

ALCANCES DE UN TALLER SOBRE MTSK EN LA REFLEXIÓN DOCENTE DE UN GRUPO DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

José Romilio Loría-Fernández, Jonathan Espinoza-González y Miguel Picado-Alfaro

El estudio muestra el alcance de un taller para fomentar la competencia de reflexión docente desde las nociones teóricas del modelo MTSK. Considera las manifestaciones de un grupo de docentes de matemáticas en servicio cuando analizan una situación de enseñanza-aprendizaje sobre el concepto matemático de relación desde su experiencia en la Educación Secundaria costarricense, tanto previas a la intervención, como posteriores al proceso de capacitación. Los resultados muestran un progreso en el desarrollo de esta competencia. No obstante, se evidenciaron dificultades para identificar aspectos relevantes de la situación analizada, como proposiciones que definen un concepto, formas de proceder en la matemática y elementos de una tarea matemática escolar.

Términos clave: Entorno de aprendizaje; Formación de profesores de matemáticas; MTSK; Relación; Reflexión docente

Scope of a Workshop on MTSK in the Teaching Reflection of a Group of Mathematics Teachers

This study shows the scope of a workshop that promotes the competence Noticing from the theoretical notions of the model MTSK. It takes into consideration what a group of mathematics teachers in service expresses when they analyze a teaching-learning scenario on the mathematical concept of relation from their teaching experience in Costa Rican secondary education, prior to the workshop, and after the training process. The results show progress in the development of this competence. However, some of the participants show difficulties to identify relevant aspects of the analyzed situation such as propositions that define a concept, ways of proceeding in mathematics, and elements of a school mathematical task.

Loría-Fernández, J. R., Espinoza-González, J. y Picado-Alfaro, M. (2023). Alcances de un taller sobre MTSK en la reflexión docente de un grupo de profesores de matemáticas. *PNA*, 17(3), 265-293. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i3.24141>

Keywords: Learning environment; Mathematics teacher's training; MTSK; Noticing; Relation

Escopo de um treinamento sobre MTSK na reflexão docente de um grupo de professores de matemática

Este estudo apresenta o escopo de um treinamento que promove a competência reflexão docente a partir das noções teóricas do modelo MTSK. Leva em consideração o que expressa um grupo de professores de matemática em serviço ao analisar uma situação de ensino-aprendizagem sobre o conceito matemático de relação a partir de sua experiência docente no ensino médio costarricense, antes do treinamento e depois do processo de capacitação. Os resultados mostram avanços no desenvolvimento dessa competência. No entanto, alguns dos participantes mostraram dificuldades em identificar aspectos relevantes da situação analisada, como proposições que definem um conceito, formas de proceder em matemática e elementos de uma tarefa matemática escolar.

Palavras-chave: Ambiente de aprendizagem; MTSK; Reflexão docente; Relação; Treinamento de professores de matemática

En la última década, los programas de formación inicial de docentes de matemáticas en Costa Rica procuraron una formación basada en el conocimiento matemático y la pedagogía. Recientemente, en las universidades públicas han surgido iniciativas que organizan esta formación desde la especificidad de la didáctica de las matemáticas para su enseñanza y su aprendizaje en educación primaria y en educación secundaria, en las cuales se acentúa la inclusión de una serie de asignaturas sobre didácticas específicas (Instituto Tecnológico de Costa Rica [TEC], 2017; Universidad de Costa Rica [UCR], 2017; Universidad Estatal a Distancia [UNED], 2020; Universidad Nacional [UNA], 2017).

Las acciones que actualmente son llevadas a cabo, para una formación más cercana a los fenómenos que surgen de las situaciones de enseñanza y aprendizaje en educación secundaria, incidirán en una población de profesionales de la educación matemática que iniciará su desempeño laboral en los próximos años. Este nuevo grupo de docentes de matemáticas ha experimentado una formación que acentúa la reflexión didáctica de la práctica educativa, con miras a identificar aspectos del conocimiento profesional que deben atenderse, tratarse y mejorarse, tanto a nivel personal como colectivo. Sin embargo, ¿qué sucede con la población de profesores y profesoras de matemáticas que no han sido formados desde la reflexión y los planteamientos teóricos asociados al conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas? Una respuesta a este cuestionamiento es que se requiere de procesos de capacitación que familiaricen a estas personas docentes con estas temáticas, y que a partir de estas experiencias logren apropiarse de los

principios y fundamentos teóricos para reflexionar sobre su desempeño profesional, desde la especificidad de la didáctica de las matemáticas.

En este sentido, el desarrollo de la competencia de reflexión docente en el profesorado de matemáticas es importante porque la información que se genera al interpretar una situación de enseñanza y aprendizaje permite tomar decisiones objetivas respecto al aprendizaje del estudiantado. Por otra parte, esta competencia docente brinda destrezas al profesorado que le permiten aprender desde la práctica durante su desempeño profesional. Además, diversas investigaciones destacan el hecho de que esta competencia no es innata en el profesorado en formación y, aunque se considera que puede surgir a partir de la experiencia profesional, se aconseja el uso de entornos de aprendizaje que promuevan su crecimiento (Llinares, 2013; Llinares, 2016; Llinares y Fernández, 2021).

Además, el modelo del *conocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK, por sus siglas en inglés) proporciona una categorización y descripción de los conocimientos que se esperan de una persona docente de matemáticas, destacando un dominio sobre el contenido matemático y otro vinculado con la didáctica (Aguilar et al., 2013). Siguiendo a Galleguillos et al. (2015) este conocimiento es “ideal” para que una persona docente gestione el proceso de enseñanza, de manera que se fomente en el estudiantado la comprensión de las matemáticas desde una visión funcional. Como resalta Llinares (2019), “la capacidad del profesor de pensar sobre su enseñanza a lo largo del tiempo genera la posibilidad de incrementar su conocimiento sobre cómo los estudiantes aprenden” (p. 34).

Asimismo, Llinares (2016) recalca que cuando la persona docente conoce y hace uso de su conocimiento es posible que modifique las maneras en que se muestran las matemáticas y las formas de atender los requerimientos del estudiantado. De esta manera, analizar el desempeño de otros docentes durante la práctica educativa contribuye a poner en evidencia aspectos relacionados con el conocimiento especializado propio para enseñar matemáticas.

Este artículo pone de relieve los alcances de una capacitación sobre los principios y fundamentos del MTSK en el desarrollo de la competencia profesional de reflexión docente de un grupo de profesores y profesoras de matemáticas en servicio. La actividad incluyó el análisis de una situación de enseñanza sobre el concepto matemático de relación, presentada en la grabación de un segmento de clase que muestra a un profesor de matemáticas introduciendo este concepto a través de una tarea. La elección del concepto responde a las debilidades que desde el 2013 han sido identificadas en la enseñanza de las matemáticas (Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible, 2013) y en su aprendizaje, particularmente de las funciones y los conceptos básicos que las componen, entre estos el de relación (Ministerio de Educación Pública, 2012).

El objetivo del estudio ha sido caracterizar, mediante un conjunto de indicadores, los cambios mostrados por docentes de matemáticas en servicio cuando reconocen y justifican aspectos matemáticos y didácticos vinculados al

desempeño de un profesor que enseña un concepto matemático particular, de manera que se determine el progreso en el desarrollo de la reflexión docente, en este grupo de personas, como resultado de la capacitación sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

MARCO TEÓRICO

Los referentes teóricos en los que se fundamenta el estudio son la competencia profesional de la reflexión docente y el modelo de conocimiento MTSK.

La competencia de la reflexión docente

Una manera de conceptualizar esta competencia docente es la capacidad del profesorado de matemáticas de destacar aspectos relevantes para el aprendizaje en una situación de enseñanza, que otros profesionales no serían capaces de identificar (Llinares y Fernández, 2021). Debido a esto es que, por una parte, se considera como una competencia docente ligada a la práctica profesional del profesor de matemáticas y, por otra, se vincula con la forma de comprender cómo el profesorado usa el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas cuando realiza tareas profesionales (Llinares, 2013). En el contexto de esta investigación, identificar lo que es relevante implica prestar especial atención a lo que el profesor observado expresa y hace en los procesos de enseñanza y aprendizaje que realiza.

