el algoritmo y el

6 https://www.youtube.com/watch?v=YfSbRfEW87w

modelo de área, utilizando este de nuevo para explicar la validez del algoritmo.

iii) Usa lo aprendido para dar la fórmula general para multiplicar dos fracciones cualesquiera.

iv) Repite la actividad anterior para obtener la fórmula general de la división de fracciones.

v) ¿Crees que es posible obtener las fórmulas de la suma y de la resta de fracciones siguiendo la misma estrategia?

Actividades para practicar sobre la Sección 2

P2.1 (Identificación de operaciones y sus interpretaciones). Identifica las operaciones necesarias para resolver cada uno de los siguientes enunciados, así como la interpretación con la que esta operación aparece.

a) "Luis conduce 20 Km a la semana para llegar a su trabajo. ¿Cuánto recorre cada día?"

b) "Gabri empezó a hacer dieta cuando descubrió que pesaba 4/3 de su peso ideal. Tras mucho esfuerzo, fue capaz de adelgazar una cuarta parte *de ese peso ideal*. *¿Ha servido la dieta para alcanzar un peso menor que el ideal?"*

c) "Para su cumpleaños José ha repartido una bolsa de 23 caramelos entre sus 7 primos. ¿Cuántos caramelos corresponden a cada uno?"

d) "El próximo fin de semana Miguel celebrará su primera entrada a Mae West, *y lo quiere hacer de punta en blanco. Para ello rebusca en su extenso fondo de armario y encuentra que tiene 7 pantalones y 5 camisas disponibles. ¿De cuántas formas podrá vestirse para la gran noche?"*

e) Después de retirar los caramelos que le gustaban de una bolsa, a Ana le sobraron los 2/3 de la bolsa. A Bernardo le da un tercio de los 2/3 y a Carlos el resto. ¿Qué parte de la bolsa retiró Ana? ¿Quién tiene más caramelos?

f) En la situación dada en e), ¿qué parte de la bolsa inicial reúnen entre Ana y Carlos?

g) En la situación dada en e), Carlos hace una bolsita pequeña con los caramelos que le correspondieron ¿cuántas de sus bolsitas se podrían hacer a partir de la bolsa original?

h) En la situación dada en e), si suponemos que la bolsa tenía 81 caramelos, ¿cuántos tiene Carlos más que Bernardo?

i) "Cuando empecé a estudiar de cara al examen de matemáticas faltaban 8 semanas para el examen, pero durante 3 de ellas no pude estudiar porque tenía que trabajar, ¿cuántas semanas me quedaron para preparar el examen?"

j) "El sistema de riego por goteo que ha instalado Felipe para sus tomates proporciona 300 ml cada cuarto de hora" ¿Cuántos litros proporciona en una hora?

k) "Mi padre tiene dos olivares: uno con 2 centenas de olivos y otro con 7 centenas de olivos. ¿cuántos olivos tiene mi padre en total?"

l) "Un panadero está trabajando una masa de 1.2 kilogramos a la que añade 250 gramos de harina para espesarla. ¿Cuánto pesará la masa tras añadirle la harina?"

m) "En el parque García Lorca hay 10 árboles: pinos y encinas. Si hay 4 pinos, ¿cuántas encinas hay?"

P2.2 (Resolución de problemas con representaciones pictóricas). Considera de nuevo los los enunciados de la actividad P2.1.

i) Resuelve cada enunciado problema utilizando dos representaciones pictóricas diferentes. Indica qué interpretación de las operaciones has usado para **resolver** el problema.

ii) Recupera la interpretación de las operaciones del enunciado obtenidas en la actividad P2.1 y compáralas con las usadas con las representaciones pictóricas. Concluye indicando cuál de las representaciones pictóricas es la más adecuada para cada problema.

P2.3 (Más problemas con racionales). Resolved los siguientes problemas usando dos representaciones diferentes:

i) Un artículo de 9,2 € ha sufrido dos aumentos sucesivos en el precio, del 5% y del 15% respectivamente. ¿Cuál ha sido el incremento total del precio en porcentaje y en valor?

ii) Me he comprado un vestido con un 33.3% de descuento. Si su precio original es 30 euros, ¿cuánto he pagado?

iii) Me he comprado un vestido con un 33.3% de descuento. Si he pagado 40 euros con el descuento ya incluido, ¿cuál era el precio original?

iv) En una clase hay dos tercios de chicas. Si hay catorce chicas, ¿Qué cantidad de alumnos hay en la clase?

v) La tasa de crecimiento anual del índice de precios es de 3/100. Si he comprado un piso de 120.000 euros y el año próximo lo vendo por 122.000 euros, ¿he ganado dinero?

vi) En una bolsa de frutos secos, 3/4 del peso son cacahuetes. Sabiendo que hay 270 gramos de cacahuetes ¿Cuánto pesa la bolsa?

vii) Una persona gasta cada mes la quinta parte de su salario mensual en alimentación y la sexta parte en alquiler del piso, tras lo que le quedan 570 euros. ¿Cuál es su salario?

viii) Sabemos que en cada revisión se corrigen el 90% de los errores de un manuscrito. El manuscrito se ha revisado dos veces y aún quedan 23 errores. ¿Cuántos errores había?

ix) Un grifo completamente abierto tarda 9/2 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardará en llenarlo si sólo se abre hasta los 3/4 de su máximo caudal?

x) Un tejido encoge 1/8 después de un lavado a mano y 1/5 si es lavado en lavadora. Si primero lo lavamos a mano y después con lavadora ¿cuánto habrá encogido?

P2.3. (Planteamiento de problemas aritméticos). Plantea problemas aritméticos que tengan las siguientes características:

i) Se resuelve haciendo 9 - 5, y la operación aparece con la interpretación binaria (resta como resultado de *separar*)

ii) Se resuelve dividiendo 24 entre 6, y la operación aparece con la interpretación unitaria de *resta repetida.*

iii) Se resuelve haciendo 5·4, y la operación aparece con la interpretación binaria de *recuento de combinaciones.*

iv) Se resuelve haciendo 7+5, y la operación tiene la interpretación unitaria de *añadir*.

v) Se resuelve con una multiplicación 3·6, y la operación aparece con la interpretación unitaria de *suma repetida.*

vi) Se resuelve dividiendo 27 entre 3, y la operación tiene la interpretación unitaria de *reparto.*

vii) Se resuelve haciendo 1/2 + 1/3 con la interpretación binaria de *juntar.*

viii) Se resuelve dividiendo (1/2) entre (1/4), y la operación aparece con la interpretación binaria de *razón entre medidas*.

xi) Se resuelve calculando (3/2)·(1/4) que surge con la interpretación unitaria de *operador*.

x) Se resuelve haciendo 5/6- 1/4, que aparece con la interpretación *unitaria* (resta como acción de quitar).

OBSERVACIÓN: Un problema contiene un enunciado con sentido completo dentro del contexto, cierta información y una cuestión claramente definida. Hay que ser precisos en la redacción de los problemas. Pensad que los enunciados que proponéis aparecerán en un libro de texto tal y como los escribís. Los enunciados de la actividad anterior deben servir como ejemplo.

P2.4. (Divisibilidad). Resuelve los siguientes problemas utilizando dos representaciones diferentes

i) "Se tienen barriles con 16 y 12 litros de vino. Se quiere trasvasar todo el vino a recipientes más pequeños e iguales, de forma que el número de ellos sea el menor posible y que no haya que mezclar vino de ambos barriles. ¿Cuántos recipientes se necesitan y de qué medida?"

ii) "Dos cometas se aproximan al Sol no cada 6 años y otro cada 9. Si ambos se aproximaron juntos al Sol en 1950 ¿Cuándo volverán a hacerlo de nuevo?"

iii) "En una clase hay 12 alumnos. Para realizar una competición el profesor de Educación Física quiere formar equipos con igual número de alumnos y sin que sobre ninguno. ¿De cuántas formas podrá hacer los equipos? ¿Y si el número de alumnos es 13? ¿Y si el número de alumnos es 16?"

P2.5. (Algoritmos usando regletas). Resuelve las siguientes operaciones utilizando las regletas: *5+7; 8-4; 12-6; 2·3; 3·2; 6 dividido entre 2; 13 entre 4;*

Puedes trabajar de forma virtual siguiendo este enlace:

https://www.geogebra.org/m/tpnqJ4Jx#material/hyzfpjer

P2.6. (Método Waldorf para las tablas). Construye la tabla de multiplicar:

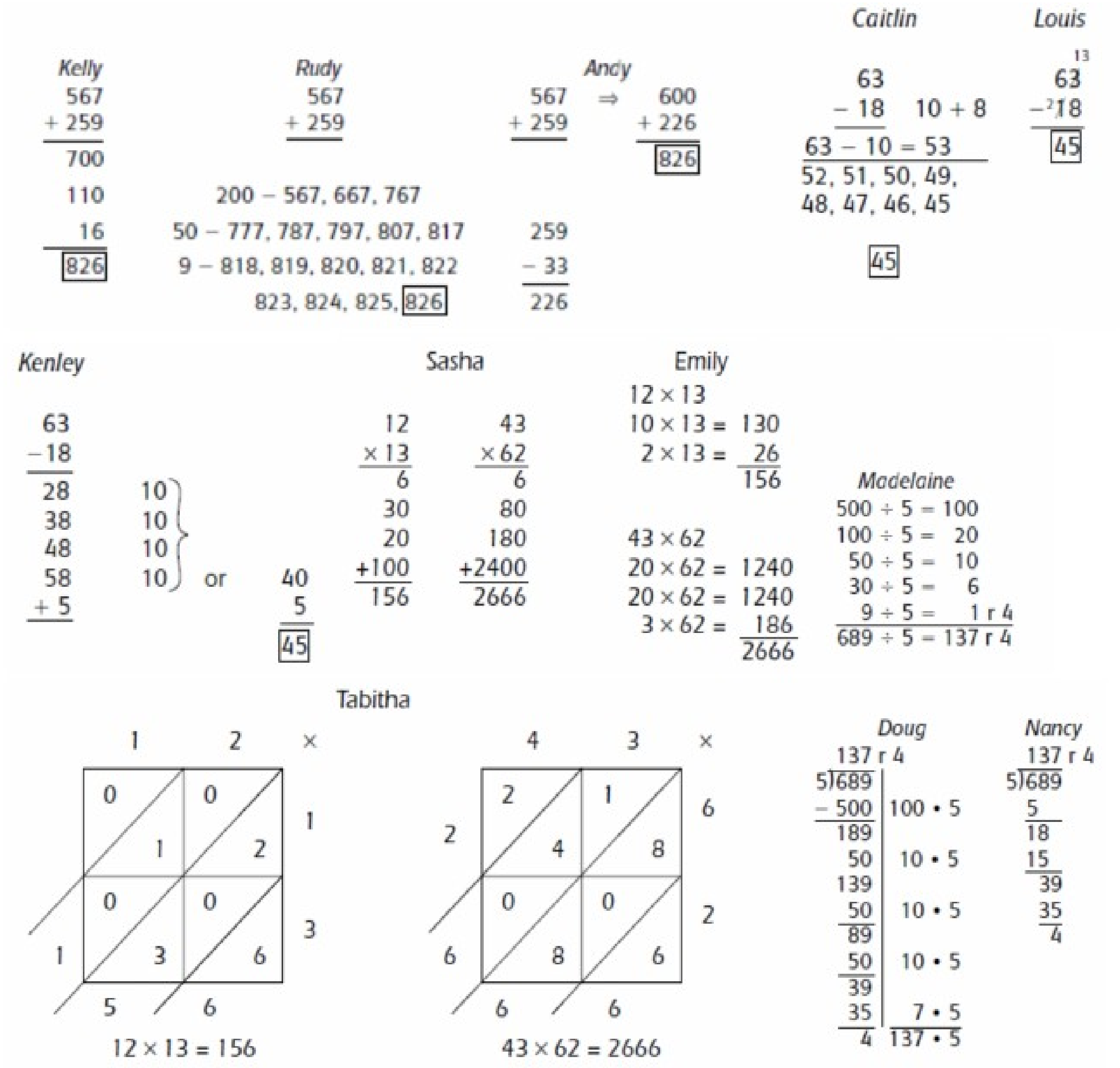
i) Escribiendo los resultados en una lista, como se hace habitualmente.

ii) Utilizando el recurso del método Waldorf que se ve en el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=eqe2NrjFQuE

Analiza ambos procedimientos para escribir las, tablas de multiplicar buscando al menos tres patrones (en cada caso) que puedan utilizarse para recordar la tabla sin tener que memorizarla completa.

P2.7 (Algoritmos personales). Examina los siguientes ejemplos en los que se muestran los procesos seguidos por algunos estudiantes para realizar cada operación. Explica qué ha hecho cada alumno para obtener la respuesta y por qué el método es correcto



P2.8 (Algoritmos de operaciones con decimales). Resolved las siguientes operaciones con números decimales, explicando por qué funcionan los algoritmos usuales:

2.35+4.98; 2.45·1.4; 1 dividido por 5.3; 2.10 – 0.98; 30 dividido por 1.45;

301-24.76; 124.56+34.87; 0.43 dividido por 3; 3.01·10.54; 10.3 dividido por 7

P2.9 (Algoritmos y el modelo de área). Resolved las siguientes operaciones utilizando el modelo de área

i) $\frac{8}{6}+\frac{1}{2}$; ii) $5\times\frac{3}{2}$; iii) $\frac{12}{8}:4$; iv) $\frac{5}{4}+\frac{3}{5}$; v) $\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$;

vi) $\frac{5}{4}-\frac{1}{3}$; vii) $\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}$; vii) $\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}$; ix) $\frac{12}{20}:\frac{1}{5}$; x) $\frac{7}{5}:\frac{1}{10}$;

En vista de cómo has resuelto los diferentes apartados, indica qué significado de las operaciones se asume al **resolver** una suma, una resta, una multiplicación y una división utilizando el modelo de área.

Actividades de reflexión sobre la Sección 2

R2.1 (La estafa del botones). Utiliza una representación pictórica para explicar la confusión que genera el siguiente enunciado clásico:

"Tres amigos van a un hotel y pagan 30 euros por una habitación, diez cada uno de ellos. Después de pagar, el recepcionista se da cuenta de que la habitación no valía 30, sino 25 euros. Para subsanar el error, da al botones 5 euros para que se los devuelva a los tres amigos. El botones, que es muy pillo, se guarda dos euros y solo devuelve tres de ellos.

Tras esta situación, cada amigo ha pagado 9x3=27 euros. Si se le añaden los dos que se quedó el conserje, serían 29 euros. ***¿Qué ha ocurrido con el euro que falta?****"*

R2.2 (Menos por menos es más). Utiliza la recta numérica para resolver las multiplicaciones 10·2, 6·2; y 3·2 y 1·2 usando la interpretación unitaria de suma repetida.

i) Indica cómo se podría hacer (-1)·2 en la recta numérica. Usa tu respuesta para calcular (-3)·2, (-5)·2 y (-7)·2, también con la interpretación como suma repetida.

ii) Calcula también 3·(-2), 5·(-2) y 7·(-2) con la misma interpretación.

iii) ¿Cómo se puede calcular (-3)·(-2)? ¿ y (-5)·(-2) o (-7)·(-2)? Utiliza tus respuestas para explicar por qué la multiplicación de negativos da un número positivo.

R2.3 (Resumen de las interpretaciones). Elabora un esquema o mapa conceptual que sintetice todas las interpretaciones de las operaciones trabajadas en la sección.

R2.4 (¿Por qué se *mueve* la coma?). El resultado de multiplicar o dividir un número decimal por potencias de 10 (10, 100, 1000, etc.) es muy sencillo: se trata simplemente de "desplazar la coma" (o el punto de los decimales). Para multiplicar por 10, por ejemplo, la coma se desplaza a la derecha una posición. Si es por 100, la coma se desplaza dos posiciones a la derecha, y así sucesivamente. De la misma manera, para dividir se repite el mismo patrón, pero la coma se desplaza a la izquierda.

Utilizad una representación adecuada para explicar por qué funciona esta regla. Podéis apoyar vuestra explicación haciendo una operación concreta.

R2.5 (Interpretaciones en los algoritmos). Revisa los algoritmos de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de números naturales y úsalos para explicar cuál es la interpretación de la operación que hay debajo de cada algoritmos.

