TRATADO ELEMENTAL
DE MATEMÁTICAS,

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

para uso de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid y demas casas de educacion del reino.

POR D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,

catedrático que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las plazas en dicho Real Seminario, &c. &c.

TOMO PRIMERO,

PARTE SEGUNDA,

QUE CONTIENE

LA GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y GEOMETRÍA PRÁCTICA.

TERCERA EDICION

corregida de algunas inexactitudes que se cometieron en las anteriores. Ilustrada con cuantas notas y observaciones han sido necesarias para que se halle al nivel de todos los conocimientos de esta ciencia en Europa, y aumentada, respecto de la segunda edicion, con las teorías de las paralelas de Schvvab, Hutton, Leslie y Cresvvell, y de los célebres Tomás Simpson y Roberto Simson: con diez casos de igualdad y otros diez de semejanza de triángulos; con otras muchas proposiciones importantes, entre ellas un método de hallar la relacion del diámetro á la circunferencia; con una tabla de las líneas trigonométricas naturales para todos los grados de un cuadrante, otra de los senos en la division centesimal, y otra de las diferencias entre el nivel verdadero y aparente, contando con la refraccion, juntamente con el modo de calcular ésta en España.

CON LICENCIA.

Madrid: imprenta que fué de García.

1825.

TRATADO ELEMENTAL DE MATEMÁTICAS,

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

para uso de los caballeros seminaristas del Real Seminario de Nobles de Madrid y demas casas de educacion del reino.

POR D. JOSÉ MARIANO VALLEJO,

catedrático que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las plazas en dicho Real Seminario, &c. &c.

TOMO PRIMERO,

PARTE SEGUNDA,

QUE CONTIENE

LA GEOMETRÍA, TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA Y GEOMETRÍA PRÁCTICA.

TERCERA EDICION

corregida de algunas inexactitudes que se cometieron en las anteriores. Ilustrada con cuantas notas y observaciones han sido necesarias para que se halle al nivel de todos los conocimientos de esta ciencia en Europa, y aumentada, respecto de la segunda edicion, con las teorías de las paralelas de Schvvab, Hutton, Leslie y Cresvvell, y de los célebres Tomás Simpson y Roberto Simson: con diez casos de igualdad y otros diez de semejanza de triángulos; con otras muchas proposiciones importantes, entre ellas un método de hallar la relacion del diámetro á la circunferencia; con una tabla de las líneas trigonométricas naturales para todos los grados de un cuadrante, otra de los senos en la division centesimal, y otra de las diferencias entre el nivel verdadero y aparente, contando con la refraccion, juntamente con el modo de calcular ésta en España.

CON LICENCIA.
Madrid: imprenta que fué de García.
1825.

PRÓLOGO.

En la segunda edicion de este volúmen servía de prólogo la siguiente

ADVERTENCIA.

"*Cuando en virtud de Real órden principié á escribir esta obra, »no se podian preveer las circunstancias ocurridas despues del año »de* 1808 *: por esta causa la dividí en dos tomos que pensaba im- »primirlos en* 8.° *mayor, arreglando el papel y el carácter de le- »tra, de modo que resultase una edicion cómoda y hermosa.*

»*Pero las circunstancias ocurridas posteriormente me obligaron, á »que, al efectuar la impresion, dividiese cada tomo en dos partes ó »volúmenes: para lo cual tuve dos razones poderosas; la* 1.ª *que en »el carácter de letra en que me ví precisado á hacer entónces la im- »presion, hubieran salido los tomos demasiado abultados; y la* 2.ª *»que no hallándose en el terreno dominado por las armas españolas »ningun libro de Matemáticas por donde pudiesen estudiar los que »se dedicaban á la carrera militar, publicando, anticipadamente el »volúmen de Aritmética y Algebra, proporcionábamos el que tuvie- »sen un testo por donde estudiar estos tratados, interin se imprimia »la Geometría. Y ahora me veo precisado á continuar con la mis- »ma division de tomo* 1.º *parte* 2.ª *para que los lectores que ten- »gan la* 1.ª *parte, puedan proporcionarse la* 2.ª *sin verse precisados »á tomar otra vez la* 1.ª*.*

»*En esta* 2.ª *edicion he hecho todas aquellas enmiendas y sim- »plificaciones que me han parecido necesarias; y he añadido otros »dos métodos de demostrar la teoría del* círculo, cilindro, cono *y* »esfera *con exactitud y sin la consideracion vaga é inexacta de que »el círculo es un polígono de infinitos lados: porque es de la mayor »importancia el que todos los que se dedican á una ciencia, conozcan »los diversos métodos que pueden conducir á perfeccionarla. Tambien »me ha parecido conveniente poner el modo de cuadrar varios espa- »cios circulares de que apenas se tiene noticia, como son otras* lúnu- »las *diferentes de las de Hipócrates,* los arbelos, *de Proclo, Arqui-*

»medes y *Vieta*, y el salinón de *Arquimedes*; con lo cual tendrán »los principiantes todos aquellos conocimientos geométricos necesarios »para imponerse en los demas tratados, sin necesidad de recurrir »á otros libros para entender la parte elemental; y así pueden es»tar seguros de que en esta segunda edicion no solo hallarán todo lo »necesario, sinó que tienen ademas todos los diversos métodos que »se conocen hasta ahora para demostrar las teorías mas interesantes: «en tales términos que contiene todos los adelantamientos de conside»racion que han hecho en esta ciencia Legendre, Lacroix, Garnier, »Suzzane y Francœur, que son los que últimamente han escrito so»bre este tratado; y si no recayese precisamente en elogio mio, de»mostraría hasta la evidencia que he evitado muchos saltos vio»lentos que se hallan en las obras de estos Geómetras y que he lle»nado muchas lagunas que hacian defectuosa la ciencia. Sin embar»go, lo que me parece que no puedo ni debo dejar de advertir es »que el método que elegí en la primera edicion para demostrar la »teoría del círculo, cilindro, cono y esfera, sacado de las obras de »*Arquimedes*, y desterrado sin razon de las obras modernas que en»tónces se conocían, es el único sólido, geométrico, rigoroso y exac»to, y por lo mismo lo he conservado y es el que se halla en el »testo entre corchetes: y tengo la satisfaccion de que ya en la obra »de Suzzane sobre el método de estudiar la Geometría, se quiere »acercar algo á él, aunque todavía está muy distante.

»Mas debo advertir que aquellas proposiciones que no son de una »absoluta necesidad para los principiantes las he puesto por notas »y por digresiones, para que puedan omitir su estudio, aquellos »que no traten de profundizar mucho en esta ciencia; y como »á pesar de esto podrá ocurrir el que á algunos les parezca demasiado lo que queda en el testo, he puesto encerrado en»tre corchetes de esta especie { } aquellos párrafos cuyo contenido »no es tan necesario, y que por lo mismo se podrá diferir su estu»dio hasta que los principiantes se hayan impuesto en lo demas. Sin »embargo de esto podrá ocurrir que todavía parezca á alguno que »es demasiado larga la Geometría; lo cual proviene de lo muy atra»sados que nos hallamos en estas ciencias, y de que estamos acos»tumbrados á estudiar poco mas que sus simples nombres y por mé»todos inexactos: de donde proviene la decadencia de nuestras artes, »manufacturas, industria, comercio &c, &c. Y siendo necesario aho»ra mas que nunca, el fomentar en nuestro suelo esta fuente de la »prosperidad de los estados, y estando convencidos de que el medio »mas directo para conseguirlo son el difundir las luces sobre una »ciencia tan evidentemente útil y necesaria, no he omitido diligen»cia alguna que pueda conducir á tan felices resultados."

Acerca de esta tercera edicion, solo añadiré que continuando con la idea que me he propuesto de que en esta obra se contenga cuanto nuevo y útil se publique en todo el globo, he añadido en esta tercera edicion cuanto he concebido podía ser de alguna utilidad. Entre estas adiciones las hay de mucha trascendencia, como son los diez nuevos casos de igualdad de triángulos y otros diez nuevos tambien de semejanza de ellos.

En cuanto al método de esponer la doctrina, no puedo ménos de congratularme al ver que todas las obras que se han publicado despues de compuesta la mia, se han propuesto llenar los mismos huecos que yo habia notado, y que me propuse tratar del modo que corresponde á unas ciencias cuyo carácter esencial es la exactitud, y á los adelantamientos hechos por la verdadera Metafísica. Aunque de la comparacion de dichos métodos con los que yo he usado, podría resultar alguna ventaja respecto de los mios, yo me abstendré de sacar ninguna consecuencia y me contentaré únicamente con la satisfaccion que me resulta de haber sido el primero que he reconocido y procurado salvar varias inexactitudes que se cometian al esplicar las Matemáticas, y que los autores que han escrito despues han reconocido las mismas inexactitudes, y han tratado de subsanarlas.

Los autores en que se ve mas coincidencia de ideas sobre el particular, son Mr. J. Schwab. y Mr. A.L. Cauchy entre los franceses, M.M. Leslie y Creswell entre los ingleses. Mr. Schwab en la primera parte de sus elementos de Geometría, impresa en Nancy el año de 1813 indica que su principal objeto es demostrar las mismas proposiciones que antes se tomaban por axiomas y que demostré primero yo en mis adiciones á la Geometría de D. Benito Bails, impresas en 1803. He aquí como se esplica Schwab, en el prólogo de dicha obra: »cualquiera que sea el grado de exactitud que los antiguos autores de »Geometría hayan tratado de dar á sus demostraciones, ellos encon»traron desde el principio, para demostrar las propiedades de la linea

„recta *y de las paralelas, dificultades que no pudieron superar; ellos „pues han imaginado colocar á la cabeza de sus obras*, *bajo el nombre de* axiomas, *verdades cuyo simple enunciado basta para hacer „reconocer su evidencia, é introdujeron con maña entre estos axiomas, „como igualmente evidentes, otras verdades que lo son mucho ménos. „Los verdaderos axiomas, no tienen necesidad de estar colocados á la „cabeza de un libro: si en el curso de una demostracion, yo deduzco „la igualdad de dos cantidades, por la razon de que cada una de ellas „es igual con una tercera, el lector me entiende perfectamente, sin „que yo tenga necesidad de recordarle que esto es en virtud de un „axioma establecido anteriormente. Como todas las verdades que la ne„cesidad sola ha erigido en axiomas se hallan demostradas en esta „obra, yo he creido deber suprimir los axiomas como inútiles.*"

Mr. A.L. Cauchy, á quien tengo el honor de conocer personalmente, y con quien he tenido la satisfaccion de conferenciar en París sobre varios puntos de las Matemáticas coincide tanto con mis ideas, que no puedo ménos de poner aqui algunas de sus aserciones, aunque precisamente no sean todas ellas relativas á la Geometría. En la introduccion de su Curso de análisis, *impreso en* 1821, *dice:* "*En cuanto á los métodos, yo he procurado darles todo el rigor que se exige en Geometría, para no recurrir jamás á las razones sacadas de la generalidad del Algebra. Las razones de esta especie, aunque bastante comunmente admitidas, sobre todo en el paso de las séries convergentes á las séries divergentes, y de las cantidades reales á las espresiones imaginarias, no pueden ser consideradas, me parece, sinó como inducciones propias para hacer presentir algunas veces la verdad, pero que se conforman poco con la exactitud tan ponderada de las Matemáticas. Se debe aun observar, que ellas tienen tendencia á hacer atribuir á las fórmulas algebráicas una estension indefinida, mientras que en la realidad, la mayor parte de estas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones, y para ciertos valores de las cantidades que ellas encierran. Determinando estas condiciones y estos valores, y fijando de una manera precisa el sentido de las notaciones de que yo me sirvo, hago desaparecer toda incertidumbre.*"

Los que comparen estas espresiones con lo que resulta en varios parages de mis obras, en que he tenido la suficiente firmeza para separarme de la generalidad de los autores siempre que han tratado de estender sus consecuencias á mas de lo que rigorosamente demuestran, podrán juzgar con algun fundamento de la satisfaccion que me habrá cabido al ver confirmadas mis ideas por un sabio, que forma en el dia las esperanzas de los mejores matemáticos, y al considerar que, en mis obras, he llevado algo mas adelante sus ideas.

En efecto, en la advertencia del resumen de las lecciones dadas en la Escuela Politécnica *sobre el cálculo infinitesimal, impreso en* 1823, *dice:*

"*Los métodos que yo he seguido, difieren bajo muchos aspectos de los que se hallan espuestos en las obras del mismo género. Mi objeto principal ha sido el conciliar el rigor de que yo me habia impuesto una ley en mi* Curso de Análisis, *con la sencillez... la mayor parte de los Geómetras están conformes ahora en reconocer la incertidumbre de los resultados á que puede uno ser conducido por el empleo de séries divergentes... los que lean mi obra, se convencerán, yo lo espero, de que los principios del cálculo diferencial y sus mas importantes aplicaciones, se pueden esponer muy facilmente sin la intervencion de las séries.*" *Y como yo esplico todo el cálculo diferencial sin fundar sus principios en el desarrollo de las séries, resulta que me he anticipado mucho en este asunto; y si se tiene en consideracion que Mr. Cauchy supone ya conocida la fórmula del binomio de Neuton, y que yo esplico los principios de dicho cálculo, tanto en este tratado, como en mi compendio de Matemáticas, sin suponer demostrada la espresada fórmula, no se estrañará el que yo haya asegurado haber llevado algo mas adelante las ideas de Mr. Cauchy.*

Mr. Leslie, en la 4ª *edicion de su Geometría, impresa en* 1820, *dice:* "*La Geometría, como las otras ciencias que no están limitadas á las operaciones del entendimiento, necesita últimamente apoyarse en observaciones esternas. Pero estos hechos primarios son tan pocos, tan distintos y obvios, que el subsiguiente giro del razonamiento es seguramente seguido para la ilimitada estension, sin apelar á lo evidencia de los sentidos. La ciencia de la Geometría, por lo mismo, debe su perfeccion á la estrema sencillez de sus fundamentos, y no saca ventaja visible del modo artificial de su contestura. Los axiomas son aquí desechados, como siendo totalmente inútiles, y mas bien aptos para producir oscuridad.*" *Este Autor ha in-*

tentado dar una demostracion de que la línea recta es la mas corta entre dos puntos, *que pongo por nota en el* (§ 373), *para que el lector pueda compararla con la mia.*

Mr. Cresswell en su tratado de Geometría, impreso en 1819, *critica con muchísimo fundamento los vicios que se cometian para dar á conocer lo que es* superficie, línea, y punto, *y coincide en un todo con el modo que yo sigo sobre este particular. Despues dice:*

"Es bien sabido que bajo el mismo título de axiomas, Euclides ha colocado proposiciones que difieren mucho en su naturaleza las unas de las otras. Algunas de ellas son ó puras difiniciones, ó aun cuando sean verdades evidentes por sí mismas, son las inmediatas consecuencias de las definiciones; uno de dichos axiomas es un teorema que requiere y admite fácilmente demostracion; y el último de ellos pertenece á aquella clase peculiar de proposiciones que Arquímedes ha llamado propiamente asumptions. *Estas, á la verdad, pueden ser consideradas como pruebas de la presente imperfeccion de la ciencia de la Geometría. Ellas deben haber sido consideradas como introducidas en su origen, solo con el objeto de que los progresos de la ciencia no pudiesen ser impedidos. Por lo que, se percibe, que siempre que puedan ses deducidas de alguna hipotésis mas clara, no deben retener su forma por mas tiempo......"*

Podría citar algunos otros pasages tanto de dicho autor como de otros en favor de mi asercion; pero los omitiré, dejando al lector que examine el asunto con la debida imparcialidad: quedando yo satisfecho con no haber omitido diligencia alguna que pueda conducir para completar y mejorar esta obra, convencido de que mientras mas se facilite la propagacion de los conocimientos matemáticos, mas ventajas se proporcionan al género humano.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTA SEGUNDA PARTE.

GEOMETRÍA.

De las paralelas.

Digresion acerca de la teoría de las paralelas.

Del círculo y de las rectas consideradas en él.

De los ángulos considerados en el círculo.

De las figuras en general y propiedades de los cuadriláteros.

De los polígonos.

De las líneas proporcionales.

De la semejanza de las figuras.

SEGUNDA PARTE.

De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.

Comparacion de las superficies y volúmenes de los cuerpos en general, y en particular cuando son semejantes.

DE LA TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

De la formacion de las tablas de las líneas trigonométricas.

De la resolucion de los triángulos rectángulos.

De los triángulos obliquángulos.

GEOMETRÍA PRÁCTICA.

De la nivelacion, medicion de las líneas, y de los instrumentos con que se ejecutan estas operaciones.

De los instrumentos que sirven para medir los ángulos.

De la medicion de las distancias en parte ó en todo inaccesibles, y del levantamiento de planos topográficos.

Acerca del Tratado Elemental de Matemáticas ha comunicado el Consejo Real á las universidades del reyno y reales estudios de S. Isidro en 11 de octubre de 1815 la siguiente *Circular*, que se insertó en la gaceta del 24 del mismo.

«Con Real órden de 8 de octubre del año próximo se remitió á consulta del Consejo el Tratado Elemental de Matemáticas que habia presentado su autor Don José Mariano Vallejo, con representacion en que solicitaba que llevándose á efecto una órden de la Regencia del mes de agosto de 1810, se adoptase dicha obra por testo en las universidades y colegios de España é Indias. Pedido informe á las universidades mayores del reyno, informaron lo que tuvieron por conveniente, convinieron las tres en que la obra es de mucho mérito por su método, claridad y escelentes ideas. Y visto por el Consejo, con lo espuesto por los tres señores fiscales, teniendo presente que en virtud del Real decreto de 1.° de febrero de este año se trata en el dia de formar un plan general de estudios, y se halla nombrada al efecto una junta de varios señores ministros, hizo presente á S. M. su dictámen en consulta de 28 de setiembre próximo, y conformándose con él, se ha servido acordar se deje á las universidades en la libertad de adoptar el tratado de Vallejo desde luego, si quieren, aunque solo por ahora, y sin perjuicio de lo que S. M. se digne resolver en vista del plan de estudios que le proponga la junta de ministros creada con este objeto. Publicada en el Consejo la antecedente Real resolucion, ha acordado su cumplimiento, y que se comuniquen las correspondientes á las universidades del reyno para su inteligencia y observancia en la parte que les corresponda.

TRATADO ELEMENTAL
DE GEOMETRÍA.

PARTE PRIMERA.

Nociones preliminares.

336 La palabra *Geometría* quiere decir medicion de tierra, porque este fué sin duda su orígen (*); pero en el dia se comprende bajo este nombre *la ciencia que trata de averiguar las relaciones y propiedades de la estension ó de la cantidad continua, en cuanto está terminada ó figurada.*

Ya hemos dicho (introd.) que por estension se entiende *el espacio que ocupa un cuerpo*, y que los cuerpos no solo se hallan dotados de estension, sinó de todas las otras propiedades que allí enumeramos; pero la Geometría solo considera la *estension* y la *figurabilidad*, porque todo cuerpo, sea el que fuese, ha de estar termi-

(*) *Hay diversas opiniones acerca del orígen de la Geometría. La mayor parte de los autores la hacen nacer en Egipto. Tal es, por ejemplo, Heródoto, el primero que entre los antiguos ha escrito la historia en prosa, y quien por esta causa merece mas crédito; porque, escribiéndose ántes todo en verso, quedaba desfigurado por las ficciones poéticas; y así, pondrémos aquí lo que él dice (libro 2.°) aprendió en sus viages á Tebas y á Menfis: "Me aseguraron que Sesostris »habia repartido el Egipto entre sus vasallos, y que habia dado á ca»da uno igual porcion de tierra en cuadro, con la condicion de pagar »anualmente un tributo proporcionado: si la heredad de alguno que»daba disminuida por el rio, lo hacia presente al Rey, el cual envia»ba á reconocer el terreno, y lo hacia medir con el fin de saber en »cuanto se habia disminuido, y no obligar á pagar mas tributo que el »correspondiente á lo que le habia quedado. Yo creo, añade Heródoto, »que de aquí tomó orígen la Geometría y pasó á los Griegos."*

nado; y los diferentes modos con que lo puede estar, se dice que son su *forma* ó su *figura*.

Si queremos adquirir bien la idea de la estension, supongamos que se tenga en la mano un objeto cualquiera, tal como un libro, y observarémos que este libro ocupa una parte del espacio; si le quitamos de donde le teníamos, la parte del espacio que ocupaba ántes allí se quedará; y aquella es la estension de dicho libro.

Ahora, un cuerpo cualquiera que ha de ocupar un espacio, lo hace en tres sentidos diferentes; porque ha de tener algo de largo, algo de ancho y algo de profundo; y á cada una de estas diversas maneras en que es estenso el cuerpo, se le llama *dimension*; de manera que la estension de un cuerpo consta de tres dimensiones, á saber, de *longitud*, *latitud* y *profundidad* ó *grueso*; todo lo que hay desde A á B (fig. 1) constituye la longitud del libro; lo que hay desde B á D su latitud; y lo que hay desde B á G su grueso.

Adquirida ya esta idea de la estension, resulta que aunque el objeto que la causa padezca alteraciones, perezca ó se destruya, no por eso variará la idea que nos hemos formado de ella; de donde se infiere que no siendo el objeto de la Geometría la estension material de los cuerpos, sinó la inmaterial y penetrable que ha concebido nuestro entendimiento, aunque ya no hubiese cuerpos en el universo, no por eso dejarian de ser evidentes todas las proposiciones que los Geómetras demuestran de ella. Y así, aunque los cuerpos estan espuestos á alteraciones, permanecen de todo punto inmutables las verdades de la Geometría, porque ellas no dependen de la materia, sinó de las ideas claras y distintas que se forma el entendimiento de las tres dimensiones.

337 Aunque en todo cuerpo se hallan reunidas las tres dimensiones, y constituyen lo que se llama *volúmen* ó *cuerpo geométrico*; no obstante por medio de la abstraccion, podemos prescindir de una de ellas tal como el grueso, y entónces queda solo la estension considerada en su longitud y latitud, que recibe el nombre de *superficie*; así, prescindiendo del grueso BG (fig. 1), nos quedamos solo con la estension en el sentido de su longitud AB y en el de su latitud BD.

Si ahora en esta superficie prescindimos del ancho BD, nos quedarémos solo con la idea de estension en sola longitud, á la cual se le da el nombre de *línea*, de manera que AB es una línea; si prescindimos aun de esta longitud, nos quedarémos sin estension, y á esta idea que nos resulta la llamarémos *punto matemático*.

Nada hay en los cuerpos que dé á conocer cual de las tres dimensiones es la longitud, cual la latitud, y cual la profundidad ó grueso; esto cada uno lo suele considerar á arbitrio, aunque lo

mas que se acostumbra hacer es tomar por longitud la mayor de las dimensiones, por latitud la mediana, y por grueso la menor (*). Si en vez de haber prescindido de la dimension BG ó DF, hubiéramos prescindido de la AB, nos hubiera quedado la estension considerada en sus dos dimensiones BD y BG, lo que constituye tambien una superficie; si hubiéramos prescindido de la dimension BD, nos hubiéramos quedado solo con la AB y BG, lo que hubiera constituido tambien la superficie AHGB, ó con la CD y DF que constituyen la superficie CDFE.

Si observamos por donde acaba este cuerpo, verémos que, en el sentido de su longitud, acaba ó está terminado por la superficie BDFG hácia la derecha, y por la AHEC hácia la izquierda; en el sentido de su ancho, por las superficies AHGB y CDFE; y en el sentido de su grueso, por las ACDB y HEFG; por lo cual se dice que *las superficies son los límites de los cuerpos*.

La voz límite conviene á la superficie respecto del cuerpo ó volúmen geométrico, en toda la estension de su significado (328); porque si suponemos que la dimension BG, por ejemplo, vaya disminuyendo, la superficie ó cara HEFG se irá acercando á la ACDB, á la cual se podrá acercar tanto como se quiera; pero jamas podrá llegar á confundirse con ella sinó cuando háyamos supuesto que la dimension BG se redujo á cero.

Si consideramos ahora por donde acaba la superficie ó por donde está terminada, advertirémos, por ejemplo en la ABDC, que lo está, en el sentido de su longitud, por la dimension BD y por la AC; y en el sentido de su latitud, por AB y CD; y así se dice que los límites de las superficies son líneas. Aquí, por la misma razon que ántes, se tiene que *la línea es el verdadero límite de la superficie*; porque si en la superficie ABDC suponemos que vaya disminuyendo la BD, irá disminuyendo dicha superficie, y tanto mas se irá acercando á reducirse á la línea AB, con la cual se llegaría á confundir solo en el caso de que se redujese enteramente á cero la línea ó dimension BD.

Como ya la línea solo tiene longitud, se deduce que solo podrá estar terminada en este sentido; y así es, que la AB está termina-

(*) *En algunos casos particulares, dice Develey, despues de esponer lo mismo que nosotros estas denominaciones son remplazadas por otras que el uso ha introducido. Así, se dice la* profundidad *de un lago y no el espesor de un lago; se dice tambien la profundidad de un pozo, de un vaso &c.; y la profundidad en este sentido no es siempre la menor de las tres dimensiones, y aun puede ser la mayor.*

da hácia la derecha en B, y hácia la izquierda en A, y á estos parages donde terminan las líneas se les da el nombre de *puntos*; de manera que el punto *es un verdadero límite de la línea*, porque mientras menor vaya siendo la distancia AB, mas se va acercando A á B, y solo se llegarán á confundir estos dos puntos en uno solo, cuando desaparezca la línea AB y no haya estension por consiguiente; de donde resulta que el punto ya no es estension, sinó el límite de toda estension.

Tambien hubiéramos podido llegar á tener la idea del punto, suponiendo que en el cuerpo fuesen disminuyendo á un tiempo las tres dimensiones BG, BD y AB, de manera que se confundiesen á un tiempo los estremos G, D y A con B, en cuyo caso toda la estension se nos habia reducido al punto B.

338 Bien adquirida ya la idea del punto analíticamente, podemos deducir de ella sintéticamente las de la línea, superficie y volúmen. Los antiguos empezaban su Geometría por la definicion del punto, diciendo: que punto *era el que no tenia partes*, *el que era límite de sí mismo*, *el que era indivisible*: definiciones que á la verdad, despues de adquirida la idea del punto, se ve que en efecto le conviene *el no tener partes*, *el ser límite de sí mismo* y *el ser indivisible*; pero de ninguna manera podemos formar la idea del punto por ninguna de estas definiciones. Así es, que los Sabios modernos han declamado, y con razon, contra este modo de principiar la Geometría; por lo que nosotros, siguiendo los procedimientos que indica la buena Metafísica, hemos procurado llegar analíticamente á esta idea, sin dejar hueco ni salto; pero ahora procederémos sintéticamente para manifestar que la estension se puede concebir originada del punto (*).

Supongamos que el punto A se mueva, y tendrémos que los diversos parages del espacio por donde vaya pasando constituirán una línea, porque solo tendrá longitud, puesto que solo espresará lo mas ó ménos que háyamos concebido que ha caminado el punto; y no tendrá latitud porque el punto no la tenia: de manera que podrémos concebir originada del movimiento del punto A, una línea cualquiera tal como la AB (fig. 1); si suponemos que esta línea BA se mueva en un sentido cualquiera, pero

(*) Hutton define el punto del modo siguiente: "*Un punto es el que tiene posicion, pero no magnitud, ni dimensiones.*" Y Schwab dice: "*El punto no se estiende en ningun sentido, y no es una cantidad. Un punto no difiere de otro sinó por su posicion relativa á otros objetos.*"

que no sea en el mismo AB, los diversos parages del espacio por donde haya pasado constituirán una superficie tal como ABDC ó ABGH; y finalmente, si concebimos ahora que una de estas superficies, tal como la ABDC, se mueva en otro sentido diferente de aquel en que se movió la línea AB para trazarla, tendrémos ya originado el vólumen ó cuerpo geométrico ABDCEFGH.

En los cuerpos solo vemos los parages por donde estan terminados, y como esto es lo que constituye su superficie, vamos ahora á manifestar cuantas clases de superficies hay. La superficie puede ser de dos maneras; ó *plana*, que es aquella en que todos sus puntos estan tan altos los unos como los otros; ó *curva*, que es aquella en que todos sus puntos no estan tan altos los unos como los otros. En nuestro libro es una superficie plana la ABDC; y es una superficie curva la CDFE. Las superficies curvas pueden ser de dos maneras, *cóncavas* y *convexas*; se dice que es cóncava una superficie, cuando los puntos que se hallan en su medio son los mas remotos del parage por donde se mira; y es convexa, cuando respecto de este mismo parage son los puntos del medio los que mas se acercan. La copa de un sombrero, vista por dentro, presenta una superficie cóncava, y vista por fuera la presenta convexa. Cuando un cuerpo está terminado por una parte por superficie curva y por otra parte contigua á ella por una plana, se dice que su superficie es *mista*; si la parte curva es *cóncava* recibe el nombre de *planocóncava*, y si *convexa* el de *planoconvexa*: un sombrero cuando tiene tendidas sus alas, si se le mira por lo interior, presenta una superficie *planocóncava*, y cuando por lo esterior *planoconvexa*.

La línea tambien puede ser de dos maneras, *recta y curva*; línea recta es *aquella que tiene todos sus puntos en una misma direccion* (*), tal como la AB, la BD &c. (fig. 1), y curva es *aquella cuyos puntos no estan todos en una misma direccion*, tal como la DF, la BG &c.

(*) *La palabra* direccion *espresa una sensacion, por lo cual no se puede definir; y así, solo debemos hacer conocer cual es la sensacion á que se da este nombre, que es la siguiente: cuando salimos al campo, vemos á un mismo tiempo varios objetos; si fijamos nuestra atencion sobre dos de ellos, advertimos que, segun variemos de lugar ó posicion, los vemos de diferente modo, y tambien que ya sea con estudio ó sin él, nos solemos colocar de tal manera que el un objeto impide el que veamos el otro; cuando nos sucede esto, decimos que nos hallamos en la misma* direccion *que los dos objetos; y todos aquellos otros que detras,* 339 Tambien pudiéramos haber llegado á las ideas de línea recta y curva por el modo de concebir originadas las líneas; pues si concebimos que el punto A (fig. 5) se mueve siempre en una misma direccion, originará la línea recta AB; y si suponemos que el punto A varíe á cada paso de direccion, originará una línea curva tal como la AC.

---

de ellos pudiéramos poner, de modo que se ocultasen, estarian tambien en la misma direccion.

Entendido ya lo que es direccion, se tendrá bien percibida la naturaleza de la línea recta y de la curva. Algunos autores han dicho que las ideas de la línea recta y de la línea curva, son ideas simples que se pueden considerar como originadas inmediatamente de la sensacion, diciendo, por ejemplo, línea recta es la AB (*fig.* 1) y curva es toda aquella que no es recta, tal como la BG. *Aunque en este modo de pensar no han ido del todo descaminados, no obstante hay impropiedad; porque al fin la AB que se presenta á nuestros sentidos no es la línea recta matemática, sinó un símbolo con que la representamos: y estando ciertos de que este símbolo ha de tener ancho, cosa de que carece la línea matemática, no puede ser suficiente para dar idea de una cosa de tanta importancia el ver un signo que la representa no como ella es.*

Otros, entre los cuales se cuentan los mas célebres Geómetras modernos, han querido definir la línea recta diciendo que es el camino mas corto que hay entre dos puntos. *A pesar del mérito y celebridad bien merecida de los Sabios que han adoptado esta definicion, yo encuentro que es la mas impropia que se puede dar; para lo cual me fundo en dos cosas:* 1.ª *que esta es una proposicion que espresa mas bien una propiedad secundaria de la línea recta, que la esencia de la misma recta, reparo que confiesan los mismos que la adaptan:* 2.ª *que siendo esta proposicion la primera de la Geometría, y en la cual estriba el fundamento de todas las demas, no se debe tomar por definicion de una línea particular, una proposicion que debe ser el resultado de la comparacion de esta línea con todas las demas que pueden existir en la cabeza del Geómetra; y como luego de esta definicion hacen depender todas las demas verdades de la Geometría, se deduce que es el mayor absurdo que se puede cometer, el tomar por principio fundamental de la Geometría, lo que debe ser el resultado de la misma Geometría; pues de este modo se comete un gran círculo vicioso.*

Otros han dado una definicion cualquiera de la línea recta, y despues han tomado por axioma el que sea la mas corta que se puede tirar desde un punto á otro: en esto no han procedido tan mal, pues

Se dice de una curva que es cóncava respecto de un lado, cuando los puntos intermedios de ella distan mas respecto de aquel lado; y que es convexa cuando los puntos intermedios son los que aparecen mas cerca.

Si concebimos ahora que una línea recta CD (fig. 1) se mueva á lo largo de otra recta tal como la DB, originará la superficie

---

tal vez no se hallará uno que al ver las AB y ACB (fig. 2) no diga y perciba con claridad que la ACB es mayor que la AB. Sin embargo, no es esta una de aquellas proposiciones que verdaderamente son axiomas, y mucho ménos esta que tambien han supuesto, á saber, que la ACB es menor que la ADB que resulta del concurso de las dos rectas *AD* y *DB*.

Para mí no solo esta última proposicion no es axioma, sino que ha sido una proposicion dudosa; y así, traté de demostrarla en mis Adiciones á la Geometría de Don Benito Bails, manifestando los motivos que habia tenido para ello en la pág. 20 *y en la advertencia de mis exámenes del Seminario de* 18 *de julio de* 1804.

Con la mira de saber si mi duda era fundada, ó si consistia en alguna ilusion mia, hice la observacion siguiente con mis discípulos el dia 9 *de abril de* 1806 *que fué un dia ántes de señalarles leccion de Geometría. Puse en el encerado una figura idéntica con la (fig.* 3*), y les dije que me fuesen diciendo cual de las dos líneas ACB y ADB era la mayor; y de catorce que tenia aquel dia en mi clase dijeron que era mas larga la curva ACB los siete caballeros siguientes: don Manuel Villavicencio, Don José Isla, Don José Cacho, Don Narciso Carles, Don Cayetano Navia, Don Juan Ariza y Don Ignacio Negri: dijeron que el conjunto ADB de las dos rectas AD y BD era mayor que la curva ACB los cuatro siguientes: Don Mariano Ibañez, Don José Joaquin Cano, Don Francisco Latorre y Don Cayetano Juncar; y finalmente dijeron que era igual la ADB con la ACB los tres siguientes: Don Rafael Sousa, Don Cárlos Guernica y Don Victor Alejo; donde se ve que de los catorce solo cuatro acertaron con la verdad, pues es la ADB mayor que la ACB: con solo uno que hubiera dudado era suficiente para no tener por axioma esta proposicion. Aun, para convencerme mas de si me podia fiar en la observacion, les puse despues una figura idéntica con la* 4.ª*; y les pregunté cual de las dos líneas era mayor, si la AB ó la ABD, y todos me dijeron que era mayor la ABD; por la cual entre esta proposicion, que es nuestro cuarto axioma* (introd.) *y la anterior, hay una grandísima diferencia, para colocar aquella en el número de los axiomas como se hace con esta.*

Ya se van convenciendo los Geómetras de esta verdad; pues Mr.

plana; y si concebimos que una línea recta CD se mueva en la direccion de la curva DF, ó que la curva DF se mueva en la direccion de la recta DC, originará la superficie curva DFEC; y por último concibiendo que una superficie se mueva en la direccion de una línea cualquiera, resultará el volúmen ó cuerpo geométrico; si la superficie estuviese terminada por solo líneas rectas, y se mo-

---

F. Peyrard en la proposicion 2.ª de su apéndice á la Geometría de Euclides traducida por el mismo, pone una nota en que dice:

"Arquimedes establece por principio que dos rectas que comprenden un arco y que tienen los mismos estremos que este arco son mayores que dicho arco; si Arquimedes no ha demostrado este principio, que no es evidente por sí mismo, es porque es imposible demostrarlo de un modo satisfactorio. Es sin duda por causa del defecto de evidencia de esta proposicion; y por la imposibilidad de demostrarla rigorosamente, por lo que Euclides no ha hecho uso de esta proposicion, sin la cual le ha sido imposible demostrar muchos teoremas importantes relativos al círculo, cilindros, cono y esfera."

Mr. Abreu en su suplemento á la traduccion de la Geometría de Euclides de Mr. Peyrard, y á la Geometría de Mr. Legendre, hace entrar el axioma en la definicion de la curva, pues dice:" Curva plana, *es una línea situada en un plano y que cada parte convexa del mismo lado, por pequeña que se la suponga, es siempre mayor que su cuerda, y menor que toda línea esterior situada en el mismo plano, y teniendo la misma cuerda.*

Mr. Schwab cifra la esencia de la línea recta *en poder girar al rededor de sus dos estremos, sin que ninguno de los puntos intermedios mude de lugar.*

Como toda la evidencia geométrica nace de la definicion y de esta primera propiedad de la línea recta, pondré aun otra definicion que se ha dado sobre este punto.

La Place ha manifestado hasta en esto la delicadeza de sus ideas: hé aquí como se esplica en el tomo 4.° de las Juntas de las Escuelas Normales. "Para conocer bien las propiedades de los cuerpos se ha hecho abstraccion, primero de sus propiedades particulares, y no se ha visto en ellos sino una estension figurada, móvil é impenetrable. Se ha hecho abstraccion aun de estas dos últimas propiedades generales, considerando la estension simplemente como figurada. Las numerosas relaciones que presenta bajo este punto de vista, son el objeto de la Geometría. En fin, por una astraccion aun mayor, no se ha considerado en la estension sinó una cantidad susceptible de aumento ó de diminucion, este es el objeto de la ciencia de las magnitudes en general, ó de

viese en la direccion de una recta, originaría un cuerpo terminado todo por superficies planas; si la misma superficie se moviese por una línea curva, ó una superficie, terminada por una ó muchas curvas, ó por rectas y curvas, se moviese en la direccion de una recta ó curva, el cuerpo estaría terminado en parte por superficies planas, y en parte por superficies curvas.

De todo lo que acabamos de esponer se deduce que la Geometría debe tener tres partes: 1.ª *la que trate de las líneas ó de la estension en sola longitud*; 2.ª *la que trate de las superficies ó de la estension en longitud y latitud*; y 3.ª *la que trate de los cuerpos ó volúmenes geométricos, ó de la estension en longitud, latitud y profundidad ó grueso* (*).

---

la Aritmética universal, que ha llamado nuestra atencion en las lecciones precedentes. Despues se han restituido sucesivamente á los cuerpos las propiedades de que se les habia despojado: la observacion y la esperiencia han hecho conocer otras nuevas, y se han determinado las nuevas relaciones que nacian de estas adiciones sucesivas, ayudándose siempre de las relaciones descubiertas anteriormente. Así la Mecánica, la Astronomía, la Óptica y generalmente todas las ciencias que se apoyan á un tiempo en la observacion y el cálculo, han sido creadas y perfeccionadas. Por lo cual estais viendo que estas diversas ciencias se encadenan las unas con las otras, y que tienen un origen comun en la ciencia de las magnitudes, cuya útil influencia se estiende á toda la filosofía natural. Este método de descomponer los objetos y de recomponerlos para percibir perfectamente sus relaciones se llama análisis. *El espíritu humano le es deudor de todo lo que sabe con precision sobre la naturaleza de las cosas."*

"La estension figurada, de que yo me propongo hablaros ahora, no existe sinó con sus tres dimensiones; mas para considerarla por el método analítico, se principia por despojarla de dos de estas dimensiones, y reduciéndola así á una sola se tiene la idea de línea; *si en esta idea se separa toda relacion con dos dimensiones, se tiene la idea de la* línea recta, *porque aunque una curva no tiene mas de una dimension, sin embargo la idea de la curvatura supone necesariamente la consideracion de dos dimensiones. La estremidad de la línea forma el* punto, *que es la última abstraccion del entendimiento en la consideracion de la estension. La* superficie *es la estension considerada con dos dimensiones, y si en esta idea se hace abstraccion enteramente de la tercera, se tiene la idea del* plano; *en fin la estension con sus tres dimensiones forma el* sólido."

(*) *Develey divide su Geometría impresa en Paris, año de 1816 en solo dos partes; la primera trata de la estension en un plano, y*

En la primera parte, que es la que ahora llama nuestra atencion, suponemos que las líneas, sean rectas ó curvas, estan trazadas sobre una superficie plana que concebimos sin límites; esto es, prolongada hácia todas partes; y á esta superficie la caracterizarémos con el nombre de *plano matemático*, cuya esencia es el que todos sus puntos esten tan altos los unos como los otros, ó que se le pueda aplicar una línea recta en todos sentidos: en la naturaleza no hay un plano perfectamente matemático, porque siendo todos los cuerpos porosos, estan llenos de hoyos y de eminencias (*).

340 Del modo con que hemos concebido originada la línea recta, resulta que para fijar su posicion, basta *fijar dos de sus puntos*; porque en la idea de direccion entran dos, á saber, la del objeto, parage ó punto A (fig. 5) desde donde se ha de mover, y la del objeto, parage ó punto B, á que se ha de dirigir. *Un punto no basta para determinar la posicion de una recta*, porque en cualquier parage que nos pongamos delante de un objeto, advertirémos que nos oculta parte del espacio; y todo aquello que nos oculte se hallará en la direccion en que nos encontramos nosotros con el objeto: y como podemos tomar todas las posiciones que queramos, resulta que tambien podrá haber todas las direcciones que se deseen, y por esta causa *por el punto* O (fig. 6) *pueden pasar todas las líneas que se quieran*, tales como las AB, CD, MN, PQ, &c.

Cor. 1.° De aquí resulta que *desde un punto á otro no se puede tirar mas de una recta*; porque si se pudiesen tirar dos que fuesen diferentes entre sí, no bastarían dos puntos para determinar la posicion de una línea recta, que es contra lo que acabamos de manifestar.

Cor. 2.° Igualmente se deduce que *dos rectas solo se pueden encontrar en un punto*, porque si se encontrasen en dos se confundirían.

Esc. Aunque desde el punto A al punto B no se puede tirar mas de una recta, *se pueden tirar cuantas curvas se deseen*, como se ve en la (fig. 7); porque para ir desde A á B se puede variar de direccion de cuantas maneras se pueda discurrir. De todas las curvas ACB, ADB, AEB, AFB, &c. será mas curva la que mas se separe de la recta AB (*).

Cor. 3.° De aquí se sigue que *la distancia entre dos puntos se debe medir por una recta*, por ser la única que se puede tirar de su especie.

341 Puesto que la idea de direccion la tenemos sin límites, resulta que *dada una recta, concebimos que se puede prolongar* y *que se puede acortar*; de manera que la AB (fig. 8) la podrémos concebir prolongada por uno de sus lados una magnitud tal como AD ó BC, ó por ambos y que se convierta, por ejemplo, en DC; y tambien la podrémos concebir acortada por uno solo de sus lados convirtiéndose en AE ó en BF; ó por ambos, de modo que se convierta en FE, y siempre quedará una línea recta.

342 Tambien se infiere de la idea de la línea recta, que una recta se puede *superponer* (poner ó colocar encima) sobre otra recta, de manera que se ajusten ó confundan exactamente; porque si fijamos dos puntos cualesquiera sobre un plano, podrémos concebir que por ellos pasan ambas, y como tendrían en este caso dos puntos comunes se confundirían; de donde resulta que *si dos líneas son iguales y se coloca la una sobre la otra, se ajustarán ó confundirán en todos sus puntos*.

«Esto nos suministra medios para resolver el siguiente problema.

«*Dadas dos rectas hallar su comun medida*, ó si no la tienen *hallar la relacion aproximada de la una á la otra*.

«*Res.* y *Dem.* Sean AB y CD (fig. 8*) las dos rectas dadas: colóquese la menor CD sobre la mayor AB tantas veces como se pueda, y se hallará que está contenida, por ejemplo, dos veces desde A hasta E, y ademas queda la resta EB, de modo que se tendrá $AB = 2CD + EB$.

«Colóquese despues la resta EB en la CD las veces que se pueda, y se hallará que está contenida tres veces, quedando una resta FD, lo que da $CD = 3EB + FD$.

«Póngase esta segunda resta FD sobre la primera EB la veces que se pueda, y se hallará que está contenida en ella una vez, dejando por resta la GB, de modo que será $EB = FD + GB$.

---

la segunda de la estension en relieve: y advierte por nota que no ha seguido la division en líneas, superficies y sólidos, porque no se sabe entónces donde colocar los capítulos de los planos considerados de dos en dos, de tres en tres, &c. y que no circunscriben espacio.

A la parte que trata de las líneas, se le suele llamar lineametría; *á la que trata de las superficies*, planimetría, *y á la que trata de los volúmenes*, stereometría.

(*) *Mr. Schwab lo define así*: "*El plano es una superficie que conserva la misma forma, cualquiera que sea el lado bajo que se considere, y que, estando vuelta, se puede aplicar sobre su primera posicion y coincidir perfectamente con ella.*"

(*) *Esta observacion es muy importante, pues de ella resulta la medida de la curvatura como se ve en mi memoria sobre este punto.*

{Si colocando la tercera resta GB sobre la segunda FD, se encuentra que está contenida exactamente cuatro veces, se tendrá por último $FD = 4\,GB$.

{Sustituyendo ahora este valor de FD en el de EB, resultará $EB = 4\,GB + GB = 5\,GB$.

{Sustituyendo estos valores de EB y FD en el de CD, se tendrá $CD = 3 \times 5\,GB + 4\,GB = 15\,GB + 4GB = 19GB$; y poniendo en vez de CD y EB sus valores en el de AB, será por último $AB = 2 \times 19GB + 5\,GB = 38\,GB + 5\,GB = 43GB$.

{Donde se ve que la última resta GB es la comun medida de las rectas AB y CD; y pues que dicha comun medida está contenida cuarenta y tres veces en AB y diez y nueve en la CD, se sigue que estas dos rectas tienen entre sí la relacion de 43 á 19.

{*Esc.* 1.° Si, procediendo de este modo, no se llegase á una resta que estuviese contenida exactamente en la anterior, dichas dos líneas no tendrían ninguna comun medida ó serían incomensurables. En este caso, para hallar su relacion aproximada, se va colocando cada resta en la antecedente, hasta que se llegue á una resta que por su pequeñez no se pueda ya averiguar con el compas las veces que está contenida en la antecedente, y entónces ó se desprecia si es muy pequeña, ó si no, se reputa á ojo las veces que está contenida en la resta anterior; y sustituyendo estos valores en las restas antecedentes se llegará á tener la relacion aproximada que tienen entre sí.

{*Esc.* 2.° Este procedimiento es algo largo, y por eso se ha ideado el referir todas las líneas á una, que se elige á arbitrio y se repite cierto número de veces en otra línea, que es lo que forma una *escala.*}

La construccion mas sencilla de una escala es la siguiente: supongamos que sea *m* (fig. 8**) la unidad de medida á que se quieran referir todas las líneas: se repetirá diez veces de seguida desde A hasta P, y luego se tomará la distancia AP, y se repetirá un número cualquiera de veces hasta B; sobre P se pone o, y en la primera division se pone 10, porque de o á 10 hay una distancia igual con 10 veces la *m*. Si la unidad á que se refiere la escala tuviese partes alícuotas, y se pudiese dividir sin confusion en las mismas partes iguales, se ejecutaría en la primera division que hay desde A á P, de manera que si *m* espresase una vara, dividiríamos la distancia AC, en tres partes iguales, para que espresase cada una un pie.

Dos son los usos de esta escala: 1.° el averiguar las partes que contiene una línea dada tal como la DE; para lo cual *se toma esta distancia con el compas, y se ve en la escala cuantas partes contiene*; y 2.° el tomar en ella un número cualquiera de partes iguales, para lo cual *se coloca una pierna del compas en la division que indica las decenas, y luego la otra se coloca en la division que espresa las unidades en la distancia AP.* Para que salga mas bonita y mas cómoda, en vez de una línea AB, se hace que haya tres en la escala, como se ve en la figura.

343 La Geometría ó ciencia de la estension se divide en *elemental* y *sublime.* Geometría elemental es la que trata de las líneas rectas y de la curva que se conoce con el nombre de *circunferencia de círculo*, juntamente con las superficies y cuerpos que de ellas se originan: y Geometría sublime ó trascendente es aquella que trata de todo genero de curvas, juntamente con las superficies y cuerpos que de ellas solas ó combinadas con rectas se originan.

Se da el nombre de circunferencia de círculo á una *línea curva reentrante en sí misma, cuyos puntos distan todos igualmente de un punto comun que se llama centro.* Tal es la AEBD (fig. 9), cuyo centro es C. Al espacio comprendido por la circunferencia se le da el nombre de *círculo.* Toda recta que desde el centro va á parar á la circunferencia se llama *radio*; así las rectas CA, CE, CB &c. son radios; y como estas líneas medirán (340 cor. 3.°) la distancia que hay desde el punto respectivo de la circunferencia al centro, resulta en virtud de la propiedad enunciada, que *todos los radios de un círculo son iguales.*

Para formarnos idea de como se puede originar la circunferencia, concebirémos que una recta cualquiera tal como la CD, se mueva al rededor de un punto fijo C, y el otro estremo irá trazando la circunferencia DBEA. Para trazarla, se usa en la práctica del instrumento que se conoce con el nombre de *compas*; se abre de manera que las dos piernas abracen la línea que ha de servir de radio, se fija una punta del compas en el centro, y se hace dar una vuelta entera á la otra, la cual va trazando una circunferencia de círculo (*).

Toda recta que, pasando por el centro, termina con sus dos estremos en la circunferencia, se llama *diámetro*: tal es la DCE, y como la parte que hay desde el un estremo del diámetro al centro es un radio, y la que hay desde el otro tambien es un radio, resulta que *el diámetro se compone de dos radios, ó es igual al duplo del radio*; y

(*) *No ponemos aquí la descripcion del compas, porque hará mas un jóven con una palabra del Profesor, que con cuantas descripciones se le hiciesen. Tampoco ponemos la de las reglas con cuyo auxilio se tiran las líneas rectas, por la misma razon.*

como todos los radios son iguales, resulta que *tambien lo serán los diámetros.*

344 A una porcion cualquiera de la circunferencia que no sea toda ella, se le da el nombre de *arco*; así la parte ABD (fig. 10) de la circunferencia ABDE es un arco, y la parte DEA es otro arco; toda recta que desde un estremo de un arco va á parar al otro, se llama *cuerda* del mismo arco, tal es aqui la AFD; y se llama *flecha, saeta ó sagita* del mismo arco á la parte BF del radio BC, interceptada entre el punto medio de dicho arco y la cuerda. Se llama *sector de círculo* al espacio comprendido por dos radios y un arco, como el espacio CDBA; y se llama *segmento* al espacio comprendido entre una cuerda y su arco, tal es el ABDFA.

Cuando dos circunferencias tienen un mismo centro, se dice que son *concéntricas*, tales son las ABD y *abd* (fig. 11) que tienen el mismo centro C: cuando tienen diferentes centros se llaman *escéntricas*, tales son las ABD y MNP, porque la una tiene el centro en C y la otra en O. El espacio *ABDdba* comprendido entre dos circunferencias concéntricas se llama *corona ó ánulo*.

345 Teor. *Dos circunferencias concéntricas no se pueden encontrar sin confundirse en una sola.*

Dem. Porque estas circunferencias ó han de tener los radios iguales ó desiguales: si los tienen iguales, todos los puntos de la una se confundirán exactamente con todos los de la otra, y por lo mismo se habrán confundido en una sola circunferencia; si los radios son desiguales, la que tenga menor radio estará toda dentro de la otra, habiendo siempre entre ellas una distancia igual con la diferencia de los radios. *Luego dos circunferencias &c.*

Cor. 1.° De aquí se deduce que si *dos circunferencias se encuentran sin confundirse del todo, serán escéntricas.*

Cor. 2.° *Si dos circunferencias estan trazadas con un mismo radio serán iguales, y si colocamos la una sobre la otra de manera que se confundan sus centros, se confundirán todas ellas.*

346 Teor. *Si un círculo se concibe doblado por el diámetro, la parte inferior se ajustará ó confundirá exactamente sobre la superior, y por lo mismo el diámetro divide al círculo y á la circunferencia en dos partes iguales.*

Espl. Sea el círculo ABDE (fig. 12); vamos á demostrar que si se concibe doblado por el diámetro AD, la parte del círculo AED caerá exactamente sobre la parte ABD; y habiéndose confundido ó ajustado, serán exactamente iguales.

Dem. Si la parte AED no cae exactamente sobre ABD, caerá ó por mas arriba ó por mas abajo. Supongamos que cae por mas arriba, y que esté representada por AND; en este caso tirando la NC,

esta será un radio del círculo, y por consiguiente igual con BC radio tambien del mismo círculo; pero NC es todo y BC parte suya, luego se verifica que la parte es igual al todo; y como esto es un absurdo, se deduce que el supuesto que nos ha conducido á él, tambien es absurdo: luego no se puede suponer que caiga por mas arriba. Supongamos que cae por mas abajo, y que esté representada por AMD; con lo qual tirando la MC, será un radio del círculo, y por consiguiente igual con BC; y como esto tambien es un absurdo por ser la MC parte y la BC todo, se deduce que no puede caer por mas abajo. Luego si no puede caer ni por mas arriba, ni por mas abajo, se habrán confundido y serán iguales, que era L. Q. D. D.

Esc. 1.° Del mismo modo demostraríamos que en el plano donde se halla dicho círculo no hay ningun punto que diste del centro una magnitud igual con el radio, que no sea punto de la circunferencia; porque si supusiéramos que M ó N fuese uno de estos puntos, tirando la CMBN, concluiríamos que CM=CB ó que CN=CB, que son absurdos.

Esc. 2.° Aunque la demostracion del teor. 3.° (§ 325) nada deja que desear en punto á generalidad, claridad y exactitud, sin embargo como en esta proposicion estriban las demostraciones de otras muchas de la mayor importancia, no será inoportuno el demostrarla por consideraciones geométricas; y por lo mismo vamos á probar que *dadas dos cantidades desiguales, si de la mayor se quita la mitad, y de lo que queda la mitad, y así sucesivamente, se llegará á tener un resultado que será menor que la otra cantidad por pequeña que sea.*

Para esto, supongamos que las dos cantidades desiguales estan representadas, la mayor por la línea AB (fig. 12*), y la menor por la K. Colóquese la línea K tantas veces sobre la línea indefinida DM, como se necesite para que un múltiplo de ella tal como DE, sea mayor que AB, y al mismo tiempo sea el múltiplo mayor mas aproximado á AB. Dividida la DE en las partes DF, FG, GE iguales con K, quítese de AB la mitad AH, y del residuo HB la mitad HL, repitiendo esto las veces que se necesite para que las partes de la AB sean tantas como las de DE. Y así, por cuanto BA < DE, si de estas cantidades, se quitasen las mitades AH, DO, los residuos HB, OE serían desiguales, de manera que se tendría HB < OE; pero si de la menor AB quito la mitad AH, y de la mayor la cantidad DF, que sólo será igual con la mitad, cuando DE sea duplo de K, y en todos los demas casos, como en este, será menor, con mas razon quedarán los residuos desiguales, y será HB < FE; si ahora de estas cantidades se quitan las mitades LH, FG, quedarán los residuos LB, GE desiguales, y se tendrá LB < GE; pero LB es lo que resulta de quitar á AB la mitad, y de lo que queda la mitad, y así sucesivamente, y GE es igual con K; luego *si de la mayor de dos cantidades desiguales se quita la mitad, &c.*

{ Si la DE constase de mas partes iguales con K, se procedería del mismo modo, quitándole partes iguales con K, y la mitad á la AB hasta que no quedase mas de una parte igual con K, la cual siempre será mayor que lo que quede de la AB.}

347 Cuando dos líneas AB, AC (fig. 13) se encuentran en un punto A, se da el nombre de *ángulo* á la abertura ó inclinacion que tienen entre sí; el punto A donde se encuentran se llama el *vértice* del ángulo, y se llaman *lados* del ángulo á las dos líneas AB, AC que lo forman. (*)

Cuando un ángulo está solo, se enuncia nombrando la letra del vértice; pero cuando en un mismo punto se forman varios ángulos, se tiene cuidado de leerlos nombrando las tres letras, pero que siempre se pronuncie en medio la del vértice, y así el de la (fig. 13) se leerá BAC ó CAB.

Si concebimos prolongada la CA hasta D por ejemplo, tendrémos que la AB formará con la parte prolongada AD el ángulo BAD, y á los dos ángulos BAC, BAD se les da el nombre de ángulos *contiguos* ó *adyacentes*.

Como, ya se prolonguen ó acorten las líneas AB, AC, su direccion no se altera (341), resulta que la inclinacion ó abertura que tienen entre sí, no varía; por lo que *la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados, sinó de su inclinacion.*

Los ángulos son susceptibles, cómo todas las demas cantidades, de adicion, substraccion, multiplicacion y division; así, el ángulo DCE (fig. 14) es la suma de los DCB y BCE, y el BCE es la diferencia entre los DCE y DCB.

Cuando las líneas que forman el ángulo son rectas, el ángulo se llama *rectilíneo*; cuando curvas *curvilíneo* como los FAE, EAD, DAC (fig. 7); y cuando uno de los lados es una línea recta y el otro una curva, se llama *mistilíneo*, tal es el BAC (fig. 5) ó el CAB (fig. 7).

348 Teor. *Si dos ángulos son iguales y se coloca el vértice del uno sobre el vértice del otro, de manera que el un lado caiga sobre el un lado, dichos ángulos quedarán confundidos, ó el otro lado caerá sobre el otro lado.*

(*) *Mr. Cresswell define el ángulo de este modo: si dos rectas en un plano ilimitado* estuviesen terminadas hácia una *parte por un punto en que ellas coinciden, pero son indefinidas por la otra, cada una de las dos porciones en que ellas dividen el plano, es llamada* ángulo plano rectilíneo.

Espl. Si el ángulo *bac* (fig. 15) es igual con el BAC, y se coloca el uno sobre el otro, de manera que el vértice *a* caiga sobre el vértice A y el lado *ac* sobre el lado AC, vamos á demostrar que *ab* caerá sobre AB.

Dem. Si esto no se verifica, la *ab* caerá, despues de hecha la superposicion, por mas arriba de la AB ó por mas abajo. Supongamos que caiga por mas arriba y que esté representada por AN, y en este caso tendrémos que *bac* estará representado por NAC ó será igual con él: y como por el supuesto *bac* = BAC, será NAC = BAC; pero NAC es todo y BAC parte suya, luego esta suposicion nos conduce á decir que el todo es igual á su parte, lo cual siendo un absurdo, nos manifiesta que el supuesto que nos ha conducido á él tambien es absurdo; luego la *ab* no puede caer por mas arriba de AB.

Tampoco puede caer por mas abajo; porque si suponemos que esté representada por AM, se tendrá MAC = *bac*; y como por el supuesto BAC = *bac*, será MAC = BAC; pero MAC es parte, BAC es todo, luego esta hipótesis nos conduce á que la parte es igual al todo; lo cual siendo tambien absurdo, manifiesta que no puede caer por mas abajo. Luego si no puede caer por mas arriba ni por mas abajo, resulta que caerá encima, y por lo mismo se confundirán. L. Q D. D.

Cor. De aquí se deduce la proposicion inversa, á saber, que *si dos ángulos son tales que, puesto el uno sobre el otro, se confunden ó ajustan exactamente, se debe inferir que son iguales.*

{ *Esc.* Cuando enunciamos una proposicion de esta especie no hacemos mas que recurrir á la idea que nos formamos de la igualdad ó desigualdad; pues para formar esta idea no tenemos mas medio que el de superponer la una cosa á la otra, y si se ajustan exactamente, decimos que son iguales; y si no, decimos que es mayor aquella que, despues de hecha la superposicion, tiene aun una parte que la otra no puede ocupar.}

349 Cuando una línea tal como la DC (fig. 16) cae sobre otra AB formando los dos ángulos contiguos ó adyacentes DCA, DCB iguales entre sí, cada uno de estos ángulos se llama *recto*; y la línea DC se dice que es *perpendicular* á la AB; de manera que se dice que *una línea cae perpendicularmente sobre otra, cuando forma con ella dos ángulos iguales, ó cuando cae sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro.*

Todo ángulo tal como BAC (fig. 17) menor que uno recto, se llama *agudo*; y todo ángulo tal como DEF mayor que uno recto, se llama *obtuso*.

Cuando una línea cae sobre otra formando dos ángulos desiguales, se dice que cae *oblicuamente* sobre ella, ó que es *oblicua* respecto de ella; y así la CK (fig. 16) es oblicua respecto de la AB. Por esta razon cuando un ángulo no es recto, se suele caracterizar con el nombre de *oblicuo* comprendiendo bajo esta denominacion tanto al agudo como al obtuso.

350 Teor. *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*

Espl. Sea DC perpendicular á AB (fig. 16), que formará por consiguiente los dos ángulos DCA, DCB rectos, y la HG perpendicular á EF que tambien formará los HGE, HGF rectos: vamos á demostrar que estos cuatro ángulos son iguales entre sí.

Dem. Tómense las cuatro distancias CA, CB, GE, GF iguales, y tendrémos que la distancia AB compuesta de las dos primeras partes iguales, será igual á la EF compuesta de las dos segundas; y por lo mismo podrémos colocar la EF sobre la AB de manera que se ajusten exactamente (342); luego el punto G, medio de FE, caerá exactamente sobre C, medio de AB. Ahora, estando GE aplicada sobre la CA, digo que el lado GH caerá sobre CD; porque si esto no se verifica, el lado GH caerá fuera del CD: y si suponemos que esté representado por CK diferente de CD, tendrémos que ACK = KCB, puesto que EGH era igual por el supuesto con HGF; pero esto es un absurdo; porque siendo por el supuesto ACD = DCB, no se puede verificar que ACK que es mayor que ACD, sea igual con KCB que es menor que DCB ó que su igual ACD; luego el supuesto que nos ha conducido á él, tambien será absurdo, y por lo mismo no se puede suponer que la GH caiga fuera de la CD: luego caerá encima y se confundirá; y confundiéndose, se habrá verificado que EGH se habrá confundido con ACD, y por lo mismo serán iguales; HGF tambien lo habrá hecho con DCB; por lo que serán iguales tambien; y como ACD = DCB y EGH = HGF, resulta que todos cuatro serán iguales, que era L. Q. D. D.

351 Teor. *Los dos ángulos juntos que forma una línea al caer sobre otra no valen mas ni ménos que dos ángulos rectos.*

Espl. Supongamos que DC (fig. 18) caiga sobre AB de un modo cualquiera: voy á demostrar que la suma de los dos ángulos ACD, DCB contiguos que forma con ella, equivalen á dos rectos.

Dem. Concíbase la perpendicular CE, y tendrémos que los dos ángulos ACE, ECB serán rectos; y como ACD = ACE + ECD, se tendrá ACD + DCB = ACE + ECD + DCB; pero ECD + DCB componen el ángulo recto ECB, luego resultará ACD + DCB = ACE + ECB = 2 rectos = π; que era L. Q. D. D.

Esc. De aquí en adelante llamarémos π á la suma de dos ángulos rectos, y por consiguiente $\frac{1}{2}\pi$ al ángulo recto.

352 De aquí se deduce 1.° que *si uno de los ángulos* ACD *ó* DCB *es recto, lo será igualmente el otro*; porque entre los dos han de equivaler á dos rectos.

2.° Que *si la línea* CD (fig. 19) *es perpendicular á* AB, *la* AB *tambien lo será á la* CD.

Porque el ser CD perpendicular á AB, supone que AEC y CEB sean ángulos rectos; y como debe ser el AEC recto, se deduce que su contiguo ó adyacente AED tambien lo ha de ser, tendrémos que la AE cae sobre la CD, formando dos ángulos rectos, y por consiguiente iguales; luego (349) le será perpendicular. De ser recto el ángulo CEB, tambien se deduce que su contiguo BED lo ha de ser, luego *cuando dos líneas, que son perpendiculares entre sí, se cortan* (*) *forman cuatro ángulos rectos.*

3.° Que *todos los ángulos* ACF, FCD, DCE, ECB, *que se forman* (fig. 20) *en un punto hácia un mismo lado de una línea* AB, *valen juntos dos ángulos rectos*; porque entre todos no podrán valer mas ni menos que los dos ACD, DCB que valen dos rectos.

4.° Que *todos los ángulos* (fig. 21) AEM, MEN, NEC, CEK, KEB, BEQ, QED, DEP, PER, REA *que se pueden formar al rededor de un punto* E, *no pueden valer mas ni menos que los cuatro rectos* AEC, CEB, BED, DEA, *ó* 2π.

353 *Esc.* Se dice que un ángulo es *suplemento* de otro, cuando es lo que le falta para componer dos ángulos rectos; y así, cuan-

(*) *Se dice en general que dos líneas se cortan cuando, teniendo un punto comun, cada una pasa al otro lado de la otra.*

Mr. Legendre llama complemento *de un arco á lo que queda restándole de un cuadrante ó* $\frac{1}{2}\pi$; *asi, espresando por* A *un arco ó ángulo cualquiera,* $\frac{1}{2}\pi - A$ *es su complemento. Donde se ve que si el ángulo ó arco de que se trata es mayor que* $\frac{1}{2}\pi$, *su complemento será negativo.*

Mr. Leslie llama ángulo reverso *á la invertida divergencia de los dos lados de un ángulo, ó á lo que falta á dicho ángulo para componer cuatro ángulos rectos: de manera que el ángulo reverso del AOD (fig. 24) es el agregado de los ángulos DOB, BOC y COA. Despues en las notas pone, que, en la definicion del ángulo reverso, le ha precedido el famoso matemático Stevin de Bruges, que floreció al fin del siglo 16.°; y que le es satisfactorio, aun en tan pequeña innovacion, tener el apoyo de una autoridad tan altamente respetable.*

Despues en la Trigonometría dice: "complemento de un arco es su defecto para llegar á valer un cuadrante; su suplemento es su defecto para una semicircunferencia; y su esplemento es su defecto para valer la circunferencia entera.

do una línea DC (fig. 18) cae oblicuamente sobre otra AB, forma con ella dos ángulos desiguales ACD, DCB que son el uno suplemento del otro. Y se dice de un ángulo que es *complemento* de otro, cuando es lo que le falta ó sobra para un ángulo recto; así, el ángulo ECD es complemento de cada uno de los dos ACD y DCB, del primero por esceso y del segundo por defecto. De donde se deduce que *los ángulos que tienen un mismo suplemento son iguales*; porque añadiéndoles el suplemento, equivaldrán á dos rectos ó á π; *y los que tengan un mismo complemento, solo serán iguales cuando los complementos sean ambos por esceso ó por defecto.*

354 Teor. *Si dos líneas rectas tienen una parte comun, coincidirán en toda su longitud.*

Dem. Porque si esto no se verificase, se empezaría en algun parage á separar la una de la otra. Supongamos en efecto que las dos líneas ABD (fig. 22) y ABE, tengan la parte comun AB, y que empiecen á separarse en C, convirtiéndose la prolongacion de la primera en CD, y la de la segunda en CE. Concibamos sobre la CA una recta CK, que forme un ángulo ACK recto, y tendrémos que los KCE y KCD tambien deberán ser rectos (352); luego serán iguales (350); pero KCE es parte y KCD es todo, luego hemos llegado á tener que la parte es igual con el todo, lo cual, siendo un absurdo, manifiesta que el supuesto que nos ha conducido á él, tambien lo es, y por lo mismo no se puede suponer que á ninguna distancia se separen; luego se confundirán en toda su longitud, que era L. Q. D. D.