En general, esta competencia docente implica el desarrollo de tres destrezas en el profesorado: (1) identificar lo que se considera importante en una clase de matemáticas, (2) interpretar y dar sentido a lo específico de las interacciones en el aula a partir de referentes teóricos provenientes de la didáctica de las matemáticas y (3) tomar decisiones justificadas y argumentadas sobre cómo actuar respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Sherin et al., 2011).

Un aspecto que caracteriza el desarrollo de la competencia de la reflexión docente es el vínculo entre el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas del profesorado y el discurso que se origina al realizar tareas profesionales. En este sentido, las tareas profesionales se consideran contextos a partir de los cuales puede desarrollarse esta competencia profesional. Cabe resaltar que el desarrollo de esta competencia se percibe como la evolución de un discurso fundamentalmente descriptivo basado en emociones, generalidades y juicios personales por parte del profesorado, a uno organizado alrededor de ideas teóricas con vínculos claros a las evidencias generadas en los registros de la práctica (Llinares y Fernández, 2021).

Los entornos de aprendizaje que promueven esta competencia docente se caracterizan por el uso de registros de la práctica. Estos registros, también denominados artefactos o representaciones de la práctica de aula, funcionan como modelos que permiten mostrar la complejidad de las situaciones inmersas en una clase de matemáticas; además, proporcionan contextos reales e idóneos para el desarrollo de esta competencia docente. En esta investigación el registro de la

práctica empleado es un segmento de video que muestra a un profesor de educación secundaria cuando enseña el concepto matemático de relación a partir de una tarea en un contexto auténtico. Otro elemento inmerso en estos entornos de aprendizaje es el uso de referentes teóricos asociados a la didáctica de las matemáticas para interpretar los registros de la práctica educativa. Desde este posicionamiento, en este estudio se empleó el modelo de conocimiento del profesorado de matemáticas denominado MTSK.

Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El modelo MTSK (Carrillo et al., 2014; Carrillo et al., 2018) es una propuesta teórica que organiza el conocimiento profesional del profesorado de matemáticas a partir del sistema de categorías y subcategorías que lo componen. Además, se considera como una herramienta metodológica que posibilita el análisis de prácticas docentes. Este modelo se refiere a la especialización del conocimiento del profesorado como aquel conocimiento que sólo tiene sentido para él y que cobra significado al desarrollar la labor docente. El MTSK se compone por dos dominios: el conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés). Cada uno de los dominios está compuesto, a su vez, por tres subdominios con categorías internas que, en conjunto, conforman su estructura, transversalizado por un subdominio sobre creencias y concepciones hacia las matemáticas.

En lo que sigue se definen brevemente cada uno de los dominios, así como los subdominios y categorías respectivas, que componen el MTSK, excepto el subdominio sobre las creencias y concepciones sobre las matemáticas, el cual no fue considerado en este estudio. Las ideas que se exponen al respecto se fundamentan en las propuestas de Flores-Medrano et al. (2014) y Carrillo et al. (2018) sobre este modelo de conocimiento.

Conocimiento matemático, subdominios y categorías

El MK se refiere al conocimiento por parte del profesorado del contenido matemático escolar desde el punto de vista de las matemáticas como disciplina científica. Para este dominio se definen tres subdominios: el conocimiento de los temas (KoT, por sus siglas en inglés), el conocimiento de la estructura de la matemática (KSM, por sus siglas en inglés) y el conocimiento de la práctica matemática (KPM, por sus siglas en inglés).

El KoT es el conocimiento del contenido matemático escolar y sus significados de manera fundamentada. Este subdominio considera cinco subcategorías que lo caracterizan: la fenomenología, que considera los diversos usos y aplicaciones del contenido matemático; las propiedades y sus fundamentos, vinculados a los atributos o cualidades de los conceptos; los registros de representación, mediante los cuales se pueden hacer visibles los contenidos matemáticos; las definiciones, consideradas como aquellas peculiaridades que concretan con claridad y precisión el significado de un objeto matemático; y los

procedimientos, entendidos como algoritmos tradicionales o alternativos que pueden utilizarse para resolver tareas vinculadas al contenido matemático.

El KSM enfoca los vínculos que es posible establecer entre temas de las matemáticas de un mismo nivel o de niveles educativos distintos. En este subdominio se establecen cuatro categorías: las conexiones de complejización, que describen las maneras en las que se relacionan los temas con otros posteriores; las conexiones de simplificación, que enfocan los nexos entre los temas con otros previos; las conexiones transversales, entendidas como la relación entre contenidos matemáticos a partir de sus atributos comunes; y las conexiones auxiliares, que destacan la utilidad de los conceptos para el desarrollo de otros.

Por último, el KPM es el conocimiento sobre razonamientos que explican las formas de actuar en las matemáticas. Está compuesto por dos categorías: las prácticas ligadas a las matemáticas en general, que corresponden a las formas de proceder independientemente del contenido matemático; y las prácticas ligadas a una temática en matemáticas, que se vinculan con los razonamientos que se utilizan al manipular un concepto matemático específico.

Conocimiento didáctico del contenido, subdominios y categorías

Por otra parte, el dominio del PCK considera los contenidos matemáticos como objetos que pueden ser enseñados y aprendidos a partir de estándares curriculares específicos. Este dominio se caracteriza a partir de tres subdominios: conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT, por sus siglas en inglés), conocimiento de las características del aprendizaje (KFLM, por sus siglas en inglés) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS, por sus siglas en inglés).

Respecto al KMT, este es el conocimiento de estrategias y tareas para la enseñanza, así como de recursos y materiales que pueden utilizarse para presentar al estudiantado un contenido matemático escolar. Se compone de tres categorías: teorías personales o institucionalizadas de enseñanza específicas para contenidos matemáticos; recursos físicos y virtuales vinculados a un contenido matemático, considerando los beneficios y dificultades provenientes de su uso; y actividades, tareas, ejemplos y ayudas que se proponen durante la enseñanza.

El KFLM describe las particularidades del aprendizaje que surgen de las interacciones del contenido matemático con el estudiantado. Lo caracterizan cuatro categorías: formas de aprendizaje, relacionadas tanto con las matemáticas en general como con la naturaleza de un contenido matemático en particular; fortalezas y limitaciones de aprendizaje, entendidas como errores y dificultades de un contenido específico o de las matemáticas en general; formas de interacción del estudiantado con el contenido matemático, a partir de los procedimientos y estrategias típicas o no que utiliza el estudiantado; y concepciones del estudiantado sobre las matemáticas, desde sus expectativas e intereses hacia las matemáticas.

Finalmente, el KMLS destaca el conocimiento de la delimitación temática y la organización conceptual en un nivel escolar específico. Está compuesto por tres

categorías: contenidos matemáticos que se requieren enseñar en un grado escolar específico; nivel del desarrollo conceptual y procedimental esperado, que delimita el grado de profundidad con el que se presenta un contenido matemático en un nivel escolar en particular; y secuenciación de diversos temas, que puntualiza los saberes que el estudiantado aprenderá en el nivel escolar que cursa, así como la consideración de los contenidos del nivel escolar previo y posterior.

METODOLOGÍA

El problema de investigación planteado se aborda desde la investigación cualitativa, particularmente corresponde a un estudio descriptivo basado en los estudios de caso. Primero, siguiendo los planteamientos de Ricoy-Lorenzo (2006), el carácter cualitativo del estudio conduce a explorar, describir y comprender un fenómeno particular, asociado, en este caso, a la forma en que reflexiona un grupo de docentes de matemáticas en servicio y a las manifestaciones de su conocimiento cuando observan una situación de enseñanza desde los planteamientos teóricos del MTSK.

Segundo, al abordar un problema práctico, se opta por una descripción profunda de los cambios mostrados por las personas docentes en el reconocimiento y justificación de aspectos matemáticos y didácticos, relacionados con la práctica de un profesor que enseña el concepto de relación mediante una tarea en una situación auténtica; esto es, una situación que pueda simularse, mediante las matemáticas, de forma razonablemente realista (Loría, 2021; Maaß, 2006; Moreno y Ramírez, 2016). Aquí cabe resaltar que no se pretende la generalización de resultados, sino la explicación de las conductas de determinados sujetos de estudio, en concordancia con el objetivo de investigación establecido.