R2.6. (Verdadero o falso). Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificad razonadamente la respuesta utilizando una representación que ayude a entender la situación.

i) Dividir por dos una cantidad es equivalente a multiplicarla por $\frac{1}{2}$.

ii) $\frac{3}{4}+\frac{5}{2}=\frac{8}{6}$

iii) Se puede saber sin hacer las operaciones que el resultado de $\frac{7}{2}\times\frac{9}{14}$ *es, con seguridad, menor que el resultado de 2,276   3,18.*

iv) Para calcular el 30% de una cantidad, basta con multiplicar dicha cantidad por 0,3.

v) Aumentar un número en un 30% de su valor, es equivalente a multiplicar ese número por 1,3.

vi) Disminuir un número en un 30% de su valor, es equivalente a calcular el 70% de dicho número.

vii) Calcular el 30% de un valor es igual a quitarle 30 por cada 100.

viii) El 50% del 30% de una cantidad es equivalente al 80% de esa cantidad.

Sección 3: Relaciones numéricas y algebraicas. Proporcionalidad

En esta sección se describen algunas ideas para entender el papel del álgebra en la educación primaria. En consonancia con las secciones anteriores, se describen las representaciones y los usos propios del álgebra en este nivel educativo. Estos se centran en la expresión y comprensión de relaciones numéricas y relaciones entre cantidades variables. Las relaciones más relevantes son las de igualdad, desigualdad, los patrones y las funciones. Este marco da cabida a la proporcionalidad, cuyo estudio completa la sección.

3.1. Usos y representaciones del álgebra en primaria

3.1.1. Usos del álgebra

Los usos relevantes del álgebra en el nivel de primaria se pueden agrupar en dos categorías. En primer lugar, la expresión de relaciones numéricas entre cantidades (estáticas) que pueden ser conocidas o desconocidas: igualdades, desigualdades, relaciones de divisibilidad. Los Ejemplos 3.1.a) especifican algunas de ellas. En segundo lugar, el álgebra escolar es también útil para expresar relaciones de dependencia entre *variables*, como son los *patrones* y las *funciones*.

EJEMPLOS 3.1.

a) Algunas relaciones numéricas que aparecen en el álgebra escolar:

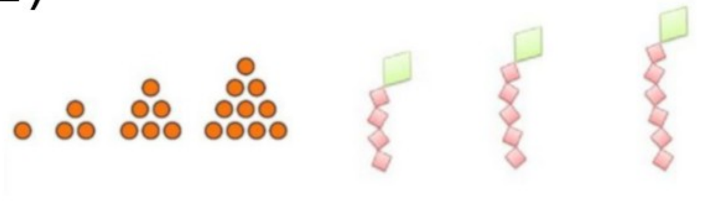
$2\cdot(3\cdot5) = (2\cdot3)\cdot5$

$x+3 = 2-3x$

$2\cdot(-1)\leqslant 0$

b) La Figura 3.1. muestra dos representaciones pictóricas de patrones y una tabular de una función.

1)



2)

Nº Sillas	Patas Silla
1	4
2	8
3	12
4	16

Figura 3.1. Representaciones pictóricas de un patrón (dibujo 1) y tabla que representa una función (dibujo 2)

Las siguientes subsecciones describirán las relaciones tanto numéricas como funcionales o de patrones más relevantes en primaria.

3.1.2. Representaciones novedosas del álgebra

Las representaciones propias del álgebra recorren los sistemas de representación propios de los números. En primer lugar, existen representaciones verbales que expresan relaciones dentro de un contexto. Afirmaciones como "*Yolanda tiene el doble de cromos* *que Carmen más dos*” constituyen un ejemplo de ellas. El álgebra también recurre a representaciones pictóricas: hay ideas que se pueden expresar en modelos ya conocidos para los números, pero trabajar con relaciones da pie a utilizar representaciones novedosas como la balanza, o los gráficos sobre ejes de coordenadas (Figura 3.2). Estos gráficos pueden reducirse a un conjunto de puntos, o representarse utilizando líneas continuas, en función del tipo de números o cantidades reales que se representen en ellos. Otra representación de utilidad es la tabular, en la que se pueden representar listados de números que permitan visualizar patrones o relaciones (Figura 3.1. arriba). Finalmente, el álgebra introduce una representación simbólica propia, denominada l*enguaje algebraico*, que introduce letras para razonar con cantidades desconocidas y con variables. La segunda fórmula de los Ejemplos 3.1.a) es un ejemplo de igualdad expresada en lenguaje algebraico.

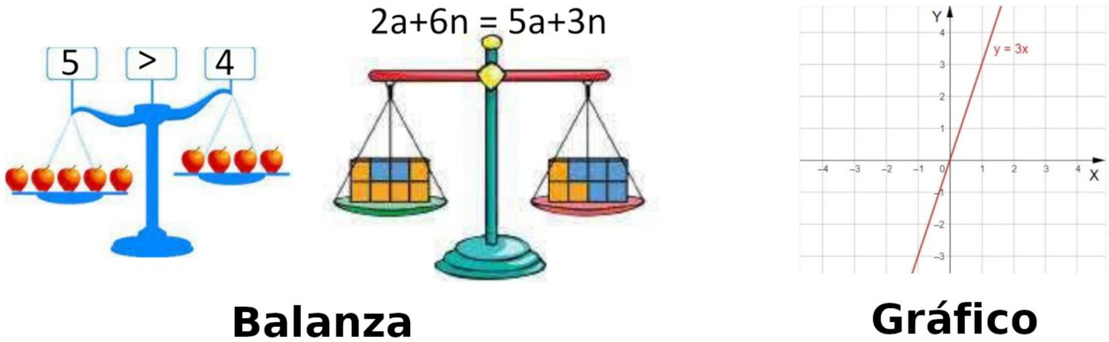


Figura 3.2. Representaciones pictóricas propias del álgebra: la balanza (izquierda) y el gráfico (derecha)

3.2. Relaciones numéricas

Son aquellas que conectan cantidades estáticas (no cambian) conocidas o desconocidas, y que, además, son *unívocas*: una misma cantidad puede estar relacionada con muchas otras. Las relaciones numéricas relevantes en educación primaria incluyen la igualdad y las relaciones de orden, que ocupan la siguiente subsección.

3.2.1. Igualdad

Es la relación que expresa que dos cantidades (conocidas o desconocidas) tienen el mismo valor. Para denotar una relación de igualdad se utiliza el símbolo “=”, que puede utilizarse en diferentes casos. Las **identidades** son el caso más destacado. Se trata de aquellas igualdades que se cumplen para *todos los números*.

EJEMPLOS 3.2.

1) (Cuadrado de una suma)

$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad \forall a,b$ (es decir, *a* y *b* pueden ser números cualesquiera, y la igualdad se sigue cumpliendo)

2) (Multiplicación de números negativos)

$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b \quad \forall a,b$

3) (Propiedades de la suma)

Conmutativa: $a+b=b+a \quad \forall a,b$

Asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c) \quad \forall a,b,c$

Elemento neutro: $a+0=0+a=0 \quad \forall a$

Elemento opuesto: $a+(-a)=(-a)+a=0 \quad \forall a$

4) (Propiedades de la multiplicación)

Conmutativa: $a \cdot b=b \cdot a \quad \forall a,b$

Asociativa: $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a,b,c$

Elemento neutro: $a \cdot 1=1 \cdot a=a \quad \forall a$

Elemento opuesto: $a \cdot (1/a)=(1/a) \cdot a=1 \quad \forall a$

Absorción: $a \cdot 0=0 \cdot a=0 \quad \forall a$

5) (Propiedad distributiva y de factor común de la multiplicación respecto de la suma)

$a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c \quad \forall a,b,c$

Hay igualdades que se cumplen solo en casos concretos, bajo condiciones que se imponen artificialmente sobre los números u otras que se fijan para describir numéricamente una situación real. Este tipo de igualdades suelen involucrar cantidades desconocidas.

EJEMPLOS 3.3.

1) La afirmación *"Tengo 4 caramelos de fresa y otros de limón, de manera que en total tengo 9 caramelos"* expresa una relación de igualdad que se da solo en un contexto. Esta igualdad se representa en lenguaje algebraico como

4+L=9, donde *L: número de caramelos de limón*

2) La relación que se muestra en la Figura 3.3. es otro ejemplo de igualdad relacionada con un contexto. Esta igualdad se expresa en lenguaje algebraico como

2 S + 1=6+, donde *S: Peso de la sandía*

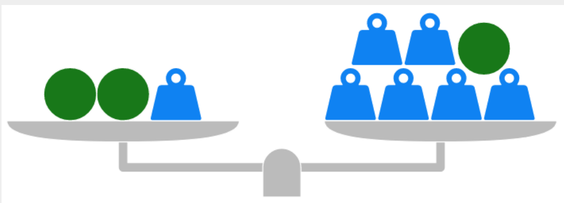


Figura 3.3. Representación en la balanza de una igualdad que involucra una cantidad desconocida (el peso de la sandía)

Se denominan **ecuaciones** a las formulaciones en lenguaje algebraico de igualdades que involucran cantidades desconocidas.

Actividad 3.1. Completa los huecos para que se cumplan las siguientes relaciones. Indica todas las posibles soluciones en cada caso:

i) 69 =__·23

ii) __· 11=2·3 + 2·8

iii) 0=(2-__)·___

iv) 5+3 Distinto de 3+___

Indica las propiedades de las operaciones que has empleado para dar respuesta a cada apartado.

Actividad 3.2. Expresa las igualdades que se plantean en los siguientes enunciados utilizando el lenguaje algebraico. A continuación, da respuesta a los enunciados usando las representaciones (i) Tabular, (ii) Gráfica, (iii) Numérica (usando solo operaciones), y (iv) Lenguaje algebraico

Indica en cada caso qué representación te parece más apropiada. Los enunciados son los siguientes:

a) *Juan ha ganado cierta cantidad de dinero. Si gana 5€ más, tendrá 11€ ¿Cuánto ha ganado?*

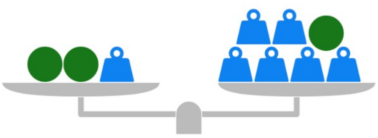
b) *En el patio de mi abuela hay 8 animales entre conejos y gallinas. Si todos los animales suman 22 patas, ¿cuántos conejos hay en el patio?*

Actividad 3.3 (Planteamiento de problemas a partir de igualdades). Proporciona enunciados de problemas que se puedan resolver mediante:

a) La ecuación 3C+2=23

b) La igualdad que se muestra en la balanza.

c) El razonamiento mostrado en la tabla.



Mis cromos	Cromos hermano
1	2*1+1=3, *se queda corto*
10	2*10+1=21, *se pasa*
6	2*6+1=13, *se pasa pero menos*
5	2*5+1=**11** → *tengo 5 cromos*

Resuélvelos con dos representaciones diferentes.

La relación de igualdad presenta propiedades que la caracterizan:

1) Reflexiva: $a=a \quad \forall a$

2) Simétrica: $\forall a, b$ se cumple que si $a=b$, entonces $b=a$.

3) Transitiva: $\forall a, b, c$ se cumple que si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$.

Se dice que la igualdad es una *relación de equivalencia* porque presenta las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Existen otras relaciones de equivalencia en matemáticas escolares como la equivalencia de fracciones, se deja como actividad para el lector la comprobación.

Actividad 3.4. Comprueba que la equivalencia de fracciones cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Es especialmente relevante que el alumnado comprenda la propiedad simétrica de la igualdad. En las matemáticas escolares es usual usar el símbolo "=" para expresar resultados de operaciones, por lo que el uso "al revés" (intercambiando las posiciones de las cantidades) puede generar dificultades. Por ejemplo, encontrar los números que hacem que igualdades como 2+__ = 5 o 2·3+2·5 = 2·__ sean verdaderas es más sencillo que la misma actividad para situaciones como 5= 2+__ o __·8= 2·3+2·5. La Actividad 3.1. es un ejemplo de tarea útil en este sentido.

3.2.2. Relaciones de orden

Son las que expresan *jerarquía* entre las dos cantidades involucradas. Esto significa que el orden en el que se escriben las cantidades de la relación es importante. En otras palabras, si se intercambia la posición de las cantidades en la relación, esta puede dejar de ser cierta. Por ejemplo, la igualdad $x+5=6$ es equivalente a $6=x+5$, pero para otras relaciones, como <, esto no ocurre: el hecho de que $3<9$ impide que $9<3$. En las matemáticas escolares aparecen diferentes relaciones de orden, pero las más habituales en primaria son las de desigualdad (≤ y ≥) y las de desigualdad estricta (< y >).

Actividad 3.5. Completa los huecos con el número o el símbolo apropiado (≤, ≥, < o >) para que las relaciones expresadas sean ciertas. Indica todas las posibles soluciones en cada caso:

i) *1___8*

ii) *5___ – 6*

iii)*7≤ ___ + 4*

iv) *2>(-1)·___*

Indica las propiedades de las operaciones que has empleado para dar respuesta en cada caso.

Actividad 3.6. Expresa el siguiente enunciado en lenguaje algebraico. Resuélvelo usando las representaciones tabular, gráfica y en lenguaje algebraico, e indica cuál te parece más apropiada.

Belén tiene 11€ menos que Andrés. Si entre ambos tienen más de 55, ¿cuántos € puede tener Belén?

La relación ≤ presenta algunas propiedades que caracterizan a las relaciones de orden:

1) Reflexiva: $a \leq a \quad \forall a$

2) Antisimétrica: $\forall a, b$ se cumple que si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a=b$.

3) Transitiva: $\forall a, b, c$ se cumple que si $a \leq b$ *y* $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Se dejan dos actividades que ponen de manifiesto la existencia de otras relaciones de orden en la matemática escolar.

Actividad 3.7. Comprueba si ≥ es una relación de orden (cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Repite la actividad para las relación < y para >.

Actividad 3.8. Comprueba si la relación de *divisibilidad* es de orden (cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva).

3.3. Relaciones de dependencia entre variables. Proporcionalidad

3.3.1. Patrones

Un *patrón* es una sucesión de elementos (números, dibujos, formas geométricas, etc) que sigue cierta regla de formación. Hay dos tipos de patrones destacados: (i) de *repetición*, en los que hay una secuencia de elementos del patrón que se presentan de forma periódica, y (ii) de *recurrencia*, que son sucesiones en los que no se identifica una periodicidad en los elementos, pero en los que se puede identificar uno de ellos conociendo los anteriores.

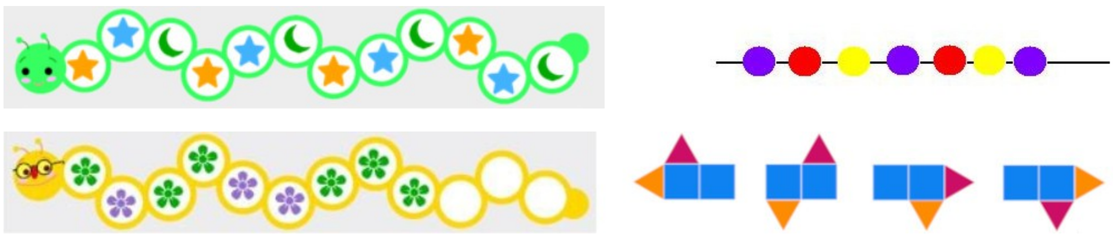


Figura 3.4. Ejemplos de patrones de repetición (1ª fila) y de recurrencia (2ª fila)

La Figura 3.4. muestra ejemplos de estos tipos de patrones, cuya pertinencia en el nivel de educación primaria reside en su potencial para establecer la conexión entre las series habituales en la etapa de educación infantil y la abstracción de las relaciones entre variables propias del álgebra en secundaria.

Actividad 3.9.

i) Da cuatro ejemplos de patrones geométricos: dos de repetición y otros dos de recurrencia.

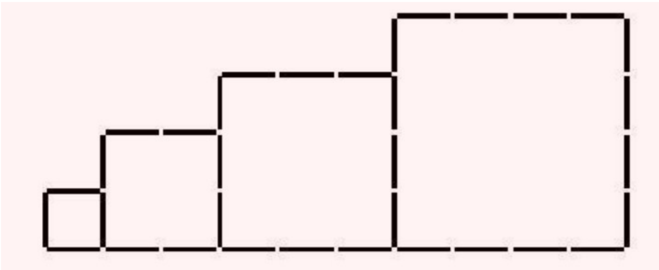
ii) Da cuatro ejemplos de patrones numéricos: dos de repetición y otros dos de recurrencia.

Actividad 3.10. Ana hace cuadrados con palillos, como los que se muestran en el dibujo.

i) ¿Cuántos palillos **nuevos** necesita para hacer el de la posición 10?

ii) ¿Y para hacer el de la posición 28?

iii) ¿Y para hacer el que está en la posición n?