355 Teor. *Si dos líneas tiradas al estremo de otra, forman con ella dos ángulos que juntos equivalgan á dos rectos ó á π, dichas dos líneas no son mas que una sola y misma línea.*

Espl. Sean AC y BC (fig. 23) dos rectas tiradas al estremo C de la CD, y que forman con ella dos ángulos ACD, DCB que juntos equivalen á dos rectos ó á π: voy á demostrar que dichas dos líneas AC y CB no forman sinó una sola y misma línea, ó que la CB es la prolongacion de la AC.

Dem. Si esto no se verifica, la AC prolongada caerá ó por mas arriba ó por mas abajo de la BC. Supongamos que la prolongacion de la AC sea la CE, y tendrémos (351) $ACD + DCE = \pi$; y como por el supuesto $ACD + DCB = \pi$, será (intr. axiom. 5.°) $ACD + DCE = ACD + DCB$, que quitando el ángulo comun ACD, quedará $DCE = DCB$; pero DCE es parte, DCB todo, luego tendríamos que la parte era igual al todo; lo cual, siendo un absurdo, manifiesta que el supuesto que á él nos ha conducido, tambien es un absurdo, luego la AC prolongada no puede caer por mas arriba de la CB.

Tampoco puede caer por mas abajo; porque si suponemos que dicha prolongacion sea la CF, tendrémos (351) $ACD + DCF = \pi$, y como por el supuesto $ACD + DCB = \pi$, será $ACD + DCF = ACD + DCB$; de donde quitando ACD, quedará $DCF = DCB$, que tambien es absurdo, porque DCF es todo y DCB parte; luego si la AC prolongada no puede caer por mas arriba, ni por mas abajo que la CB, caerá encima, y por lo mismo dichas líneas AC, CB no formarán sinó una sola y misma línea. L. Q. D. D.

356 Teor. *Si dos rectas se cortan, los ángulos que tienen sus vértices opuestos, que se llaman* ángulos opuestos al vértice, *son iguales.*

Espl. Sean las dos rectas AB, CD (fig. 24) que se corten en el punto O: voy á demostrar qne el ángulo AOD es igual con el COB; y que el DOB es igual con el AOC.

Dem. Si consideramos que la DC cae sobre la AB, tendrémos (351) que $AOD + DOB = \pi$, y considerando que la BA cae sobre la DC, tendrémos $COB + BOD = \pi$; luego (ax. 5.°) $AOD + DOB = COB + BOD$; y quitando el ángulo comun DOB, quedará $AOD = COB$; y como del mismo modo se demostraría que $DOB = AOC$, resulta L. Q. D. D.

357 Teor. *Si sobre un punto de una recta se forman dos ángulos iguales que tengan sus vértices opuestos, las otras dos rectas que forman los otros lados, serán una sola y misma recta.*

Espl. Si en el punto O de la recta AB (fig. 24) suponemos que se forman dos ángulos AOD, COB, cuyos vértices esten opuestos y sean iguales, las otras dos rectas DO, CO, que forman los lados de dichos ángulos, no será mas que una sola y misma recta.

Dem. Por el supuesto, se tiene $AOD = COB$, y añadiendo á ambos ángulos el DOB, será $AOD + DOB = COB + DOB$; pero por ser AB una recta, se tiene (§. 351) $AOD + DOB = \pi$, luego (ax. 5.°) $COB + DOB = \pi$, donde se ve que tenemos aquí dos líneas DO, CO tiradas al estremo O de la BO, que forman con ella dos ángulos; que juntos equivalen á dos rectos ó á π: luego (355) dichas dos líneas serán una sola y misma línea. L. Q. D. D.

Esc. Esta proposicion se puede generalizar mas, enunciándola del modo siguiente:

Si cuatro rectas OA, OD, OB, OC *que concurren en un mismo punto* O, *estan dispuestas de modo que los ángulos opuestos al vértice* (esto es, los que no tienen lado comun) *sean iguales, estas cuatro líneas formarán dos rectas.*

En efecto, sea $AOC = BOD$ y $AOD = BOC$; si sumamos estas dos ecuaciones, tendrémos $AOC + AOD = BOD + BOC$; pero la suma de los cuatro ángulos formados al rededor del punto O, es igual

(352 4.°) á cuatro ángulos rectos; luego BOD + BOC vale dos rectos; luego CD es (355) una línea recta. La suma AOC + AOD ó su igual BOD + AOD vale tambien dos rectos; luego tambien BA es una línea recta, que era L. Q. D. D.

358 Dos líneas rectas no pudiéndose encontrar sinó en un solo punto (340 *cor.* 2.°) resulta que no pueden cerrar espacio; por lo cual definen algunos el *ángulo*, diciendo que es *el espacio indefinido que abrazan dos líneas que concurren en un punto*; como por dos puntos cualesquiera se puede concebir una línea recta, resulta que si por un punto cualquiera de un lado de un ángulo, se concibe una línea que vaya á parar á un punto cualquiera del otro lado, tendrémos ya cerrado un espacio, al cual por estar terminado por tres líneas se le dá el nombre de *triángulo*; y á las tres líneas que lo forman se les llama *lados del triángulo*.

Los triángulos, con relacion á sus lados, se dividen en *equiláteros*, *isósceles* y *escalenos*; y con relacion á sus ángulos, en *rectángulos*, *obtusángulos* y *acutángulos*. Triángulo equilátero es aquel que tiene sus tres lados iguales, tal como el ABC (fig. 25); isósceles es aquel que tiene dos lados iguales, tal como el ABC (fig. 26), y escaleno es aquel que tiene sus tres lados desiguales entre sí, tal como el ACB (fig. 27).

Es rectángulo un triángulo cuando tiene un ángulo recto, tal como el ACB (fig. 28); es obtusángulo, cuando tiene un ángulo obtuso, como el ACB (figura 27); y es acutángulo, cuando ninguno de los ángulos es recto ni obtuso; es decir, cuando sus tres ángulos son agudos, como el ABC (fig. 26). En general cuando un triángulo no tiene ningun ángulo recto, se llama *oblicuángulo*.

Las propiedades del triángulo rectángulo son muy interesantes, y por lo mismo se han caracterizado sus lados con nombres particulares. Así, el lado AB (fig. 28) opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*; y los otros dos lados AC, BC, se designan con el nombre de *catetos*, ó simplemente *lados del ángulo recto*.

En general se suele llamar *base* del triángulo, al lado sobre que se considera insistiendo; pero cuando el triángulo es isósceles, se da el nombre de base al lado que no es igual con ninguno de los otros. La línea que se baja perpendicularmente á la base ó á su prolongacion desde el ángulo opuesto, se llama *altura*; así, las líneas AC son las bases en las (fig. 26 y 27), y las BD las alturas; cuando en el triángulo rectángulo se considera por base un cateto, la altura es el otro cateto; así, en la (fig. 28), si el cateto AC le consideramos como base, el otro cateto BC será su altura.

359 Los casos de la igualdad de los triángulos son el fundamento de todo lo que pertenece á la posicion respectiva de las rectas; y por lo mismo conviene dar á conocer desde luego los tres mas esenciales: reservando para los escolios del (§ 376), y para el apéndice puesto al fin de la segunda parte de este tratado los otros diez casos de igualdad de triángulos, que he añadido en esta tercera edicion.

Primer caso. Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen respectivamente sus tres lados iguales.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, *abc* (fig. 29), en los cuales suponemos AB $=$ *ab*, AC $=$ *ac* y BC $=$ *bc*: vamos á demostrar que sus tres ángulos tambien lo son; esto es, que el ángulo A $=$ *a*, el ángulo B $=$ *b*, y el ángulo C $=$ *c*.

Dem. Haciendo centro en A con un radio AC $=$ *ac*, trácese el arco *mn*; y haciendo centro en B con un radio BC $=$ *bc*, trácese el arco *op*; hecha esta pequeña construccion, concíbase superpuesto todo el triángulo *abc* sobre el ABC, de manera que el lado *ab* se ajuste ó confunda con el lado AB, en lo cual no habrá dificultad (342) por ser AB $=$ *ab*; y tendrémos que el punto *c* estremo de *ac* $=$ AC caerá en algun punto (346 esc. 1.°) del arco *mn*; y por ser *bc* $=$ BC, el estremo *c* del lado *bc* caerá tambien en algun punto del arco *op*; pero los dos lados *ac*, *bc* tienen su estremo en el punto comun *c*, luego este punto será comun á los dos arcos *mn*, *op*; luego será su punto de interseccion; pero su punto de interseccion se halla en C, punto donde se encuentran los lados AC y BC del triángulo ABC; luego el punto *c*, estremo del lado *ac* se habrá confundido con C estremo del AC; y como el punto *a* por construccion se habia confundido con A, resulta (342) que todo el lado *ac* se habrá confundido con AC; y por la misma razon el lado *bc* se habrá confundido con BC, y habiéndose confundido sus tres lados, serán iguales; luego el ángulo en *a* se habrá confundido con el en A, pues el vértice se ha colocado sobre el vértice y sus lados *ab*, *ac* se han confundido respectivamente con AB, AC; luego A $=$ *a*, y del mismo modo se tendrá B $=$ *b*, C $=$ *c*; que era L. Q. D. D.

Esc. 1.° Se debe advertir que los ángulos iguales son los que en cada triángulo se oponen á los lados iguales.

Esc. 2.° Habiéndose confundido ó ajustado exactamente los dos triángulos, resulta que todas las líneas *homólogas* ó tiradas de un mismo modo en ambos, como son bases, alturas &c., se habrán confundido, y serán por lo mismo iguales.

360 Segundo caso. Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.*

Espl. Sean ABC, *abc* (fig. 29) dos triángulos, en que suponemos que $AB = ab$, $AC = ac$, y que el ángulo en $A =$ al en a: vamos á demostrar que dichos triángulos son iguales, ó que convienen en todas las demas cosas.

Dem. Pues que el ángulo en a es igual con el ángulo en A, podrémos concebir superpuesto todo el triángulo *abc* sobre el ABC, de manera que el vértice *a* caiga sobre A, y los lados *ab* sobre AB, *ac* sobre AC. Ahora por ser $ab = AB$ y partir estas líneas desde un mismo punto A, resultará que el punto *b* caerá exactamente sobre B, y por la misma razon el punto *c* caerá sobre C. Pero *b* y *c*, no solo son estremos de *ab* y de *ac*, sino que lo son tambien del lado *bc*; luego tambien se han confundido los estremos del lado *bc* con los del lado BC; luego se ha confundido todo el lado *bc* (342) con el BC; y habiéndose confundido sus tres lados, se habrán confundido sus tres ángulos y sus demas líneas homólogas; luego serán iguales, que era L. Q. D. D.

361 Tercer caso. Teor. *Dos triángulos son iguales, cuando tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, *abc*, en que suponemos que el ángulo $A = a$, el $B = b$, y el lado AB (que se llama *adyacente* respecto de los ángulos A, B, porque estos se hallan en sus estremos) igual al *ab*: voy á demostrar que estos triángulos convienen en todo lo demas, y son por consiguiente iguales.

Dem. Concíbase superpuesto todo el triángulo *abc* sobre el ABC, de manera que el lado *ab* caiga exactamente sobre AB, lo cual se puede hacer, por cuanto $ab = AB$; hecho esto, tendrémos que por ser el ángulo en $B = b$, y $A = a$, el lado *bc* se habrá confundido con BC y el *ac* con AC; luego sus dos lados *ac*, *bc* habiéndose confundido ó ajustado sobre AC, BC, irán á concurrir en el mismo punto C, y por lo mismo todas las partes del triángulo *abc* se habrán ajustado ó confundido exactamente con las del ABC; luego serán iguales, que era L. Q. D. D.

{ *Esc.* Este caso se podría generalizar diciendo, que *dos triángulos son iguales cuando tienen dos ángulos cualesquiera iguales y uno de los dos lados*; pues como verémos (386 *e.* cor. 2.°), el tercer ángulo será igual en ambos. Pero sin recurrir á este conocimiento se completa la demostracion de esta proposicion en el escolio 3.° del (§. 376). }

362 *Cor. general.* De aquí se deduce que *con cualquiera de estas tres circunstancias que se nos diga que construyamos un triángulo, lo podrémos ejecutar, de manera que estos datos no correspondan mas que á uno solo*; pues los demas que se puedan formar con los mismos datos, siendo iguales entre sí, no vienen á ser en realidad mas que un mismo triángulo, puesto en diferentes partes.

Así es, que si nos proponemos formar un triángulo igual con otro, empleando la construccion de los tres lados, practicarémos lo siguiente (suponiendo que *abc* sea el triángulo dado, con el cual queramos formar otro igual): *tirarémos una línea* $AB = ab$; *haciendo centro en* A *con un radio* AC *igual con* ac, *trazarémos el arco* mn; *haciendo centro en* B, *con un radio* BC, *igual con* bc, *trazarémos otro arco* op; *por el punto de interseccion* C *de estos dos arcos, y por* A *y* B, *tirarémos las* AC *y* BC, *las cuales serán respectivamente iguales* (343) *con* ac *y* bc.

{Lo mismo sería si se nos pidiese formar un triángulo con tres líneas dadas á arbitrio, pues en este caso, si suponemos que fuesen las H, K, L (fig. 30), tiraríamos una línea AB que fuese igual con una cualquiera de ellas, tal como la L; y haciendo centro en sus estremos con los radios $AC = H$, $CB = K$, trazaríamos dos círculos CFC′ y GCG′; por los puntos C, C′ donde se encontrasen estos círculos y por los estremos de la AB, tiraríamos las CA, CB ó las AC′ y BC′, las cuales nos darían dos triángulos con las circunstancias pedidas.

{*Esc.* Si el triángulo hubiese de ser equilátero, se trazarían los arcos con un radio igual á la línea dada.}

363 La solucion del problema anterior que nos da medios para construir un triángulo igual con otro, haciendo uso de los tres lados, nos ofrece el medio de formar un ángulo igual con otro y de dividir un ángulo en dos partes iguales, como vamos á enseñar en los dos siguientes problemas.

Problema 1.° *En un punto cualquiera de una línea, formar un ángulo que sea igual con otro ángulo dado.*

Espl. Sea CAB (fig. 31) el ángulo dado, y *ab* la línea sobre la cual se quiere construir el nuevo ángulo que tenga su vértice en *a*.

Res. y *Dem.* Tírese desde un punto cualquiera de la AB, una línea á un punto cualquiera de la AC, tal como la MN, y fórmese en *a* un triángulo *amn* igual con el AMN, y por consiguiente el ángulo en A resultará igual al en *a*; pero en la práctica se hace con mas sencillez del modo siguiente: haciendo centro en *a* con un radio cualquiera, trácese un arco indefinido, tal como *prq*; haciendo centro en A, con el mismo radio, se trazará un arco PRQ hasta que encuentre á los lados del ángulo CAB; se tomará la distancia que hay desde P á Q, y con este radio, haciendo centro en *p*, se trazará un arco *ux*: se unirá el punto de interseccion *q* con el punto *a* por medio de la línea *aq*, la cual formará con la *ab* un ángulo *cab* igual con el CAB. Porque si concebimos las cuerdas *pq*, PQ que por construcccion se han tomado iguales, los triángulos AQP, *aqp* serán iguales, porque los tres lados del uno son iguales á los tres lados del otro, y por lo mismo el ángulo en *a* igual al ángulo en A.

Probl. 2.° *Dado un ángulo CAB dividirle en dos partes iguales.*

Res. y *Dem.* Haciendo centro en A con un radio igual cualquiera tal como PA, se trazará un arco PRQ; haciendo centro en sus estremos P y Q, con un radio cualquiera, se trazarán dos arcos que se crucen en T; por A y T, se tirará una línea AT, la cual dividirá al ángulo propuesto en las dos partes iguales QAT y TAP. Porque si se conciben los radios PT, QT, los triángulos QAT, TAP serán iguales en virtud del primer caso: que era L. Q. D. H. y D.

{ 364. Si nos propusiéramos formar un triángulo empleando en su construccion el que tenga dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, tendríamos, suponiendo que BA y AC (fig. 29) fuesen dichos lados y A el ángulo, que formando en *a*, punto de una línea cualquiera *ab*, un ángulo *bac* igual con BAC, tomando en sus dos lados una parte *ab* = AB y *ac* = AC, y uniendo el punto *b* con el punto *c* por medio de la *bc*, el triángulo *abc* será igual con ABC (2.° caso).

{*Esc.* Lo mismo sería si se nos diese separadamente un ángulo con los lados que le habían de formar.

{365 Finalmente, si quisiésemos formar un triángulo igual con otro, empleando en la construccion de este último, un lado del primero y los dos ángulos adyacentes, tendríamos, suponiendo que AB sea este lado, A y B los ángulos adyacentes, que tomando sobre una línea cualquiera una parte *ab* igual con AB, y formando en sus estremos dos ángulos *a* y *b* respectivamente iguales á los A y B, el punto donde estas líneas se encontrasen cerraría el triángulo *abc*, que será igual con el ABC en virtud de lo espuesto (tercer caso).

366 Teor. *En un mismo triángulo, ó en triángulos iguales, á lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Espl. Supongamos que en el triángulo ABC (fig. 32), sea AB = AC, voy á demostrar que el ángulo en B = al ángulo en C.

Dem. Por el punto A, vértice del triángulo ABC, que será isósceles por el supuesto de ser AB = AC, y el punto D, medio del lado BC, concíbase tirada la DA; y resultará que los triángulos ABD, ADC tendrán los tres lados del uno iguales con los tres lados del otro, á saber, AB = AC por el supuesto, BD = DC por construccion, y AD por ser comun á ambos; luego serán iguales y tendrémos que los ángulos en B y en C, opuestos al lado comun AD, serán iguales, que era L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *si en un triángulo son iguales entre*

si los tres lados, lo serán tambien sus tres ángulos; y por lo mismo el triángulo equilátero es tambien *equiángulo*.

Esc. La igualdad de los triángulos ABD, ADC, prueba al mismo tiempo que el ángulo BAD = DAC y que BDA = CDA, de donde se deduce (349) que estos dos últimos son rectos, y por consiguiente que *una línea tirada desde el vértice de un triángulo isósceles al medio de su base es perpendicular á esta base, y divide á su ángulo opuesto en dos partes iguales.*

367 Teor. *En un mismo triángulo ó en triángulos iguales á ángulos iguales se oponen lados iguales.*

Espl. Supongamos que en el triángulo BAC (fig. 32), sea el ángulo ABC = ACB: voy á demostrar que el lado AC = al lado AB.

Dem. Si estos lados no son iguales, serán desiguales; y por lo mismo uno de ellos será mayor que el otro. Supongamos que BA sea el mayor, y tendrémos que si se toma en él una parte BE = AC, y se concibe tirada la CE, se tendrá que los triángulos BEC, ABC tendrán el lado BC comun, el lado BE = CA por construccion, y el ángulo EBC = ACB por el supuesto: luego (2.° caso) serán iguales; pero esto es un absurdo, porque el BAC es todo y el BEC es su parte: luego el supuesto que nos ha conducido á él, tambien es absurdo; y como este supuesto era el que los lados BA y AC fuesen desiguales, se deduce que si no se puede suponer que sean desiguales, resultará que serán iguales, que era L. Q. D. D.

368. Teor. *Si se prolonga uno de los lados de un triángulo, el ángulo esterno es mayor que cualquiera de los dos internos opuestos.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. 33): voy á demostrar que si se prolonga uno de los lados BC, el ángulo ACD, que se llama *esterno* por estar fuera del triángulo, es mayor que cualquiera de los dos BAC, ABC opuestos á los lados que forman el esterno.

Dem. Para demostralo respecto del BAC, que es el opuesto al lado prolongado, concíbase dividida la AC en dos partes iguales, y que por B y por el medio E pase la BEF prolongada hasta que FE sea igual con BE: concíbanse unidos los puntos F y C por la recta FC, con lo cual tendrémos que, pues el punto F se halla entre AC y CD, el ángulo ACD debe ser siempre mayor que el ECF. Ahora, como por la construccion hecha AE = CE, BE = FE y el ángulo AEB = CEF (§ 356), el triángulo AEB es igual con el triángulo ECF (360); luego los ángulos BAE, ECF opuestos á los lados iguales serán iguales, y por consiguiente el ángulo ACD mayor que ECF, lo será igualmente mayor que BAE = BAC.

Haciendo una construccion análoga en el lado BC, tendrémos que el ángulo BCK será mayor que el ABC, opuesto al lado AC que hemos prolongado ahora; y como BCK = ACD por opuestos al vértice, será $ACD > ABC$; luego queda demostrada la proposicion.

Cor. 1.° Pues que los ángulos $ACB + ACD = \pi$ (§ 351), se tendrá $ACB + ABC < \pi$ ó que dos rectos, porque el ángulo $ACD > ABC$; lo que manifiesta que *la suma de dos ángulos cualesquiera adyacentes á un mismo lado de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.*

Cor. 2.° *En un triángulo que tiene un ángulo recto ó un ángulo obtuso, cada uno de los otros dos debe ser agudo*; porque si suponemos que sea tambien recto ú obtuso, la suma de dos ángulos adyacentes á un lado sería igual ó mayor que dos rectos, contra lo que acabamos de probar.

Cor. 3.° *Desde un punto cualquiera* C (fig. 34), *fuera de una recta* AB, *no se le puede concebir bajada mas de una perpendicular* CD; porque si se le pudieran concebir dos, tales como CD, CE, se tendría el triángulo CDE en que los ángulos CDE, CED, siendo cada uno recto, valdrían juntos dos rectos; lo cual es un absurdo, pues se opone á lo demostrado ántes (cor. 2.°).

Cor. 4.° De aquí se deduce que *la perpendicular es la que mide la verdadera distancia que hay desde un punto á una línea*, pues que es la única que se puede tirar de su especie.

Cor. 5.° *Tampoco se puede concebir mas de una perpendicular desde un punto* D *tomado en la misma línea*; porque si suponemos que haya dos, tales como DC, DK, los ángulos KDA, CDA serían rectos, y por consiguiente iguales, pero esto no puede ser, porque ADK es parte y ADC es todo; luego tampoco puede ser, el que las dos líneas DK y CD sean perpendiculares á la AB.

Cor. 6.° *Si desde un punto* C *de una oblicua* CE *se baja una perpendicular* CD *á la* AB, *caerá hácia el ángulo agudo*; porque si cayese hácia el ángulo obtuso, el ángulo ADC no podría ser mayor que él, como se debe verificar en virtud de lo demostrado en el teorema.

369 Teor. *En todo triángulo al mayor lado se opone el mayor ángulo.*

Espl. Sea el triángulo BAC (fig. 35): voy á demostrar que si el lado AC es mayor que BC, el ángulo ABC será mayor que BAC.

Dem. Tómese en el lado mayor AC una parte CD igual con BC, y tírese la BD; con lo cual tendrémos el triángulo BDC que nos dará los ángulos n y m iguales; pero $n > A$ por ser esterno en el triángulo ABD, luego tambien será $m > A$; y como ABC es mayor que m, con mas razon será mayor que el ángulo en A, ó que BAC, que era L. Q. D. D.

370 Teor. *En todo triángulo al mayor ángulo se opone el mayor lado.*

Espl. Sea el triángulo BAC (fig. 35): voy á demostrar que si el ángulo $ABC > BAC$, se tendrá que $AC > BC$.

Dem. Si esto no se verifica, será AC igual ó menor que BC; AC no puede ser igual con BC, porque en este caso resultaría (366) que $ABC = BAC$, contra el supuesto; tampoco puede ser menor, porque entonces el ángulo ABC (§ 369) sería menor que el BAC, que es tambien contra el supuesto; luego si AC no puede ser igual ni menor que BC, será forzosamente mayor. L. Q. D. D.

371 Teor. *La suma de dos lados de un triángulo es mayor que el tercero.*

Espl. Sea BCA (fig. 36) un triángulo cualquiera: digo que $BA + CA > BC$.

Construccion. Haciendo centro en B y con un radio igual al lado mayor BC, trácese el arco CD hasta que encuentre al lado BA prolongado, y tírese la DC por el punto de interseccion D y el punto C.

Dem. Las líneas BC y BD son iguales por radios de un mismo círculo; y como en un mismo triángulo á lados iguales se oponen ángulos iguales, será en el triángulo CBD el ángulo $DCB = g$; pero el ángulo r, siendo parte del DCB, será menor que él, y tambien menor que el g, que es igual con DCB. Luego en el triángulo DCA el ángulo g es mayor que r, y por lo mismo (370), el lado CA, opuesto al ángulo mayor g, será mayor que DA lado opuesto al ángulo menor r; es decir, que tenemos probado que $CA > DA$. Ahora, si á estas cantidades, que son desiguales, les añadimos una misma cantidad AB, tambien permanecerán desiguales, y por lo mismo tendrémos $CA + AB > DA + AB$; y como $DA + AB = BD$ y $BD = BC$, se sigue que $CA + AB > BC$, que era L. Q. D. D.

{*Esc.* Esta proposicion manifiesta que con tres líneas tomadas á arbitrio no se puede formar siempre un triángulo, pues para esto es indispensable que la suma de dos cualesquiera de ellas sean mayores que la otra. Tambien da á conocer que la *diferencia de dos lados cualesquiera de un triángulo es siempre menor que el tercer lado*; pues la desigualdad anterior $CA + AB > BC$, da $CA > BC - AB$, y $AB > BC - CA$.}

{372 Teor. *Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo, se tiran líneas á los vértices de dos de sus ángulos, la suma de estas líneas será menor que la de los lados del triángulo opuestos á los ángulos; y el ángulo que formen dichas líneas será mayor que el ángulo que formen dichos lados.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. 37): digo que si desde un punto D, elegido dentro, se tiran dos líneas BD, DC á dos ángulos cualesquiera B, C, se tendrá $BD + DC < AB + AC$, y que BDC, ó el ángulo en $o > m$.

{*Dem.* Concibiendo prolongada una cualquiera de las líneas, tal como BD hasta que encuentre al lado opuesto AC, se tendrá (§ 371) $BA + AE > BE$; y añadiendo EC, será $BA + AE + EC > BE + EC$, ó $BA + AC > BE + EC$.

{Ahora, el triángulo DEC nos dará $DE + EC > DC$; y añadiendo BD, será $BD + DE + EC > BD + DC$ ó por ser $BD + DE = BE$, será $BE + EC > BD + DC$.

{Y como ántes teníamos que $AB + AC > BE + EC$, será con mas razon $BA + AC > BD + DC$, que era L. 1.° Q. D. D.

{El triángulo BAE nos da el ángulo $n > m$, por ser el uno esterno y el otro interno (368); y por la misma razon el triángulo DEC nos da el ángulo $o > n$, luego con mayor razon $o > m$, que era L. 2.° Q. D. D.}

373 Teor. *Si desde un punto á otro se tira una recta y una curva, la recta es mas corta que la curva.*

Espl. Si desde el punto A (fig. 38) al punto B, se tira la recta AB y la curva ACB, vamos á demostrar que $ACB > AB$.

Dem. Concíbanse tiradas desde A y B á un punto cualquiera C de la curva, las líneas AC y BC; con lo cual tendrémos (§ 371) $AC + CB > AB$; y si desde C y A concebimos tiradas á un punto intermedio del arco AC, las AD, DC, y desde B y C al punto intermedio E del otro arco, las BE, CE, tendrémos tambien

$$AD + DC > AC, \ CE + EB > CB;$$

de donde sumando ordenadamente será

$$AD + DC + CE + EB > AC + CB;$$

y si volviéramos á concebir tiradas líneas á los puntos intermedios de los arcos AD, DC &c., el conjunto de líneas que resultase sería mayor que el conjunto AD + DC + &c., pues la suma de cada dos líneas AM + MD siempre sería mayor que su correspondiente DA; pero este conjunto de líneas, al paso que crece, se aproxima á la curva ACB, pues va teniendo mas puntos comunes con ella, y se halla entre el conjunto anterior y la misma curva: luego la curva (323) será mayor que cada uno de estos conjuntos de líneas rectas: y como cualquiera de estos conjuntos de líneas es mayor que AB, se sigue que con mas razon, será la curva ACB mayor que la recta AB. L. Q. D. D. (*).

(*) *Esta demostracion la publiqué por primera vez en mis adiciones á la geometría de don Benito Bails en el año de 1806. Ahora he*

Cor. De aqui se infiere que *la línea recta es la mas corta de cuantas se pueden tirar desde un punto á otro, ya sean curvas como* ACB, *ya se compongan de rectas como el conjunto de las* $AD + DC + CE + EB$, *ya se compongan de rectas y de curvas como del arco* ADC + *la recta* CB.

Esc. Lo mismo se verificaría de cualquier clase que fuese la curva, pues si supusiésemos que estuviese representada por ADCEB (fig. 39), tendríamos que $ADC > AC$ y que $CEB > CB$; lo que daría sumando estas desigualdades, $ADC + CEB = ADCEB > AB$.

374 Teor. *Si desde un punto á otro se tira una recta y diferentes curvas que sean cóncavas ó convexas hácia un mismo lado, la curva que mas se acerque á la recta será la mas corta.*

Espl. Si desde el punto A (fig. 40) al punto B, se tiran diferen-

tenido la satisfaccion de ver que Mr. Leslie, opinando como yo trata de demostrarla. He aquí como se espresa en la 4.ª edicion de su geometría, impresa en 1820.

"La línea mas corta que se puede tirar entre dos puntos es una linea recta.

Sean A *y* B *(fig. 315 lámina 17.ª) dos puntos unidos por líneas rectas con otro punto intermedio* C, *y tendrémos* $AC + BC > AB$. *Ahora, sea* D *otro tercer punto colocado entre* A *y* C, *y se tendrá* $AD + DC > AC$; *añadiendo* BC, *será* $AD + DC + CB > AC + CB > AB$. *Supóngase otro cuarto punto* E *unido con* B *y* C; *y será* $BE + CE > BC$: *por lo que, con mas razon se verificará que* $AD + DC + CE + EB > AB$.

"*Continuando del mismo modo, se tendrá que el agregado poligonal ó línea corvada* AFDGCHEIB *adquirirá continuamente á cada paso alguna mayor estension. Y no teniendo límite el número de estos puntos que se unen, se pueden aproximar el uno al otro tanto como se quiera; y por consiguiente la proposicion es tambien verdadera en aquel caso estremo en que el contorno es una línea curva, ó de que ninguna porcion puede ser reputada por recta.*

"*La proposicion ahora demostrada es comunmente tomada por axioma: Pero multiplicar inconsideradamente el número de los principios originales, aparece enteramente repugnante al espíritu de la sana razon.*"

El lector decidirá acerca del rigor y exactitud de esta demostracion, y la podrá comparar con la mia: bastándome para mi satisfaccion el que un geómetra tan profundo como Leslie juzgue necesario el demostrar las proposiciones que ántes se tomaban por axiomas, y que yo he procurado demostrar en mis obras.

tes curvas ACB, ADB, la ACB que mas se acerca á la recta AB es la mas corta.

Dem. Concíbase por el punto C la línea MN, tal que solo tenga el punto C comun con la curva interior ACB, estando toda ella fuera, y tendrémos (373) $MDN > MN$; añadiendo á ambas cantidades $AM + NB$, resultará

$$MDN + AM + NB > MN + AM + NB;$$

pero el primer miembro $MDN + AM + NB$ es igual á la curva ADB, y el segundo $MN + AM + NB$, al conjunto AMNB, luego $ADB > AMNB$.

Concíbanse ahora por los puntos P y U intermedios entre C y A, y B las rectas RS y TQ con las mismas circunstancias que la MN, y tendrémos (373)

$$RM + MS > RS,\ TN + NQ > TQ;$$

y sumando ordenadamente estas desigualdades, se tendrá

$$RM + MS + TN + NQ > RS + TQ.$$

Añadiendo á ambos miembros la cantidad $AR + ST + QB$, tambien permanecerán desiguales, y será

$$RM + MS + TN + NQ + AR + ST + QB > RS + TQ + AR + ST + QB$$

pero el primer miembro es igual al conjunto AMNB, y el segundo al ARSTQB; luego $AMNB > ARSTQB$,

y con mas razon ADB > AMNB será mayor que ARSTQB.

Y como si se concibiesen tiradas rectas por los puntos intermedios de los arcos AP, PC, CU &c., demostraríamos que el conjunto de líneas que resultase sería menor que el anterior ARSTQB y así sucesivamente, se sigue que con mas razon la curva ADB será mayor que cualquiera de estos conjuntos; pero estos conjuntos de líneas, al paso que menguan, se van acercando á la curva ACB, por tener mas puntos comunes con ella y estar cada uno entre la curva y el conjunto anterior; luego (324) la curva ACB es menor que cualquiera de estos conjuntos. y con mas razon se tendrá $ACB < ADB$, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí se infiere que una vez que la curva interior es menor que cualquier conjunto de líneas, cada arco de curva es menor que la porcion de líneas correspondientes á dicho arco, y que por lo mismo el arco $CP < PS + CS$; es decir, que *una porcion de curva es menor que la suma de las partes de las líneas que, teniendo un solo punto comun con la curva estando todas ellas fuera, quedan interceptadas entre dicho punto y el parage donde se encuentran.*

{Esto tambien lo podríamos demostrar directamente concibiendo por el punto O la línea FG; pues demostraríamos del mismo modo que ántes, que el conjunto $PSC > PFGC$; y volviendo á concebir mas líneas tiradas del mismo modo, sería menor el conjunto que se

formase, y así sucesivamente; y como al paso que mengua este conjunto se va acercando mas al arco POC, inferiríamos (324) que el arco $POC < PS + SC$.

{ 375 Teor. *Si dos lados de un triángulo son iguales á dos lados de otro y el ángulo que forman es desigual en ambos, digo que el lado opuesto al mayor ángulo será mayor que el que, en el otro triángulo, está opuesto al ángulo menor.*

{*Espl.* Sean los dos triángulos ABC, DEF (fig. 41), tales que $AB = DE$, $AC = DF$ y el ángulo $BAC > EDF$: voy á demostrar que $BC > FE$.

{*Dem.* Concibamos superpuesto el triángulo DEF sobre el BAC, de manera que el lado DF se confunda con AC; y tendrémos que, despues de hecha la superposicion, el triángulo DEF vendrá á tener la posicion del AE′C, que deberá tener el lado DE′ dentro del ángulo BAC, porque el ángulo FDE es menor que BAC. Ahora, pueden ocurrir aquí tres casos, á saber, que el punto E caiga fuera del triángulo ABC como en E′, que caiga sobre el lado BC como en H, y que caiga dentro del triángulo como en K.

{ 1.° Supongamos que cae en E′, y tendrémos (§ 371)

$$E'G + GC > E'C \text{ y } BG + GA > BA$$

luego si sumamos ordenadamente estas desigualdades será,

$$E'G + GC + BG + GA > E'C + BA$$

ó lo que es lo mismo $E'A + BC > E'C + BA$:

y suprimiendo en ambos miembros E′A y BA que son iguales por el supuesto de ser $E'A = DE = BA$, quedará $BC > E'C = EF$.

{2.° Si E cayese en H en el mismo lado BC, se tendrá (ax. 4.°)

$$BC > HC = FE.$$

{3.° En fin, si el punto E cayese dentro tal como en K, tendríamos (372) que $AB + BC > AK + KC$;

y quitando de ambos miembros AB y AK que son iguales por el supuesto de ser $DE = AK = AB$, quedará $BC > KC = EF$.

Luego en todos los casos es verdadera la proposicion.

{*Cor.* De aquí se deduce la inversa, á saber, que *si dos lados de un triángulo son iguales á dos lados de otro, y el otro lado menor en el uno que en el otro, el ángulo opuesto al menor, será menor que el otro.* Porque si fuese igual, los lados opuestos serían iguales, contra el supuesto; si fuese mayor, el lado del primero, lo sería tambien, que es contra el supuesto; luego si no puede ser igual ni mayor, será menor.}

376 Teor. *Si desde un punto fuera de una recta, se le tira una perpendicular y diferentes oblicuas, se verifican tres cosas: 1.ª la perpendicular será mas corta que la oblicua; 2.ª las oblicuas que disten igualmente de la perpendicular serán iguales; y 3.ª la oblicua que mas*

se separe de la perpendicular será la mas larga.

Espl. Si desde el punto A fuera de la FD (fig. 42), se le concibe tirada una perpendicular AB y diferentes oblicuas AE, AC, AD, se verificará 1.° que la AB será la mas corta de todas; 2.° que las oblicuas AE, AC que distan igualmente de la perpendicular AB serán iguales; y 3.° que de las oblicuas AC, AD, la AD que mas se separa de la perpendicular será la mas larga.

Dem. 1.° Por ser el triángulo ABC rectángulo en B, y ser el ángulo recto el mayor que hay en un triángulo (368, cor. 2.°), se sigue (370) que el lado AC > AB ó AB < AC; pero AB es la perpendicular y AC la oblicua; luego la perpendicular es mas corta que la oblicua. L. 1.° Q. D. D.

2.° Si suponemos BC = BE, tendrémos que los triángulos ABE, ABC serán iguales (360); pues los ángulos en B son iguales por rectos, BE = BC por el supuesto, y BA comun, luego tendrán iguales sus hipotenusas y darán AE = AC. L. 2.° Q. D. D.

3.° Siendo el triángulo ABC rectángulo en B, se sigue que el ángulo ACD, esterno de dicho triángulo, será obtuso, puesto que ha de ser mayor (368) que el interno ABC que es recto; luego (368 cor. 2.°) el ángulo ACD es el mayor del triángulo ACD, y por lo mismo se le opondrá mayor lado (370); luego AD > AC, que era L. 3.° Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí se deduce que *desde un mismo punto fuera de una línea no se le pueden tirar tres líneas rectas iguales*; porque si esto se verificase, habría á un mismo lado de la perpendicular dos oblicuas iguales, lo que no puede ser. De dos en dos líneas, se pueden tirar iguales cuantas se quieran, una á un lado de la perpendicular y otra á otro.

Cor. 2.° Que *dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos ó uno de los ángulos agudos*; porque supongamos 1.° que se tengan los triángulos ABC y DEF (fig. 43), en los cuales supongo que AC = DF y AB = DE; voy á demostrar que BC = EF, y por lo mismo estos triángulos son iguales (359).

En efecto, si colocamos el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que DE se confunda con AB, resultará que, como los ángulos en B y en E son rectos, serán iguales; por lo cual el lado EF caerá sobre el BC (348). Ahora, si el punto F no cae sobre el punto C, caerá ó mas á la izquierda como en G, ó mas á la derecha como en H. Supongamos que cae en G; entónces la línea DF estará representada por la AG; y como por el supuesto DF = AC, se tendrá AC = AG, que es un absurdo, puesto que la AC que mas se separa de la perpendicular debe ser mas larga. Como del mismo

modo demostraríamos que no puede caer hácia la derecha en un punto tal como H, queda demostrado que caerá exactamente sobre C; luego se habrán confundido los tres lados del triángulo DEF con los del ABC; luego dichos triángulos son iguales.

Supongamos en 2.° lugar que AC = DF y el ángulo BAC = EDF; si colocamos el triángulo DEF sobre el BAC, de modo que DF se confunda con AC, la DE se habrá confundido (348) con AB; y como el punto F se habrá confundido con C, si la FE no cayese exactamente sobre la CB, se podrían tirar desde F dos perpendiculares á AB, y siendo esto absurdo, resulta que FE se habrá confundido con BC, y por lo mismo los triángulos serán iguales.

Cor. 3.° Que *si un punto de una perpendicular dista igualmente de dos puntos de la línea á que lo es, todos los puntos de la primera estarán á igual distancia de aquellos mismos puntos de la segunda.*

En efecto, si fuese B (fig. 42) el punto que distase igualmente de E y C, se verificaría la proposicion; porque desde cualquier punto A, M ó H de la AH, que se tirasen líneas á E y C, serian iguales (360) los triángulos ABE, ABC, igualmente los MBE y MBC, y los HBE, HBC tambien; luego se tendrá AE = AC, ME = MC y HE = HC. Ahora, si suponemos que el punto A que se halla fuera de la DE, diste igualmente de E y de C, será AE = AC; y como tienen un lado comun AB los triángulos rectángulos ABE, ABC resultará (cor. antec.) que EB = BC: y si por un punto cualquiera de AB, tal como M, se tiran las ME, MC serán iguales, por ser hipotenusas de los triángulos EBM, MBC que son iguales (360); y como lo mismo demostraríamos de cualquier otro punto, resulta la proposicion.

Cor. 4.° Que *un punto cualquiera G que esté fuera de la perpendicular, dista desigualmente de dichos dos puntos* E y C; porque CG < CM + MG = ME + MG = GE.

Esc. 1.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual tambien el ángulo opuesto al mayor de ellos.*

Espl. Sean ABC, DEF (fig. 32*) dos triángulos en que se supone AB = ED, AC = DF, ACB = DFE, sabiéndose ademas que BA > AC; digo que los dos triángulos ABC, EDF son iguales.

Dem. Por ser AB > AC, resulta (369) que el ángulo ACB > ABC; luego el ángulo ABC será por precision agudo, pues que si ACB es agudo con mas razon lo será el ABC que es menor que él; si ACB fuese recto, ú obtuso, el ABC sería (368 cor. 2.°) por precision agudo; luego la AB será oblicua respecto de la BC, y por la misma razon tendrémos que DE será oblicua respecto de EF. Ahora, los ángulos ACB, DFE que son iguales, no pueden ménos de ser agudos, rectos ú obtusos.

Si los suponemos agudos, tendríamos que las AC y DF serán tambien oblicuas respecto de las BC, EF, y concibiendo las perpendiculares AP, DQ, caerán dentro de los triángulos ABC, DEF (368 cor. 6.°), y los triángulos ACP, DFQ serán iguales (376 cor. 2.°); pues son ambos rectángulos el uno en P y el otro en Q, tienen iguales las hipotenusas AC, DF, y ademas tienen iguales los ángulos agudos ACP, DFQ; luego AP = DQ, y PC = QF. Ahora, por ser AP = DQ, se tiene que los triángulos APB, DQE rectángulos en P y en Q, serán iguales (376 cor. 2.°), pues que ademas de ser rectángulos, tienen iguales las hipotenusas AB, ED y los catetos AP, DQ. Luego PB = QE; y sumando esta ecuacion con la PC = QF será BC = EF: y por consiguiente teniendo por el supuesto AB = DE, AC = DF, y por lo que acabamos de demostrar BC = EF, resulta que los triángulos ABC, DEF tienen iguales sus tres lados; luego en virtud de lo demostrado (359) serán iguales.

Si los ángulos ACB, DFE fuesen rectos, entónces los triángulos rectángulos ACB, DFE tendrian por el supuesto iguales las hipotenusas AB, DE, y los catetos AC, DF; luego en virtud de lo demostrado (376 cor. 2.°) serían iguales.

Si los ángulos ACB, DFE fuesen obtusos como en la (fig. 26*), las perpendiculares AP, DQ, caerían fuera de los triángulos (368 cor. 6.°) y resultaría que siendo iguales por el supuesto los ángulos ACB, DFE, sus suplementos ACP, DFQ serán tambien iguales; y los triángulos ACP, DFQ rectángulos en P y en Q, serán iguales (376 cor. 2.°) pues ademas tienen iguales las hipotenusas AC, DF; de donde se infiere AP = DQ, y CP = FQ. De ser AP = DQ, y de tener por el supuesto AB = DE, resulta que los triángulos ABP, DEQ rectángulos en P y en Q serán iguales (376 cor. 2.°); y por lo mismo BP = EQ; restando de esta ecuacion la CP = FQ, queda BC = EF; y como por el supuesto se tiene AB = DE, AC = DF, resulta que los triángulos ABC, DEF tienen sus tres lados iguales, y por consiguiente (359) serán iguales. Luego en todos los casos es verdadera la proposicion.

Esc. 2.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales y el ángulo opuesto al menor de ellos, con tal que en ambos triángulos sea de la misma especie el ángulo opuesto al mayor lado; esto es, que en ambos sea ó agudo ú obtuso.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, DEF (fig.s 26* y 32*); en los cuales suponemos que AB = DE, AC = DF, ABC = DEF, en los que sabemos ademas que AC < AB y DF < DE y que los ángulos ACB, DFE son en ambos triángulos de una misma especie, esto es, son en ambos ó agudos como en la (fig. 32*) ó en ambos obtusos como en la (fig. 26*); digo que son iguales los espresados triángulos ABC, DEF.

Dem. Colóquese el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que DE se confunda con AB, y resultará (348) que el lado EF caerá sobre el BC.

Ahora, las circunstancias que se suponen conocidas, dan á entender que las AC, DF no son perpendiculares á las BC, EF, pues que si lo fuesen, los ángulos en C, y F serían rectos, y los triángulos ABC, DEF serían iguales por lo demostrado (cor. 2.°). Luego si concebimos por A una perpendicular al lado opuesto BC, resultará que por ser DF = AC y estar el punto D confundido con A, que la DF ó se confundirá con AC ó caerá en Ac (teor. antecedente) de modo que PC = Pc. Mas si suponemos que caiga en Ac, tendrémos (fig. 32 *) que el ángulo AcB > P será obtuso, y el ACP = AcP, por la igualdad de los triángulos APC, APc (cor. 2.°), será agudo; y como por el supuesto se sabe que los ángulos DFE, ACB son de una misma especie, resulta que la DF no puede caer á diverso lado de la perpendicular; luego caerá del mismo lado y se confundirá DF con AC, cayendo el punto F sobre C, y todo el lado EE se habrá confundido con BC. Luego los dos triángulos se habrán confundido y serán iguales que era L. Q. D. D.

La misma consecuencia se saca respecto de la (fig. 26 *); pues si suponemos que al hacer la superposicion, la DF no caiga sobre la AC, sinó que tome la posicion, de Ac, al otro lado de la perpendicular, el ángulo ACB > P sería obtuso, y el ángulo AcP que representa al DFE sería agudo, que es contra el supuesto; luego no se puede suponer que la DF caiga hácia diferente lado de la AC; luego caerá encima, y se confundirá con ella; luego los triángulos DEF y ABC se confundirán en un todo y serán iguales.

Esc. 3.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen dos lados iguales é igual un ángulo opuesto á uno de ellos, con tal que el ángulo opuesto al otro de los lados iguales sea de una misma especie en ambos triángulos.*

Espl. Sean ABC, *abc* (fig. 316) dos triángulos cualesquiera en los que suponemos AB = *ab*, BC = *bc* y A = *a*; voy á demostrar, que, si se sabe ademas, que los ángulos C, c son ambos rectos, ambos agudos ó ambos obtusos, los espresados triángulos son iguales.

Dem. Superpóngase el triángulo *abc* sobre el ABC, de modo que *ab* se confunda con AB, y tendrémos que, por ser *ab* = AB, el punto *b* se confundirá exactamente con B; y por ser el ángulo *a* = A, el lado *ac*, caerá sobre el lado AC. Ahora, si el punto *c* no cae precisamente sobre C, caerá ó á su izquierda como en D, ó á su derecha como en E.

Supongamos que caiga en D, y tendrémos que el triángulo *abc* estará representado por ABD, siendo el ángulo $c =$ ADB. Pero si c y C son rectos, habría dos perpendiculares BD, BC tiradas desde B á la AC, lo que es imposible. Si los ángulos c y C fuesen agudos, el ADB $= c$ sería agudo, y BDC suplemento de ADB sería obtuso, y por consiguiente mayor (349) que el ángulo C, que es agudo; luego el triángulo BDC; nos daría (§370) BC $>$ BD, lo que es contra el supuesto, que exige el que, BC $= bc =$ BD. Si los ángulos c y C fuesen obtusos, el ADB sería obtuso y su suplemento BDC sería agudo; por lo que BC sería menor que BD, y por consiguiente que su igual *ba*, lo que tambien es contra el supuesto; luego en ninguno de los tres casos, de ser los angulos C, c rectos, agudos ú obtusos, se puede verificar que el punto c caiga hácia la izquierda de C, al superponerse los triángulos; y como, por un razonamiento análogo, deduciríamos que tampoco puede caer dicho punto á la derecha de C, por ejemplo en E, resulta que, debiendo caer sobre la AC, se habrá confundido precisamente c con C; y como b se habia confundido con B, todo el lado *bc* se habrá confundido (342) con BC: y habiéndose confundido los tres lados, se han confundido los triángulos, y por consiguiente estos serán iguales, que era L. Q. D. D.

Esc. 4.° *Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual, é iguales tambien dos ángulos, que el uno sea el opuesto al lado igual.*

Dem. Sean ABC, *abc* (fig. 316) dos triángulos cualesquiera, en los que se tenga AB $= ab$, A $= a$, C $= c$. Superpóngase el triángulo *abc* sobre el ABC, de modo que *ab* se confunda con AB, y tendrémos, que, por ser AB $= ab$, el punto b caerá exactamente sobre B; y por ser el ángulo A $= a$, el lado *ac* caerá sobre AC. Ahora, si el punto c no se confunde con C, caerá hácia la izquierda de este como en D ó hácia su derecha como en E; y el triángulo *abc* estará representado por el ABD ó por el ABE; en cuyo caso el ángulo ACB sería menor que el BDA, y mayor que el BEA (368), y como tanto el ADB como el BEA espresarían el ángulo c, resulta, que en ninguno de estos casos podría ser el ángulo $c =$ C, como exige el supuesto. Luego el punto c no puede menos de caer sobre el punto C: en cuyo caso, todo el lado *bc* se habrá confundido con BC; y habiéndose confundido los tres lados del triángulo *abc* con los del ABC, estos serán iguales, que era L. Q. D. D.

377 Teor. *Si una recta tiene dos puntos que disten igualmente de otros dos de otra, le será perpendicular.*

Espl. Supongamos que los dos puntos A y H (fig. 42), ó A y B, ó A y M de la recta AH, esten igualmente distantes de los puntos E y C; esto es que AE $=$ AC y HE $=$ HC, ó que AE $=$ AC y BE $=$

BC, ó que AE $=$ AC y ME $=$ MC: voy á demostrar que la AH es perpendicular en cualquiera de estos casos á la FD.

Dem. Supongamos que de los dos puntos, el uno esté mas arriba de la FD y el otro mas abajo, tales como A y H, ó que se tenga AE $=$ AC y HE $=$ HC, lo cual nos dará que los triángulos AEH, AHC serán iguales (359), pues ademas tienen comun el lado AH. La igualdad de estos triángulos nos dará el ángulo EAB $=$ BAC; luego los triángulos EAB, ABC serán iguales (360); pues tienen los ángulos EAB, BAC iguales, comun el lado AB, é iguales tambien los lados AE, AC por el supuesto; luego los ángulos en B serán iguales, y por consiguiente (349) rectos; luego la AH es perpendicular á la FD.

Supongamos ahora que uno de los puntos tal como B, se halle en la FD, y tendrémos que AE $=$ AC y BE $=$ BC; y por lo mismo los triángulos ABE, ABC serán iguales, pues ademas tienen comun el lado AB; luego los ángulos en B serán iguales y por consiguiente rectos, luego la AH será perpendicular.

Supongamos por último que ambos puntos se hallen á un mismo lado de la FD; y tendrémos suponiendo que sean los A y M, que AE $=$ AC, ME $=$ MC; y como ademas los triángulos AME, AMC tienen comun el lado AM, serán iguales (359): lo que da el ángulo EAM $=$ CAM; y teniendo los triángulos AEB, ACB iguales los ángulos en A y los lados que los forman, AE $=$ AC por el supuesto y AB por comun, serán iguales (360); lo que hace que los ángulos en B sean iguales y por consiguiente rectos; luego la AH es perpendicular en todos los casos á la FD, que era L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *si una perpendicular* CD (fig. 34), *tiene un punto cualquiera D, equidistante de dos A y B de la línea AB á que lo es, pasa por todos los puntos que en dicho plano distan igualmente de A y de B; esto es, que en dicho plano no hay ningun punto que esté á igual distancia de A y B, si no es punto de la CD.* Porque si hubiese otro punto tal como K con esta circunstancia, podríamos tirar por él y por D, la DK, la cual sería perpendicular á la AB por lo que acabamos de demostrar; y como CD lo es tambien por el supuesto, resultarían dos perpendiculares en un mismo punto de la AB, lo que es absurdo (368 cor. 5.°). Si el punto que distase igualmente fuese N, tirando la NK, prolongada, sería perpendicular á la AB; y como por el supuesto lo es tambien la CD, se tendrían tiradas desde un mismo punto N dos perpendiculares á la AB, lo que tambien es absurdo.

378 Fundados en el último teorema podemos resolver los cuatro problemas siguientes.

Probl. 1.° *Desde un punto* A *fuera de una línea* BC (fig. 44), *ba-*

jar una perpendicular á esta línea.

Res. Haciendo centro en el punto dado A y con un radio cualquiera, pero tal que corte á la línea dada BC, trácense en ella dos arcos en D y E; haciendo centro en estos puntos D y E, con el mismo ó con otro radio cualquiera, trácense por la parte inferior otros dos arcos que se corten; y por el punto de interseccion F y el punto dado A, se tirará la AF, que será perpendicular á la BC.

Dem. Porque tiene dos de sus puntos A y F á igual distancia de D y E.

379 Probl. 2.° *Por un punto* A *de una línea* BC (fig. 45), *levantarle una perpendicular.*

Res. Haciendo centro en el punto dado A, trácense dos arcos en D y en E con un radio cualquiera; y haciendo centro en D y E con un radio arbitrario, pero mayor que AE, trácense dos arcos por arriba ó por abajo; y por el punto de interseccion F y el punto dado A, se tirará la FA que será perpendicular á la BC.

Dem. Porque tiene dos de sus puntos A y F, por construccion, á igual distancia de los dos D y E de la BC.

380 Probl. 3.° *Dada una línea* AB (fig. 46), *tirarle una perpendicular*, esto es, tirarle una línea que le sea perpendicular sin fijar que pase por ninguna parte.

Res. Haciendo centro en dos cualesquiera de sus puntos, tales como D y E (fig. 46), trácense dos arcos por arriba que se encuentren en F; haciendo centro en los mismos puntos con el mismo ó con diferente radio, trácense otros dos que se crucen en G, y uniendo el punto F con el G, resultará la FG perpendicular á la AB.

Dem. Porque tiene dos de sus puntos F y G equidistantes de D y E.

381 Probl. 4.° *Dada una línea* AB (fig. 46), *dividirla en dos partes iguales.*

Res. Haciendo centro en sus estremos A y B, se trazarán dos arcos por la parte de arriba y otros dos por la parte de abajo, como en el problema anterior; y tirando la FG, dividirá á la AB en dos partes iguales.

Dem. Porque la FG, teniendo dos puntos equidistantes de A y B, será perpendicular á la AB, y tendrá (376 cor. 3.°) todos sus puntos á igual distancia de A que de B; luego AH = HB, que era L. Q. D. H.

{*Esc.* En la resolucion de estos problemas, hemos dicho que estos arcos se tracen unos por arriba y otros por abajo, porque para tirar con mas exactitud la línea, conviene que disten lo mas que sea posible los puntos por donde se ha de tirar. Pero si hubiese algun obstáculo que impidiese el trazar arcos hácia uno de los

lados, se trazarían ambos hácia una misma parte, tales como en K (fig. 46), y tirando por F y K la línea FK, sería perpendicular, por tener dos de sus puntos F, K á igual distancia de otros dos de la AB.}

De las Paralelas.

382. Cuando dos líneas se hallan en un mismo plano, solo puede suceder una de dos cosas: ó que se encuentren, ó que no se encuentren. Cuando se encuentran, lo pueden hacer de dos modos: ó sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro, que es cuando la una es perpendicular á la otra, ó inclinándose mas hácia un lado, en cuyo caso se dice que la una es *oblicua* respecto de la otra. Cuando no se encuentran por mas que se prolonguen, como son las CD, AB (fig. 47), se llaman *paralelas*; de manera que *líneas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no se encuentran aun cuando se las prolongue cuanto se quiera.* {No obstante, cuando se aplica el cálculo á la posicion de las líneas, se consideran á un tiempo perpendiculares, oblicuas y paralelas, en cuyo caso entra en el cálculo la distancia á que se encuentran; y cuando por el resultado deben ser paralelas, se halla que la distancia á que se encuentran es infinita; por lo que se suele decir que *líneas paralelas y líneas que se encuentran en el infinito son una misma cosa.* Con esta última espresion se viene á decir lo mismo que líneas que no se encuentran, pues como jamas llegarán al infinito, resulta que jamas se encontrarán.}

Cuando una línea corta á dos paralelas, recibe el nombre de *secante*; esta forma con las paralelas ocho ángulos; cuatro dentro de las mismas paralelas, que se llaman *internos*, y cuatro fuera que se llaman *esternos*. Cuando se comparan dos ángulos internos, pero que estén formados á diferente lado de la secante, uno en cada paralela, se llaman ángulos *alternos internos*, tales son los m y q (fig. 47), y los n y p; cuando se comparan dos ángulos internos, pero á un mismo lado de la secante, como los m, p y los n, q, se denominan con el solo nombre de *internos*; cuando se comparan dos ángulos esternos formados por las paralelas y la secante, uno en cada paralela, pero hácia diferente lado de dicha secante, se llaman *alternos esternos*, tales son los k y r, los l y s; cuando se comparan dos ángulos esternos, pero á un mismo lado de la secante, tales como k y s, l y r, se denominan simplemente *esternos*; y finalmente cuando se comparan dos ángulos, uno en cada paralela, á un mismo lado de la secante, uno dentro y otro fuera, se denominan con el nombre de *correspondientes*; tales son los k y p, los m y s, los l y q, y los n y r.

383 Teor. *Si dos líneas son perpendiculares á una tercera, son paralelas.*

Dem. Porque si las dos líneas AB, CD (fig. 47), son perpendiculares á la GH, estas líneas no se pueden encontrar en ningun punto del plano donde se hallen; porque si esto se verificase, tendríamos tiradas desde un mismo punto dos perpendiculares á la GH, lo que es absurdo (368 cor. 3.°).

Cor. 1.° De aquí se deduce, que *para tirar una línea paralela á otra dada, desde un punto cualquiera* G, bajarémos á esta línea desde dicho punto una perpendicular GH, y en dicho punto G levantarémos una perpendicular GD á esta perpendicular GH, y tendrémos que en virtud del teorema antecedente, GD será paralela á la línea propuesta AB, por ser ambas perpendiculares á la GH.

Cor. 2.° Y como desde el punto G no se puede bajar mas de una perpendicular GH á la AB, y en G solo una perpendicular á GH; resulta que *por un punto cualquiera* G *no se le podrá tirar á una línea sino una sola paralela.*

383*a* Teor. *Si una línea es perpendicular á una de dos paralelas, lo será tambien á la otra.*

Espl. Sea GH perpendicular á AB, una de las dos paralelas AB, CD; voy á demostrar que la GH tambien es perpendicular á la CD.

Dem. Si la GH no fuese perpendicular á CD, no lo seria CD á GH (*), y por G podríamos concebir una línea TGV perpendicular á GH, la cual (teor. ant.) sería paralela á BA; y como la CD lo es por el supuesto, tendríamos por el punto G dos paralelas CGD, VGT á la BA, lo que acabamos de manifestar que no puede ser (**).

(*) *En el* (§ 352, 2.°) *demostramos que si una línea es perpendicular á otra, esta tambien lo es á aquella; y aquí demostrarémos la inversa que es la que necesitamos. En efecto, si la CD* (*fig.* 24) *no es perpendicular á la AB, le será oblicua, y los ángulos AOD, DOB serán desiguales; y como AOD=COB por opuestos al vértice, resulta que DOB y BOC serán desiguales, y por consiguiente BO caerá oblicuamente sobre CD; luego no le será perpendicular.*

(**) En la primera edicion de este volúmen espuse la teoría de las paralelas por un método rigoroso y exacto, pero bastante complicado; y recopilé en una digresion todo lo que se sabia sobre este punto para que los lectores, persuadidos de lo mucho que interesaba el simplificar esta teoría, viesen el medio de conciliar el rigor y exactitud con la sencillez. Al tratar de disponer el original para la segunda impresion, hallé el medio de simplificar algo dicha teoría; pero aun quedaba complicada: y con motivo de corregir las pruebas de la digresion, como no perdia de vista el objeto de perfeccionar esta importante teoría, me ocurrió el método que he puesto en el testo; y aunque ya estaba adelantada la impresion, no tube inconveniente en inutilizar algunos pliegos para presentarla del modo que lo he hecho en el testo que es el mas perfecto de todos. Mas tanto con el fin de que se conozca el método que habia elegido, cuanto para que se correspondan las citas que en la digresion se refieren al modo con que estaba ya impreso, pondré aquí este método numerados los párrafos con los mismos números que tenian; y por esta causa he señalado con letras despues de los números algunos párrafos del testo.

384 Teor. *Si dos rectas son tales que, cortadas por otra, forman con ella ángulos alternos internos ó alternos esternos que sean iguales, dichas rectas serán paralelas.*

Espl. Sean AB, CD (fig. 47) dichas rectas y EF la secante: voy á demostrar que si $n=p$, ó $m=q$, ó $k=r$, ó $l=s$, dichas líneas no se encuentran, y por lo mismo serán paralelas.

Dem. Supongamos 1.° que $n=p$ ó $m=q$, y tendrémos que las líneas AB, CD no se podrán encontrar en un punto K hácia la derecha de FE, porque entónces las tres líneas FE, CD, AB

387 Teor. *Si una línea AB* (fig. 48) *que es perpendicular á otra BD en B, se mueve á lo largo de ella permaneciendo perpendicular, su otro estremo A trazará una línea AEGC que tendrá todos sus puntos igualmente distantes de la recta primitiva BD, y ella será tambien una recta.*

Dem. Puesto que todos los puntos de la AC estan trazados por el estremo A de la perpendicular AB, resulta que, como la distancia entre un punto y una línea se mide por la perpendicular tirada desde aquel punto á dicha línea, la AB será la que mida la distancia de un punto cualquiera de la AC á la BD; luégo todos los puntos de la AC distan igualmente de la BD.

Para demostrar que la AC es una línea recta, concibamos tres cualesquiera de sus puntos A, E, G, tales que las partes BF, FH que intercepten en la BD las perpendiculares que desde ellos se bajen, sean iguales; y tendrémos, tirando desde el punto de en medio E á los otros dos A y G dos líneas EA, EG, que si estas dos rectas no forman mas que una sola y misma línea, dichos tres punformarían un triángulo, en el cual por ser $n = p$ ó $m = q$, tendríamos que el ángulo esterno era igual á uno de los internos opuestos, lo que es absurdo, pues debe ser siempre mayor (368).

Tampoco se pueden encontrar hácia la izquierda en un punto tal como L; porque entónces tambien resultaría de dichas tres líneas un triángulo, en el cual, por ser $n = p$ ó $m = q$, el ángulo esterno p sería igual á uno n de los internos opuestos, lo que es absurdo; luego dichas líneas no se pueden encontrar hácia la derecha ni hácia la izquierda de EF; luego son paralelas. L. 1.° Q. D. D.

---

tos estarán en línea recta. Para que las dos líneas EA, EG no formen mas que una sola línea, deberán ser en primer lugar iguales los ángulos FEA, FEG; porque si se concibe doblada la figura por la FE, de manera que BF se confunda con FH, la BA se confundirá con HG (§ 348), pues los ángulos en B y H son iguales por rectos; y como BA=HG, el punto A caerá sobre G, y por lo mismo las dos líneas AE, EG se habrán confundido en toda su longitud, para lo cual es indispensable que los ángulos AEF, GEF sea iguales.

Ahora, estos ángulos no pueden ser ni obtusos ni agudos; porque si suponemos que sean obtusos y que esten representados por los FE*a*, FEg, podrémos en efecto doblar la figura de manera que se confundan; pero si por E concebimos las EA, EG perpendiculares á las *a*B y gH, tendrémos los triángulos E*a*A, EgG en los cuales siendo rectos los ángulos EA*a* y EGg, los A*a*E, GgE serán agudos (368 cor. 2.°); y concibiendo que la figura *a*ABFE se coloca sobre la EFHGg, de modo que la *a*AB se confunda con la EF, en lo cual no hay dificultad por deber ser *a*AB=EF, resultará que siendo rectos los ángulos en B y en F, BF caerá sobre FH, esto es, el estremo F de la BF caerá sobre H; pues BF=FH, y siendo rectos los ángulos en F y en H, la FE se confundirá con HGg, cayendo E sobre g, por deber ser FE=Hg; y habiéndose tambien confundido el punto *a* con E, toda la *a*E, se habrá confundido con Eg; luego el ángulo E*a*B se habrá confundido con el gEF; pero esto es imposible, porque el primero es agudo y el segundo obtuso, luego no se puede suponer que los ángulos AEF, FEG sean obtusos; y como del mismo modo probaríamos que no se pueden suponer ser agudos, se deduce que por precision han de ser rectos; luego las líneas EA, EG no forman sino una sola y misma línea; luego los tres puntos A, E, G estan en línea recta. Y lo mismo demostraríamos de los demas puntos.

Cor. 1.° De aquí se deduce que, pues los ángulos AEF, GEF

Supongamos ahora $k = r$ ó $l = s$, y tendrémos que sus opuestos al vértice n y p ó m y q serán iguales; pero estos son alternos internos, luego por la primera parte del teorema, dichas líneas son paralelas, que era L. 2.° Q. D. D.

385 Teor. *Si dos líneas cortadas por otra forman con ella los ángulos correspondientes iguales, serán paralelas.*

Dem. Porque si suponemos $k = p$ (fig. 47), como $k = n$ por opuestos al vértice, será $n = p$ que es el caso anterior; luego serán paralelas. L. Q. D. D.

---

son rectos, y lo mismo todos sus análogos, *la línea que es perpendicular á la* BD, *lo es tambien á la* AC, *y por lo mismo* (383) *las* AC *y* BD *serán paralelas.*

Cor. 2.° Tambien se infiere que *en el plano donde se hallan las* AC *y* BD, *no hay ningun punto que diste de dicha línea por la parte superior de la* BD, *una magnitud igual con* AB, *que no sea punto de la* AC; porque si suponemos que haya un punto tal como M ó m, que diste de la BD una magnitud espresada por la BA, se tendrá bajando la perpendicular MP, ó que MP = AB = NP, lo que es absurdo, pues la una es todo y la otra es parte: ó m P = AB = NP lo que es tambien absurdo.

388 Teor. *Si sobre una recta AB (fig. 49) se levanta un número cualquiera de perpendiculares iguales CD, FE MK y se unen sus estremos por rectas DE, EK, todas estas no formarán sino una sola y misma línea recta.*

Dem. Si los tres puntos D, E, K, no estan en línea recta, podrémos concebir por los estremos D, K una línea que lo sea; con lo cual tendrémos que el punto E, si no está en la DK se hallará ó mas arriba ó mas abajo.

Entendido esto, concibamos que la perpendicular DC se mueva sobre la AB hácia B, hasta llegar á M, con lo cual el punto D habrá llegado á K, y tendrémos que este punto habrá descrito (387) una recta DEK; pero como por dos puntos no se puede hacer pasar sino una sola recta, la DK coincidirá con la que se ha originado por el movimiento del estremo D de la perpendicular CD; y pues que esta línea engendrada por el movimiento, está equidistante por todas partes de la AB, se sigue que toda perpendicular bajada desde los puntos de la DK sobre AB, entre D y K, debe ser igual con la perpendicular DC: y todo estará ya reducido á probar que el punto E se halla en la DK.