Por último, con los estudios de caso se busca analizar la complejidad de un caso específico, particularmente inmerso en una realidad educativa, para la comprensión de las diversas circunstancias que lo rodean. Según las características del fenómeno considerado y los planteamientos de Buendía et al. (1998), la investigación corresponde a un estudio instrumental de casos, que busca aportar evidencias sobre la competencia profesional de reflexión docente desde los principios del modelo MTSK.

Descripción de participantes

El estudio contó con la participación de siete personas docentes de matemáticas en servicio. Su selección se justificó a partir de criterios, adaptados de la propuesta de Rojas et al. (2012), que permiten caracterizarlos como profesoras y profesores de matemáticas expertos, a partir de su formación y experiencia. Los criterios incluyeron: interés y disponibilidad para participar en la investigación, trabajar en una institución de educación secundaria, contar con un nombramiento en plaza fija o con un contrato anual, tener experiencia profesional de al menos cinco años y haber enseñado funciones como un contenido temático.

Cabe destacar que para este estudio se consideró el aporte de cinco de las siete personas docentes participantes, quienes completaron todas las fases del proceso de reflexión. Para organizar y analizar la información recolectada, así como para mantener el anonimato de las personas docentes participantes, se les ha identificado como D1, D2, D3, D4 y D5.

Recolección de la información

El proceso de recolección de información se estructuró en tres momentos. El primero consistió en que los participantes visionaran un video (un segmento de clase) en el que un profesor de educación secundaria (en adelante, profesor observado) aborda el concepto de relación mediante una tarea matemática escolar, y elaboraran una narrativa que registrara los elementos o aspectos matemáticos y didácticos que consideraran relevantes del desempeño del profesor observado. La tarea matemática mostrada se recoge en la Figura 1.

En Costa Rica, la entidad que regula los servicios públicos, como el de la tarifa de taxis, se llama ARESEP. La tarifa del primer kilómetro de un recorrido de taxi es de 605 colones y por cada kilómetro adicional se debe pagar 600 colones. Determine:

- (a) El costo de viajar en taxi [una distancia de] dos kilómetros, tres kilómetros y cuatro kilómetros.
- (b) Elabore una fórmula que permita calcular el costo de un viaje en taxi de acuerdo al número de kilómetros recorridos.
- (c) ¿Cuál es el costo de viajar 4,6 kilómetros?
- (d) Si una persona dispone de ocho mil colones, ¿cuántos kilómetros, aproximadamente, puede recorrer en el taxi?

Figura 1. *Tarea matemática utilizada*

La reflexión de este grupo de docentes, registrada en una guía narrativa, tuvo como único fundamento la experiencia docente del profesorado participante. En el segundo momento las personas participantes recibieron una capacitación sobre el modelo de conocimiento del profesorado MTSK. El tercer momento incluyó completar una segunda guía narrativa a partir del visionado, por segunda vez, del video inicial. Cabe destacar que, a partir de una consulta a expertos, se determinó que la situación de enseñanza mostrada en el video favorecía el reconocimiento de aspectos de todos los dominios del MTSK considerados para el estudio.

Narrativas

Para el registro de las reflexiones de los participantes se elaboraron guías narrativas. Estas se entienden como documentos donde las personas describen lo que se considera importante de una situación observada, estableciendo una relación secuencial entre el recuerdo de lo observado y la reflexión de un tema específico (Ivars et al., 2016).

La guía narrativa 1 consistía en un documento con indicaciones puntuales para el registro de los aspectos que, según la experiencia del profesorado participante

en el estudio, eran relevantes del desempeño del profesor observado en el video. Este instrumento para la reflexión carecía de indicaciones asociadas a las nociones o ideas vinculadas al MTSK.

La guía narrativa 2 se aplicó una vez que las personas participantes completaron la capacitación. Esta última incluía una descripción de los dominios y subdominios planteados en el modelo MTSK que fueron objeto de estudio. De esta forma, se pretendía que las personas docentes reconocieran en el desempeño del profesor observado —y se refirieran de manera específica a ello— los elementos que caracterizan a estos dominios y subdominios de conocimiento, a partir de lo que observaron en el video.

En consecuencia, con la información registrada en las narrativas fue posible determinar diferencias entre la forma en que este profesorado reflexiona al mirar la situación de enseñanza, contrastando el estado inicial y el estado final de sus interpretaciones.

Capacitación

La capacitación se llevó a cabo durante los meses de septiembre y octubre de 2020, a través de la plataforma virtual de Educación Permanente de la Universidad Nacional. La razón de utilizar esta herramienta tecnológica fue el impedimento para realizar encuentros presenciales a causa de la emergencia sanitaria internacional provocada por el COVID-19. El contenido y las actividades del recurso virtual se organizaron en cinco secciones, las cuales debían ser consultadas de manera asincrónica y secuencial. Su elaboración estuvo a cargo de los investigadores quienes, además, fungieron como capacitadores durante el proceso de formación.

Cada participante ingresó a la plataforma, según su disponibilidad, en los plazos establecidos; además, por ejemplo, para ingresar a la sección 3 se debía completar el trabajo de las secciones anteriores. Cabe mencionar que las personas participantes realizaron las actividades de la capacitación de manera individual.

A pesar de que la capacitación se realizó de manera asincrónica, el profesorado participante contó con un acompañamiento constante de los investigadores para el abordaje de dudas o cuestiones del proceso de comprensión del modelo MTSK, mediante el uso de foros de discusión habilitados en la plataforma, el envío de correos electrónicos y de mensajería telefónica instantánea.

Análisis de la información

Una vez recolectada la información, a través de las narrativas, se procedió a su organización y análisis. Para organizarla se elaboraron tablas que permitieron mostrar una relación vertical (momentos de reflexión) y horizontal (categorías de análisis) de los datos. El análisis consideró un sistema de categorías, basado en el modelo MTSK (Carrillo et al., 2014), como referente para reconocer el desarrollo de la competencia profesional de reflexión docente. Estas categorías se detallan en el apartado siguiente, junto al proceso de análisis de la información y es preciso

indicar que fueron implementadas para el análisis de la información recolectada en los dos momentos de reflexión.

RESULTADOS

El tratamiento y análisis de la información han dejado en evidencia una serie de modificaciones en las manifestaciones de la reflexión del profesorado participante cuando analizan el desempeño del profesor observado en dos momentos específicos: el primero basado en su experiencia profesional, que se identifica como R1, y que ha sido meramente descriptivo basado en su experiencia profesional; y el segundo momento posterior al proceso de capacitación sobre el referente teórico, identificado como R2, en el que se ha apreciado un discurso más organizado desde los planteamientos teóricos del referente estudiado.

Siguiendo el propósito del estudio, se acentúan los hallazgos del segundo momento como base para el establecimiento de indicadores sobre el progreso de la competencia de reflexión docente. Se aclara que el foco de la tarea matemática escolar era el concepto de relación, pero durante el proceso de reflexión algunas personas hicieron referencia al concepto matemático de función.

Reflexión docente desde la experiencia profesional

La reflexión realizada por el grupo de docentes en el primer momento, previo a la capacitación, ha dejado ver una serie de especificidades sobre la interpretación y el discurso de este profesorado. Un detalle más amplio de este análisis se muestra en Picado-Alfaro et al. (2022) y en las tablas comparativas expuestas en este artículo. Cabe destacar que, como resultado del análisis para esta primera fase de reflexión, se reconocieron cuatro aspectos que la caracterizan: óptica didáctica, experiencia profesional, disposiciones curriculares y formación profesional.

Reflexión docente desde el fundamento teórico

La información obtenida en R2 (el segundo momento de reflexión, posterior a la capacitación) ha sido tratada desde las particularidades de los dominios y subdominios del MTSK. De esta manera, los hallazgos del estudio se muestran en apartados de manera que los tres primeros se refieren al conocimiento del contenido matemático y los restantes al conocimiento didáctico del contenido. Para algunos de los resultados, se presentan fragmentos de las narrativas de las personas docentes participantes, cuando destacan algunos aspectos del desempeño del profesor observado.