Actividad 3.11. María va a celebrar una comida, y ha decidido que sus invitados se van a sentar como se muestra en la imagen:

i) ¿Cuántos invitados cabrán con 6 mesas? ¿Y con 12?

ii) Explica cómo saber cuántos invitados se pueden sentar en 50 mesas.

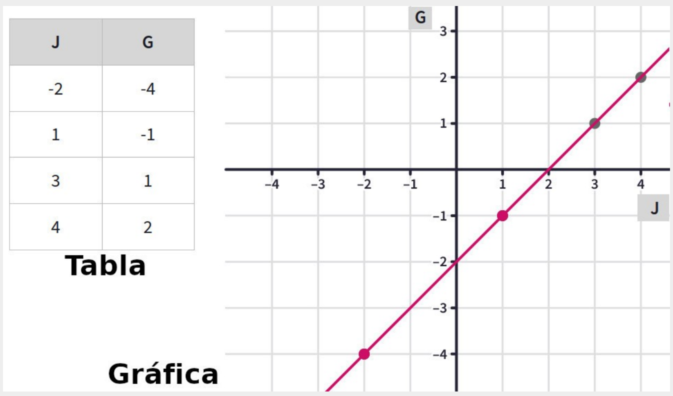
iii) Si hay 22 invitados, ¿cuántas mesas habrá? (responde a esta pregunta a partir de dos representaciones diferentes).

3.3.2. Funciones

Expresan la relación entre dos cantidades cuando una de ellas, llamada *variable independiente*, determina el valor de la otra, llamada *variable dependiente.*

EJEMPLOS 3.4

1) Funciones *aditivas/sustractivas*



J	G
-2	-4
1	-1
3	1
4	2

Figura 3.5. Representaciones gráfica y tabular de la relación entre las temperaturas

Representación verbal: *"En Granada siempre hay dos grados menos que en Jaén"*

Las representaciones gráfica y tabular se muestran en la Figura 3.5.

Representación simbólica: *G=J-2*, donde *G:* Temperatura de Granada (variable dependiente) y *J*: Temperatura de Jaén (variable independiente).

2) Funciones *lineales*

Representación verbal: *"Este mapa tiene una escala 1:300"*

Las representaciones tabular y gráfica se muestran en la Figura 3.6.

M	R
1	300
2	600
3	900
4	1200

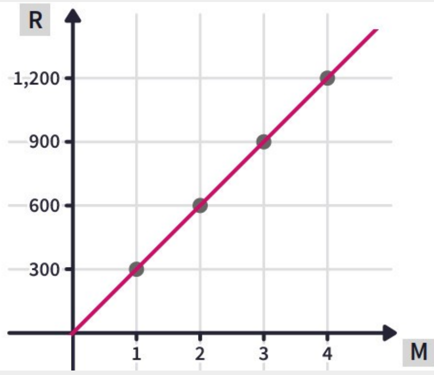


Figura 3.6. Representaciones tabular y gráfica de la relación entre las longitudes.

Representación simbólica: *R=300·M*, donde *R:* Longitud real (variable dependiente) y *M*: Longitud en el mapa (variable independiente).

3) Funciones *afines*

Representación verbal: *"La empresa B ganó el triple de millones que la empresa A menos dos millones"*

Las representaciones tabular y gráfica se muestran en la Figura 3.7.

A	B
1	1
2	4
3	7
4	10

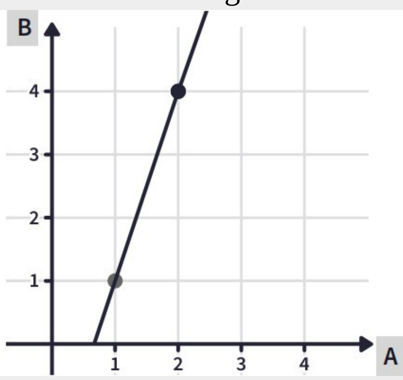


Figura 3.7. Representaciones tabular y gráfica de la relación entre las ganancias.

Representación simbólica: *B=3·A-2*, donde B*:* Ganancia de la empresa B (variable dependiente) y *A*: Ganancia de la empresa A (variable independiente)

4) (Los patrones también pueden involucrar funciones). Si en el ejemplo de la

Actividad 3.12. se toma el n.º de mesas como variable independiente y el de invitados como variable dependiente, el patrón de la actividad establece una función que relaciona estas dos variables.

Se invita al lector a representar esta función de forma tabular, gráfica y utilizando lenguaje algebraico.

La característica principal que diferencia a las funciones de otras relaciones es su carácter *unívoco:* cada valor de la variable independiente está relacionado con **un único valor** de la variable dependiente. Por ejemplo, para la relación ≤ *se verifica que* $2 \leq 3$, $2 \leq 5$, $2 \leq 100$, *etc.* Pero si tomamos como relación la función *"ser el doble que"*, solo 4 cumple que es el doble de 2. En las funciones de los Ejemplos 3.4., el valor 2 para *J, M* y *A* conlleva una única opción para sus correspondientes variables dependientes ($G=0$, $R=600$ y $B=4$, respectivamente).

Esta situación pone de manifiesto el uso que se hace del símbolo "=" en la representación en lenguaje algebraico de las funciones: expresa cómo se calcula el único valor de la variable dependiente que está relacionado con cada valor de la variable independiente. En el caso de la función 1) de los Ejemplos 3.4., el "=" en la expresión $G=J-2$ informa de cómo podemos saber la temperatura en Granada si conocemos la de Jaén (restando 2, en este caso). En matemáticas, estas ideas se suelen denotar identificando la variable dependiente como "imagen" de la independiente: $G=f(J)$ o $G=G(J)$. No obstante, este tipo de terminología se evita aquí porque no es propia de la educación primaria.

Actividad 3.12. Resuelve el siguiente problema utilizando una representación tabular (SUGERENCIA: Piensa en qué ocurre los tres últimos días):

"En un estanque nace un día un nenúfar, planta que cada día dobla su población. Es decir, pasado un día había dos nenúfares; pasados dos días había cuatro nenúfares; pasados tres días había ocho nenúfares, y así sucesivamente.

Si el estanque se llenó de nenúfares al cabo de 100 días, ¿que día estaba el estanque lleno hasta la mitad de nenúfares?"

Indica la expresión en lenguaje algebraico de la función que permite resolver el problema.

Actividad 3.13. Resuelve el siguiente problema utilizando dos representaciones diferentes:

"Juan tiene unos ahorros y su abuela quiere recompensarle por ayudarla con el jardín. Le ofrece dos tratos:

Trato 1: 'te doblo el dinero que tienes'

Trato 2: 'te doy el triple de tu dinero y tú me das 7€'

¿Qué trato debería escoger Juan?”

Actividad 3.14. Propón enunciados de problemas que se resuelvan utilizando (i) una función aditiva, (ii) Una función lineal y (iii) Una función afín.

3.3.3. Proporcionalidad

La introducción de ideas y representaciones algebraicas en primaria permite utilizar estas herramientas para la resolución de situaciones de proporcionalidad, ya que la relación de proporcionalidad se puede tratar como una función. Esta es la óptica que se adopta en esta subsección, cuyo propósito es fomentar estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad que faciliten la comprensión de las relaciones matemáticas involucradas en ellas.

Se dice que dos cantidades *a* y *b* son ***proporcionales*** si la razón *a/b* permanece constante. De esta manera, aunque *a* y *b* cambien, lo hacen guardando una relación inalterable, igual a la constante de proporcionalidad $k=a/b$.

EJEMPLOS 3.5.

1) Si voy a una tienda de deportes a comprar balones, las variables *nª de balones que compro* y *dinero que gasto* son proporcionales. Para verlo, pensamos en diferentes situaciones particulares y observamos cómo es la razón entre estas cantidades.

Si comprara un balón gastaría un dinero equiparable al precio del balón. Si comprara dos balones, gastaría dos veces el precio del balón. Si comprara cinco balones, gastaría cinco veces el precio del balón, etc. Se puede pensar momentáneamente, para fijar ideas, que el balón cuesta 20€ y utilizar una representación tabular de la situación:

B	1	2	3	5	8	10
D	20	40	60	100	160	200

En la tabla, B: *n.º de balones que compro,* y D: *dinero que gasto.* La tabla permite observar el valor de la razón D/B en todos los casos: en el primero es 20/1=20, en el segundo 40/2=20, en el tercero 60/3=20, etc.

De esta forma se visualiza que la razón no cambia (es siempre 20, el precio del balón) y las magnitudes, por tanto, son proporcionales con $k=20$. Obsérvese que este razonamiento **no depende del precio del balón**, se podría tomar otro precio y se seguiría obteniendo que la razón es constante.

2) Si subo los escalones de un edificio, las cantidades *n.º de escalones que subo* y *altura que alcanzo* son proporcionales.

Esto se puede comprobar razonando del mismo modo que en el ejemplo anterior: si se asume que la altura de un escalón es 15 cm, se puede elaborar una tabla de valores con diferentes casos:

E	1	2	4	8	10	20
A (cm)	15	30	60	120	150	300

En la tabla E: *n.º de escalones* y A: *altura que subo* (en cm). Se ilustra en ella que *A/E=15* en el primer caso, *A/E=30/2=15* en el segundo… y *A/E=300/20=15* en el último caso, lo que ilustra que las magnitudes consideradas son proporcionales con *k=15*.

Al igual que en el ejemplo anterior, el razonamiento es independiente de la altura de un escalón. Del mismo modo, se podrían intercambiar los papeles de A y E para explorar la proporcionalidad de magnitudes (si A/E permanece constante, también lo hará E/A).

Los Ejemplos 3.5. manifiestan que **las relaciones de proporcionalidad se pueden tratar como funciones afines**, en las que la constante de proporcionalidad es positiva (el valor que determina la relación funcional). En el caso 1), concretamente la función involucrada es *D=20·B*, mientras que en 2) la función es *A=15·E*.

El tratamiento de problemas de proporcionalidad con herramientas de representación algebraicas facilita también la comprensión de situaciones de *proporcionalidad inversa*. Se dice que dos cantidades a y b son **inversamente proporcionales** si el producto *a·b* permanece constante. Estas cantidades pueden variar pero con una relación inalterable igual a la constante de proporcionalidad inversa *k=a·b*.

EJEMPLOS 3.6.

1) *Un grifo tarda 10 h en llenar una piscina, ¿cuánto tardan 6 grifos iguales?*

En este enunciado hay involucradas dos variables, que son G: *n.º de grifos y* T*:* tiempo que tarda la piscina en llenarse.

Sabemos que un grifo tarda 10 h en llenar la piscina. Entonces 2 grifos tardarán **la mitad del tiempo** (5 h)**,** 4 grifos la cuarta parte, etc. Siguiendo este razonamiento se puede completar una tabla de datos como la siguiente:

G	1	2	4	5	10
T	10	5	2.5	2	1

Al calcular el producto G·T tenemos en el primer caso que G·T=1·10=10, en el segundo G·T=2·5=10, en el tercero 4·2.5=10, etc. Por tanto, se observa que G·T se mantiene constante, y la constante de proporcionalidad inversa es 10.

2) Si unos obreros trabajan en una construcción, las variables *n.º de días en los que se completa la construcción* y *n.º de personas que trabajan en ella* son magnitudes inversamente proporcionales.

Esto se puede comprobar razonando de forma similar al ejemplo anterior. Si pensamos que un obrero tarda 20 días, por ejemplo, entonces 2 obreros tardan 10 días, 5 obreros tardan 4 días, etc., por lo que se puede completar una tabla de valores:

O	1	2	4	5	10	20
D	20	10	5	4	2	1

En la tabla O: *n.º de obreros* y *D: n.º de días en los que se completa la construcción*. Se ilustra entonces que O·D=1·20=20 en el primer caso, O·D=2·10=20 en el segundo, O.D=4·5=20 en el tercero y, en general se observa que O.D=20 en todos los casos. Por tanto, las magnitudes son inversamente proporcionales con constante 20.

Obsérvese que el razonamiento no depende del dato de 20 días elegido: si se eligiera otra, cambiaría la constante de proporcionalidad inversa, pero se mantendría la relación de proporcionalidad inversa entre las cantidades que se ha observado.

Se dejan a continuación algunas actividades para identificar cantidades proporcionales e inversamente proporcionales, así como algunos problemas para practicar usando las herramientas de representación algebraica en situaciones de proporcionalidad.

Actividad 3.15. Justifica razonadamente, apoyándote en una representación tabular, si las cantidades indicadas son proporcionales, inversamente proporcionales, o no guardan ninguna de estas dos relaciones:

i) La *edad* de una persona y *su número de zapato.*

ii) La *cantidad de grifos que alimentan un depósito* y los *litros de agua que suministran en 1 h.*

iii) El *nº de días que se tarda en recoger la cosecha de aceituna* y la *cantidad de aceituneros implicados.*

iv) Tiempo desde la fecundación y nº de células del feto.

Actividad 3.16. Mi primo quiere ver Dora la exploradora en la juguetería y quiere ir andando a verla (está a 2 km). Sabiendo que el niño tarda 15 minutos en llegar al colegio (800 m), **¿cuánto tiempo esperamos tardar en llegar a la juguetería?**

Actividad 3.17. Una fruta pierde 1/10 de su peso al quitarle la piel. **¿Cuánto pesaba originalmente si tras quitarle la piel ha pesado 20 gramos?**

Actividad 3.18. Si 8 leñadores pueden cortar 9 troncos en 9 horas **¿Cuántas horas les llevará a 4 hombres cortar 3 troncos trabajando a la misma velocidad?**

Actividades para practicar sobre la Sección 3

P3.1 (Identidades con representaciones pictóricas). Utiliza representaciones pictóricas basadas en modelos de área para representar las siguientes igualdades:

i) La propiedad conmutativa de la suma.

ii) La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

iii) La identidad que representa el cuadrado de una suma:

$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad \forall a, b$

NOTA: Elige valores concretos y haz una representación con ellos.

P3.2 (División con resto). Cuando se dividen dos números naturales utilizando el algoritmo y la división no es exacta, se obtiene el *resto de la división*. Este resto representa lo que le falta a la multiplicación del cociente por el divisor para llegar al dividendo. Concretamente, se cumple la siguiente igualdad:

$D=c \cdot d+r$, donde D es el dividendo, d es el divisor, c es el cociente y $r<d$ es el resto.

Utiliza esta propiedad para completar los huecos, de manera que se cumplan las igualdades. Obtén todas las soluciones posibles, o explica por qué no hay solución:

i) $45=22\cdot\_\_+1$	iv) 62 = 0·__ + ___
ii) 13·__ +__=132	v) 1 =__·13+___
iii) 36 = __·__+1	vi) __·__= 43 - 6

Indica las propiedades de las operaciones que has empleado para dar respuesta en cada caso.

P3.3 (Relaciones incompletas) Completa los huecos, usando un número o un símbolo apropiado (=, ≤, ≥, < o >), para que se cumplan las siguientes relaciones. Indica todas las posibles soluciones, o explica por qué no hay solución.

i) 5+3 ≠ 3+___	v) -3 ___ 1
ii) 0 ·__ ≠ 2	vi) 0 __ -2
iii) 6·7 = (2·__)·3	vii) 9 > 1- ___
iv) (3/__)·___=3	viii) -3 / (__) ≥ 0

Indica las propiedades de las operaciones que has empleado para dar respuesta en cada caso.

P3.4 (Ecuaciones en distintas representaciones). Expresa las igualdades que se plantean en los siguientes enunciados utilizando el lenguaje algebraico. A continuación, da respuesta a los enunciados usando las siguientes representaciones (i) tabular, (ii) gráfica, (iii) numérica (usando solo operaciones), (iv) lenguaje algebraico. Indica en cada caso qué representación te parece más apropiada.

a) La habitación de Sergio mide 12 m². Su ancho es de 4 m, ¿cuánto mide su largo?

b) Gema dice que si hubiera sacado el doble de nota en el examen, todavía le faltaría un punto para el aprobado. ¿Qué obtuvo Gema en el examen?

c) A Valeria le ha tocado la lotería, pero tuvo que pagar 100€ que debía a Claudia. Después de eso, le quedan aún 700€ del premio. ¿De cuánto era ese premio?

P3.5 (*Inecuaciones* en distintas representaciones). Expresa los siguientes enunciados en lenguaje algebraico. Responde a las preguntas usando las representaciones (i) tabular, (ii) gráfica, (iii) numérica (usando solo operaciones), (iv) lenguaje algebraico. Indica en cada caso qué representación te parece más apropiada.

a) Belén tiene 11€ menos que Andrés. Si entre ambos tienen más de 55€, ¿cuánto dinero puede tener Belén?

b) Mi habitación tiene 3 m más de largo que de ancho, y no llega a los 16 m² de superficie. ¿Cuánto puede medir de ancho?

c) En una oposición se hace la media aritmética de dos pruebas: teórica y práctica. Para sacar plaza se necesita al menos un 6 de media. Si María ha sacado un 7 en la parte teórica, ¿cuánto necesita sacar en la parte práctica para obtener su plaza?