Para demostrarlo, observarémos que si no se halla en dicha línea, estará ó mas arriba ó mas abajo: supongamos que se ha-

386 Teor. *Si dos líneas son tales que, cortadas por otra, forman dos ángulos esternos ó internos, que juntos equivalgan á dos rectos, dichas líneas tambien serán paralelas.*

Dem. Porque si suponemos que $m + p = \pi$ ó dos rectos (fig. 47), como $m + n = \pi$ (§ 351), será (introd. ax. 5.°) $m + p = m + n$, de donde quitando m, quedará $p = n$; luego (384) serán paralelas. Y si suponemos $k + s = \pi$, como $p + s = \pi$, será $k + s = p + s$, y quitando s, quedará $k = p$; pero estos son correspondientes, luego (385) serán paralelas. L. Q. D. D.

---

lle en G por mas arriba de la DK, lo cual nos dará FG = DC = MK y será GF mayor que FE; pero por lo que acabamos de demostrar es CD = FE: y como CD = GF por el supuesto, será GF = FE; luego GF sería á un tiempo mayor é igual que FE, lo que es absurdo, y por lo mismo el punto E no puede caer por encima de la DK. Y como del mismo modo demostraríamos que no puede caer por mas abajo de la DK, resulta que necesariamente caerá sobre esta línea, y por lo mismo la línea DEK es una sola línea recta.

Lo que acabamos de demostrar de estas tres perpendiculares DC, FE, MK, demostraríamos de otro número cualquiera de ellas, con tal que sean iguales entre sí. L. Q. D. D.

389. Teor. *Si se levantan sobre una recta AB (fig. 50) dos perpendiculares iguales AC, BD y se unen sus estremos C,D por medio de otra recta CD, digo que todas las perpendiculares que como GH se bajen desde esta á la primitiva, serán iguales á las dos primeras AC, BD que se levantaron.*

Dem. Si GH no es igual con AC, será mayor ó menor: supongamos que sea mayor, y tendrémos que tomando en ella una parte HF = AC, y concibiendo que la AC se mueva perpendicularmente sobre la AB, pasará por F y por D; y tendrémos que la línea originada por el movimiento la podrémos figurar en la CFD, que será recta (387); pero por el supuesto CGD tambien es una recta, luego tendríamos tiradas dos rectas por los dos puntos C y D, lo cual siendo absurdo, manifiesta que no se puede suponer que GH mayor AC; y como del mismo modo demostraríamos que tampoco puede ser GH menor AC, resulta que será igual.

390 Teor. *Si sobre una recta AB (fig. 51) se levantan dos perpendiculares AC, BD iguales y se unen sus estremos C, D por otra recta CD; digo que CD será perpendicular á las dos perpendiculares primitivas AC, BD ó que los ángulos n y m son rectos.*

Cor. general. De aquí se deduce que tambien podrémos tirar una paralela á una línea AB (fig. 47*) por un punto dado C, tirando por dicho punto una secante cualquiera CF, y formando en C un ángulo $n =$ con su correspondiente r ó con su alterno interno m, ó un ángulo $s =$ con p, ó con su alterno esterno u, ó que sea suplemento de alguno de los simplemente internos ó esternos, como por ejemplo haciendo que n fuese suplemento de p, ó s de r.

386a Teor. *Cuando una secante corta á dos paralelas, se verifica 1.° que los ángulos alternos internos son iguales; 2.° que los alternos*

Dem. Concíbase dividida la AB en dos partes iguales en E, y levántese la perpendicular EF; únanse los puntos A y B con el F por medio de las FA, BF; y tendrémos que los triángulos AEF, FEB serán iguales (360), y por consiguiente el ángulo $o = z$, $s = t$, y AF = FB. Luego si de los ángulos iguales CAE, EBD, se quitan los iguales o, z, los residuos CAF, y k serán iguales; y como los triángulos CAF, FBD, ademas de estos ángulos, tienen tambien iguales los lados que los forman, CA = BD por el supuesto y AF = FB por lo acabado de demostrar, serán iguales; y darán $n = m$ y $r = u$; pero si á estos les añadimos los iguales s, t, tendrémos CFE = DFE; y como los dos juntos han de equivaler á dos rectos, resulta que cada uno de ellos será recto.

Ahora, como CA y FE son dos líneas perpendiculares á la AE, é iguales (389), dividiendo la AE en dos partes iguales, demostrarémos que el ángulo n = CFE, del mismo modo que demostramos que era el ángulo $m = n$; pero el ángulo CFE es recto, luego n tambien será recto y por consiguiente su igual m; luego la CD es perpendicular á las AC, y BD.

391 Teor. *Si dos rectas AB, CD (fig. 52) forman á un mismo lado de una tercera AC dos ángulos internos CAB, ACD que juntos valgan menos que dos rectos, dichas rectas, prolongadas suficientemente, se encontrarán.*

Supongamos 1.° que uno de los ángulos tal como CAB sea recto y el otro ACD agudo.

Constr. Por un punto cualquiera de la CD bájese una perpendicular á la CA tal como la FE, la cual caerá hácia la parte del ángulo agudo ACD (368 cor. 6.°), tómese en la CA, la parte EL = CE, LP = CL, NP = CP &c, hasta que uno de los puntos tal como N, caiga por mas abajo del punto A, como aquí en N (*).

(*) *En esto no hay dificultad; pues aunque la parte CE fuese tan pequeña como se quisiese, repetida un número suficiente de veces, llegaría á ser mayor que la CA; cuanto mas que la construccion deja á arbitrio el que la FE corte en la CA una parte tan grande como se quiera.*

esternos tambien lo son; 3.° que tambien son iguales los correspondientes; 4.° que los internos juntos equivalen á dos rectos, y por lo mismo son el uno suplemento del otro; y 5.° que lo mismo se verifica en los esternos.

Espl. Sean AB,DE (fig. 47 *) las paralelas; y FI la secante: voy á demostrar 1.° que los ángulos $m = n$ y $p = q$; 2.° que $r = t$ y $s = u$; 3.° que $r = n$, $p = s$, $u = q$ y $m = t$; 4.° que $m + q = \pi$, $n + p = \pi$ y por lo mismo m suplemento de q y n de p; y finalmente 5.° que $r + s = \pi$, $u + t = \pi$, y por lo mismo r es suplemento de s, y t de u.

Tómese tambien en la CD la parte FK = CF, KO = CK, OH = OC &c, de manera que se tengan en la CD tantas partes como en la CA; únase el punto L con el K, P con O, y N con H; por medio de líneas que se prolongarán de modo que FG = EF, KM = LK, OQ = PO, y tirénse las GK, MO, QH.

Dem. Los triángulos CEF, GFK son iguales (360), pues CF = FK y EF = FG por construccion, y los ángulos en F son iguales por opuestos al vértice; luego GK = CE = EL por construccion, y el ángulo en G igual al en E; pero este es recto, luego el G tambien será recto; luego desde los puntos E, G de la EG tenemos bajadas dos perpendiculares EL, GK iguales, y por lo mismo la LK será perpendicular (390) á la EL, lo que hará que el ángulo en L sea recto. Los dos triángulos CLK, KMO son tambien iguales por la misma razon; luego deduciríamos por el mismo raciocínio, que el ángulo en P era recto: y continuando del mismo modo llegarémos á probar que el ángulo en N es recto; y siéndolo tambien por el supuesto el CAB, las dos lineas AB, NH serán perpendiculares á CN, y por consiguiente (383) paralelas; luego jamas se encontrarán; pero NH encuentra á CD en H y forman las tres un triángulo CNH; luego la AB; prolongada suficientemente, llegará á salir fuera del triángulo; por consiguiente llegará á encontrar á CD antes de llegar esta á H.

Supongamos ahora que ninguno de los ángulos sea recto, si no que ABD (fig. 53) sea agudo y BAC tambien agudo ú obtuso. Y por cuanto ABD y BAC juntos, se suponen menores que dos rectos, y los ABD, DBE son iguales á dos rectos, se tendrá que ABD + BAC < ABD + DBE; de donde quitando ABD, queda BAC < DBE. Fórmese en A con la recta BA un ángulo BAF = EBD, y tendrémos que la AF caerá por mas arriba de la AC, puesto que ha de formar un ángulo con la AB, mayor que el que forma la AC; por lo cual las dos líneas AF, BD, serán (385) paralelas. Bájese tambien desde A á BD la perpendicular AG que caerá (368 cor. 6.°) hácia la parte del ángulo agudo, y formará con la

Dem. 1.° Por el punto L, medio de la parte CO de la FI interceptada por las paralelas, concíbase la GH perpendicular á una de las dos paralelas, la cual lo será tambien á la otra (383*a*), y por lo mismo los dos triángulos GLO, CLH serán rectángulos en G y H; y como LO = LC por construccion y los ángulos en L son iguales por opuestos al vértice, dichos triángulos (376 cor. 2.°) serán iguales; y por lo mismo los ángulos en m y n serán iguales; y cómo los p y q son suplementos de estos, serán tambien iguales (353), que era L. 1.° Q. D. D.

AF un ángulo GAF recto; porque si se supone que sea agudo, la recta AG formará con las AF, BD hácia un mismo lado, dos ángulos internos uno recto AGD y otro agudo GAF y por lo mismo en virtud de lo que acabamos de demostrar, las dos líneas se llegarán á encontrar prolongadas hácia F y D; lo qué es absurdo, pues tenemos demostrado que son paralelas. Si se supusiese que GAF era obtuso, el GAH sería agudo, y por la misma razon se llegarían á encontrar prolongadas hácia la izquierda de la AG, lo que tambien es absurdo; luego para no caer en ningun absurdo, es indispensable que GAF sea recto; luego su parte GAC será agudo. Y por cuanto la AG forma con las AC, GD un ángulo recto AGD y otro agudo GAC, concurrirán, prolongándolas suficientemente, hácia la derecha de la AG, que era L. Q. D. D.

392 *Esc.* Cuando dos líneas tienen la posicion que AC, BD en la (fig. 53), se dice que *convergen* hácia el parage por donde se van acercando la una á la otra; y que *divergen* hácia el opuesto; en cuyo caso se llaman dichas líneas *convergentes* ó *divergentes*, segun sea el parage por donde se consideren.

393 Teor. *Cuando una secante corta á dos paralelas, se verifica 1.° que los ángulos internos juntos equivalen á dos rectos, y por consiguiente el uno es suplemento del otro; 2.° que lo mismo se verifica en los esternos; 3.° que los alternos internos son iguales; 4.° que tambien lo son los alternos esternos; y 5.° que tambien son iguales los ángulos correspondientes.*

Espl. Sean AB,CD (fig. 54) las paralelas, y EF la secante; voy á demostrar 1.° que $M + P = \pi$, y $N + Q = \pi$, y por lo mismo M es suplemento de p, y N de Q; 2.° que $T + I = \pi$, $S + O = \pi$, por lo que I será suplemento de T y S de O; 3.° que $M = Q$, y $P = N$; 4.° que $T = O$ y $S = I$; y 5.° que $S = P$, $M = O$, $Q = T$ y $N = I$.

Dem. Para demostrar lo 1.° observarémos que $M + N = \pi$ ó dos rectos, (351), y tambien $P + Q = \pi$; por lo que sumando, ten-

2.° Como $m=r$ y $n=t$ por opuestos al vértice, y $m=n$ por lo que acabamos de demostrar, será $r=t$; y como del mismo modo manifestaríamos que $u=s$, resulta L. 2.° Q. D. D.

3.° El ángulo $m=r$ por opuestos al vértice, y el $m=n$ por alternos internos; luego (introd. ax. 5.°) $r=n$; y como del mismo modo demostraríamos que $p=s$, $u=q$ y $m=t$, resulta L. 3.° Q. D. D.

4.° Siendo $m+p=\pi$, resulta que por ser $m=n$, se tendrá $n+p=\pi$, y por lo mismo n es suplemento de p; y como

---

drémos $M+N+P+Q=2\pi$. Ahora, si la suma $M+P$ fuese menor que π ó dos rectos, las líneas AB y CD se encontrarían (391) á la derecha de EF, lo que es absurdo, pues por el supuesto son paralelas; y si la suma $M+P$ fuese mayor que π ó dos rectos, $N+Q$ sería menor que π ó dos rectos, y las AB,CD se encontrarían (391) hácia la izquierda de EF, lo que tambien es absurdo: luego para no incurrir en ningun absurdo, es preciso que $M+P=\pi$ ó dos rectos; de donde resulta que $N+Q=\pi$ ó dos rectos, y por lo mismo (353) M será el suplemento de P, y N de Q, que era L. 1.° Q. D. D.

2.° Por ser $I=P$, y $T=M$ por opuestos al vértice, se tendrá, sumando $I+T=P+M$; pero $P+M=\pi$ por lo que acabamos de demostrar; luego $I+T=\pi$, luego I suplemento de T. Del mismo modo se demostrária que S es suplemento de O, que era L. 2.° Q. D. D.

3.° Puesto que $M+P=\pi$, por lo 1.° que acabamos de demostrar, y que (§351) $M+N=\pi$, será $M+P=M+N$, de donde quitando M, quedará $P=N$. Del mismo modo se demostraría que $Q=M$, que era lo 3.° Q. D. D.

Lo 4.° y 5.° se demuestra del mismo modo que lo 2.° y 3.° (386*a*).

394 Cor. De aquí se deduce que una línea GH (fig. 54) perpendicular á una de dos paralelas tal como á la AB, lo será tambien á la otra; porque en este caso $X=\frac{1}{2}\pi$; y como por lo 1.° que se acaba de probar $X+Z=\pi$, restando de esta ecuacion la antecedente, quedará $Z=\frac{1}{2}\pi$, ó un recto. Luego *una línea que es perpendicular á una de dos paralelas, lo es tambien á la otra*; y recíprocamente, *si de dos paralelas la una es perpendicular á una línea, la otra tambien lo será*; porque si la AB fuese perpendicular á la GH, sería $X=\frac{1}{2}\pi$, y como $X+Z=\pi$, restando, quedará $Z=\frac{1}{2}\pi$.

395 Teor. *Si una línea es paralela á una de dos paralelas, lo es tambien á la otra.* La demostracion del testo (386*a* cor. 1.°)

lo mismo demostraríamos respecto de m y q, resulta L. 4.° Q. D. D.

5.° Siendo tambien $p+r=\pi$, y $p=s$, se tendrá $r+s=\pi$, y por lo mismo r es suplemento de s; y como lo mismo demostraríamos respecto de los u y t, resulta L. 5.° Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí resulta que *si una línea es paralela á una de dos paralelas, lo es tambien á la otra.* Porque si la XZ fuese paralela á la BA, el ángulo $k=r$ por correspondientes; pero $r=n$ por la misma razon en las AB,DE que son paralelas por el supuesto; luego $k=n$; y en virtud de lo demostrado (385) las XZ y DE serán paralelas.

Cor. 2.° Tambien inferimos que *todas las líneas FG,HI,KL,MN*

---

396 Aquí poníamos por teorema el cor. 2.° (§ 386*a*).

397 Probl. *Dado un punto H fuera de una línea AB, tirarle una paralela.*

Res. y *Dem.* Desde H (fig. 56) tírese de un modo cualquiera la HF; en H fórmese un ángulo FHD igual con FEB, y la línea HD será la paralela pedida. Porque se verifica que los ángulos correspondientes son iguales (385).

Esc. Por un punto fuera de una línea se le puede tirar siempre una paralela; porque desde este punto siempre se le puede tirar una perpendicular HG, y en H otra perpendicular HD á esta, que será paralela á la AB (§ 383); pero como en H no se puede tirar mas de una perpendicular á la GH, tampoco se podrá tirar mas de una paralela á AB.

Los párrafos 398, 399 y 400 eran los mismos que hemos señalado en el testo con 386*c*, 386*d* y 386*e*.

Concluirémos manifestando otras investigaciones sobre esta teoría.

Mr. Garnier define las paralelas como nosotros, y despues de demostrar nuestra proposicion (385), dice: “*Por un punto K* (fig. 82) *solo se puede tirar una paralela á una recta dada PMN.*”

“*Dem.* Pues que dos paralelas no se encuentran, forman un ángulo nulo. Bajemos desde el punto K la perpendicular KM sobre PMN, y concibamos tiradas desde K las KB,KC,KD &c. á diferentes puntos de la PMN, y se tendrá (368), el ángulo KMP mayor que KBM, y este mayor que KCM &c.; y siendo recto el KMP, que tomarémos por unidad, resulta que los en B,C,D,&c. son menores que 1 y mayores que 0; pero entre 1 y 0 solo se hallan fracciones, tales como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. sin encontrarse cero; luego de todas las rectas tiradas como se quiera en el ángulo LKM, solo hay una que forme con PMN un ángulo nulo; luego solo se

&c. (fig. 55), *que desde una paralela AB se bajen perpendicularmente sobre la otra CD, serán iguales*; porque en primer lugar observarémos que todas estas líneas, por ser perpendiculares á CD, lo serán tambien á la AB (383*a*), y serán paralelas entre sí (383): y tirando la GH, resultarán los triángulos FHG,HGI iguales (361), por tener el lado GH comun, el ángulo $p = n$ por alternos internos entre las paralelas AB,CD; $q = m$, por la misma razon entre las paralelas FG,HI, siendo HG la secante; luego pues que estos triángulos son iguales, nos darán FG = HI. Del mismo modo demostraríamos que los KHI, KLI lo eran; lo que daría HI = KL; y que los KMN y KLN tambien lo eran, lo que

---

puede tirar por K una recta paralela á PMN." Con lo cual demuestra luego que en dos paralelas cortadas por otra, los ángulos correspondientes son iguales; porque si no lo fuesen, se podría tirar por el punto del menor una línea que formase ángulo igual, la cual sería paralela; y como por el supuesto se tenía ya tirada otra, resultaban dos paralelas por un mismo punto, lo que es absurdo.

M. Francœur, en sus elementos, demuestra bien nuestras proposiciones (384, 385 y 386), y se contenta con decir, que las inversas son tambien verdaderas, poniendo por nota que lo que hay mas luminoso sobre la materia, es lo que nosotros ponemos (§ 418).

Mr. Suzzane, en su obra sobre el modo de estudiar la Geometría define las paralelas, diciendo que *son las que tienen todos sus puntos igualmente distantes por todas partes*; y conociendo el hueco de esta definicion (§ 425), trata de probar que la recta que tiene dos puntos equidistantes de otra, los tiene todos. Para probarlo, hace consideraciones análogas á las nuestras en la demostracion del § 387, y deduce que la cuestion está reducida á probar que *una recta AB* (fig. 87), *que tiene dos puntos F, K, igualmente distantes de otra CD, forma un ángulo recto con las perpendiculares FG, KL bajadas desde los puntos* F, *K sobre la* CD, *y que lo mismo sucede con toda línea HI levantada en I perpendicularmente á CD*; y luego continúa: "Pero el ángulo GFK será recto, si suponiendo que no lo es, ninguna de las perpendiculares bajadas desde los puntos de la línea AB sobre la CD puede ser igual á la perpendicular FG, ó si todas las perpendiculares tiradas desde AB sobre CD son desiguales. Lo que él prueba casi del mismo modo que lo hacemos al fin de la digresion respecto de la fig. 90.*

Probada ya la legitimidad de la definicion, es mas sencilla nuestra teoría (§§ 420 al 425), que la que espone el citado Autor.

daría KL = MN; luego FG = HI = KL = MN &c. L. Q. D. D.

386*b*. Teor. *Si dos líneas cortadas por otra forman con ella dos ángulos internos, que juntos sean menores que dos rectos, dichas líneas se encontrarán hácia el parage donde forman dichos ángulos.*

Espl. Si las dos líneas VGT, AB (fig. 47), cortadas por la GH, forman los dos ángulos VGH,AHG, tales que VGH + AHG < π, se llegarán á encontrar hácia la izquierda de la GH.

Dem. Si no se encontrasen, serian paralelas (382); pero si en G formamos el ángulo HGC tal, que junto con el AHG equivalgan á dos rectos ó á π, la línea DGC será (386) paralela á la AB; luego tendríamos tiradas por el punto G dos paralelas VGT, CGD á una misma línea AB; y como esto es un absurdo (383 cor. 2.º), resulta que el supuesto que nos ha conducido á él tambien será absurdo, y como este era el que la línea VGT no encontrase á la AB, resulta que suficientemente prolongadas se encontrarán. Y esto se verificará hácia la izquierda de la GH; porque la VGT no pudiendo volver á encontrar en ningun punto á la GD (340 cor. 2.º), con ménos razon podrá encontrar á la parte HB; luego habiendo demostrado ya que por precision se han de encontrar, y que no puede ser á la derecha de la GH, será forzosamente hácia la izquierda, que es hácia donde se forman los ángulos, cuya suma es menor que dos rectos, que era L. Q. D. D

Esc. Cuando dos líneas tienen la posicion de las VGT, AB, se dice que *convergen* hácia el parage por donde se va acercando la una á la otra; y que *divergen* hácia el parage por donde se van separando.

386*c*. Teor. *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos; ó son iguales, ó son el uno suplemento del otro: son iguales cuando sus vértices estan vueltos hácia un mismo lado, ó en una situacion enteramente opuesta; y son el uno suplemento del otro cuando lo tienen vuelto hácia diferente lado.*

Espl. Voy á demostrar que los dos ángulos n, m (fig. 57) que tienen sus lados paralelos, y sus vértices vueltos hácia un mismo lado, ó los m y o que los tienen en una situacion enteramente opuesta, son iguales; y que los DEG y m, que tienen los lados paralelos y sus vértices vueltos hácia diferente lado, son el uno suplemento del otro.

Dem. Para probarlo, prolonguemos la DE hasta que encuentre á la BC en H; y tendrémos que $n = p$ por correspondientes entre las paralelas EF, BC, siendo DH la secante; $p = m$ tambien por correspondientes entre las paralelas AB, DH, siendo BC la secante; y como cosas iguales á una tercera son iguales entre sí, tendrémos $m = n$; y como $n = o$, por opuestos al vertice, será $m = o$.

Ahora, DEG es suplemento de n, y como acabamos de probar que n es igual con m, tendrémos que DEG es el suplemento de m, que era todo L. Q. D. D.

386*d* Antes hemos demostrado que el ángulo esterno de un triángulo era mayor que cualquiera de los dos internos opuestos; ahora vamos á probar que *si en un triángulo se prolonga uno de los lados, el ángulo esterno es igual á la suma de los dos internos opuestos.*

Dem. Prolóngando el lado BC (fig. 58) del triángulo ABC, y tirando por C la CE paralela á AB, tendrémos que el ángulo $ACD = n + m$; pero $n = A$, por alternos internos entre las paralelas BA, CE, siendo AC la secante; y $m = B$ por correspondientes entre las mismas paralelas, siendo BD la secante; luego sumando, será $n + m = A + B$; y como $n + m = ACD$, resultará $ACD = A + B$; pero ACD es el ángulo esterno, A y B los internos opuestos, luego *si en un triángulo* &c.

386*e* Teor. *Los tres ángulos de un triángulo valen juntos dos ángulos rectos, ó* π.

Dem. Acabamos de probar que en el triángulo ABC (fig. 58) $n + m = A + B$; luego si añadimos el ángulo comun o, será $n + m + o = A + B + o$; pero $n + m + o = \pi$ (352, 3.°); luego $A + B + o$ tambien será igual á π, ó á dos rectos; pero $A + B + o$ es la suma de los tres ángulos del triángulo ABC, luego &c. (*).

Cor. 1.° De aquí se deduce que *dados dos ángulos de un triángulo, se puede conocer el tercero, restando la suma de los dos ángulos dados, de dos ángulos rectos; y dado un ángulo, se puede hallar la suma de los otros dos, restándole de dos rectos: por lo cual en un*

(*) *Develey demuestra esta proposicion del modo siguiente.* "*Para conocer el valor de los tres ángulos del triángulo ABC (fig. 69*), dividamos este triángulo en tres partes por medio de las líneas FG, GH, tiradas como se quiera, con tal que corten en efecto al triángulo; llevemos despues el ángulo A al lado del ángulo* n*, colocando AF sobre CF y bajando el lado AG para que se imprima en CE, se tendrá* m = *A; y por consiguiente CE paralela á AB. Llevando del mismo modo el ángulo B al lado de* n*, colocando BH sobre CH y bajando BG á CD, se tendrá* p = *B, y por consiguiente CD paralela tambien á BA. Pero es evidente que las dos rectas CE, CD que tienen el punto comun C, y que son ambas paralelas á AB, no forman sinó una sola y misma recta ED. Luego* m + n + p = *2 rectos; luego A + B +* n = *2 rectos.*"

triángulo, uno de los ángulos es suplemento de la suma de los otros dos.

Cor. 2.° *Dos triángulos que tienen dos ángulos iguales el tercer ángulo es igual con el tercero;* pues en ambos ha de ser igual con lo que le falta á la suma de los otros dos para valer dos ángulos rectos.

{Cor. 3.° De aquí podríamos deducir igualmente que de lo espuesto (368 cor. 2.°) que *en un mismo triángulo no puede haber mas de un ángulo recto ó uno obtuso*; porque si hubiese dos rectos, como entre los tres no habian de valer mas de dos rectos, no quedaba valor para el tercero; si hubiese dos obtusos, ya entre los dos valdrían mas de dos rectos, lo que no podría ser; así como tampoco el que hubiese un ángulo recto y uno obtuso.

{Cor. 4.° Tambien podrémos deducir la siguiente proposicion de que harémos uso en lo sucesivo.

Si haciendo centro en C (figs. 59 y 60), uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles BAC con un radio igual á AC, uno de los lados iguales, se traza un arco AD y por el punto D en que encuentre al lado opuesto ó á su prolongacion, se tira la DC; digo que el ángulo DCE, formado por la prolongacion del lado desigual BC, y la línea tirada DC, es triplo del ACB, ó de su igual ABC.

Dem. Porque, cuando CD cae dentro del triángulo, se tiene $DCE = DBC + BDC = DBC + DAC + DCA$; y como $DCA = \pi - 2DAC$, se tendrá $DCE = DBC + DAC + \pi - 2DAC = DBC + \pi - DAC$; pero $\pi - DAC = \pi - BAC = 2ABC$; luego $DCE = DBC + 2ABC = 3ABC = 3ACB$. Cuando la CD cae fuera del triángulo, se tiene $DCE = DBC + BDC = DBC + DAC = DBC + ABC + ACB = 3ABC = 3ACB$, que era L. Q. D. D.

{*Digresion acerca de la teoría de las paralelas.*

{401 La teoría de las paralelas es de mucha trascendencia en todas las Matemáticas, y por desgracia las demostraciones que se han dado de sus proposiciones, no han tenido todo el grado de evidencia que es característico de la Geometría elemental.

{La definicion 35 del libro primero de Euclides es: "líneas paralelas ó equidistantes son las rectas que estando en un mismo plano prolongadas por ambas partes al infinito, jamas se encontrarán"; despues en las proposiciones 27 y 28 del mismo primer libro demuestra muy bien que *dos líneas que cortadas por otra forman los ángulos alternos internos iguales, los correspondientes iguales, los simplemente internos iguales con dos rectos, son líneas paralelas.* Mas para demostrar las inversas de estas proposiciones tiene que recurrir á un axioma que es el 12 del mismo libro, á saber:

{"Si una recta forma con otras dos, dos ángulos internos á un mismo lado, tales que su suma sea menor que dos rectos, estas

„líneas, prolongadas suficientemente, se llegarán á encontrar hácia „aquel parage por donde los ángulos juntos son menores que dos „rectos."

{Esta proposicion está muy distante de ser un axîoma; y así es que desde el tiempo de Proclo se ha estado tratando de demostrar sin dejar ningun hueco que le equivalga. Proclo trata de demostrarla; pero antes supone otros dos axiomas: 1.º *Si dos líneas que forman un ángulo se prolongan al infinito, su distancia escederá á cualquier magnitud finita.*

{Supongamos que salgan de A (fig. 61), las dos rectas AB, AC, que formen el ángulo BAC; y por cuanto los puntos D y E distan mas entre sí que F, G; y tambien los puntos B y C mas que D y E y así en adelante; si se prolongan mas allá las rectas AB, AC, es claro que sus puntos estremos distarán entre sí un espacio infinito, si se prolongan al infinito. Pues si no distasen un espacio infinito, se podria aumentar su distancia, y por lo mismo se podrían prolongar mas dichas líneas, lo que es absurdo, habiéndolas ya supuesto prolongadas al infinito. Por lo que si dichas líneas AB, AC se prolongan al infinito; su distancia escederá á toda distancia finita. De este axioma usó Aristóteles en el cap. 5. del lib. 1. *de Cœlo*, para demostrar que ningun cuerpo que se mueve en círculo puede ser infinito.

{Pero que, miéntras mas se prolongan las AB, AC, mas distan entre sí, lo tomó Proclo por verdadero sin demostracion, al decir que los puntos D y E distaban mas entre sí que F y G, y B y C mas que D y E &c.; por lo cual lo demostrarémos aquí.

Para esto, bájense desde cualesquiera puntos C, D de la ADC (fig. 62) las DE, CB, perpendiculares á la AB, las cuales medirán la distancia de los puntos C, D á la AB. Digo que CB es mayor que DE, y por tanto, que la recta AC dista mas de la AB miéntras mas remoto esté el punto C que el punto D. Pues si CB no es mayor, será igual ó menor.

{Supongamos que sea igual y tomemos BF = AE; con lo cual tendrémos, tirando la FC, que siendo los dos lados AE, ED del triángulo AED iguales á los dos lados FB, BC del triángulo FBC, y los ángulos comprendidos iguales por rectos, resultará DA = FC y el ángulo DAE = CFB; luego el ángulo esterno CFB del triángulo CAF será igual al interno DAE, lo que es absurdo. Luego no puede ser BC = DE.

Tampoco puede ser menor; porque si esto se verificase, prolongando la BC hasta G, de manera que BG = DE, y tirando la GF se tendrían los triángulos AED, FBG iguales (360) y darían el ángulo EAD = BFG, lo que es absurdo, pues EAD es

interno, y BFG esterno en el triángulo AHF; luego si la BC no puede ser igual ni menor que la DE, será mayor.

{Pero aun de aquí no se deduce que la distancia llegará á ser mayor que cualquier distancia dada; pues si suponemos que la CB sea igual con DE + $\frac{1}{2}$ DE y luego la MN = DE + $\frac{1}{2}$ DE + $\frac{1}{4}$ DE y luego PQ = DE + $\frac{1}{2}$ DE + $\frac{1}{4}$ DE + $\frac{1}{8}$ DE &c., no por esto podríamos llegar á tener una distancia igual (292) con 2DE, y mucho menos > 2DE. Es verdad que entónces la AC dejaría de ser recta, pero esto se necesitaba demostrar.

{402 Lo segundo que Proclo supone es: *Si una de dos paralelas corta á otra línea cualquiera, la otra paralela tambien la cortará.*

{Sean las dos paralelas AB, CD (fig. 63), en que la una tal como la AB corte á la EF en G: digo que la EF prolongada encontrará por precision á la CD. En efecto, concedida la primera proposicion, se tendrá que las dos rectas GB, GF que forman en G un ángulo, prolongadas al infinito, escederán á la distancia á que la paralela AB está de la CD; por lo cual cuando la distancia de la GB á la GF fuere mayor que aquella á que estan las paralelas, es necesario que la GF prolongada encuentre á la CD.

{403 Supuestas ya estas dos cosas se demostrará fácilmente este teorema, que es en Euclides el axioma 12 (ó 13 segun Clavio) del libro primero.

{*Si una recta cayendo sobre otras forma los ángulos internos á la misma parte menores que dos rectos, prolongadas, concurrirán hácia aquella parte donde forman los ángulos menores que dos rectos.*

{Supongamos que la EF (fig. 64) forme con las dos AB, CD, los ángulos BGH, DHG que juntos sean menores que dos rectos: digo que las AB, CD se encontrarán hácia B y D. Pues por cuanto los dos ángulos BGH, DHG, son menores que dos rectos, y los dos DHG, DHF equivalen á dos rectos, se tendrá

$$DHG + DHF > DHG + BGH,$$

de donde, quitando DHG, quedará DHF > BGH.

{Luego si por G se hace pasar una recta que forme con la FG un ángulo KGH = DHF, esta recta KG caerá por mas arriba de la GB, y prolongada cortará á la AB. Y por cuanto la GF forma con las dos rectas IK, CD, un ángulo esterno DHF igual al interno y opuesto KGH, serán las rectas IK, CD paralelas. Pero la AB corta á la IK en G, luego prolongada, cortará tambien á la CD; por lo cual la AB, concurrirá con la CD hácia las partes B y D en un punto tal como L, que era L. Q. D. D.

{404 El Padre Clavio conoció el hueco de la demostracion de Proclo y trató de demostrar el espresado axioma de Euclides: para lo cual tambien antepone algunas proposiciones que aunque él mismo dice seria bueno que se demostrasen, sin embargo son mucho mas evidentes y fáciles que el axioma de Euclides, de modo que evitando toda duda (dice) se les puede dar firme asenso.

{Lo primero que toma por evidente es: *La línea que tiene todos sus puntos equidistantes de otra línea recta que se halla en el mismo plano, es una línea recta.*

{Es decir, que si todos los puntos de la AB (fig. 65), distan igualmente de la CD, ó lo que es lo mismo, si son iguales todas las perpendiculares AD, EH, FG, BC bajadas á la DC, será la AEFB una línea recta. Esto dice él que puede constar por la definicion de la recta; porque si todos los puntos de la AB distan igualmente de la CD, no se hallará en ella nada de flexûoso, sino que se estenderá igualmente entre sus puntos, del mismo modo que la DC; de otro modo no estarían todos los puntos de la AB á igual distancia de la CD que es contra el supuesto. Ni tampoco se puede concebir que otra línea, fuera de la recta, pueda tener todos sus puntos equidistantes de otra recta que se halle en el mismo plano. Concedido este principio, se propone demostrar el mencionado axioma con tanta claridad, que se conozca á la luz natural, y que ninguno de un sano juicio lo pueda negar. Para lo cual deduce del principio antecedente que *si una recta se mueve perpendicularmente sobre otra, describirá con su otro estremo una línea tambien recta;* despues demuestra casi por el mismo método nuestras tres proposiciones (389, 390, 391), pero con la diferencia de que en la última que es la principal, viene á cometer en la construccion un circulo vicioso; pues supone que levantando en E una perpendicular (fig. 52) irá á encontrar á la CH, no advirtiendo que la misma razon hay para que esta perpendicular la encuentre, que para que lo haga la AB; pues los dos ángulos ECF y CEF juntos serán menores que dos rectos.

{405 Despues de haber indagado la verdad de esta proposicion por las demostraciones geométricas, se recurrió á las reglas de Lógica, haciendo servir de principio á la teoría de las paralelas, la idea de la posicion de las líneas, de la identidad ó de la diferencia de direccion. Estas nuevas consideraciones han fijado bastante la atencion del público, pero no satisfacen convenientemente á los Geómetras.

{Una de las mas modernas teorías de las paralelas es la de Karsten, famoso matemático aleman, la cual tiene por título *Tentamen novæ parallelarum theoriæ notione situs fundatæ, auctore G. C. Schwal Stultgardo*; pero tiene tambien el inconveniente de estar fundada sobre ideas de pura Metafísica.

{Otros matemáticos célebres han trabajado en perfeccionar este punto, y yo pondré aquí todas las nuevas teorías mas importantes, para que si los sabios hallan infructuosas mis investigaciones, puedan con su auxilio llegar á perfeccionar una teoría tan interesante. Principiarémos por las sábias investigaciones de Legendre.

{406 Este Geómetra, que es uno de los mas célebres que ha producido la Francia en estos últimos tiempos, define las paralelas del mismo modo que nosotros lo hemos hecho, y antepone á su teoría estas dos proposiciones.

{*La suma de los tres ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos.*

Dem. Sea si es posible ABC (fig. 66), un triángulo en que la suma de los tres ángulos sea mayor que dos rectos; tómese sobre la AC prolongada, CE $=$ AC; fórmese el ángulo ECD $=$ CAB, el lado CD $=$ AB, y tírense DE y BD. El triángulo CDE será igual con el BAC, pues que tienen un ángulo igual á un ángulo formado por dos lados iguales (360); luego se tendrá el ángulo CED $=$ ACB y CDE $=$ ABC, y el tercer lado ED $=$ BC.

{ Pues que la línea ACE es recta, la suma de los ángulos ACB, BCD, DCE es igual á dos ángulos rectos; pero como se supone que la suma de los ángulos del triángulo ABC es mayor que dos rectos, se tendrá $CAB + ABC + ACB > ACB + BCD + ECD$; que suprimiendo ACB por comun y CAB $=$ ECD, por construccion, queda ABC $>$ BCD; y pues que los lados AB, BC del triángulo ABC son iguales á los lados CD, CB del BCD, se sigue que el tercer lado AC es mayor que el tercero BD.

{Concibamos ahora que se prolonga indefinidamente la línea AC, así como la serie de los triángulos iguales y semejantemente colocados ABC, CDE, EFG, GHI &c., si se unen los vertices próximos por medio de las rectas BD, DF, FH, HK &c., se formará al mismo tiempo una serie de triángulos intermedios BCD, DEF, FGH &c. que serán todos iguales entre sí; pues que tendrán un ángulo igual conprendido entre dos lados iguales, luego se tendrá BD $=$ DF $=$ FH $=$ HK $=$ &c.

{Esto supuesto, pues que se tiene AC $>$ BD, sea la diferencia $AC - BD = d$: es claro que $2d$ será la diferencia entre la línea recta ACE $=$ 2AC y la BDF $=$ 2BD, de manera que se tendrá $AE - BF = 2d$; del mismo modo se tendrá $AG - BH = 3d$, $AI - BK = 4d$ y así en adelante. Pero por pequeña que sea la diferencia d, es evidente que, repetida un número suficiente de veces, vendrá á ser mayor que una longitud dada. Luego se podrá suponer la serie de los triángulos prolongada suficientemente para que se tenga $AP - BQ > 2AB$; y así resultaría $AP > BQ + 2AB$. Pero al contrario la línea recta AP es mas corta que la línea ángulosa ABQP que une los estremos A y P, de manera que se tendrá siempre $AP < AB + BQ + QP$ ó $AP < BQ + 2AB$; luego la hipótesis de que se ha partido es absurda; luego la suma de los tres ángulos del triángulo ABC no puede ser mayor que dos ángulos rectos.

{407 *En todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual á dos rectos.*

{*Dem.* Habiendo probado ya que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede esceder á dos rectos, falta demostrar que esta misma suma no puede ser menor que dos rectos.

{Sea ABC (fig. 67) el triángulo propuesto, y sea si es posible la suma de sus ángulos $2P - Z$, designando P un ángulo recto y siendo Z la cantidad cualquiera que se supone ser lo que falta á la suma de los ángulos para componer dos rectos.

{Sea A el menor de los ángulos del triángulo ABC; sobre el lado opuesto BC, fórmese el ángulo $BCD = ABC$, y el $CBD = ACB$: los triángulos BCD, ABC serán iguales (361). Por el punto D tírese una recta cualquiera EF que encuentre en E y F á los dos lados del ángulo A prolongados (*).

{Pues que la suma de los ángulos de los dos triángulos ABC, BCD es $4P - 2Z$, y que la de cada uno de los triángulos EBD, DCF no puede esceder á $2P$, se sigue que la suma de los ángulos de los triángulos ABC, BCD, EBD, DCF no escede á $4P - 2Z + 4P$ ó á $8P - 2Z$. Si de esta suma se quita la de los ángulos en B, C, D que es $6P$, pues que la suma de los ángulos formados en cada uno de los puntos B, C, D es $2P$, la resta será igual á la suma de los ángulos del triángulo AEF; luego la suma de los ángulos del triángulo AEF no escede á $8P - 2Z - 6P = 2P - 2Z$.

{Asi, mientras que es necesario añadir Z á la suma de los ángulos del triángulo ABC para componer dos rectos, es necesario añadir á lo ménos $2Z$ á la suma de los ángulos del triángulo AEF para valer igualmente dos rectos.

{Por medio del triángulo AEF se construirá semejantemente otro, tal que será necesario añadir á lo ménos $4Z$ á la suma de sus tres ángulos para que el todo sea igual á dos rectos; y por

(*) *Nota de Legendre. Se supone que A es el menor de los ángulos del triángulo ABC, y que en consecuencia es menor, ó no mayor que dos tercios del ángulo recto, á fin de hacer mas sensible la posibilidad de que una línea recta tirada por el punto D encuentre á un tiempo á los dos lados AB, AC prolongados.*

medio del tercero se construirá otro, tal que será necesario añadir á lo ménos $8Z$ á la suma de sus ángulos, á fin de que el todo sea igual á dos rectos, y así en adelante.

{Pero, por pequeña que sea Z con relacion al ángulo recto P, la serie Z, $2Z$, $4Z$, $8Z$ &c., cuyos términos crecen en razon dupla, conducirá bien pronto á un término igual ó mayor que $2P$. Luego se llegará entonces á un triángulo, tal que será necesario añadir á la suma de sus ángulos una cantidad igual ó mayor que $2P$ para que la suma total fuese igual solamente á $2P$. Esta consecuencia es visiblemente absurda, luego la hipótesis de donde se ha partido no podría subsistir, es decir, que la suma de los ángulos del triángulo ABC sea menor que dos ángulos rectos; ella no puede ser mayor en virtud de la proposicion precedente, luego es igual á dos ángulos rectos.

{*Cor.* 1.° En un triángulo rectángulo la suma de los dos ángulos agudos ha de ser igual con uno recto, porque entre los tres han de valer dos rectos.

{*Cor.* 2.° De donde se deduce tambien que *si en un triángulo se prolonga uno de los lados, el ángulo esterno es igual á la suma de los dos internos opuestos.*

{408 *Si dos líneas rectas AC, ED* (fig. 68), *son perpendiculares á una tercera AE, estas dos rectas serán paralelas, es decir, que ellas no podrán encontrarse á cualquier distancia que se las prolongue.*

{*Dem.* Porque si se encontrasen en un punto O, habría allí dos perpendiculares OA, OE, bajadas desde un mismo punto O sobre una misma línea AE, lo que es imposible.

{409 *Si dos rectas AC, BD (fig. 68), forman con una tercera AB dos ángulos interiores CAB, ABD, cuya suma sea igual á dos ángulos rectos, las líneas AC, BD serán paralelas.*

{*Dem.* Si los ángulos CAB, ABD fuesen iguales entre sí, serían rectos ambos, y se tendría el caso anterior; supongamos, pues, que estos dos ángulos son desiguales, y por el punto A bajese la AE perpendicular á BD.

{En el triángulo rectángulo ABE la suma de los dos ángulos agudos ABE, BAE es igual á un ángulo recto (407 cor. 1.°); si esta suma se quita de la de los dos ángulos ABE, BAC, que por la hipótesis es igual á dos rectos, quedará el ángulo CAE igual á un ángulo recto; luego las dos líneas AC, BD son perpendiculares á una misma línea AE; luego son paralelas.

{410 *Si dos rectas AF, BD, forman con una tercera AB, (fig. 69), dos ángulos internos FAB, ABD, cuya suma sea menor ó mayor que dos ángulos rectos, digo que las dos líneas AF, BD, prolongadas suficientemente, se encontrarán.*

Dem. Tírese AC de manera que la suma de los ángulos CAB + ABD sea igual á dos rectos: podrán ocurrir aquí dos casos segun el ángulo BAF sea menor ó mayor que BAC, es decir, segun la suma dada FAB + ABD sea menor ó mayor que dos rectos.

Sea 1.° el ángulo BAF < BAC; tírese por el punto A una oblicua cualquiera AM, que encuentre á BD en M; el ángulo AMB será igual con MAC, pues que añadiendo por una y otra parte una misma cantidad MAB + ABM, las dos sumas serán iguales con dos ángulos rectos. Tómese ahora MN = AM y tírese la AN, el ángulo AMB esterno al triangulo MAN es igual á la suma de los dos internos opuestos MAN, ANM; pero estos son iguales entre sí, porque AM = MN, luego el ángulo AMB ó su igual MAC es duplo de MAN; luego la AN divide en dos partes iguales al ángulo CAM, y encuentra á la BD en un punto N situado á la distancia MN = AM.

De la misma demostracion se deduce, que si sobre la BD se toma semejantemente NP = AN, se tendrá el punto P adonde debe ir á parar la recta que divide en dos partes iguales al ángulo CAN. Luego se puede tomar así sucesivamente la mitad, la cuarta, la octava &c. parte del ángulo CAM, y las líneas que causan estas divisiones, encontrarán á la BD en puntos mas y mas remotos, pero fáciles de determinar, pues que se tendrá sucesivamente MN = AM, NP = AN, PQ = AP &c. También se puede notar que cada distancia de un punto de interseccion al punto A no es de todo punto dupla de la distancia de la interseccion precedente; porque AN es menor que AM + MN, ó que el duplo de AM; se tiene igualmente AP < 2AN, AQ < 2AP, y así en adelante; pero continuando subdividiendo el ángulo CAM en razon dupla, se llegará bien pronto á un ángulo CAZ mas pequeño que el ángulo dado CAF, y será aun verdadero que AZ prolongada encuentre á BD en un punto determinado, y por consiguiente antes la habrá encontrado la AF: luego si los dos ángulos BAF, ABD forman juntos una suma menor que dos rectos, las líneas AF, BD prolongadas suficientemente, se encontrarán.

2.° Supongamos que los dos ángulos FAB, ABD compongan una suma mayor que dos rectos: si se prolongan FA hácia G y DB hácia E, la suma de los cuatro ángulos FAB, BAG, ABD, ABE será igual á cuatro rectos; y si se quita de ella FAB + ABD mayor que dos rectos, la resta BAG + ABE será menor que dos rectos; luego, segun el primer caso, las líneas AG, BE prolongadas suficientemente, se deberán encontrar.

Cor. Por un punto dado A, no se puede tirar sino una sola paralela á la línea dada BD: porque solo hay una línea que forme la

suma de los ángulos BAC + ABD, igual á dos ángulos rectos, la cual es la paralela pedida; toda otra línea AF formaría la suma de los dos ángulos BAF + ABD menor ó mayor que dos rectos, luego encontraría á la BD.

411 *Si dos paralelas AB, CD (fig. 70), se cortan por una secante EF, la suma de los dos ángulos interiores, AGO, GOC, será igual á dos rectos.*

Porque si fuese mayor ó menor, las dos líneas AB, CD se encontrarían por uno ó por otro lado, y no serían paralelas. De aquí deduce inmediatamente Legendre, que si el ángulo GOC es recto, el AGO debe serlo tambien; luego toda línea perpendicular á una de dos paralelas es perpendicular á la otra.

Despues de algunas otras consecuencias que saca, pasa á demostrar que *dos paralelas estan equidistantes por todas partes*, lo que ejecuta en estos términos.

Entre las dos paralelas AC, BD (fig. 71), tírense por donde se quiera, las dos líneas AB, CD perpendiculares á una de ellas: digo que estas perpendiculares son iguales. Porque las líneas AB, CD perpendiculares á una de dos paralelas son al mismo tiempo perpendiculares á la otra; y si se tira EF perpendicular sobre el medio de AC, EF tambien será perpendicular á BD, de manera que todos los ángulos en A, E, C, B, F, D serán rectos. Esto supuesto, digo que el cuadrilátero AEFB (*) se puede colocar exactamente sobre el cuadrilátero CEFD; porque el lado EF, es comun, el ángulo AEF, es igual al FEC, y el lado EA, es igual á EC por construccion: luego el punto A caerá en C. Pero el ángulo EAB, es igual á ECD; luego AB y CD estarán en una misma direccion. Por otra parte el ángulo EFB = EFD; luego FB y FD estarán tambien en la misma direccion; luego los dos cuadriláteros coincidirán enteramente el uno con el otro, y se tendrá por consiguiente AB = CD.

Aquí se ve que toda la teoría de las paralelas de Legendre estriva en la proposicion de que la suma de los tres ángulos de un triángulo equivale á dos rectos; pero como en esta demostracion hace una construccion en que supone que por D (fig. 67), se tire una línea FDE que encuentre á los dos lados AB, AC, esto es, que se tire una línea recta con tres circunstancias, lo que en

(*) *Cuadrilátero es, como se dirá en su lugar, un espacio cerrado por cuatro líneas.* "*En la duodécima edicion, hecha en el año de 1823, ha variado Legendre esta demostracion, y la pone como yo lo hago en el testo cor. 2.° del § 386a.*

general no se puede hacer, se deduce que este es el hueco que se encuentra en su teoría (*).

{412 Por esta causa Mr. Kircher, autor de una nueva teoría de las paralelas inserta en su obra un apéndice para perfeccionar la teoría de las paralelas por el método de Legendre; pero ante todas cosas trata de refutar la de este sabio, lo que ejecuta en estos términos. "Despues de haber espuesto (Mr. Legendre), que en el triángulo AEF (fig. 67), que supone estar formado por la línea tirada por el punto D, la suma de los ángulos no puede esceder á 2P — 2Z construye semejantemente un tercer triángulo, y por medio de este un cuarto, y así sucesivamente." Pero esta línea, pasando por D, está construida ó antes que los lados AB, AC esten prolongados, ó estos mismos lados estan prolongados antes, y se tira despues una recta por el punto D. En el primer caso nada determina el que la línea tirada por el punto D corte á uno de los lados prolongados, porque no se ha dado ni la direccion de esta línea, ni el ángulo que forme con otra.

{Supongamos, pues, que los lados AB, AC esten prolongados antes que se haya tirado la línea por el punto D: en este caso se puede tomar un punto cualquiera, y tirar por los F, D una recta FD; ¿pero cómo se ha de demostrar entónces que la prolongacion de FD cortará al lado AB prolongado? Ella se apróxima á la verdad mas y mas á la línea AE, pero puede ser asintóticamente; de manera que no encuentre jamas á AE: (pues verémos mas adelante que hay líneas que se van aproximando á otras cada vez mas, y sin embargo jamas las encuentran, y por lo mismo se les da el nombre de *asíntotas*). Luego no se puede demostrar, que toman-

(*) *El mismo Legendre lo conoce, como lo da á entender en la nota que pone: y tal vez por esto ha intentado dar una demostracion analítica de esta proposicion en la nota segunda de sus elementos de Geometría. Aunque esta nota no se puede entender hasta tener conocimiento de la teoría de las funciones, no obstante la pondrémos aquí porque es interesante; y se podrá reservar su lectura para cuando se tenga este conocimiento.*

Se demuestra (dice) inmediatamente por la superposicion, y sin ninguna proposicion preliminar, que dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales. Llamemos p *el lado de que se trata,* A *y* B *los dos ángulos adyacentes, y* C *el tercer ángulo. Es necesario, pues, que el ángulo* C *esté enteramente determinado, cuando se conocen los ángulos* A *y* B *con el lado* p; *porque si muchos ángulos* C *pudiesen corresponder á los tres datos* A, B, p, *habría otros tantos triángulos diferentes, que tuviesen un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, lo que es imposible: luego el ángulo* C *debe ser una funcion determinada de las tres cantidades* A, B, p, *lo que espresarémos así* $C = f : (A, B, p)$.

Sea el ángulo recto igual con la unidad: en este caso los ángulos A, B, C *serán números comprendidos entre* 0 *y* 2; *y pues que* $C = f : (A, B, p)$, *digo que la línea* p *no debe entrar en la funcion* f. *En efecto, se ha visto que* C *debe quedar enteramente determinada por los solos datos* A, B, p, *sin otro ángulo ni línea cualquiera; pero la línea* p *es heterogénea con los números* A, B, C, *y si se tuviese una ecuacion cualquiera entre* A, B, C, p, *se podria sacar de ella el valor de* p *en* A, B, C; *de donde resultaría que* p *era igual á un número, lo que es absurdo; luego* p *no debe entrar en la funcion* f, *y se tiene simplemente* $C = f : (A, B)$.

En una nota que pone, dice: se ha objetado contra esta demostracion, que si se aplicase palabra por palabra á los triángulos esféricos, resultaría que, conocidos dos ángulos, bastarian para determinar el tercero; lo que no tiene lugar en esta clase de triángulos. La respuesta es que en los triángulos esféricos hay un elemento mas que en los triángulos planos, y este elemento es el radio de la esfera, de que no se debe hacer abstraccion. Sea, pues, r *el radio, y entónces en vez de tener* $C = f : (A, B, p)$, *se tendrá* $C = f : (A, B, p, r)$, *ó solamente* $C = f : (A, B, \frac{p}{r})$ *en virtud de la ley de la homogeneidad. Pero, pues que la relacion* $\frac{p}{r}$ *es un número, así como* A, B, C, *nada im-*

do en AF un punto cualquiera F, la recta tirada por el punto D cortará á un mismo tiempo á los dos lados del triángulo prolongados."

{"Si se quisiesen determinar dos puntos *e*, F en las prolongaciones de AB, AC, y tirar las líneas rectas *e*D, FD al punto D, en este caso no se puede saber si *e*DF es recta; y suponiendo que *e*DF no sea una línea recta, se podría prolongar DF, y esta prolongacion E*f* caería ó por mas arriba de la recta *e*D, ó por mas abajo. Supongamos primero que caiga por mas abajo, y tendrémos que se podrá bajar el punto *e*, de manera que el ángulo *e*DF se fuese haciendo menor y menor; pero no conociendo la ley de este decremento, no se puede saber cuando este ángulo llegaría á ser cero, lo que es indispensable para determinar un punto cualquiera sobre AE, por el cual y el D, tirando una línea recta, coincidiese con fD, que es la prolongacion de DF; el mismo razonamiento tendria lugar si la polongacion de FD cayese por mas arriba de la *De*. Luego yo no veo ningun medio en todas las proposiciones que han precedido á la proposicion XX de Legendre, por el cual se pueda demostrar que una línea tirada por el punto D, encontrase á un mismo tiempo á los lados prolongados del triángulo."

{"Y aun observando lo que dice Legendre en su nota, ¿cómo el menor ángulo A podría impedir que la recta tirada por el punto D no se acerque si no asimóticamente á uno de los lados AB, AC prolongados? Si la menor distancia de los lados del ángulo A, fuese la causa de que esta línea cortase á un tiempo á los lados prolongados, ¿cómo se puede hacer entónces sensible esta intersec-

---

pide que $\frac{\text{p}}{\text{r}}$ *se encuentre en la funcion* f, *y entónces no se puede concluir que* C = f: (A, *B*).

Satisfecha ya esta objecion, continuarémos su demostracion. La fórmula C = f: (*A*, *B*) *prueba ya, que si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercero debe ser igual al tercero; y esto supuesto es fácil llegar al teorema que nos ocupa.*

Sea primero ABC (*fig.* 72), *un triángulo rectángulo en A; desde el punto A, bajese la perpendicular AD á la hipotenusa. Los ángulos B y D del triángulo ABD son iguales á los B y A del triángulo BAC; luego segun lo que se acaba de demostrar, el tercero BAD es igual al tercero* C. *Por la misma razon el ángulo DAC = B; luego BAD + DAC ó BAC = B +* C; *pero el BAC es recto, luego los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo tomados juntos, valen un ángulo recto.*

Sea despues BAC (*fig.* 73)*un triángulo cualquiera, y BC un lado que no sea menor que cada uno de los otros dos: si desde el ángulo opuesto A se baja la perpendicular AD sobre BC, esta perpendicular caerá dentro del triángulo ABC, y le dividirá en dos triángulos rectángulos BAD, DAC; pero en el BAD los dos ángulos BAD, ABD, valen juntos un ángulo recto: en el DAC, los dos ángulos CAD, DCA, valen juntos un ángulo recto; luego los cuatro reunidos ó solamente los tres BAC, ABC, ACB valen juntos dos ángulos rectos; luego* en todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual á dos rectos.

Aquí se ve que este teorema, considerado á priori, *no depende de un encadenamiento de proposiciones, sinó que se deduce inmediatamente del principio de la homogeneidad, que debe verificarse en toda relacion entre cualesquiera cantidades. Pero sigamos y hagamos ver, que*

cion para mayores distancias de los lados del ángulo A, las cuales distancias mayores deben siempre tener lugar, pues que construye muchos triángulos entre los lados AB, AC prolongados? Esta nota es tanto mas reparable cuanto en la Geometría es necesario mas bien demostrar que sentir; y M. Legendre no ha dado ninguna demostracion que pueda justificar la suposicion de que la línea tirada por el punto D encuentre á un mismo tiempo á los lados del triángulo prolongados."

{"Veamos como se podrá suplir á esta teoría de M. Legendre (continúa Kircher) respecto de dicha proposicion XX (que es nuestra 400); y para esto propondré dos métodos tan seguro el uno como el otro."

{"El primero consiste en dar una demostracion de esta proposi-

---

se pueden sacar del mismo principio los otros teorémas fundamentales de la Geometría.

Conservemos las mismas denominaciones que ántes, y llamemos ademas m *al lado opuesto al ángulo A, y* n *al opuesto al ángulo B. La cantidad* m *debe quedar enteramente determinada por las solas cantidades A,B,*p, *luego* m *es una funcion de A,B,*p, *y* $\frac{\text{m}}{\text{p}}$ *lo es tambien; de manera que se puede hacer* $\frac{\text{m}}{\text{p}}$ = *F*: (*A,B,*p). *Pero* $\frac{\text{m}}{\text{p}}$ *es un número, como tambien lo son A y B, luego la funcion F no debe contener á la línea* p, *y se tendrá simplemente* $\frac{\text{m}}{\text{p}}$ = *F*: (*A,B*), *ó* m = p × *F*: (*A,B*). *Y del mismo modo se tendrá* n = p × *F*: (*A,B*).

Supongamos ahora que se tenga otro triángulo formado con los mismos ángulos A,B,C, á los cuales esten respectivamente opuestos los lados m′, n′, p′; *y pues que A y B no mudan, se tendrá en este nuevo triángulo* m′ = p′ × *F*: (*A,B*), *y* n′ = p′ × *F*: (*A,B*); *luego* m: m′ : : n : n′ : : p : p′, *luego en* los triángulos equiángulos los lados opuestos á los ángulos iguales son proporcionales.

La proposicion del cuadrado de la hipotenusa es, como se sabe, una consecuencia de los triángulos equiángulos. He aquí, pues, tres proposiciones fundamentales de la Geometría: la de los tres ángulos de un triángulo, la de los triángulos equiángulos, y la del cuadrado de la hipotenusa, que se deducen muy simple é inmediatamente de la consideracion de las funciones. Por el mismo camino se pueden demos-

cion enteramente semejante á la de la proposicion XIX, que es la que hemos espuesto (406), pero sería necesario demostrar antes que BDFHO (fig. 66), es una línea recta.

{"El ángulo BAC, ó es obtuso, ó es recto ó es agudo: si es recto, siendo iguales todas las perpendiculares AB, CD, EF, ON, la línea BDFHO es recta (Kircher cita para esto la proposicion XV de su teoría de las paralelas que él demuestra bien y que es nuestra proposicion (388)."

{"Supongamos ahora que el ángulo BAC sea agudo: bájense sobre AP desde los puntos B, D, F, H &c., las perpendiculares Bb, Dd, Fe, Hf &c. que caerán hácia el lado del ángulo agudo; y se formarán los triángulos rectángulos ABb, DCd, FEe &c. que serán todos iguales entre sí; porque, concibamos que las dos rectas

---

trar las proposiciones pertenecientes á las figuras y cuerpos semejantes.

Sea ABCD (fig. 74) un polígono cualquiera: habiendo elegido un lado AB por base, fórmense otros tantos triángulos ABC, ABD &c. sobre esta base, como ángulos C, D &c., hay fuera de ella. Sea la base $AB = p$, *sean A y B los dos ángulos del triángulo ABC, adyacentes al lado AB, A′ y B′ los dos ángulos del triángulo ABD, adyacentes al mismo lado AB, y así sucesivamente.*

La figura ABCD quedará enteramente determinada si se conoce el lado p con los ángulos A,B,A′,B′,A″,B″ &c, y el número de los datos será $2n-3$, *siendo n el número de lados del polígono. Esto supuesto, un lado ó una línea cualquiera x, tirada como se quiera en el polígono, será una funcion de estos datos: y como x debe ser un número, se podrá suponer* $\frac{x}{p} = F:(A,B,A',B' \text{ \&c.})$, *ó* $x = p \times F:(A,B,A',B' \text{ \&c.})$, *y la funcion F no contendrá á p. Si con los mismos ángulos A,B,A′,B′ &c., y otro lado p′ se forma un segundo polígono, se tendrá para la línea* $x' = p' \times F:(A,B,A',B' \text{ \&c.})$; *luego* $x : x' :: p : p'$. *Las figuras así construidas se pueden definir* figuras semejantes, *luego en las figuras semejantes las líneas homólogas son proporcionales. Así, no solamente los lados homólogos, las diagonales homólogas, sino las líneas tiradas de la misma manera en las dos figuras, son entre sí como otras dos líneas homólogas cualesquiera.*

Llamemos S á la superficie del primer polígono: esta superficie es homogénea con el cuadrado p^2; *luego es necesario que* $\frac{S}{p^2}$ *sea un*

iguales AB, CD, se ponen la una sobre la otra, de manera que A caiga en C y B en D, la línea Ab, tomará la direccion Cd, pues que el ángulo A es igual al ángulo C; y si el punto b cayese ó á derecha ó á izquierda del punto d, se tendrían dos perpendiculares Bb, Dd, desde un mismo punto á una línea, luego el punto b caerá en d, y por lo mismo $Bb = Dd$.

{"Por un razonamiento semejante se demostrará que Dd es igual con Fe, y Fe con Hf y así sucesivamente, es decir, que se puede demostrar fácilmente que $Bb = Dd = Fe$ &c.; luego todas estas perpendiculares siendo iguales entre sí, la línea BDFHO, debe ser recta. Si el ángulo BAC es obtuso, su suplemento será agudo; y el mismo razonamiento tendrá lugar para las perpendiculares que caigan á la izquierda del ángulo obtuso BAC. Luego cualquiera

---

número que no contenga sino á los ángulos A,B,A′,B′ &c. De manera, que se tendrá $S = p^2 \times f:(A,B,A',B' \text{ \&c.})$. *Por la misma razon si S′ es la superficie del segundo polígono, se tendrá* $S' = p'^2 \times f:(A,B,A',B' \text{ \&c.})$. *Luego* $S : S' :: p^2 : p'^2$. *Luego las* superficies de las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos.

Pasemos ahora á los poliedros. Se puede suponer que una cara está determinada por medio de un lado conocido p, y de muchos ángulos A, B, C &c.: despues, los vértices de los ángulos sólidos fuera de esta base, quedarán determinados cada uno por medio de las cosas dadas, que se podrán considerar como otros tantos ángulos; de manera que la determinacion entera del poliedro depende de un lado p, y de muchos ángulos A, B, C &c., cuyo número varía segun la naturaleza del poliedro. Esto supuesto, una línea que une dos vértices, ó mas generalmente, toda línea x tirada de un modo determinado en el poliedro, será una funcion de los datos A, B, C &c.; y como $\frac{x}{p}$ *debe ser un número, la funcion igual á* $\frac{x}{p}$ *no contendrá sino á los ángulos A, B, C &c.*

La superficie del sólido es homogénea con p^2, *y por lo mismo se puede representar esta superficie por* $p^2 \times F:(A, B, C \text{ \&c.})$; *su volúmen es homogéneo con* p^3, *y se puede representar por* $p^3 \times F':(A, B, C \text{ \&c.})$ *siendo las funciones señaladas con F y F′ independientes de p.*

Constrúyase un segundo sólido con los mismos ángulos A,B,C &c.

que sea la direccion que tomen las líneas AB, CD, EF &c. con tal que sean todas iguales entre sí, la línea BDFHO tirada por los estremos B, D, F, H &c., será recta.

{"Esto supuesto, se puede demostrar bien que la suma de los tres ángulos de un triángulo no puede ser menor que dos rectos.

{"Porque supongamos que la suma de los tres angulos de un triángulo (fig. 66), sea menor que dos ángulos rectos, es decir, supongamos que se tenga $BAC + ABC + ACB < 2R$ (llamando R al ángulo recto); y será $BAC + ABC + ACB < ACB + BCD + DCE$ (porque $ACB + BCD + DCE = 2R$); quitando de ambas partes ACB, que es comun y $BAC = DCE$, quedará $ABC < BCD$; y pues que $AB = CD$ y BC es comun, se tendrá $BD > AC$ (375), sea $BD - AC = D$, lo que dará $2BD - 2AC = 2D$, es decir, BF

---

y un lado p' *diferente de* p; *y llamando cuerpos semejantes á los así construidos, tendrémos que la línea que era* $p \times f$: *(A, B, C &c.) ó simplemente* $p \times f$ *en el un cuerpo, será* $p' \times f$ *en el otro; la superficie que era* $p^2 \times F$ *en el uno; será* $p'^2 \times F$ *en el otro; y en fin, el volúmen que era* $p^3 \times F'$ *en el uno, será* $p'^3 \times F'$ *en el otro; luego* 1.° los cuerpos semejantes tienen los lados ó líneas homólogas proporcionales; 2.° sus superficies son como los cuadrados de los lados homólogos; 3.° sus volúmenes son como los cubos de estos mismos lados.

Los mismos principios se aplican fácilmente al círculo.

Sea c *la circunferencia y* s *la superficie del círculo, cuyo radio es* r; *pues que no puede haber dos círculos desiguales descritos con un mismo radio, las cantidades* $\frac{c}{r}$ *y* $\frac{s}{r^2}$ *deben ser funciones determinadas de* r; *pero como estas cantidades son números, no deben contener en su espresion á la línea* r, *y así se tendrá* $\frac{c}{r} = a$, *y* $\frac{s}{r^2} = b$; *siendo* a *y* b *números constantes.*

Sea c' *la circunferencia y* s' *la superficie de otro círculo, cuyo radio sea* r', *y se tendrá tambien* $\frac{c'}{r'} = a$, *y* $\frac{s'}{r'^2} = b$; *luego será* $c : c' :: r : r'$, *y* $s : s' :: r^2 : r'^2$; *luego* las circunferencias de los círculos son como los radios, y sus superficies como los cuadrados de los radios.

Consideremos un sector, cuyo radio sea r, *y* A *el ángulo en el*

$- AE = 2D$, y lo mismo $BH - AG = 3D$, $BK - AI = 4D$, y así sucesivamente; pero, por pequeña que sea D, es evidente que esta diferencia, repetida un número suficiente de veces, llegará á ser mayor que toda línea dada.

{"Luego es claro que se podría suponer la serie de los triángulos prolongada suficientemente para que se tenga $BQ - AP > 2AB$, y así se tendrá $BQ > AP + 2AB$ ó $BQ > AB + AP + QP$ (porque $AB = QP$), lo que es imposible; luego tambien es imposible que la suma de los tres ángulos de un triángulo sea menor que dos rectos, y esta suma no pudiendo esceder á dos rectos; debe ser igual con dos ángulos rectos."

{El segundo metodo de suplir á la teoría de Legendre es mas directo é inmediatamente aplicable á su demostracion, porque se

---

centro: sea x *el arco que le termina, é* y *la superficie de este mismo sector; pues que el sector está enteramente determinado cuando se conoce* x *y* A, *es necesario que* x *é* y *sean funciones determinadas de* x *y* A; *luego* $\frac{x}{r}$ *é* $\frac{y}{r^2}$ *son tambien funciones de esta especie. Pero* $\frac{x}{r}$ *es un número, así como* $\frac{y}{r^2}$, *luego estas cantidades no deben contener á* r, *y son simplemente funciones de* A; *de manera que se tendrá* $\frac{x}{r} = f: A$, *é* $\frac{y}{r^2} = F: A$.

Sean x' *é* y' *el arco y la superficie de otro sector, cuyo ángulo sea* A, *y el radio* r', *á cuyos sectores llamarémos* sectores semejantes; *y pues que el ángulo* A *es igual en ambos se tendrá* $\frac{x}{r'} = f: A$, *é* $\frac{y'}{r'^2} =$ $F: A$, *luego* $x : x' :: r : r'$, *é* $y : y' :: r^2 : r'^2$; *luego* los arcos semejantes o los arcos de los sectores semejantes son proporcionales á los radios, y los sectores mismos son proporcionales á los cuadrados de los radios.