Para mostrar el desarrollo de la competencia de reflexión docente, a partir de la capacitación teórica que ha servido de fundamento en R2, se presentan seis tablas comparativas que puntualizan aspectos matemáticos y didácticos manifestados por las personas docentes participantes, según los subdominios del MTSK y los dos momentos de reflexión. Con especificidad, la primera columna expone los aspectos de las categorías de análisis, la segunda y tercera columnas

presentan los participantes que destacaron esos aspectos en sus reflexiones, de acuerdo con cada momento de reflexión.

Reflexión sobre el conocimiento del tema

Respecto a las circunstancias asociadas a la tarea propuesta, se destaca que todas las personas participantes se refieren a la situación en que se enmarca la tarea matemática. Sin embargo, dos de ellos apuntan al uso de esta situación por su cercanía al estudiantado: para D2 “el ejercicio que plantea [el profesor observado] es cotidiano para el estudiante” y D4 indica que “con esto [la tarea matemática propuesta] trata de aproximar el sentido de utilidad que los estudiantes le pueden dar a dichos cálculos cotidianos”. Además, las personas participantes, excepto D5, indican que la actividad matemática vinculada a la tarea es el cálculo del costo del viaje.

Para el conocimiento sobre propiedades, D2, D4 y D5 reconocen atributos o cualidades de los conceptos y procedimientos inmersos en la tarea. Específicamente, D2 y D4 acentúan los conceptos de imagen y preimagen y relacionan su cálculo con el valor numérico de una expresión algebraica y con la resolución de una ecuación, respectivamente. Por su parte, D5 utiliza el concepto de relación, entre las variables dependientes e independientes, para caracterizar el concepto de función. En las narrativas de D1 y D3 no se identifica información sobre esta categoría.

En relación con las formas en que se pueden hacer presentes los conceptos matemáticos (conocimiento sobre representaciones), las personas participantes, a excepción de D3, identifican el uso de representaciones por parte del profesor observado. A título ilustrativo, D5 enfatiza que “la forma de representación para la función es la algebraica: criterio o ‘fórmula’ de la función”. Específicamente mencionan el uso de la representación algebraica, al definir el criterio que relaciona las variables descritas en la tarea; D4 se refiere también al uso de la representación verbal, esto para lograr una mayor comprensión por parte del estudiantado.

En relación con el conocimiento sobre definiciones, solo D2 y D5 se refieren al abordaje de conceptos matemáticos a partir del conjunto de proposiciones que lo definen de manera precisa y única. Con particularidad, D2 identifica los conceptos de variable dependiente, variable independiente, valor numérico y ecuación; mientras que D5 destaca el concepto de relación acentuando el criterio de asociación y valora que el profesor observado presentó este concepto al estudiantado de manera implícita sin una definición formal. Los participantes D1, D3 y D4 indican que el profesor observado desarrolla conceptos vinculados a las funciones, pero no los detallan con especificidad.

Respecto al uso de algoritmos por parte del profesor observado para resolver la tarea propuesta (conocimiento sobre procedimientos), se destaca que todo el grupo de docentes participantes, excepto D1, identifican un procedimiento tradicional para abordar la tarea. En relación con esta idea, D2 y D4 se refieren a

la resolución de ecuaciones mediante la transposición de sus términos; D3, a la resolución de la tarea por pasos; y D4 y D5 identifican el uso de la sustitución numérica en una expresión algebraica; mientras que D1 alude al uso de procedimientos tradicionales, sin detallarlos. Respecto al uso de procedimientos alternativos, cabe resaltar que D2 identifica el uso de aproximaciones, y D4 el uso del “tanteo” al resolver las ecuaciones, aspecto que la persona participante valora de manera positiva. La tabla 1 muestra el avance en la reflexión para los elementos de esta categoría.

Tabla 1
Conocimiento del tema en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Fenomenología		
Identificación del fenómeno	D2, D3, D5	D1, D2, D3, D4, D5
Contextualización activa	D4	D2, D4
Identificación de formas de aplicar el concepto matemático	Sin evidencia	D1, D2, D3, D4
Propiedades		
Identificación de atributos o cualidades de los conceptos o procedimientos	Sin evidencia	D2, D4, D5
Registros de representación		
Identificación de sistemas de representación	D3 [Vb, T, A]; D4 [Ic]	D1 [T, A]; D2 [A]; D4 [Vb, A]; D5 [A]
Reconocimiento del potencial del tema para promover el uso de representaciones	D5	Sin evidencia
Definiciones		
Referencia a términos matemáticos	D1 [CC, CV]; D2 [F, VD, VI]; D3 [R]; D4 [V, VD, VI]; D5 [C, E, CN]	Sin evidencia
Reconocimiento de proposiciones vinculadas a la definición del concepto	Sin evidencia	D2 [VD, VI, VN, E]; D5 [C]
Procedimientos		
Identificación de procedimientos alternativos	D4 [RIE]; D5 [CM, PE]	D2 [AP]; D4 [AP, PE]

Tabla 1

Conocimiento del tema en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Identificación de procedimientos tradicionales	Sin evidencia	D1 [no específica]; D2 [RDE]; D3 [no específica]; D4 [SN]; D5 [SN]

Nota. V=variable; Vb=verbal; A=algebraico; T=tabular; Ic=icónico; VD=variable dependiente; VN=valor numérico; E=ecuación; P=preimagen, Im=imagen; R=relación; F=función; C=criterio; PE=prueba y error; CN=conjunto numérico; CM=cálculo mental; CC=cantidad constante; CV=cantidad variable; RIE=resolución indirecta de ecuación; AP=uso de aproximación; RDE=resolución directa de ecuación; SN=sustitución numérica.

Como se aprecia, respecto a la categoría sobre fenomenología, hay un avance en las puntualidades mostradas en R2 respecto a R1, que destacan la referencia al fenómeno y la aplicabilidad del concepto. En el caso de la contextualización activa de la tarea, el progreso se considera mínimo. Las formas de aplicar el concepto de relación es un elemento que emerge solo en R2, en el grupo de docentes participantes.

Por otra parte, en R2 destacan las personas participantes que se refieren a aspectos vinculados con la argumentación matemática de los atributos o cualidades de los conceptos o procedimientos inmersos en la tarea, mientras que en R1 no se encontraron evidencias al respecto. En relación con las formas de hacer presente los conceptos matemáticos, las personas participantes identifican principalmente el uso de los sistemas de representación verbal, tabular y algebraica, en los dos momentos de reflexión.

Respecto a las formas que el profesorado utiliza para referirse a conceptos matemáticos, en R1 se mencionan términos matemáticos cuando se describe la situación analizada. En cambio, en R2, se reconocen otros conceptos matemáticos asociados con la noción de relación. En cuanto al uso de algoritmos por parte del profesor observado para resolver la tarea propuesta, en ambos momentos de reflexión se identifica el uso de procedimientos alternativos. Por el contrario, sobre procedimientos tradicionales, las personas participantes se refieren a estos procedimientos solo en R2.

Reflexión sobre la estructura de la matemática

Uno de los componentes para el estudio de la estructura de la matemática son las conexiones de simplificación, que acentúan las relaciones entre conceptos previos que favorecen la enseñanza del concepto de relación. En este caso particular, los vínculos que destaca el grupo de profesores se refieren a dos conceptos: ecuación y valor numérico. El concepto de ecuación contribuye a la enseñanza de tres conceptos matemáticos: valor numérico (D2), expresión algebraica (D4) y preimagen (D1). Por ejemplo, para D1 “hay disposición por el profesor

[observado] para establecer conexiones entre diferentes tópicos, y los mismos estudiantes lo notan, cuando en el cálculo de la preimagen el estudiante manifiesta que consiste en resolver una pequeña ecuación”. Por su parte, el valor numérico es reconocido por D4 como un concepto que potencia la enseñanza de las expresiones algebraicas; este profesor resalta una relación entre variable dependiente y variable independiente (conexión de complejización), que omite señalar el resto de los participantes.