P3.6 (Reparto justo). Utiliza la representación que consideres más adecuada para resolver el siguiente problema:

El jefe de una tribu tiene 20 kilos de maíz para repartir entre sus 20 vecinos y decide hacerlo de la siguiente forma: a) A cada uno de los niños les dará 3 kilos de maíz; b) A cada una de las mujeres las dará dos kilos de maíz; c) A cada uno de los hombres les dará medio kilo de maíz.

Sabiendo que al menos hay un niño, una mujer y un hombre y que repartió todo el maíz sin que sobrara ni faltara nada ¿Cuántos niños, mujeres y hombres hay?

P3.7 (Patrones, I). Observa la siguiente secuencia de figuras:

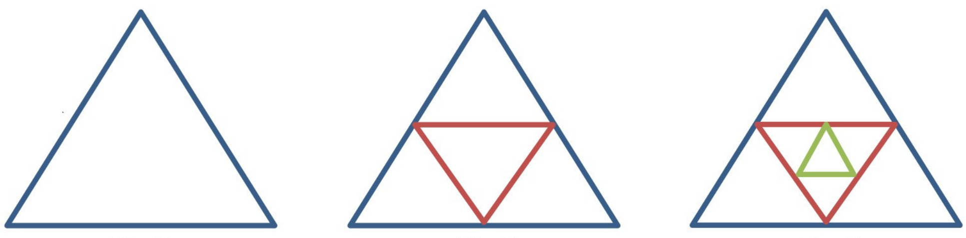


Fig.1 Fig.2 Fig.3

i) Dibuja la Fig. 4 e indica cuántos triángulos hay **en total** en esa figura.

ii) ¿Cuántos triángulos hay en total en la Fig. 22?

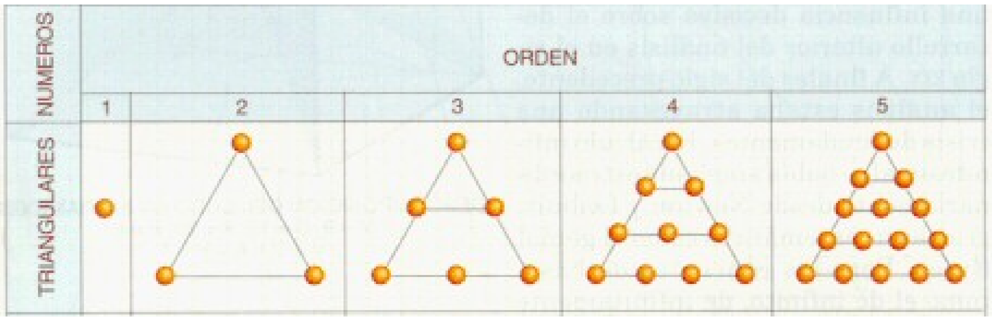
iii) Explica si es posible encontrar una figura con 800 o con 801 triángulos.

P3.8 (Patrones, II). La imagen muestra ejemplos de los llamados *números triangulares*.

i) Di cuál es el número triangular de orden 7, 13 y 22.

ii) Encuentra la representación tabular de los 12 primeros números triangulares. Utilízala para dar la expresión en lenguaje algebraico de la regla de formación del patrón.

iii) Justifica razonadamente cuál es el primer número triangular mayor de 1000.



P3.9 (Planteamiento de problemas). Escribe enunciados de problemas que cumplan las siguientes condiciones

i) Se resuelve con la ecuación *2·x-3=5*

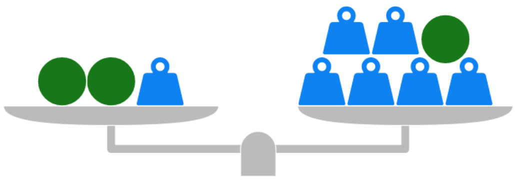
ii) Aparece una función que se describe con la siguiente tabla

Luis	0	1	5	8	10
Beatriz	-3	-2	2	5	7

iii) Se resuelve con la relación *x-3>8*

iv) Aparece la función afín C=-2·P

v) Se puede describir con la siguiente representación



P3.10 (Cantidades proporcionales). Utiliza la representación tabular para estudiar si existe proporcionalidad entre las siguientes magnitudes:

a) Edad y altura de una persona.

b) Precio de los tomates y peso de los mismos.

c) Volumen de una esfera y radio de la misma.

d) Cantidad de grifos y tiempo que tardan en llenar un depósito.

P3.11 (División vs proporcionalidad). Resuelve el siguiente enunciado de dos maneras: (i) utilizando operaciones (puedes emplear una representación pictórica adecuada) y (ii) utilizando representaciones algebraicas. Explica qué procedimiento te resulta más sencillo y por qué.

Hemos llenado una botella y media de agua con 9 vasos de 1/4 de litro, ¿cuál es la capacidad de la botella?

P3.12 (Resolución de problemas de proporcionalidad). En los siguientes enunciados: i) Identifica las magnitudes relacionadas y justifica si entre ellas existe una relación de proporcionalidad

ii) Resuelve aquellos en los que sí hay proporcionalidad **utilizando dos representaciones**.

a) *En un hotel tienen carne para alimentar a 38 huéspedes durante 6 días. Si se marchan 26 huéspedes, ¿para cuántos días habrá carne?*

b) *En una granja, 80 gallinas consumen 60 kg de pienso al cabo de una semana. ¿Qué gasto de pienso tendrán 60 gallinas durante un mes?*

c) *Cuatro máquinas siegan un campo de 800 Ha en 3 días. ¿Cuánto tardarán tres máquinas en segar un campo de 900 Ha al mismo ritmo de trabajo?"* (Ha es el símbolo de la hectárea, el hectómetro cuadrado)

d) *Si los cereales se venden en cajas de tres paquetes, a 2 euros la caja ¿Cuánto costarán 12 paquetes?*

e) *Si un bebé aumenta de peso 3 Kg. en 3 meses ¿Cuánto aumentará en el primer año?*

f) *Pedro puede comer 2 pasteles en 3 minutos. ¿Cuánto tiempo le llevará comer 12 pasteles?*

g) *Si 5 chicas beben 3 botellas de limonada ¿Cuánta limonada pueden beber 30 chicas?*

h) *Si 8 hombres pueden cortar 9 troncos en 9 horas ¿Cuántas horas les llevará a 4 hombres cortar 3 troncos trabajando a la misma velocidad?*

i) *He comprado un trozo de queso que pesa 0,925 Kg. Un Kg de queso cuesta 6,25 euros. ¿Cuánto he pagado por el trozo?*

j) Empleando 3/4 de su jornada laboral, unos obreros completaron la mitad de su trabajo, ¿Qué parte del trabajo completarían trabajando la jornada completa?

P3.13 (Analgésicos). Dos analgésicos han sido experimentados en dos muestras de personas, de edades y situación clínica similares. Se han obtenido los siguientes resultados:

	Mejoran	No mejoran
Analgésico A	40	60
Analgésico B	90	210

i) ¿Qué analgésico es más efectivo?

ii) ¿Cuántos pacientes deberían mejorar con el analgésico B para que sea igualmente efectivo?

P3.14 (Paseo a la juguetería). Mi primo quiere ver un muñeco de "Dora la exploradora" en la juguetería y quiere ir andando a verla (está a 2 Km). Sabiendo que el niño tarda 15 minutos en llegar al colegio (800 m), **¿cuánto tiempo esperamos tardar en llegar a la juguetería?**

Actividades de reflexión sobre la Sección 3

R3.1 (El gato, la tortuga y la mesa). Observa las siguientes imágenes, que corresponden a un problema planteado en una escuela de educación primaria en China.

Utiliza una representación apropiada para encontrar la altura de la mesa.

R3.2 (19 de julio con amor). Una pareja de enamorados se conocieron un viernes que era 19 de julio. Les hace ilusión casarse otro 19 de julio y vieron que ese día fue miércoles en 2017, jueves en 2018 y será también viernes en 2019. Por cuestiones de trabajo y tradición tienen que casarse en sábado, por lo que fueron contentos a pedir cita para el año 2020, pero les dijeron que no era posible: el 19 de julio de 2020 será domingo.

a) Encuentra los cinco próximos años en los que el 19 de julio será sábado.

b) Encuentra una regla que permita saber si en un año dado 19 de julio será (o no) sábado.

G. Guiones para los seminarios de prácticas de la Unidad 1

A continuación se incluyen los guiones de trabajo de los seminarios de prácticas correspondientes a la Unidad 1 de números y álgebra:

Práctica 1: Representación de números naturales y racionales. Sistemas de numeración

Práctica 2: Operaciones con números naturales usando el material multibase y el ábaco vertical

Práctica 3: Operaciones con números racionales usando las tiras y las transparencias de fracciones

Práctica 4: Problemas aritméticos con materiales

El guión de trabajo de cada práctica incluye los siguientes puntos:

- ✓ Descripción de los materiales.
- ✓ Objetivos de la sesión.
- ✓ Bibliografía y recursos digitales.
- ✓ Actividades para practicar.
- ✓ Actividades para la evaluación.

PRÁCTICA 1. REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS NATURALES Y RACIONALES. SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1. Presentación

Utilizar y relacionar diferentes sistemas de representación es una de las competencias fundamentales para comprender los números. Los materiales manipulativos proporcionan representaciones que sirven de andamiaje para llegar a las representaciones simbólicas. Concretamente, esta practica explora la pertinencia de dos materiales para aprender los sistemas de numeración y las fracciones.

En primer lugar, se busca explorar el uso cardinal de los números naturales y su conexión con los sistemas de numeración. Para expresar la cantidad de objetos de una colección, es fundamental realizar agrupaciones y experimentar la relación entre los grupos y las cifras en un sistema de numeración. El ***material multibase*** está diseñado específicamente para ello, ya que existen bloques de base decimal o en otra base, que ponen de manifiesto las propiedades de los sistemas de numeración que se mantienen independientemente de la base que emplees.

En segundo lugar, se pretende analizar el uso de las fracciones para expresar partes de una cantidad dada utilizando una representación manipulativa. El *muro de fracciones* es un ejemplo de modelo de medida útil para este fin. Está formado por un rectángulo dividido en franjas de igual amplitud, cada una de ellas dividida a su vez en partes iguales que corresponden a fracciones de la unidad. Si en este diagrama se admite que cada franja sea una pieza separable, se obtienen las ***tiras de fracciones.*** Este material permite, visualizar la equivalencia y el orden de fracciones, propiedades que se exploran en la práctica.

2. Objetivos

a) Reconocer las propiedades y cualidades de nuestro sistema de numeración decimal y abstraer sus características trabajando en otras bases.

b) Utilizar los bloques multibase como materiales útiles para aprender el sistema de numeración decimal.

c) Identificar propiedades de orden y de equivalencia a partir de representaciones manipulativas.

d) Utilizar las tiras de fracciones como material pertinente para iniciar al alumnado en las fracciones y sus propiedades básicas.

3. Bibliografía y recursos

3.1. Bibliografía

Castro, E. y Molina, M. (2011). Números naturales y sistemas de numeración. En Segovia, I. y Rico, L. (Coord.) *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. (pp. 47-74). Madrid. Pirámide.

Castro, E. y Torralbo, M. (2001). Fracciones en el currículo de la Educación Primaria. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 285-314). Madrid: Síntesis.

Cid, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2004). Sistemas numéricos. En Godino, J.D. (Dir.), *Matemáticas para maestros*. (pp. 5-162). Universidad de Granada. http://www.ugr.es/~jgodino/manual/matematicas_maestros.pdf

Flores, P. y Torralbo, M. (2011). Números racionales. En Segovia, I. y Rico, L. (Coord.) *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria* (pp. 189-218). Madrid: Pirámide.

3.2. Versiones digitales de los materiales empleados

De los bloques de todas las bases entre 2 y 16: https://www.geogebra.org/m/dby8grkb

Del muro de fracciones:

1) Primera alternativa: https://toytheater.com/fraction-strips/

2) Segunda alternativa: https://es.mathigon.org/polypad#fractions

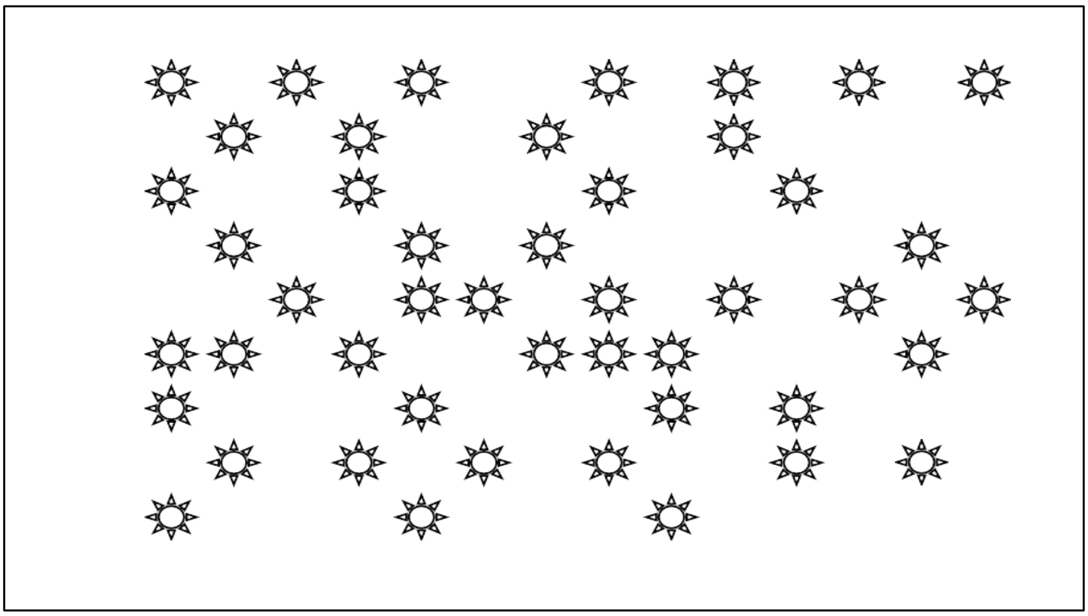
En cualquier caso, tenéis versiones recortables de materiales de base 5, 10 y 12 y de las tiras de fracciones para practicar en casa si no disponéis de los materiales.

4. Actividades para practicar

A) Sistemas de numeración con el material multibase

4.1. (Agrupamiento y cifras en base diez)

Partimos de la colección de soles que se ve en la figura



a) Utiliza los bloques de base diez para hacer agrupamientos con los elementos de la dos colección y dibuja los resultados que obtienes.

b) Cuenta los objetos que tiene la colección y escribe sus cifras. Compáralas con los resultados obtenidos anteriormente y explica cómo se obtienen esas cifras usando los bloques de base diez.

4.2. (Agrupamiento y cifras en otras bases)

Observa el material que tienes disponible y decide razonadamente de qué *base* es ese material. Llamaremos *b* a esa base.

a) Utiliza los bloques para hacer agrupamientos en base *b* con los elementos de la colección y dibuja los resultados que obtienes.

b) Siguiendo la lógica usada en la tarea 4.1, da las cifras en base *b* que expresan la cantidad de elementos de la colección.

c) Explica con tus palabras cómo se obtendrían las cifras en base 8 de la cantidad de alumnos que hay en la clase. Indica cuál es el papel de los materiales utilizados para conseguirlo.

NOTA: Esta actividad se puede repetir con materiales de diferentes bases (*b* iría cambiando), se recomienda repetirla al menos con alguna base menor de diez y otra mayor de diez.

4.3. (“Desagrupamiento” en diferentes bases. Interpretación de las cifras)

Consideramos las cifras $16_{10)}$, que conocemos habitualmente como simplemente 16, y $16_{b)}$:

a) Expresa esas cifras utilizando los materiales multibase adecuados para cada una.

b) Rompe los grupos formados con los bloques y dibuja una colección que tenga exactamente la misma cantidad de elementos en ambos casos. ¿Qué operaciones realizas cuando pasas de barras y placas a unidades sueltas?

c) Si tenemos dos colecciones, una con $16_{10)}$ objetos y otra con $16_{b)}$ objetos, ¿tienen la misma cantidad de elementos? ¿Qué diferencia hay entre “número” y “cifras de un número en base *b*?