Es claro que se probará de la misma manera que las esferas son como los cubos de los radios.

En todo lo que precede, se supone que las superficies se miden por el producto de dos líneas, y los volúmenes por el producto de tres, lo que tambien es fácil de demostrar analiticamente. Consideremos un rectángulo, cuyas dimensiones sean p *y* q, *y representemos su super-*

puede demostrar actualmente que la recta tirada por el punto D, debe cortar á un tiempo á los lados AB, AC prolongados; pero como esto lo hace suponiendo ya que dos líneas que con una tercera forman un ángulo agudo y un ángulo recto se encuentran, que es en lo que consiste toda la dificultad de la teoría de las paralelas, lo omitirémos.

{413 Mr. Hauff, ha seguido el mismo camino que Legendre en su teoría de las paralelas; ha dado una demostracion de la proposicion de que la suma de los tres ángulos de un triángulo, es igual á dos rectos, mas directa que la de este Geómetra; y aunque tiene sus huecos es digna de ser conocida: por lo que la insertarémos aquí, segun la esposicion que de ella hace el mismo Kircher.

---

ficie que es una funcion de p *y de* q *por* f : (p,q). *Si se considera otro rectángulo, cuyas dimensiones sean* p + p′ *y* q, *es claro que este rectángulo estará compuesto de otros dos, el uno que tenga por dimensiones á* p *y á* q, *y el otro á* p′ *y* q; *de manera que se tendrá* f : (p + p′, q) = f: (p,q) + f : (p′,q).

Sea p′ = p, *y se tendrá* f: (2p,q) = 2f: (p,q). *Sea* p′ = 2p, *y será* f: (3p,q) = f:(p,q) + f:(2p,q) = 3f: (p,q).

Sea p′ = 3p, *y se tendrá* f:(4p,q) = f:(p,q) + f:(3p,q) = 4f:(p,q). *Luego en general si* k *es un número entero cualquiera, se tendrá*

$$f{:}(kp,q) = k\,f{:}(p,q)\,;\ \text{ó dividiendo por } kp,\ \text{será}\ \frac{f{:}(kp,q)}{kp} = \frac{f{:}(p,q)}{p}$$

De donde resulta que f: (p,q) *es una funcion de* p, *tal que no muda aunque se ponga en vez de* p *un múltiplo cualquiera suyo, tal como* kp. *Luego esta funcion es independiente de* p, *y no debe encerrar sinó á* q.

Mas por una razon semejante $\frac{f{:}(p,q)}{q}$ *debe ser independiente de* q,

luego $\frac{f{:}(p,q)}{pq}$ *no encierra á* p *ni á* q; *y así, esta cantidad debe reducirse á una constante* a; *luego se tendría* f: (p,q) = a × pq, *y como nada impide hacer á* a = 1, *se tendrá* f: (p,q) = 1 × pq = pq; *así, la superficie de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.*

De un modo enteramente semejante se demostraría que el volúmen de un paralelepípedo rectángulo, cuyas dimensiones sean p, q, r, *es igual al producto* pqr *de sus tres dimensiones.*

{*En el triángulo* ABC (*fig.* 75) *la suma de los tres ángulos* A, B, C, *es igual á dos rectos.*

{*Dem.* Divídase el lado AC del triángulo ABC en dos partes iguales en D, y despues de haber tirado y prolongado la BD, hágase DF = BD y tírense las FC y FA. Pues que AD = DC, BD = DF y el ángulo ADF = BDC, se tendrá AF = BC, el ángulo DAF igual al ángulo DCB y el AFD = DBC; pues que AD = DC, BD = DF y el ángulo ADB = CDF, se tendrá AB = FC, el ángulo ABD = DFC, y DAB = DCF; pues que en fin BC = AF, AB = FC, y ABC = AFC por componerse el primero de los ángulos ABD, DBC que son iguales á los DFC, AFD que componen el segundo, se tendrá el triángulo ABC igual al AFC. Si se describe sobre el lado BC el triángulo BCG, por una construccion enteramente semejante á la antecedente, se puede demostrar fácilmente que el triángulo ABC es igual al BCG; y pues que se ha demostrado ya que el triángulo ABC = AFC, se tendrá el triángulo ACF = ABC = BCG, luego el ángulo ACF = BAC = A, el ángulo BCG = ABC = B; luego ACF + ACB + BCG = A + B + C; pero si FCG fuese una línea recta, se tendría ACF + A CB + BCG = 2R, luego A + B + C = 2 R = á dos ángulos rectos.

{Que FCG sea recta, se puede demostrar del modo siguiente.

{Supongamos ahora que FCG no sea recta, en cuyo caso es necesario que FC y CG siendo rectas, la FG que va desde F á G pase por encima ó por debajo del punto C.

{En el último caso, esta línea tendría una situacion como FHG, la cual, suponiendo que sea recta, formará con FC, CG un triángulo isósceles. Divídase la base FHG de este triángulo en dos partes iguales en H, y tírese desde el vértice la CH. Desde un punto cualquiera I de la recta CH, bájese una perpendicular sobre CG, y pues que el ángulo FCG < 2 rectos por el supuesto y FH = GH, el ángulo HGC será menor que un recto; esta perpendicular debe caer á la derecha de la CH y tomar una direccion como la de IK; luego si suponemos que la IK sea esta perpendicular, puesto que tiene el punto I en el triángulo, debe cortar suficientemente prolongada, aun otra vez al contorno del triángulo. Prolónguese pues IK hácia L; y supongamos que corte á la base del triángulo en el punto L; bájese entonces desde un punto cualquiera de la AB, desde A v. g. la perpendicular AM sobre LK, y tírese AK; y puesto que el ángulo AMK = R, lo mismo que MKC por construccion, y el ángulo AKM > MKC, se tendrá AMK + AKM > 2 rectos, lo que es imposible. Si se quisiese suponer que la prolongacion de IK pasase por el vértice F del ángulo CFH ó por el lado CF, tendría lugar el mismo razonamiento. Luego la línea recta que baje desde F á G no puede pasar por debajo del punto C; por un razonamiento semejante al precedente, se demostraría que esta línea no puede pasar por encima del punto C; luego deberá pasar por dicho punto. Pero si pasa por allí, no puede ser otra que la FCG; luego FCG es una línea recta, y por consiguiente A + B + C es igual á dos ángulos rectos.

{No criticaré, añade Kircher, esta demostracion de M. Hauff; pero observaré que no toma la direccion de la perpendicular AM sinó arbitrariamente, y no puede jamas demostrar que debe tener la direccion á la izquierda del ángulo obtuso AKM, lo que él supone y es contra lo demostrado (368 cor. *6.°*).

{414 Pasemos ya á la teoría de Kircher. Este Geómetra, que es médico de profesion, publicó en 1803 su nueva teoría de las paralelas; y en el prólogo descubre desde luego donde se halla el hueco de su teoría, pues dice: "Es incontestable que los tres vértices de un triángulo no estan en línea recta, y que están desigualmente distantes de una recta que estuviese situada en el plano mismo del triángulo; porque aplicando la base del triángulo sobre la recta, la distancia de esta línea á los estremos y á todos los otros puntos de la base es cero; pero el vértice estando siempre superior á la base, está por consiguiente á una cierta distancia de esta base ó de esta línea recta. Es recíprocamente verdadero que tres puntos igualmente remotos de una recta, estan en una misma recta; porque si no lo estuviesen, formarían los vértices de un triángulo que estan desigualmente remotos."

{Si el autor de esta teoría tuviese algun medio para demostrar esta proposicion, no hay duda en que su teoría sería muy ingeniosa; pero estriva sobre este principio, que aunque cierto, no tiene ningun medio para demostrarlo; luego en su teoría que tiene por fundamento esta proposicion que le parece mas clara, y que lo es tanto como las que los demas han supuesto, se verifica lo que él mismo dice al concluir la crítica de Hauff: y es: "Se ve por esto como la dificultad de llevar la teoría de las paralelas al grado de evidencia que exige, se reduce siempre á otra dificultad, cuya solucion parece mas fácil de lo que es en efecto."

{Mr. Schwab en el prólogo de sus elementos de Geometría impresos en Nancy año de 1813, hablando de las paralelas, dice: "Mr. Legendre ha dado en sus primeras ediciones una demostracion mui ingeniosa para demostrar que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos, de donde él deduce la teoría de las paralelas; él se ve precisado sin embargo á conve-

nir en sus notas, que ha debido considerar como evidente, que por un punto situado en un ángulo menor que $\frac{2}{3}$ de uno recto, se puede tirar una línea que encuentre á los dos lados del ángulo. Este inconveniente, y sobre todo la longitud prodigiosa de esta demostracion, que es tanto mas molesta para los profesores y para los discípulos, cuanto ella se halla casi al principio en que todo es aun nuevo para el discípulo; todas estas consideraciones han decidido sin duda á este célebre autor á suprimir esta demostracion en su novena edicion, y á sustituir á ella, para esplicar la teoría de las paralelas, una especie de razonamiento que está bien lejos de tener la fuerza de una demostracion. Despues de bastantes tentativas infructuosas, mis investigaciones han sido coronadas de suceso; y si en lo que concierne á la línea recta y al ángulo, yo he sacado alguna ventaja de la idea de un movimiento de rotacion, la de un movimiento de traslacion me ha procurado la demostracion mas simple que se puede desear de la teoría de las paralelas."

{Esta teoría se halla toda comprendida en las dos proposiciones siguientes.

{1.ª *Dos rectas* EB, FD (fig. 79) *que forman con una tercera* EF *dos ángulos interiores* BEF, EFD *cuya suma es igual á dos rectos, las líneas* EB, FD *serán paralelas.*

{Prolónguese BE hácia A y DF hácia C, y pues que BA es una línea recta, la suma de los ángulos adyacentes BEF, FEA es igual á dos rectos; por hipótesis la suma de los ángulos BEF, EFD es tambien igual á dos rectos; luego BEF + FEA = BEF + EFD; suprimiendo el ángulo comun BEF, quedará el ángulo FEA = EFD. Por un razonamiento semejante, el ángulo BEF será = EFC. Luego se podrá trastornar y volver á un mismo tiempo la figura BEFD de manera que el punto E caiga en F y F en E, que al mismo tiempo EB tome la direccion FC y FD la EA. Si pues EB y FD se encontrasen en algun parage á la derecha de GH, estas dos líneas se encontrarían aun en su nueva posicion á la izquierda de GH; estas dos líneas diferentes pasarían pues por los dos mismos puntos de concurso, lo que es imposible; luego EB y FD no se encuentran á la derecha ni á la izquierda y son paralelas.

{2.ª *Si dos líneas rectas* AC, BD (fig. *61* *) *forman con una tercera* AB *dos ángulos interiores* CAB, ABD, *cuya suma sea menor que dos ángulos rectos, estas dos líneas* AC, BD, *suficientemente prolongadas, se encontrarán.*

{Prolonguemos AB hácia G; la suma de los ángulos ABD, DBG será igual á dos rectos; y pues que por hipótesis la suma de los ángulos CAB, ABD es menor que dos rectos, se tendrá ABD +

DBG $>$ CAB + ABD. Quitando de una y otra parte el ángulo comun ABD, quedará DBG $>$ CAB.

{Luego si se forma el ángulo GBH = BAC, la parte superior de la línea BH se hallará toda entera á la derecha de BD y no tendrá sinó solo el punto B sobre esta última línea.

{Concíbase ahora que la línea GB resbale sobre su prolongacion hácia A y lleve con ella el ángulo GBH; todos los puntos de la línea BH, indefinidamente prolongada, se dirigirán á pasar á la izquierda de BD; pero ellos no podrán hacerlo, sinó pasando primero sobre esta línea: así el punto B que se encuentra ya sobre ella, será el primero que la deje; cuando él se haya transportado á B′, el punto I se habrá transportado sobre BD en *i*; cuando despues B pase á B″, el punto *i* abandonará á su vez á la línea BD para pasar á la izquierda de esta línea, y otro punto I′ llegará sobre BD en *i′*. Dos puntos de la línea BH no pasarán jamas á un mismo tiempo sobre la línea BD; porque si esto pudiera hacerse, la línea BH se confundiría entónces toda entera con BD, y el ángulo GBH se habría confundido; luego todos los puntos I, I′ &c. no pasarán sinó el uno despues del otro.

{Ahora, digo que por léjos que se haya transportado la línea BH, habrá siempre uno de sus puntos sobre BD; porque, para que la línea BH pudiese pasar enteramente á la izquierda de BD, como este tránsito no se puede efectuar sinó punto por punto, sería necesario que uno de estos puntos pasase el último y no dejase ningun otro punto despues de él á la derecha de BD, lo que es imposible; porque la línea recta BH puede prolongarse hasta el infinito, y cuando este pretendido último punto, ántes de pasar, se ha encontrado sobre la línea BD, había aun otra infinidad de ellos encima que se hallaban á la derecha de BD, y que podrían pasar cada uno á su vez; luego ningun punto de la línea BH puede considerarse como el último que debe pasar, y la línea BH tendrá en todas sus posiciones un punto comun con BD; pero el ángulo GBH llegará tambien á BAC, y aun entónces, BH que se ha convertido en AC, tendrá un punto comun con BD; luego AC encuentra á BD.

Cor. Si dos rectas forman con una tercera dos ángulos cuya suma sea mayor que dos ángulos rectos, estas dos líneas se encontrarán hácia sus prolongaciones, porque por el lado de las prolongaciones formarán dos ángulos cuya suma valdrá ménos que dos rectos.... Igualmente se deduce que *cuando dos paralelas* AB, CD *(fig. 79) están cortadas por una tercera* GH, *que se llama* secante, *la suma de los ángulos internos* BEF, DFE *es igual á dos ángulos rectos*; porque de otro modo EB y FD se encontrarían y no serían paralelas.

{Despues ya se deduce con facilidad todo lo demas.

{Habiendo conseguido obtener la duodécima edicion de la Geometría de Mr. Legendre, publicada en 1823, no puedo ménos de congratularme al ver que, por confesion de mismo Legendre, resulta que mi crítica, en todo lo relativo á su teoría de las paralelas, fué juiciosa é imparcial. En efecto, este profundo Geómetra dice en la advertencia de la espresada edicion: "La demostracion de la teoría de las paralelas, segun se había presentado en la tercera edicion de esta obra, y en las ediciones siguientes hasta la octava inclusive, no estando exenta de toda objeccion, se había determinado en la novena edicion restablecer esta teoría casi sobre la misma base que Euclides. Reflexiones ulteriores, hechas sobre el mismo objeto, cuyo desarrollo se dará en la nota II han hecho descubrir dos nuevos modos de demostrar el teorema sobre los tres ángulos del triángulo, sin el socorro de ningun *postulatum*. En su consecuencia, se ha insertado una de estas demostraciones en el testo de esta edicion, eligiendo la que se aleja ménos de las ideas ordinarias, y que por otra parte no parece mas dificil de comprender que la que se había dado en las ediciones precedentes desde la tercera hasta la octava.

{La demostracion que da en el testo es como sigue: "*En todo triángulo, la suma de los tres ángulos es igual á dos ángulos rectos.*

{"Sea ABC (fig. 317) el triángulo propuesto, en el cual supondrémos que AB es el lado mayor y BC el menor, y por lo mismo ACB el mayor ángulo y BAC el menor. (Este supuesto no escluye el caso en que AC = AB ó BC).

{"Por el punto A y por el punto I medio del lado opuesto BC, tírese la recta AI que se prolongará hasta C′, de modo que AC′ = AB; prolónguese tambien AB hasta B′, de modo que AB′ sea doble de AI.

{"Si se espresan por A,B,C, los tres ángulos del triángulo ABC, y por A′, B′, C′, los del AB′C′, digo que se tendrá el ángulo C′ = B + C, y el ángulo A = A′ + B′; de donde resulta A + B + C = A′ + B′ + C′, es decir, que la suma de los tres ángulos es la misma en los dos triángulos.

{"Para probarlo, hágase AK = AI, únase C′K, y se tendrá el triángulo C′AK igual al triángulo BAI. Porque en ambos, el ángulo comun A, está comprendido entre lados iguales, á saber: AC′ = AB, y AK = AI. Luego el tercer lado C′K = BI; luego tambien el ángulo AC′K = ABC, y el AKC′ = AIB.

{"Digo ahora, que el triángulo B′C′K es igual al ACI, porque la suma de los dos ángulos adyacentes $AKC' + C'KB'$ es igual á dos ángulos rectos, así como $AIC + AIB$: quitándo de ambas partes los ángulos iguales AKC', AIB, quedará el ángulo $C'KB' = AIC$. Estos ángulos están comprendidos por lados iguales, á saber $C'K = IB = CI$, y $KB' = AK = AI$; pues que se ha supuesto $AB' = 2\,AI = 2\,AK$. Luego los dos triángulos $B'C'K$, ACI son iguales: luego el lado $C'B' = AC$, el ángulo $B'C'K = ACB$, y el ángulo $KB'C' = CAI$.

{"De aquí se sigue 1.° que el ángulo $AC'B'$ designado por C' se compone de dos ángulos iguales á los ángulos B y C del triángulo ABC, y que así se tiene $C' = B + C$; 2.° que el ángulo A del triángulo ABC se compone del ángulo A' ó $C'AB'$, que pertenece al triángulo $AB'C'$ y del ángulo CAI igual al ángulo B' del mismo triángulo, lo que da $A = A' + B'$; luego $A + B + C = A' + B' + C'$. Por otra parte, pues que se tiene por hipótesis $AC < AB$, y por consiguiente $C'B' < AC'$, se ve que en el triángulo $AC'B'$ el ángulo en A, designado por A' es menor que B'; y como la suma de los dos es igual al ángulo A del triángulo propuesto, se sigue que se tiene el ángulo $A' < \frac{1}{2} A$.

{"Si se aplica la misma construccion al triángulo $AB'C'$ para formar un tercer triángulo $AC''B''$ cuyos ángulos serán designados por A'', B'', C'', se tendrán semejantemente las dos ecuaciones $C'' = C' + B'$, $A' = A'' + B''$; de donde resulta $A' + B' + C' = A'' + B'' + C''$. Así la suma de los tres ángulos es la misma en estos tres triángulos. Se tendrá al mismo tiempo el ángulo $A'' < \frac{1}{2} A'$, y por consiguiente $A'' < \frac{1}{4} A$.

{"Continuando indefinidamente la serie de los triángulos $AC'B'$, $AC''B''$ &c. se llegará á un triángulo abc en el cual la suma de los tres ángulos será siempre la misma que en el triángulo propuesto ABC, y que tendrá el ángulo a menor que el término que se quiera de la progresion decreciente $\frac{1}{2}$ A, $\frac{1}{4}$ A, $\frac{1}{8}$ A &c.

{"Luego se puede suponer esta série de triángulos prolongada hasta que el ángulo a sea menor que cualquier ángulo dado.

{"Y si por medio del triángulo abc, se construye el triángulo siguiente $a'b'c'$ la suma de los ángulos $a' + b'$ de este será igual con el ángulo a, y será por consiguiente menor que todo ángulo dado: donde se ve que la suma de los tres ángulos del triángulo $a'b'c'$ se reduce casi al solo ángulo c'.

{"Para tener la medida precisa de esta suma, prolonguemos el lado $a'c'$ hácia d', y llamemos x' el ángulo esterior $b'c'd'$; este ángulo x' unido al ángulo c' del triángulo $a'b'c'$, forma una suma igual á dos ángulos rectos: así espresando el ángulo recto por D, se tendrá $c' = 2D - x'$; luego la suma de los ángulos del triángulo $a'b'c'$ será $2D + a' + b' - x'$.

{"Pero se puede concebir que el triángulo $a'c'b'$ varía en sus ángulos, y en sus lados, de modo que representen los triángulos sucesivos que nazcan ulteriormente de la misma construccion, y se aproximen mas y mas al límite en que los ángulos a' y b' fuesen nulos. En este límite la recta $a'c'd'$ confundiéndose con $a'b'$, los tres puntos a', c', b', acaban por estar exactamente en línea recta; entónces los ángulos b' y x' vienen á ser nulos al mismo tiempo que a', y la cantidad $2D + a' + b' - x'$, que mide la suma de los tres ángulos del triángulo $a'c'b'$, se reduce á $2D$; luego *en todo triángulo la suma de los tres ángulos es igual á dos ángulos rectos.*"

{Despues continúa lo demas del testo como hemos manifestado en los párrafos 408, 409, 410, y 411.

{Lo que pone en la nota II es como sigue = "La demostracion que damos en el testo de la proposicion de que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos rectos, puede ser la mas simple y la mas directa que se puede hallar en el género puramente elemental; esperamos que será acogida por los amantes de la exactitud geométrica, y que hará en fin desaparecer de los elementos la imperfeccion á que la teoría de las paralelas ha estado sujeta hasta ahora.

{"Nosotros nos valdrémos de esta ocasion para hacer algunas nuevas observaciones sobre la demostracion que hemos dado de la misma proposicion en la 3.ª edicion de esta obra publicada en 1800, y en las ediciones siguientes, hasta la 8.ª inclusive; para esto recordaré en pocas palabras el principio sobre el cual esta demostracion estaba fundada.

{"Hemos probado al principio de un modo rigoroso que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos, proposicion que separa de una vez por una diferencia esencial los triángulos rectilíneos, de los esféricos. Esta primera parte hallándose establecida, faltaba probar que la suma de los ángulos no puede ser menor que dos ángulos rectos; pero como el esceso de los tres ángulos sobre dos rectos, que tiene lugar en los triángulos esféricos es proporcional á la superficie del triangulo, del mismo modo el *deficit*, si le hubiese en los triángulos rectilíneos, sería proporcional á la area del triángulo. Desde luego es fácil de ver que si se consigue construir, en virtud de un triángulo dado, otro triángulo en el cual se halle contenido el triángulo dado m veces lo ménos, el *deficit* de este nuevo triángulo igualará al ménos, m veces el *deficit* del triángulo dado, de modo que la suma de los ángulos del gran triángulo disminuirá progresivamente á medida que m aumente hasta llegar á ser nula ó negativa. Resultado absurdo y que prueba que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser menor que dos ángulos rectos.

{"Tomando por norma este principio de demostracion, que es infalible, hemos hecho ver que toda la dificultad se reducía á construir un triángulo que contuviese al ménos dos veces el triángulo dado; pero la solucion que hemos dado de este problema, en apariencia muy simple, supone que por un punto dado en un ángulo menor que dos tercios de un ángulo recto, se puede siempre hacer pasar una línea recta que encuentre á dos lados del ángulo.

{"Nosotros nos habíamos aproximado mucho así á nuestro objeto, pero no le habíamos alcanzado enteramente; pues que nuestra demostracion dependia de un *postulatum*, que, en todo rigor, podría ser negado. Esta consideracion es la que nos ha hecho volver en la 9.ª edicion á la simple marcha de Euclides, reservando para las notas la demostracion rigorosa.

{"Examinando las cosas con mas atencion, nos hemos convencido de que para demostrar completamente nuestro *postulatum*, era necesario deducir de la definicion de la línea recta una propiedad carácteristica de esta línea, que escluyese toda analogía con la forma de una hipérbola comprendida entre sus dos asintotas. He aquí cuál es sobre este punto el resultado de nuestras investigaciones.

{"*Sea BAC* (*fig.* 318) *un ángulo dado y M un punto dado dentro de este ángulo: divídase el ángulo BAC en dos igualmente por la recta AD y desde el punto M tírese MP perpendicular sobre AD; digo que la recta MP prolongada en ambos sentidos encontrará necesariamente á los dos lados del ángulo BAC.*

{"Porque si ella no encuentra á uno de los lados de este ángulo, encontrará al otro, siendo todo igual de los dos lados á partir del punto P; si ella no encontrase á un lado, no encontraría al otro por la misma razon; así, en este último caso, ella debería estar encerrada toda entera en el espacio comprendido entre los lados del ángulo BAC; pero repugna á la naturaleza de la línea recta que una tal línea indefinidamente prolongada, pueda ser encerrada en un ángulo.

{"En efecto, toda recta AB (fig. 319) trazada sobre un plano, é indefinidamente prolongada en los dos sentidos, divide á este plano en dos partes, que, estando superpuestas, coinciden en toda su estension y son perfectamente iguales. La parte AMB del plano total, situada de un lado de AB, es igual en todo á la parte AMB situada de otro lado; porque si se toma un punto fijo C sobre la recta AB, todo otro punto M de la parte AMB estará determinado por la distancia CM y el ángulo ACM; tomando pues del otro lado un ángulo ACM'= ACM y una distáncia CM'= CM, es evidente que los puntos M y M' tendrán la misma situacion en las dos partes del plano, y que estas dos partes estando superpuestas, los puntos M y M' se confundirán en uno solo.

{"Supongamos ahora, si es posible que una recta indefinida X Y esté encerrada toda entera en un espacio angular cualquiera, por ejemplo, en el ángulo BCM, ella no podrá sinó dividir en dos partes iguales ó desiguales la parte del plano comprendida en el ángulo BCM; esta parte tiene su correspondiente BCM' situada del otro lado de BC; pero como ademas de estas dos partes iguales del plano, hay otras dos encerradas en los ángulos iguales ACM, ACM', se ve que el espacio angular BCM no es la mitad de todo el plano; luego la recta XY que se supone dividir en dos porciones el espacio BCM, no podrá dividir sinó en dos partes desiguales la totalidad del plano, lo que es contrario á la naturaleza de la línea recta.

{"Por este principio muy simple, no solo el *postulatum* que impedía nuestra demostracion de ser rigorosa, se halla demostrado, sinó que se puede tambien demostrar inmediatamente el *postulatum* de Euclides. Este *postulatum* se reduce fácilmente, como se sabe, al caso en que una de las rectas AC (fig. 320) siendo perpendicular á AB, la otra recta BD forma con AB un ángulo ABD menor que uno recto. Se trata pues de probar que, en este caso, BD prolongada debe encontrar á AC.

{"En efecto si esto no fuese prolongando AC hacia C', y haciendo el ángulo ABD'= ABD, la recta CC' estaría comprendida toda entera en el ángulo DBD' menor que dos rectos.

{"Dejamos á los Geómetras el decidir si esta demostracion no merecería ser admitida en los elementos, de preferencia á toda otra, para restablecer la marcha de Euclides, que ha venido á ser enteramente rigorosa por la supresion de su *postulatum*."

{Despues sigue poniendo en esta nota todo el contenido de la nuestra al § 411, y la termina del modo siguiente. "En fin, aunque la teoría precedente se halle establecida sobre los fundamentos mas sólidos, no debemos disimular, que ella ha sido atacada por Mr. *Leslie*, célebre profesor de Edimburgo, en sus elementos de Geometría, 2.ª y 3.ª ediciones; pero sin entrar en ningun detalle sobre este punto, nos bastará decir que las objeciones de Mr. *Leslie* han sido plenamente refutadas, primero por Mr. Playfair, su compatriota, en l' *Edimburg review* tomo XX y despues por Mr. *Maurice*, de la Academia de ciencias de París, en la *Bibliotheque universelle* de Geneve, octubre de 1819. Se puede ver tambien la discusion de estas mismas objeciones, en la edicion inglesa de nuestros elementos dada por Mr. David Brewster = Edimburgo 1822."

{No habiendo llegado á mis manos, á pesar de las eficaces diligencias que he practicado, los escritos que cita Legendre, y sí únicamente la 4.ª edicion de la Geometría de Mr. John Leslie impresa en 1820, no juzgo inoportuno el estractar aquí lo que dice sobre este particular, y es como sigue.

{"Mr. Legendre ha intentado deducir *á priori* las propiedades fundamentales de los triángulos, de la teoría de las *funciones.* Pero, así como en otras empresas semejantes, sus investigaciones envuelven lo que se trata de probar. Para un matemático especulativo el argumento de que usa para probar que C debe ser independiente de c, es mui seductor, si no sufre un rigoroso exámen. Muchas cantidades en el hecho aparecen resultar de la combinada relacion con otras cantidades que son heterogéneas. Así, el espacio que los móviles describen, dependen del tiempo y velocidad, que son elementos heterogéneos; tambien, la longitud de un arco de círculo depende del radio y del ángulo que subtende en el centro, que obviamente son magnitudes heterogeneas. Por el contrario, nosotros conocemos previamente, que la base c puede, por su combinacion con los ángulos A y B, modificar su relacion, y en virtud de esto afectar el valor del ángulo vertical. En otro caso análogo, la fuerza de esta razon se percibe fácilmente. En efecto, cuando los lados a, b y su ángulo contenido son dados, el triángulo es determinado, como la mas simple observacion manifiesta. Por lo mismo, la base c es derivada solamente de estos datos, ó $c = F$: (a, b, C). Pero el ángulo C, siendo heterogéneo con los lados a y b, no puede unirse con ellos en una ecuacion, y consiguientemente, la base c es simplemente una funcion de a y b, ó es meramente el resultado necesario de los otros dos lados. En otros términos, así como el tercer ángulo de un triángulo depende de los otros dos ángulos, así la base de un triángulo debe tener su magnitud determinada por las longitudes de los otros dos lados. ¡Tál es el estremo absurdo á que puede conducir este modo de raciocinar!"

{A esto contesta Legendre en una carta escrita á Mr. Leslie en 5 de febrero de 1816 la objecion hecha sobre la ecuacion $c = F$: (a, b, C) se resuelve muy fácilmente. Nada impide que c, que es un número, (con relacion al ángulo recto tomado por unidad) sea una funcion de a, b, C, con tal que esta funcion sea de dimension nula, es decir, con tal que la funcion de a, b, C se reduzca á una funcion de dos relaciones, tales como $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$. Y en efecto, esto es

lo que tiene lugar en virtud de la ecuacion trigonométrica cos.

$$C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}}{2 \times \frac{b}{a}}."$$

A lo cual dice Leslie, que "habiendo vuelto á considerar el asunto con madurez, no puede asentir á lo que dice Legendre," y se funda en que tanto las líneas como los ángulos son cantidades reales, aunque de diferentes géneros, &c. &c.

{415 La teoría de M. Bertrand, profesor de Matemáticas en Ginebra, es tan ingeniosa como todas aquellas teorías que él se ha propuesto esplicar por métodos nuevos; pero que tal vez por ser demasiado metafísicos, no merecerán admitirse por métodos elementales. Antes de llegar á esto, darémos á conocer las primeras nociones que él da de la Geometría; porque aunque no se entienden demasiado, no obstante son dignas de atencion.

{El segundo tomo de su obra intitulada *Developpement nouveau de la partie elementaire des Mathematiques*, principia con un capítulo que trata del plano, de la línea recta y de los ángulos, en estos términos.

{"La Geometría, como cualquiera otra ciencia, tiene su fundamento en las ideas comunes á todos los hombres. Del fondo de estas ideas es de donde los primeros inventores han sacado los principios y gérmenes de los conocimientos de que han hecho presente al género humano. Por lo cual, parece que en toda ciencia se pueden distinguir dos partes; la 1.ª que consiste en el conjunto de principios ó nociones primitivas de que dimana esta ciencia, y la 2.ª que encierra el desarrollo de estos principios."

{"Por lo que toca á los principios, como se hallan en todas las cabezas, parece que bajo este aspecto la ciencia no opone resistencia ni dificultad que vencer; sin embargo, la eleccion que es necesario hacer de estos principios, el grado de claridad y de simplicidad á que es necesario reducirlos, y la necesidad de enunciarlos en términos propios bien conocidos, de un modo claro y preciso, es un asunto de bastante dificultad."

{"No obstante un medio de disminuir esta dificultad, es transportarse á los tiempos en que la ciencia de que se trata, principió á cultivarse, y proponerse alguna cuestion propia de aquel tiempo, tan simple que el espíritu vea fácilmente las ideas que contiene y la cadena de los razonamientos que conducen á la solucion. Aun se puede dar mas importancia á esta investigacion, suponiendo que la cuestion que uno se proponga sea aquella misma que dió lugar á los primeros desarrollos de la ciencia que se enseña.”

{“Principiarémos, pues, esta Geometría por una cuestion que tenga las condiciones que acabamos de indicar; y para entrar en materia supongamos que un cazador, habiendo muerto un gamo de un flechazo, quisiese saber á qué distancia habia alcanzado su presa. Para esto, tomando la longitud de su arco como la que le era mas familiar, la puso sucesivamente sobre toda la distancia que habia de él al animal que habia muerto, y consideró al número de veces que habia podido aplicarle, como la justa espresion de la relacion de esta distancia á la longitud de su arco.”

{“Pero sus investigaciones no se limitaron allí: se puso á reflexionar sobre la circunstancia de la operacion que acabamos de practicar, á saber: que cuando aplicaba su arco sobre el terreno, ponia una singular atencion en no colocarle sinó en una cierta direccion, esclusivamente á toda otra. Esta direccion decia él, que se llama *línea recta* y de que yo tengo una idea tan clara, si se me preguntase qué es, y en qué se diferencia de toda otra, ¿cómo responderia yo? Decir que es la direccion que sigue una flecha antes de encurvarse hácia la tierra es dar un ejemplo de ella; presentarla bajo la imágen de una cuerda estendida, es elegir mejor su ejemplo; pero no dar su carácter distintivo. Un rayo de luz que entra en un parage obscuro no lo daria tampoco. Este carácter no depende ni de las flechas, ni de las cuerdas tendidas, ni de los rayos del sol; se le percibe, es verdad, en estos tres objetos; pero se puede encontrar en otra parte, y donde quiera que se halle es necesario prescindir de las circunstancias estrañas que le acompañan, y manifestarle con toda su simplicidad.”

{“Así, despues del haber contemplado la línea recta en diferentes objetos, y de haberla despojado de las circunstancias estrañas que le acompañan, el cazador encontró que lo que la distinguia de toda otra línea trazada sobre un plano, ó imaginada sobre la superficie de un lago perfectamente en calma, era el que, haciendo abstraccion de los límites de dicho plano y de las orillas del lago, la *línea recta* cortaba al lago y á la llanura, de manera que las superficies de una y otra parte de esta línea no se diferenciaban la una de la otra; y con relacion al plano ó á la superficie de agua perfectamente en calma, vió su carácter distintivo en que separaba la parte superior de la parte inferior del cielo, de manera que el espacio superior no se diferenciaba del inferior, haciendo abstraccion de los cuerpos que se mueven en él. Pero despues de haberse remontado á la idea del espacio como á aquella con

que confinan sus nociones de llanura y de línea recta, el cazador no pudo llevar mas lejos la análisis, y pasar de la idea del espacio á cualquiera otra que de ella se derivase, y por esta causa se contentó con desenvolverla mejor, y con definir con mas exactitud las que habia hecho depender de ella, quiero decir, las ideas de superficie plana y de línea recta.”

{“El espectáculo del universo presenta á nuestra vista un espacio inmenso. En esta inmensidad es donde existen los cuerpos y mudan contínuamente de figura, de magnitud y de posicion, mientras que invariable en todas sus partes y semejante á un mar siempre en calma, el espacio mismo permanece en un eterno reposo.”

{“Así, la idea que nosotros nos formamos del espacio es que es infinito y sin límites, homogéneo ó semejante á él mismo en todo tiempo y en todo lugar: no tiene límites, porque los que quisiéramos darle se encontrarían en su estension, y por consiguiente no le limitarían. Él es homogéneo, es decir, que la porcion de espacio que ocuparía un cuerpo en un lugar, no se diferenciaría de la que ocupase en otro, á lo cual añadirémos que el espacio es al rededor de un cuerpo colocado en cualquier parte, lo que es al rededor del mismo cuerpo colocado en otra parte.”

{“Pero de esta nocion del espacio se sigue que *se le puede concebir dividido en dos partes, tales que no se pueda decir nada de la una que no se pueda decir igualmente de la otra; tales ademas que su límite comun tenga con cada una de ellas las mismas relaciones, sea considerándola toda entera, ó sea no considerando sinó una parte de ella.* Este límite de las partes del espacio dividido en dos igualmente, es lo que se llama *plano*; y el plano como el espacio, se *puede concebir dividido en dos partes, tales que no se pueda decir nada de la una que no se pueda decir igualmente de la otra; tales ademas que su límite comun tenga con cada una de ellas las mismas relaciones, sea que se la considere como entera, sea que nó se la considere sinó como una parte.*”

{“Pero la idea de este límite, siendo conforme en todo á la que el cazador se formó de la *línea recta*, toma lo que acaba de decir por la justa definicion de esta línea, y se ejercita en definir las ideas que tienen mayor conexion con las precedentes.”

{“Así segun él, es necesario entender por *superficie* el *límite* que separa una porcion cualquiera del espacio, del resto del mismo espacio; es necesario distinguir las superficies en *planas* y *curvas*: planas son las que tienen la propiedad del plano, y curvas las que no la tienen. Es necesario definir las *líneas* diciendo que son límites de las superficies, despues dividirlas en *rectas y curvas*: rectas las que tienen la propiedad de la línea recta, curvas las que no la tienen. En fin, es necesario definir el *punto*, diciendo que es el límite de las líneas, y con relacion á los límites, sea de las líneas, sea de las cantidades estensas en general, son los mismos términos á que estas cantidades se acercan, pero sin pasar de allí."

«416 "Despues de haber fijado así el sentido de diversas palabras á que ántes sujetaba ideas claras pero vagas, el cazador para sacar partido de su trabajo, quiso buscar al principio en su definicion de la línea recta las razones de una propiedad bien reconocida de esta línea, á saber, que desde un punto á otro sobre un plano no se puede tirar sinó una; y las encontró como las presenta la siguiente proposicion."

«"*Desde un punto á otro sobre un plano no se puede tirar sinó una línea recta, ó dos puntos sobre un plano determinan una línea recta; ó aun, dos rectas que se encuentran sobre un plano, no se cortan sinó en un solo punto.*"

«"Sean A, B (fig. 76) dos puntos sobre un plano, y para juzgar en primer lugar si del uno al otro de estos puntos se puede tirar sobre este plano mas de una línea recta, tiremos actualmente de A á B dos líneas AB, ANB que supondrémos rectas; despues trazando de una parte de estas dos rectas una línea contínua cualquiera AMB, imaginemos que esta línea AMB fijada por sus estremos A, B al plano AMM′ gire al rededor de ella, hasta que llegada al otro estremo de este plano se detenga allí en la situacion AM′B; y en tanto que AB formase parte de una recta, la línea AMB aplicada de la misma manera por arriba y por abajo de AB, cerraría dos porciones de plano entre las cuales no habría ninguna causa de diferencia. Mientras que ANB forme parte de una recta, no habrá ninguna causa de diferencia ó razon entre AMBNA y AM′BNA; luego estos dos defectos de diferencia, no pudiendo tener lugar al mismo tiempo, es evidente que de un punto á otro sobre un plano no se puede tirar mas de una línea recta."

«"Se dirá que si en vez de tirar la segunda línea ANB toda hácia una parte de la primera AB, se la hubiese tirado parte hácia un lado de esta línea, y parte hácia el otro, la igualdad de AMB con AM′BA no hubiera dado la esclusion á la igualdad entre AMBNA y AM′BNA, que por consiguiente la demostracion precedente no prueba otra cosa sino que habiendo tirado una recta AB de un punto á otro sobre un plano, no se pueda tirar una segunda ANB que pase toda entera de un mismo lado de la primera. A esto yo respondo que la fuerza que le queda á la demostracion propuesta basta para establecer, que cuando se hace cruzar AB por ANB (fig. 77), no se puede tirar del punto A al

punto de seccion N sinó una sola recta AN, y que del punto B no se puede tirar tampoco sinó una y que así, la pretendida recta ANB coincide como antes con AB′, y por tanto que desde un punto á otro sobre un plano no se puede sinó tirar una sola recta."

«"Pero esto no le basta al cazador, él quiere asegurarse tambien de la imposiblidad que hay de que dos rectas trazadas sobre un plano, y teniendo una parte comun AB (fig. 78), puedan separarse la una de la otra en el resto de su curso, y prolongarse la una segun BD y la otra segun BG; y á este efecto, tomando sobre BA su parte BF, la hace girar al rededor del punto B, de manera que el punto F describa una línea FKD de un lado de FBD, y del otro una línea DLF, lo que no se puede hacer sin que el punto F trace al mismo tiempo de un lado de FBG, una línea FKG, y del otro una línea GLF. Pero siendo todo igual sobre un plano de una y otra parte de la recta, las líneas FKD, DLF descritas de la misma manera de una y otra parte de FBD no se podrían diferenciar, ni las líneas FKG, GLF descritas de una y otra parte de FBG; luego la suposicion de dos prolongaciones diferentes de la misma porcion de recta AB conduce á una contradiccion. Luego dos rectas que coinciden en una parte AB de su curso, no pueden tener prolongaciones diferentes. Luego dos puntos sobre un plano determinan no solamente la parte de una recta que va del uno al otro, sinó aun las partes de esta recta que estan fuera de este intervalo; y por tanto dos puntos sobre un plano determinan una línea recta. De donde resulta que dos rectas que se encuentran sobre un plano no se encuentran en él sinó en un solo punto; porque si se cortasen en dos, coincidirían en el intervalo de uno de estos puntos al otro, y aun fuera de este intérvalo, lo que es incompatible con la idea de seccion."

«"El cazador no bien se convenció de esta proposicion de que de un punto á otro sobre un plano no se puede tirar sinó una sola recta, cuando trató de hacerla mas general, y probar que no solamente desde un punto á otro sobre un plano; sinó que aun desde un punto á otro en el espacio no se puede tirar sino una línea recta, ó lo que viene á ser lo mismo, trató de convencerse de que todas las rectas que se tirasen por dos puntos dados en el espacio, sobre los diversos planos que pasasen por estos puntos, no serian sinó una sola y misma línea recta."

«417 Así continúa él con su cazador, y nosotros interrumpirémos sus consideraciones para llegar desde luego á la teoría que él espone de las paralelas, que principia en esta proposicion que es la 7.ª de su obra.

«"*Dos rectas* AB, CD (*fig.* 79), *que trazadas sobre el mismo plano* *forman en él con una tercera* GH *ángulos interiores* BEF, DFE, *cuya suma equivalga á dos rectos, no podrían encontrarse.*"

{"Para demostrar la proposicion de que tratamos, observaré que pues por el supuesto BEF, DFE valen dos ángulos rectos, son equivalentes á dos ángulos adyacentes BEF, FEA, ó DFE, EFC; de donde se sigue 1.° que DFE = FEA; 2.° que BEF = EFC; pero siendo esto así, si se levanta la porcion de plano BEFD, y se la hace dar una *semivuelta* sobre el plano de que forma parte, aplicando EF sobre la misma FE, la recta FD caerá sobre la EA, á causa de DFE = FEA; la EB caerá sobre FC, á causa de BEF = EFC, de manera que las rectas EB, FD no se podrán encontrar en un punto sin que las FC, EA, con que coinciden, se encuentren en él mismo punto. De donde se seguirá que las AB, CD se encontrarán en dos puntos ó no se encontrarán de ningun modo; pero lo primero es imposible (416), luego tendrá lugar lo segundo; luego dos rectas que trazadas sobre un plano forman en él con una tercera ángulos interiores, cuya suma valga dos rectos, no se encuentran. Despues de llamar *paralelas* á estas líneas que no se encuentran, y de hacer algunas consideraciones, pasa á esta proposicion."

{"*Dos rectas* AB, CD (*fig.* 80), *que forman con una tercera* GH *ángulos interiores* BKL, DLK, *que juntos sean iguales á dos rectos, encierran en sí una porcion de plano, tal que él contiene una infinidad de ellas semejantes.*"

{"En efecto, pues que por el supuesto la suma de los ángulos BKL, DLK es igual á dos rectos; y que por otra parte la suma de los adyacentes DLK, DLM es tambien igual á dos rectos, se sigue que DLM = BKL; que por consiguiente si se toma sobre HG la longitud LM = KL y se imagina la recta EF tirada por el punto M, de manera que FML = DLK, y se hace mover la banda ACDB á lo largo de HG hasta que el punto L caiga en M y K en L, la línea KL coincidirá con LM, la LD con MF, y la KB con LD, porque los ángulos iguales, del mismo modo que las rectas iguales pueden convenir; pero la banda ACDB conviniendo tambien con la banda CEFD á causa de que se ha podido tomar sobre HG una longitud LM = KL, es claro que se formarían tantas bandas iguales con ACDB como longitudes iguales con KL se pudiesen tomar sobre HG; es decir que se formarían una infinidad de ellas, y por tanto que dos rectas que forman con una tercera ángulos interiores iguales á dos rectos, encierran entre sí una porcion del plano, tal que dicho plano contiene una infinidad de porciones semejantes."

{418 "*Cuando dos rectas forman con una tercera ángulos interiores, cuya suma no es igual á dos rectos, estas rectas se encuentran.*"

{"Observemos ante todas cosas que si dos rectas AB, CD (fig. 81), forman con una tercera KL ángulos interiores BKL, DLK, cuya suma esceda á dos ángulos rectos; estas mismas rectas formarán, del otro lado de KL, ángulos interiores AKL, CLK, cuya suma sea menor que dos rectos. Y puesto que aquí se supone que AKL + CLK < 2 rectos, si LM es tal que forme el ángulo CLM que falte á AKL + CLK para dos rectos, no se podrá negar por la proposicion precedente, que el plano contendrá una infinidad de bandas iguales á MLKA; que por consiguiente si LC no encontrase á KA del lado de A, se seguiría este absurdo de que MLKA comprendería al ángulo MLC, del cual lejos de poder decir que el plano contiene una infinidad de semejantes, se puede decir al contrario que no contiene sinó un número finito, á saber, 360 si es de un grado, 21600 si es de un minuto, 1296000 si es de un segundo &c.; luego es imposible que LC no encuentre á KA del lado de A; luego en general es imposible que dos rectas no se encuentren cuando la suma de los ángulos interiores que forman con una tercera, sea menor que dos rectos."

{"Para hacer conocer aun mejor la fuerza de esta demostracion, observaré que un ángulo, pequeño ó grande, colocado en el centro de un círculo descrito con un radio finito cualquiera, insiste sobre un arco de alguna magnitud ó de ninguna magnitud: que si insiste sobre un arco de ninguna magnitud, es necesario que sus piernas coincidan, y por consiguiente que no sea un ángulo; que si insiste sobre un arco de alguna magnitud, como toda la circunferencia es una cantidad finita, es necesario que la relacion de este arco á toda la circunferencia, sea una relacion de una cantidad finita á una cantidad finita; que por consiguiente el ángulo que insiste sobre este arco sea tambien á toda la cantidad angular al rededor del centro, como una magnitud finita á una magnitud finita; porque en fin, los ángulos en el centro son á toda la cantidad angular al rededor del centro, como los arcos sobre que insisten son á toda la circunferencia. Pero una porcion de plano contenida entre dos rectas que forman con una tercera ángulos interiores iguales á dos rectos, no es á toda la superficie plana como una cantidad finita á una cantidad finita, sinó como una cantidad finita á una cantidad infinita. La banda ACDB, por ejemplo (fig. 80), es á todo el plano de que forma parte, como la recta finita KL es á la recta infinita KG; luego un ángulo, por pequeño que sea, es siempre mayor que una de estas partes del plano que hemos calificado de bandas; é igualmente que una banda contenga á un ángulo; luego implica contradiccion que dos rectas que forman con una tercera ángulos interiores, cuya suma no sea igual á dos rectos, no se encuentren del lado en que esta suma es menor que dos rectos."

{"Consecuencia 1.ª De esta *proposicion se sigue inmediatamente que cuando dos rectas son paralelas, una de estas no puede estar cortada por otra tercera, sin que la otra paralela lo esté tambien.* Porque supuesta la MN paralela á AB (fig. 81), si LC cortase á MN sin cortar á AB, el ángulo MLC estaría contenido entre las paralelas MN, AB, lo cual siendo imposible, es imposible que LC no corte á AB; es decir en general, que lo es tambien que una de las dos paralelas esté cortada por una recta sin que la otra lo esté."

{"Consec. 2.ª Ahora podemos hacer la enumeracion de todas las circunstancias de posicion de dos rectas trazadas sobre un mismo plano; porque ellas no se encuentran en él cuando forman con una tercera ángulos interiores, cuya suma sea igual con dos rectos, ellas se encontrarían en él cuando esta suma no es igual á dos rectos; y en este caso no se pueden encontrar sinó en un solo punto."

{"Consec. 3.ª *Una recta finita cualquiera es divisible al infinito.* Sea AS (fig. 82) una porcion de línea recta; é imaginando las paralelas KL, MN, tiradas por sus estremos A, S, tomo sobre la primera KL un punto K, y sobre la segunda MN longitudes iguales ó desiguales AB, BC, CD &c., despues tirando las rectas KB, KC, KD &c., observo que no solamente todas estas rectas deben cortar á AS, sinó que deben cortarla en puntos diferentes; porque si dos de ellas la cortasen en un mismo punto, tendrían este punto comun ademas del punto K, lo que originaría su coincidencia, tanto la una como la otra en un mismo punto de la MN. Pero esta consecuencia es absurda, pues que las líneas de que se trata, parten de un punto K fuera de MN, y cortan á esta recta en diferentes puntos B, C, D &c.; luego todas las líneas KB, KC, KD, &c., cortan á AS en diferentes puntos; luego siendo infinito el número de estas líneas, así como el número de las longitudes finitas que se pueden tomar sobre la AN, la línea AS se puede dividir en una infinidad de partes; y por tanto toda recta finita es divisible al infinito."

{"Consec. 4.ª *Desde un punto fuera de una recta es siempre posible bajarle una perpendicular.* Porque desde un punto L á un punto cualquiera K de la AB (fig. 81), tirando una recta LK, formará con AB el ángulo LKB, cuyo complemento á dos rectos (suplemento en nuestro lenguage) LKA colocado en L hará MN paralela á AB; pero es incontestable que la mitad de la cantidad angular al rededor del punto L de un lado de MN, se puede dividir en dos igualmente por una recta LP; y que, hecho esto, el ángu-

lo PLN debe ser recto; luego el ángulo LPB lo es tambien, á causa del paralelismo de las líneas AB, LN; y por tanto, desde un punto fuera de una línea es siempre posible bajar una perpendicular á esta línea."

{"Consec. 5.ª *Una perpendicular levantada sobre una recta es una perpendicular bajada sobre toda paralela á esta recta; y una perpendicular bajada desde un punto de una recta sobre una paralela á esta recta, es una perpendicular levantada á la 1.ª de estas dos paralelas.* Porque en fin, cualesquiera de los ángulos PLM, LPB que sea recto, el otro lo es tambien cuando las líneas MN, AB son paralelas."

{"Consec. 6.ª *Por un punto fuera de una recta no puede pasar sinó una paralela á esta recta.* Porque supuesto que la MN pase por el punto L (fig. 81) paralelamente á AB, toda otra línea CD que pase por este punto L, formará con AB sobre LK ángulos interiores, cuya suma valdrá mas ó menos de dos rectos, y por tanto esta recta CD no será paralela á AB."

{"Consec. 7.ª *Cuando dos ángulos de una misma parte son iguales, las rectas que los forman son paralelas; y cuando hay rectas paralelas, los ángulos que forman hácia una misma parte son iguales.*"

{"Sean en primer lugar (fig. 79) los ángulos de una misma parte AEG, CFE iguales entre sí, y los contiguos AEG, AEF valiendo dos rectos, los interiores AEF, CFE valdrán tambien dos rectos, á causa de CFE = AEG, y por tanto las líneas CF, AE serán paralelas."

{"En 2.º lugar, supuestas las líneas CF, AE paralelas, la suma de los ángulos interiores que formen con una tercera HG, será igual á dos rectos, luego CFE + AEF = 2 rectos; pero los contiguos AEF, AEG valen tambien dos rectos, luego CFE = AEG, y por tanto los ángulos de una misma parte formados por paralelas son iguales."

{"Consec. 8.ª *Cuando los ángulos alternos son iguales, las rectas que los forman son paralelas; y cuando dos rectas son paralelas, los ángulos alternos son iguales.*"

{"Sean en primer lugar (fig. 79) los ángulos alternos AEF, EFD iguales entre sí; y los contiguos AEF, FEB valiendo dos rectos, los interiores EFD, FEB valdrán tambien dos rectos, á causa de AEF = EFD; pero las rectas que forman con una tercera ángulos interiores, cuya suma es igual á dos rectos, son paralelas, luego &c.

{"En 2.º lugar, supuestas AE, CF paralelas entre sí, la suma de los ángulos interiores AEF, CFE será igual á dos rectos; pero la de los contiguos CFE, EFD es tambien igual á dos rectos, luego AEF = EFD; y por tanto, cuando dos rectas son paralelas, los ángulos alternos que forman con una tercera son iguales."

{"Consec. 9.ª *Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí.*"

{"En efecto, supongamos que AB, CD (fig. 80), sean paralelas á EF: si se cortan AB, EF por una recta KM, esta cortará tambien á CD en un punto L, y mientras que el paralelismo de AB, EF, originará que el ángulo BKL sea igual con el FMG, el paralelismo de CD y EF originará el ángulo DLM = FMG; de manera que los ángulos BKL, DLM serán iguales á un tercero FMG, y por tanto las rectas AB, CD serán paralelas."

{419 Lacroix, célebre Matemático frances, despues de haber definido las paralelas, como nosotros hemos ejecutado, y deducido que *dos rectas que son perpendiculares á una tercera, son paralelas*, dice:

{"Todos los que tienen la nocion de una línea recta, concederán sin dificultad 1.° que si por el punto D (fig. 83) se tira una recta HI', que forme con la línea BD un ángulo HDB menor que el recto EDB, ó que esté inclinada hácia la parte FG de la recta GG', encontrará á esta última por encima de AB, si ambas se prolongan suficientemente; 2.° que si por el mismo punto D se tira la recta I I' que forme con DB el ángulo IDB mayor que el recto EDB, como formará por debajo de AB el ángulo I'DB menor que el recto E'DB, ella se inclinará hácia la parte FG' de la recta GG', y encontrará por consiguiente por debajo de AB á esta recta prolongada suficientemente."

{"De aquí se sigue que á una recta, que es perpendicular á otra, la encuentran todas las que son oblicuas á esta otra, y que por consiguiente, sobre un plano, solo las líneas que son perpendiculares á una tercera, son las que no se encuentran, ó que son paralelas."

{"Es bien evidente (continúa) por lo que precede, que dos rectas respectivamente perpendiculares á otras dos rectas que se cortan, deben necesariamente encontrarse: si la línea FG (fig. 84), por ejemplo, es perpendicular á BC, ella es oblicua sobre AB; pues que si tuviese lugar lo contrario, BC y AB serian al mismo tiempo dos perpendiculares á FG, tiradas por el mismo punto B, lo que no puede ser; luego FG, siendo oblicua sobre AB, debe encontrar á DE perpendicular á esta línea."

{"*Cuando dos rectas* DE y FG (*fig.* 85), *son perpendiculares á una tercera* AB, *todas las rectas tales como* LM, *que son perpendiculares á una de ellas, son al mismo tiempo perpendiculares á la otra.*"

{"*Dem.* Supongamos que esto no se verifica, y que LM perpendicular en M á FG, no lo sea en L á DE: entónces se podría le-

vantar por el punto L á la LM una perpendicular que fuese diferente de EL, y á la cual EL sería interior ó esterior con relacion á FG; luego segun la proposicion primera, EL debería encontrar á GM, lo que no se podría verificar; pues que las rectas DE y FG siendo perpendiculares ambas á AB, no se pueden encontrar; luego no se puede levantar á LM en el punto L una perpendicular diferente de EL, y por lo mismo LM es perpendicular á un tiempo á DE y á FG."

{"De esta proposicion se sigue que *dos rectas paralelas á una tercera, son tambien paralelas entre sí.* En efecto, toda línea perpendicular á esta, lo será tambien á las dos primeras, que siendo por esto perpendiculares á una misma recta, no se podrán encontrar, y serán por consiguiente paralelas entre sí."

{"*Cuando dos rectas* DE y FG (*fig.* 86) *paralelas entre sí, estan cortadas por una recta cualquiera* IH, *los ángulos* ELI, *y* GMI *que forman con esta última hácia un mismo lado, el uno fuera y el otro dentro, son iguales entre sí.*"

{"*Dem.* Si desde el punto K, medio de LM, se baja sobre una de las rectas ED, FG la perpendicular DF, esta será al mismo tiempo perpendicular á la otra. Los triángulos DLK, KFM serán iguales, porque los lados LK, KM respectivamente opuestos á los ángulos rectos D y F, son iguales por construccion, y ademas los ángulos DKL, MKF, lo son tambien por opuestos al vértice, luego el ángulo DLK ó ELI, es igual á KMF, y por consiguiente á GMI, opuesto al vértice á este último."

{"De aquí se deduce con facilidad toda la teoría de las paralelas."

{420 Otros Geómetras definieron las paralelas, diciendo que *eran líneas que tenian todos sus puntos equidistantes los unos de los otros*, y suponiendo que los ángulos correspondientes eran iguales, eludieron completamente la cuestion, y presentaron su teoría con mucha sencillez, pero sin ningun rigor.

{Estos sábios pecaron en dos cosas: 1.ª, en la definicion, y 2.ª, en el supuesto, aunque desfigurado, que hacían de que los ángulos correspondientes eran iguales. El segundo defecto cualquiera lo percibe, pues se está palpando el hueco que dejan; pero el otro que estriba en la definicion no, y confieso ingénuamente que no lo he percibido hasta tener ya concluida la siguiente teoría mia de las líneas paralelas.

{En efecto, partiendo de que dos líneas paralelas son aquellas que tienen todos sus puntos equidistantes los unos de los otros, se deduce inmediatamente que si las AB,CD (fig. 87), son paralelas, como la distancia que hay á una línea se mide por una perpendicular, resulta que bajando las FG, HI, KL perpendiculares á CD, serán iguales entre sí.

{Ahora, como la distancia que hay desde la AB, á la CD, debe ser la misma que la de CD á AB, resulta tambien de la definicion que tirando las MN, PQ, RS, perpendiculares á la AB, deberán ser todas iguales entre sí, y con las FG, HI, KL.

{Esto supuesto, la primera proposicion que podemos demostrar es que

{*Si desde un punto de una paralela se baja una perpendicular á la otra tambien lo será á la primera.*

{*Espl.* Si desde F (fig. 88), se baja una perpendicular FG á CD, voy á demostrar que la FG tambien será perpendicular á la AB.

{*Dem.* Si la FG no es perpendicular á la AB, desde G le podrémos tirar una perpendicular tal como la GH: y como la perpendicular es la mas corta de todas, será $HG < FG$: pero FG por ser perpendicular á CD, mide la distancia que hay desde la AB á la CD: y GH, por ser perpendicular á AB, mide la distancia que hay desde la CD á la AB: y como la AB dista tanto de la CD, como CD de la AB, se tendrá $HG = FG$; pero á un mismo tiempo no se puede verificar que $HG < FG$, y que $HG = FG$, luego tampoco se puede verificar que la perpendicular que desde G se tire á la AB, sea diferente de la GF.

{421 Teor. *Toda línea* PQ (fig. 88), *que pase por el punto* R, *medio de la* MN, *perpendicular á las dos paralelas* AB, CD, *y que termina en dichas paralelas, queda dividida en* R *en dos partes iguales.*

{*Dem.* Porque por el supuesto es $MR = RN$, los ángulos en R, iguales por opuestos al vértice, los en N y M por rectos, luego los triángulos MRP, QRN, son iguales (361), y darán $PR = QR$, que era L. Q. D. D.

{422 Teor. *si suponemos que la recta* PQ *no pase por el medio de la* MN, *y suponemos que la parte* RM *sea mayor que la parte* RN, *vamos á demostrar ahora que la parte* PR *tambien será mayor que la* RQ.

{*Dem.* Porque si en la RM tomamos $RS = RN$, y en S levantamos la ST perpendicular á MN, esta perpendicular no podrá encontrar á la MB, porque entónces se tendrían tiradas desde el punto de concurso dos perpendiculares á la MN, lo que no puede ser; y pues que la PQ encuentra á la AB, resulta que la ST, prolongada suficientemente, llegará á cortar á la RP en un punto tal como T, y siendo los triángulos SRT, y QRN iguales por la misma razon de antes, se tendrá $RT = RQ$; pero $RP > RT$, luego $RP > RQ$, que era L. Q. D. D.

{423 Teor. *Si á una línea* PQ *que encuentra á dos paralelas* AB, CD, *la dividimos en dos partes iguales, y por el medio* R *tiramos una línea* MN, *que sea perpendicular á una de las dos paralelas, las partes en que esta quede dividida serán iguales, esto es, que se tendrá* $RN = RM$.

{*Dem.* En primer lugar por ser la MN perpendicular á una de las dos paralelas, lo será á la otra (420), y serán por consiguiente rectos los ángulos N y M; y siendo iguales los ángulos en R por opuestos al vértice, y $RP = RQ$ por el supuesto, los triángulos RMP, RQN serán (376 cor. 2.°) iguales, y darán $RM = RN$, que era L. Q. D. D.

{Teor. *Si dos paralelas* AB, CD, (fig. 88) *estan cortadas por una secante* XZ, *los ángulos alternos internos* XQD, APZ, *serán iguales.*

{*Dem.* Por el punto R medio de la parte PQ de la XZ, interceptada entre las dos paralelas AB, CD, tírese la MN perpendicular á una de las dos paralelas, y tendrémos que tambien lo será (420) á la otra, y los triángulos RMP, RQN serán iguales; (376 cor. 2.°); luego los ángulos MPR y RQN son iguales; pero estos son los alternos internos, luego cuando dos paralelas estan cortadas por una secante, los ángulos alternos internos son iguales.

{De aquí ya es muy fácil deducir lo demas, porque los ángulos alternos esternos son iguales con los alternos internos por opuestos al vértice, &c.

{425 He aquí mi primera teoría de las paralelas, y confieso que me sorprendió, porque me pareció que nada dejaba que desear por su sencillez; pero como prudentemente debe uno desconfiar de haber conseguido llenar un hueco que todos los Geómetras anteriores han dejado vacío, no me olvidaba jamas de si podría haber dejado algo incompleto, y á fuerza de reflexionar, encontré que este hueco se hallaba en la definicion. Pues como la posicion de una recta depende solo de dos puntos, solo podemos disponer nosotros de dos circunstancias para tener la existencia de la línea recta; y así no podemos disponer de la posicion de todos sus puntos, y decir *que estos estaban todos los de la una á igual distancia de todos los de la otra*; pues esta circunstancia pudiera muy bien ser contradictoria con la idea de la línea recta, así como es contradictoria con la idea de otras líneas curvas; pues hay infinitas de estas que no pueden tener todos sus puntos á igual distancia de los de otra de su especie que se halle en el mismo plano.

{Yo bien conozco que esta idea es muy fácil de percibir, y que tal vez, no solo no se habrá percibido dicho hueco de la definicion hasta que lo hayamos advertido, sinó que puede ser que, á pesar de lo espuesto, parezca esta una buena idea; pero como estimo mucho la ingenuidad, y no quiero de ningun modo sorprender la atencion del lector, he preferido presentar todas mis ideas y las de los demas, para que elija el modo que mejor le parezca.

¶426 Abandonada ya esta teoría, traté de seguir otro rumbo mas sencillo, á la verdad, y no demasiado dificil de entender; pero que aun tenia, su hueco como vamos á manifestar.

¶En el párrafo (368 cor. 1.°) hemos demostrado que la suma de dos angulos de un triángulo era siempre menor que dos rectos: si de esto se pudiera deducir que, con tal que se verificase esta circunstancia, tendríamos triángulo, la teoría de las paralelas quedaría demostrada con muchísima sencillez, de la manera siguiente.

¶427 Se llaman *líneas paralelas aquellas que hallándose en un mismo plano no se encuentran, aunque se las prolongue todo lo que se quiera.*

¶Para que dos líneas no se encuentren, es preciso que cortadas por otra formen á un mismo lado dentro dos ángulos, cuya suma sea igual á dos rectos. En efecto, si dos líneas formasen dos ángulos que juntos valiesen menos que dos rectos, entónces, en virtud de la construccion (365), podríamos formar un triángulo que tuviese por lado la parte de la secante interceptada por las paralelas, y los ángulos adyacentes, y luego superponiendo este triángulo sobre dicha parte interceptada, sus lados se confundirían con las líneas primitivas, las cuales se irian á encontrar en el mismo parage en que se hallaba el otro vértice del triángulo. Si los dos ángulos juntos valiesen mas de dos rectos, los que se formasen por las prolongaciones de dichas líneas por el otro lado valdrían menos de dos rectos, porque entre los cuatro habian de valer 4 rectos; luego, por la misma razon, se llegarían á encontrar por este lado; luego es indispensable para que dichas líneas no se encuentren que la suma de los dos ángulos sea igual con dos rectos.

¶Pero, como aquí faltaba demostrar que con un lado cualquiera y dos ángulos, cuya suma sea menor que dos rectos, se puede siempre formar triángulo, me ví precisado á abandonar dicha teoría, y escogité la que hemos preferido, en la cual no veo ningun hueco; pero como es muy posible que lo haya, he querido esponer en esta digresion todo lo que sobre este punto tengo noticia se ha hecho. Pero antes de concluirla, no puedo menos de dar á conocer otra teoría ingeniosa que mi nunca bastante apreciado Catedrático y adorado amigo Don Antonio Varas, me esplicó un dia paseándonos por el camino nuevo que hay á la salida de la puerta de los Pozos, cuya teoría es la siguiente.

¶428 "Las relaciones de posicion que pueden tener las líneas rectas unas con otras no son mas que dos. Porque dos rectas pueden encontrarse mútuamente ó no encontrarse jamas; el caso en que nunca se encontrarán, será cuando las perpendiculares levantadas á la una de las dos, sean iguales entre sí, ó á una misma línea, por manera que lo que hay que demostrar es que *si á una línea se levantan cuantas perpendiculares se quieran, iguales entre sí, estas determinarán con sus estremos la posicion de otra recta que nunca se encontrará con la primera.*"

¶"La demostracion de toda la doctrina de las paralelas se funda 1.° en que es propiedad esclusiva de las líneas rectas el confundirse en una sola, cuando se pone una sobre otra de cualquier modo que sea; 2.° en que la posicion de una recta depende de dos puntos; y 3.° en que tambien sean conocidos de antemano los casos de la igualdad de los triángulos. Supuestos, pues, todos estos conocimientos, se puede demostrar del modo siguiente, lo que hay de mas esencial en esta teoría."

¶"Sea AFHB (fig. 89) una línea recta en la que se verifique, que todas las perpendiculares que se eleven en cualesquiera de sus puntos sean iguales á la FE: digo que estas perpendiculares determinarán 1.° una línea CD, que será recta; 2.° que esta línea no se encontrará jamas con la AB.

¶Que la CD sea una línea recta se convence así: si nos figuramos que una porcion cualquiera DGHB del plano de estas líneas, se sobrepone sobre otra porcion del mismo, de suerte que BH caiga sobre la HFA, resultará que por razon de la igualdad de todas las perpendiculares, la parte DG de la línea DC, que pasa por sus estremos, se confundirá en toda su estension con la porcion GEC, sobre la cual caerá formando con ella una sola línea; pero esta propiedad pertenece solo á la línea recta, luego la DC que pasa por los estremos de las perpendiculares iguales levantadas sobre la AB, es una línea recta.