Otras personas han reconocido que el profesor observado establece relaciones entre determinados conceptos a partir de las cualidades o atributos comunes que los definen y caracterizan (conexiones transversales). Estas relaciones se enmarcan en el uso de conceptos del álgebra para la presentación de la noción de relación. Por ejemplo, D4 vincula una representación algebraica con el criterio de asociación de la relación al indicar que “mediante la representación algebraica (binomio de primer grado), [el profesor observado] obtiene la representación de una función”. Además, D1 y D5 enfatizan la ligazón entre dependencia e independencia, desde el vínculo entre variables como representaciones algebraicas para fundamentar el concepto de relación.

Cuatro de cinco participantes se refieren a conceptos que el profesor observado utiliza como instrumentos para el desarrollo del concepto de relación (conexiones auxiliares). Los conceptos identificados son valor numérico y ecuación. Para D1, D2 y D4 el valor numérico se reconoce dentro del cálculo de imágenes. Por su parte, D1, D2, D4 y D5 señalan la ecuación en el cálculo de preimágenes.

La tabla 2 expone las evidencias recogidas durante los dos momentos de reflexión sobre la categoría estructura de la matemática.

Tabla 2

Estructura de la matemática en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Conexiones de complejización		
Reconocimiento de conceptos que se relacionan con otros posteriores	D3 $[V \rightarrow R]$, D4 $[V \rightarrow C]$	D4 $[VI \rightarrow VD]$; D5 $[R \rightarrow F]$
Conexiones de simplificación		
Reconocimiento de conceptos que se relacionan con otros previos	Sin evidencia	D1 $[E \rightarrow R]$; D2 $[E \rightarrow R; VN \rightarrow R]$; D4 $[Ex \rightarrow VN; Ex \rightarrow E]$
Conexiones transversales		
Identificación de conceptos que se relacionan a partir de sus atributos comunes	Sin evidencia	D1 $[VN \leftrightarrow I, E \leftrightarrow P]$; D2 $[E \leftrightarrow VN]$; D4 $[Ex \leftrightarrow F]$; D5 $[VD \leftrightarrow VI]$

Tabla 2

Estructura de la matemática en los momentos de reflexión (continuación)

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Conexiones auxiliares		
El concepto de ecuación o valor numérico como instrumentos para el desarrollo del concepto de relación	D4 [E]; D5 [E]	D2 [VN, E]; D4 [VN, E]; D5 [E]

Nota. V=variable; VI=Variable independiente; VD=Variable dependiente; F=Función; I=Imagen; P=Preimagen; R=relación; E=ecuación; Ex=expresión algebraica; VN=valor numérico; C=criterio. \rightarrow = Potenciar; \leftrightarrow =Vincular.

Notoriamente, hay un aumento en R2 de la cantidad de docentes que hacen estos reconocimientos y en la variedad de conceptos y relaciones señalados. La reflexión sobre las conexiones de simplificación y las conexiones transversales se ve especialmente favorecida.

Reflexión sobre la práctica matemática

En relación con la identificación de estructuras lógicas generales de pensamiento de las matemáticas, el análisis de las narrativas muestra que el profesorado las excluye de su reflexión. Solamente se ha reconocido un aporte en la narrativa de D4, quien señala la matematización de la situación mostrada por el profesor observado, en la tarea expuesta, a través de expresiones algebraicas que la modeliza: “Plasma dicha situación mediante datos representados por símbolos: x (kilómetros recorridos), $C(x)$ costo total. Se integra en una expresión algebraica como proposición para solventar alguna situación problema dada”.

Con respecto al reconocimiento de estructuras lógicas específicas de pensamiento para abordar el concepto de relación, solo D4 puntualiza la aplicación de diversos principios básicos de aritmética y álgebra como la realización de operaciones, el tratamiento de variables, el uso de lenguaje simbólico, la modelización de situaciones concretas y la resolución de ecuaciones. Se subraya que la mayoría de los aportes del profesorado participante están dirigidos fundamentalmente hacia determinados conceptos. Por ejemplo, para D2 “el docente refleja la particularidad matemática en su clase, cuando hace referencia al concepto de variable dependiente e independiente”. Esta afirmación se desvincula del reconocimiento de estructuras lógicas específicas de pensamiento para abordar el tema de relación, ya que solo se refiere al concepto de variable.

La tabla 3 expone la información sobre la práctica matemática evidente en los dos momentos de reflexión.

Tabla 3
Práctica matemática en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Prácticas ligadas a las matemáticas en general		
Generalización a partir de insumos del estudiantado	Sin evidencia	D5
Matematización de la situación a través de expresiones algebraicas que la modelizan	Sin evidencia	D4
Argumentación de proposiciones matemáticas	Sin evidencia	D3
Prácticas ligadas a una temática en matemáticas		
Elaboración de un modelo, criterio o fórmula para asociar variables	D4, D5	Sin evidencia
Estrategias aritméticas y algebraicas	Sin evidencia	D3, D4

En cuanto a las prácticas ligadas a las matemáticas en general, entendidas como aquellos razonamientos con una estructura lógica general que justifican formas de proceder en matemáticas, las manifestaciones del profesorado participante son mínimas en el segundo momento de reflexión, si se acentúa el hecho de que no fueron evidentes en la primera reflexión.

Por su parte, las estructuras lógicas específicas con las que se aborda un tema matemático (prácticas ligadas a una temática en matemáticas) se reconocen desde perspectivas distintas en los dos momentos de reflexión y en un número reducido de docentes.

Reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas

En cuanto a las teorías o propuestas para la enseñanza de las matemáticas dirigidas a la promoción de ambientes óptimos de aprendizaje (metodologías de enseñanza), las personas docentes participantes resaltan la resolución de problemas y la contextualización activa de tareas. En las narrativas de D2 y D5 se identifica la resolución de problemas como una teoría para la enseñanza del concepto de relación. Los aportes de D1 y D4 integran la resolución de problemas y la contextualización de estos. Por su parte, D3 orienta su reflexión hacia el uso que el profesor observado hace de la contextualización para mostrar la tarea: “potenció la actividad del precio de los kilómetros al tomar un taxi para introducir el concepto de función”.

El grupo de participantes se refiere a los medios para la enseñanza cuando reconoce la pizarra y los marcadores como los recursos físicos que el profesor observado utiliza para la enseñanza del concepto de relación. No obstante, D1 y

D4 identifican la ausencia de otros recursos como la tecnología, que pudieron implementarse al momento de la clase observada. Ahora bien, D2 sugiere un mejor uso de los recursos identificados para mejorar el proceso de enseñanza.

Mayormente, las tareas para la enseñanza sobre el concepto de relación identificadas por el profesorado participante se refieren a la tarea propuesta y a las preguntas que el profesor observado realiza al estudiantado. En particular, D2 destaca la intencionalidad de la tarea cuando registra que "...el docente solamente desarrolla el problema para introducir el concepto de función, que es una buena estrategia que permite evaluar de manera básica la interpretación por parte del estudiante del concepto de función". También, a título ilustrativo, D4 se refiere a la tarea acentuando la situación en la que se plantea y su proximidad con la realidad del estudiantado.

En la tabla 4 se aprecia una identificación de formas del conocimiento más fundamentada en los aspectos teóricos de la capacitación que en las experiencias profesionales y personales de las personas docentes participantes.

Como es evidente, durante el primer momento de reflexión, el reconocimiento de metodologías de enseñanza es más próximo a las experiencias que como docentes las personas participantes han tenido a lo largo de su desempeño profesional. En la primera reflexión, la diversidad de estrategias de instrucción reconocidas en el desempeño del profesor observado es mayor a las que se indican en el segundo momento de reflexión. Sin embargo, es en esta segunda reflexión cuando la atención de las personas participantes se centra en las metodologías primordiales que se sugieren en el programa de estudios para la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria (la resolución de problemas y la contextualización activa de tareas).

La reflexión sobre los recursos físicos y virtuales para la enseñanza se acentúa sobre el uso que hace el profesor observado de la pizarra y los marcadores, como recursos para el abordaje de la tarea propuesta. Además, se destaca que en R1 todas las personas participantes se refieren a la disponibilidad y al uso de estos dos recursos, es decir, a la eficiencia en la enseñanza del concepto de relación. Después de la capacitación, disminuye significativamente el énfasis hacia la eficiencia de los recursos y sobresalen sugerencias sobre el uso de otros recursos como la tecnología.