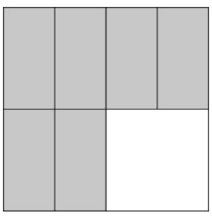
NOTA: Esta actividad se puede repetir con materiales de diferentes bases (*b* iría cambiando), se recomienda trabajarla en casa al menos con alguna base menor de diez y otra mayor de diez (mirar ANEXOS).

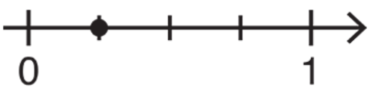
B) Fracciones con las tiras

4.4. Representación, equivalencia y orden entre fracciones.

Considera las siguientes representaciones de números racionales:

i) Una unidad y un tercio.

ii) 

iii) 

Responde a las siguientes cuestiones usando las tiras de fracciones y dibujando si es necesario.

a) Identifica el tipo de representación usado para expresar los números racionales de los apartados i) a iii) y represéntalos usando las tiras de fracciones.

b) Obtén una fracción equivalente a cada uno de los números racionales representados en los apartados i) a iii) utilizando las tiras de fracciones. ¿Por qué son equivalentes las fracciones obtenidas?

c) Utiliza las tiras de fracciones para ordenar de menor a mayor los números racionales representados en los apartados i) a iii). ¿Qué argumento utilizas para realizar la ordenación?

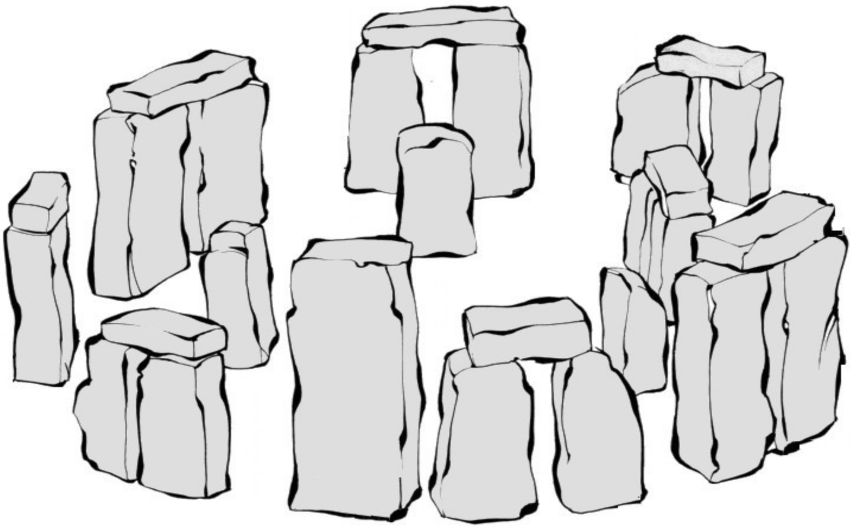
d) Utiliza las tiras de fracciones para encontrar un número racional que esté entre el mayor número racional y el segundo mayor y otro entre el segundo y el tercero. ¿Por qué los números indicados cumplen la condición establecida?

5. Actividades para la evaluación

5.1. (Las piedras de Stonehenge)

Se ha establecido comunicación escrita con los habitantes del planeta *Omicron Persei VIII*, cuyo sistema de numeración tiene base 5 y, por casualidad, utiliza los mismos símbolos que usamos en la Tierra.

Los habitantes de este planeta tienen obras de arquitectura parecidas a algunas ruinas terrestres. Mostraron interés por Stonehenge (Reino Unido, observad el dibujo adjunto), y quieren saber de cuántas piezas se compone. **Usa los bloques apropiados para saber qué debéis responder.**



5.2. (Las piedras de *Omicron Persei VIII*)

Desde *Omicron Persei VIII* informan de que su mayor construcción se compone de $34_{5)}$ piezas. **Usa los bloques apropiados para dibujar una construcción que incluya exactamente la misma cantidad de piezas.**

5.3. (Las piedras del planeta *Vinci*)

Los habitantes del planeta *Vinci* tienen un sistema de numeración de base 12 (usan también los mismos símbolos que en la Tierra) e informan de que su construcción tiene $34_{12)}$ piezas. **Usa los bloques apropiados para informar a los habitantes de *Omicron Persei VIII* sobre la cantidad de piezas de esa construcción.**

5.4. (Ordenador roto)

El sistema operativo de nuestro ordenador ha dado un fallo de memoria al arrancar. Indica que la posición de memoria $21_{12)}$ está dañada. **Usa los bloques apropiados para informar al técnico, que no conoce el sistema de numeración en base 12, en qué posición debe de buscar el error.**

5.5. (¿Cuántos trozos puede comer?)

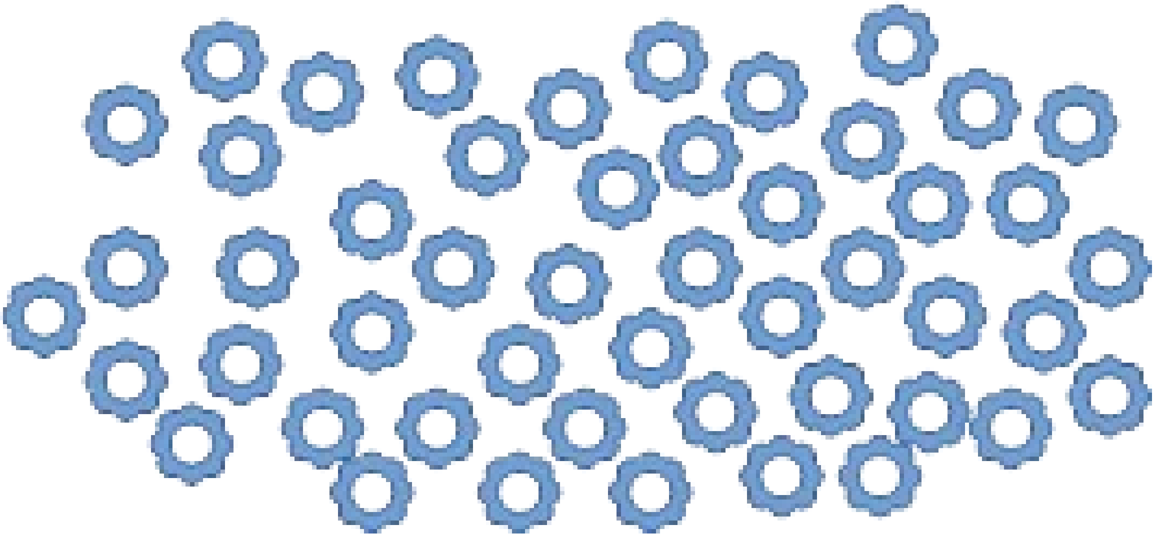
A Irene le han regalado un bizcocho por su cumpleaños. Su madre le ha dicho que puede comerse un tercio del bizcocho para merendar, y debe guardar el resto para los días siguientes. Sin embargo, cuando va a coger su parte para hoy, se da cuenta de que el bizcocho está cortado en 12 partes iguales. **Usa las tiras de fracciones para indicar a Irene, de manera justificada, cuántas partes tendría que coger.**

5.6. (Castaños)

Se ha calculado la fracción de estudiantes con el pelo castaño que hay en dos colegios distintos respecto del total de estudiantes. En el colegio A, 3/5 de los estudiantes tienen el pelo castaño. En el colegio B, siete doceavos tienen el pelo castaño. **Usa las tiras de fracciones para justificar en qué colegio la relación estudiantes con el pelo castaño respecto del total es mayor.**

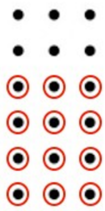
Bonus. También se puede practicar repitiendo las actividades 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4. con otros ejemplos:

i) Las actividades 4.1. y 4.2. se pueden repetir con el conjunto de tuercas que se muestra a continuación. En 4.2. se pueden tomar diferentes bases.



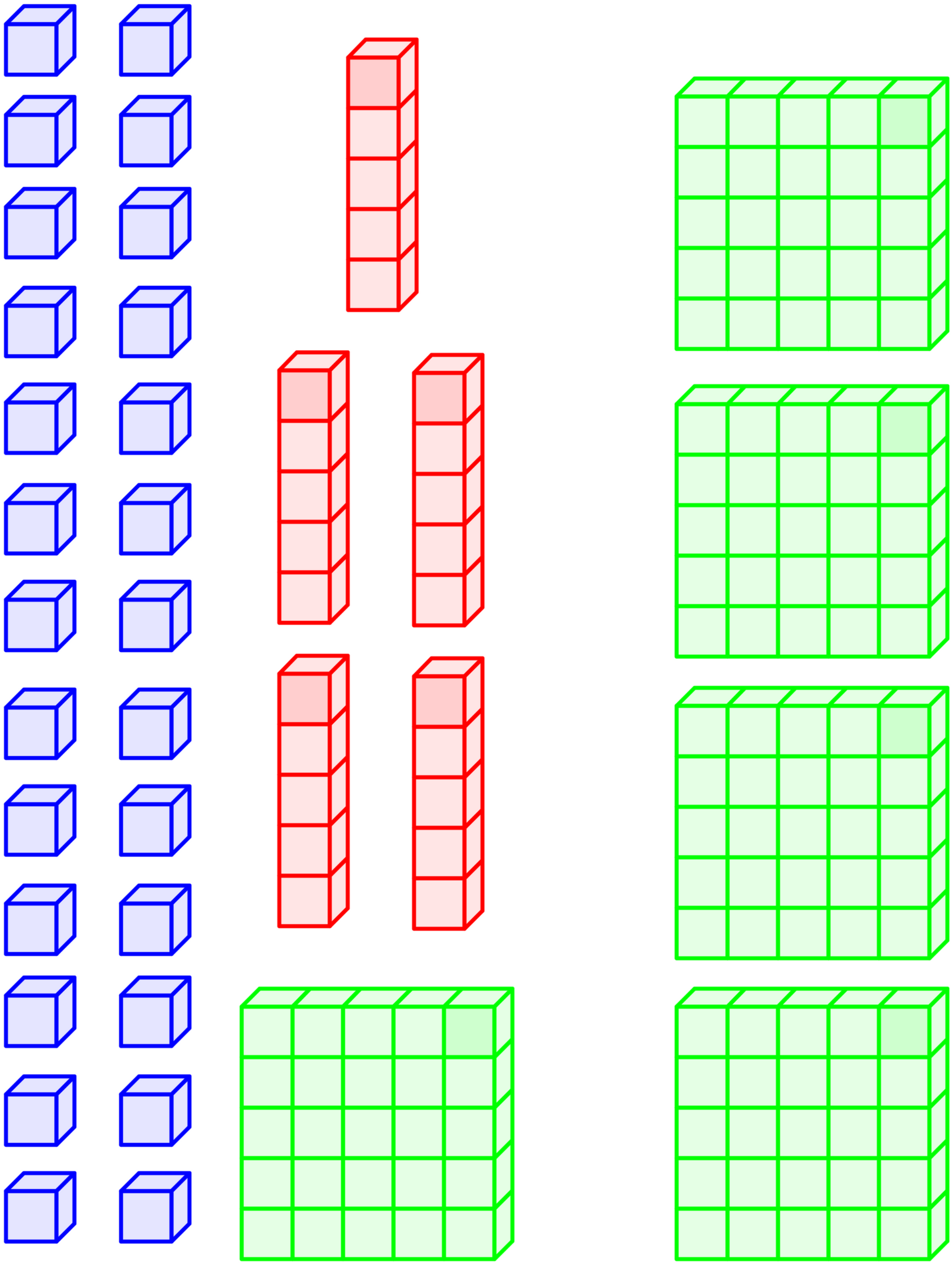
ii) La actividad 4.3. se puede repetir con 25, y 25b) , también modificando las bases.

iii) La actividad 4.4. se puede repetir tomando los tres siguientes números racionales:

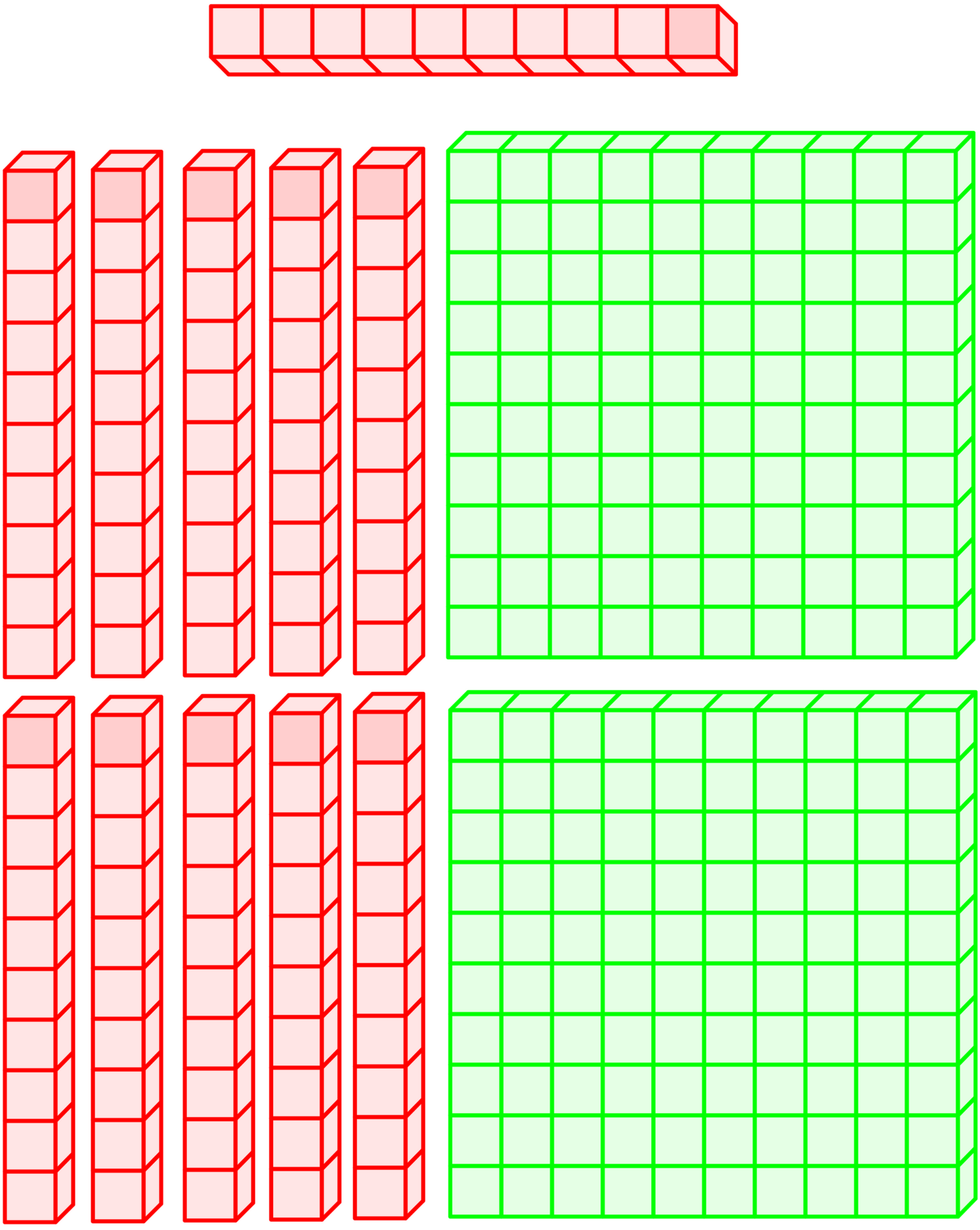


75%

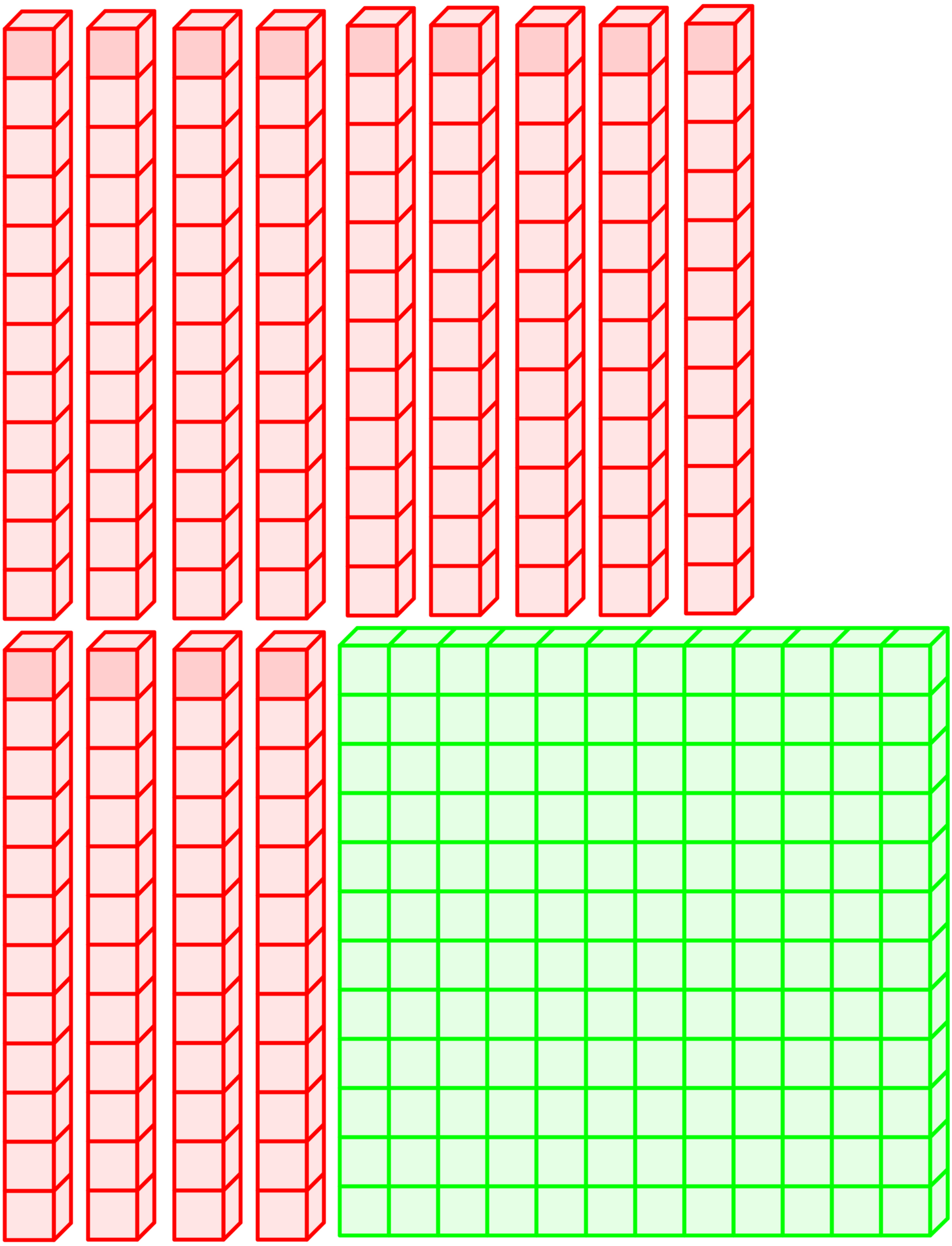
ANEXO I: VERSIÓN RECORTABLE DEL MATERIAL DE LA PRÁCTICA.
PARTE 1 (UNIDADES PARA TODAS LAS BASES Y MATERIAL BASE 5)



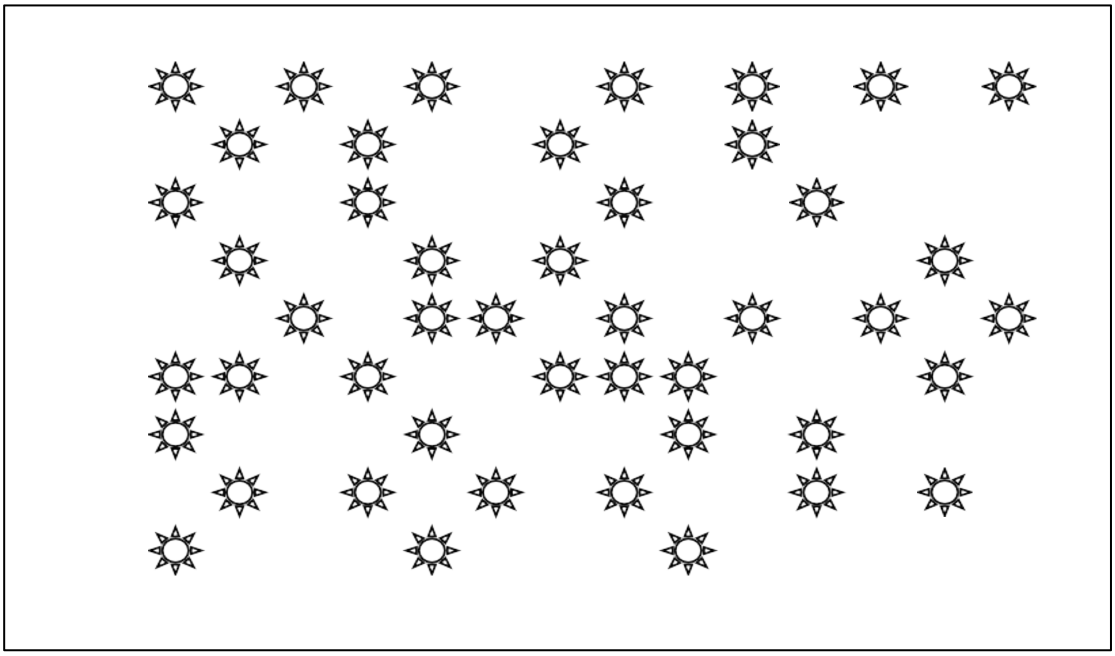
ANEXO I: VERSIÓN RECORTABLE DEL MATERIAL DE LA PRÁCTICA. PARTE 2 (MATERIAL BASE 10)

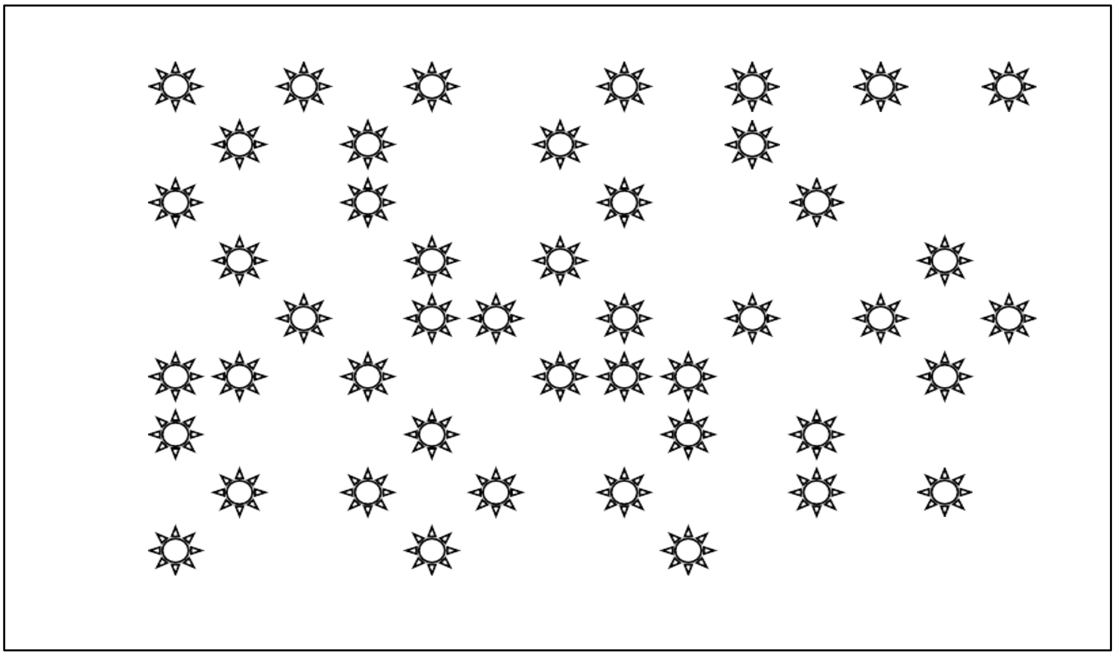


ANEXO I: VERSIÓN RECORTABLE DEL MATERIAL DE LA PRÁCTICA. PARTE 3 (MATERIAL BASE 12)

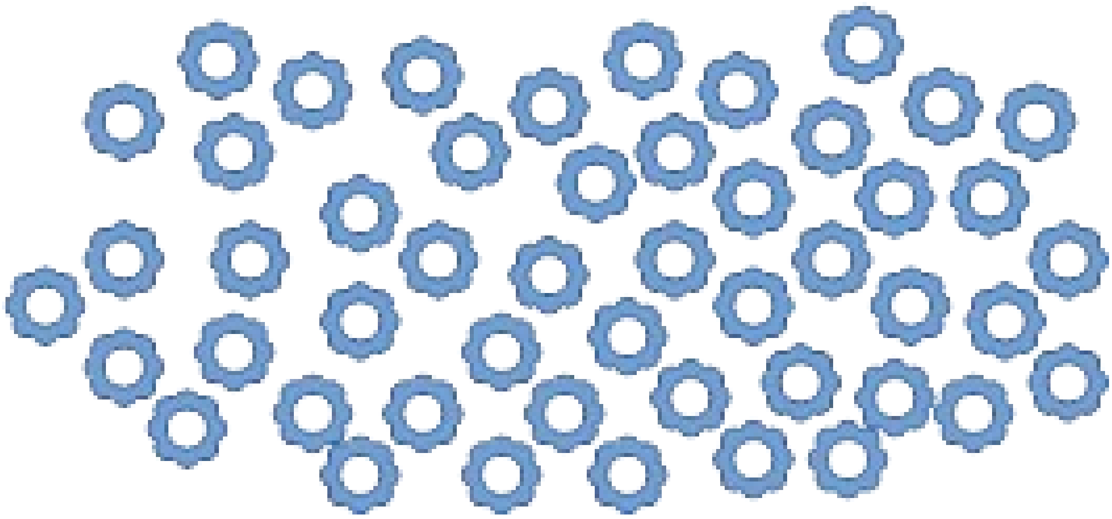


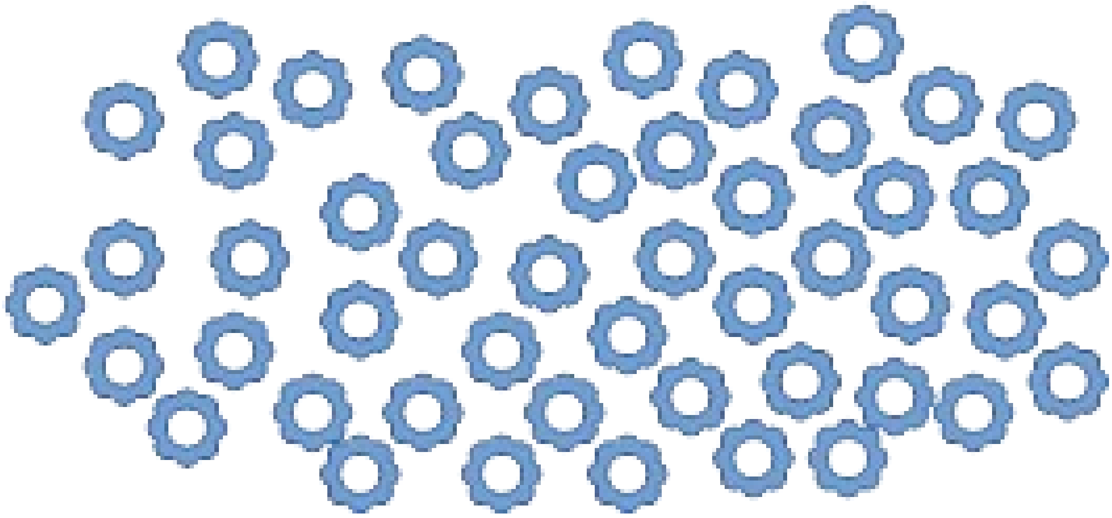
ANEXO II: IMÁGENES ADICIONALES DE LOS SOLES, PARA PRACTICAR



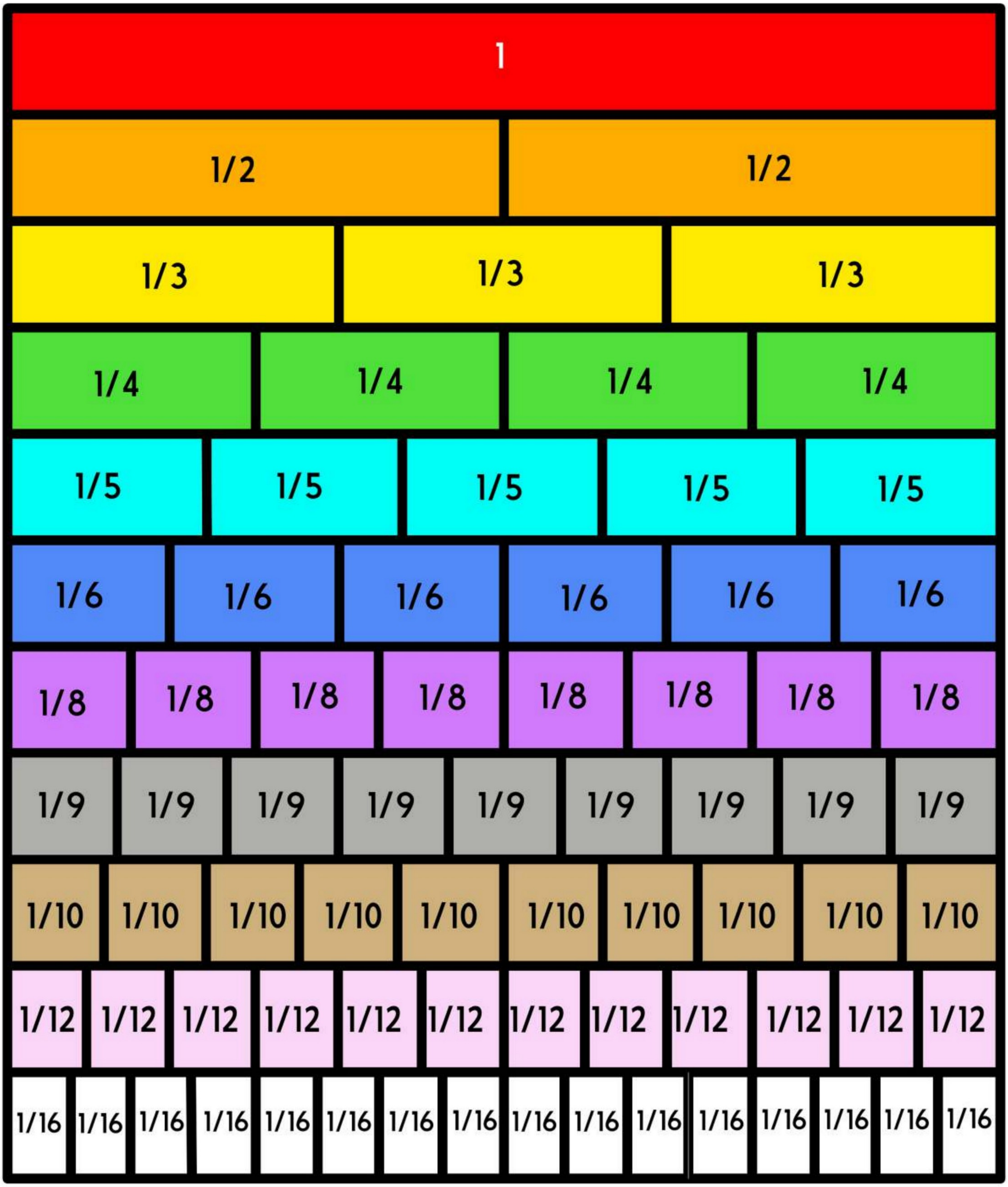


ANEXO II: IMÁGENES ADICIONALES DE LAS TUERCAS, PARA PRACTICAR





ANEXO III: TIRAS DE FRACCIONES (IMPRIMIR Y RECORTAR CADA TIRA. SE RECOMIENDA IMPRIMIR EN CARTULINA O PLASTIFICAR)

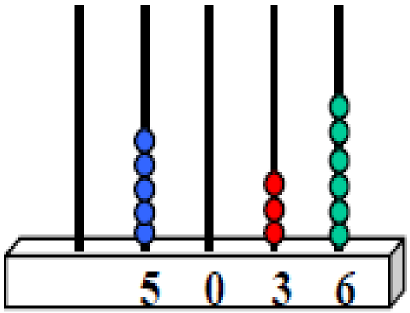


PRÁCTICA 2. OPERACIONES CON NÚMEROS NATURALES USANDO EL MATERIAL MULTIBASE Y EL ÁBACO VERTICAL

1. Presentación

El aprendizaje de las estructuras aditiva y multiplica requiere comprender el significado de las operaciones suma, resta, multiplicación y división y de las diferentes formas en que estas operaciones pueden resolverse. Para aprender de manera comprensiva los procedimientos involucrados en la resolución de operaciones aritméticas es recomendable comenzar con objetos físicos que se puedan manipular.