¶Que la DC no encontrará jamas á la AB, se prueba del modo siguiente: sabido es que lo que acontece á dos puntos de una recta respecto de otra, eso mismo sucede á toda la línea; pero á los dos puntos G y E de la DC, les sucede estar á igual distancia de los puntos F y H de la BA por la igualdad de las perpendiculares, luego á la DC le sucede que en toda su estension se halla á igual distancia de la BA, por cuya razon jamas puede concurrir ó encontrarse con ella.

¶Luego dos rectas HG, FE perpendiculares á una misma AB, é iguales entre sí, determinan por sus puntos G y E la posicion de otra recta que no podrá nunca encontrar á la primera. Estas líneas son las que se llaman *paralelas.*

429 *Si una línea es perpendicular á una de dos paralelas, lo será tambien á la otra*, esto es, si la FE es perpendicular á la AB que es una de las paralelas AB, CD (fig. 89), tambien lo será á CD.

Porque, considerando el plano de estas líneas doblado por la FE, la AF caerá sobre FB, por ser iguales los ángulos AFE y EFB, y por la igualdad de las perpendiculares comprendidas entre las paralelas, CE caerá sobre ED; de donde resulta que los ángulos á continuacion CEF, FED son iguales. Luego la FE tambien es perpendicular á la CD.

Luego si las dos líneas FE, HG son perpendiculares á la una AB de dos paralelas, lo será tambien á la otra CD, y recíprocamente las FH, EG serán perpendiculares á un tiempo á cada una de las FE, HG: y como estas, por razon de los ángulos que forman con las AB, CD, no pueden inclinarse mas á un lado que á otro en ningun punto de su direccion, se sigue que la distancia á que se halla una de otra en toda su longitud, ha de ser la misma. Luego estas líneas son paralelas una á otra, y cortan ó interceptan partes iguales en las primeras paralelas.

Ahora bien, *si por dos puntos cualesquiera G, F (fig 90), de dos paralelas AB, CD, se tira la recta NGFM que las corte, formará con ellas los ángulos en I y K, que se llaman alternos internos, iguales entre sí.*

Porque, tirando las FE, HG perpendiculares á la AB, se verificará, segun lo que se lleva dicho, que FE = HG, FH = EG; y por ser rectos los ángulos en E y H, se tendrá que los triángulos FEG y FHG son iguales (360); y de aquí se irá ya deduciendo todo lo que corresponde saberse respecto de los ángulos que forma la secante con las paralelas.

Hutton define las paralelas diciendo, que *son aquellas que estan siempre á la misma distancia perpendicular, y que jamas se cortan por mas que se las prolongue*: y el primer teorema que acerca de ellas demuestra es el XII de su Geometría, y es como sigue.

Cuando una línea corta á dos paralelas, forma con ella los ángulos alternos internos iguales.

Lo que demuestra así. Sea (fig. 70) EF la línea, que corte á las dos paralelas AB, CD, y se verificará que el ángulo AGO será igual al alterno interno GOD.

Porque si no son iguales, uno de ellos será mayor que el otro; sea el GOD el mayor si es posible; y concíbase la línea OB tirada de modo que el ángulo GOB sea igual con el AGO y que corte á la AB en el punto B.

En este caso, el ángulo AGO esterno del triángulo GOB será mayor que el interno opuesto BOG; pero por construccion estos mismos ángulos son iguales; luego resulta que estos dos ángulos son á un mismo tiempo iguales y desiguales, lo que es imposible. Por lo que el ángulo GOD no es desigual con el alterno interno AGO, luego le será igual L. Q. D. D.

Aquí se advierte que el vicio que comete se halla en la construccion; pues supone tirada la recta OB con tres circunstancias, á saber: que pase por O, que forme el ángulo GOB = al AGO y que ademas corte á la AGB; lo que en general no se puede hacer, pues para tirar una recta nunca se pueden suponer mas de dos condiciones.

Leslie define las paralelas diciendo, que *son líneas que no tienen mútua inclinacion*; y despues establece la siguiente proposicion.

Si una recta EFG (fig. 321) *cae sobre dos paralelas* AB *y* CD, *formará los ángulos alternos* AGF, DFG *iguales.*

"Porque si se concibe que una recta prolongada por una y otra parte del punto F, gira al rededor de este punto, ella cortará primero á la línea estendida AB sobre G hácia A, y despues, en su progreso, cortará á esta línea en el otro lado debajo de G hácia B. En la primera posicion IFH, el ángulo EFH es el ángulo esterno del triángulo FHG, y por lo mismo mayor que FGH ó EGA (368). Pero en la última posicion LFK, el ángulo esterior EFL es igual á su opuesto al vértice GFK en el triángulo FKG, y respecto del cual el ángulo FGA es esterno; por consiguiente FGA es mayor que EFL ó el ángulo EFL es menor que FGA ó EGA. Por lo que, cuando la línea incidente EFG corta á AB mas arriba del punto G forma el ángulo esterno EFH *mayor* que EGA; y cuando corta á AB debajo de este punto, forma el ángulo esterno EFL *menor* que el mismo ángulo. Pero una magnitud, variando en su transicion de mayor á menor, debe evidentemente pasar por el límite intermedio de igualdad. Por lo que hay una singular posicion CD, en la cual la línea, girando al rededor del punto F, forma el ángulo esterior EFC *igual al interior* EGA, y en el mismo instante de tiempo no corta á la AB hácia una ni hácia otra parte, y es por lo mismo paralela á ella."

Aquí se ve, que ademas de tomar por evidente una cosa que ántes no ha demostrado, la conclusion no está bastante acorde con la definicion.

Mr. Cresswell define la línea recta diciendo que es *el límite que divide una superficie plana en dos partes, que, en este límite ó* *linde* comun. *tienen ambas la misma forma, ya se compare el total con el total, ó una parte del uno con la parte contigua á ella del otro.* Luego define las paralelas diciendo que *son rectas que estan en el mismo plano, y que prolongándose por ambos lados no se encuentran.* Despues toma por conocido, que *por cualquier punto dentro de un ángulo agudo, dentro de un ángulo recto, dentro de un ángulo obtuso, se puede suponer pasar una recta que corte á las dos rectas que forman el ángulo.*

{Esta proposicion en que funda despues toda su teoría de las paralelas es mas aventurada aun que la de Legendre de que hemos hecho mencion (411).

{El célebre Tomas Simpson, en la edicion de su Geometría publicada en 1821 define las paralelas diciendo que son *líneas que estando en la misma superficie indefinidamente prolongadas, jamas se encontrarán.* Toma por axioma, y es el 9.° de dicha obra, que *si dos puntos de una recta distan desigualmente de dos puntos de otra recta que se halla en la superficie; estas dos rectas prolongadas por el lado de la menor distancia, se llegarán á encontrar.*

{Para que se vea hasta que punto se ha abusado en punto á establecer axiomas, y con cuanto fundamento hemos estado criticando dicha manía, no podemos ménos de indicar con este motivo que en la espresada edicion toma por axioma nuestro *segundo caso de igualdad de triángulos*, demostrado (§ 360).

{Su teoría de las paralelas, fundándose en su axioma 9.° se reduce á demostrar *que dos perpendiculares, á una tercera son paralelas; que las perpendiculares á una de dos paralelas terminadas por estas, son iguales y tambien perpendiculares á la otra de las dos paralelas*: de lo cual deduce despues que *los ángulos alternos internos son iguales.*

{En la vigésima edicion de la Geometría de Roberto Simson, hecha en 1822 se reconoce que nuestra proposicion (§ 386*b*), que desde el tiempo de Euclides se ha admitido como axioma, no es evidente por sí misma; y para demostrarla, da dos definiciones, establece un axioma y hace uso de cuatro proposiones preliminares. El axioma es el siguiente: *una recta no puede primero llegar á estar mas cerca de otra, y despues ir mas lejos de ella, sin que ántes la corte; y del mismo modo una recta no puede ir mas lejos de otra, y despues venir á estar mas cerca; ni una recta puede guardar la misma distancia de otra y despues venir á estar mas cerca ó mas lejos de ella; porque una recta guarda siempre la misma direccion.* El cual en mi concepto es mucho ménos evidente que la proposicion que por medio de él se trata de demostrar.

{Terminarémos esta digresion con otra demostracion de la 1.ª

parte de la proposicion (391), á saber, que si *las AB, CD (fig. 90*), son tales que cortadas por la EF forman con ella el ángulo EFD recto y el FEB agudo, y por consiguiente los dos juntos menores que dos rectos, dichas líneas se irán á encontrar hácia la derecha de EF.*

{En efecto, puesto que la EF es oblicua á la AB, desde F se le podrá tirar una perpendicular FG, la cual caerá á la derecha de FE (368 cor. 6.°) por ser el ángulo FEB agudo, y en virtud de lo demostrado (370), será EF > FG; y siendo el ángulo EFD recto por el supuesto, el GFD que es menor, será agudo, y por consiguiente bajando desde G la GH perpendicular á CD, caerá por la misma razon á la derecha de FG, y será menor que ella. Del mismo modo probaríamos que la HK era menor que la GH, y que la KL menor que HK, &c, luego estas líneas se van acercando cada vez mas la una á la otra hácia la derecha de EF, luego en llegando las perpendiculares á su límite cero, la distancia de la una á la otra será nula, y por consiguiente las AB y CD, se llegarán á encontrar suficientemente prolongadas.

{En esta demostracion se halla el inconveniente de que podrían tambien acercarse la una á la otra asintóticamente (véase el paréntesis del final de la pág. 64).

Del círculo y de las rectas consideradas en él.

430 Euclides que vivió tres siglos ántes de nuestra era, reunió en una obra intitulada Ευκλειδου Στοιχεια ó en latin *Euclidis Elementa*, á que corresponde en castellano *Elementos de Euclides*, todos los conocimientos geométricos que hasta su tiempo se tenían; y siguió un órden tan exacto en la demostracion de sus proposiciones, que su obra ha servido de testo hasta nuestros dias para aprender la Geometría. El rigor en las demostraciones nadie se lo negará á Euclides; pero lo que sí viene á ser un defecto, no en él respecto de su tiempo, sino en su obra respecto del nuestro, es que las proposiciones se presentan como dislocadas, y que por lo mismo no ofrecen una asociacion correspondiente para que la memoria las retenga.

Por esta causa algunos Geómetras modernos trataron de dar otra nueva forma á la Geometría, y de enlazar de diferente modo las proposiciones: este método es muy filosófico, sencillo y á propósito para retener el órden de las proposiciones; mas por dar todo este órden, dejaron sin demostracion la mayor parte de las proposiciones fundamentales: con lo cual eludieron todas las dificultades, y consiguieron el presentar la Geometría con mucho órden y sencillez, pero sin ningun rigor y exactitud. Legendre y Lacroix han tratado de restablecer el rigor en la Geometría, y en efecto lo han conseguido; pero en cierto modo dejan algun desórden semejante, aunque no idéntico, al de Euclides. Y como todo se debe conciliar, despues de haber presentado, en lo que hasta aquí llevamos espuesto, todos los principios fundamentales de la Geometría (aunque mezclando ya una propiedad de líneas con una de ángulos, con una del círculo y con una de triángulos, para que ayudándose las unas á las otras, restableciesen el rigor y exactitud), seguirémos de aquí en adelante con el órden filosófico que los primeros siguieron, tratando ante todas cosas del círculo y de las propiedades de las rectas consideradas en él; despues de los ángulos considerados en él &c. &c. &c.

Ya hemos dicho (§ 343 y 344) lo que se entiende por *círculo*, por *circunferencia*, por *radio*, por *diámetro*, por *cuerda*, por *arco*; y en esta inteligencia pasarémos á demostrar las propiedades de estas líneas.

431 Teor. *Toda cuerda es menor que el diámetro, ó el diámetro es la mayor de todas las cuerdas.*

Dem. Sea AD (fig. 91), dicha cuerda; si por el punto A y el centro C se tira la AB, será un diámetro; y uniendo el centro C con el otro estremo D de la cuerda, se tendrá (§ 371) AC + CD > AD; pero AC y CD son dos radios, y el diámetro AB siempre equivale á dos rádios, luego AC + CD = AB, y por lo mismo AB > AD, que era L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *la mayor recta que se puede tirar dentro de un círculo es el diámetro.*

Esc. Si en un círculo *se cruzan dos diámetros á ángulos rectos, quedará dividido en cuatro partes iguales.* Porque si concebimos doblado el círculo por el diámetro AB (fig. 91), la CN caerá sobre la CM por ser iguales los ángulos ACM, ACN; y como por otra parte las circunferencias (346) se deben confundir, tendrémos que el espacio ACM = al ACN, y el arco AM = al AN.

432 Teor. *Una recta no puede encontrar á una circunferencia en mas de dos puntos.*

Dem. Porque si la encontrase en tres, estos tres puntos estarían equidistantes del centro, y habría por lo mismo tres rectas iguales tiradas desde un mismo punto á una recta, lo que es imposible (376 cor. 1.°).

433 Teor. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, arcos iguales tienen cuerdas iguales, y cuerdas iguales subtenden arcos iguales.*

Espl. Sean ABK, EGF (fig. 92), dos círculos iguales, esto es trazados con los radios iguales AC, EO: voy á demostrar que si se supone que los arcos AMD, ENG sean iguales, las cuerdas AD, EG tambien lo serán; y si se supone que las cuerdas AD, EG sean iguales, los arcos AMD, ENG serán iguales.

Dem. Puesto que los círculos tienen un mismo radio, resultará que tendrán un mismo diámetro, por ser el diámetro igual al duplo del radio; luego si por los estremos de cada cuerda concebimos un diámetro, podrémos colocar la semicircunferencia AMDB de modo que se ajuste (345 cor. 2.°) exactamente sobre la semicircunferencia ENGF, haciendo que los diámetros se confundan, de modo que el centro del un círculo corresponda sobre el centro del otro; y como se supone que AMD = ENG, resultará que el punto D caerá sobre el punto G; luego las líneas AD, EG tendrán confundidos sus estremos: y habiéndose confundido sus estremos, se habrán confundido en toda su longitud (342), y por lo mismo serán iguales: luego de ser AMD = ENG, se deduce que AD = EG.

Recíprocamente de ser AD=EG, se deduce que AMD = ENG.

Porque tirando los rádios CD, OG, los dos triángulos ACD, EOG, tendrán sus tres lados iguales, y por lo mismo serán iguales, y tendrémos el ángulo ACD = al EOG; pero colocando el semicírculo ADB sobre su igual EGF, puesto que el ángulo ACD = EOG; resultará (348) que el radio CD caerá sobre el radio OG, y el punto D sobre el punto G, luego el arco AMD es igual al arco ENG, que era L. Q. D. D.

Esc. Si los arcos ó cuerdas se quisiese que estuviesen en un mismo círculo, y que fuesen LK y AD, concibiendo tirados los diámetros AB, LP podríamos concebir el semicírculo LKBP, superpuesto sobre ADPB, y demostraríamos las mismas proposiciones.

434 Teor. *En un mismo círculo ó en círculos iguales, el mayor arco tiene la mayor cuerda, y la mayor cuerda subtende el mayor arco* (con tal que los arcos de que se trata sean menores que la semicircunferencia).

Dem. Porque si suponemos que el arco AMH > AMD (fig. 92), y tiramos las cuerdas AD, AH, juntamente con los radios CD, CH, los dos lados AC, CH del triángulo ACH, serán iguales á los dos lados AC, CD del ACD; el ángulo ACH, por ser todo respecto del ACD, será mayor que él, y por lo mismo (375) el tercer lado AH > AD; luego el mayor arco tiene la mayor cuerda.

Recíprocamente, si suponemos ahora que AH > AD; vamos á demostrar que AMH > AMD.

Porque si esto no se verifica, se tendrá AMH = AMD ó AMH < AMD: si suponemos que AMH sea igual con AMD, resultará (433) que AH = AD: lo que no puede ser, pues suponemos que AH > AD. Si fuese AMH < AMD, tendríamos por lo que acabamos de probar, que AH < AD, que tambien es absurdo, pues por el supuesto se tiene $AH > AD$; luego no pudiendo ser AH igual ni menor que AD, será forzosamente mayor. L. Q. D. D.

Esc. Hemos espresado en la proposicion que los arcos de que se trata han de ser menores que la semicircunferencia; porque si fuesen mayores se verificaría lo contrario, es decir, *que aumentando el arco, disminuiría la cuerda, y viceversa*: así es, que el arco ALKBD, siendo mayor que ALKBH, la cuerda AD del primero es menor que la AH del segundo.

435. Probl. *Dados dos arcos de un mismo círculo ó de círculos iguales, encontrar la relacion de sus longitudes.*

Res. y Dem. Esta cuestion se resolvería como la (342) si se pudiesen tomar los arcos de círculo para colocarlos los unos sobre los otros, como se hace con las líneas rectas; mas no pudiéndose ejecutar esto en la práctica, se suple por las cuerdas, que, siendo iguales, corresponden á arcos iguales. Y así, si los dos arcos dados son AB y CD (fig. 93), se colocará la cuerda del CD, que es el menor, todas las veces que se pueda sobre el arco AB; y si se puede ejecutar dos veces, por ejemplo, desde A hasta E, se tendrá que el arco AB, componiéndose de dos partes Ad, dE iguales cada una con CD, y de la resta EB, será $AB = 2DC + EB$.

Colóquese la cuerda de la resta EB, las veces que se pueda en el arco CD, y se tendrá que, poniéndola una vez desde C á F, y dejando la resta FD, será $DC = CF + FD = EB + FD$.

Póngase la cuerda de la resta FD las veces que se pueda sobre la resta antecedente EB; y si se halla que se puede colocar exactamente cuatro veces, se tendrá $BE = 4FD$.

Sustituyendo ahora este valor de BE en el de DC, será

$$DC = 4FD + FD = 5FD.$$

Poniendo ahora los valores de BE y CD, en el de AB, será

$$AB = 2\times 5 FD + 4FD = 10FD + 4FD = 14FD.$$

Con lo cual se tendrá que el arco FD será la comun medida de los dos arcos AB y CD; y estando contenido catorce veces en el primero y cinco en el segundo, resulta que tendrán entre sí la relacion de catorce á cinco.

Esc. La operacion se termina tambien aquí, cuando se halla una resta que esté contenida exactamente en la precedente; si no se halla, dichos arcos son incomensurables, y se encuentra su relacion aproximada, continuando la operacion hasta que se llegue á una resta, cuya cuerda, por su pequeñez, no se pueda averiguar ya con el compás las veces que está contenida en la resta antecedente.

436 Teor. *A una línea que corta á la cuerda de un círculo, le pueden suceder tres cosas: 1.ª que pase por el centro; 2.ª que sea perpendicular á la cuerda; y 3.ª que la divida en dos partes iguales: vamos á demostrar que si se verifican dos de estas circunstancias, se verificará igualmente la tercera.*

Dem. Supongamos 1.° que la CP (fig. 94), salga del centro, y sea perpendicular á la cuerda FM: vamos á demostrar que divide á la cuerda en dos partes iguales, esto es, que $FP = PM$.

En efecto, por salir la CP del centro, tiene un punto C, equidistante de F y de M (343), y por ser perpendicular los tiene todos (376 cor. 3.°); luego el punto P, que es punto de la CP, está equidistante de F que de M, luego las líneas que miden estas distancias serán iguales; pero estas son las FP y PM, luego $FP = PM$; luego la FM queda dividida en dos partes iguales. L. 1.° Q. D. D.

2.° Supongamos ahora que la CP salga del centro y divida á la FM en dos partes iguales: vamos á demostrar que es perpendicular á la FM.

En efecto, por salir la CP del centro, tiene el punto C equidistante de F y de M, y por dividir á la cuerda en dos partes iguales tiene el punto P equidistante de F y de M; luego la línea CP tiene dos puntos C y P equidistantes de F y M; luego (377) le será perpendicular. L. 2.° Q. D. D.

3.° Supongamos ahora que la CP divida á la cuerda EM en dos partes iguales y que le sea perpendicular: vamos á demostrar que pasará por el centro.

En efecto, por dividir la CP á la FM en dos partes iguales, tiene el punto P equidistante de F que de M; y por serle perpendicular, pasa (377 cor.) por todos los puntos que en dicho plano estan á igual distancia de F que de M; y como el centro es un punto que dista igualmente de F que de M, porque F y M son puntos de la circunferencia, se deduce que la CP pasará por el centro: que era L. 3.° Q. D. D.

Esc. *La línea que cumple con dos cualesquiera de estas circunstancias, ademas de cumplir con la tercera, divide al arco que la cuerda subtende en dos partes iguales.* Porque, siendo perpendicular, y teniendo un punto equidistante de F y de M, los tendrá todos; luego el punto Q donde la CP vaya á encontrar al arco FQM, tambien estará equidistante de F que de M, luego las cuerdas FQ y QM serán iguales; siendo iguales las cuerdas lo son igualmente los arcos, y resultará que $FfQ = QmM$.

Cor. De aquí se infiere que *las partes de una línea, interceptadas por dos círculos concéntricos, son iguales*; porque si esta línea pasa por el centro como la LQ, será $CL = CQ$ por radios de un mismo círculo, y $CK = Cp$ por la misma razon; y restando estas ecuaciones, resultará $LK = pQ$. Si no pasa por el centro como la

FM, tirándole desde el centro la perpendicular CP, será PF = PM, y PR = PS, y restando estas ecuaciones, será RF = SM.}

437 Teor. *Si en un círculo se tiran dos cuerdas paralelas, los arcos que estas interceptan serán iguales.*

Espl. Sean FM y *fm* estas dos paralelas: voy á demostrar que los arcos F*f*, M*m* son iguales.

Dem. Si desde el centro C tiramos una línea CP perpendicular á una de ellas, lo será igualmente á la otra, y dividirá tanto á ellas como á los arcos FQM, *f*Q*m* en dos partes iguales, y se tendrá F*f*Q = M*m*Q, *f*Q = *m*Q, que restando estas ecuaciones, saldrá F*f*Q — *f*Q = M*m*Q — *m*Q, ó el arco F*f* = al M*m*, que era L. Q. D. D.

438 Teor. *Dados tres puntos A, B, C* (fig. 95), *que no estén en línea recta, se puede siempre hacer pasar por ellos una circunferencia de círculo; pero no se puede hacer pasar sino una.*

Dem. Para probarlo, unirémos dichos tres puntos por medio de las líneas AB, BC, y las dividirémos en dos partes iguales por medio de las perpendiculares EL, KG; lo primero que vamos á demostrar es que estas perpendiculares se encontrarán. Porque si no se encontrasen serian paralelas, y en este caso la AB perpendicular á DE sería perpendicular igualmente á FG (383a); pero BK, prolongacion de AB, es diferente de BF, pues que los tres puntos A, B, C, no estan en línea recta; luego tendríamos dos perpendiculares BF, BK, bajadas desde un mismo punto B sobre la misma línea GK, lo que es imposible; luego las perpendiculares DE, FG se cortarán siempre en un punto tal como O.

Ahora, el punto O por pertenecer á la perpendicular DE está á igual distancia de los dos puntos A y B; el mismo punto O, por pertenecer á la perpendicular FG, está á igual distancia de los dos puntos B, C, luego las tres distancias OA, OB, OC son iguales; luego la circunferencia descrita haciendo centro en O con el radio OB, pasará por los tres puntos A, B, C.

Habiendo probado ya que por tres puntos que no estan en línea recta se puede hacer pasar una circunferencia de circulo, vamos á demostrar ahora que no se puede hacer pasar sino una.

Porque si hubiese otra circunferencia que pasase por dichos tres puntos A, B, C, su centro no podría estar fuera de la DE (377 cor.); tampoco podría estar fuera de la FG por una razon semejante; luego estaría á un tiempo en las dos líneas DE, FG. Pero dos rectas no se pueden encontrar sinó en un solo punto (340 cor. 2.°); luego las dos circunferencias tendrían un mismo centro y un mismo radio; luego se confundirían en una sola circunferencia, y por lo mismo no hay mas de una circunferencia que

pueda pasar por tres puntos dados. L. Q. D. D.

Cor. 1.° *Dos circunferencias no se pueden encontrar en mas de dos puntos*; porque si tuviesen tres puntos comunes tendrían el mismo centro, y no formarían sino una sola y misma circunferencia.

Cor. 2.° De aquí se deduce que en la práctica *para trazar una circunferencia por tres puntos dados*, no hay mas que unir dichos tres puntos por medio de dos líneas, dividir estas en dos partes iguales por medio de perpendiculares; y haciendo centro en su punto de interseccion, y con un radio igual á la distancia de este punto, á uno cualquiera de los otros dados, trazar una circunferencia.

{*Esc.* Cuando los puntos dados estuviesen en línea recta, dichas perpendiculares no se podrían encontrar; luego en este caso no habría centro, y por lo mismo no se podría hacer pasar una circunferencia por ellos; por esta causa se puede considerar que la línea recta es la circunferencia de un círculo, cuyo radio es infinito; lo cual trae muchas ventajas cuando se aplica el cálculo á la Geometría, porque entónces se demuestran á un mismo tiempo propiedades de líneas circulares y de líneas rectas; y una propiedad de la línea circular contenida en una ecuacion, se convertirá en una propiedad de la línea recta, suponiendo el radio infinito.}

Cor. 3.° Tambien se deduce de esto un medio *para hallar el centro de un círculo, ó de un arco de circunferencia*; porque si se nos diese el círculo AECBL, ó solo el arco ALBC (fig. 95), tiraríamos de un modo cualquiera dos cuerdas AB, BC, las dividiríamos en dos partes iguales por medio de perpendiculares, y el punto donde se encontrasen sería el centro, porque este se había de hallar en cada una de dichas perpendiculares; y como no se pueden encontrar sinó en un punto (340 cor. 2.°), resultará que este será el centro.

{439 Teor. *Dos cuerdas iguales distan igualmente del centro, y dos cuerdas desiguales distan desigualmente del centro, estando la mayor á menor distancia que la menor.*

{*Dem.* 1.° Supongamos que la cuerda AB = DE (fig. 96): divídanse estas cuerdas en dos partes iguales por medio de las perpendiculares CF, CG, y tírense los radios CA, CD.

{Los triángulos rectángulos CAF, DCG tienen las hipotenusas CA, CD iguales, y ademas el lado AF mitad de AB, es igual al lado DG, mitad de DE; luego estos triángulos son iguales (376 cor. 2.°) y dan CF = CG, que era L. 1.° Q. D. D.

{2.° Sea la cuerda AH mayor que DE, el arco AKH será mayor que el DME (434); sobre el arco AKH tómese la parte ANB = DME, tírese la cuerda AB, bájese CF perpendicular á esta cuerda, y CI perpendicular á AH; y tendrémos que CF es todo, y CO parte suya; luego $CF > CO$, y como $CO > CI$ (§ 376), resultará con mas razon $CF > CI$; pero $CF = CG$, pues que las cuerdas AB, DE son iguales, luego se tiene $CG > CI$, que era L. 2.° Q. D. D.

{440 Teor. *Si desde un punto* A, *otro que el centro de un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia mas distante del mismo punto diferentes rectas AB, AD, AE* (fig. 97), *se verificarán dos cosas; 1.ª que la recta AB que pasa por el centro, es la mas larga; y 2.ª que de las dos rectas AD, AE que no pasan por el centro, la que tiene su estremo D mas inmediato al punto B de la que pasa por el centro, es la mas larga.*

{*Dem.* Para demostrarlo, tírense los radios CD, CE á los estremos de las rectas AD, AE, que no pasan por el centro; y tendrémos que siendo $CB = CD$ por radios de un mismo círculo, si á cada una le añadimos AC, se tendrá $CB + CA$ ó $AB = AC + CD$; pero como $AC + CD$ juntas, son mayores (371) que AD, tambien resultará $AB > AD$; del mismo modo probarémos que AB es mayor que AE.

{Ahora, para demostrar que AD es mayor que AE, observarémos que $DO + OC > DC$; pero $CD = CE$ por radios de un mismo círculo, luego se tendrá $DO + OC > EC$, y quitando la parte comun CO, quedará $DO > EO$; ahora, añadiendo á estas cantidades que son desiguales una misma cantidad OA, los resultados quedarán desiguales, y se tendrá $DO + OA = DA > EO + OA$; pero $EO + OA > EA$ (§ 371), luego con mayor razon será $DA > EA$; luego *si desde un punto* &c.

{441 Teor. *Si desde un punto A, otro que el centro de un círculo, se tiran á la parte de la circunferencia mas cercana á dicho punto, diferentes rectas AM, AN &c. la línea AM que prolongada pasa por el centro C, es la mas corta.*

{*Dem.* Para probarlo, tirarémos el radio NC, y tendrémos, si el punto está dentro, $CA + AN > NC$; pero $NC = CM$, luego $CA + AN > CM$; y quitando la parte comun CA, quedará $NA > AM$. Si el punto A está fuera como en la segunda figura, se tendrá $AN + CN > AC$, de donde, quitando las cantidades iguales CM y CN, quedará $AN > AM$, que era L. Q. D. D.

{*Cor.* 1.° De aquí se deduce que *desde un punto* A, *otro que el centro de un círculo, no se pueden tirar á la circunferencia tres líneas iguales.*

{Porque no se puede decir que la una de las tres líneas iguales es la que pasa por el centro, pues acabamos de demostrar que es mayor ó menor que cualquiera de las otras; tampoco puede ser que de las tres líneas iguales las dos estén al un lado y la otra

al otro, pues las que estan á un mismo lado no pueden menos de ser desiguales.

{*Cor.* 2.° Tambien se infiere que *si desde un punto dentro de un círculo, se tiran á la circunferencia tres líneas iguales, este punto será el centro*; porque si no lo fuese, se podrían tirar á la circunferencia tres líneas iguales desde un punto, otro que el centro.}

442 Cuando una línea corta á la circunferencia de un círculo, teniendo parte dentro y parte fuera, se llama *secante*; tal es la AB (fig. 98): y cuando una línea es tal que no tiene mas de un punto comun con la circunferencia, teniendo fuera todo lo demas, se llama *tangente*; tal es la CDE: el punto D que es comun á la circunferencia y á la CDE, se llama *punto de contacto.*

443 Teor. *Toda recta que corta á la circunferencia de un círculo en dos puntos, es secante del círculo.*

Espl. Supongamos que la recta AB tenga comunes con la circunferencia los dos puntos A y B (fig. 98): voy á demostrar que dicha línea tiene parte dentro del círculo, y parte fuera.

Dem. Tírense á los puntos A y B los radios OA, OB, y tendrémos que, por salir desde un mismo punto, no podrán ser ambos perpendiculares á la AB (§ 368 cor. 3.°); y por ser iguales, no podrá ser uno de ellos perpendicular, porque sería mas corto (376); luego ambos serán líneas oblicuas tiradas á la AB, y por ser iguales, estarán (376) á diferentes lados de la perpendicular que se puede tirar por O; luego si concebimos que esta perpendicular sea la OM, se tendrá $OM < AO = OB$, luego el punto M estará dentro del círculo. Y como todas las líneas que desde O se tirasen á puntos intermedios de la AM y MB, serían menores que AO, toda la AMB estará dentro; y como tirando líneas desde O á los puntos que estén á la derecha de B y á la izquierda de A, serían mayores que OB, OA, resultará que todos estos puntos de la AB estan fuera del círculo; luego la AB es secante. L. Q. D. D.

444 Teor. *Toda línea* CE (fig. 98) *perpendicular al estremo* D *de un radio, es tangente del círculo.*

Dem. Porque toda oblicua ON es mayor que la perpendicular OD; luego el punto N estará fuera del círculo; luego la línea CDE no tiene comun con la circunferencia, sino el punto D; luego CDE es una tangente. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *para tirar una tangente por un punto dado en la circunferencia, basta tirar el radio correspondiente á dicho punto, y levantar en su estremo una perpendicular.*

445 Teor. *Toda tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto.*

Dem. Por suponerse que la CDE (fig. 98) es tangente, todos sus puntos estan fuera del círculo, escepto el punto de contacto D; luego toda línea que desde el centro termine en la CDE, es mayor que la OD; luego la OD es la línea mas corta que desde el centro O se puede tirar á la CDE; luego le es perpendicular. L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego *toda línea perpendicular á la tangente en el punto de contacto, pasa por el centro*; porque si no pasase, una vez que el radio es perpendicular á la tangente en el punto de contacto, en aquel punto de la tangente se podrían levantar dos perpendiculares, lo que es absurdo.

Cor. 2.° Entre una tangente y una circunferencia no se puede tirar ninguna línea recta, pero se pueden hacer pasar infinitas *lineas circulares*.

Porque si suponemos que hubiese una línea tal como DP, que dividiese el espacio que hay entre la tangente y la circunferencia, tirándole desde el centro una perpendicular OQ, sería mas corta que la oblicua OD; pero OD es el radio, luego OQ es mas corta que el radio, y por lo mismo, el punto Q está dentro del círculo; luego la DP no divide el espacio entre la tangente y el círculo. Pero si prolongamos el radio DO, y haciendo centro en L con LD, trazamos la circunferencia DX, esta se hallará toda fuera del círculo RAFDB, porque está trazada con mayor radio, y tendrá por tangente en el punto D á la CDE; luego la circunferencia DX pasa por entre la tangente, y aquella circunferencia á que lo es; y como lo mismo probaríamos de la circunferencia DZ que tiene su centro en R, y de otra cualquiera que le tuviese en la OLR prolongada, se sigue que entre un círculo y su tangente se pueden hacer pasar infinitas circunferencias. De donde se infiere que el espacio comprendido entre un círculo y su tangente, se puede dividir en un número infinito de partes.

446 Teor. *Dos paralelas que tocan ó cortan á un círculo, interceptan en la circunferencia arcos iguales.*

Dem. Aquí pueden ocurrir tres casos: 1.° que las dos rectas sean secantes; 2.° que una de ellas solo lo sea, y la otra tangente; y 3.° que ambas sean tangentes.

El primer caso ya lo hemos demostrado (437): y así pasarémos á probar, que cuando una de ellas, tal como la RS (fig. 99) es tangente, se verifica la proposicion; porque en este caso tendrémos tirando la CH al punto de contacto, que será perpendicular á la RS (445), y por consiguiente á su paralela DE; luego (436 esc.) NH = HQ.

Suponiendo ahora que las dos sean tangentes, tales como las RHS, TZX, tirando por el punto C un diámetro HCZ que sea perpendicular á una de ellas, será tambien perpendicular á la otra, y por lo mismo los estremos de este diámetro se hallarán en los puntos de contacto H, Z; y como la semicircunferencia HPZ es igual á la HNMZ (346), queda demostrada la proposicion en todas sus partes.

447 Teor. *Si dos circunferencias* (fig. 100) *se encuentran en dos puntos A*, B, *la línea que pasa por sus centros será perpendicular á la cuerda AB que une los puntos de interseccion, y la dividirá en dos partes iguales.*

Dem. Porque si tiramos á los puntos de interseccion los radios CA, CB y DA, DB, tendrémos que por ser CA = CB, y DA = DB, la CD tiene dos puntos equidistantes de A y B, luego (377) será perpendicular á AB y la dividirá en dos partes iguales (436). L. Q. D. D.

448 Teor. *Si la distancia de los dos centros es menor que la suma de los rádios, y al mismo tiempo el radio mayor es menor que la suma del menor y de la distancia de los centros, los dos círculos se encontrarán.*

Dem. Porque siendo CD < AC + AD, y el radio mayor AD < AC + CD, se podrá formar el triángulo CAD ó el CBD (371 esc.); y por consiguiente los círculos se encontrarán en estos dos puntos.

Luego siempre que los dos círculos se encuentren en los puntos A y B, será posible el triángulo CAD, ó CBD.

449 Teor. *Si la distancia* CD (fig. 101) *de los centros de dos círculos es igual á la suma de sus radios* CA, AD, *estos dos circulos se tocarán esteriormente.*

Dem. En primer lugar, estos círculos tendrán un punto comun A, porque si el punto A, estremo del radio DA, no se hallase en el estremo A del radio CA, la CD sería mayor ó menor que la suma de los radios; que es contra el supuesto. En segundo lugar, no tendrán mas punto comun; porque si tuviesen dos, sería necesario que la distancia de los centros fuese mas pequeña (448) que la suma de los radios: luego *si la distancia &c.*

450 Teor. *Si la distancia* CD′ *de los centros de dos círculos es igual á la diferencia de sus rádios* CA, AD′, *estos dos círculos se tocarán interiormente.*

Dem. Puesto que CD′ (fig. 101) suponemos que es igual con CA — D′A, resultará que CA = CD′ + D′A; luego el punto A será comun á las dos circunferencias, las cuales no podrán tener otro punto comun, porque entónces sería necesario que el mayor radio fuese menor (448) que la suma del radio AC y de la distancia CD′ de los centros, lo que es contra el supuesto.

{*Cor.* Luego *si dos círculos se tocan, sea interior sea esteriormente, los centros y el punto de contacto estan sobre una línea recta.*

{*Esc.* 1.° Todos los círculos que tienen su centro sobre la recta CD y que pasan por el punto A, tendrán por tangente á la EA perpendicular en A á la DC, y por lo mismo se dice que estos círculos son tangentes los unos de los otros.

{*Esc.* 2.° Si se nos pidiese describir un círculo que tocase á otro AN en un punto dado A, y que pasase por otro punto tambien dado M, uniríamos A con M, y dividiendo la AM en dos partes iguales por medio de la DH, tendríamos que esta pasaría por el centro; y como la línea CA prolongada debe pasar tambien por dicho centro, se hallará este en el punto de concurso D, y haciendo centro en él con el radio DA, se tendrá el círculo que se pedía.}

De los ángulos considerados en el círculo.

451 Teor. *Si haciendo centro en el vértice de un ángulo con un radio cualquiera se traza un arco, y se concibe dividido en un número cualquiera de partes iguales, los ángulos en que quede dividido el ángulo total por los radios tirados desde su vértice á los puntos de division, serán iguales.*

Espl. Sea el ángulo COA (fig. 102): digo que si con un radio tal como AO, se traza un arco ABC, y se concibe dividido este arco en las partes iguales AB, BD &c, los ángulos AOB, BOD &c, formados por los radios tirados á los puntos de division B, D &c, serán iguales.

Dem. Concibiendo doblada la figura por el radio OB, se tendrá (346) que todos los puntos del arco AB caerán sobre el arco BDC: y por ser iguales los arcos AB, BD, el estremo A del primero, caerá sobre el estremo D del segundo; luego en este caso habiéndose confundido el punto A con el D, las líneas AO, OD que parten desde el mismo punto O, tambien se habrán confundido por tener dos puntos comunes; luego los ángulos tambien se confundirán y por lo mismo serán iguales. Como lo mismo se demostraría de los demas, resulta L. Q. D. D.

452 Teor. *Si desde los vértices* O, o *de dos ángulos* AOC, aoc (fig. 102) *se describen con un mismo radio dos arcos de círculo, la relacion de los arcos comprendidos entre los lados de cada ángulo, será la misma que la de estos ángulos.*

Espl. Aquí pueden ocurrir dos casos: ó que los dos arcos AC, *ac* tengan una comun medida ó que no la tengan, esto es que sean comensurables, ó que no lo sean.

Dem. 1.° Si los dos arcos AC y *ac* tienen por comun medida al arco AB = *ab*, colocando esta comun medida sobre cada uno de ellos tantas veces como se pueda, quedarán divididos ambos en partes iguales; y si representamos por *m* el número de partes iguales á AB que contiene el arco AC, y por *n* el número de partes iguales á AB que contiene *ac*, tendrémos

$$AC = m \times AB; \quad ac = n \times AB,$$

y formando proporcion, será AC: *ac* : : *m*×AB: *n*×AB : : *m* : *n*; ahora si por los puntos de division concebimos tirados los radios OB &c, *ob* &c, el ángulo AOC quedará dividido (451) en tantos ángulos iguales con AOB, como partes iguales á AB contenía el arco AC, esto es, en *m* ángulos iguales; y por la misma razon el ángulo *aoc* quedará dividido en *n* ángulos iguales á *aob*; y como los arcos AB, *ab* son iguales y tienen un mismo radio, si colocamos el centro del uno sobre el centro del otro, de manera que *oa* se confunda con OA, resultará que *ab* se confundirá con AB y *ob* con OB; luego los ángulos *aob*, AOB serán iguales, y tendrémos AOC = *m*×AOB, *aoc* = *n* ×*aob* = *n*×AOB, y formando proporcion, será AOC : *aoc* : : *m*×AOB : *n*×AOB : : *m* : *n*; y como esta proporcion y la anterior, tienen comun la razon *m*: *n*, con las otras podrémos formar proporcion y resultará AC : *ac* : : AOC: *aoc*. Luego la relacion de los arcos es la misma que la de los ángulos en el caso de ser comensurables los arcos.

{2.° Si los arcos AC, *ac* son incomensurables, quedará demostrado que la relacion de dichos arcos es igual con la de los ángulos, demostrando que no puede ser mayor ni menor.

{Si suponemos (fig. 103) que la relacion de los ángulos es menor que la de los arcos, se tendrá AOC : *aoc* < AC : *ac*; y para que esta segunda razon sea igual con la primera, se necesitará que su consecuente *ac* crezca y se convierta, por ejemplo, en *ad*; lo que dará AOC : *aoc* : : AC : *ad*.

{En este caso, concibiendo dividido el arco AC en dos partes iguales, y luego en otras dos, y así sucesivamente, se llegará á concebir un arco (325) menor que *cd*, y por consiguiente se podrá colocar sobre el *acd*, de modo que uno de los puntos de division caiga entre *c* y *d*, por ejemplo en *e*, con lo cual los ángulos AOC y *aoe* guardarán la misma relacion que los arcos comensurables AC, *ae*, y se tendrá esta proporcion AOC : *aoe* : : AC : *ae*, que como tiene los mismos antecedentes que la primera, podrémos formar proporcion con los consecuentes, y será

$$aoc : aoe : : ad : ae;$$

pero esto es un absurdo, porque *aoc* siendo menor que *aoe*, la primera razon es de menor desigualdad, y *ad* siendo mayor que *ae*, la segunda es de mayor desigualdad, y jamas pueden ser iguales dos razones de esta especie; luego el supuesto que hemos hecho tambien es un absurdo, luego la relacion de los ángulos no se puede suponer menor que la de los arcos.

{Tampoco se puede suponer mayor; porque siendo AOC : *aoc* > AC : *ac* se necesitará que el consecuente de esta última disminuya y se convierta, por ejemplo en *ad'* para ser igual con la primera, lo que daria AOC : *aoc* : : AC : *ad'*; y concibiendo dividido como antes el arco AC en partes bastante pequeñas para que colocada una sobre el arco *ac* las veces que se necesite, caiga un punto de division entre *c* y *d'* como en *e'*, se tendrá AOC : *aoe'* : : AC : *ae'*, que como tiene los mismos antecedentes que la del supuesto, los consecuentes nos darán esta proporcion

$$aoc : aoe' : : ad' : ae',$$

que es un absurdo, pues una razon es de mayor desigualdad y la otra de menor; luego el supuesto que nos ha conducido á él será tambien absurdo. Luego si la razon de los ángulos no puede ser menor ni mayor que la de los arcos, deberá ser igual.}

Esc. 1.° Para medir los ángulos se debe elegir por unidad otro ángulo, cuyo valor absoluto esté bien determinado; y como este es el ángulo recto, que es el que forma una línea que cae sobre otra sin inclinarse mas hácia un lado que hácia otro, este se debe elegir; pero en este caso todos los ángulos agudos serian fracciones del ángulo recto, y los obtusos estarian representados por números fraccionarios, lo que haria muy fastidioso el lenguage y complicado el cálculo. Para evitar esto, como se acaba de demostrar que la relacion de los ángulos es la misma que la de los arcos, se dice que *la medida de los ángulos es el arco de círculo comprendido entre sus lados y descrito desde su vértice como centro*; y así, como cuatro ángulos rectos comprenden toda la circunferencia, el ángulo recto abraza un cuadrante de circunferencia; pero considerándose esta dividida en 360 partes, que se llaman *grados*, corresponden 90 al cuadrante, de manera que cuando se dice un ángulo de un grado, de dos &c., se da á entender que dicho ángulo es $\frac{1}{90}$ ó $\frac{2}{90}$ del ángulo recto, ó que dicho ángulo tiene con el recto, que es el que se toma por unidad, la misma relacion que el arco de uno ó de dos grados tiene con el cuadrante que consta de 90.

Esc. 2.° Los antiguos consideraron dividida la circunferencia en 360 *grados*; cada grado en 60 partes iguales que se llaman *minutos*; cada minuto en 60 partes iguales que se llaman *segundos*; cada segundo en 60 *terceros*, y así sucesivamente. Los grados se señalan con una *o* sobre el número, los minutos con un acento, los segundos con dos &c., de manera que la espresion $57^{\circ}17'44''22'''$ quiere decir 57 grados, 17 minutos, 44 segundos y 22 terceros.

{Los Franceses han considerado modernamente dividida la circunferencia en 400 partes, y por esta causa nosotros llamarémos de aquí en adelante 2π á la circunferencia, y π á la semicircunferencia, para que se pueda aplicar todo lo que digamos, tanto á la division de la circunferencia en 360 partes, como á la de en 400. Como dos ángulos rectos abrazan la semicircunferencia hemos señalado el ángulo recto con $\frac{1}{2}\pi$.}

453 *Esc.* 3.° Siempre que se dice que un arco es la medida de un ángulo, se entiende un arco trazado desde el vértice como centro. Pero en muchas ocasiones, cuando se halla un ángulo en un círculo, conviene referir la medida de dicho ángulo á aquel círculo; y por eso vamos á manifestar ahora cual es la medida de los ángulos, segun se halle el vértice en la circunferencia, dentro del círculo, ó fuera de él.

Teor. *El ángulo formado por una tangente y una cuerda, tiene por medida la mitad del arco que la cuerda subtende.*

Espl. Sea el ángulo ETA (fig. 104) formado por la cuerda AT y la tangente ETM: voy á demostrar que tiene por medida la mitad FT del arco TFA que la cuerda AT subtende.

Constr. Tírese por el centro C el diámetro HCF perpendicular á la cuerda AT, el BCD paralelo á la misma cuerda, y únase el centro C con el punto de contacto T.

Dem. Por ser FH perpendicular á AT por construccion, lo será tambien á BD que es paralela á AT (383*a*), luego el ángulo FCD es recto. Y por ser toda tangente perpendicular al radio (445) que termina en el punto de contacto, el ángulo ETC tambien es recto: y como todos los ángulos rectos son iguales, será FCD=ETC; ahora, el ángulo TCD = al ATC por alternos internos entre las paralelas AT, BD siendo CT la secante; luego si restamos esta segunda ecuacion de la primera, se tendrá

$$FCD - TCD = ETC - ATC, \text{ ó } FCT = ETA;$$

pero FCT por tener su vértice en el centro del círculo, tiene por medida al arco FT que sus dos lados abrazan, luego el ángulo ETA que es su igual, tendrá tambien por medida al arco FT, pero FT es la mitad de TFA (436 esc.), y TFA es el arco que la cuerda AT subtende, luego *el ángulo formado &c.*

Esc. Como entre los dos ángulos ETA, ATM han de valer dos rectos ó la semicircunferencia, el valor del ángulo ATM, será lo que le falte á la mitad de AFT para valer la semicircunferencia; pero á la mitad de AFT, le falta para valer la semicircunferencia, la mitad de todo el arco ABHDT; luego el ángulo ATM tiene por medida la mitad del arco ABHDT; pero este es el mayor que la cuerda AT subtende, luego ya se considere el arco mayor ó el menor que la cuerda subtende, se verifica la proposicion.

454 Teor. *El ángulo cuyo vértice está en la circunferencia, formado por el concurso de dos cuerdas, tiene por medida la mitad del arco que abrazan sus dos lados.*

Espl. Sea el ángulo DTE (fig. 105), cuyo vértice T está en la circunferencia, formado por las dos cuerdas TE, TD: voy á demostrar que tiene por medida la mitad del arco ED que sus dos lados abrazan.

Dem. Porque si concebimos en T la tangente ATB, los tres ángulos ATD, DTE, ETB valdrán juntos la mitad de la circunferencia TEDM; pero el ATD tiene por medida (esc. ant.) la mitad de TMD, el BTE la mitad de TE, luego el DTE, tendrá por medida la mitad de DE, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí se deduce que si unimos los puntos D y E, con el centro C, como el ángulo DCE tiene por medida á todo el arco DE y DTE á su mitad, será DCE = 2DTE: al ángulo DCE, por tener su vértice en el centro se le llama ángulo *central*, y al DTE, por tener su vértice en la circunferencia se le llama *ángulo inscrito*, por lo que tenemos demostrado que el ángulo *central es duplo del ángulo inscrito.*

Cor. 2.° *Todos los ángulos* BAE, BCE, BDE (fig. 106), *que tienen sus vértices en la circunferencia, é insisten sobre un mismo arco* BE, *son iguales*; porque todos tienen una misma medida, á saber, la mitad del arco BE sobre que insisten sus lados.

Cor. 3.° *Todo ángulo* ACB (fig. 107), *cuyo vértice está en la circunferencia, y cuyos lados pasan por los estremos de un diámetro* AB, *es recto*; porque tiene por medida la mitad del arco AMB: y como este es una semicircunferencia, su mitad valdrá un cuadrante.

Cor. 4.° *Todo ángulo* ACD *cuyo vértice esté en la circunferencia y abrace un arco mayor que la semicircunferencia, será obtuso*; porque la mitad de este arco será mayor que un cuadrante; *y todo ángulo tal como* ACE, *cuyo vértice esté en la circunferencia y sus lados abracen un arco menor que la semicircunferencia, es agudo*; porque su mitad será menor que un cuadrante.

{455 Teor. *Un ángulo, cuyo vértice está en la circunferencia de un círculo, formado por una cuerda, y la prolongacion de otra, tiene por medida la semisuma de los arcos que las dos cuerdas subtenden.*

{*Espl.* Sea el ángulo EFB (fig. 108), formado por la cuerda FB, y la prolongacion FE de la cuerda FH: voy á demostrar que tiene por medida $\frac{BCF+FNH}{2}$

{*Dem.* Los dos ángulos juntos EFB, BFH tienen por medida la mitad de toda la circunferencia FCBDHN; y como BFH tiene por medida la mitad de BDH, el EFB tendrá por medida la mitad de lo que queda, esto es, la mitad de HNFCB, ó de HNF + FCB.

{456 Teor. *El ángulo cuyo vértice esté dentro del círculo pero no en el centro, tiene por medida la mitad de la suma de los arcos que sus dos lados prolongados abrazan.*

{*Espl.* Sea el ángulo BAD (fig. 109) cuyo vértice A está dentro del círculo BCFD, pero no en el centro: voy á demostrar que tiene por medida $\frac{BD+CF}{2}$

{*Dem.* Por el punto F en que uno de los lados BA prolongado, encuentra á la circunferencia, tírese la FH paralela al otro lado DA, y tendrémos que el ángulo BAD = BFH por correspondientes entre las paralelas DA, EH siendo BF la secante; pero BFH tiene por medida la mitad del arco BDH, luego el BAD tendrá esta misma medida: y como BDH = BD + DH = BD + CF, porque DH = CF por arcos de círculo interceptados entre paralelas resulta que la medida de BAD, será la mitad de BD + CF ó $\frac{BD+CF}{2}$, que era L. Q. D. D.

{457 Teor. *El ángulo cuyo vértice está fuera del círculo, y termina con sus estremos en la parte cóncava de la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco cóncavo que sus dos lados abrazan, menos la mitad del arco convexo.*

{*Espl.* Sea el ángulo BAC (fig. 110): voy á demostrar que su medida es $\frac{BC}{2}-\frac{ND}{2}$ ó $\frac{BC-ND}{2}$.

{*Dem.* Por el punto en que uno de los lados del ángulo, tal como AB, encuentra á la parte convexa de la circunferencia, tírese la MN paralela al otro lado AC, y será el ángulo BNM = BAC (386*a*, 3.°); pero la medida de BNM es (§454)

$$\frac{BM}{2}=\frac{BC-MC}{2}=(\S\ 437)\frac{BC-ND}{2}=\frac{BC}{2}-\frac{ND}{2};$$

luego está será tambien la medida del ángulo BAC.

{*Esc.* Cuando uno de los lados ó ámbos son tangentes del círculo, se verifica del mismo modo la proposicion; porque tirando por T la TE (fig. 111), paralela al otro lado, será BTE $=$ BAC (386*d*, 3.°); pero BTE tiene por medida la mitad del arco TE ó $\frac{\text{TE}}{2} =$ (fig. 1.ª) $\frac{\text{TEC}-\text{EC}}{2} =$ (§ 437) $\frac{\text{TEC}-\text{TD}}{2}$; y en la (fig. 2.ª) $\frac{\text{TE}}{2} = \frac{\text{TED}-\text{ED}}{2} =$ (§446) $\frac{\text{TED}-\text{TD}}{2}$. Ahora, como el arco TED, es igual con toda la circunferencia menos TD, se tendrá que

$$\text{BAC} = \frac{2\pi-\text{TD}-\text{TD}}{2} = \frac{2\pi-2\text{TD}}{2} = \pi-\text{TD}.\}$$

458 Fundados en lo que acabamos de demostrar, tenemos medios para resolver los tres problemas siguientes.

Probl. 1.° *Al estremo B de una línea AB* (fig. 112), *que no se puede prolongar, levantarle una perpendicular.*

Res. Haciendo centro en un punto cualquiera C del plano donde se halla dicha línea, trácese una circunferencia de círculo que pase por B y que ademas corte en otro punto cualquiera A á dicha línea. Por este punto y el centro tírese el diámetro AD, únase el estremo D de dicho diámetro con el B de la línea dada por medio de la BD, y esta será la perpendicular pedida.

Dem. Porque el ángulo ABD, teniendo su vértice en la circunferencia, y pasando por los estremos de un diámetro, es recto (454 cor. 3.°), y por lo mismo la BD será perpendicular á la AB, que era L. Q. D. H. y D.

Probl. 2.° *Dado un punto fuera de un círculo, tirarle una ó dos tangentes.*

Res. Unase dicho punto con el centro del círculo por medio de la AC (fig. 113), y sobre esta línea como diámetro trácese una circunferencia; desde el punto dado tírense á los puntos de interseccion D, B, las líneas AD, AB las cuales serán las tangentes pedidas.

Dem. Porque tirando los radios CD, CB, los ángulos ADC, ABC que tienen su vértice en la circunferencia del círculo ADB, y cuyos lados pasan por los estremos del diámetro AC, serán rectos (454 cor. 3.°) y por lo mismo la AD será perpendicular á DC, y la AB á BC; y como DC, BC son rádios del círculo dado DEB, resulta que las AD, AB perpendiculares á estos radios, son tangentes de dicho círculo. L. Q. D. H. y D.

{*Cor.* De aquí resulta que las AD y AB son iguales: pues los triángulos ADC, ABC son iguales (376 cor. 2.°) por ser rectángulos, tener la hipotenusa AC comun y los catetos DC, BC iguales por radios del círculo DEB.

{Probl. 3.° *Sobre una línea dada trazar un arco de círculo capaz de medir un ángulo dado.*

{*Espl.* Sea dada la recta BD (fig. 114), y el ángulo *qrs*; lo que se nos pide es que tracemos un círculo que tenga por cuerda á la BD; pero tal que todos los ángulos, cuyos vértices estén en la circunferencia de este círculo, y cuyos lados pasen por los estremos de dicha línea BD, sean iguales con el propuesto *qrs*.

{*Res.* En el punto B de la BD, fórmese un ángulo FBD igual con el propuesto *qrs*; en el punto B levántese una línea BC perpendicular á BF; divídase la BD en dos partes iguales por medio de la perpendicular CI; haciendo centro en C y con un radio igual á CB, trazarémos un circulo que tendrá la circunstancia pedida, á saber, de que todo ángulo tal como BAD, cuyo vértice esté en la circunferencia, y sus estremos pasen por B y D, serán iguales con el *qrs*.

{*Dem.* Por ser el radio BC perpendicular á BF, esta línea es tangente del círculo, por lo que el ángulo FBD tendrá por medida (453), la mitad del arco BID; el BAD tambien tiene por medida (454), la mitad de dicho arco, luego FBD $=$ BAD; pero FBD, es igual por construccion con *qrs*, luego BAD $=$ *qrs*. L. Q. D. H. y D.

{Terminarémos este punto manifestando que *para conocer cual de dos ángulos que insisten sobre una misma línea, es mayor, se circunscribirá un círculo á uno de los dos, y si el otro cae fuera de la circunferencia de este círculo, será menor que él; si cae en la circunferencia, serán iguales; y se cae dentro, este será mayor.*

{En efecto, si despues de circunscrito el círculo, los ángulos estan representados por ABC, ADC (fig. 115), el ABC tendrá por medida la mitad de AFC, y el ADC la mitad de AFC ménos la mitad de MN; luego ADC será menor que ABC. Si estuviesen ambos representados por A′GC′, A′B′C′ serán iguales, por tener ambos por medida la mitad de A′F′C′; y si lo estuviesen por A″B″C″, A″HC″, el primero tendrá por medida la mitad de A″F″C″, y el segundo la mitad de A″F″C″, mas la mitad de M′N′; luego el A″HC″ será mayor que el A″B″C″.

{Si el un ángulo está sobre la línea, y el otro debajo, como los ABC, AEC, se le circunscribirá á cada uno un círculo, y si los radios de éstos son iguales, lo serán los ángulos; si son desiguales, aquel ángulo será mayor que esté inscrito en el de menor radio.}

De las figuras en general, y propiedades de los cuadriláteros.

459 Se llama en general *figura* á un espacio cerrado ó terminado por líneas.

En la idea de figura entran estas dos: la del espacio cerrado, y la de las líneas que le cierran. Al conjunto de líneas que cierran el espacio, se le dá el nombre de *ámbito, contorno ó perímetro*, y al espacio que abrazan *area ó superficie.*

Como hemos dicho (338) que las superficies pueden ser planas, curvas y mistas, resulta que las figuras con relacion á sus superficies pueden ser de estas tres maneras. Las líneas tambien pueden ser rectas y curvas, y por lo mismo á las figuras que estan terminadas por rectas, las llamarémos *rectilíneas*, cuando por una ó muchas curvas *curvilíneas*, y á las que por líneas rectas y curvas *mistilíneas.* Los principiantes suelen confundir la superficie curva con la curvilínea; y por lo mismo les advertirémos que una superficie plana puede ser curvilínea como lo es el círculo, y mistilínea como el semicírculo.

Cuando dos figuras tienen sus perímetros de igual estension, se llaman figuras *isoperímetras*; cuando sus superficies son iguales, se dice que las figuras son *equivalentes* (*); y cuando ademas de tener sus superficies iguales, tienen iguales sus perímetros, sus ángulos, y en general todas las partes que se hallen colocadas de un mismo modo, á las que se da el nombre de *homólogas*; se dice que son *iguales.*

Se dice de una figura que está *inscrita* en un círculo ó de un círculo que está *circunscrito* á una figura, cuando todos sus ángulos están en la circunferencia de dicho círculo, tal es la ABDC (fig. 116).

Cuando una figura es tal que todos los lados de su perímetro son tangentes de un círculo, se dice que la figura está *circunscrita* al círculo, ó que el círculo está *inscrito* en la figura; tal es la ABCDE (fig. 117).

(*) *Antes se decia simplemente que eran* iguales *dos figuras cuando sus superficies solo eran iguales, y que eran* totalmente iguales *cuando todo lo tenian igual. Legendre* y *Lacroix, para evitar confusion, dieron el nombre de* equivalentes *á las primeras, y el de* iguales *á las segundas; y pareciéndonos arregladas estas denominaciones, las usarémos en el mismo sentido que estos Geómetras.*

En general se llama *base* de una figura el lado sobre que se considera insistiendo: *altura* la perpendicular bajada á la base desde el punto de la figura que dista mas de la base; y se llama *diagonal* toda línea, que desde un ángulo de una figura, va á parar á otro que no sea su inmediato.

De las nociones que acabamos de dar, y de lo demostrado (§§ 373, 374) se deduce *que el perímetro de una figura inscrita en una curva cualquiera es menor que la misma curva; que de dos figuras inscritas en una misma curva, la que tenga mayor número de lados tiene mayor perímetro; que el perímetro de toda figura circunscrita á una curva es mayor que la misma curva; y que de dos ó mas figuras circunscritas á una misma curva, la que tenga mayor número de lados es la que tiene menor perímetro*; pues como aquí llamamos *perímetro* á lo que en los párrafos citados llamábamos *conjuntos de líneas*, todo lo que demostramos respecto de dichos conjuntos de líneas, se verificará respecto de los perímetros.

460 La figura mas sencilla de todas es el triángulo, y por lo mismo es la que primero debe llamar nuestra atencion; por esta causa nos hemos visto precisados á manifestar sus principales propiedades ante todas cosas, y ahora pasarémos á resolver los dos problemas siguientes.

{Probl. 1.° *Dado un triángulo circunscribirle un círculo.*

{*Res.* Divídanse dos cualesquiera de sus lados tales como AB, AC (fig. 118), en dos partes iguales por medio de las perpendiculares MO, NO, y haciendo centro en el punto de interseccion O, con un radio OA, OB, ú OC trácese un círculo, el cual estará circunscrito al triángulo.

{*Dem.* Porque la circunferencia de este círculo pasará por los tres ángulos A, B, C (§ 438), y por lo mismo estará circunscrito.

{Probl. 2.° *Dado un triángulo* ABC (fig. 119), *inscribirle un círculo.*

{*Res.* Divídanse dos de sus ángulos tales como A y B, en dos partes iguales por medio de las líneas AO y BO (363 probl. 2.°); desde el punto de interseccion, bájense perpendiculares á los lados de los triángulos y haciendo centro en O, con un radio igual á cualquiera de ellas, trácese un círculo, el cual estará inscrito en el triángulo propuesto.

{*Dem.* Quedará probada la proposicion, si demostramos que DO = OF = OE; pues entónces siendo estas líneas radios y perpendiculares á los lados del triángulo, estos serán tangentes del círculo, y por lo mismo este se hallará inscrito en el triángulo. En efecto, como por construccion el ángulo DAO = OAF, y los en D y en F son rectos, resulta que el tercer ángulo AOF del triángulo AOF, será igual al tercero AOD del DAO; y como estos triángulos ademas de tener todos sus ángulos iguales tienen un lado comun AO, resulta que serán (361) iguales, y darán DO = OF. Por la misma razon serán iguales los triángulos BDO, BOE, y darán DO = EO; luego OF = DO = OE.}

461 Cuando una figura está terminada por cuatro líneas, se llama en general *cuadrilátero*. Si estas cuatro líneas estan de tal modo dispuestas que ninguna de ellas sea paralela á otra, la figura se llama *trapezoide*, tal es la ABCD (fig. 120). Cuando dos son paralelas entre sí, tales como AD, BC (fig. 121), se llama *trapecio* (*); y finalmente se llama *paralelogramo* cuando las cuatro líneas son paralelas de dos en dos.

Esc. Hay cuatro especies de *paralelogramos*, á saber, 1.° cuando los ángulos A y D (fig. 122), adyacentes á un mismo lado AD, y los lados AB, AD adyacentes á un mismo ángulo son desiguales, el paralelogramo se llama *romboide*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son desiguales, é iguales los lados adyacentes á un mismo ángulo, como el ABCD (fig. 123), se llama *rombo*; cuando los ángulos adyacentes á un mismo lado son iguales, y los lados adyacentes á un mismo ángulo desiguales, como en la (fig. 124), se llama *rectángulo* (algunos le llaman *cuadrilongo*); y finalmente cuando los lados contiguos á un mismo ángulo son iguales, y los ángulos contiguos ó adyacentes á un mismo lado tambien son iguales como el ABCD (fig. 125), recibe el nombre de *cuadrado*.

Se llama *base* de un paralelogramo el lado sobre que se considera insistiendo, y la perpendicular bajada á la base ó á su prolongacion desde el lado opuesto, se llama *altura*; y así BE es la altura de los paralelogramos ABCD, ABCD (figs. 122, 123), cuando se considera por base el lado AD. En un trapecio se llama altura á la perpendicular tirada desde uno de los lados paralelos al otro. En un trapezoide no ocurren casos en que nombrar la altura; pero si ocurriese, se podría decir que era la perpendicular tirada á la base desde el ángulo opuesto mas distante; finalmente se llama *diagonal* de un cuadrilátero á una línea que va desde un ángulo á su opuesto, tal es la AC (figs. 120, 121, 122).

462 Teor. *Los cuatro ángulos juntos de un cuadrilátero valen* 2π *ó cuatro ángulos rectos.*

Dem. Porque tirando la diagonal AC (figs. 120, 121, 126), quedará dividido en dos triángulos, cuyos ángulos compondrán lo mismo que los del cuadrilátero; y como los ángulos de cada triángulo valen dos rectos ó π, los del cuadrilátero que se compone de los de los dos triángulos, equivaldrán á cuatro rectos ó á 2π.

{*Cor.* De aquí se deduce que *si tres de los ángulos de un cuadrilátero fuesen rectos, el cuarto tambien lo sería*; y que *si la suma de dos equivaliese á dos rectos, la suma de los otros dos equivaldría tambien á dos ángulos rectos.*}

463 Teor. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales y paralelos, los otros dos tambien serán iguales y paralelos, y por lo mismo la figura será un paralelogramo.*

Espl. Si los dos lados AB, CD del cuadrilátero ABCD (fig. 126), son iguales y paralelos, vamos á demostrar que los otros dos lados AD, BC tambien serán iguales y paralelos, y que la figura no será un simple cuadrilátero, sino un paralelogramo.

Dem. Si tiramos la diagonal AC, tendrémos dos triángulos BAC, DAC, en los que se verificará que $AB = CD$ por el supuesto; el lado CA, es comun para ambos triángulos, y el ángulo $m = n$ por alternos internos entre las paralelas AB, CD, siendo la secante AC; luego dichos triángulos son iguales (360); luego $AD = BC$, y el ángulo $p = q$; pero estos son alternos internos entre dos líneas AD, BC cortadas por otra AC, luego dichas líneas serán (384) paralelas, y por lo mismo la figura será un paralelogramo. L. Q. D. D.

464 Teor. *Si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero será un paralelogramo.*

Espl. Si en el cuadrilátero ABCD (fig. 126), se supone que $AD = BC$, y $BA = CD$; vamos á probar que AD será paralela á BC, y BA á CD, y por lo mismo la figura será un paralelogramo.

Dem. Porque tirando la diagonal AC, los triángulos ABC, ADC, serán iguales, por tener los tres lados iguales; luego el ángulo $m = n$, y $p = q$; la primera de estas circunstancias da, en virtud de lo espuesto (384), que CD es paralela á B A, y la segunda que AD lo es á B C; luego la figura es un paralelogramo. L. Q. D. D.

{*Cor.* De aquí resulta un medio muy espedito para tirar una paralela á una recta dada por un punto tambien dado.

{Sea AB (fig. 120*) la recta dada y C el punto por donde se le quiere tirar la paralela. Haciendo centro en un punto cualquiera D de la AB y con un radio igual con DC trácese el arco CmE hasta que encuentre á la AB. Haciendo centro en C con el mismo radio se trazará el arco indefinido Dnr; se tomará la cuerda CE, y haciendo centro en D, se señalará el arco sb; por el punto dado C y el punto de concurso q de estos arcos se tirará la Cq, la cual será paralela á la AB: pues que por la construccion hecha $DE = Cq$ y la cuerda $CE =$ á la Dq; luego el cuadrilátero CEDq será un pa-

(*) *Develey dice que á los trapecios se les podrá llamar paralelogramos truncados ó triángulos truncados.*

Mr. Leslie llama trapezoide *al cuadrilátero que tiene dos lados paralelos*; *y* trapecio *al que tiene dos de sus lados paralelos, y los otros dos son iguales aunque no paralelos.*

Con este motivo, dirémos que Leslie, Legendre y Cresswell critican con mucho fundamento las definiciones que se dan en los libros de Geometría á las diversas especies de cuadriláteros; y me cabe la mayor satisfaccion en ver que las que yo doy, y he dado desde luego en todas mis obras, estan esentas de cuantos defectos espresan dichos autores.

ralelogramo y por consiguiente Cq paralela á BA.}

465 Teor. *Si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son iguales, la figura es un paralelogramo.*

Espl. Supongamos que los ángulos $A = C$ y $B = D$ en el cuadrilátero ABCD (fig. 126): voy á demostrar que AD es paralela á BC, y CD á BA.