Tabla 4

Enseñanza de las matemáticas en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza		
Resolución de problemas	D3, D4, D5	D1, D2, D4, D5
Trabajo colaborativo	D3, D5	D4
Pregunta dirigida	D2, D3, D5	Sin evidencia

Tabla 4

Enseñanza de las matemáticas en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Teorías personales o institucionalizadas de enseñanza		
Uso de significados coloquiales de conceptos	D3	Sin evidencia
Error matemático	D5	Sin evidencia
Contextualización activa	Sin evidencia	D1, D3, D4
Recursos físicos y virtuales		
Pizarra o marcadores como recursos identificados	D1, D2, D3, D4, D5	D1, D2, D3, D4, D5
Referencia sobre existencia y uso de los recursos identificados (eficiencia)	D1, D2, D3, D4, D5	D2
La tecnología como un recurso ausente	Sin evidencia	D4
Implementación de otros recursos	Sin evidencia	D1, D2
Actividades, tareas, ejemplos y ayudas		
Reconocimiento de la intencionalidad	D2, D4	D2
Reconocimiento de la situación	D3, D4	D4

En cuanto a las actividades, tareas, ejemplos y ayudas, en los dos momentos de reflexión, se aborda desde la intencionalidad de la tarea y el reconocimiento de la situación en la que se enmarca. Sobresale que la cantidad de personas participantes que se refieren a estos elementos de la tarea es mínima, misma que disminuye entre los momentos de reflexión.

Reflexión sobre el aprendizaje de las matemáticas

Los participantes manifiestan observar distintas formas en las que el estudiantado aprende las matemáticas: trabajo colaborativo, resolución de tareas en situaciones cotidianas, inducción y deducción matemática. Por ejemplo, D1 señala que el estudiantado aprende mediante el trabajo con sus compañeros y compañeras; D2, D4 y D5 destacan la resolución de tareas auténticas como un canal para aproximar el contenido matemático abordado al estudiantado; D3 se refiere a los casos particulares que el profesor observado presenta al estudiantado y su paso a la fórmula; y D4 acentúa la explicación que hace el profesor observado “quien pasa de lo general a lo específico” como una forma para incentivar el aprendizaje.

Para la categoría sobre fortalezas y limitaciones, solo las reflexiones de D1, D2 y D5 se refieren a las potencialidades que tiene el contenido matemático —expuesto por el profesor en el video— para el aprendizaje de las matemáticas, así como los obstáculos asociados a su aprendizaje.

La diversidad de representaciones y la utilidad del problema mostrado en la vida cotidiana se consideran aspectos que fortalecen el aprendizaje del concepto de relación. Los obstáculos para el aprendizaje, identificados en estas tres narrativas, son numerosos y se asocian a las matemáticas o al entorno de aprendizaje. En cuanto a los obstáculos vinculados con las matemáticas, D2 destaca la necesidad de conocimientos previos y la similitud entre determinados conceptos (variable dependiente y variable independiente); D5 puntualiza los errores que se puedan presentar al determinar la fórmula. Sobre el entorno, D1 destaca los cambios en el planteamiento curricular que traslucen falta de preparación de docentes, padres de familia y estudiantado para su consecución; D2 identifica la incidencia de situaciones ajenas al proceso de aprendizaje y el tiempo disponible para el abordaje de los contenidos.

Los aportes de D4 son los únicos que se refieren a las formas en las que el estudiantado manipula o interactúa con el contenido matemático; estos destacan el planteamiento de expresiones algebraicas o ecuaciones, la sustitución de valores en expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones.

Las concepciones que el estudiantado tiene sobre las matemáticas son canalizadas por las personas participantes desde las intervenciones que realiza el alumnado y de la cercanía que tiene la tarea con su realidad. A través de estos dos elementos, se destacan las expectativas y los intereses que tiene el estudiantado hacia las matemáticas y su aprendizaje. Por ejemplo, para D1 “en ese particular los estudiantes muestran interés, me atrevo a decir que es por lo cercano a sus realidades que es el problema en cuestión”.

Para ilustrar las formas en que reflexiona el profesorado sobre esta categoría se presenta la tabla 5.

A partir de lo planteado, en la tabla 5 se observa que cada una de las personas participantes destaca formas distintas con las que el estudiantado aprende matemáticas. En la primera reflexión, se acentúan tres formas de aprendizaje; esta cantidad aumenta después de la capacitación y son distintas a las expuestas preliminarmente.

Las peculiaridades manifestadas sobre fortalezas y limitaciones de aprendizaje, vinculadas al concepto de relación, son escasas. Destaca que el número de fortalezas y limitaciones, al igual que la cantidad de participantes que las refieren, aumenta en R2. Además, se considera relevante que algunas personas participantes cambian las formas en que reflexionan sobre este aspecto, después de la capacitación, o bien estas formas son reconocidas por docentes que no lo habían hecho durante la primera reflexión.

Tabla 5
Aprendizaje de las matemáticas en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Formas de aprendizaje		
Pregunta dirigida	D4	Sin evidencia
Presentación de imágenes	D3	Sin evidencia
Disponibilidad de tiempo	D4	Sin evidencia
Trabajo colaborativo	Sin evidencia	D1
Resolución de tareas en situaciones cotidianas	Sin evidencia	D2, D4
Inducción matemática	Sin evidencia	D3
Deducción matemática	Sin evidencia	D4
Fortalezas y limitaciones de aprendizaje		
F1: Diversidad de sistemas de representación	D5	D2, D5
F2: Aplicabilidad del concepto	Sin evidencia	D1, D3
L1: Dificultad procedimental del tema	D4	D2, D5
L2: Similitud entre determinados conceptos	Sin evidencia	D2
Formas de interacción del estudiantado con el contenido matemático		
Diversidad de procedimientos	D1, D5	D4
Diversidad de estrategias	D4	D3, D4
Argumentaciones y explicaciones	D4	D5
Concepciones del estudiantado sobre las matemáticas		
Interés hacia el contenido por la cercanía de la tarea con la realidad	Sin evidencia	D1, D4
La participación del estudiantado manifiesta interés por el tema	Sin evidencia	D3
Utilidad de la tarea en la resolución de otras similares	Sin evidencia	D4

Nota. F=fortaleza; L=limitación.

La información vinculada con la interacción del estudiantado con el contenido matemático muestra que las formas señaladas por las personas participantes son pocas y se mantienen invariables entre los momentos de reflexión. No obstante, es destacable que, a pesar de lo expuesto en la idea anterior, hay cambios en las

personas docentes que las determinan. Por ejemplo, se señalan las argumentaciones y explicaciones que da el estudiantado como una interacción entre estos y el concepto de relación.

Las descripciones asociadas a las concepciones del estudiantado hacia las matemáticas se ponen en evidencia durante el segundo momento de reflexión, cuando algunos participantes refieren fundamentalmente al interés manifestado por el estudiantado hacia el tema.

Reflexión sobre los estándares de aprendizaje

El análisis sobre los estándares de aprendizaje toma en consideración los contenidos matemáticos que se requieren enseñar, el nivel conceptual y procedimental esperado y la secuenciación de los diversos temas. Respecto al primero, D1, D3 y D4 identifican de forma explícita temas de las matemáticas escolares en que se enmarcan las habilidades promovidas por el profesor observado. Específicamente, D3 alude al tema de funciones; D1 y D4 se refieren de manera simultánea a relaciones y álgebra, luego D1 menciona ecuaciones y D4, números. En cuanto al nivel conceptual y procedimental esperado, D2 y D5 se refieren al contenido expuesto y su correspondencia con el nivel escolar en que se encuentra el estudiantado.

Para la secuenciación de diversos temas, todo el profesorado participante reconoce una organización temática previa para el concepto de relación, acentuando cuatro temas: valor numérico, ecuaciones, operaciones aritméticas y operaciones con expresiones algebraicas. Específicamente: D2 menciona los temas de valor numérico y ecuaciones, D3 señala las operaciones aritméticas, D4 alude a los cuatro temas descritos y D5 al valor numérico y ecuaciones. Ningún participante identifica algún concepto posterior al expuesto por el profesor observado.

Por último, a partir de la categoría de estándares de aprendizaje, como se muestra en la tabla 6, en R2 se encuentran más referencias sobre los temas en los que se enmarcan las habilidades matemáticas que promueve el profesor observado.