El ***material multibase,*** diseñado para comprender los sistemas de numeración y apreciar con claridad sus características, da un paso hacia la simbolización de las operaciones dentro de un sistema no posicional.



El ábaco es un instrumento que se usa desde hace siglos para realizar cálculos. Una versión especialmente útil para la escuela es el ***ábaco vertical***, diseñado para comprender el principio de posición del sistema de numeración decimal. Consta de varillas verticales con cuentas sueltas. Una cantidad se representa insertando cuentas en las varillas. Cada cuenta tiene un valor diferente según la varilla en que se encuentre, y para distinguirlas suelen tener colores diferentes. Otra versión escolar del ábaco es el *ábaco de fichas*, que por su facilidad pueden construirlo los niños con sus medios y usarlos para representar cantidades y para hacer cálculos. La cualidad de estos ábacos es que emplean representaciones más abstractas que el material multibase, pero sin llegar a la complejidad del sistema de numeración decimal.

Los ábacos y el material multibase ayudan a comprender el significado de ciertos pasos de los algoritmos, como el "llevarse una", permitiendo justificar los algoritmos de la resta. En esta práctica vamos a utilizar estos materiales para operar y explorar el significado de las operaciones que se manifiesta cuando son estas son resueltas de forma manipulativa.

2. Objetivos

a) Entender los mecanismos de los algoritmos estándares mediante el uso del ábaco vertical y los bloques multibase.

b) Reconocer las interpretaciones de las operaciones aritméticas al operar con el ábaco horizontal y el material multibase.

3. Bibliografía y recursos

3.1. Bibliografía

Rico, L. y Segovia, I. (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria.* Madrid. Pirámide.

Castro, E. y Castro E. (2001) Primeros conceptos numéricos. En Castro, E. (Ed.) *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. (pp. 123-150). Madrid, Síntesis.

Godino, J. D. (2004). Matemáticas para maestros. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. (http://www.ugr.es/local/jgodino/)

3.2. Versiones digitales de los materiales empleados

i) De los bloques de todas las bases desde 2 hasta 16: https://www.geogebra.org/m/dby8grkb

También se puede trabajar con los recortables de la práctica 1.

ii) Del ábaco vertical en base 10. Además de la aplicación para el móvil *Ábaco Vertical Pro*, tenéis una versión web en http://www.ictgames.com/abacusInteger.html

En cualquier caso, debéis traer un ábaco a la sesión de prácticas

4. Actividades

Recuerda que *b* denota la base del material con el que trabajas

4.1. (Valor de posición en el ábaco)

Utiliza el ábaco para representar las siguientes cifras:

a) 1023 b) 567 c) 8701 d) 9002

e) $1111_{b)}$ f) $601_{b)}$ g) $1201_{b)}$ h) $901_{b)}$

4.2. (La suma)

Resuelve las siguientes sumas utilizando el material multibase y el ábaco. Busca diferentes métodos para resolver las operaciones

a) 66+55 b) 142+ 69 c) 38+75

d) $103_{b)} + 43_{b)}$ e) $34_{b)} + 21_{b)}$ f) $144_{b)} + 221_{b)}$

Revisad los métodos empleados, ¿en qué se parecen al algoritmo usual de la suma?

4.3. (La resta)

Resuelve las siguientes restas utilizando el material multibase y el ábaco. Busca diferentes métodos para resolver las operaciones

a) 65-56 b) 232 - 79 c) 138-89

d) $113_{b)} - 44_{b)}$ e) $31_{b)} - 24_{b)}$ f) $221_{b)} - 144_{b)}$

Revisad los métodos empleados, ¿en qué se parecen al algoritmo usual de la resta?

4.4. (Interpretación de las operaciones en la estructura aditiva) Revisa los procedimientos hechos para sumar con cada material. ¿Cómo se ha *interpretado* la operación en cada caso?

4.5. (Multiplicación y su interpretación)

Resuelve las siguientes multiplicaciones utilizando el material multibase y el ábaco. Busca diferentes métodos para resolver las operaciones

a) 34·2 b) 12·5 c) 45·34

Revisad los métodos empleados: ¿Cómo se ha *interpretado* la multiplicación en cada caso? ¿En qué se parecen al algoritmo usual de la multiplicación?

4.6. (División y su interpretación)

Resuelve las siguientes divisiones utilizando el material multibase y el ábaco. Busca diferentes métodos para resolver las operaciones

a) 46 dividido entre 2	b) 56 dividido entre 13	c) 109 dividido entre 26

Revisad los métodos empleados: ¿Cómo se ha *interpretado* la división en cada caso? ¿En qué se parecen al algoritmo usual de la división?

5. Actividades para la evaluación

5.1. (Ábaco en base 10)

a) 36+65	b) 144-78	c) 1003 - 94
d) 17 · 4	e) 3·19	f) 3001 dividido por 478

5.2. (Bloques de base 10)

a) 47+55	b) 324-178	c) 2001 - 194
d) 39 · 3	e) 6·27	f) 1103 dividido por 298

5.3. (Ábaco en bases menores que 10)

a) $123_{6)} + 44_{6)}$	b) $1001_{2)} + 1011_{2)}$	c) $223_{7)} - 44_{7)}$
d) $1002_{3)} - 221_{3)}$	e) $6_{8)} \cdot 10_{8)}$	f) $211_{4)}$ dividido entre $33_{4)}$

5.4. (Ábaco en bases mayores que 10)

a) $99_{13)} + 1C_{13)}$	b) $A9_{12)} + 1B_{12)}$	c) $10B_{11)} - 44_{11)}$
d) $1002_{12)} - 221_{12)}$	e) $3_{14)} \cdot 100_{14)}$	f) $143_{11)}$ dividido entre $AA_{11)}$

5.5. (Bloques de base 5, ver bonus)

a) $123_{5)} + 44_{5)}$	b) $234_{5)} + 133_{5)}$	c) $123_{5)} - 34_{5)}$
d) $401_{5)} - 242_{5)}$	e) $23_{5)} \cdot 4_{5)}$	f) $43_{5)}$ dividido entre $10_{5)}$

5.6. (Bloques de base 12, ver bonus)

a) $18_{12)} + B4_{12)}$	b) $AA_{12)} + BB_{12)}$	c) $10B_{12)} - 7A_{12)}$
d) $B02_{12)} - 2A1_{12)}$	e) $22_{12)} \cdot A_{12)}$	f) $1001_{12)}$ dividido entre $BA_{11)}$

Bonus. Se puede practicar inventando operaciones o cambiando las bases. Podéis utilizar los enlaces del apartado 3 (arriba) con este fin.

PRÁCTICA 3. OPERACIONES CON RACIONALES USANDO LAS TIRAS Y LAS TRANSPARENCIAS DE FRACCIONES

1. Presentación

El aprendizaje del número racional en Educación Primaria tiene que ser preferentemente práctico, basado en su utilización en situaciones concretas. Con los materiales representamos fracciones y las manipulamos para resolver problemas de particiones y operaciones, obteniendo una representación del resultado. En esta práctica se trabaja con tres materiales diferentes basados en modelos de medida y de área, los cuales se describen brevemente a continuación.

Las ***transparencias de fracciones*** son dos hojas con el mismo dibujo, una en papel y la otra en transparencia. En ellas hay dibujados varios cuadrados divididos en partes iguales que representan fracciones del cuadrado. *Es una versión manipulativa* del modelo de área para resolver operaciones con fracciones.

El *muro de fracciones* está formado por un rectángulo dividido en franjas de igual amplitud, cada una de ellas dividida a su vez en partes iguales que corresponden a fracciones de la unidad. Si en este diagrama se admite que cada franja sea una pieza separable, se obtienen las ***tiras de fracciones.***

Estos recursos se van emplear para representar y ordenar números racionales, así como para operar y resolver problemas presentados en contexto real.

2. Objetivos

a) Conocer materiales y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales.

b) Interpretar y estudiar el significado de los números racionales, los elementos de las fracciones y sus operaciones a partir de modelos basados en dichos materiales y recursos.

c) Analizar los conocimientos que se ponen en juego usando estos recursos y valorar sus posibilidades como recurso didáctico para resolver problemas de Educación Primaria.

3. Bibliografía y recursos digitales

3.1. Bibliografía

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2004). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada (http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Rico, L. Y Segovia, I. (Coord.) (2011). *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria.* Madrid. Pirámide.

3.2. Versiones digitales de los materiales empleados

De las transparencias: https://www.geogebra.org/classic/sAgHtpSV

Del muro de fracciones y del diagrama de sectores:

1) Primera alternativa: https://toytheater.com/

2) Segunda alternativa: https://es.mathigon.org/polypad#fractions

Además, este documento incluye versiones para imprimir del muro y recortables de las tiras de fracciones y de los diagramas de sectores.

4. Actividades para practicar

4.1. (Suma con tiras) Resuelve las siguientes operaciones de suma utilizando las tiras de fracciones, explicando cómo lo haces en cada caso:

a) 2/6 + 3/6 b) 1/4 + 5/8

c) 2/5 + 1/2 d) 1/2 + 1/3

4.2. (Resta con tiras) Resuelve las siguientes operaciones de resta utilizando las tiras de fracciones, explicando la relación entre cómo has resuelto estas operaciones y las sumas.

a) 7/10 - 3/10 b) 3/8 - 1/4

c) 4/3 - 1/2 d) 3/4- 1/2

4.3. (Interpretación del uso de las tiras en las operaciones aditivas)

i) ¿Qué interpretaciones de las operaciones (¿sumar como añadir o como juntar?, ¿restar como quitar o separar?) has usado para resolver las actividades anteriores?

ii) En vista de las respuestas dadas en las actividades 4.1 y 4.2, explica con tus palabras por qué aparece el múltiplo de los denominadores en el algoritmo de la suma y de la resta de fracciones.

4.4. (Multiplicación y división con tiras de fracciones) Intenta resolver las siguientes operaciones usando las tiras de fracciones.

a) (2/3) . (4/5) b) (3/5) / (1/2)

Explica tu método o indica por qué no lo puedes hacer.

4.5. (Operaciones con transparencias de fracciones) Resuelve las siguientes operaciones utilizando las transparencias de fracciones

a) 3/6 + 1/4 b) 4/3 - 1/2

c) (2/3) . (4/5) d) (7/4) / (2/3)

4.6. (Interpretación del uso de las transparencias)

i) Indica, en cada caso, la interpretación de las operaciones que has usado para hacer los cálculos con las transparencias.

ii) En vista de las respuestas dadas en la actividad 4.5, explica con tus palabras por qué aparece el múltiplo de los denominadores en el algoritmo de la suma y de la resta de fracciones, y por qué funcionan los algoritmos de la multiplicación y de la división de fracciones.

5. Actividades para la evaluación

5.1. Resuelve razonadamente las siguientes operaciones utilizando las **tiras de fracciones**:

a) 2 /10 + 6 /10

b) 3 / 8 + 1/4

c) 3/8 + 3/4

d) 2/ 3 + 1/2

e) 5/6 - 3/6

f) 4/5 – 1/2

g) 4/5 – 6/10

h) 3/2 - 2/3

5.2. Resuelve razonadamente las siguientes operaciones utilizando las **transparencias de fracciones:**

a) 3/7 + 1/ 4

b) 5/3 + 1/5

c) 5/6 - 4/5

d) 4/3 - 7/5

e) (2/3) ·(4/5)

f) (7/6)·(1/4)

g) (4/3)·(5/2)

h) (3/8) dividida por (1/5)

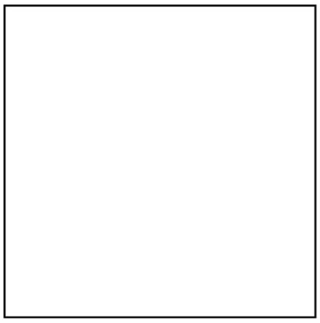
i) (5/7) dividida por (3/8)

j) (3/2) dividida por (5/4)

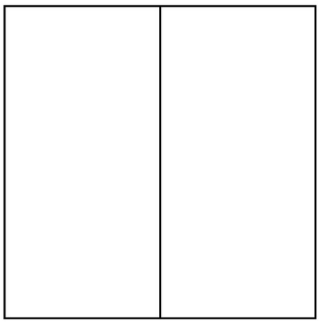
Bonus. Se puede practicar inventando operaciones.

ANEXO I: TRANSPARENCIAS DE FRACCIONES (PARA IMPRIMIR EN PAPEL)

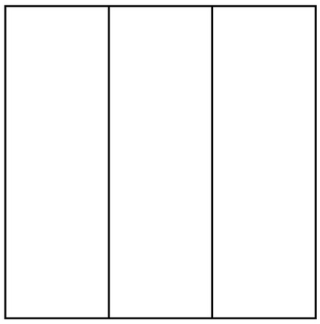
1



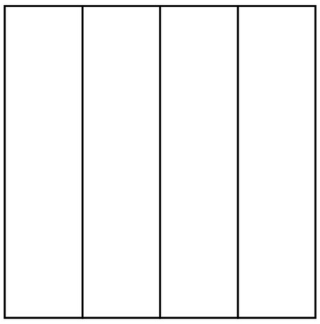
$\frac{1}{2}$



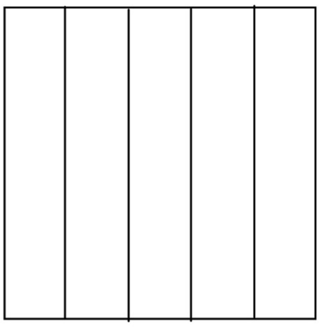
$\frac{1}{3}$



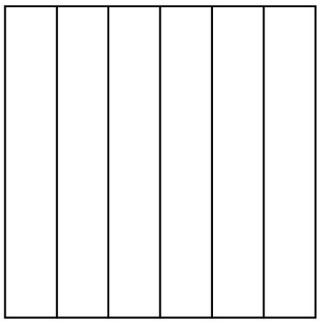
$\frac{1}{4}$



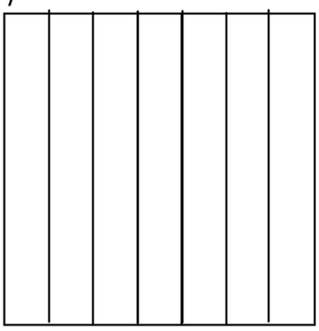
$\frac{1}{5}$



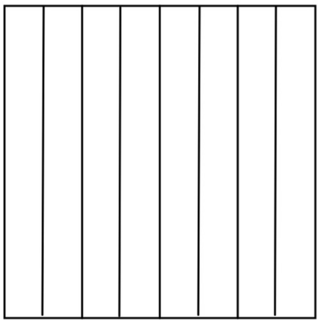
$\frac{1}{6}$



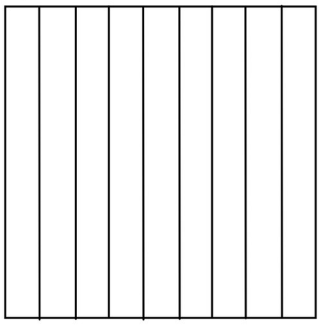
$\frac{1}{7}$



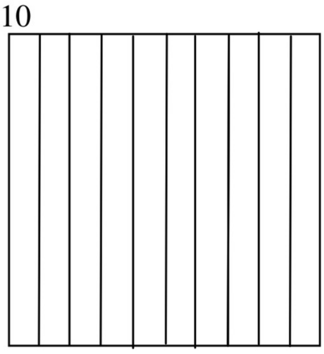
$\frac{1}{8}$



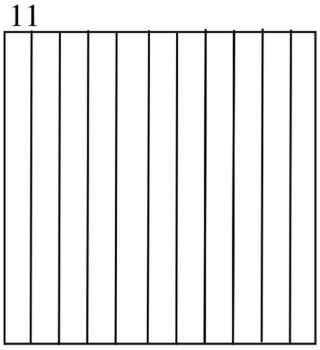
$\frac{1}{9}$



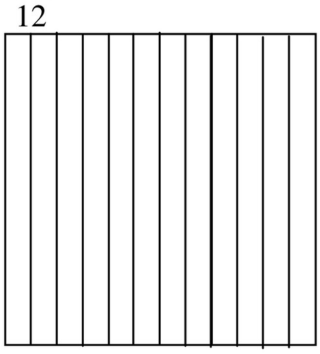
$\frac{1}{10}$



$\frac{1}{11}$



$\frac{1}{12}$

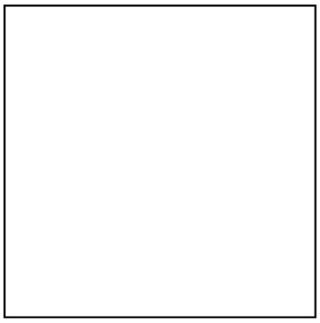


UNIVERSIDAD DE GRANADA

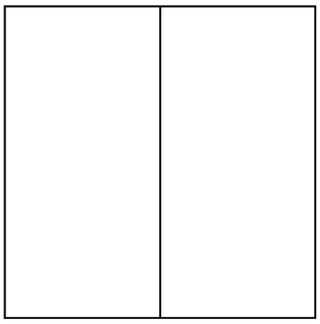
ANEXO I: TRANSPARENCIAS DE FRACCIONES (PLANTILLAS EN BLANCO, TAMBIÉN PARA IMPRIMIR EN PAPEL)