Dem. Por valer cuatro ángulos rectos ó 2π los cuatro ángulos de un cuadrilátero (462), se tendrá $A + B + C + D = 2\pi$; y como A y C son iguales por el supuesto, y B y D tambien, esta ecuacion se convertirá en $2A + 2B = 2\pi$, ó en $2A + 2D = 2\pi$; que dividiéndolas por 2, quedan en $A + B = \pi$, y $A + D = \pi$; la primera de estas ecuaciones nos dice (386), que AD y BC son paralelas; y la segunda nos dice que AB y DC lo son; luego la figura es un paralelogramo. L. Q. D. D.

466 Teor. *La diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.*

Espl. En los teoremas antecedentes hemos deducido que la figura ABCD era un paralelogramo, de ser los triángulos ABC, ACD (fig. 126) iguales; ahora, de suponerse que la figura es un paralelogramo, esto es, que AB es paralela á CD, y que BC lo es á AD, vamos á deducir que los triángulos BAC y DAC son iguales.

Dem. En efecto, el ángulo $m = n$ por alternos internos entre las paralelas BA, CD, siendo AC la secante; el ángulo $p = q$ por la misma razon entre las paralelas BC, AD siendo AC la secante: y como AC es comun para los dos triángulos BAC, DAC, resulta que tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales; luego son iguales, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí se deduce que *en todo paralelogramo son iguales los lados y ángulos opuestos*; porque tirando la diagonal AC, los triángulos BAC, DAC serán iguales y darán 1.° $BC = AD$; $AB = CD$; 2.° el ángulo $B = D$, y como $m = n$ y $p = q$, si sumamos tendrémos $m + p = n + q$; pero $m + p$ componen el ángulo total en A, y $n + q$ el total en C, luego estos serán iguales.

Cor. 2.° Tambien se deduce que *dos ángulos A, D contiguos á un mismo lado de un paralelogramo son el uno suplemento del otro*; pues ambos son internos á un mismo lado de la secante AD, entre las paralelas BA, CD.

Cor. 3.° Tambien resulta que *si uno de los ángulos es recto, lo son todos.* Porque si A (fig. 125), es recto, su suplemento D lo será tambien; y los C y B opuestos á estos, tambien serán rectos.

Cor. 4.° *Si dos lados contiguos de un paralelogramo son iguales, lo son todos los demas.* Porque si se tiene $AD = BA$ (fig. 123), como ha de ser $AD = BC$ y $BA = CD$, resultará que $AD = BA = BC = CD$.

467 Teor. *Las partes de paralelas interceptadas entre paralelas son iguales.*

Dem. Porque si AD (fig. 127), es paralela á BC y AB á DC, la figura ABCD es un paralelogramo, que por tener los lados opuestos iguales, da $AD = CB$ y $AB = DC$, que era L. Q. D. D.

468 Teor. *Las dos diagonales AC, BD (fig. 124), de un paralelogramo se dividen mútuamente en dos partes iguales.*

Dem. Porque los triángulos BAO, DOC son iguales, porque tienen $AB = CD$, y los ángulos $OAB = OCD$, $ABO = ODC$ por alternos internos entre las paralelas AB, CD, siendo AC secante respecto de los primeros, y BD respecto de los segundos; luego $AO = OC$ y $BO = OD$. L. Q. D. D.

{*Esc.* 1.° Si el paralelogramo es rectángulo, se verificará ademas que las diagonales serán iguales; porque entónces los triángulos ADC, BAD son iguales (360); pues los ángulos BAD, ADC son rectos, $BA = DC$, y AD es comun; luego $BD = AC$.

{*Esc.* 2.° *Un paralelogramo queda determinado cuando se dan dos lados contiguos y el ángulo que forman.* Porque los otros dos lados han de ser iguales con estos respectivamente, y los otros dos ángulos han de ser, los contiguos al propuesto, suplementos de él, y el otro opuesto igual con él. Por ésta causa, para formar un paralelogramo determinado, se han de dar estos datos; y así, si suponemos que *se nos pida un paralelogramo en que uno de los ángulos sea igual con el* a (fig. 128), *y los lados que lo forman iguales con las líneas* K, L, formarémos un ángulo DAB igual con el propuesto; en uno de los lados, tomarémos una parte $AB = K$, y en el otro una parte $AD = L$; por B tirarémos una paralela á AD, y por D una paralela á AB, y quedará formado el paralelogramo ABCD.

{De donde se deduce que todos los paralelogramos que convengan en tener estos mismos datos, esto es, dos lados iguales é igual el ángulo comprendido serán iguales, y se podrán superponer de manera que se confundan ó ajusten exactamente.}

De los Polígonos.

469 Cuando una figura está terminada por mas de cuatro líneas, se llama en general *polígono*; si está terminada por cinco lados, se llama *pentágono*; si por 6, *exágono*; si por 7, *eptágono*; si por 8, *octógono*; si por 9, *eneágono*; si por 10, *decágono*; si por 11, *endecágono*; si por 12, *dodecágono*. Cuando ocurre nombrar un polígono de mas lados, se hace espresando el número de lados, de manera que se dice polígono de 16, de 20, de 30, de 100, &c. lados.

Se dice que un polígono es *regular* cuando tiene iguales todos sus ángulos y todos sus lados, tal es el ABDEF (fig. 129); y es *irregular* cuando le falta alguna de estas circunstancias, como el ABCDEFA (fig. 130).

Se llama *ángulo saliente* de un polígono, aquel cuyo vértice mira hácia fuera de la figura, como todos los de la 129; y *ángulo entrante* aquel cuyo vértice mira hácia dentro de la figura, tal es el ángulo D de la 130.

Cuando el polígono es regular hay un punto dentro, tal que todas las líneas que desde él se tiran á los ángulos, son iguales: este punto se llama el *centro* del polígono, y las líneas tiradas *radios oblicuos*; y se llaman *radios rectos* ó *apotemas* las perpendiculares tiradas desde el centro á los lados: y en un polígono se llama *sagita* á la diferencia entre el radio oblicuo y el radio recto.

470 Teor. *La suma de todos los ángulos interiores de un polígono vale tantas veces dos ángulos rectos, como lados tiene el polígono menos dos.*

Dem. Porque si desde uno de los ángulos A (fig. 130) tiramos diagonales á los demas ángulos, como á los inmediatos no se puede tirar diagonal por confundirse con los lados contiguos AB, AF, quedará dividido el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos; pero los ángulos de todos estos triángulos componen juntos los del polígono; luego los ángulos del polígono valen tanto como los de los triángulos; y como los de cada triángulo valen dos rectos, se deduce que la suma de todos los ángulos de un polígono vale tantas veces dos rectos como lados tiene el polígono menos dos. L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego si llamamos π á la semicircunferencia ó á dos ángulos rectos, y n al número de lados, tendrémos que $(n-2)\pi$ será la espresion del valor de todos los ángulos de un polígono.

Cor. 2.° Como en el polígono regular todos los ángulos son iguales, y hay tantos ángulos como lados, se deduce que *para hallar el valor del ángulo de un polígono regular, se dividirá el valor de todos los ángulos que es* $(n-2)\pi$, *siendo* n *el número de lados, por* n *que es tambien el número de ángulos*; luego tendrémos:

$$\text{Ángulo de polígono regular} = \frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Cor 3.° Si en un polígono regular se prolongan los lados, *el ángulo esterno que forman, tal como* DBM (fig. 129) *será suplemento del ángulo del polígono* ABD, y se tendrá en general.

$$\text{Áng. estern. de políg. reg.} = \pi - \pi\frac{(n-2)}{n} = \frac{n\pi - n\pi + 2\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

Esc. La fórmula del corolario 2.° nos da á conocer que *el ángulo de un polígono regular siempre es menor que* π; porque π se ha de multiplicar por el quebrado $\frac{n-2}{n}$ que siempre es menor que la unidad. Conviene tener en la memoria los valores de algunos de los ángulos de los polígonos, y así deducirémos algunos resultados.

Supongamos primero que el polígono regular sea el triángulo que para ser regular, deberá ser equilátero: y tendrémos, que sustituyendo 3 en vez de n y en vez de π su valor 180° en nuestra division de la circunferencia, se tendrá:

$$\text{Ángulo de triángulo equilátero} = \frac{180^\circ \times (3-2)}{3} = \frac{180^\circ \times 1}{3} = 60^\circ.$$

$$\text{Ángulo esterno de triángulo equilátero} = \frac{2 \times 180^\circ}{3} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ.$$

Sustituyendo 4 en vez de n, tendrémos

$$\text{Ángulo de cuadrado} = \frac{180^\circ \times (4-2)}{4} = \frac{180^\circ \times 2}{4} = 90^\circ.$$

$$\text{Ángulo ester. de cuadrado} = \frac{2 \times 180^\circ}{4} = 90^\circ.$$

Sustituyendo 5 en vez de n, tendrémos

$$\text{Ángulo de pentág. reg.} = \frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = \frac{180^\circ \times 3}{5} = 108^\circ.$$

$$\text{Ángulo estern. de pent. reg.} = \frac{2 \times 180^\circ}{5} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Sustituyendo 6 en vez de n, tendrémos

$$\text{Ángulo de exag. reg.} = \frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = \frac{180^\circ \times 4}{6} = 120^\circ.$$

$$\text{Ángulo ester. de exág. reg.} = \frac{2 \times 180^\circ}{6} = 60^\circ.$$

Sustituyendo 20 en vez de n, tendrémos

$$\text{Ángulo de políg. reg. de 20 lados} = \frac{180^\circ \times (20-2)}{20} = \frac{180^\circ \times 18}{20} = 162^\circ.$$

$$\text{Ángulo ester. de políg. reg. de 20 lados} = \frac{2 \times 180^\circ}{26} = 18^\circ.$$

471 Teor. *Si se dividen los ángulos de un polígono regular en dos partes iguales por medio de líneas, estas se encontrarán en un mismo punto y serán iguales.*

Espl. Si los ángulos A, B, D &c (fig. 129), se dividen en dos partes iguales por medio de las líneas AC, BC, DC &c; voy á demostrar que estas líneas se encontrarán en un mismo punto, y serán iguales.

Dem. Pues que el ángulo FAB (esc. anteced.), ha de ser menor que 180°, su mitad CAB valdrá menos de 90°: por la misma razon ABC valdrá menos de 90°; luego será CAB + ABC < 180°; luego las líneas AC, BC se irán á encontrar (386*b*) en un punto tal como C: y como los ángulos CAB, CBA son iguales por ser mitades de los ángulos iguales FAB, ABD, el triángulo ACB será isósceles, y dará AC = CB.

Del mismo modo demostraríamos que la DC se habrá de encontrar con la BC; pero nos falta probar que la DC encontrará á la BC en el mismo punto en que la AC encuentre á la BC. Para esto observarémos, que los triángulos CAB, BCD tienen iguales los lados AB, BD, é iguales los ángulos adyacentes á estos lados, por ser mitades de los ángulos A, B, D, &c del polígono; luego serán iguales, y se podrán superponer; luego podrémos concebir que el triángulo DCB se doble por la BC, de modo que BD caiga sobre BA, en cuyo caso DC se confundirá con AC, é iran por consiguiente á encontrar á la BC en un mismo punto C.

Como lo mismo demostraríamos respecto de las demas, tendrémos que todas se encontrarán en C, y que AC = BC = DC = &c.

Cor. 1.° Luego el punto C será el centro del polígono, y las líneas AC, BC, DC, &c, los rádios oblicuos; de manera que *en todo polígono regular son iguales los radios oblicuos.*

Cor. 2.° Tambien se deduce que, pues los radios oblicuos son iguales, *los triángulos* CAB, CBD, CDE, &c, *son isósceles é iguales entre sí* porque tienen sus tres lados respectivamente iguales.

Cor. 3.° Si desde el centro bajamos las perpendiculares CP, CQ &c, á los lados de dichos polígonos, serán los radios rectos; y como son líneas tiradas de un mismo modo en triángulos iguales, serán iguales; pero estas líneas son los radios rectos; luego *en un polígono regular todos los radios rectos son iguales.*

{*Esc.* Esta proposicion tambien la podríamos demostrar directamente por la igualdad de los triángulos ACQ, ACP; pues tienen el ángulo en P igual al en Q por rectos, el CAP = CAQ por ser ambos mitades del FAB, luego el tercer ángulo ACP = ACQ; luego los triángulos CAP, CAQ tienen un lado comun AC, é iguales los ángulos adyacentes; luego son iguales (361), y dan CP = CQ.}

Cor. 4.° *El radio recto del polígono regular divide al lado correspondiente en dos partes iguales*; porque siendo isósceles los triángulos FCA, ACB, BCD, &c, las perpendiculares CP, CQ, &c, tiradas á las bases FA, AB, &c, las dividirán en dos partes iguales (366 esc.).

Cor. 5.° Si desde el centro de un polígono regular con un radio igual al radio oblicuo, trazamos una circunferencia (fig. 131), esta pasará por todos los ángulos del polígono (346 esc. 1.°), y por consiguiente *el círculo quedará circunscrito al polígono.*

Cor. 6.° Si desde el centro del polígono, trazamos una circunferencia con un radio igual al radio recto (fig. 132), esta pasará por los estremos de todos los rádios rectos (346 esc. 1.°); y por consiguiente, siendo cada lado perpendicular al radio recto que se ha convertido en radio del círculo, *este círculo quedará inscrito en el polígono.*

Cor. 7.° Pues que todos los triángulos, en que queda dividido el polígono por radios oblicuos, son iguales, todos los ángulos ACB, BCD, &c que se forman en el centro son iguales; y como todos juntos valen cuatro ángulos rectos, ó 360° ó 2π, y hay tantos angulos en C como lados tiene el polígono resulta que el ángulo en el centro del polígono regular $= \frac{2\pi}{n} = \frac{2 \times 180°}{n} = \frac{360°}{n}$; de donde se deduce que *el ángulo en el centro es igual al ángulo esterno* (470 cor. 3.°).

Cor. 8.° Tambien se deduce que *el lado del exágono es igual al radio del círculo circunscrito*; porque valiendo el ángulo del exágono 120°, su mitad CAB valdrá 60°, y tambien CBA = 60° (fig. 131), luego el ángulo ACB que ha de completar los 180° valdrá tambien 60°, y por lo mismo el triángulo ACB será equilátero (367), lo que da CA = AB.

Cor. 9.° De aquí resulta que *para inscribir un exágono en un círculo, basta colocar el radio seis veces sobre la circunferencia*, y tirando líneas por los puntos de division A, B, D, &c., quedará inscrito el exágono; y si ahora quisiéramos *inscribir un triángulo equilátero, uniríamos de dos en dos estos lados* con las líneas AD, DF, FA, que serán iguales por subtender arcos iguales: pues son duplos de los que subtendía el lado AB del exágono.

Esc. 1.° *El cuadrado tambien se inscribe con mucha facilidad*; porque para esto se tiran dos diámetros AB, CD (fig. 133) que se crucen á ángulos rectos en O, y tendrémos que dividirán á la circunferencia (431 esc.) en cuatro partes iguales; y tirando las cuerdas AC, AD, DB, BC se tendrá inscrito el cuadrado.

Ahora, levantando en A, C, B, D perpendiculares á los radios OA, OC, OB, OD, *se tendrá circunscrito el cuadrado* MNPQ; en el cual, como cada lado, por ejemplo MN, es igual con AB por lados opuestos de paralelogramo, se tendrá que *el perímetro del cuadrado circunscrito es igual con cuatro diámetros.*

Esc. 2.° Puesto que el lado del exágono inscrito es igual con el radio del círculo, resulta que *el perímetro del exágono inscrito en un círculo, equivale á seis radios ó tres diámetros*; pero la circunferencia es mayor (459) que el perímetro de cualquier figura inscrita en ella; luego *la circunferencia es mayor que seis radios ó tres diámetros*; y como si al círculo le concebimos circunscrito un cuadrado MNPQ, el perímetro del cuadrado será mayor (459) que la circunferencia, resulta (esc. anter.) que *la circunferencia es menor que 4 diámetros*, y por lo mismo *su valor está entre tres diámetros y cuatro diámetros.*

De las líneas proporcionales.

472 Teor. *Si en una línea que con otra forma un ángulo cualquiera, se toma un número cualquiera de partes iguales, y por los puntos de division se tiran líneas paralelas entre sí, hasta que encuentren á la otra, y por estos puntos de concurso se tiran líneas paralelas á la primera: vamos á demostrar que cada una de estas líneas quedará dividida en partes iguales entre sí.*

Espl. Si en la AV (fig. 134) que con la AZ forma un ángulo cualquiera VAZ, se toman las partes iguales AB, BC, CD &c., por los puntos de division B, C, D &c., se tiran las BF, CG, &c., paralelas entre sí, y por los puntos F, G, H &c., donde estas encuentran á la AZ, se tiran las FS, GT, &c., paralelas á la primera AV: vamos á demostrar que las partes AF, FG, GH, &c. de la AZ serán iguales, y que tambien lo serán las de las líneas FS, GT, &c., y las de las CG, DH, &c.

Dem. Por el supuesto AB es igual con BC, $BC = FK$ por lados opuestos del paralelogramo BCKF, luego (*ax.* 5.°) $AB = FK$; el ángulo K es igual con el ángulo en B por tener sus lados paralelos y sus vértices vueltos hácia un mismo lado; el $BAF = KFG$ por correspondientes entre las paralelas AV, FS, siendo la secante AZ; luego los triángulos BAF, KFG tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales; luego (361) serán iguales, y darán $AF = FG$.

Del mismo modo demostraríamos que el triángulo FKG era igual con el GNH, y este con HPI, &c.; luego tendrémos $AF = FG = GH = HI =$ &c.

Ahora, $FK = BC$ por lados opuestos de paralelogramo, y por la misma razon $KL = CD$, $LM = DE$; pero $BC = CD = DE =$ &c. por el supuesto, luego $FK = KL = LM =$ &c.

Para demostrarlo respecto de las CG, DH, &c., observarémos que $CK = BF$ por lados opuestos de paralelogramo; $BF = KG$ por la igualdad de los triángulos ABF, KFG; luego $CK = KG$.

Ahora, $DL = CK$ y $LN = KG$ por lados opuestos de paralelogramo; pero $CK = KG$ por lo acabado de demostrar, luego $DL = LN$: y como $KG = NH$ por la igualdad de los triángulos FKG, GNH, resulta tambien que $DL = LN = NH$, que era todo L. Q. D. D.

Cor. Puesto que $AB = BC =$ &c., y $AF = FG =$ &c., resultará que la misma razon que tenga AB con AF, la misma tendrá BC con FG &c; luego tendrémos AB:AF::BC:FG::CD:GH::&c:&c. y como una razon no se altera aun cuando sus dos términos se multipliquen por una misma cantidad, resulta que

$AB:AF::2AB:2AF::3AB:3AF::4AB:4AF::n.AB:n.AF::m.AB:m.AF::$&c.

Esto quiere decir en general, que un *número cualquiera* n *de partes de la primera línea es al mismo número de partes de la segunda, como otro número cualquiera* m *de partes de la primera es á este mismo número de partes de la segunda*, ó alternada esta proporcion que hemos enunciado, dirá: *un número cualquiera* n *de partes de la primera es á otro número cualquiera* m *de partes de la misma, como el número* n *de partes de la segunda es al número* m *de partes de la misma*, de manera que podrémos poner toda esta serie de razones iguales AB:AF::BC:FG::CD:GH::DE:HI::AC:AG::BD:FH::CE:GI::AD:AH::&c.

Esc. Lo mismo se verificaría aun cuando las líneas AV y AZ no se llegasen á encontrar, y estuviesen representadas por CV, GZ, con tal que se hiciese la misma construccion.

473 Teor. *Si hay un conjunto de puntos dispuestos de tal modo sobre un plano, que tirando desde ellos líneas paralelas entre sí, corten partes iguales de una recta dada, y estas líneas paralelas estan en progresion aritmética, todos los puntos corresponderán á una línea recta.*

Espl. Supongamos que se den los puntos A, M, M', M'', M''' &c. (fig. 135), tales que las perpendiculares (y por consiguiente paralelas entre sí) $MP, M'P', M''P'', M'''P'''$ &c, formando una progresion aritmética, intercepten en la AX las partes iguales $AP, PP', P'P''$ &c: vamos á demostrar que la línea $AMM'M''$&c, que pasa por dichos puntos, es una línea recta.

Dem. Si cada punto lo unimos con su inmediato por medio de una recta, y desde cada uno se tira una paralela á la recta dada, hasta que encuentre á la paralela próxima mayor, se originarán tantos triángulos iguales como paralelas se tiraron, y lo son porque tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.

En efecto, considerando los $MM'Q, M'Q'M''$, tenemos que $M'Q$ es igual con $M''Q'$, por formar progresion aritmética las paralelas; MQ es igual $M'Q'$ por ser la una igual con PP', y la otra con $P'P''$, que son iguales por el supuesto; el ángulo M,QM igual con $M''Q'M'$ por tener sus lados paralelos y sus vértices vueltos hácia un mismo lado; luego (360) serán iguales, de donde resulta que el ángulo $M''M'Q'$ es igual con $M'MQ$; y como el $QM'Q'$, y el $M'QM$ son iguales por alternos internos entre las paralelas $M'Q'$ y MQ cortadas por la secante $P'M'$, tenemos que los tres ángulos $M''M'Q'$, $Q'M'Q$, $QM'M$ son iguales á los tres ángulos del triángulo $M'MQ$; pero los tres ángulos de este triángulo valen 180° ó π; luego los tres primeros valdrán tambien 180° ó π; y como $M''M'Q'$ y $Q'M'Q$ componen el ángulo $P'M'M''$, resulta que los dos ángulos $M''M'P'$ y $P'M'M$ valen juntos 180°; luego en el estremo M' de la $M'P'$, tenemos tiradas dos líneas $M'M''$ y $M'M$, que forman con ella dos ángulos, que juntos valen 180° ó π; luego estas dos líneas $M'M''$ y $M'M$, forman una sola y misma línea; luego los tres puntos M, M', M'' estan en una misma línea recta; y como lo mismo demostraríamos respecto de los demas, resulta L. Q. D. D.

{*Cor.* De aquí se infiere, que siendo $AP = PP' = P'P'' = P''P''' = \&c$, y $MP = M'Q = M''Q' = M'''Q'' = \&c$, tendrémos esta serie de razones iguales

$$AP : PM :: PP' : M'Q :: P'P'' : M''Q' :: P''P''' : M'''Q'' :: \&c : \&c.$$

y como en toda serie de razones iguales, un número cualquiera de antecedentes es al mismo número de consecuentes (268), como un antecedente es á su consecuente, será

$$AP:PM::AP':P'M'::AP'':P''M''::AP''':P'''M'''::\&c : \&c.\}$$

474 Teor. *Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo, se tira una paralela á la base, los lados de dicho triángulo quedan divididos en partes proporcionales.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. 136): digo que si desde un punto cualquiera D de uno de los lados, se tira una línea DE paralela á la base, esta línea dividirá á los lados BA, BC en partes proporcionales, de modo que se tendrá BA:BD::BC:BE.

Dem. Aquí pueden ocurrir dos casos: 1.° que BD sea comensurable con BA, esto es, que su relacion se pueda espresar con números; y 2.° que no lo sea. En el primer caso, supongamos que la relacion de BA:BD, sea la de 7:4; si se concibe la recta BA dividida en 7 partes iguales, BD contendrá cuatro de estas partes, y DA las otras tres. Si se tirasen desde cada uno de estos puntos de division paralelas á la AC, quedaría dividida (472) la BC en 7 partes tambien iguales, de las que 4 corresponderían á BE, y las otras tres á EC; luego (472 cor.), BA:BD::BC:BE.

Si BA y BD son incomensurables, voy á demostrar que tambien se verifica la proposicion; porque la razon de BA:BD no puede ser mayor ni menor que la de BC:BE. En efecto, no se puede suponer que BA:BD::BC:BL, siendo BL menor que BE; porque en este caso podríamos concebir dividida (325) la BA en partes tan pequeñas, que tirando paralelas á AC por los puntos de division, cayese una de estas paralelas tal como *de* entre E y L; y á causa de la comensurabilidad de BA con B*d*, se tendria BA:B*d*::BC:B*e*.

Como estas dos proporciones tienen unos mismos antecendentes, podrémos formar proporcion con los consecuentes, y será BD:B*d*::BL:B*e*, resultado absurdo; porque la primera razon es de mayor desigualdad, y la segunda de menor; luego el supuesto que nos ha conducido á él, tambien es absurdo.

Tampoco se puede suponer que BA:BD::BC:BL', siendo BL' mayor que BE; porque concibiendo dividida la BA en partes tan pequeñas como se necesite, para que una de las paralelas tal como *d'e'*, tiradas á la base AC por los puntos de division, caiga entre E y L', se tendrá BA:B*d'*::BL':B*e'*, y formando proporcion con los consecuen-

tes de estas dos proporciones, tendrémos BD:B*d'*::BL':B*e'*, resultado absurdo por la misma razon que antes; luego no pudiendo ser la cuarta proporcional á BA,BD,BC menor ni mayor que BE, resulta que BE es dicha cuarta proporcional, y se tendrá por consiguiente BA:BD::BC:BE.

Cor. De aquí se infiere que DA: BD:: CE: EB; porque dividiendo la proporcion antecedente, será

BA—BD:BD::BC—BE:BE, ó DA:BD::CE:BE,

la cual, compuesta y alternada, se convierte en

DA + BD = BA : CE + BE = BC:: BD:BE::DA:CE.

las cuales razones iguales nos dicen que *los lados del triángulo son proporcionales con las partes superiores é inferiores á la paralela, y estas proporcionales entre sí.*

475 Teor. *Si una recta divide los lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela á la base.*

Espl. Sea el triángulo BAC (fig. 137): digo que si la DE divide los lados BA, BC, de modo que se tenga BA:BD::BC:BE, la línea DE será paralela á la base AC.

Dem. Si la DE no es paralela á la AC, se le podrá tirar por el punto D una línea que lo sea. Si esta paralela fuese la D*e*, se tendría (teor. antec.) BA:BD::BC:B*e*, de donde se inferiría que, por tener esta proporcion y la del supuesto los tres primeros términos comunes, BE = B*e*; pero esto es un absurdo, porque BE es todo y B*e* parte suya; luego la paralela á la base no puede caer por mas arriba que la DE. Tampoco puede caer por la parte inferior; porque si se supone que la D*e'* es paralela á la AC, resultará BE = B*e'*, que tambien es absurdo; luego si la paralela tirada por el punto D á la base AC, no puede pasar ni por mas arriba ni por mas abajo que la DE, es indispensable que caiga sobre ella, ó que dicha DE sea la paralela á AC.

476 Teor. *La DE, que es paralela á la base, es tambien proporcional con la misma base; de manera que se tiene* BA:BD::AC:DE.

Dem. Tirando por D la DF paralela á BC, tendrémos (474 cor.) BA:BD::AC:CF; pero DE = FC por lados opuestos del paralelogramo DFCE; luego BA:BD::AC:DE, que era L. Q. D. D.

{477 Teor. *Si desde un punto fuera de una línea se tiran rectas á esta línea, y por un punto cualquiera de una de ellas, se tira una paralela á la primera, esta quedará dividida en partes proporcionales con las de la línea primitiva.*

{*Espl.* Si desde S (fig. 138), se tiran á la MN las SM,SO,SP,SN, y por un punto cualquiera de una de estas, se tira la QT paralela á MN, se tendrá QR : MO :: RV : OP :: VT : PN, ó abreviadamente QR : RV : VT :: MO : OP : PN.

{*Dem.* El triángulo SMO por tener la QR paralela á la base, da QR : MO :: SR : SO; pero el triángulo SOP da por la misma razon

SR : SO : : RV : OP : : SV : SP ;

y el triángulo SPN da tambien SV : SP : : VT : PN.
La primera proporcion tiene la razon SR : SO comun con la serie de razones iguales, y una de estas SV : SP es comun con la última proporcion, luego (267 teor. 2.°), tendrémos QR : MO : : RV : OP : : VT:PN, ó poniéndolas abreviadamente QR:RV:VT::MO:OP:PN. L. Q. D. D.

{*Esc.* Lo mismo da que la QT se tire por mas abajo del punto S, que por mas arriba; porque en este segundo caso, tomando Sq = SQ (fig. 139), y tirando la qt paralela á MN, que lo será por consiguiente (386*a* cor.) á QT, las partes de la qt serán iguales con las de la QT, y formando proporcion las partes de la qt con las de MN, la formarán igualmente las de la QT.

{En efecto, qr = QR, porque los triángulos Sqr, SQR son iguales (361); pues tienen SQ = Sq por construccion, los ángulos en S iguales por opuestos al vértice, y los en Q y en q iguales por alternos internos entre las paralelas QT y qt, siendo QM la secante, luego qr=RQ; y como los triángulos SRV, Sru son iguales por tener SR= Sr por la igualdad de los triángulos SRQ, Srq, y los ángulos adyacentes por la misma razon que los de ántes, se tendrá la ru = RV, y del mismo modo ut = VT.

{*Cor. De cualquier modo que tres paralelas corten á otras rectas*, se verifica que las partes interceptadas *entre las paralelas serán proporcionales.* Porque si suponemos que QT, GL, y MN (fig. 138 y 139), sean las paralelas, tendrémos que sí las QM, RO, VP, TN fuesen tambien paralelas entre sí, resultaría (467) QG = RH = VK = TL, y GM = HO = KP = LN; por lo cual tendríamos

QG:GM::RH:HO::VK:KP::TL:LN.

{Sí no fuesen paralelas, se encontrarían en un punto fuera ó dentro de las paralelas. Si se encontrasen fuera, tal como en S (fig. 138), tendríamos (474 cor.), SG:GM::SH:HO::SK:KP::SL:LN, y SG:QG:: SH:RH::SK:VK::SL:TL; y como estas dos séries de razones iguales tienen unos mismos antecedentes, podrémos formar otra con los consecuentes, y será QG:GM::RH:HO::VK:KP::TL:LN.

{Sí se encontrasen dentro como representa la (fig. 139), tiraríamos la qt con las mismas circunstancias que ántes, y tendriamos Sq: SG::Sr:SH::Su:SK::St:SL, ó sustituyendo en vez de Sq, Sr, &c, sus iguales SQ, SR, &c, y componiendo, será

SQ + SG:SG::SR + SH:SH::SV + SK:SK::ST + SL:SL,

y como GM:SG::HO:SH::KP:KS::LN:LS, que tiene los mismos consecuentes que la serie anterior, podrémos poner otra serie con los antecedentes, y observando que SQ + SG = QG, SR + SH = RH, &c, tendrémos por último QG:GM::RH:HO::VK:KP::TL:LN.}

478 Teor. *Si se divide el ángulo de un triángulo en dos partes iguales por medio de una línea, esta dividirá al lado opuesto en dos partes*

proporcionales á los lados que forman dicho ángulo.

Espl. Sí el ángulo A del triángulo BAC (fig. 140), se divide en dos partes iguales BAD, DAC por medio de la AD, esta línea dividirá al lado BC, de manera que se tendrá. BD:DC::BA:AC.

Dem. Por el punto B tírese la BE paralela á DA, y prolónguese CA hasta que encuentre á esta paralela en E, y el triángulo BCE, por tener la AD paralela á BE, dará (474 cor.)

BD:CD::EA:AC.

Ahora el ángulo en E = n por correspondientes entre las paralelas BE, AD, siendo CE la secante, $o = n$ por alternos internos entre las mismas paralelas siendo BA la secante: y como $m = n$ por el supuesto, será el ángulo E = o; luego en el triángulo EBA se tendrá (§ 367) BA = EA; y sustituyendo este valor en la proporcion anterior, tendrémos BD:DC::BA:AC. L. Q. D. D.

479 Fundados en esta teoría, vamos á resolver algunos problemas.

Probl 1.° *Dividir una línea dada en las partes iguales que se quiera.*

Res. y Dem. Sea la AR (fig. 141) la recta dada, y supongamos que se quiera dividir en diez partes iguales: para esto, tírese por uno de sus estremos A una línea cualquiera AZ; tómense en esta diez partes iguales á una magnitud arbitraria, tal como AB; únase el estremo Q de la décima division con el R de la línea propuesta, y por todos los puntos de division tírense paralelas á la RQ, las cuales dividirán á la AR en las 10 partes iguales que se deseaba (472).

Probl. 2.° *Dividir una línea en las partes que se quiera, de manera que tengan una razon dada.*

Res. Supongamos que se quiera dividir la AR en dos partes que tengan la razon de 3 á 7. Por A tirarémos una línea cualquiera, en ella tomarémos un número de partes iguales con la magnitud arbitraria AB, determinado por la suma de los números que espresen esta relacion, que aquí es de 3 + 7 = 10; únase el estremo Q de la última division con el otro estremo R de la línea propuesta, y por el punto que señala las divisiones espresadas por uno de los números de la razon, se tirará la DI paralela á la QR, la cual dividirá á la AR en dos partes AI, IR que tendrán la razon de 3 á 7.

Dem. Porque en virtud de lo espuesto (472 cor.) AI:IR::AD:DQ:: 3AB:7AB::3:7, que era L. Q. D. H y D.

{*Esc.* 1.° Si la relacion estuviese espresada por líneas tales como K *y* L, colocaríamos la K desde A hasta D, la L desde D hasta Q, uniríamos Q con R, y tiraríamos la DI paralela á RQ, la cual nos daría (474 cor.) AI:IR::AD:DQ::K:L.

{*Esc.* 2.° Si se quisiese dividir la misma línea en tres partes, cuya razon fuese la de 3 á 5 á 2, sumaríamos estos números y despues de haber tomado en la AZ un número de partes iguales con la magnitud arbitraria AB, y espresado por 3 + 5 + 2 = 10, y unido el punto Q con R, tiraríamos por los puntos de division que distasen entre sí tanto como unidades tienen los números 3, 5 y 2, las DI, FG paralelas á QR, y tendríamos (472 cor.) AI:IG:GR::AD:DF:FQ::3AB:5AB:2AB::3:5:2.}

Probl. 3.° *Dadas tres líneas* G, K, L, (*fig.* 142), *hallarles una cuarta proporcional geométrica.*

Res. Fórmese un ángulo cualquiera VAZ con dos líneas indefinidas AV, AZ; en uno de los lados tal como AV, tómese una parte AB= con la primera G; en el mismo lado tómese otra parte AC = con la segunda K; en el otro lado AZ tómese una parte AE = con la tercera L; únase el estremo B de la primera con el estremo E de la tercera por medio de la BE, y por el estremo C de la segunda, tírese una línea CF paralela á BE, la cual irá á encontrar al otro lado, de manera que la parte AF, interceptada entre ella y el vértice del ángulo, será la cuarta proporcional pedida.

Dem. El triángulo ACF por tener la BE paralela á la CF, da

AB : AC :: AE : AF,

ó poniendo en vez de estas líneas sus iguales por construccion, será G:K::L:AF; luego AF es la cuarta proporcional pedida.

Probl. 4.° *Dadas dos líneas* G, K, *hallarles una tercera proporcional geométrica.*

Res. Despues de haber formado un ángulo cualquiera VAZ (fig. 143) con dos líneas indefinidas AV, AZ, se tomará en uno de los dos lados AV la parte AB = G, en el mismo lado la parte AC = K, y en el otro lado una parte AE = tambien con K; se unirá el estremo B de la primera línea con el estremo E de la tercera, y por el estremo C de la segunda, se tirará la CF paralela á BE, y tendrémos que AF será la tercera proporcional pedida.

Dem. Porque el triángulo ACF, por tener la BE paralela á CF; nos da esta proporcion AB:AC::AE:AF, ó poniendo en vez de estas líneas sus iguales por construccion,

será G:K::K:AF, ó ÷G:K:AF. Luego &c.

Cor. De aquí se deduce que por Geometría *se pueden hallar siempre cuartas y terceras proporcionales exactamente*, lo que no se puede ejecutar por Aritmética.

Probl. 5.° *Dadas las magnitudes desiguales* A, B, *hallar dos rectas desiguales, tales que la recta mayor tenga con la menor una razon menor que la mayor magnitud* A *tiene con la menor* B.

Res. Puesto que A es la mayor, podrémos quitarle la menor B, y tendrémos que A—B será una cantidad; y en virtud del escolio del teorema 3.° (325) podrémos concebir otra cantidad N, tal que el producto por A—B sea mayor que B, y tendrémos $(A-B)\times N > B$; hecho esto, elíjase una línea ó cantidad arbitraria R, hállese una cuarta proporcional, á la unidad, á la cantidad N (ya determinada antes) y a la

línea arbitraria *R*; y llamando S á dicha cuarta proporcional, se tendrá 1:N::R:S = N × R: y digo que *S* es la menor cantidad que se pide, á la cual añadiendo la cantidad arbitraria *R* y llamando X á la suma, se tendrá $S + R = X$ que será la mayor, de manera que tendrémos $X : S < A : B$, ó $A : B > X : S$.

Dem. Porque siendo $B < (A - B) \times N$, si comparamos estas dos cantidades con una misma cantidad $A - B$, cuando se compare con la menor, se tendrá mayor relacion; por lo que será $A - B : B > A - B : (A - B) \times N :: 1 : N$ (dividiendo los dos términos de la segunda razon por $A - B$); y como antes teníamos 1:N::R:S, resultará $A - B : B > R : S$; y componiendo esta desproporcion (272) será $A - B + B : B > R + S : S$, que reduciendo y poniendo X en lugar de R + S, se tendrá por último $A : B > X : S$, ó $X : S < A : B$ que era L. Q. D. H. y D.

{*Esc.* 1.° *Si se pidiesen dos líneas que tuviesen una razon dada, tal como la de otras dos líneas* G, K, *formaríamos un ángulo cualquiera; en cada uno de sus lados tomaríamos una cantidad igual con una línea de las dadas: uniríamos estos puntos por medio de otra línea, y toda paralela tirada á esta, interceptará en los lados de dicho ángulo, partes que serán proporcionales con las magnitudes dadas*; porque si suponemos que AB = G, y AE = K, y que la CF sea paralela á BE, tendrémos AB = G : AE = K :: AC : AF; luego AC y AF serán las líneas que tendrán la razon pedida; y como CF se podía haber tirado por otro punto cualquiera, resulta que esta cuestion es indeterminada.

{*Esc.* 2.° Si se nos pidiese *tirar por un punto M, dado dentro de un ángulo, una recta, de modo que las partes comprendidas entre este punto y los lados del ángulo, fuesen iguales*: tiraríamos la MN paralela á uno de los lados AV, en el otro lado AZ tomaríamos NF igual con AN, y tirando la FMC quedará dividida en dos partes MF = MC, porque AN : NF :: CM : MF, y siendo AN = NF, resultará FM = MC.

{Probl. 6.° *Formar la escala universal que se conoce con el nombre de escala de mil partes.*

{*Res.* y *Dem.* Tómese una magnitud arbitraria K (fig. 144) y repítase diez veces sobre la AB, desde A hasta O; tómese toda la magnitud AO=10K, y repítase nueve veces desde O hasta B; en los estremos A y B levántense las perpendiculares AC, BE, en las cuales se tomarán tambien diez partes iguales con otra magnitud arbitraria, y se tirarán líneas por los puntos de division 1, 2 &c, que serán paralelas é iguales á la AB; en la última CE, fórmense las mismas partes que en la AB.

{Desde D á C y desde O á A póngase 10, 20, 30, &c, en las divisiones 1.ª, 2.ª &c; únase el punto O con el 10 de la de arriba, el 10 de la AO con el 20 de la de arriba, y asi sucesivamente hasta unir el punto 90 de la de abajo con el C de la de arriba; únase tambien el punto O con el D, y en los puntos de division de la derecha se pondrán, tanto arriba como abajo, 100, 200, 300 &c; con lo cual quedará formada la escala.

{En ella se podrán tomar hasta mil partes, de esta manera: considerando que la distancia A90 vale diez partes, la AO valdrá 100: y como en toda la AB cabe la AO diez veces, se tendrá que la AB, que es la mayor magnitud que se puede tomar, será de mil partes.}

{*Esc.* Ahora, en la práctica para tomar en ella un número cualquiera de partes iguales, que sea menor que mil, se procederá del modo siguiente. *En primer lugar se debe tener presente que esta distancia se debe tomar en la paralela á AB que pasa por el punto que espresa el guarismo de las unidades del número propuesto; y la magnitud estará espresada por la parte de esta línea que hay interceptada entre la línea que espresa las centenas, y la que va desde las decenas de abajo á una decena mas de la de arriba.* Así, si se nos propusiera tomar una magnitud igual con 458 partes, lo primero que advertiríamos era que se debía tomar esta distancia en la línea 8F, y estará representada por la parte HN que se halla interceptada entre la línea 400 que espresa las centenas, y la que desde 50 de la de abajo que espresa las 5 decenas que hay, va hácia el 60 de arriba.

{Para convencernos de esto, observarémos que la $NH = Hm + mr + rN$; Hm es igual con O400 (§ 466 cor. 1.°) y equivale por consiguiente á 400 partes; la $Nr = O50$ tambien por lados opuestos del paralelogramo $NrO50$, y equivale por consiguiente á 50 de estas partes; y la rm por lo que ahora probarémos, equivale á 8 de dichas partes; luego $NH = 400 + 8 + 50 = 458$ partes.

{Para probar que rm equivale á 8 partes, observarémos que en el triángulo OD10, por ser la rm paralela á D10, se tiene

$$rm:D10::Om:OD::8\times Ot:10\times Ot::8:10$$

luego $rm = \frac{D10\times 8}{10}$; y como la distancia D10 la suponemos compuesta de diez partes, resulta que $rm = \frac{10\times 8}{10} = 8$.

{Y como lo mismo demostrarémos en cualquiera otro caso, resulta la proposicion general.}

De la semejanza de las figuras.

480 Se llaman *figuras semejantes* aquellas que tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales; y *desemejantes* aquellas á quienes falta alguna de estas dos circunstancias. De manera que las dos figuras ABCDE, *abcde* (fig. 145), serán semejantes siempre que sus ángulos

sean $A = a$, $B = b$, $C = c$ &c, y ademas se tenga

$$AB:ab::BC:bc::CD:cd::\ \&c : \&c.$$

Esc. No basta que se verifique una circunstancia de estas para ser semejantes las figuras, pues de la una no se deduce la otra; por ejemplo, un rectángulo y un cuadrado, aunque tienen sus ángulos iguales, no pueden ser semejantes, porque sus lados no pueden ser proporcionales, puesto que en el uno todos han de ser esencialmente iguales entre sí, y en el otro no. Un cuadrado y un rombo tienen esencialmente los lados proporcionales, porque como en cada figura todos los lados son iguales, tendrán todos una misma razon; pero no pueden ser semejantes, porque los ángulos han de ser en el cuadrado rectos, é iguales por precision, y en el otro no.

481 Teor. *Todos los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes.*

Dem. Porque siendo en ambos uno mismo el número n de lados (470, cor. 2.°), la fórmula $\frac{(n-2)\pi}{n}$, dará un mismo valor para los ángulos; luego los ángulos del uno serán iguales á los del otro; y como en cada uno han de ser iguales los lados entre sí, resulta que la razon que el uno de ellos tenga con otro, esa será la que tengan otros dos cualesquiera. Luego en virtud de la definicion, serán semejantes. L. Q. D. D.

482 *Esc.* Como los triángulos son de todas las figuras las mas sencillas, hay circunstancias en que dadas algunas de estas cosas, se deducen las otras; y así como hay trece casos diferentes en que los triángulos son iguales, hay tambien otros trece en que son semejantes: de los cuales darémos á conocer ahora ocho, reservando los demas para el Apéndice puesto al fin de la segunda parte; y con la mira de facilitar su inteligencia, demostrarémos ante todas cosas el siguiente.

Teor. *Si por un punto cualquiera del lado de un triángulo, se tira una paralela á uno cualquiera de los otros dos lados, se originará un triángulo que será semejante con el primitivo.*

Espl. Si por el punto b' del lado AB del triángulo ABC (fig. 146), se tira la $b'c'$ paralela á BC, el triángulo $Ab'c'$, será semejante al ABC.

Dem. Ambos triángulos tienen comun el ángulo en A; el ángulo en $b' =$ al en B por correspondientes entre las paralelas BC, $b'c'$, siendo AB la secante; el en $c' =$ al en C, por la misma razon; luego estos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales. Ahora, el triángulo ABC nos da (§§ 474, 476), á causa de la paralela $b'c'$ á la base BC, $Ab' : AB :: Ac' : AC :: b'c' : BC$.

Luego estos dos triángulos tienen, ademas de los ángulos iguales, proporcionales los lados; luego son semejantes. L. Q. D. D.

483 Primer caso de semejanza de triángulos.

Teor. *Dos triangulos son semejantes cuando tienen sus tres lados proporcionales.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, *abc* (fig. 146): voy á demostrar que si AB:*ab*::AC:*ac*::BC:*bc*, se tendrán los ángulos a=A, b=B, c=C, y por lo mismo serán semejantes.

Constr. Tómese en el lado AB una parte Ab' = ab, y en el AC una parte Ac' = ac, y únase el punto b' con el c'.

Dem. Por el supuesto tenemos AB:*ab*::AC:*ac*, luego sustituyendo en vez de *ab* y *ac*, sus iguales por construccion Ab', Ac', será AB: Ab' :: AC : Ac'; luego la $b'c'$ divide los lados del triángulo ABC en partes proporcionales, y será (475) paralela á la base y proporcional (476) con la misma base; luego tendrémos AB : Ab' :: BC : $b'c'$; y como ab=Ab', esta proporcion y la del supuesto AB : *ab* :: BC : *bc*, tienen los tres primeros términos iguales, luego el cuarto será igual en ambas, y tendrémos $b'c'$ = bc: por lo que los triángulos $Ab'c'$, *abc* son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales; y como $Ab'c'$ es semejante al ABC (§ 482) por haber demostrado que $b'c'$ es paralela á BC, resulta que el triángulo *abc*, que es igual con el $Ab'c'$, será tambien semejante al ABC.

484 Segundo caso: *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual formado por dos lados proporcionales.*

Espl. Sean ABC, *abc* los dos triángulos, en los que suponemos que A=a, y que AB : *ab* :: AC : *ac*; voy á demostrar que son semejantes.

Dem. Hecha la construccion anterior, resulta que si en la proporcion del supuesto, sustituimos en vez de *ab*, y *ac* sus iguales Ab' y Ac', se tendrá AB : Ab':: AC : Ac'; luego la $b'c'$ divide en partes proporcionales á los lados del triángulo ABC, y por lo mismo será (475) paralela á la base; luego el triángulo $Ab'c'$ es semejante (482) al ABC, y como *abc* es igual con $Ab'c'$ (por tener ab = Ab', ac = Ac' por construccion y A = a por el supuesto) resulta que *abc* tambien será semejante á ABC L. Q. D. D.

485 Tercer caso. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.*

Espl. Si los dos triángulos ABC, *abc* tienen iguales respectivamente sus ángulos; esto es, A=a, B=b y C=c: voy á demostrar que son semejantes.

Constr. Tómese en AB una parte Ab' igual con *ab*, y por b' tírese la $b'c'$ paralela á BC.

Dem. El ángulo b'=B por correspondientes: y como B = b por el supuesto, será b' = b; luego los dos triángulos $Ab'c'$, *abc* tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales, luego son iguales; pero $Ab'c'$ es semejante (482) con ABC, luego *abc* tambien lo será, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí se deduce que *cuando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo respectivamente, ésto es, cada uno al suyo; son semejantes*; porque en este caso el tercer ángulo es igual al tercero (386*e* cor. 2.°)

Cor. 2.° *Dos triángulos rectángulos son semejantes, siempre que ademas del ángulo recto, tengan otro igual ó comun*; por la misma razon.

Cor. 3.° *Dos triángulos isósceles son semejantes cuando tengan igual un ángulo homólogo, esto es, que sea uno de los ángulos iguales ó el desigual.* Porque si es uno de los ángulos iguales el que es igual en ambos triángulos, tambien habrá en ambos otro igual, y por consiguiente el tercero igual al tercero. Si es el ángulo formado por los lados iguales el que es igual en ambos, se tendrá que la suma de los otros dos será en ambos una misma: y como han de ser iguales, cada uno equivaldrá á la mitad de esta suma.

Cor. 4.° *Dos triángulos BAC, DEF* (fig. 147) *son semejantes cuando tienen sus lados paralelos*; porque si AB es paralelo á DE y BC á EF, el ángulo B = E (§ 386*c*), y ademas por ser AC paralelo á DF, será igualmente C = F y A = D; luego los triángulos tendrán sus tres ángulos iguales y serán semejantes.

Cor. 5.° *Dos triángulos DEF, ABC* (fig 148), *son tambien semejantes, cuando tienen sus lados respectivamente perpendiculares.* Porque si DE es perpendicular á AB, y DF á AC en el cuadrilátero AIDH los dos ángulos I y H serán rectos, luego los dos restantes juntos valdrán dos rectos, pues entre los cuatro han de valer cuatro rectos. Pero los dos ángulos EDF, IDH valiendo tambien dos rectos, el ángulo EDF será igual con IAH ó BAC; igualmente si el tercer lado EF es perpendicular al BC, se demostrará que el ángulo DFE = C, y el DEF = B; luego los dos triángulos ABC, DEF que tienen los lados perpendiculares, tienen sus ángulos iguales y son semejantes (485).

{*Esc.* 1.° Si el triángulo DEF se hallase en otra posicion diferente, como *def*, pero que siempre conservase el tener sus lados, prolongados si se necesita, perpendiculares, entónces formando dentro del triángulo ABC, otro DEF, cuyos lados fuesen paralelos á los del *def*, se tendrá DEF semejante á ABC por lo acabado de demostrar, y DEF semejante á *def* por tener sus lados paralelos; luego *def* semejante á ABC.

{*Esc.* 2.° La semejanza de los triángulos es de mucha trascendencia en todas las Matemáticas, porque sirve para deducir proporciones entre líneas, de donde se sacan despues ecuaciones; y así se debe tener presente que siempre se han de comparar lados homólogos, esto es, lado mayor con mayor, mediano con mediano, y menor con menor. En muchas ocasiones no se sabe distinguir cual es el lado mayor, cual el mediano, y cual el menor; entónces se compararán los lados opuestos á los ángulos iguales; en el caso de ser los lados paralelos, los lados que se han de comparar son los paralelos; y en el de los lados perpendiculares, han de ser los perpendiculares.

{*Esc.* 3.° Si se pidiese inscribir en un círculo un triángulo que fuese semejante á otro triángulo dado, tiraríamos al círculo una tangente cualquiera como FBG (fig. 114), en B se formará un ángulo FBD igual con uno de los del triángulo propuesto, y otro GBA igual con otro de los angulos del triángulo, y tirando la DA se tendrá el triángulo BAD inscrito en el círculo y semejante al propuesto. Porque el ángulo BAD siendo igual con FBD, y el ADB con el GBA, el triángulo ABD tiene dos ángulos iguales con el propuesto, y por consiguiente le es semejante.}

Cuarto caso. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.*

Espl. Sean los dos triángulos ABC, *abc* (fig. 146*) en que se supone AB:*ab*::AC:*ac*, ABC = *abc*, sabiendo ademas que el lado AC es mayor que AB; voy á demostrar que son semejantes.

Dem. Tómese en AB una parte Ab' = *ab*, y en AC una parte Ac' = *ac*; únase *b'* con *c'* por medio de la *b'c'*, y tendrémos que, sustituyendo en la proporcion del supuesto en vez de *ab*, *ac*, sus valores Ab', Ac', será AB:Ab'::AC:Ac'; luego la *b'c'* divide en partes proporcionales á los lados del triángulo ABC; y por lo mismo será (475) paralela á la base; luego el triángulo Ab'c' es semejante (482) al ABC; y como el triángulo *abc* es igual (376 esc.) con el Ab'c' (por tener *ab* = Ab', *ac* = Ac' por construccion; y *abc* = Ab'c' porque de ser la *b'c'* paralela á la base BC se deduce que el ángulo Ab'c' = ABC = *abc* por el supuesto), resulta que el triángulo *abc* tambien será semejante al triángulo ABC. L. Q. D. D.

Quinto caso. *Dos triángulos rectángulos son semejantes cuando la hipotenusa y un cateto son proporcionales.*

Espl. Sean ABC, *abc* (fig. 146*) dos triángulos rectángulos en B, *b*, en que se tenga AC:AB::*ac*:*ab*; voy á demostrar que son semejantes.

Dem. Tómese en AC una parte Ac' = *ac*, y en AB una parte Ab' = *ab*; sustituyendo estos valores en vez de *ab* y *ac*: la proporcion del supuesto dará AC:AB::Ac':Ab'; y tirando la *c' b'* resulta que divide á los lados AC y AB en partes proporcionales, luego (475) será paralela á la base; por lo mismo el ángulo *b'* = B; pero B es recto; luego *b'* tambien es recto y por consiguiente igual con *b*; luego los triángulos Ac'b' y *acb* son iguales (376. cor. 2.°); pero Ac'b' es semejante al ABC (482); luego tambien lo será el *abc*; que era L. Q. D. D.

Esc. Este quinto caso se puede deducir como colorario del cuarto; puesto que el ángulo recto es el mayor de un triángulo rectángulo; pero como yo di la demostracion de este quinto caso, ántes de encontrar la del cuarto, la he conservado; porque no juzgo inútil su conocimiento.

Sesto caso. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al lado menor de los dos lados y que sean de una misma especie los ángulos opuestos al lado mayor de los dos que se dan.*

Espl. Sean ABC, *abc* dos triángulos en que se tiene AC:*ac*::AB:*ab*; el ángulo en C = al en *c*; y en que se sabe ademas que AB < AC y que los ángulos en B y *b*, son de una misma especie, esto es, o ambos agudos ó ambos rectos, ó ambos obtusos, digo que los dos triángulos ABC, *abc* son semejantes.

Dem. Tómese en AB una parte Ab' = *ab*, y en AC una parte Ac' = *ac* y tírese *b'c'*; con lo cual la proporcion del supuesto nos dará AC:Ac'::AB:Ab', luego la *b'c'* será (475) paralela á la base BC; luego el ángulo B = *b'* y el *c'* = C = *c*. Luego (482) el triángulo Ab'c' es semejante con el ABC; pero el Ab'c' es igual (376 esc. 2.°) con el *abc*; pues tiene dos lados iguales á saber Ab' = *ab*, Ac' = *ac*, el ángulo *c* opuesto al menor de los lados *ab*, igual al *c'* opuesto al menor en el Ab'c', y los ángulos en *b* y *b'* son de una misma especie por suponerse que lo son los en *b* y B que es igual con *b'*, luego el *abc* será semejante con el ABC, que era L. Q. D. D.

Septimo caso. *Dos triángulos son semejantes, cuando tienen un ángulo igual, y proporcionales los lados que forman otro ángulo que sea de la misma especie en ambos triángulos.*

Espl. Sean CAB y FDE (fig. 322) dos triángulos, en los que se tenga el ángulo ABC = DEF, y proporcionales los lados que forman los ángulos ACB, DFE, de modo que BC:AC::EF:DF; voy á demostrar que con tal que se sepa que los espresados ángulos ACB, DFE son ambos agudos ó ambos obtusos, los triángulos serán semejantes.

Dem. Si por los puntos E y F se tiran las rectas EG, FG que formen los ángulos FGE, y EFG iguales con ABC y BCA, tendrémos que el triángulo ABC será semejante á GEF (485 cor. 1.°), y dará BC:CA::EF:FG; y como esta razon y la del supuesto tienen la primera razon comun, será EF:FG::EF:DF; que da FG = DF. Luego los triángulos EGF y EDF tienen el lado FG = FD, el lado EF comun, y los ángulos FEG = FED, y los otros ángulos EFD, y EFG de la misma especie, por serlo EFD de la misma que ACB por el supuesto; y EFG = ACB por construccion; luego dichos triángulos serán (376 esc. 4.°) iguales; por consiguiente el ángulo GFE ó ACB igual DFE, y por lo mismo (485 cor. 1.°) los triángulos ABC y DEF son semejantes; que era L. Q. D. D.

Octavo caso. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, y los lados opuestos á dicho ángulo son proporcionales con las perpendiculares que se les tiren desde dichos ángulos: ó lo que es lo mismo dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual y las bases son proporcionales con las alturas.*

Espl. Sean ABC, *abc* (fig. 322*a*) dos triángulos en que el ángulo BAC $=$ *bac*, y que ademas se tenga AD:BC::*ad*:*bc*; voy á demostrar que dichos triángulos son semejantes.

Dem. Si los dos primeros términos de la proporcion del supuesto los multiplicamos por AB, y los otros dos por *ab*, se nos convertirá en AD $\times$ AB:BC $\times$ AB::*ad*$\times$*ab*:*bc* $\times$ *ab*. Esta proporcion compuesta, la podrémos descomponer (271) en las dos proporciones simples siguientes AD:AB::*ad*:*ab*, y AB:BC::*ab*:*bc*. La primera nos dice que los triángulos ABD, *abd* rectángulos en D y *d* son semejantes (5.º caso), lo que dá el ángulo DBA $=$ *dba*, ó CBA $=$ *cba*; y como por el supuesto el ángulo BAC $=$ *bac*, resulta en virtud de lo demostrado (3.er caso, cor. 1.º), que los triángulos ABC, *abc* son semejantes, que era L. Q. D. D.

{486 Teor. *Si un conjunto de puntos estan situados de tal modo sobre un plano, que las paralelas que de dichos puntos se bajan á una recta, dada de posicion, guarden la misma razon que las partes de esta recta, comprendidas por dichas paralelas y un punto fijo dado en ella, todos los puntos corresponderán á una línea recta.*

{*Espl.* Se supone (fig. 135), AP$''$: P$''$ M$''$ :: AP$'$:P$'$ M$'$ :: AP: PM; voy á demostrar que los puntos M$''$, M$'$, M &c, estan en línea recta.

{*Dem.* Porque si concebimos unidos dichos puntos por medio de rectas AM, MM$'$, M$'$M$''$ &c, y por los puntos M, M$'$, M$''$ &c, las MQ, M$'$Q$'$, M$''$Q$''$ &c, paralelas á AX, tendrémos (comparando la diferencia de antecedentes con la de consecuentes en la proporcion que resulta de las dos primeras razones del supuesto, y en la que resulta de las dos últimas), estas proporciones

$$AP'' - AP' : P''M'' - P'M' :: AP'' : P''M'' :: AP : PM$$
$$y\ AP' - AP : P'M' - PM :: AP : PM;$$

que como tienen una razon comun, podrémos formar proporcion con las otras, y será

$$AP'' - AP' : M''P'' - M'P' :: AP' - AP : P'M' - PM :: AP : PM.$$

Si en vez de estas diferencias sustituimos las líneas que las espresan será P$'$P$''$ $=$ M$'$Q$'$: M$''$Q$'$ :: PP$'$ $=$ MQ : M$'$Q :: AP : PM.

{Luego los tres triángulos M$'$Q$'$M$''$, M$'$QM, APM tienen proporcionales los lados que forman los ángulos en Q$'$, en Q y en P; pero estos ángulos son iguales entre sí (386*c*), luego los tres triángulos serán semejantes, y tendrémos que el ángulo M$'$MQ, es igual con el MAP; y como QMP $=$ MPA per alternos internos, los tres ángulos que se forman en M son iguales á los tres ángulos del triángulo APM, esto es, á 180º ó á π; luego (355) AM y MM$'$ son una sola y misma línea, y los tres puntos A, M, M$'$ estan en la línea recta: y como lo mismo podríamos demostrar de los demas, resulta la proposicion.}

487 Teor. *Si desde el ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa, se verificarán cinco cosas: 1.ª el triángulo quedará dividido en otros dos triángulos, semejantes al total, y semejantes entre sí; 2.ª la perpendicular bajada será media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa; 3.ª cada cateto será medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente; 4.ª el cuadrado de la hipotenusa será igual á la suma de los cuadrados de los catetos; y 5.ª la perpendicular será cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.*

Espl. Si desde el ángulo recto A (fig. 149), del triángulo rectángulo ABC se baja una perpendicular AD á la hipotenusa BC, digo que se verificarán cinco cosas: 1.ª los dos triángulos ADB, ADC, serán semejantes al total BAC, y semejantes entre sí; 2.ª la perpendicular AD será media proporcional entre los dos segmentos BD y DC de la hipotenusa BC; 3.ª cada cateto AB ó AC será medio proporcional entre la hipotenusa BC y el segmento BD ó DC que á cada uno corresponde; 4.ª el cuadrado BC^2 de la hipotenusa será igual á la suma BA^2+CA^2 de los cuadrados de los catetos; y finalmente 5.ª la DA será cuarta proporcional á la hipotenusa BC y á los catetos CA, AB.

Dem. 1.ª Por tener los triángulos BAC y BAD un ángulo comun en B, y ademas el primero uno recto en A por el supuesto, y el segundo otro en D tambien recto, por ser la AD perpendicular á BC, dichos triángulos serán semejantes (485 cor. 2.º); ahora, por tener los triángulos BAC y DAC comun el ángulo en C, y ademas cada uno, uno recto, el primero en A, y el segundo en D, tambien serán semejantes; y una vez que los triángulos parciales BAD y DAC son semejantes ambos á uno mismo, que es el total BAC, serán semejantes entre sí; pues cosas semejantes á una tercera lo son entre sí (*).

2.ª Por ser BAD y DAC semejantes, tendrán proporcionales sus lados homólogos y será:

BD (lado menor del triángulo BDA): DA (su lado mediano)::
DA (lado menor del triángulo ADC): DC (su lado mediano),

como DA está formando los dos medios, y los segmentos BD y DC los estremos; inferimos que dicha perpendicular DA es media proporcional entre los dos segmentos BD y DC de la hipotenusa.

3.ª Comparando los lados homólogos de los triángulos semejantes BAC y BAD, darán:

BC (lado mayor del triángulo BAC): BA (su lado menor)::
BA (lado mayor del BAD): BD (su lado menor).

(*) *Tambien se puede convencer de que los triángulos BAD, DAC, son semejantes de esta manera: de ser semejantes BAC y BAD, se sigue que el ángulo en C $=$ al BAD, luego los triángulos BAD y DAC, ademas del ángulo recto en D, tienen otro ángulo igual, luego son semejantes.*

Comparando los BAC y CAD tendrémos;

BC (lado mayor del triángulo BAC): CA (su lado mediano)::
CA (lado mayor del DAC): DC (su lado mediano).

Ahora, como en estas dos proporciones los catetos BA, CA estan formando los medios, y los estremos estan formados por la hipotenusa y el segmento que corresponde á cada uno, se sigue que cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento correspondiente.

4.ª Si en estas dos proporciones últimas

$$BC : BA :: BA : BD \text{ y } BC : CA :: CA : DC$$

multiplicamos estremos y medios, tendrémos estas dos ecuaciones

$$BC \times BD = BA^2,\ BC \times DC = CA^2,$$

que si las sumamos, será $BC \times BD + BC \times DC = BA^2 + CA^2$.

Como en el primer miembro es comun el factor BC, si lo resolvemos en factores, se tendrá $BC\times BD + BC\times DC = BC(BD + DC)$; y como $BD + DC = BC$, se convertirá por último el primer miembro en $BC\times BC = BC^2$; y por lo mismo la ecuacion de arriba se convertirá en $BC^2 = BA^2 + CA^2$; pero BC es la hipotenusa, BA, CA los catetos, luego el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Esc. Si con las dos ecuaciones $BA^2 = BC\times BD$, $CA^2 = BC\times DC$, formamos proporcion, tendrémos $BA^2 : CA^2 :: BC\times BD : BC\times DC ::$ (§ 257) $BD : DC$, que nos dice que *los cuadrados de los catetos son entre sí como los segmentos de la hipotenusa.*

5.ª Los triángulos BAC, BAD dan $BC:CA::BA:AD$, luego la perpendicular es cuarta proporcional á la hipotenusa y á los catetos.

Cor. Una vez que $BC^2 = BA^2 + CA^2$, si estraemos la raiz cuadrada de ambos miembros, será $BC = \sqrt{BA^2 + CA^2}$; luego conociendo los dos catetos de un triángulo rectángulo, *conocerémos la hipotenusa, estrayendo la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.* Y si en la misma ecuacion se despeja un cateto, tal como CA, se tendrá $CA^2 = BC^2 - AB^2$, que da $CA = \sqrt{BC^2 - BA^2}$; la primera quiere decir que el *cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto*; y la segunda que en conociendo la hipotenusa y un cateto, se conocerá el otro cateto *estrayendo la raiz cuadrada de la diferencia de los cuadrados de la hipotenusa y del otro cateto.*

{*Cor.* 2.° Resulta igualmente que si el triángulo, ademas de ser rectángulo, fuese isósceles, esto es, si se tuviese ademas $BA = AC$, la ecuacion $BC = \sqrt{BA^2 + CA^2}$, daría $BC = \sqrt{BA^2 + BA^2} = \sqrt{2BA^2} = AB\sqrt{2}$; y como en este caso BC sería la diagonal del cuadrado construido sobre cualquiera de los lados, se deduce que *la diagonal de un cuadrado es igual á su lado multiplicado por* $\sqrt{2}$.}

488 Teor. *Si desde un punto cualquiera de la circunferencia se baja una perpendicular al diámetro, se verificarán cuatro cosas; 1.ª, la perpendicular será media proporcional entre los dos segmentos del diámetro; 2.ª, si desde los estremos del diámetro tiramos cuerdas á dicho punto de la circunferencia, estas cuerdas serán medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente que corta en el diámetro la perpendicular; 3.ª, los cuadrados de dichas cuerdas y en general los cuadrados de las cuerdas tiradas desde los estremos de un diámetro, tendrán unos con otros la misma razon que los segmentos correspondientes; 4.ª, que el cuadrado del diámetro es igual á la suma de los cuadrados de las cuerdas que desde sus estremos se tiren á un punto cualquiera de la circunferencia.*

Dem. Si desde el punto A de la circunferencia BAC (fig. 150), bajamos la perpendicular AD al diámetro, y unimos el punto A de la circunferencia con los estremos B, C del diámetro por medio de las AB, AC, en el triángulo BCA, el ángulo BAC es recto (454 cor. 3.°); y como desde A, que es el vértice del ángulo recto, se ha bajado la AD perpendicular á la BC, que es la hipotenusa, tenemos aquí un triángulo rectángulo, en que desde el ángulo recto se ha bajado una perpendicular á la hipotenusa, y por lo mismo se verificará (teor. antec.) 1.° que la perpendicular AD, será media proporcional entre los dos segmentos BD y DC; pero como aquí la perpendicular es la bajada al diámetro desde un punto de la circunferencia, y BD, DC son los segmentos de dicho diámetro, se sigue L. 1.° Q. D. D.

2.° Tambien se verificará que BA será media proporcional entre BC y BD, y CA entre BC y DC; y como BA y AC son cuerdas tiradas desde el estremo de un diámetro, y BC, BD, DC son el diámetro y los segmentos del diámetro que á dichas cuerdas corresponden, se sigue L. 2.° Q. D. D.