Particularmente, sobre los contenidos matemáticos que se requieren enseñar, aunque en ambos momentos reflexivos se mencionan contenidos abordados en otros niveles, en R1 se alude únicamente al tema de ecuaciones, mientras que en R2, además del tema de ecuaciones, se citan otros conceptos del área de relaciones y álgebra como valor numérico y funciones. Aunado a esto, los dos momentos de reflexión se distinguen porque únicamente en R1 se identifica la relación como concepto relevante para temas posteriores. Mientras que, en la categoría sobre el nivel del desarrollo conceptual y procedimental esperado, solo en R2 se evidencia el vínculo entre el concepto abordado y el nivel escolar del estudiantado.

Tabla 6

Estándares de aprendizaje en los momentos de reflexión

Aspecto	Reflexión 1	Reflexión 2
Contenidos matemáticos que se requiere enseñar		
Referencia a conceptos abordados en otros niveles	D5 [E]	D1, D4 [E, VN]; D3 [F]
Relación como concepto relevante para temas posteriores	D3, D5	Sin evidencia
Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado		
Vínculo entre el concepto abordado y el nivel escolar del estudiantado	Sin evidencia	D2, D5
Secuenciación de diversos temas		
Reconocimiento de la organización conceptual previa al contenido abordado	D5	D1, D2, D3, D4, D5
Reconocimiento de la organización conceptual posterior al contenido abordado	D3	Sin evidencia

Nota. E=ecuación; VN=valor numérico; F=función.

Por último, sobre la secuenciación de diversos temas, en R2 todos los docentes participantes reconocen una organización conceptual previa del concepto de relación, en R1 solo se evidencia un aporte al respecto. Por otra parte, solo en R1 se encontró una referencia a la organización conceptual posterior al contenido abordado.

CONCLUSIONES

El análisis efectuado sobre el concepto de relación desde el punto de vista de las matemáticas y la didáctica, como disciplinas científicas, permite identificar avances, retrocesos y aspectos que se mantienen sin cambios en los dos momentos de reflexión. Cabe recalcar que, a pesar de que la tarea expuesta en el video fue utilizada por el profesor observado para introducir el concepto de relación, en ciertos momentos el profesorado participante asoció la tarea al concepto de función. Como indican Espinoza-Vásquez et al. (2018), el profesorado de matemáticas hace uso de analogías para referirse al concepto de función, a partir del significado que le otorga, como es correspondencia o relación.

El apartado de reflexiones finales se dirige a acentuar indicadores de comparación de la reflexión docente del grupo de participantes, antes y después de una capacitación sobre el MTSK. Estos indicadores se han organizado a partir de

las dos categorías de análisis primarias adoptadas y definidas para el estudio: el contenido matemático y el componente didáctico del contenido matemático.

Indicadores sobre el progreso de la reflexión docente acerca del contenido matemático

En concordancia con el referente teórico, los indicadores sobre el desarrollo de la reflexión docente acerca del contenido matemático se organizan desde el conocimiento de los temas, la estructura de la matemática y la práctica matemática.

Con respecto a los elementos matemáticos vinculados al conocimiento de los temas, se evidencia un avance en la reflexión de las personas docentes caracterizado por:

- ◆ La identificación de contextos y situaciones en las que está inmersa la tarea, que destaca por el carácter explícito de las manifestaciones de las personas participantes en la segunda reflexión.
- ◆ La argumentación matemática de los atributos o cualidades vinculados al concepto de relación.
- ◆ La identificación de diversos modos de representación para el concepto de relación.
- ◆ La identificación de procedimientos vinculados al concepto de relación, particularmente, de algoritmos tradicionales para resolver la tarea.

Complementariamente, es importante señalar un avance poco relevante en el reconocimiento de proposiciones que definen el concepto de relación y otros conceptos. También, las personas participantes no se refieren al contexto de modelización para establecer una relación entre las variables involucradas, a pesar de que el uso de modelos matemáticos forma parte de la propuesta curricular del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. La categoría no muestra retrocesos entre los momentos de reflexión.

En particular, la reflexión sobre la estructura de la matemática evidencia un avance que se caracteriza por:

- ◆ El reconocimiento de conceptos matemáticos, como conexiones de complejización y simplificación, que potencian el abordaje del concepto de relación y otros conceptos.
- ◆ La identificación de conceptos, como conexiones transversales, que se relacionan a partir de las cualidades y atributos comunes que los definen y caracterizan.
- ◆ El reconocimiento de conexiones auxiliares en determinados conceptos matemáticos que favorecen el desarrollo del concepto de relación.

Aunado a esto, las personas docentes son consistentes en la identificación de la cualidad auxiliar del concepto de ecuación cuando se enseña el concepto de relación.

En síntesis, la categoría deja ver un progreso en el profesorado en cuanto al reconocimiento de conexiones entre conceptos matemáticos y el concepto de

relación, a nivel de complejización, simplificación, transversalidad y utilidad de estos conceptos.

Por otra parte, las reflexiones del profesorado sobre la práctica matemática se caracterizan por:

- ◆ Un avance poco significativo en la identificación de razonamientos propios de las prácticas ligadas a las matemáticas en general. Con detalle, resalta el reconocimiento de la modelización matemática.
- ◆ Un reconocimiento escaso y diverso de estructuras lógicas de pensamiento que son particulares al abordar el concepto de relación.

A manera de resumen, las personas participantes se refieren escasamente a aspectos relacionados con la práctica matemática.

Indicadores sobre el progreso de la reflexión docente acerca del componente didáctico del contenido matemático

Los indicadores sobre el desarrollo de la reflexión docente acerca del componente didáctico del contenido matemático se organizan desde la enseñanza de la matemática, el aprendizaje de las matemáticas y los estándares de aprendizaje.

La reflexión sobre la enseñanza de la matemática evidencia un avance caracterizado por:

- ◆ La identificación de teorías personales o institucionales de enseñanza basadas en los referentes teóricos del currículo de matemáticas costarricense.
- ◆ El señalamiento de la eficacia de los recursos físicos y virtuales identificados, en cuanto que acentúan la necesidad de incorporar otros recursos a la enseñanza del concepto de relación.

Debe señalarse que, durante todo el proceso de reflexión, se identifica que la resolución de problemas constituye la principal teoría específica para enseñar el concepto de relación. Además, se hace un reconocimiento de los recursos básicos implementados por el profesor observado para enseñar el concepto de relación.

Por otra parte, las menciones sobre la eficiencia de los recursos identificados para la enseñanza del concepto de relación disminuyen considerablemente. Y el análisis de la tarea planteada excluye el detalle de la complejidad, el contexto, la competencia matemática, las limitaciones y las fortalezas que caracterizan una tarea, al igual que otros aportes para mejorar la tarea expuesta.

Ahora, las evidencias asociadas a la categoría de aprendizaje de las matemáticas apuntan a un avance en la reflexión docente, caracterizado por:

- ◆ El reconocimiento de formas diversas en las que el estudiantado aprende matemáticas.
- ◆ La identificación de formas de aprender más cercanas a la naturaleza de las matemáticas y no desde un marco pedagógico general.
- ◆ El señalamiento, aunque escaso, de particularidades del contenido matemático que favorecen su aprendizaje.

- ◆ La determinación de los intereses del estudiantado hacia el contenido matemático asociadas a la utilidad y cercanía que tiene la tarea con la realidad estudiantil.

Aunado a esto, es rescatable la cantidad de docentes que reconocen formas de aprendizaje y, al menos, una potencialidad del contenido (fortaleza) después de la capacitación. Durante el proceso de reflexión, la distinción de peculiaridades del contenido matemático que provocan desaciertos para su aprendizaje fue notoriamente escasa. Hay consistencia en las formas en que el estudiantado manipula el concepto de relación, salvo algunos casos en que se modifican las manifestaciones de las personas participantes. Las reflexiones del grupo de docentes omiten el reconocimiento de ideas preconcebidas por el estudiantado hacia el concepto de relación.