ANEXO I: TRANSPARENCIAS DE FRACCIONES (IMPRIMIR EN ACETATO)

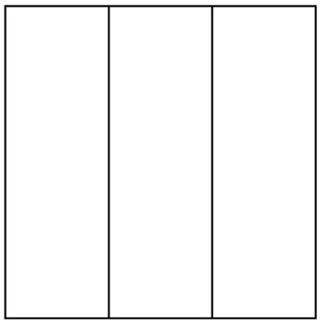
1



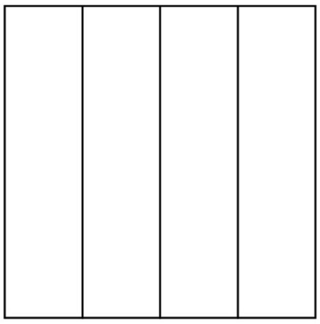
$\frac{1}{2}$



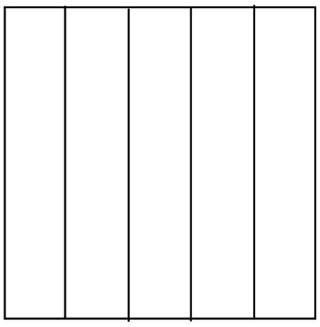
$\frac{1}{3}$



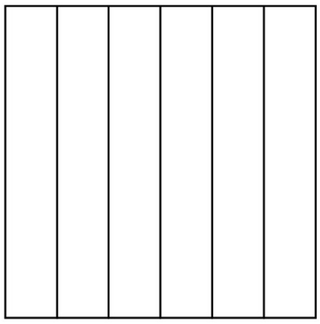
$\frac{1}{4}$



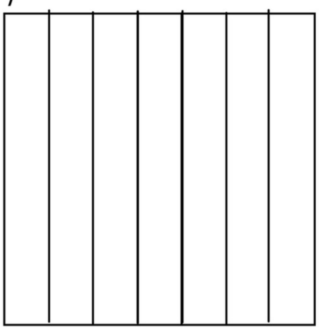
$\frac{1}{5}$



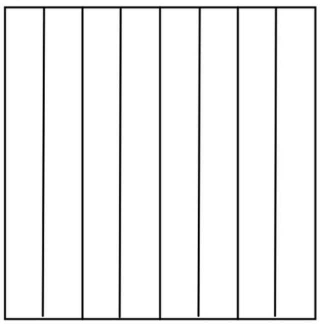
$\frac{1}{6}$



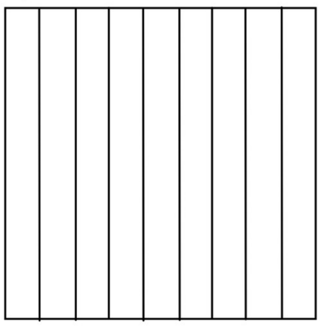
$\frac{1}{7}$



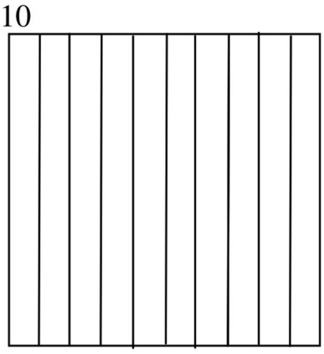
$\frac{1}{8}$



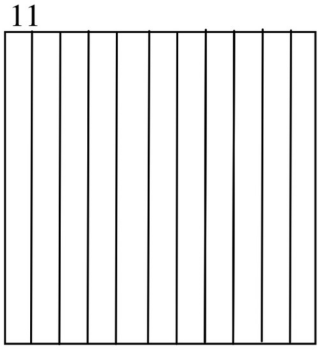
$\frac{1}{9}$



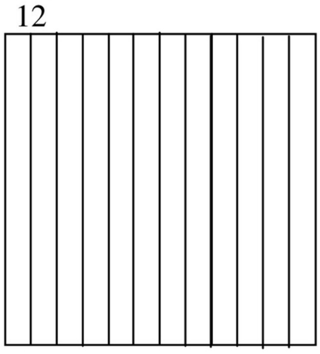
$\frac{1}{10}$



$\frac{1}{11}$

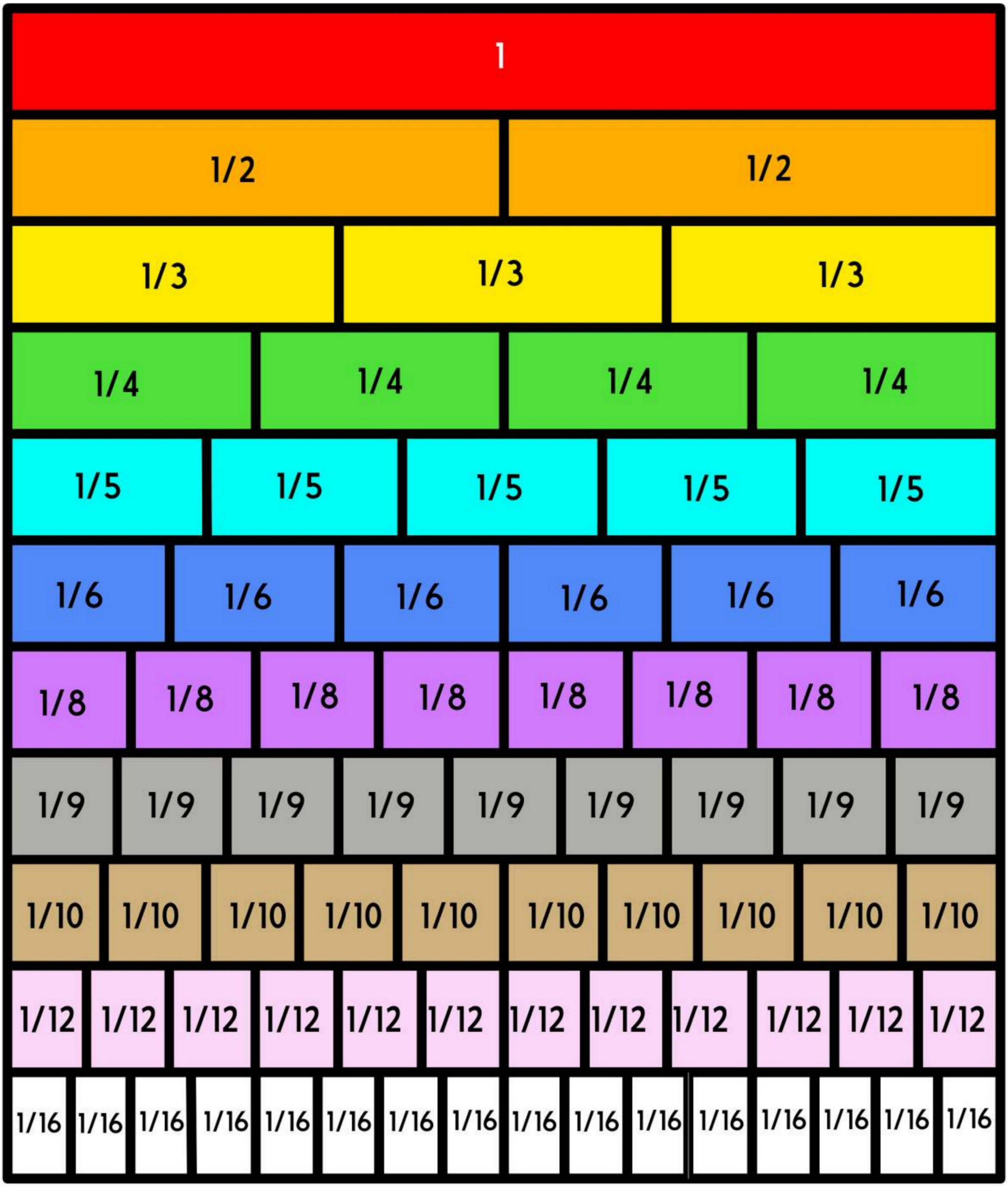


$\frac{1}{12}$



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

ANEXO II: TIRAS DE FRACCIONES (IMPRIMIR Y RECORTAR CADA TIRA)



PRÁCTICA 4. PROBLEMAS ARITMÉTICOS CON MATERIALES

1. Presentación

La resolución de problemas es una competencia matemática fundamental que debe trabajarse desde la educación primaria. Los problemas aritméticos son tareas de valor para iniciar al alumnado a la resolución de problemas tempranas, ya que presentan situaciones reales en las que las operaciones cobran sentido.

Esta práctica busca ilustrar el papel de los materiales manipulativos en la resolución de problemas aritméticos con números naturales y racionales. Por una parte, se profundiza en la utilidad del material multibase, el ábaco, las tiras de fracciones y las transparencias como herramientas de cálculo, haciendo hincapié en las interpretaciones de las operaciones que se ponen en juego al utilizarlos. En segundo lugar, se explora la potencialidad de estos materiales como elemento de representación de situaciones contextualizadas, especialmente en los problemas relacionados con números racionales.

2. Objetivos

a) Identificar las operaciones aritméticas con naturales y racionales y sus interpretaciones en contextos y plantear situaciones que se resuelvan con una operación dada.

b) Utilizar materiales manipulativos para la resolución de problemas realistas: como herramienta de cálculo para resolver las operaciones y como representación de las situaciones realistas que facilite su modelización matemática.

3. Bibliografía y recursos digitales

3.1. Bibliografía

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis.

Godino, J. D. (2004). *Matemáticas para maestros*. Universidad de Granada. http://www.ugr.es/local/jgodino/

Rico, L. Y Segovia, I. (Coord.) (2011). *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria.* Madrid. Pirámide.

3.2. Versiones digitales de los materiales empleados

Recordad los enlaces a las versiones digitales de los materiales empleados hasta ahora:

i) De los bloques de todas las bases desde 2 hasta 16: https://www.geogebra.org/m/dby8grkb

ii) Del ábaco vertical en base 10. Además de la aplicación para el móvil *Ábaco Vertical Pro,* tenéis una versión web en http://www.ictgames.com/abacusInteger.html

iii) De las transparencias: https://www.geogebra.org/classic/sAgHtpSV

iv) De las tiras de fracciones:

1) Primera alternativa: https://toytheater.com/

2) Segunda alternativa: https://es.mathigon.org/polypad#fractions

No olvidéis que también podéis utilizar los recortables de las prácticas anteriores para resolver los problemas que se plantean a continuación.

4. Actividades para practicar

4.1. (Resolución de problemas usando operaciones)

Considera los siguientes enunciados:

a) En Omicron Persei VIII, planeta cuyos habitantes emplean un sistema de numeración en base 5, disponen de una red de comunicación compuesta por $123_{5)}$ satélites. Sin embargo, una tormenta ha destruido varios de ellos, de manera solo han quedado $34_{5)}$ de ellos. Determina la indicación que tendrán que dar a los constructores de nuevos satélites para que construyan las torres que han sido destruidas.

b) *El dueño de una farmacia se queda una tercera parte de los beneficios del pasado año. El resto lo repartió entre el farmacéutico y el ayudante, dando al farmacéutico 4/7 de lo que repartió y al ayudante el resto. ¿Qué parte de los beneficios se quedaron entre el dueño y el farmacéutico?*

c) Para preparar una paella debemos echarle 750 ml de agua. Si tenemos vasos de 1/5 de l, ¿cuántos vasos habrá que echarle?

i) Encuentra la solución a los problemas, identificando las operaciones involucradas y resolviendo esas operaciones con el material que consideres más apropiado.

ii) Identifica la interpretación **con la que aparecen en el enunciado** cada una de las operaciones res.

iii) Identifica la interpretación **con la que has resuelto las operaciones** cuando has usado el material.

4.2. (Planteamiento de problemas que se resuelvan con una operación)

Plantea enunciados de problemas que se resuelvan haciendo cada una de las las operaciones dadas con la interpretación que se indica en cada caso:

i) 1/5 + 2/3, con la interpretación binaria de la suma (*juntar*).

ii) 0.35 · 1.4, con la interpretación binaria de la multiplicación de racionales (*producto de medidas*).

iii) 45 dividido entre 9, con la interpretación unitaria de *dividir como repartir*.

4.3. (Resolución de problemas usando los materiales como representación)

Encuentra la solución a los problemas utilizando los materiales como representación (y no necesariamente para resolver las operaciones).

a) *Tres amigos fueron a un hotel y pagaron 150 € por una habitación (50 cada uno). Tras pagar, el recepcionista se dio cuenta de que la habitación* ***no valía 150 €****, sino 100 €. Para subsanar el error, dio 50 € al botones para que se los devolviera. Este se guardó 20 € y les devolvió 30 € (10 para cada uno).*

Tras esta situación, cada amigo había pagado 40 €, por lo que entre los tres habían pagado 120 . Si se le añaden los 20 que se quedó el botones, serían 140 €. ***¿Qué ha ocurrido con los 10 € que faltan?***

b) En un grupo de alumnos hay 5/8 de niñas. Se deben añadir 12 chicos para igualar los sexos ***¿Cuántos alumnos hay?***

c) *El agua, al congelarse, aumenta 1/10 su volumen y al descongelarse recupera el volumen inicial. Si tengo 121 cm³ de hielo,* ***¿Qué volumen ocupará al descongelarse?***

5. Actividades para la evaluación

5.1. (Resolución de problemas usando operaciones)

Repite los apartados i), ii) y iii) de la actividad 4.1. para los siguientes enunciados:

a) Alba ha ido de viaje por Europa, recorriendo 1/3 del trayecto en tren, después una cuarta parte del trayecto en avión y el resto volvió a hacerlo en tren, ***¿qué parte del viaje hizo en tren?***

b) En Sirio emplean un sistema de numeración en base 5. En una tienda de Sirio se indica que hay $42_{5)}$ cajas de pinturas. En cada caja hay $3_{5)}$ estuches de pinturas. ***¿Cómo expresarían los habitantes de Sirio cuántos estuches hay en total?***

c) Se desean repartir 231 ejemplares de libros en distintas librerías, de tal forma que haya 66 libros en cada una de ellas. ***¿A cuántas librerías se les podrá repartir libros?***

5.2. (Planteamiento de problemas que se resuelvan con una operación)

Plantea enunciados de problemas que se resuelvan haciendo cada una de las las operaciones dadas con la interpretación que se indica en cada caso:

i) 5/6 – 2/7, con la interpretación unitaria de la resta de fracciones (*quitar*).

ii) (3/4)· 5, con la interpretación unitaria de la multiplicación *hacer la fracción de la cantidad*.

iii) 45 dividido entre 9, con la interpretación unitaria de *dividir como restar repetidamente*.

5.3. (Resolución de problemas usando los materiales como representación)

Encuentra la solución a los problemas utilizando los materiales como representación (y no necesariamente para resolver las operaciones).

a) Una botella de desinfectante industrial de un tercio de litro permite limpiar cuatro aulas de las mismas dimensiones, ¿qué fracción de litro de desinfectante necesita cada aula?

b) El precio de un coche aumenta en una quinta parte al añadirle cierto impuesto. Si pagué 24 000 € por el coche (impuesto incluido), ***¿cuál era su precio sin el impuesto?***

c) *Al cocer la masa de un bizcocho ha pasado a ocupar 7/6 del volumen original. Al añadirle relleno observo que el volumen es ahora 3/4 del bizcocho que salió del horno. ¿Qué porción del volumen original ocupa el bizcocho que queda al final?*

d) Andrés va a un colegio que está a 480 m de su casa. En el camino se para a recoger a sus amigos Beatriz y Carlos: primero recoge a Beatriz y después recorren 52 m y recogen a Carlos. El camino que les queda hasta el colegio desde ese punto supera en 20 m al triple de la distancia ya recorrida. ¿Cuál es la distancia entre la casa de Beatriz y el colegio?

Universidad de Granada