3.ª Por ser estas cuerdas medias proporcionales entre el diámetro y el segmento correspondiente, tendrémos

$$BC:BA::BA:BD \text{ y } BC:CA::CA:DC$$

de donde, multiplicando estremos y medios, sacarémos estas dos ecuaciones $BA^2 = BC\times BD$ y $CA^2 = BC\times DC$,
y formando proporcion, será $BA^2 : CA^2 :: BC\times BD : BC\times DC :: BD:DC$ (dividiendo la 2.ª razon por BC); pero BA y CA son cuerdas tiradas desde los estremos de un mismo diámetro, BD y DC son los segmentos que las perpendiculares bajadas desde los estremos de las cuerdas al diámetro, cortan en dicho diámetro; luego resulta L. 3.° Q. D. D.

4.ª Si sumamos las dos ecuaciones antecedentes $BA^2 = BC\times BD$, y $CA^2 = BC\times DC$, será

$BA^2 + CA^2 = BC \times BD + BC \times DC = BC(BD + DC) = BC \times BC = BC^2$; y como BC es el diámetro, y BA,AC son dos cuerdas tiradas desde sus estremos á un mismo punto de la circunferencia, se sigue L.4.°Q.D.D.

Cor. De aquí se deduce un método para hallar una media proporcional entre dos líneas; porque si suponemos que sean las L y K, *las pondríamos una á continuacion de otra, de modo que* $BD = L$, $DC = K$: *sobre toda la BC como diámetro trazaríamos un semicírculo BAC, en D levantaríamos la perpendicular DA, la cual sería*, en virtud de lo 1.° que acabamos de probar, *media proporcional entre BD y DC*, y por consiguiente entre sus iguales L y K.

Esc. 1.° Por este medio podrémos *hallar una línea* N, *tal que siendo dadas otras dos* K *y* L, *de las que* $K > L$, *se tenga* $K:L > K^3 : N^3$; para lo cual se hallará primero una media proporcional P entre K y L, y luego otra media proporcional N entre K y P, y esta será la línea que deseábamos.

En efecto, por la primera media proporcional P, se tiene K:P::P:L, ó ÷K:P:L, que da (§ 289) $K^2:P^2::K:L$, ó $K:L::K^2:P^2$ (m).

Por la segunda, se tiene ÷K:N:P, que da $K^2:N^2::K:P$ y (§ 271) $K^4:N^4::K^2:P^2$ (n); y como esta proporcion y la (m) tienen comun la razon $K^2:P^2$, será (§ 267 teor. 2.°) $K:L::K^4:N^4$.

Ahora, como por el supuesto $K > L$, será $K^4 > N^4$, y $K > N$; luego si dividimos el primer término de la razon $K^4:N^4$ por K, y el segundo por N, la razon $K^3:N^3$ que resulte, será menor que la $K^4:N^4$, y se verificará $K:L > K^3:N^3$, que era L. Q. D. H.

Esc. 2.° Una vez que $BA^2 = BC \times BD$ y BA es una cuerda cualquiera, se sigue que *el cuadrado de una cuerda es siempre igual al diámetro multiplicado por el segmento correspondiente á dicha cuerda.* Luego si se tienen dos cuerdas, tiradas cada una desde su diámetro, el cuadrado de cada una será igual al diámetro multiplicado por el segmento que le corresponde; y formando proporcion con las dos ecuaciones, se tendrá despues de simplificada la última razon, dividiendo sus dos términos por el diámetro, que en general los *cuadrados de las cuerdas son como los segmentos que causan en el diámetro, que pasa por uno de sus estremos, las perpendiculares bajadas desde los otros estremos.*

489 Teor. *En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados; y en todo triángulo acutángulo, el cuadrado del lado opuesto al mayor ángulo, es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.*

Espl. Sea primero el triángulo obtusángulo ABC (fig. 151): digo que el cuadrado de AB es mayor que la suma de los cuadrados de AC y CB; y si el triángulo ABC (fig. 152) es acutángulo, el cuadrado del lado mayor AB es menor que la suma de los cuadrados de AC y CB.

Dem. 1.° Si bajamos la perpendicular BD (fig. 151), el triángulo ADB será rectángulo, y tendrémos (487 4.ª) $AB^2 = AD^2 + BD^2$; pero $AD^2 = (AC + CD)^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2$, y por ser rectángulo el triángulo CBD tendrémos (487 cor.) $BD^2 = BC^2 - CD^2$; luego si ponemos en vez de estos cuadrados, sus valores en la ecuacion de arriba, se nos convertirá en $AB^2 = AC^2 + 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD$; luego el cuadrado del lado mayor en este triángulo obtusángulo es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, en dos veces el producto de AC por CD.

2.° Si bajamos la perpendicular BD (fig. 152), por ser rectángulo el triángulo ABD, tendrémos $AB^2 = AD^2 + BD^2$; pero $AD^2 = (AC - CD)^2 = AC^2 - 2AC \times CD + CD^2$; y por serlo tambien el BDC, tendrémos $BD^2 = BC^2 - CD^2$; y sustituyendo estos valores en el de AB, nos resultará $AB^2 = AC^2 - 2AC \times CD + CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times CD$; luego el cuadrado del lado mayor del triángulo acutángulo es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados en dos veces el producto de AC por CD.

Cor. De aquí se deduce, que si tres líneas a, b, c, son tales que $a^2 = b^2 + c^2$, el triángulo que se forme con ellas tendrá recto el ángulo opuesto al lado a; y si fuese $a^2 = b^2 - c^2$ sería recto el ángulo opuesto al lado b, porque pasando c^2 al otro miembro, será $a^2 + c^2 = b^2$.

490 Teor. *Si desde el vértice de un ángulo de un triángulo, se tira una línea al medio del lado opuesto, se verificará que la suma de los cuadrados de los lados que forman dicho ángulo, será igual al duplo del cuadrado de la línea tirada, mas el duplo del cuadrado de una de las partes en que queda dividido el lado opuesto.*

Espl. Sea el triángulo ABC (fig. 153): digo que si desde el vértice A de uno de sus ángulos, se tira una línea AE al medio del lado opuesto BC, se verificará que $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$.

Dem. Porque si se baja la perpendicular AD sobre la base BC, el triángulo AEC dará (489) $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2EC \times ED$ y ABE tambien dará $AB^2 = AE^2 + EB^2 + 2EB \times ED$.

Luego sumando y observando que $EB = EC$; se tendrá

$$AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2EB^2,$$ que era L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que *en todo paralelógramo la suma de los cuadrados de los lados, es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales.*

Porque las diagonales AC, BD (fig. 154) se cortan mútuamente en dos partes iguales en el punto E (468); por lo cual el triángulo AEC, da $AB^2 + BC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$; el ADC da igualmente $AD^2 + DC^2 = 2AE^2 + 2DE^2$; y sumando, teniendo presente que $BE = DE$, se tendrá $AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 = 4AE^2 + 4DE^2$.

Pero $4AE^2$ es el cuadrado de $2AE = AC$, y $4DE^2$ es el cuadrado de $2DE = BD$, luego la suma de los cuadrados &c.

491 Teor. *Si dos líneas se encuentran dentro de un círculo, se cortan en partes recíprocamente proporcionales.*

Espl. Se dice de dos líneas que estan divididas en partes recíprocamente proporcionales, cuando las partes de una línea, ó ella y una parte suya, forman los medios de una proporcion, y las partes de la otra, ó ella y una parte suya, forman los estremos; así, vamos á probar que las dos líneas BA, DC (fig. 155) que se encuentran dentro del círculo ADBC, se cortan de manera que AE:EC::ED:EB.

Dem. Porque uniendo los puntos D y A por la DA, los B y C por la BC, los triángulos DAE, BEC son semejantes, pues tienen los ángulos en E iguales por opuestos al vértice, y los en D y en B iguales por insistir sobre un mismo arco AC (454 cor. 2.°); luego comparando sus lados homólogos, se tendrá AE (lado opuesto al ángulo D en el triángulo DAE): EC (lado que en el BEC se opone á su igual en B) :: ED (lado opuesto al ángulo en A): EB (lado opuesto á su igual en C), que era L. Q. D. D.

Esc. La inversa de esta proposicion tambien es verdadera; es decir, que si se tiene AE:EC::DE:EB, los estremos A, C, B, D estarán en la circunferencia de un círculo. Porque supongamos que la circunferencia que pasa por los estremos C, A, D no pase por el punto B, sinó por el punto M por ejemplo: en este caso, se tendrá por la proposicion anterior AE: EC:: DE: EM; pero como esta proporcion y la del supuesto tienen los tres primeros términos iguales, resulta que el cuarto tambien lo será y se tendrá EM=EB, y como esto es un absurdo, pues una línea es parte, y la otra todo, resulta que no se puede suponer que la circunferencia que pase por tres de los puntos, deje de pasar por el cuarto.

Esta demostracion se debe á mi amigo el P. Jacinto Feliu, Profesor que ha sido de Matemáticas en la academia Militar de Valencia, quien me la ha remitido juntamente con otras proposiciones interesantes acerca de las secantes, y otras demostraciones nuevas de las proposiciones del cuadrado de la hipotenusa, &c.

492 Teor. *Si desde un punto fuera del círculo se tiran dos secantes que terminen en la parte cóncava de la circunferencia, las partes esternas serán recíprocamente proporcionales con las secantes enteras.*

Espl. Si desde P (fig. 156) se tiran al círculo ABDC dos secantes PD, PC, voy á demostrar que tendrémos PA:PB::PD:PC.

Dem. Porque si tiramos las CB y DA, los triángulos PBC, PAD, ademas del ángulo comun en P, tienen iguales los ángulos C y D (454 cor. 2.°); luego serán semejantes y darán PA:PB::PD:PC. Luego &c.

493 Teor. *Si desde un punto fuera de un círculo se le tira una tangente y una secante, la tangente será media proporcional entre toda la secante, y la parte esterna.*

Espl. Si desde P (fig. 157) se tira al círculo CAB una tangente

PC, y una secante PB, voy á demostrar que PA:PC::PC:PB, ó ÷PA: PC: PB.

Dem. Porque uniendo el punto C con A y B por medio de las CA, CB, los triángulos PCA, PCB, ademas del ángulo comun en P, tienen los ángulos PCA, CBP iguales, porque ambos tienen por medida la mitad del arco CA, el 1.° por estar formado por una tangente y una cuerda, y el 2.° por tener su vértice en la circunferencia y abrazar el arco AC; luego serán semejantes y darán PA:PC::PC:PB, ó ÷ PA: PC:PB, que era L. Q. D. D. (*)

494 Probl. *Dividir una línea dada en media y estrema razon.*

Espl. Se dice que una línea está dividida en *media y estrema razon*, cuando está dividida en dos partes tales, que la mayor es media proporcional entre toda la línea y la parte menor. Así, lo que aquí se nos propone es que dividamos la AB (fig. 158) en dos partes AD, DB, tales que BA:BD::BD:DA.

Res. En el estremo de la línea dada levántese una perpendicular AC $=\frac{1}{2}$AB: haciendo centro en C con un radio AC, trácese el círculo FAE, únase el punto B con el centro C por medio de una línea BCF,

---

(*) *Acerca de las secantes podríamos demostrar algunas proposiciones de importancia, de las que pondrémos aquí solo las siguientes, de que harémos algun uso en adelante.*

1.ª Si las dos secantes BM, BD (fig. 157*), de las cuales la BM pase por el centro, son tales que la parte BA sea menor que una media proporcional entre BC y CD (*lo cual sucede siempre que CD > BC porque en este caso la media proporcional entre BC y CD, será > BC > BA* (441)), digo que desde B se puede tirar la secante BHI, tal que BH sea la media proporcional entre BC y CD.

Dem. Porque concibiendo la tangante BG, será mayor que la media proporcional entre BC y CD, por serlo entre BD y EC; por lo cual, haciendo centro en B con un radio igual á la media proporcional entre BC y CD, cortará á la circunferencia en un punto entre G y A, por ejemplo en H, y tirando la BH encontrará á la circunferencia en otro punto I, y será secante, que era L. *Q.* D. D.

2.ª Si dos secantes BD, BF son tales, que la parte esterior BE de la una, sea media proporcional entre las partes BC y CD de la otra, digo que la BC, parte esterna de esta, es media proporcional entre las dos partes BE, EF de aquella.

Dem. Porque siendo (492) *BE:BC::BD:BF, y teniendo por el supuesto CD:BE::BE:BC, resultará CD:BE::BD:BF; la cual en virtud de lo espuesto* (§ 267 *teor.* 5.°), *dará CD:BE::BC:EF::BE:BC, é invirtiendo la proporcion que forman las dos últimas razones, se tendrá EF:BC::BC:BE, que era* L. *Q.* D. D.

3.ª Si dos secantes BD, BF fuesen tales que entre sus partes se y tómese en la AB una parte BD igual con BE, y tendrémos lo que se nos pedía.

Dem. Por la construccion hecha, se tienen tiradas desde B una tangente (444) y una secante; luego se tendrá (493) $BF:BA::BA:BE = BD$, ó dividiendo $BF - BA:BA::BA - BD:BD$; pero siendo el radio $CE = \frac{1}{2}AB$, resulta que el diámetro $FE = AB$, luego $BF - BA = BF - FE = BE = BD$; y como $BA - BD = AD$, resulta que esta proporcion se nos convertirá en $BD:BA::DA:BD$, que invertida, da $BA:BD::BD:DA$, que era L. Q. D. D.

Esc. En muchas ocasiones se necesita determinar los segmentos en que queda dividido el lado de un triángulo por una perpendicular bajada desde el ángulo opuesto; y por lo mismo vamos á demostrar *que si desde el ángulo B del triángulo CBA (fig. 158*), se baja una perpendicular al lado opuesto, se verificará que el lado sobre que cae la perpendicular es á la suma de los otros dos, como la diferencia de estos, á la diferencia de los segmentos en que queda dividido dicho lado por la perpendicular.*

En efecto, si haciendo centro en B con un radio igual al lado me-

---

verificase la proporcion $CD:BE::BC:EF$, digo que estas cuatro líneas serán continuo proporcionales geométricas, y por consiguiente BE, BC dos medias proporcionales entre CD y EF; es decir, que se tendrá $CD:BE::BE:BC::BC:EF$.

Dem. Porque siendo por el supuesto $CD:BE::BC:EF$, tendrémos en virtud de lo demostrado (267 *teor.* 4.º) $CD:BE::BD:BF::BE:BC$; *luego $CD:BE::BE:BC::BC:EF$, que era L. Q. D. D.*

4.ª Dada una recta AB (fig. 113*), trazar un círculo que pase por dos puntos C y D fuera de ella, y que sea tangente á dicha línea.

Res. Unanse C y D por medio de la CD, que se prolongará hasta que encuentre á la AB ó á su prolongacion en un punto tal como E; trácese sobre EC un semicírculo CBE; levántese en D la DF perpendicular á EC; haciendo centro en E con el radio EF, trácese el arco FK, y haciendo pasar un círculo por los puntos D, K, C (438), *digo que será tangente á la AB.*

Dem. La EF es (488) *media proporcional entre EC y ED; pero $EF = EK$; luego la EK es media proporcional entre EC y ED; luego* (493) *la EK será tangente del círculo DKC.*

Esc. Este problema tiene dos resoluciones; pues tomando $EK' = EK$, el punto K' tambien sería punto de contacto del círculo que pasase por él y por C y D.

Si la CD resultase paralela á AB, se dividiria CD en dos partes iguales por medio de una perpendicular, y haciendo pasar un círculo por el punto en que encontrase á la AB; y por los dos puntos dados C y D, sería tangente á la AB.

nor BC, trazamos la circunferencia, CFG, y prolongamos la AB hasta que encuentre á dicha circunferencia, tendrémos tiradas desde A dos secantes, y nos darán (§ 492) $CA:AE::AG:AF$; pero CA es el lado sobre que cae la perpendicular, $AE = AB + BE = AB + BC$ es la suma de los otros dos lados, $AG = AB - BG = AB - BC$, y $AF = AD - DF = AD - DC$, porque BD divide á CF en dos partes iguales luego si sustituimos estos valores, tendrémos la proporcion $CA:AB + BC::AB - BC:AD - DC$, que espresa la proposicion enunciada.

De donde se deduce, que si llamamos b al lado AC, a al BC, y c al BA, se tendrá $AF =$ diferencia de segmentos $= \frac{(c+a)(c-a)}{b}$; y como conocemos la suma de dichos segmentos, tendrémos (§ 229)

$$\text{Seg. Mr.} = \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(c+a)(c-a)}{b}, \text{ y seg. mr.} = \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{(c+a)(c-a)}{b}.$$

495 Teor. *Si desde dos ángulos homólogos de dos figuras semejantes $ABCDE$, $abcde$* (fig. 145), *se tiran diagonales á los demas ángulos, los triángulos homólogos ó colocados de un mismo modo, serán semejantes.*

Dem. Por ser las figuras semejantes, se tiene $AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::EA:ea::$, y $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$. Luego los triángulos ABC, abc tienen el ángulo en $B = b$, formado por dos lados proporcionales, y por lo mismo son semejantes y dan $BC:bc::CA:ca::CD:cd$ (por la série de razones iguales del supuesto), y el ángulo $ACB = acb$; luego si de los ángulos totales en C y c que son iguales, quitamos los iguales ACB, y acb, los residuos ACD, acd, tambien serán iguales: por lo que los triángulos ACD, acd tienen un ángulo igual á un ángulo formado por dos lados proporcionales, luego son semejantes; y como lo mismo demostraríamos de todos los demas, resulta L. Q. D. D.

496. Esc. *Tambien se verifica la inversa, á saber, que si dos figuras se componen de un mismo número de triángulos semejantes y del mismo modo colocados en cada figura, son semejantes.*

Porque en primer lugar, de la semejanza de los triángulos ABC, abc, se deduce que el ángulo $B = b$, y $BCA = bca$; de la de los triángulos ACD, acd, se deduce que $ACD = acd$; si sumamos estas dos ecuaciones, tendrémos ángs. $BCA + ACD =$ ángs. $bca + acd$, ó áng. $BCD =$ áng. bcd; y como lo mismo demostraríamos de los demas ángulos, resulta que las figuras $ABCDE$, $abcde$ tienen iguales sus ángulos.

Para demostrar que tienen sus lados proporcionales, observarémos que los triángulos semejantes ABC, abc dan $AB:ab::BC:bc::AC:ac$, los
ACD, acd dan $AC:ac::DC:dc::AD:ad$
los ADE, ade dan $AD:ad::DE:de::EA:ea$

La segunda de estas séries de razones iguales tiene comun con la primera la razon $AC:ac$, y la tercera tiene con la segunda comun la $AD:ad$, luego podrémos enlazar las tres de este modo

$$AB:ab::BC:bc::AC:ac::DC:dc::AD:ad::DE:de::EA:ea$$

ó prescindiendo de las razones en que entran las diagonales, será

$$AB:ab::BC:bc::DC:dc::DE:de::EA:ea$$

Luego, ademas de tener los ángulos iguales, tienen proporcionales los lados, y por lo mismo son semejantes.

Cor. De aquí se deduce que los *perímetros de las figuras semejantes guardan la misma razon que sus lados homólogos ó diagonales homólogas.* Porque si en la série de razones iguales de antes, comparamos la suma de antecedentes con la de consecuentes, tendrémos $AB+BC+CD+DE+EA : ab+bc+cd+de+ea :: AB:ab::BC:bc::AC:ac::$ &c: &c; pero $AB+BC+CD+$&c, y $ab+bc+cd+$&c, son los perímetros, luego los perímetros de las figuras semejantes &c.

Y como los polígonos regulares de un mismo número de lados, son (481) semejantes, resultará que *sus perímetros guardarán la misma razon que sus lados homólogos, y que todas sus líneas homólogas; luego serán como sus radios rectos y como sus radios oblicuos.*

497 Probl. *Dado un polígono regular inscrito en un círculo, inscribir otro de duplo número de lados, {y hallar el lado de este último.}*

Res. y Dem. Sea BA (fig. 159), uno de los lados del polígono que se nos da inscrito: si se divide el arco $AB'B$ que subtende, en dos partes iguales en el punto B', y se tiran las AB', $B'B$, serán dos lados contiguos del polígono regular de duplo número de lados; pues los arcos que subtenden son la mitad del arco $AB'B$ que subtendia el lado del polígono propuesto, y á cada lado AB corresponderán ahora dos.

{Para hallar el valor del lado de dicho polígono, prolongarémos el radio $B'O$ hasta D, y por ser toda cuerda $B'A$ media proporcional entre el diámetro $B'D$ y el segmento correspondiente $B'E$ (488 2.ª), tendrémos $B'D:B'A::B'A:B'E$,

de donde multiplicando estremos y medios, considerando que el diámetro $B'D$ es duplo del radio $B'O$, será

$$BA'^2 = B'D \times B'E = 2B'O \times B'E;$$

pero $B'E = B'O - EO$, y como el triángulo AEO es rectángulo en E se tendrá (487 cor.) $EO = \sqrt{AO^2 - AE^2} = \sqrt{B'O^2 - AE^2}$, y será $B'E = B'O - \sqrt{B'O^2 - AE^2}$; y como (436) $AE^2 = (\frac{1}{2}AB)^2$, sustituyendo este valor en el de $B'E$, será $B'E = B'O - \sqrt{B'O^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$; poniendo este valor de $B'E$ en la ecuacion $B'A^2 = 2B'O \times B'E$, se convertirá en $B'A^2 = 2B'O\,(B'O - \sqrt{B'O^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}$, y estrayendo la raiz cuadrada, será $B'A = \sqrt{2B'O(B'O - \sqrt{B'O^2 - (\frac{1}{2}AB)^2}}\,)$.

{*Esc.* 1.° Si hacemos ahora igual á la unidad el radio $B'O$ del círculo en que estan inscritos los polígonos, se convertirá esta ecuacion en

$$B'A = \sqrt{2.1(1 - \sqrt{1^2 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}} = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2}AB)^2}} =$$

$$\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}(AB)^2}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{4 - AB^2}{4}}} =$$

$$\sqrt{2 - \frac{2\sqrt{4 - AB^2}}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AB^2}} \qquad (a)$$

{*Esc.* 2.° Si se dividiese ahora en dos partes iguales en el punto B'' el arco AB', se tendría del mismo modo

$B''A = \sqrt{2 - \sqrt{4 - AB'^2}}$, y sería $B''A$ el lado del polígono de duplo número de lados del que tenía el correspondiente al lado AB' y siguiendo del mismo modo, inscribiríamos tantos polígonos de duplo número de lados como quisiéramos.

{Ahora en la ecuacion (*a*), vemos que *para hallar el lado del polígono de duplo número de lados tendrémos que sacar primero la raiz cuadrada de* $4 - AB^2$, *luego restarla de* 2, *y volver á estraer de esta resta una raiz cuadrada*, lo que no puede menos de ser muy complicado, particularmente cuando se tenga que repetir muchas veces esta operacion de ir inscribiendo polígonos de duplo número de lados; por lo cual si tuviésemos necesidad de hallar el lado de un polígono de un número de lados ocho veces mayor que el otro, para evitar el sacar dos raices á cada operacion, hallando primero el lado del polígono de duplo número de lados del que se nos da, y luego el de duplo número de lados de este último, que será de cuádruplo número de lados respecto del que se nos da, y luego el de óctuplo &c, en vez de hallar los lados de dichos polígonos, hallarémos el valor de las cuerdas de los arcos, que son suplementos de los arcos correspondientes á los lados del polígono, lo que nos escusará el hacer la mitad de las estracciones de raices; á estas cuerdas las llamarémos con Vieta *apótomes.*

{En efecto, pues que los triángulos ABC, $AB'C$, $AB''C$ &c, tienen recto el ángulo que tiene cada uno en la circunferencia, serán rectángulos, y tendrémos (487 cor. 1.°) $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ $B'C = \sqrt{AC^2 - AB'^2}$ &c. Si tomamos el radio AO por unidad, por ser AC duplo de AO, será $AC = 2$, y tendrémos

$BC = \sqrt{2^2 - AB^2} = \sqrt{4 - AB^2}$, $B'C = \sqrt{4 - AB'^2}$,

y como la ecuacion (*a*) da $B'A^2 = 2 - \sqrt{4 - AB^2}$, si sustituimos en vez de $\sqrt{4 - AB^2}$ su valor BC, será $B'A^2 = 2 - BC$,

y poniendo este valor en el de B'C será

$$B'C = \sqrt{4 - (2 - BC)} = \sqrt{4 - 2 + BC} = \sqrt{2 + BC};$$

y del mismo modo tendríamos $B''C = \sqrt{2 + B'C}$, &c.

De donde se sigue que *hallando primero el valor de BC, solo con añadirle dos unidades, y estraer la raiz cuadrada, tendrémos la apótome del polígono de duplo número de lados; y añadiendo á esta otras dos unidades, y estrayendo la raiz cuadrada, tendrémos la del siguiente*, y así continuando, tendríamos las demas; despues, para hallar el lado que deseamos, no haríamos mas que *restar el cuadrado de la apótome en que nos háyamos detenido, del cuadrado del diámetro, y estraer la raiz cuadrada*; con lo cual tendrémos el lado del polígono propuesto, no habiendo estraido sino la mitad de las raices que se hubieran necesitado, calculando directamente los lados.

Cor. De aquí se deduce, que pues hemos dado métodos para inscribir un triángulo y un cuadrado, tenemos medios ya para inscribir en el círculo los polígonos, cuyo número de lados esté espresado por alguno de los números de estas dos progresiones geométricas:

∺ 3:6:12:24:48:96:&c. y ∺ 4:8:16:32:64:&c.

498 *Esc.* 1.° Tambien se pueden inscribir todos los de la progresion ∺ 5: 10: 20: 40: &c; porque se puede inscribir el pentágono y decágono directamente. En efecto, dividiendo el radio AO (fig. 160), en media y estrema razon, será la parte mayor OM el lado AB del decágono.

Porque tirando la MB, se tiene por construccion AO: OM :: OM: AM, ó á causa de BA = OM, será AO: AB:: AB: AM, luego los triángulos ABO, AMB tienen un ángulo comun A formado por lados proporcionales, luego son semejantes (484). El triángulo OBA es isósceles, luego el AMB lo será tambien, y se tendrá AB = BM; y como por construccion AB = OM, resulta tambien MB = OM; luego el triángulo BMO, es isósceles.

Ahora, el ángulo AMB es esterno del triángulo isósceles BMO, luego será duplo del interno O; pero el AMB = MAB, luego el triángulo OAB, es tal que cada uno de los ángulos en la base OAB, ú OBA es duplo del ángulo del vértice; luego los tres ángulos del triángulo AOB valen cinco veces el ángulo O, de donde se deduce, que valiendo todos, dos ángulos rectos, ó π, resultará el ángulo O igual á la quinta parte de dos rectos, ó á la décima de cuatro; luego el arco AB es la décima parte de la circunferencia, y la cuerda AB el lado del decágono regular.

Cor. 1.° De aquí se deduce que si se unen de dos en dos los ángulos del decágono, se tendrá el pentágono regular ACEGI.

Cor. 2.° Puesto que AB es el lado del decágono, si suponemos que AL sea el del exágono, tendrémos entónces que el arco

$$BL = ABL - AB = \frac{2\pi}{6} - \frac{2\pi}{10} = \frac{20\pi - 12\pi}{60} = \frac{8\pi}{60} = \frac{2\pi}{15}$$

luego la cuerda BL, será el lado del *penta-decágono* ó polígono regular de 15 lados. Luego tambien podemos inscribir todos los de esta progresion ∺ 15: 30: 60: 120: &c.

Esc. 2.° Hasta ahora se habia creido que solo los polígonos de un número de lados espresado por los términos de estas progresiones, eran los que se podian inscribir en el círculo por los procedimientos de la Geometría elemental, ó lo que es lo mismo, por la resolucion de las ecuaciones de primero y segundo grado; pero Ch. Teder Gauss, Geómetra de Brunswick, en una obra intitulada *Disquisitiones Aritmeticæ Lipsiæ* 1801 (*), ha demostrado que se puede inscribir por semejantes medios el polígono regular de 17 lados, y en general el de $2n+1$ lados, con tal que $2n+1$ sea un número primero. (Véase el § 94 de nuestro 2.° tomo).

499 Probl. *Dadas dos magnitudes desiguales A y B, y el círculo CDF* (fig. 161) *inscribir y circunscribir al círculo un polígono tal, que el lado del circunscrito tenga con el del inscrito una razon menor que la mayor magnitud A tiene con la menor* B.

Res. Hállense primero dos líneas OP, OQ que tengan la razon de A: B (479 esc. 1.° de probl. 5.°), de manera que OP:OQ::A:B; sobre la mayor OP trácese un semicírculo PQO, y tirando desde O la cuerda OQ, unirémos el punto P con el Q por medio de la PQ; hecho esto divídase la circunferencia CDF en dos partes iguales, por medio del diámetro DF, la mitad DCF de esta circunferencia en otras dos partes iguales, y continúese del mismo modo hasta que el ángulo DGK, mitad del DGH, sea menor que el POQ, y sea por ejemplo igual con QOR; por K tírese la tangente LM, que encuentre en L y M á los radios GD, GH prolongados, y tírese la DH: digo que LM es el lado del polígono circunscrito, y DH el del inscrito.

Dem. En primer lugar, por haberse dividido la circunferencia en dos partes iguales, y luego en otras dos &c, el arco DKH está con-

(*) *Esta obra se halla traducida ya al francés.*

tenido un número exacto de veces en la circunferencia, y por lo mismo LM y DH son lados de polígonos regulares, esto es, que LM es lado de un polígono que se puede circunscribir al círculo, y DH es el de uno que se puede inscribir. Ahora, por ser los ángulos DGN, ROQ iguales, y rectos los ángulos GND, OQP, serán semejantes (485 cor. 2.°) los triángulos DGN, ROQ; por lo cual GD=GK:GN::OR:OQ<OP:OQ; pero GK:GN::LK:DN::2LK:2DN::LM:DH. Luego LM:DH<OP:OQ::A:B, que era L. Q. D. H. D.

{*Esc.* Del mismo modo demostraríamos que á un arco cualquiera de círculo se le puede inscribir y circunscribir una porcion de polígono regular, esto es, que todos los lados fuesen iguales, tal que el lado del circunscrito tuviese la misma razon con el del inscrito que la que acabamos de decir, para lo cual no habría mas que dividir el arco en dos partes iguales, y luego en otras dos &c, así como antes lo hemos hecho, empezando por toda la circunferencia; pero debemos advertir, que aunque la porcion de polígono inscrita y circunscrita al arco es regular, esto es, tiene todos sus lados y ángulos iguales, no por eso formará siempre parte de un polígono regular inscrito y circunscrito á todo el círculo; pues esto solo se podrá verificar en general cuando el arco último en que queda dividido, está contenido exactamente en toda la circunferencia.}

500 Teor. *Si en un círculo inscribimos un polígono cualquiera, y despues otro de duplo número de lados, y asi sucesivamente, la sagita correspondiente á estos polígonos, irá siendo mas de dos veces menor, y por lo mismo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Espl. Sea por ejemplo ABED (fig. 162), un cuadrado inscrito en el círculo: digo que si se le inscribe un octógono, y luego un polígono de 16 lados y así sucesivamente, se verificará que la sagita BK del cuadrado, será mas de dos veces menor que el radio BC, y la BR del octógono mas de dos veces menor que la BK del cuadrado, y así sucesivamente; de manera que al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

Dem. Si dividimos el arco BA en dos partes iguales en H y tiramos la BH, esta será el lado del polígono de duplo número de lados; y por ser los cuadrados de las cuerdas tiradas desde los estremos de un diámetro (488 3.ª) como los segmentos que causan en dicho diámetro las perpendiculares tiradas desde los estremos de las cuerdas, tendrémos $BA^2:BH^2::BC:BK$; y como por ser obtusángulo el triángulo BHA, el cuadrado de AB es mayor (489) que la suma de los cuadrados de los lados BH, HA, y estos son iguales por ser lados del octógono, será el cuadrado de BA mayor que el duplo del cuadrado de BH, ó lo que es lo mismo BH^2 será mas de dos veces menor que BA^2; por lo que la proporcion anterior nos dará que BK, es mas de dos

veces menor que el radio BC. Pero BK es la sagita del cuadrado, pues si prolongamos la HK hasta M, el arco HBM valdrá 90° ó $\frac{1}{2}\pi$, por ser tambien duplo de BFH; luego HM, será lado del cuadrado inscrito, y como llamamos sagita en un polígono inscrito á la diferencia que hay entre el radio del círculo á que lo está, y el radio recto de dicho polígono, se sigue que en efecto BK es la sagita del cuadrado; luego esta es mas de dos veces menor que el radio.

Si dividimos el arco HFB en dos partes iguales, y tiramos las BF, FH, estas serán dos lados contiguos del polígono de 16 lados, y BR será la sagita del octógono, y por la misma razon que antes, será $BH^2:BF^2::BK:BR$; mas, por lo espuesto antes, BF^2 es mas de dos veces menor que BH^2; luego tambien será BR mas de dos veces menor que BK; y como á cada vez que inscribamos un polígono de duplo número de lados, hacemos mas de dos veces menor á la sagita, se deduce (325), que llegarémos á tener al cabo de cierto tiempo una sagita menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea L. Q. D. D.

501 Probl. *Dado un polígono regular inscrito, en un círculo, circunscribirle otro del mismo número de lados, y hallar el valor del lado de este último.*

Res. y *Dem.* Sea *abcdef* (fig 163), el polígono propuesto; tírense los radios oblicuos O*a*, O*b* &c; levantense en los estremos de estos radios las perpendiculares AF, BA, CB &c, y el conjunto de estas perpendiculares que son tangentes del círculo *abcdef* (444), formará el contorno del polígono circunscrito.

En efecto, los triángulos *a*A*b*, *b*B*e* &c, son todos iguales é isósceles; porque los lados *ab*, *bc*, *cd* &c, son iguales por el supuesto, y los ángulos A*ab*, A*ba*, B*bc* &c, formados por estos lados iguales, que son las cuerdas de los arcos iguales *ab*, *bc* &c, y por las tangentes A*a*, A*b*, *b*B &c, son tambien iguales (453), luego 1.° $aAb = bBc$, y 2.° $aA = Ab = bB =$ &c, de donde sale tambien $AB = 2Ab$, $BC = 2Bc$ &c, y por consiguiente $AB = BC = CD =$ &c, luego el polígono, teniendo sus lados y ángulos iguales, será regular como se pide.

{Para hallar el valor del lado AB del polígono circunscrito, observarémos que por ser el ángulo O*a*A recto, y el OG*a* tambien, por ser la *a*G perpendicular á OA, los triángulos *a*GO y A*a*O (485 cor. 2.°) serán semejantes, pues ademas del ángulo recto dicho, tienen comun el *a*OG; y por ser semejantes, darán OG (lado mediano del triángulo OG*a*): *a*G (su lado menor):: *a*O (lado mediano del triángulo *a*OA):*a*A (su lado menor); y como una proporcion no se altera aunque se multipliquen por una misma cantidad los consecuentes, si aquí multiplicamos por 2 los consecuentes *a*G, *a*A, el primero será igual con *ab*, lado del polígono inscrito, y el segundo con AF, lado del circunscrito; y la proporcion de arriba, será

$OG : ab :: aO : AF = \frac{ab \times aO}{OG}$, y como (487 cor. 1.°) $OG = \sqrt{Oa^2 - aG^2}$ $= \sqrt{Oa^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}$, será $AF = \frac{ab \times aO}{\sqrt{Oa^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}}$; y si al lado menor ab le llamamos l, al mayor AF, L, y al radio Oa, R, tendrémos $L = \frac{l \times R}{\sqrt{R^2 - (\frac{1}{2}l)^2}}$, que suponiendo el radio R igual con la unidad será $L = \frac{l \times 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}l^2}} = \frac{l}{\sqrt{\frac{4 - l^2}{4}}} = \frac{l}{\frac{\sqrt{4 - l^2}}{2}} = \frac{2l}{\sqrt{4 - l^2}}$.

{*Esc.* Pues que hemos ya dado medios para inscribir polígonos de duplo número de lados &c, *podrémos tambien circunscribir, con el auxilio del problema que acabamos de resolver, polígonos de duplo, cuadruplo &c, número de lados.* Pero tambien se puede resolver el problema de circunscribir un polígono de duplo número de lados directamente de este modo. Supongamos que se nos dé el cuadrado MRUO (fig. 164) circunscrito al círculo; si concebimos por los puntos Q, *D*, &c. medios de los arcos *bA*, *Aa*, las tangentes PN, BT, &c, estas formarán con las partes que intercepten en los lados, un octógono *a*TBNP &c que será regular, por tener los ángulos y lados iguales. En efecto, el ángulo en B tiene por medida (457 esc.) á π — AD, el en N á π — QA, y como AD = AQ por la construccion hecha, se tendrá que estos dos ángulos tendrán una misma medida y serán iguales, y del mismo modo se demostraría de los demas.

{Ahora, para demostrar que los lados son iguales, observarémos que si tiramos las QA, AD, serán iguales por cuerdas de arcos iguales, y por lo acabado de demostrar, los triángulos QNA, ABD serán iguales é isósceles, lo que dará QN = NA = AB = &c, y por consiguiente sus duplos tambien serán iguales, lo que dará

2QN = 2NA = 2AB = &c, ó PN = NB = &c. }

502 Teor. *Si á un círculo se le circunscribe un polígono regular cualquiera; y despues otro de duplo número de lados, 1.° el lado de este último será mas de dos veces menor que el lado del anterior; y 2.° la sagita del segundo será mas de dos veces menor que la sagita del primero; y por lo mismo, haciéndose estas líneas mas de dos veces menores al paso que se circunscriben polígonos de duplo número de lados, dichas líneas podrán llegar á ser menores que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sea MRUO (fig. 164) un cuadrado circunscrito al círculo:

si tiramos los radios oblicuos CR, CN &c, y por los puntos en que estos corten á la circunferencia tiramos las tangentes BT, NP &c, quedará circunscrito el octógono *a*TBNP &c, que será regular (esc. antec.), porque los triángulos en que dividan á cada cuadrado *b*CAM, siendo iguales entre sí (466) é isósceles, tendrán iguales los ángulos *b*CM, MCA, ACD, DC*a*, y por consiguiente los arcos *b*Q, QA, AD &c que los miden, serán tambien iguales.

Ahora, por ser rectángulo en D el triángulo BDR, será la hipotenusa BR > BD (§ 370); y como el triángulo ABD es isósceles por tener los ángulos CDA, BAD una misma medida que es la mitad del arco A*c*D, será BD = BA, y por lo mismo BR > BA; por la misma razon se tendrá tambien MN > NA, y sumando ordenadamente será BR + MN > BA + NA = NB; pero BR + MN = MR — NB; luego la desigualdad de antes, se convertirá en MR — NB > NB, ó añadiendo á ambos miembros la NB, será MR > 2NB, ó dividiendo por 2, se tendrá $\frac{MR}{2} > NB$, ó $NB < \frac{MR}{2}$; y como NB es el lado del octógono, y MR el del cuadrado, se sigue que el lado del octógono es mas de dos veces menor que el lado del cuadrado; y como si fuésemos circunscribiendo polígonos de duplo número de lados, demostraríamos del mismo modo que á cada operacion iría siendo el lado del polígono mas de dos veces menor, podíamos hacer que dicho lado fuese menor que cualquier cantidad dada por pequeña que fuese, que era L. 1.° Q. D. D.

2.° La B*c* que es la sagita del polígono circunscrito, por ser la diferencia entre su radio oblicuo y el recto ó radio del círculo á que lo está, es mas de dos veces menor que DR, diferencia entre el radio oblicuo y recto del de un subduplo número de lados. Para demostrarlo, bajarémos la D*l* perpendicular á C*a*, y será paralela á R*a*; por lo que el triángulo C*a*R dará $Ca : CR :: la : DR = \frac{CR \times la}{Ca}$; y por ser el arco *a*D la mitad del AD*a*, será D*l* semilado del cuadrado inscrito, y por lo mismo $la = DS$; luego, sustituyendo este valor, será $DR = \frac{CR \times DS}{Ca} = \frac{1}{Ca} \times CR \times DS$. Considerando tirada tambien la *cs* perpendicular á CD, será paralela á BD, y el triángulo CDB dará $CD : CB :: Ds : Bc = \frac{CB \times Ds}{CD} = \frac{1}{CD} \times CB \times Ds$; pero en este valor de B*c* entra como factor D*s*, que es mas de dos veces menor que DS y ademas el otro factor $\frac{1}{CD}\times CB$ es menor que $\frac{1}{Ca}\times CR$, porque los denominadores son iguales, y CB es menor que CR, luego el valor de Bc será mas de dos veces menor que el de DR; luego á cada circunscricion de polígono de duplo número de lados; vamos haciendo la sagita diferencia entre el radio oblicuo y recto, mas de dos veces menor, y por lo mismo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, que era L. 2.° Q. D. D.

503 Teor. *Si en un círculo se inscribe y circunscribe un polígono de un mismo número de lados, y despues se inscriben y circunscriben otros de duplo número de lados, y así sucesivamente, la diferencia entre el perímetro del circunscrito y el del inscrito, llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Por ser semejantes los polígonos regulares de un mismo número de lados (481), sus perímetros serán proporcionales (496 cor.) con sus radios rectos; luego si al perímetro del circunscrito le llamamos P, R á su radio recto, que es el radio del círculo, al perímetro del inscrito p y r á su radio recto, tendrémos $P:p::R:r$, que dividiendo, da $P-p:P::R-r:R$; de donde sale $P-p=\frac{P(R-r)}{R}$; pero $R-r$, que entra como factor en el valor de $P-p$, es la sagita (469) del polígono inscrito, la cual va siendo mas de dos veces menor al paso que se inscriben polígonos de duplo número de lados (502); luego el producto en que entra (325 cor. 3.°), y por consiguiente la diferencia $P-p$ de los perímetros, llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. L. Q. D. D. (*).

Cor. De aquí se infiere que si la diferencia entre el perímetro del polígono circunscrito y el del inscrito, puede ser menor que cualquier cantidad dada, con mas razon *se podrá circunscribir ó inscribir un polígono al círculo en que la diferencia entre el perímetro de uno ú otro y la circunferencia, sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea*; pues como la circunferencia (459) es mayor que el perímetro del polígono inscrito, y menor que el del circunscrito, al acercarse estos perímetros el uno al otro, se acercarán con mas razon á la circunferencia; y si la diferencia entre dichos perímetros podia ser menor que cualquier cantidad dada, con mas razon la diferencia entre el perímetro de uno de los polígonos y la circunferencia, llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

(*) *Mr. Peyrard, al demostrar esta proposicion, página 466 de la obra ya citada, deduce con exactitud la ecuacion*

$$P-p=\frac{P(R-r)}{R}$$

y despues continúa del modo siguiente:

"Mas pues que la cantidad R — r disminuye siempre á medida que aumenta el número de lados de los polígonos circunscritos é inscritos, es evidente que continuando circunscribiendo al círculo polígonos regulares cuyo número de lados sea siempre doble, é inscribiéndole polígonos semejantes, sucederá necesariamente que la cantidad $\frac{P}{R}(R-r)$ *llegará á ser menor que la cantidad N."*

Y como tenemos demostrado en el escolio del § 325, que hay espresiones que continuamente van disminuyendo, y que sin embargo jamas llegarán á ser menores que una cantidad dada, resulta que es inexacta y defectuosa la conclusion de Mr. Peyrard, y la de otros autores que se espresan en los mismos ó análogos términos.

504. Teor. *Las circunferencias de los círculos son entre sí como sus radios ó diámetros.*

Dem. Pues que los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, inscritos ó circunscritos á los círculos, son siempre como los radios de dichos círculos, si llamamos P,P' á los perímetros de dos polígonos circunscritos, y R,R' á los radios de los círculos á que lo estan, tendrémos $P:P'::R:R'$, ó lo que es lo mismo $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$; y como los radios no varian, indica esto que la relacion $\frac{P}{P'}$ es constante. Si llamamos C,C' las circunferencias de los círculos á que estan circunscritos los polígonos, será $\frac{C}{C'}$ la relacion de dichas circunferencias, y tendrémos aquí dos cantidades variables P,P' que se pueden acercar á otras dos constantes C,C' (cor. antec.) tanto como se quiera, y cuya relacion $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}$ es constante; luego en virtud de lo demostrado (328) será $\frac{P}{P'}=\frac{R}{R'}=\frac{C}{C'}$, de donde sale

$$C:C'::R:R'::2R:2R'::D:D'.$$

Cor. 1.° De aquí se infiere que *la relacion que la circunferencia tiene con el diámetro es la misma en todos los círculos*; y que por lo mismo si conocemos la relacion que un diámetro D tiene con su circunferencia C, hallarémos la circunferencia C′ correspondiente á otro diámetro cualquiera D', diciendo $D{:}C{::}D'{:}C' = \frac{C \times D'}{D}$.

Cor. 2.° Tambien se infiere que una vez que las circunferencias tienen la misma razon que sus diámetros, y una razon no se altera aun cuando se partan por un mismo número sus dos términos, si dividimos por 2, por 4, y en general por n la primera razon de $C{:}C'{::}D{:}D'$, será $\frac{C}{2} : \frac{C'}{2} :: D{:}D'$, $\frac{C}{4} : \frac{C'}{4} :: D{:}D'$, y en general $\frac{C}{n} : \frac{C'}{n} :: D{:}D'$; lo que nos dice que tambien *las semicircunferencias, cuadrantes de circunferencias, y en general los arcos de un mismo número de grados, que son los que se llaman semejantes, tienen la misma razon que los diámetros y radios.*

{505 Probl. *Hallar la relacion aproximada del diámetro á la circunferencia.*

{*Res.* y Dem. Siendo el lado del exágono igual al radio del círculo, si se toma por unidad este radio, el perímetro del exágono inscrito, será 6, y la espresion (501), $L = \frac{2l}{\sqrt{4-l^2}}$, nos dará en este mismo supuesto, para el lado del exágono circunscrito $L = \frac{2 \times 1}{\sqrt{4-l^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, y su perímetro, será $6L = \frac{6 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot 4}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

{Luego la circunferencia del círculo, siendo el radio igual con la unidad, será mayor que 6 y menor que $\frac{12}{\sqrt{3}}$; y si circunscribimos é inscribimos polígonos de mas lados, tendrémos valores mas inmediatos; por lo que, para hallar la circunferencia inscribirémos y circunscribirémos polígonos de un gran número de lados; y como la diferencia de los perímetros de estos va disminuyendo á proporcion que va siendo mayor el número de lados, con mas razon disminuirá la diferencia entre el perímetro de uno cualquiera de ellos y la circunferencia; y así lo harémos por medio de la fórmula (§ 497) $BC = \sqrt{4 - AB^2}$, que, en nuestro caso, por ser AB lado del exágono $=1$, se convierte en $BC = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = 1{,}732$ &c; y como añadiendo 2 al valor de esta apótome, y estrayendo la raiz cuadrada, tendré-

mos el valor de la apótome B′C (fig. 159), y añadiendo 2 y volviendo á estraer la raiz cuadrada, nos vendrá el de B″C, resulta que si á BC,B′C,B″C &c, las llamamos a, a', a'', a''', &c, por ser la inicial de apótome, y á los lados del polígono correspondiente l, l', l'', l''', &c, tendrémos los valores contenidos en la adjunta tabla.

{*Esc.* El primero que sacó aproximadamente la relacion del diámetro á la circunferencia fué Arquimedes, pues demostró (Archim. Op. prop. 2 de cir. Dim.), que siendo el diámetro igual con 1, la circunferencia era menor que $3\frac{1}{7}$, y mayor que $3\frac{10}{71}$ de donde, tomando el primer valor aproximado de la circunferencia, resulta $D{:}C{::}1{:}3\frac{1}{7} :: 1 : \frac{22}{7} :: 7 : 22$. Adriano Mecio da por relacion aproximada la de 113 : 355, que es muy fácil de retener en la memoria; porque no hay mas que poner repetidos los tres primeros números impares, y tomando los tres primeros guarismos de este conjunto, espresarán el diámetro, y los otros tres la circunferencia. Ludolffo Van-Ceulen la sacó con 35 guarismos decimales, y Lagni en las Memorias de la Academia de ciencias de Paris año de 1719, la presentó con 127 guarismos decimales exactos. Hay otra relacion del diámetro á la circunferencia que es la 1250:3927, encontrada por los Ingleses en una obra de los Bracmanes de la India, que es mas exacta y tiene visos de ser mas antigua que la de Arquimedes. Como esta relacion es el principio de donde dimanan las principales aplicaciones de las Matemáticas, y es una cosa hecha por pocos, pudiera suceder que se hubieran equivocado; y así he tratado de cerciorarme por mí mismo de la exactitud de dicha relacion, y la he sacado como se ve en la tabla con 17 guarismos exactos. Mas por si en algun caso no bastase esta aproximacion, he calculado por las series con los 34 primeros guarismos decimales exactos, la de
1: 3,1415926535897932384626433832795028558, como verémos (tabla de la pág. 223 del tomo 2.°).

{He visto citada *) una obra intitulada *Thesaurus logaritmicus de Vega* impresa en Berlin, en la que está sacada la siguiente relacion del diámetro á la circunferencia,
1:3,14159265358 9 793238 462643 383279 502884 197169 399375 105820 974944 592307 816406 286208 998628 034825 342117 067982 148086 513282 306647 093844 609550 582261 36 &c, con 140 guarismos decimales exactos. Por esta relacion de Vega se hecha de ver que el guarismo que ocupa el lugar 113 debe ser un 8

(*) *Ya he tenido la satisfaccion de adquirir dicha obra; y en efecto este es el número que saca. Mr. Lambert en las memorias de la Academia de Berlin año de 1761, demuestra que la relacion de la circunferencia al diámetro es un número irracional.*

y no un 7 como se ha impreso en todos los libros, segun la relacion publicada por Lagni. }

Cor. Una vez que siendo el diámetro 1, la circunferencia es 3,14159265358 9 &c, y que las circunferencias son proporcionales con sus diámetros, si llamamos C á la circunferencia que tiene por diámetro D, tendrémos tomando los diez primeros guarismos

$$1:3,1415926536::D:C=\frac{3,1415926536\times D}{1}=3,1415926536\times D.$$

Si en vez de D sustituimos su valor 2R, es decir dos veces el radio, será tambien el valor de la circunferencia con relacion al radio $C=3,1415926536\times 2R=6,2831853072\times R$.

Si, dada la circunferencia, quisiésemos hallar el diámetro, invertiríamos la proporcion de arriba, y sería

$$3,1415926536:1::C:D=\frac{1\times C}{3,1415926536}=\frac{1}{3,1415926536}\times C=$$

$0,3183098862\times C$. Y si quisiésemos hallar el radio, dada la circunferencia, tomaríamos la mitad del diámetro, y sería

$$R=\frac{D}{2}=\frac{0,3183098862\times C}{2}=0,1591549431\times C.$$

{El método de que se vale Mr. Schwab para encontrar la relacion del diámetro á la circunferencia es muy sencillo é ingenioso: por lo que no podemos dejar de darlo á conocer; para lo cual se necesita resolver como preliminar el siguiente

{Probl. *Conociendo los radios del círculo inscrito y del círculo circunscrito á un polígono regular, hallar los radios del círculo inscrito y del círculo circunscrito á otro polígono del mismo perímetro y que tenga un duplo número de lados.*

{*Res. y Dem.* Sea AB (fig. 308 *) el semilado del polígono dado O su centro; OA será el radio del círculo inscrito y OB el del círculo circunscrito; prolonguese AO hasta que encuentre al círculo circunscrito en C y tírese la BC: el triángulo BOC siendo isósceles, si se baja OD perpendicularmente sobre BC, se tendrá $CD=\frac{1}{2}BC$, y tirando DE paralela á AB, se tendrá del mismo modo $DE=\frac{1}{2}AB$; pero el ángulo inscrito C es la mitad de AOB, luego si se toma DE por semilado de un segundo polígono regular que tenga C por centro, el ángulo en el centro de este será la mitad del del primero; luego tendrá duplo número de lados; y como en compensacion, cada uno de estos lados será la mitad de un lado del primero, estos dos polígonos tendrán un mismo contorno. Se trata de valuar CE y CD.

{Pero se tiene $CE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}(AO+OC)=\frac{1}{2}(AO+OB)$; y en

el triángulo rectángulo COD, el lado CD es medio proporcional entre CO y CE ó entre OB y CE. Luego si se designa por a el radio del círculo inscrito en el primer polígono, por r el del círculo circunscrito, por a' y r' los radios relativos al segundo polígono cuyo número de lados es doble, se tienen las dos fórmulas muy simples. $a'=\frac{a+r}{2}$ y $r'=\sqrt{a'r}$,

Probl. *Hallar la relacion aproximada de la circunferencia al diámetro.*

Res. y Dem. Sea el lado del exágono $=1$, su perímetro será 6; y si AB (fig. 308*) es el semilado, se tendrá $OB=1$, y $OA=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}$; luego si en las fórmulas de la proposicion precedente, se hace $a'=\sqrt{\frac{3}{4}}$ y $r=1$, se obtendrán los radios relativos á un dodecágano ó polígono de doce lados, cuyo contorno es tambien $=6$; aplicando las mismas fórmulas á estos dos nuevos radios, se tendrán los radios relativos al polígono de viente y cuatro lados del mismo perímetro y continuando de esta manera, los dos radios se aproximarán y su diferencia acabará por llegar á ser insensible en las primeras decimales; al mismo tiempo el perímetro del último polígono no diferirá sensiblemente de una circunferencia de círculo; entonces se tendrá el radio del círculo cuya circunferencia $=6$ lo que servirá para hallar la relacion pedida.

{He aquí el cuadro de estas operaciones, donde la serie de los números a, r, a', r' a'', r'', &c, está calculada tomando alternativamente la semisuma y la media proporcional.

Número de lados.	*a; ó radio del círculo inscrito.*	*r, ó radio del círculo circunscrito.*
6	0, 8660254	1, 0000000
12	0, 9330127	0, 9659858
24	0, 9494693	0, 9576622
48	0, 9535657	0, 9556118
96	0, 9545887	0, 9551001
192	0, 9548444	0, 9549723.
384	0, 9549083	

{Ahora que hay mas de la primera mitad de las cifras que es la misma para a' y r, se podrá, en lugar de la media proporcional, tomar la semisuma de a' y de r sin que el error sea sensible á la última decimal, y la operacion se continuará del modo siguiente, no tomando mas que la semisuma.

Número de lados.	*a ó radio del círculo inscrito.*	*r ó radio del círculo circunscrito.*
......	....	0,9549403
768	0,9549243	0,9549323
1536	0,9549283	0,9549303
3072	0,9549293	0,9549298
6144	0,9549296	0,9549297

Los dos últimos radios solo se diferencian en una diezmillonésima, y se puede considerar este radio como el del círculo cuya circunferencia $=6$; y la fórmula $C'=\frac{C.D'}{D}$ del cor. 1.° § 504, poniendo por C' su valor 6 y por D' su valor $2.0,9549296$, nos dará

$$6=\frac{C.2.0,9549296}{D};\text{ de donde sale }\frac{C}{D}=\frac{6}{2.0,9549296}=3,141592\&c.$$

que es la relacion de la circunferencia al diámetro con los seis primeros guarísmos decimales exactos.

En el § 349 del tomo 1.° de mi compendio de Matemáticas se halla por una construccion gráfica la circunferencia ó semicircunferencia de un círculo, dado que sea su diámetro, con menos de una diezmilésima de diferencia.

506 Probl. *Dada la circunferencia, diámetro ó radio de un círculo, y el número de grados de un arco, rectificar dicho arco, ó lo que es lo mismo, hallar cuanto coge tendido en plano.*

Res. y *Dem.* Una vez que (504 cor. 2.°) los arcos son proporcionales con las circunferencias á que corresponden, si señalamos con G el número de grados del arco, y con L la longitud de dicho arco despues de rectificado, la razon que tenga 360° o 2π, que es el valor de toda la circunferencia, con G, número de grados del arco, esa misma tendrá la longitud de toda la circunferencia con la longitud L del arco que buscamos; y por lo mismo tendrémos esta proporcion

$$360°:G::C:L=\frac{G\times C}{360°}=\frac{1}{360}\times G\times C=0,0027777778\times G\times C.$$

Si en vez de C sustituimos su valor con relacion al diámetro sacado en el cor. antec., será con relacion al diámetro

$$L=\frac{G\times C}{360}=\frac{G\times 3,1415926536\times D}{360}=\frac{3,1415926536}{360}\times D\times G=$$
$$0,0087266463\times D\times G.$$

Y si en vez de D sustituimos su valor $2R$, será con relacion al radio, $L=0,0087266463\times 2R\times G=0,0174532925\times R\times G$.

507 Probl. *Dada la circunferencia, diámetro ó radio de un círculo, y la longitud L de un arco cualquiera, hallar el número de grados de dicho arco.*

Res. y *Dem.* Si permutamos la proporcion del problema anterior, será $C:L::360°:G=\frac{360°\times L}{C}$, que es el número de grados del arco con relacion á la circunferencia; pero si en vez de C sustituimos su valor con relacion al diámetro (505 cor.), será

$$G=\frac{360\times L}{C}=\frac{360\times L}{3,1415926536\times D}=\frac{360}{3,1415926536}\times\frac{L}{D}=\ldots$$
$$114,5915590262\times\frac{L}{D}.$$

Y si en vez de D sustituimos su valor 2R, será

$$G=114,5915590262\times\frac{L}{2R}=\frac{114,5915590262}{2}\times\frac{L}{R}=\ldots$$
$$57,2957795131\times\frac{L}{R}.$$

508 *Esc.* Antes de concluir este asunto no podemos dejar de insinuar que la Geometría recibiría un incremento muy considerable, y sus límites se estenderían tal vez mucho mas allá de lo que podemos concebir en la actualidad, si hubiese un medio de resolver con la regla y el compas, ó con solo la línea recta y la circular, el siguiente.

Probl. *Dadas dos líneas sobre un plano, tirarles desde un punto dado una recta, tal que la parte interceptada entre dichas líneas sea igual á una cantidad dada.*

Este problema, aunque sencillo en la apariencia, es demasiado general, y en la Geometría elemental solo se podrá admitir enunciado en este sentido muy particular.

Probl. *Dadas dos rectas indefinidas que concurran en un punto sobre un plano, tirarles desde un punto en este plano una recta, tal que la parte interceptada sea igual con una recta dada de magnitud:*

Ó de este modo: *desde un punto tomado en la superficie ó circunferencia de un círculo, tirar una recta á otra indefinida que encuentre al círculo, de manera que la parte interceptada entre la circunferencia y la recta dada de posicion, sea igual á una línea dada* (*).

(*) *Para dar una idea de lo mucho que importaría la resolucion geométrica de este problema, resolverémos aquí, fundándonos en él, dos que han sido muy famosos, á saber, el de* hallar dos medias proporcionales entre dos líneas dadas, *que es á lo que se reduce el de la duplicacion del*

{El primer problema está reducido á tirar desde un punto A (fig. 165) fuera del ángulo DBC, una recta AD, tal que la parte DE interceptada por los lados BD, BC, sea igual con una línea dada K. La posibilidad del problema es efectiva, pues mientras mas se vaya separando la AD del punto de concurso B, mas se irá aumentando la parte interceptada DE: y como mientras mas se aproxime, va disminuyendo hasta llegar á ser cero, resulta que cualquiera que sea la K, siempre el problema será posible.

{El segundo está reducido á tirar desde C ó D una recta CA (fig. 166) á la AB, tal que la parte GA interceptada entre la AB y la circunferencia, sea igual á la línea K; lo que por consideraciones análogas á las anteriores, se concibe ser muy posible.

{Tal vez no habrá ninguno á quien no le parezcan sumamente fáciles de resolver estos dos problemas; pero por desgracia no se puede hacer hasta el dia. Los antiguos inventaron para conseguirlo una curva que se conoce con el nombre de *Conchoide de Nicomedes*, y que darémos á conocer (§ 336 del 2.° tom.); pero como en la Geometría elemental no se debe admitir ninguna curva que no sea la circunferencia de círculo, se puede decir que estan por resolver dichos problemas, aunque hay un instrumento muy sencillo para construir dicha curva.}

---

cubo, como verémos (§ 580), *y el de* la triseccion del arco ó del ángulo.

Para resolver el primero, supongamos que sean Z *y* X (*fig.* 157**) *las dos líneas entre las cuales se quieran hallar las dos medias proporcionales. Haciendo centro en A con un radio igual á la mitad de la mayor* Z, *se describirá una circunferencia, en la cual se inscribirá la cuerda BC igual á la menor* X, *prolongándola hácia la derecha hasta D, de modo que* $BC = CD$, *é indefinidamente hácia la izquierda; únase el punto D con A y tírese por B la BE paralela á DA, y desde A la KAIGH, de modo que* $GH = AI = \frac{1}{2}Z$ *(que es lo que falta saber como se hace geométricamente), y digo que* $IK = Z$, *HB, HI y* $BC = X$, *son continuo proporcionales geométricas, y por consiguiente las HB, HI las dos medias que se pedian.*

En efecto, por ser BG paralela á DA, se tendrá HG:HB::GA:BD; pero HG:IK::BC:BD; por ser cada consecuente duplo de su antecedente; luego (267 teor. 3.°) *IK:HB::GA:BC; pero siendo* $GH = AI$, *añadiendo á ambas GI, será* $HI = GA$; *por lo cual IK:HB::HI:BC; luego en virtud de lo demostrado (nota del* § 493 3.ª) *las cuatro líneas* $IK = Z$, *HB, HI,* $BC = X$, *serán continuo proporcionales geométricas, y por lo mismo las HB, HI las dos medias proporcionales que se pedian.*

Para resolver el de la triseccion del arco ó ángulo, supongamos que DAE (*fig.* 166*) *sea el ángulo que se deba dividir en tres partes iguales. Haciendo centro en su vértice A con un radio cualquiera trácese una*

SEGUNDA PARTE.

De la estension en longitud y latitud, ó de las superficies.

509 Hasta aquí solo hemos considerado en las figuras su perímetro; ahora pasamos á manifestar las propiedades del espacio que encierran, ó de las superficies.

Teor. *Los paralelogramos que tienen bases y alturas iguales, ó que tienen una misma base y altura, ó que tienen una misma base, y estan entre unas mismas paralelas, son iguales en superficie, ó lo que es lo mismo son equivalentes.*

Dem. Por suponerse que los paralelogramos tienen una misma base, los podrémos considerar superpuestos, de manera que se confundan sus bases, como se hallan los ABCD, ABEF (fig. 167); y pues que por el supuesto tienen una misma altura, sus bases superiores estarán situadas sobre una misma recta paralela á AB. Pero por la naturaleza de los paralelogramos (466 cor. 1.°) $AD = BC$, y $AF = BE$; por la misma razon se tiene $DC = AB$ y $FE = AB$, luego $DC = FE$; y quitando DC y FE de la misma línea DE, las rectas CE y DF que quedan, serán iguales; luego los triángulos DAF, CBE son iguales por tener los tres lados del uno iguales á los tres lados del otro. Ahora, si estos triángulos los quitamos de una misma cantidad, tal como del cuadrilátero ABED, los residuos quedaran iguales; pero si del cuadrilátero ABED se quita el triángulo ADF, queda el paralelogramo ABEF, y si del mismo cuadrilátero ABED se quita el triángulo

---

circunferencia; prolónguese DAC indefinidamente, y tírese EF, de modo que FG sea igual con AC (lo que solo se puede hacer suponiendo resuelto el problema enunciado); y digo que el ángulo EFC es la tercera parte del ángulo EAD que es el dado, ó que el arco CG es la tercera parte del ED.

Porque si se tira la GA, tendrémos un triángulo isósceles FGA con las circunstancias espresadas (386e *cor.* 4.°); *luego el ángulo EAD es triplo del* $GAF = GFA$, *y por consiguiente el arco GC la tercera parte del arco ED; luego si se coloca la cuerda GC sobre el arco ED tres veces y se tiran las AI, AH, tendrémos dividido el ángulo y el arco en tres partes iguales, que era L. Q. D. D.*

Esc. *Cuando el ángulo es recto ó el arco es un cuadrante siempre se puede dividir en tres partes iguales, del modo siguiente: sea AN* (*fig.* 91) *dicho cuadrante; si desde A tomamos una parte AR cuya cuerda sea igual al radio AC, valdrá* 60°, *y el RN valdrá* 30°; *y dividiendo AR en dos partes iguales en S, lo quedará el cuadrante en tres iguales AS, SR, RN, que valdrá cada una* 30°.

CBE, queda el paralelogramo ABCD; luego los dos paralelogramos ABCD, ABEF, que tienen iguales bases y alturas, son iguales en superficie ó son equivalentes. L. Q. D. D.

Cor. Luego todo paralelogramo ABEF (fig. 168) es igual en superficie ó equivale al rectángulo ABCD, que tiene la misma base y altura.

510 Teor. *Todo triángulo es la mitad de un paralelogramo de la misma base y altura.*

Dem. Sea ABC (fig. 169) el triángulo dado: si por A se tira la AD paralela á BC, y por C la CD paralela á BA, tendrémos un paralelogramo BADC, del cual será diagonal el lado AC; luego los triángulos ABC, ACD serán iguales (466), y la superficie de cada uno equivaldrá á la mitad de la del paralelogramo ABCD.

Cor. 1.° *Luego un triángulo ABC es la mitad del rectángulo BCEF que tiene la misma base BC, y la misma altura AO*; porque el rectángulo BCEF es igual en superficie al paralelogramo ABCD.

Cor. 2.° *Todos los triángulos que tienen bases y alturas iguales, son iguales en superficie*; por ser mitades de paralelogramos iguales.

511 Teor. *Las superficies de dos rectángulos de una misma altura, son entre sí como sus bases.*

Espl. Sean ABCD, AEFD (fig. 170), los dos rectángulos, que por tener una misma altura, los podemos suponer colocados de modo que sus bases AB, AE se hallen en una misma recta AB, y tengan comun la altura FE: voy á demostrar que tendrán sus superficies la misma razon que sus bases AB, AE.

Dem. Supongamos primero que las bases AB, AE sean comensurables entre sí, y que sean, por ejemplo, como los números 7 y 4: si se divide la AB en 7 partes iguales, AE contendrá 4 de estas partes, y levantando por cada punto de division una perpendicular á la base, tendrémos siete rectángulos que serán iguales entre sí, pues que tendrán la misma base y altura (509). El rectángulo total ABCD contendrá á los siete rectángulos parciales, y el AEFD no contendrá sino cuatro; luego el rectángulo ABCD es al rectángulo AEFD, como siete rectángulos parciales es á cuatro de estos rectángulos, ó como 7 es á 4.

El mismo razonamiento se puede aplicar á cualquiera otra relacion que la de 7 á 4; luego, cualquiera que sea esta, con tal que sea comensurable ó se pueda espresar por números, se tendrá ABCD:AEFD::AB:AE. Supongamos en segundo lugar que las bases AB, AE (fig. 171) sean incomensurables entre sí: digo que se tendrá igualmente ABCD:AEFD::AB:AE; porque si no se verifica esta proporcion, se tendrá ABCD:AEFD $<$ AB:AE ó $>$ AB:AE.