Finalmente, para la categoría de estándares de aprendizaje de las matemáticas se confirma un avance en la reflexión docente que se caracteriza por:

- ◆ La identificación, aunque escasa, de conceptos asociados a la tarea y su correspondencia con el nivel escolar del estudiantado.
- ◆ El señalamiento de la organización conceptual previa al tema de relaciones.

Se agrega la falta de manifestaciones vinculadas con el alcance de capacidades esperado para el tema de relaciones, según el nivel escolar, así como referencias a una organización conceptual posterior a este tema, durante el proceso de reflexión.

Consideraciones finales

Desde un marco general, la capacitación promovió un proceso de reflexión docente fundamentado en el MTSK. Siguiendo a Llinares y Fernández (2021), hubo un progreso en el desarrollo de la competencia de reflexión docente por cuanto las manifestaciones de las personas docentes participantes se alejaron del carácter personal, emocional y empírico mostrado en la primera reflexión, para fundamentarse en el referente teórico adoptado.

En particular, las personas participantes muestran una evolución en su reflexión cuando distinguen aspectos asociados al conocimiento de los temas, a la estructura de la matemática y, en menor medida, a la práctica matemática. Resulta claro que, a pesar de evidenciarse un progreso en esta competencia, este presenta una intensidad diferente dentro de las categorías asociadas al conocimiento del contenido matemático.

Por otra parte, los componentes de la capacitación asociados al conocimiento didáctico del contenido matemático también muestran un progreso en el reconocimiento de aspectos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en cambio, los elementos sobre los estándares de aprendizaje destacan por un avance reducido al final del proceso de reflexión.

Al estudiar el avance de la competencia de reflexión docente cuando se analiza una situación de enseñanza y aprendizaje sobre el concepto de relación, después de una capacitación teórica sobre el MTSK, es preciso hacer notar las dificultades

mostradas por el grupo de participantes para el reconocimiento de: (a) proposiciones que definen el concepto matemático, (b) razonamientos que justifican las formas de proceder en matemática, (c) elementos que caracterizan la tarea matemática escolar, (d) ideas preconcebidas por el estudiantado hacia el concepto matemático, (e) manifestaciones vinculadas con el fomento de capacidades o habilidades matemáticas y (f) la organización conceptual posterior al tema en desarrollo. Con base en la idea anterior, se sugiere que futuras capacitaciones, que procuren fomentar la competencia de reflexión docente, enfatizen estos aspectos.

REFERENCIAS

- Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). El conocimiento especializado del profesor de Matemáticas: MTSK. En CIBEM (Eds.), *Actas del VII CIBEM* (pp. 5063-5069). CIBEM.
- Buendía, L., Colás, M. P. y Fuensanta, P. (1998). *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. McGraw-Hill.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. Á. (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(3), 301-324. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2133>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, M., Aguilar, A. y Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemática, el MTSK. En J. Carrillo, L. C. Contreras, N. Climent, D. Escudero-Ávila, E. Flores-Medrano y M. Á. Montes (Eds.), *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemática* (pp. 70-92). Universidad de Huelva Publicaciones.
- Galleguillos, J., Ribeiro, C. M. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas frente a problemas abiertos. En P. Scott y A. Ruiz (Eds.) *Actas de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. CIAEM-IACME. https://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/323/578

- Instituto Tecnológico de Costa Rica [TEC] (2017). *Plan de estudios de la Carrera Enseñanza de la Matemática con entornos tecnológicos*. Escuela de Matemática. <https://www.tec.ac.cr/planes-estudio/bachillerato-ensenanza-matematica-asistida-computadora>
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2016). Cómo estudiantes para maestros miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas. *La matematica e la sua didattica*, 24(1-2), 79-96.
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación en Revista*, 50, 117-133. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009>
- Llinares, S. (2016). Enseñar matemáticas y aprender a mirar de manera profesional la enseñanza. (Del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente: mirar profesionalmente). En G. A. Perafán, E. Badillo y A. Aduriz (Coords.), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas* (pp. 211-236). Editorial Aula de Humanidades.
- Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 14(18), 30-43.
- Llinares, S. y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la matemática. *La Gaceta de la RSME*, 24(1), 185-205.
- Loría, J. R. (2021). *Diseño de tareas para la evaluación de la competencia matemática escolar. Una experiencia con profesores de Costa Rica* [Tesis doctoral, Universidad de Granada, España]. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/68159>
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Ministerio de Educación Pública (2012). *Informe nacional 2011. Resultados de las pruebas nacionales de bachillerato de la educación formal*. Dirección de Gestión y Evaluación de la Calidad. <https://mep.janium.net/janium/Documentos/10808.pdf>
- Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*, (pp. 243-258). Pirámide.
- Picado-Alfaro, M., Loría-Fernández, J. R. y Espinoza-González, J. (2022). Reflexión docente de una situación de enseñanza y aprendizaje sobre el concepto de relación en educación secundaria. *Uniciencia*, 36(1), 1-22. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.2>
- Programa Estado de la Nación en Desarrollo Humano Sostenible. (2013). *Cuarto Informe Estado de la Educación* (4.ª ed.). Editorama.
- Ricoy-Lorenzo, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação*, 31(1), 11-22.

- Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479- 485). SEIEM.
- Sherin, M., Jacobs, V. y Philipp, R. (Eds.) (2011). *Mathematics teacher noticing. Seeing through teachers' eyes.* Routledge.
<https://doi.org/10.4324/9780203832714>
- Universidad de Costa Rica [UCR] (2017). *Plan de estudios de la Carrera Educación Matemática.* Escuela de Matemática.
https://emate.ucr.ac.cr/index.php?option=com_quix&view=page&layout=edit&id=98
- Universidad Estatal a Distancia [UNED] (2020). *Carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática.* Escuela Ciencias Exactas y Naturales. <https://www.uned.ac.cr/ecen/ensenanza-de-la-matematica>
- Universidad Nacional [UNA] (2017). *Plan de estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática.* Escuela de Matemática.
<https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/oferta-academica/bach-lic-ensenanza-de-la-matematica/bachillerato-en-ensenanza-de-la-matematica>

José Romilio Loría-Fernández
 Universidad Nacional
 Costa Rica
jose.loria.fernandez@una.cr

Jonathan Espinoza-González
 Universidad Nacional
 Costa Rica
jonaespinoza@una.ac.cr

Miguel Picado-Alfaro
 Universidad Nacional
 Costa Rica
miguel.picado.alfaro@una.cr

Recibido: Marzo de 2022. Aceptado: Febrero de 2023.

doi: 10.30827/pna.v17i3.24141



ISSN: 1887-3987

SCOPE OF A WORKSHOP ON MTSK IN THE TEACHING REFLECTION OF A GROUP OF MATHEMATICS TEACHERS

José Romilio Loría-Fernández, Jonathan Espinoza-González y Miguel Picado-Alfaro

This study presents the scope of a workshop that promotes the Noticing competence from the theoretical notions of the Mathematics Teacher Specialized Knowledge model (MTSK). Its objective was to characterize the changes shown by seven in-service mathematics teachers when they recognize and justify mathematical and didactic aspects related to the performance of a teacher who teaches a particular mathematical concept, in order to determine the progress in the development of this competence, in this group of teachers, as a result of the workshop.

Theoretically, it has been considered that the Noticing competence implies the development of three skills: identifying what is considered important in a mathematics class, interpreting the interactions in the classroom based on theoretical references, and making reasoned decisions about the way to act regarding the teaching and learning of mathematics. The MTSK model organizes the professional knowledge of mathematics teachers from a system of categories on mathematical content and didactic content.

The study is descriptive based on case studies. Participants had a minimum of five years of professional experience. To register the information two narrative guides were prepared. These narrative guides were completed by the teachers when they watched a video of a teacher in a teaching situation, before and after the workshop.

The results show that there was progress in the development of the Noticing competence. The manifestations of the teachers moved away from the personal, emotional, and empirical nature shown in the first reflection, to be based on the theoretical reference adopted. Also, the participants show an evolution in their reflection when they distinguish aspects associated with the knowledge of the topics, the structure of the mathematics and, to a lesser extent, the mathematical practice. The workshop components associated with didactic knowledge of mathematical content also show progress to recognize aspects of mathematics teaching and learning. On the other hand, the elements on the learning standards stand out for a reduced progress at the end of the reflection process.