Si suponemos que la razon AB:AE sea mayor que la ABCD:AEFD, para que estas razones sean iguales, deberá aumentar

el consecuente de la mayor; y si suponemos que AE deba convertirse en AO para que las razones sean iguales, tendrémos ABCD:AEFD::AB:AO. Divídase la AB en partes iguales mas pequeñas que EO, lo que se conseguirá dividiéndola primero en 2 partes, luego en 4 &c (325), y en este caso habrá entre E y O, á lo menos, un punto de division tal como I; por este punto levántese la perpendicular IK, y como las bases AB, AI serán comensurables entre sí, tendrémos por lo acabado de demostrar ABCD:AIKD::AB:AI; y como esta proporcion y la anterior tienen unos mismos antecedentes, con los consecuentes podrémos formar proporcion, y será AIKD:AEFD::AI:AO; pero esto es un absurdo, porque siendo AIKD $>$ AEFD, la primera razon es de mayor desigualdad, y siendo AI $<$ AO, la segunda es de menor, y jamas pueden ser iguales dos razones de esta especie; luego tambien es un absurdo el supuesto que á él nos ha conducido, esto es, que la razon de AB:AE sea mayor que la de ABCD:AEFD. Y como demostraríamos por un razonamiento semejante que tampoco se podia suponer menor dicha relacion, deberá ser igual; y por lo mismo se verificará en todos los casos la proporcion ABCD:AEFD::AB:AE, que era L. Q. D. D.

512 Teor. *Dos rectángulos cualesquiera, son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas.*

Espl. Sean ABCD, AEGF (fig. 172), estos dos rectángulos: voy á demostrar que ABCD:AEGF::AB×AD:AE×AF.

Dem. Habiendo dispuesto los rectángulos de manera que los ángulos en A esten opuestos al vértice, prolónguense los lados GE, CD hasta que se encuentren en H; los dos rectángulos ABCD, AEHD tienen la misma altura AD, luego son (511) como sus bases AB, AE; del mismo modo los dos rectángulos AEHD, AEGF tienen la misma altura AE, luego serán como sus bases AD, AF; por lo que tendrémos estas dos proporciones

ABCD:AEHD::AB:AE, AEHD:AEGF::AD:AF.

Multiplicando ordenadamente, y observando que el término AEHD se puede omitir como factor comun de los dos términos de la primera razon, se tendrá ABCD:AEGF::AB×AD:AE×AF.

Cor. De aquí se deduce que si las bases fuesen iguales, se podría omitir el factor comun en la última razon, y quedaría, que *los rectángulos guardarían la razon de sus alturas.*

Esc. Luego se puede tomar por medida de un rectángulo el producto de su base por su altura, con tal que se entienda por este producto el de dos números que espresen las unidades lineales contenidas en la base, y las unidades lineales contenidas en su altura.

Esta medida no es absoluta, sino relativa; porque ella supone que se valúa del mismo modo otro rectángulo, midiendo sus lados por la misma unidad lineal; asi se obtiene un segundo producto, y la relacion de los dos productos es igual á la de los rectángulos, segun la proposicion que acabamos de demostrar.

Por ejemplo: si la base del rectángulo A (fig. 173) es de 4 unidades, y su altura de 3, el rectángulo estará representado por $3\times4=12$, número que, así aislado, no significa nada; pero si se tiene un segundo rectángulo B, cuya base sea de 5 unidades y la altura de 4, el segundo rectángulo estará representado por el número $5\times4=20$; de donde se concluirá que los dos rectángulos A y B son entre sí como 12 á 20; luego si nos conviniésemos en tomar el rectángulo A por unidad de medida en las superficies, el rectángulo B tendría entónces por medida absoluta $\frac{20}{12}$, es decir, que sería igual á $\frac{20}{12}$ unidades superficiales.

Lo mas comun y ordinario es elegir el cuadrado para que sirva de unidad de medida, y se elige el cuadrado, cuyo lado es la unidad de longitud; entónces la medida que hemos mirado simplemente como relativa, viene á ser absoluta; por ejemplo, el número 12, por medio del cual hemos medido el rectángulo A, representa 12 unidades superficiales, ó 12 de aquellos cuadrados cuyo lado era igual con el de la unidad a, como se ve en la figura.

Se confunde con bastante frecuencia en el lenguage geométrico el *producto de dos líneas con su rectángulo* y esta espresion se ha trasladado aun á la Aritmética para señalar el producto de dos números desiguales, así como se emplea la de *cuadrado* para espresar el producto de un mismo número multiplicado por sí mismo.

Los cuadrados de los números 1, 2, 3, &c, son 1, 4, 9, &c; así el cuadrado, formado sobre una línea doble, es cuádruplo; sobre una línea tripla, 9 veces mayor &c, como se ve en la fig. 174.

513 Teor. *La superficie de un paralelogramo cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

Dem. Porque el paralelogramo ABEF (fig. 168) es igual al rectángulo ABCD, que tiene la misma base AB, y la misma altura AD; pero este tiene por medida $AB\times AD$; luego $AB\times AD$ es igual á la superficie del paralelogramo ABEF. L. Q. D. D.

Esc. Puesto que ya hemos llegado á una espresion absoluta de un paralelogramo, resulta que si le llamamos P, A á su altura, y B á su base, será $P=B\times A$; llamando p á otro paralelogramo cualquiera, cuya base sea b, y a su altura, se tendrá $p=b\times a$; y como con dos ecuaciones se puede formar proporcion, tendrémos
$P:p::B\times A:b\times a$, que espresa que *las superficies de dos paralelogramos cualesquiera, son como los productos de sus bases por sus alturas, o estan en razon compuesta de sus bases y alturas.* Si $A=a$,
será $P:p::B\times A:b\times A:B:b$, que quiere decir que *los paralelogramos que*

tienen una misma altura, son como sus bases. Si se supone $B=b$, será $P:p::B\times A:B\times a::A:a$, que quiere decir que *los paralelogramos de iguales bases son como sus alturas.*

Si $P=p$, serán tambien iguales sus espresiones, de manera que $B\times A=b\times a$, de donde (§ 264) $B:b::a:A$, que quiere decir que *cuando los paralelogramos son iguales, las bases estan en razon inversa de las alturas*, esto es, que el uno tendrá por base lo que el otro por altura.

Si multiplicamos estremos y medios en la proporcion primitiva, será $P\times b\times a=p\times B\times A$, donde $B:b::P\times a:p\times A$, que quiere decir que *á desigualdad de todo, las bases estan en razon compuesta, directa de los paralelogramos, é inversa de las alturas*; y sacando de la misma ecuacion la razon de las alturas, será $A:a::P\times b:p\times B$, que quiere decir que *á desigualdad de todo, las alturas estan en razon compuesta, directa de los paralelogramos é inversa de las bases.* (*).

514 Si suponemos ahora que los paralelogramos sean semejantes *sus superficies serán como los cuadrados de sus lados homólogos*; porque si suponemos que sean los ABCD, *abcd* (fig. 175), tendrémos por lo acabado de demostrar $ABCD:abcd::BC\times AE:bc:\times ae$; pero por ser las figuras semejantes, el ángulo $B=b$, y como ademas los triángulos ABE, *abe* son rectángulos en E y en *e*, serán semejantes (485 cor. 2.°); y darán $AE:ae::AB:ab$; pero por ser semejantes las figuras, se tiene $AB:ab::BC:bc$; luego (267 teor. 2.°) $AE:ae::BC:bc$. Y sustituyendo en la razon compuesta de arriba, en vez de la $AE:ae$, su igual (270 cor.) $BC:bc$, tendrémos $ABCD:abcd::BC\times BC:bc\times bc::BC^2:bc^2::AB^2:ab^2::AE^2:ae^2$.

515 Teor. *La superficie de un triángulo es igual al producto de su base por la mitad de su altura ó á la altura por la mitad de su base, ó ó á la mitad del producto de su base por su altura.*

Dem. Porque el triángulo ABC (fig. 176) es la mitad (510) del paralelogramo ABCE, que tiene la misma base BC, y la misma altura AD; pero la superficie del paralelogramo es igual con $BC\times AD$; luego la del triángulo será $BC\times\frac{AD}{2}$, ó $\frac{BC}{2}\times AD$, ó $\frac{BC\times AD}{2}$.

Esc. Como las mitades tienen entre sí la misma razon que los todos, se deduce que *los triángulos son como los productos de sus bases por sus alturas; que á igualdad de bases, son como sus alturas; que á igualdad de alturas, son como sus bases; que si los triángulos son*

(*) *Es sumamente interesante el que los jóvenes se acostumbren á deducir estas consecuencias de dos ecuaciones, tales como las de arriba; y así les aconsejamos las hagan cinco ó seis veces, hasta que por sí solos las ejecuten sin tropezar en nada.*

iguales, las bases estan en razon inversa de las alturas; que á desigualdad de todo, las bases estan en razon compuesta, directa de las superficies de los triángulos, é inversa de la de las alturas; y las alturas, á desigualdad de todo, estan en razon compuesta, directa de las superficies de los triángulos, é inversa de la de las bases; y finalmente, que cuando son semejantes, guardan la misma razon que los cuadrados de los lados homólogos. Todo lo cual lo podríamos manifestar espresando por T la superficie de un triángulo, cuya base sea B y la altura A, pues tendríamos $T=\frac{B\times A}{2}$; y denotando con letras minusculas las de otro triángulo cualquiera, se tendría $t=\frac{b\times a}{2}$; y formando proporcion con estas dos ecuaciones, como ántes lo hicimos respecto de los paralelogramos, resultaría lo dicho. No lo ejecutamos, porque queremos que los principiantes se acostumbren á encontrarlo por sí mismos; lo que en efecto conseguirán hacer sin dificultad, los que hayan tomado el consejo que se les ha dado en la nota anterior.

516 Teor. *La superficie de un trapecio ABCD* (fig. 177) *es igual á su altura EF multiplicada por la semisuma de las bases paralelas AB, CD.*

Dem. Porque si por el punto I, medio de CB, se tira KL paralela al lado opuesto AD, y se prolonga DC hasta que encuentre á esta en K, los triángulos IBL, ICK serán iguales (361); pues los ángulos en I son iguales por opuestos al vértice, B y C por alternos internos entre las paralelas DK y AB, siendo CB la secante, y CI = IB por construccion; luego el trapecio ABCD es igual en superficie al paralelogramo ADKL, y tiene por medida la de este, que es EF×AL.

Pero (466 cor. 1.°) AL=DK, y pues que el triángulo IBL es igual al KCI, el lado BL=CK; luego AB+CD=AL+DK=2AL, de donde $AL=\frac{AB+CD}{2}$; y así AL es la semisuma de las bases AB, CD; luego en fin, la superficie del trapecio ABCD es igual á la altura EF multiplicada por la semisuma de las bases AB, DC; lo que se espresa así, $ABCD=EF\times\frac{AB+CD}{2}$ y era L. Q. D. D.

{*Esc.* Si por el punto I medio de BC se tira IH paralela á la base AB, el punto H será tambien el medio de AD; porque la figura AHIL es un paralelogramo, así como DHIK, por ser paralelos los lados opuestos, luego se tiene AH=IL, y DH=IK; pero IL=IK, pues que los triángulos BIL, CIK son iguales, luego AH=DH.

{Y siendo $HI=AL=\frac{AB+CD}{2}$, se puede decir que la superficie del *trapecio está espresada por EF multiplicada por HI, esto es, que es igual á su altura multiplicada por una línea tirada á distancias iguales de las bases paralelas.*

{517 Teor. *Dos triángulos que tienen un ángulo igual, son entre sí como los rectángulos de los lados que forman dicho ángulo.*

{*Espl.* Por suponerse que tienen un ángulo igual, podrémos concebir que los triángulos ABC, ADE (fig. 178) sean tales que tengan comun el ángulo igual A: voy á demostrar que triángulo ABC: triángulo ADE::AB×AC:AD×AE.

{*Dem.* Porque si tiramos la BE, los dos triángulos ABE, ADE, cuyo vértice comun es E, tienen la misma altura, y son entre sí como sus bases AB, AD; luego ABE:ADE::AB:AD; igualmente se tiene ABC:ABE::AC:AE; multiplicando ordenadamente, y omitiendo en la primera razon el factor comun ABE, se tendrá ABC:ADF::AB×AC:AD×AE, que era L. Q. D. D.}

518 Teor. *La superficie de un polígono regular es igual al perímetro multiplicado por la mitad de su radio recto.*

Dem. Porque si suponemos que el polígono (fig. 179) GHIK &c sea regular, todos los triángulos GOH, GOM, &c son (471 cor. 2.°) iguales; luego, llamando n al número de lados del polígono, como hay n triángulos, será $GHIK\&c=n\times GOH=n\times HG\times\frac{OT}{2}$; pero $n\times HG$ compone el perímetro P del polígono; luego si señalamos con las iniciales Rad. r. al radio recto OT, tendrémos

$$\text{superficie de polígono regular}=\frac{P\times Rad.r.}{2}$$

Cor. De aquí se deduce que si llamamos p al perímetro de otro polígono regular, y rad. r. á su radio recto, su superficie tendrá por espresion $p\times\frac{rad.r.}{2}$, y comparando sus superficies, se tendrá

$$\text{Sup. de Pol.} : \text{sup. de pol.}::\frac{P\times Rad.r.}{2}:\frac{p\times rad.r.}{2}::P\times Rad.r.:p\times rad.r.$$

Y si suponemos ahora que sean de un mismo número de lados, como en este caso serán semejantes, darán $P:p$::Rad.r.:rad.r.; por lo que sustituyendo en vez de la razon de los perímetros, la de los radios rectos, se tendrá

Sup.de Pol.: sup.de pol.::Rad.r.×Rad.r.:rad.r.×rad.r.::(Rad.r.)^2:(rad.r.)^2, que quiere decir que *las superficies de los polígonos semejantes guardan la misma razon que los cuadrados de los radios rectos*; y como estos son como los radios oblicuos, y en general como las líneas homólogas, se deduce que *tambien guardarán las superficies la relacion de los cuadrados de estas líneas.*

Esc. 1.° Aunque los polígonos no sean regulares, se verifica esta proposicion, con tal que sean semejantes; porque en este caso los podemos dividir en cierto número de triángulos A,B,C &c, a,b,c &c semejantes, y será $P=A+B+C+$ &c, y $p=a+b+c+$ &c, y como estos tendrán (515 esc.) la razon de los cuadrados de los lados homólogos, resulta que si llamamos L,l á estos lados, será

$$A:a::B:b::C:c::\&c:\&c::L^2:l^2;$$

de donde (268 teor. 1.°) $A+B+C+\&c:a+b+c+\&c::L^2:l^2$; ó lo que es lo mismo $P:p::L^2:l^2$ (*).

Esc. 2.° Si consideramos este polígono circunscrito á un círculo, el radio recto será igual al radio del círculo inscrito, y entónces se dice que *la superficie del polígono regular circunscrito á un círculo es igual á su perímetro multiplicado por la mitad del radio del círculo inscrito*; y por lo mismo tambien podrémos decir que *la superficie de un polígono regular, es igual á la de un triángulo, cuya base fuese igual al perímetro, y su altura igual á su radio recto, ó al del círculo inscrito.*

{*Esc.* 3.° Cuando el polígono no es regular, se divide en triángulos por medio de diagonales, se halla la superficie de cada triángulo, se suman todas y se tiene la del total. En la práctica conviene considerar por base un lado que pueda servir á un tiempo de base para dos triángulos; y así, en vez de considerar que los tres triángulos en que queda dividido el polígono ABCDE (fig. 180), tienen por base el EDC la EC, el ECB la BC, y el AEB la EB, considerarémos la EC como base comun de los dos triángulos EDC, ECB; y en este caso, para hallar su superficie á un tiempo, multiplicarémos la base comun EC por la semisuma de las alturas DL, BH, lo que nos ahorrará una multiplicacion.

{*Esc.* 4.° Cuando el espacio está cerrado por una curva irregular, como sucede en la práctica al medir los terrenos, entónces se va descomponiendo en triángulos, ó lo que es mejor que todo, es inscribir ó circunscribir á dicha figura el mayor rectángulo posible, y despues añadirle ó quitarle lo que tenga de menos ó de mas. En efecto, si suponemos que se nos dé la figura *smnpqr* (fig. 180*), mediríamos el mayor rectángulo posible ABCD, y luego á él le añadiríamos el valor de los espacios s, m, p, y le quitaríamos el de los n, q, r. El valor de estos espacios curvilíneos se halla midiendo las perpendiculares ab, cd, fg, pues entónces podrémos hallar la del espacio hab considerándolo como un triángulo rectilíneo; la del $acdb$ considerándole como un trapecio rectilíneo, y así de los demas, lo que no causará error que merezca atencion, si las perpendiculares se tiran bastante próximas.}

518*a*. Teor. *La superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio; es decir, que si llamamos S á la superficie del círculo, C á su circunferencia y R al radio, tendrémos*

$$S=\frac{C\times R}{2}.$$

Dem. Si concebimos circunscrito al círculo un polígono regular,

(*) *En la práctica ocurre con alguna frecuencia el tener que construir una figura ó un plano &c, con la circunstancia de que su superficie tenga con otra que se da una razon dada; y los principiantes cometen por lo regular un descuido, acerca del cual conviene que estén prevenidos para no dejarse sorprender. En efecto, cuando no están advertidos, y les dicen por ejemplo que copien una figura ó un plano reduciendo su superficie, por ejemplo á la mitad, por lo regular, sin pararse á reflexionar, hacen una figura semejante á la que se les da, y en la que cada línea es la mitad de su homóloga en la figura dada: pero de este modo resulta que no cumplen con lo que se les ha pedido, pues la superficie que han formado no es la mitad de la que se les dió, sinó la cuarta parte; á causa de que en virtud de lo que se acaba de esponer dichas superficies guardando la razon de los cuadrados de los lados homólogos serán* $::(\frac{1}{2})^2:1^2::\frac{1}{4}:1::1:4$; *y en efecto á la simple vista se presentará esto mismo en cualquier figura. Habiendo dado á conocer en lo que consiste su alucinamiento, pasemos á manifestar como se efectúa esta operacion.*

Supongamos que se dá una figura cualquiera, y que se pida construir otra cuya superficie tenga con la dada la misma razon que las dos líneas dadas L:K (fig. 150).

Colóquense estas rectas L, K, una á continuacion de otra como lo están las BD, DC. Sobre toda la línea BDC como diámetro trácese una semicircunferencia, y tírense las cuerdas AB, AC; tómese en la BA una parte Ar igual á una línea cualquiera de la figura que se da; por r tírese una línea rt paralela á BC, y la At representará la magnitud que ha de tener la línea homóloga en la figura que se pide; y haciendo lo mismo con todas las demas líneas, tendrémos conseguido el objeto que nos proponíamos. En efecto, como las superficies guardan la razon de los cuadrados de las líneas homólogas Ar, At, si espresamos por f y F las figuras, tendrémos

$f:F::Ar^2:At^2::AB^2:AC^2::$ (488 3.ª) $BD:DC::L:K$ *que era lo que se nos pedia.*

cuya superficie espresarémos por P′ y por P su perímetro, tendrémos que, como (§ 459) $P > C$, si llamamos X al esceso que lleve P á C, será $P = C + X$; y como el radio recto de un polígono circunscrito á un círculo, es (471 cor. 6.°) el radio del mismo círculo, tendrémos

(teor. antec.) $P' = \frac{P \times R}{2} = \frac{(C+X)\times R}{2}$. (b)

Ahora, como la superficie del polígono circunscrito es mayor que la del círculo á que lo está, pues esta es parte de aquella, será $P > S$; y espresando por Z el esceso que P′ lleva á S, será $P' = S + Z$; y sustituyendo este valor en la ecuacion (b), se convertirá en

$$S + Z = \frac{(C+X)\times R}{2}. \quad (c)$$

En esta ecuacion las cantidades Z y X son variables, que dependen de la naturaleza del polígono que se circunscriba, pues si es un triángulo, tendrán diferente valor que si es cuadrado, pentágono, &c; y las demas cantidades son constantes, pues determinado el radio de un círculo, queda determinado todo él (345 cor. 2.°). Luego cualquiera que sea la dependencia que tengan entre sí, las cantidades S,C,R; como su valor no depende de que el polígono que se circunscriba al círculo sea triángulo, cuadrado, pentágono, &c, resulta que el valor que tengan en un valor particular de Z y de X, ese mismo tendrán en todos los demas valores de X y Z. Pero cuando X es igual con cero, Z tambien es igual con cero; pues no habiendo esceso sobre la circunferencia, tampoco resulta ninguno sobre la superficie; y como en este caso la ecuacion (c), se convierte en $S = \frac{C \times R}{2}$, resulta que este valor será el de S, en todos los casos, que era L. Q. D. D

{Aunque esta demostracion es sencilla, rigorosa y exacta, sin embargo, como estriva en consideraciones que no son puramente geométricas, juzgamos aun mas á propósito, para llegar á este resultado, el método contenido en las siguientes proposiciones.

{519 Probl. *Dado un círculo DHK (fig. 181), y dos magnitudes desiguales A,B, circunscribir al círculo un polígono é inscribirle otro, de modo que el circunscrito tenga con el inscrito una razon menor que la que tiene la mayor cantidad A con la menor B* (*).

{*Res.* Hállense dos líneas X,Z tales (479 Probl. 5.°) que $X:Z < A:B$, y hállese una media proporcional Y (488 cor.) entre X y Z; en el círculo dado inscríbase un polígono y circunscríbasele otro, de modo que el lado LM de este tenga con el lado DH de aquel, una razon menor que X:Y (499), y digo que está hecho lo que se pedia.

{*Dem.* Porque el polígono circunscrito tiene con el inscrito (518 cor.) la razon $LM^2:DH^2$, que es por construccion menor que $X^2:Y^2$, y que su igual (289) X: Z, la cual siendo menor que la razon de A:B,

(*) *En mis adiciones á la Geometría de don Benito Bails, impresas en 1806, demostré con exactitud la teoría del círculo, cilindro, cono y esfera sin considerar al círculo como polígono de infinitos lados, al cilindro como prisma de infinitos lados &c, como se habia hecho hasta entónces con poca exactitud en todos los tratados de Matemáticas. El método de que usé entónces, era casi el mismo que pone Lacroix en su tratado elemental de Matemáticas, sin mas diferencia que el haber yo añadido varias proposiciones, entre ellas la proposicion 1.ª del libro décimo de Euclides (que es el esc. 2.° § 346), con lo cual demostré dicha teoría con claridad, rigor y exactitud sin que se notasen los tránsitos violentos y huecos que deja Lacroix en varias partes de su obra. Comparando despues este método con el que seguia Arquimedes entre los antiguos, y Legendre entre los modernos, para demostrar dicha teoría, hallé que el método de las adiciones era mas fácil de percibir y retener, pero que no era tan geométrico como el otro; por lo cual he preferido en la esplicacion de estos elementos el método de Arquimedes y Legendre: y por si alguno deseaba comparar ambos métodos, ó hacer uso del de las adiciones, lo puse por notas en la segunda edicion de esta Geometría; pero como este mismo método se halla mas simplificado, y aun mas exacto, en mi Compendio de Matemáticas, no juzgo necesario el insertarlo en esta 3.ª edicion.*

Con el fin de no dejar nada que desear sobre un asunto de tanta importancia, pondrémos aquí la demostracion que da Mr. Garnier en sus elementos de Geometría, impresos en Paris en el año de 1813 de la proposicion (518a). Despues de llegar á la ecuacion (c), que ejecutando la operacion indicada en el segundo miembro, es

$$S + Z = \frac{C \times R}{2} + \frac{X \times R}{2},$$

pasa al segundo miembro la cantidad Z (él señala con letras griegas la que nosotros con Z y X), y resulta $S = \frac{C \times R}{2} + \frac{X \times R}{2} - Z$ (3)

y dice «pero X y Z siendo cantidades que varian con el número de »lados del polígono circunscrito, el círculo determinado por R ad»mitiría muchas superficies, si la cantidad $\frac{X \times R}{2} - Z$ permaneciese en »la espresion de S, lo que es absurdo; luego la ecuacion (3), debe se tendrá que con mayor razon, polígono circunscrito : polígono inscrito $<$ A:B , que era L. Q. D. D.

{*Esc.* Lo mismo demostraríamos respecto de un sector.

{520 Teor. *Si se da un círculo y un espacio cualquiera, se le puede inscribir un polígono regular, tal que la suma de los segmentos sea menor que el espacio dado, ó lo que es lo mismo, tal que la diferencia entre la superficie del círculo y la del polígono inscrito, sea menor que el espacio dado por pequeño que sea.*

»reducirse á esta $S=\frac{C\times R}{2}$." *Y pone por nota:* "No es posible »que $\frac{X\times R}{2}-Z$ sea una cantidad constante; porque si esto fuese »así, se tendrían los mismos resultados para todos los valores de X »y los correspondientes de Z; pero siendo $X=0$, se tiene al mis»tiempo $Z=0$, y la diferencia $\frac{X\times R}{2}-Z=0$; luego esta diferencia »es contínuamente nula; razonamiento que se puede aplicar en todos los casos en que se emplea esta consideracion." *Y en efecto, sigue este mismo órden al demostrar la teoría de los cuerpos redondos.*

Mr. Francœur, al dar esta clase de demostraciones, se refiere al siguiente principio.

"Supongamos que los elementos de una cuestion estan enlazados por medio de la ecuacion $A+\alpha=B+\beta$, en la que algunos de ellos sean variables al mismo tiempo, y que por su naturaleza la ecuacion deba subsistir en todos sus estados posibles de magnitud; que en fin, otros términos A, B permanezcan constantes mientras que los otros α, β sean variables y susceptibles de decrecer al mismo tiempo tanto como se quiera; esta ecuacion se divide en dos la una $A=B$ entre los términos constantes; la otra $\alpha=\beta$ entre los términos variables la cual tendrá lugar para todas las magnitudes que la cuestion permite atribuir á un mismo tiempo á α y β. *En efecto, si se se admite que las constantes A y B no sean iguales, y que sea K la diferencia, ó $A-B=\pm K$, se tendrá $\beta-\alpha=\pm K$, pues que $A-B=\beta-\alpha$: luego las variables conservarian entre sí una diferencia K, y no podrian ser menores que K, lo que es contrario á la hipotesis.*"

De este modo, obtenida la ecuacion (c) del testo, se saca la conclusion fundándose en el principio anterior del modo siguiente.

Y como las variables X, Z decrecen indefinidamente, se obtendrá entre los términos constantes la ecuacion $S=\frac{C\times R}{2}$

{*Espl.* Sea dado el círculo ABCD (fig. 182) y el espacio K; voy á demostrar que en el círculo ABCD se puede inscribir un polígono tal que la suma de los segmentos a, b, c, d, e, f, g, h, sea menor que el espacio dado K, ó lo que es lo mismo, que la diferencia entre la superficie del círculo y la del polígono inscrito, que es la suma de dichos segmentos, se puede hacer menor que dicho espacio K por pequeño que sea.

{*Dem.* Para demostrarlo, concibamos inscrito al círculo el cuadrado ABCD, y circunscrito el HLMN, y tendrémos que el cuadrado inscrito será la mitad del cuadrado circunscrito; porque cada triángulo AOB es la mitad del cuadrado correspondiente, tal como AOBH; luego los cuatro triángulos AOB, BOC, COD, DOA, de cuya suma se compone el cuadrado inscrito, serán iguales á la mitad de los cuatro cuadrados AOBH, BOCL, CODM, DOAN; y como el círculo es menor que el cuadrado circunscrito, resulta que el cuadrado inscrito es mayor que la mitad del círculo; ahora, si concebimos divididos los arcos AFB, BPC, &c, en dos partes iguales, y tiramos las cuerdas AF, FB, BP, PC &c, tendrémos inscrito un polígono de 8 lados: y concibiendo por F la tangente EG, será paralela (§ 383) á BA, porque tirando el radio OF será perpendicular á la AB y á la tangente GE (§§ 436 y 445); y concluyendo el paralelogramo ABEG, tendrémos que el triángulo AFB será la mitad de dicho paralelogramo (510); pero siendo el paralelogramo ABEG mayor que el segmento AFB, resulta que el triángulo AFB será mayor que la mitad del segmento AFB; y pudiendo demostrar lo mismo respecto de los demas, resulta que la suma de todos los triángulos será mayor que la mitad de la suma de todos los segmentos; y como inscribiendo otro polígono de duplo número de lados, demostraríamos que la suma de los triángulos que se formasen, sería mayor que la mitad de los segmentos a, b, c, &c, que tenemos, resulta que como del círculo total quitamos primero el cuadrado ABCD que es mayor que su mitad, y luego los triángulos AFB, BPC, CQD, DRA que son mayores que la mitad de los segmentos que nos quedaban del círculo, y así sucesivamente, llegarémos á tener al cabo de cierto tiempo (325), que el residuo que quede del círculo, espresado por segmentos tales como a, b, c, d, e, f, g, h, &c, será menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; luego llegará á ser menor que el espacio dado K.

{*Esc.* Lo mismo podríamos demostrar de todo sector; porque en primer lugar, si el arco de este fuese de un cuadrante ó menor, el triángulo AOB sería mayor que la mitad del sector, y se verificaría la proposicion. Ahora, si fuese mayor, tal como el AOQ, de manera que no nos constase si el triángulo AOQ era mayor que la mitad del sector, lo dividiríamos en dos partes iguales, tales como AOX, XOQ, y luego en otras dos, si se necesitase, para que una de estas partes;

tal como AOX, fuese menor que el cuadrante AOD; en este caso podríamos inscribirle una porcion de polígono á cada una con la circunstancia dicha, esto es, de ser su diferencia entre él y la del sector menor que K; luego volviendo á inscribir otro de duplo número, la diferencia en cada uno de ellos sería menor que la mitad del anterior, y con mayor razon menor que $\frac{K}{2}$, luego la diferencia entre los dos, ó el total, sería menor que $\frac{2K}{2}$ ó menor que K. Si para que AOX fuese menor que un cuadrante, se hubiese necesitado hacer dos secciones del sector primitivo, volveríamos á inscribir otro de duplo número en cada uno, y tendríamos que su diferencia entre él y el sector, sería menor que $\frac{K}{4}$; y como la diferencia entre el sector total y el polígono sería menor que $\frac{4K}{4}$ ó que K, resulta que en todos los casos se verifica la proposicion.

{521 Teor. *Dado un círculo ó sector N* (fig. 183) *y un espacio K, es posible circunscribir al círculo ó sector un polígono regular, tal que la diferencia entre la superficie del polígono circunscrito y el círculo, sea menor que el espacio dado K.*

{*Dem.* Porque si concebimos circunscrito al círculo un polígono regular GHIKLM, á que llamarémos P, é inscrito otro ABCDEF, á que llamarémos p, del mismo número de lados, pero tales (519) que $P:p<N+K:N$, tendrémos que siendo $N>p$, resultará $P:N<P:p<N+K:N$, de donde dividiendo la desproporcion considerando solo la primera y tercera razon, será $P-N:N<K:N$, de donde resulta $P-N<K$, que era L. Q. D. D.

{522 Teor. *La superficie de todo círculo* N (fig. 183) *es igual á un triángulo rectángulo* QRS, *en que uno de los catetos es igual al radio* NP *del círculo, y el otro cateto* RS *sea igual á la circunferencia de dicho círculo.*

{*Dem.* Si esto no se verifica, se tendrá que el triángulo QRS será mayor ó menor que el círculo N. Supongamos primero el triángulo QRS menor que el círculo N, inscribiéndole un polígono regular ABCDEF, tal (520) que cír. N—políg. ABCDEF < cír. N—triáng. QRS, se tendrá, políg. ABCDEF > triáng. QRS; y por cuanto el perímetro del polígono es menor que la circunferencia del círculo, esto es, menor que RS, le podrémos suponer igual con RT; y tirándo la QT, como tambien se verifica que RQ=NP > NO, será (518) políg. ABCDEF < triáng. QRT > QRS; pero esto es un absurdo, pues acabamos de ver, que políg. ABCDEF > triáng. QRS; luego el supuesto que nos ha conducido á él tambien lo es; y por lo mismo no se puede verificar que triáng. QRS<cir. N.

{Supongamos ahora, que triángulo QRS > circ. N, y tendrémos que concibiendo circunscrito un polígono GHIKLM, tal que GHIKLM — círc. N < triáng. QRS — círc. N (521), tendrémos GHIKLM < triáng. QRS; pero el perímetro del polígono es mayor que la circunferencia del círculo (459), luego será mayor que RS, y lo podrémos representar por RV; luego si tiramos la QV, será (518) políg. GHIKLM = triáng. QRV > QRS; pero esto no puede ser, porque acabamos de ver, que políg. GHIKLM < triáng. QRS, luego tampoco puede ser, que triáng. QRS > círc. N; luego si la superficie del círculo no puede ser mayor ni menor que la de dicho triángulo, resulta que le será igual. L. Q. D. D.

{*Cor.* 1.° De aquí resulta, que como la superficie de un triangulo rectángulo es igual á la mitad del producto de los catetos, pues si el uno se considera como base, el otro será la altura; si llamamos C á la circunferencia y R el radio, será

$$\text{Sup. de círc.} = \frac{C\times R}{2},$$

que nos dice que *la superficie del círculo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio ó al radio por la mitad de la circunferencia.*}

Y sustituyendo en vez de C su valor 3, 14 &c×D ó 3, 14 &c×2R en la ecuacion anterior, será

$$\text{Sup. de círc.} = \frac{3{,}141\&c2R\times R}{2} = 3{,}1415926536\times R^2.$$

Con relacion á la circunferencia, sería $\text{Sup. de círc.} = 0{,}0795774715\times C^2$ y con relacion al diámetro (*) $\text{Sup. de círc.} = 0{,}7853981634\times D^2$.

Cor. 2.° De aquí se deduce que designando con las letras minúsculas la circunferencia y radio de otro círculo menor, tendrémos

$$\text{sup. de círc.} = \frac{c\times r}{2},$$

y formando proporcion con esta ecuacion y con la anterior, tendrémos

(*) *Estas espresiones se deducen fácilmente sustituyendo en la espresion primitiva los valores de las cantidades* C, R *en valores de la que los deseamos hallar; pero si alguno tuviese dificultad, podrá consultar mis adiciones á Bails, donde hallará indicadas todas las operaciones que se deben ejecutar.*

Sup. de Círc. : sup. de círc. :: $\frac{C \times R}{2} : \frac{c \times r}{2} :: C \times R : c \times r$;

y como (§ 504) $C:c::R:r$, en vez de una de estas razones, podrémos sustituir la otra en la compuesta, y será.....

Sup. de círc. : sup. de círc. :: $C \times R : c \times r :: R \times R : r \times r :: R^2 : r^2 :: D^2 : d^2 :: C^2 : c^2 ::$ $(\text{Arco})^2 : (\text{arco})^2 :: (\text{Cuerda})^2 : (\text{cuerda})^2$.

Lo que nos dice que *las superficies de los círculos guardan la misma razon que los cuadrados de los radios, de los diámetros, de las circunferencias, de los arcos semejantes, ó de las cuerdas semejantes.*

{*Esc.* Como lo mismo hubiéramos demostrado de un sector cualquiera, resulta que llamando L á la longitud del arco, y R al radio, se tendrá Sup. de sector $= \frac{L \times R}{2}$, que sustituyendo en vez de estas líneas sus valores (506), obtendrémos por último Sup. de sector $= 0{,}0087266463 \times G \times R^2$, con relacion al diámetro, será Sup. de sector $= 0{,}002181661 6 \times G \times D^2$, y con relacion á la circircunferencia, Sup. de sector $= 0{,}0002210485 \times G \times C^2$.}

De la reduccion y division de las superficies.

523 Cuando dada una superficie se encuentra otra que le sea igual, se dice que se *reduce* la primera á la segunda; y cuando dada una superficie se hacen dos ó mas partes de ella, se dice que se *divide*. La reduccion de las superficies es un punto muy trascendental, y vamos á manifestar que toda superficie se puede reducir á un cuadrado; por cuyo motivo se suele decir que *medir una superficie y cuadrar una superficie* es una misma cosa; en efecto, cuando se mide una superficie no se hace otra cosa que encontrar la relacion que tiene aquella con el cuadrado que sirve de unidad de medida; y luego buscando un cuadrado que tuviese con el propuesto esta relacion, tendríamos un cuadrado, cuya superficie sería igual con la propuesta.

Principiemos por el paralelogramo, y propongámonos hallar un cuadrado que sea igual en superficie al paralelogramo ABCD (fig. 184). Para esto, hallarémos una media proporcional (488 cor.) entre la base BC y la altura AE, á la cual llamándola X será el lado del cuadrado, porque siendo $\div$ BC:X:AE, tendrémos $X^2 = BC \times AE$; y como $BC \times EA$ espresa la superficie del paralelogramo, resulta en general que *para reducir un paralelogramo á cuadrado se halla una media proporcional entre la base y la altura, y se tendrá el lado del cuadrado.*

Esc. Como un triángulo es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura, tendrémos que *para hallar un cuadrado igual en superficie á un triángulo, se buscará una media proporcional entre la base y la mitad de la altura.*

Como para hallar la superficie de un polígono regular se multiplica el perímetro por la mitad del radio recto, *para reducirle á cuadrado se hallará una media proporcional entre el perímetro y la mitad del radio recto.*

Del mismo modo, para reducir un círculo á cuadrado, ó buscar un cuadrado que sea igual en superficie á un círculo, *se buscará una media proporcional entre la circunferencia y la mitad del radio*, porque estas dos líneas multiplicadas dan la superficie del círculo.

De aquí resulta que el problema tan famoso de la *cuadratura del círculo* se puede considerar resuelto, porque sabemos como se ejecuta; pero como no se puede dar exactamente la relacion del radio y de la circunferencia, tenemos que el problema de la cuadratura del círculo depende de su rectificacion.

{524 Cuando el polígono fuese irregular se hallaría su superficie numéricamente como hemos espuesto (518 esc. 2.°), se estraería la raiz cuadrada de este número, y sería el lado de este cuadrado; pero tambien se puede ejecutar esta operacion *gráficamente*, esto es, por una construccion geométrica, reduciendo la figura á triángulo en esta forma.

{Sea el pentágono ABCDE (fig. 185): si desde el punto D se tira al punto B una línea DB, por C se tira la CF paralela á DB, hasta que encuentre á la base AB prolongada en F, y se une el punto D con el F por medio de la DF, se tendrá que el cuadrilátero AFDE será igual en superficie al pentágono propuesto; porque á este se le ha quitado el triángulo BCD, y se le ha añadido en su lugar el DBF, que es igual con él, por tener la misma base DB, y estar entre unas mismas paralelas.

{Haciendo la misma construccion respecto del ángulo en A, se tendrá que el triángulo DGF, será igual en superficie con el cuadrilátero DEAF, y por consiguiente con el pentágono ABCDE; del mismo modo seguiríamos si hubiera tenido mas lados aun la figura.

{Reducida ya la figura á triángulo, que es la figura mas sencilla de todas, se reducirá á cuadrado, si se quiere, hallando una media proporcional entre su base y la mitad de su altura.

{525 En la práctica ocurre con alguna frecuencia el tener que repartir los terrenos, como cuando muere un padre &c: entónces el Geómetra tiene que hacer la reparticion del terreno, ó bien en partes iguales si el terreno es de igual calidad, ó si no lo es, en partes proporcionales á la calidad del terreno. Pero en muchas ocasiones ocurre el que se tenga que hacer la division desde un punto dado á causa de haber allí una fuente, camino &c: sobre este punto se pueden proponer problemas muy curiosos, de los que aquí pondrémos solo el siguiente

{Prob. *Dado un triángulo BAC, dividirlo en dos partes iguales desde un punto dado D (fig. 186).*

{*Res.* Divídase la base AC en dos partes iguales en E, únase este punto con el dado D por medio de una línea ED, por B tírese BF paralela á ED, únase el punto dado con el punto F, donde esta línea encuentra á la base, y con el vértice B si el punto dado no está en uno de los lados, y se tendrá que la parte AFDB será igual con la FCBD.

{*Dem.* Porque si tiramos la BE, se tendrá el triángulo ABC dividido en dos partes equivalentes, y por lo mismo AEB = á la mitad del ABC; ahora, los triángulos FBE, BDF son equivalentes por tener una misma base BF, y estar entre unas mismas paralelas; luego si les añadimos la parte comun ABF, será ABE = AFDB, pero ABE equivale á la mitad de ABC; luego AFDB será la mitad del triángulo ABC, y por consiguiente FCBD ó FDC en la segunda figura la otra mitad, L. Q. D. D.

DIGRESION

en que se demuestran por Geometría algunas proposiciones de que hemos hecho uso por cálculo; en que se generaliza la proposicion del cuadrado de la hipotenusa á cualquier figura semejante trazada sobre ella y sobre los catetos; en que se cuadran las lúnulas de Hipócrates de Chío, otros espacios circulares, como son otras lúnulas diferentes de las de Hipócrates, los arbelos de Proclo, de Arquimedes y de Vieta, y el salinon de Arquimedes; y en que se determinan las cantidades geométricas que en su especie son máximos ó mínimos.

{526 Teor. *Si una línea AC* (fig. 187); *está dividida en dos partes AB, BC, el cuadrado formado sobre la línea entera AC, contendrá al cuadrado formado sobre una parte AB, mas el cuadrado formado sobre la otra parte BC, mas dos veces el rectángulo comprendido por las dos partes AB, BC, lo que se espresará así.*

$$AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC.$$

{*Dem.* Porque si se construye el cuadrado ACDE, y se toma AF = AB, se tira la FG paralela á AC, y BH paralela á AE, el cuadrado ACDE, quedará dividido en cuatro partes: la primera ABIF es el cuadrado formado sobre AB, pues que se ha tomado AF=AB; la segunda IGDH, es el cuadrado formado sobre BC, porque como AC = AE y AB = AF, la diferencia AC — AB es igual á la diferencia AE — AF, lo que da BC = EF; pero á causa de las paralelas, IG = BC y DG = EF; luego HIGD es igual al cuadrado formado sobre BC.

{Quitadas estas dos partes del cuadrado total, quedan los dos rectángulos BCGI, EFIH, que por ser AB = EH = GC; tienen cada uno por medida AB×BC, luego *el cuadrado formado sobre AC &c.*

{*Esc.* Esta proposicion es la que hemos demostrado en Algebra cuando hemos manifestado que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, y de la cual hemos hecho uso (489).

{527 Teor. *Si la línea AC* (*fig.* 188), *es la diferencia de las dos líneas AB, BC, el cuadrado formado sobre AC, contendrá al cuadrado de AB, mas el cuadrado de BC, ménos dos veces el rectángulo formado por AB y BC, es decir, que se tendrá*

$$AC^2 = (AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC.$$

{*Dem.* Porque si se construye el cuadrado ABIF, y se toma AE = AC, se tira la CG paralela á BI, la KH paralela á AB, y se construye el cuadrado EFLK, los dos rectángulos CBIG, GLKD, tienen cada uno por medida AB × BC; y si se quitan de la figura entera ABILKEA que tiene por valor $AB^2 + BC^2$, quedará el cuadrado ACDE: luego &c.

{*Esc.* Esta proposícion es la misma que la fórmula algebráica $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ de que hemos hecho uso 489).

{528 Teor. *El rectángulo formado por la suma y la diferencia de dos líneas es igual á la diferencia de los cuadrados de estas líneas, así se tiene* $(AB + BC)(AB - BC) = AB^2 - BC^2$.

{*Dem.* Porque si construimos (fig. 189), sobre AB y AC los cuadrados ABIF, ACDE, se prolonga AB, de modo que la prolongacion BK=BC, y se concluye el rectángulo AKLE, la base AK de este rectángulo, será la suma de las dos líneas AB, BC; su altura AE, será la diferencia de las mismas líneas; luego el rectángulo AKLE=(AB + BC) × (AB — BC). Pero este mismo rectángulo está compuesto de las dos partes ABHE, BHLK, y la parte BHLK, es igual al rectángulo EDGF, porque BH=DE y BK=EF, luego AKLE=ABHE+EDGF, pero estas dos partes forman el cuadrado ABIF, menos el cuadrado DHIG, que es el cuadrado formado sobre BC; luego sacamos que $(AB+BC)(AB-BC) = AB^2 - BC^2$.

{*Esc.* Esto viene á ser lo demostrado (179), cuando deciamos que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

{529 Ya hemos démostrado que el cuadrado de la hipotenusa es igual con la suma de los cuadrados de los catetos; pero ahora vamos á dar otra demostracion en que se presente á los sentidos esta verdad.

{Teor. *El cuadrado BCGF* (*fig.* 190), *formado sobre la hipotenusa BC de un triángulo rectángulo, es igual á la suma de los cuadrados BALH, CAKI formados sobre los catetos BA, CA.*

{*Dem.* Para probarlo, bajemos desde el ángulo recto A sobre la hipotenusa la perpendicular AD, que prolongarémos hasta E, y despues tirarémos las diagonales AF, CH, y tendrémos que el ángulo ABF, se compondrá del ABC mas el recto CBF; el ángulo CBH, se compone igualmente del ángulo ABC, mas el recto ABH, luego el ángulo ABF=HBC. Pero AB=BH, por lados de un mismo cuadrado, ABHL, y BF=BC por la misma razon en el BCGF; luego los triángulos ABF,HBC tienen dos lados iguales, é igual el ángulo comprendido, luego son iguales.

Pero el triángulo ABF, es la mitad del rectángulo BDEF (ó para abreviar BE), que tiene la misma base BF, y la misma altura BD, por hallarse entre unas mismas paralelas; el triángulo HBC, es igualmente la mitad del cuadrado AH, porque siendo recto el ángulo BAC, asi como BAL, las AC y AL (355), no formarán sino una misma línea paralela á HB; luego el triángulo HBC y el cuadrado AH, que tienen comun la base BH, tienen tambien comun la altura AB; luego el triángulo es la mitad del cuadrado.

Y pues que los triángulos ABF,HBC son iguales, sus duplos tambien lo serán; luego el rectángulo BE, será igual al cuadrado AH; como demostraríamos del mismo modo que el rectángulo CE es igual al cuadrado AI, y los dos rectángulos BE,CE juntos, equivalen al cuadrado BCGF, resulta que el cuadrado BCGF, formado sobre la hipotenusa, es igual á la suma de los cuadrados ABHL, ACIK, formados sobre los otros dos lados.

La invencion de este admirable y escelente teorema se atribuye á Pitágoras, el cual hizo sacrificios á las Musas, porque le habian ayudado en tan esclarecido invento.

Algunos son de parecer que sacrificó cien bueyes; pero si se ha de dar crédito á Proclo, no ofreció mas de uno. Pitágoras, como algunos quieren, tomó ocasion de los números para la investigacion de este teorema. Pues habiendo contemplado cuidadosamente estos tres números 3, 4, 5, y habiendo visto que el cuadrado del número mayor, era igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, formó un triángulo escaleno, cuyo lado mayor, estaba dividido en cinco partes iguales el menor en tres de la misma magnitud, y el otro en cuatro. Hecho esto, consideró el ángulo comprendido entre estos dos lados, y halló que era recto, y habiendo observado esto mismo en otros muchísimos números, como 6, 8, 10, 9, 12, 15 &c, juzgó que se debia investigar, si en todo triángulo rectángulo, el cuadrado del lado que se opone al ángulo recto, era igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados; puesto que todos los triángulos, cuyos lados tenían la magnitud espresada por los números dichos, contenían un ángulo recto: y así halló por último, con grandísimo recreo de su alma, este admirable teorema, y lo demostró rigorosamente. Euclides lo generalizó (libro 6. prop. 31), donde demostró que no solamente el cuadrado del lado que se opone al ángulo recto era igual á los cuadrados de los otros dos lados, sino que cualquier figura rectilínea construida sobre el lado opuesto al ángulo recto, ya fuese triángulo, ya cuadrilátero &c, era igual á las dos figuras que se describiesen sobre los otros lados, con tal que fuesen semejantes á la primera.

En efecto, si sobre la hipotenusa y los catetos del triángulo rectángulo BAC (fig. 191), construimos las figuras semejantes BEDC,BFGA, CIHA, tendrémos en virtud de lo espuesto (518 cor.)

$$BD:BG:CH::BC^2:AB^2:AC^2,$$

pero por lo acabado de probar, ó por lo espuesto (487 cuarta), se tiene $BC^2=BA^2+AC^2$, luego (§ 269) BD=BG+CH.

Esc. Si sobre la hipotenusa y los catetos trazamos círculos ó semicírculos, como guardan la misma razon que los cuadrados de los diámetros (522 cor. 2.º), tendrémos igualmente que el círculo ó semicírculo trazado sobre la hipotenusa, será igual á los círculos ó semicírculos trazados sobre los catetos; y así, si sobre la hipotenusa BC, como diámetro (fig. 192), trazamos el semicírculo BEAGC; pasará por A por ser recto este ángulo (454 cor. 3,º), y tendrémos, construyendo otros semicírculos sobre los diámetros BA, AC, que pues los semicírculos guardan la misma razon que los cuadrados de sus diámetros, será $BEAGC:BDA:AFC::BC^2:BA^2:AC^2$; pero $BC^2=BA^2+AC^2$, luego BEAGC=BDA+AFC, y quitándo de estos, los segmentos comunes BEA,AGC, quedará el triángulo BAC= á los espacios curvilíneos BDAE+AFCG; á estos espacios se les ha dado el nombre de *lúnulas*, y se conocen en el dia con el nombre de su inventor *Hipócrates de Chio*.

Cor. De aquí resulta, que si se tienen tres líneas a, b, c, tales que $a^2=b^2+c^2$, el círculo trazado sobre la primera será igual á la suma de los trazados sobre las otras dos; y si fuese $a^2=b^2-c^2$, el círculo trazado sobre la primera, sería igual á la diferencia entre el trazado sobre b, y el trazado sobre c; pues que en estos dos supuestos podrémos construir con dichas líneas (489 cor.) un triángulo rectángulo.

530 Ya que hemos hecho mencion de los tres números, de los cuales, el cuadrado del mayor es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, no sería fuera de propósito esplicar brevemente de que modo se hallarán otros que cumplan con la misma circunstancia. Así, supuestos los tres dichos ya 3, 4, 5, si se duplicasen serían 6, 8, 10; si se triplicasen 9, 12, 15, y si se cuadruplicasen se hallarían estos tres 12, 16, 20, y así se obtendrían otros muchos si se multiplicaran aquellos tres primeros por un número cualquiera. Sin embargo, Proclo da dos reglas, por las cuales se hallan los números predichos sin necesitar de aquellos tres.

La primera la atribuye á Pitágoras, y es como sigue: *tómese por número menor cualquier número impar, tal como* 5, *por medio del cual se hallarán los otros del modo siguiente. Del cuadrado del número tomado, que es aqui* 25, *quítese la unidad, la mitad de lo que quede, á saber* 12, *será uno de los números, al cual si se añade una unidad resultará el tercero* 13, *y el cuadrado de este es igual al cuadrado de los otros dos.*

La segunda regla que se atribuye á Platon es la siguiente: *tómese un número par cualquiera, por ejemplo 6, del cuadrado de la mitad de este, á saber de 9, quítese uno y al mismo 9 añadase uno, y se tendrán los otros dos números 8 y 10, siendo el primero 6; esto es, el número par que se tomó.* Si segun esta regla se toma el número par 10, se hallará que los otros dos son 24 y 26.

Para demostrar estas reglas, resolverémos este problema general.

Hallar tres números en que se verifique que el cuadrado del uno sea igual con la suma de los cuadrados de los otros dos.

Puede ocurrir en este caso el no llevar otra mira que la de hallar dichos números; pero muchas veces tambien puede ocurrir el que se quiera que el uno de ellos sea tal ó tal, ó que la diferencia que haya entre algunos sea tambien dada.

Supongamos que el número mediano sea x, si llamamos d la diferencia que el mayor lleva al mediano, por ser conocida siempre, ó porque la podemos tomar á arbitrio, tendrémos que el número mayor será $x+d$, y su cuadrado será $(x+d)^2=x^2+2xd+d^2$; luego para que el cuadrado del mayor sea igual á la suma de los otros dos cuadrados, á saber de x^2, y del otro número que se busca, es preciso que $2xd+d^2$ sea un cuadrado perfecto, es decir, que $2xd+d^2$ sea el cuadrado del otro número que se busca; pero como $2xd+d^2$ no siempre será un cuadrado exacto, no siempre podrémos sacar su raiz con exactitud, pues si $x=2$ y $d=1$, $2xd+d^2=4+1=5$ que no es cuadrado exacto, de donde se sigue que aunque por el conocimiento de x podamos determinar el número mayor, añadiéndole la diferencia d, no podamos hallar siempre con exactitud el número menor. Por el número mayor, vendríamos en conocimiento del mediano, quitándole la diferencia d; pero el otro no lo hallaríamos con exactitud muchas veces, pues no siempre la diferencia de los cuadrados de dos números, es un cuadrado perfecto; y asi, veamos si por el conocimiento del menor podemos hallar los otros dos. En efecto, si suponemos que el primero que se determine sea el menor, le llamarémos a, y su cuadrado será a^2, y por lo mismo x^2+a^2 deberá ser igual con el cuadrado del número mayor, y llamando d á la diferencia que el mayor lleve al mediano x, se deberá tener

$$x^2+a^2=(x+d)^2 = x^2+2xd+d^2;$$

si quitamos el término comun x^2 de ambos miembros, quedará $a^2=2xd+d^2$, de donde despejando x, será $x=\frac{a^2-d^2}{2d}$; como la diferencia d es arbitraria, supongámosla igual con 1 y será $x=\frac{a^2-1}{2}$ que será el número mediano, y el mayor valdrá el me-

diano x mas la diferencia 1; luego el mayor será

$$x+1=\frac{a^2-1}{2}+1=\frac{a^2-1+2}{2}=\frac{a^2+1}{2};$$

mas para que x sea un número entero, es indispensable que a^2-1 sea divisible por 2, y para esto se necesita que a^2-1 sea número par, lo que exige que a sea impar; luego en este supuesto, para que los tres números sean enteros, es indispensable que a sea número impar, porque su cuadrado ha de ser impar, y siendo este impar, la raiz no puede ser par, de donde resulta la regla de Pitágoras; y así, si suponemos $a=5$, será

$$x=\frac{25-1}{2}=\frac{24}{2}=12, x+1=\frac{25-1}{2}+1=12+1=13;$$

en donde se verifica que $5^2+12^2=13^2$, pues $5^2=25$, $12^2=144$, y $13^2=169$, que es la suma de 144 con 25: si hubiéramos supuesto $a=4$, sería $x=\frac{16-1}{2}=\frac{15}{2}$ y $x+1=\frac{15}{2}+1=\frac{17}{2}$, en que se verifica tambien que $4^2+(\frac{15}{2})^2=(\frac{17}{2})^2$; pues $4^2=16$, $(\frac{15}{2})^2=\frac{225}{4}$, $(\frac{17}{2})^2=\frac{289}{4}$ y tambien se verifica que $16+\frac{225}{4}=\frac{289}{4}$; pero no son los números enteros, como se requería.

Sea ahora $d=2$ y se verificará que $x=\frac{a^2-d^2}{2d}=\frac{a^2-4}{4}=\frac{a^2}{4}-1=(\frac{a}{2})^2-1$; donde se ve, que para que x sea número entero, es indispensable que $\frac{a^2}{4}-1$ lo sea, ó lo que es lo mismo, que el cuadrado de a se pueda dividir por 4, lo que no se conseguirá á menos que a no sea par; si al valor de x, que es $(\frac{a}{2})^2-1$, le añadimos la diferencia 2, que el mayor lleva al mediano, tendrémos el mayor, que valdrá $(\frac{a}{2})^2-1+2=(\frac{a}{2})^2+1$, de donde resulta la regla que se atribuye á Platon. Asi, si $a=6$ se tendrá

$x=(\frac{6}{2})^2-1=3^2-1=9-1=8$, $x+2=8+2=10$; donde se verifica que $6^2+8^2=10^2$, pues $6^2=36$, $8^2=64$ y $10^2=100$, y $36+64=100$; si a no fuese par, tendriamos $a=5$, y daría

$$(\frac{5}{2})^2-1=\frac{25}{4}-1=\frac{21}{4},\ (\frac{5}{2})^2+1=\frac{25}{4}+1=\frac{29}{4}.$$

En muy pocos libros elementales se ha puesto el modo de cuadrar las lúnulas de Hipócrates de Chio; pero en ninguno, de que yo tenga noticia, se ha puesto el modo de cuadrar otras lúnulas y otros espacios circulares, que segun algunos Geómetras, fué lo que dió orígen al invento de Hipócrates: y siendo de la mayor importancia el que se vulgaricen estos métodos, no solo por la utilidad que resulta del conocimiento de estas verdades, sinó porque pueden dar orígen al descubrimiento de otras de la mayor trascendencia, no será inoportuno el poner aquí el modo de cuadrar otras lúnulas, el arbelo de Proclo, de Arquimedes, y de Vieta, y el Salinon de Arquimedes.

Supongamos primero que se tenga un cuadrado ADBH inscrito en un círculo (fig. 193), si haciendo centro en H con un radio igual al lado AH del cuadrado, trazamos un arco AEB, tendrémos una lúnula AFDGBEA, cuya superficie será igual á la del triángulo rectilíneo ADB, mitad del cuadrado inscrito.

En efecto, siendo las superficies de los círculos como los cuadrados de los radios ó diámetros, será circ. trazado con AH: al trazado con AC::AH^2:AC^2::$AC^2+CH^2=2AC^2$:AC^2::2:1; luego el semicírculo trazado con AH equivaldrá al círculo trazado con AC, y el cuadrante AHBE será igual al semicírculo ADB; y si quitamos de ambos los triángulos iguales AHB, ADB, quedará el segmento AEBC igual á los dos segmentos AFD + DGB; y añadiendo á ambos el espacio mistilíneo ADBEA, resultará el triángulo rectilíneo ADB, igual á la lúnula AFDGBEA.

Para cuadrar otras lúnulas, demostrarémos antes la siguiente proposicion.

Si desde un punto cualquiera de la circunferencia de un círculo, se toman los arcos iguales AB, BC, CD, DE, &c (fig. 193*a*), *y se tiran las rectas* AB, AC, AD, AE, &c. *y las* CF, DG *iguales á las* CA, DA &c, *de modo que encuentren á las* AD, AE *prolongadas, se verificará que la línea menor* AB *tendrá con su inmediata* AC, *la misma razon que cualquiera de las otras (escepto la menor), con la suma de las dos mas próximas á ella, es decir, que se tendrá*

AB:AC::AC:AB + AD::AD:AE + AC.

Dem. Los triángulos ABC, ACF, ADG, son semejantes por ser isósceles por construccion, y tener un ángulo homólogo igual (485

cor. 3.°), á saber, los que se forman en A, que son iguales por tener cada uno por medida la mitad de los arcos iguales BC, CD, DE; luego tendrémos AB:AC::AC:AE::AD:AG.

Ahora, observando que el ángulo ADC es esterno en el triángulo CDF, será igual á la suma de los dos internos F y DCF; por otra parte el mismo ángulo ADC es igual al duplo del CAD, por tener dupla medida; y como CAD = F por ser isósceles el triángulo ACF, tendrémos tambien que el ángulo F será la mitad del CDA; y como junto con el FCD han de componer el CDA, resulta que F=DCF; luego el triángulo DFC es isósceles, y dará

DF = CD = AB, y AF = AD + DF = AD + AB.

Del mismo modo, en el triángulo isósceles ADG, los ángulos G y GAD son iguales entre sí y con el CAD. Pero DEA es igual al G + GDE por ser esterno; y como por ser el arco AD = 3DE, será DEA = 3DAE = 3G, resulta que EDG será igual á
2G = 2DAE = 2CAD, y como CDA tambien es duplo de CAD, resulta que CDA = EDG; y como por otra parte CD = DE, el triángulo DEG será igual con el ACD (361 esc.), lo que dará
AC = EG, y AG = AE + AC; luego sustituyendo en vez de AF y AG estos valores en la serie de razones de arriba, será
AB:AC::AC:AD + AB::AD:AE + AC (*m*), que era L. Q. D. D.

Fundados en esta proposicion *podemos tomar en una circunferencia dos arcos que tengan una razon múltipla dada, y de modo que los cuadrados de las cuerdas de dichos arcos guarden tambien la misma razon dada.*

Para esto, tirarémos el radio BO, el diámetro AH y la cuerda BH, y tendrémos que siendo isósceles los triángulos BOH, ABC, y teniendo iguales los ángulos en H y en C, serán (485 cor. 3.°) semejantes, y tendrémos BO:BH::AB:AC $=\frac{AB\times BH}{BO}$, y como por lo acabado de demostrar, AB:AC::AC:AF, tendrémos

$$AF=\frac{AC^2}{AB}=\frac{AB^2\times BH^2}{BO^2\times AB}=\frac{AB\times BH^2}{BO^2};$$ y quitando AB, será

$$AF-AB=AF-DF=AD=\frac{AB\times BH^2-AB\times BO^2}{BO^2},$$

de donde, BO^2:BH^2-BO^2::AB:AD.

Ahora si bajamos la perpendicular BP, será igual con A*p* y AP = B*p* (*), y tendrémos, que siendo (488 esc. 2.°) $BA^2=AH\times AP=$

(*) *Para convencernos de que* AP = Bp *prolongarémos la cuerda* BP *hasta* b *y se tendrá* BP=Pb; *y en este caso siendo* OP=Op (§ 439); *si de los radios* AO *y* BO *quitamos dichas magnitudes las restas* AP *y* Bp *serán iguales.*

$AH \times Bp$, resultará $Bp = \frac{BA^2}{AH}$ y $Bp^2 = \frac{BA^4}{AH^2}$; pero $Ap^2 = AB^2 - Bp^2$

$= AB^2 - \frac{BA^4}{AH^2} = \frac{AB^2 \times AH^2 - BA^4}{AH^2}$, y $AC^2 = (2Ap)^2 = 4Ap^2 =$

$\frac{4AB^2 \times AH^2 - 4BA^4}{AH^2}$. Y como ($m$) $AB:AC::AC:AD + AB$, será

$AC^2 = AB \times AD + AB^2$, por lo que, igualando estos dos valores de AC^2,

será $\frac{4AB^2 \times AH^2 - 4BA^4}{AH^2} = AB^2 + BA \times AD$, de donde sale $AD =$

$\frac{3AB \times AH^2 - 4BA^3}{AH^2}$ lo que da $AB:AD::AH^2:3AH^2 - 4BA^2$ (n).

{Entendido esto pasemos á cuadrar una lúnula formada por dos círculos, cuyas superficies esten en la razon de 1:3, y que el número de grados de los arcos que la forman esten en la misma razon de 1:3.

{Para conseguirlo, entre dos líneas AD,BD (fig. 193*b*), que la una sea tripla de la otra, hallarémos una media proporcional DC, y tirando las AC,BC, los círculos trazados con estas líneas como radios ó diámetros, serán como $AC^2:CB^2$:: (§ 488) AD:DB::1:3.

{Prolónguese la AC una magnitud CE igual con AF, esceso de AB sobre BC; sobre AE como diámetro, trácese un semicírculo AGE; prolónguese BC hasta G, y tírese la AG.

{Haciendo centro en un parage cualquiera O, con un radio igual á AC, se trazará una circunferencia, y en ella se colocará la cuerda AG tres veces de M á N, de N á P, y de P á Q; y tirando la MQ, y haciendo centro en sus estremos con un radio MK, que sea cuarto proporcional á MN, á MQ, y al radio OM, trazarémos dos arcos que se corten en K, y haciendo centro en este punto trazarémos el arco MLQ, y se tendrá la lúnula MNPQLM formada por dos arcos MLQ, y MNPQ, cuyos números de grados estarán en la razon de 1:3, y que las superficies de dichos círculos estarán en la misma razon de 1:3, y digo ademas que la superficie de dicha lúnula es igual al cuadrilátero rectilíneo MNPQ.

{En efecto, los sectores MKQLM,MONHM, son semejantes, es decir, son una misma parte de sus respectivos círculos, porque las cuerdas MQ, MN, son como los radios MK, MO; luego el número de grados del arco MNPQ, triplo del MN, será triplo del número de grados del MLQ, que era L. 1.° Q. D. D.

{Y siendo las superficies de los espresados círculos, y por consiguiente sus sectores, como los cuadrados de sus líneas homólogas, será $MONHM:MKQLM::MO^2:MK^2::MN^2:MQ^2$ (o).

{Ahora tirando el diámetro MR, tendrémos que por ser el arco MNPQ, triplo del MN, se verificará la proporcion (n) $MN:MQ::MR^2:3MR^2 - 4MN^2$; y siendo $MN = AG$, y $MR = 2AC$, será $MN:MQ::4AC^2:12AC^2 - 4AG^2::AC^2:3AC^2 - AG^2$, y siendo (488 esc. 2.°) $AG^2 = AE \times AC$, resultará

$$MN:MQ::AC^2:3AC^2 - AE \times AC::AC:3AC - AE.$$

{Por otra parte $AE = AC + CE = AC + AB - CB$, y $AB = 2AC$, por ser (488 esc. 2.°) $AC = \sqrt{AB \times AD} = \sqrt{4AD \times AD} = \sqrt{4AD^2} = 2AD = \frac{AB}{2}$; luego $AE = AC + 2AC - CB = 3AC - CB$; luego si sustituimos este valor en vez de AE en la proporcion de arriba, será $MN:MQ::AC:3AC - 3AC + CB::AC:CB$, y $NN^2:MQ^2::AC^2:CB^2::1:3$; y como los círculos trazados con los radios MO, MK, guardan la razon $MN^2:MQ^2$ de los cuadrados de los lados homólogos, estarán en la razon de 1:3, que era L. 2.° Q. D. D.

{Como esta última proporcion, y la (o) tienen comun la razon $MN^2:MQ^2$, será MONHM:MKQLM::1:3.

{Los segmentos MHN, MQL, guardarán tambien la misma razon que los cuadrados de sus lados homólogos; luego tendrémos Segm. MHN: Segm. $MLQ::MN^2:LQ^2$::1:3; luego el segmento MLQ = 3 Segm. MHN; y como los tres segmentos H, I, S son iguales, resulta que Segm. L = Segm. H + Segm. I + Segm. S; y añadiendo á ambos miembros el espacio mistilíneo MNPQLM, se tendrá el cuadrilátero rectilíneo MNPQ = á la lúnula MHNIPRQLM. L. 3.° Q. D. D.

{Para cuadrar la lúnula análoga formada por círculos que estuviesen en la razon de 1:4, es necesario hacer uso del problema de hallar dos medias proporcionales geométricas; lo que confirma la necesidad y utilidad de resolver geométricamente el problema del (§ 508).

{Pasemos á cuadrar los arbelos. Proclo llama *arbelo* al espacio comprendido por tres semicircunferencias trazadas sobre una línea y sus dos mitades como diámetros, como el BECFADB (fig. 193*c*), comprendido por las tres semicircunferencias BEC, CFA, BDA. Este espacio es igual al círculo trazado con la línea BC, ó CA, como diámetro, ó al duplo de cualquiera de los semicírculos BEC, CFA, ó á los dos juntos. En efecto, el semicírculo BDA: al semicírculo $BEC::BA^2:BC^2::(2BC)^2:BC^2::4BC^2:BC^2$::4:1; luego el semicírculo BDA = á 4 semicírculos BEC; luego si quitamos de esta ecuacion los dos semicírculos iguales BEC, CFA, quedará el arbelo BDAFCEB = á dos semicírculos BEC, ó al círculo trazado sobre BC como diámetro, ó á los dos semicírculos BEC,CFA.

{Si en C levantamos la perpendicular DC, el círculo trazado sobre ella como diámetro, será igual al trazado sobre BC; y esto acaso dió orígen á Arquimedes para llamar *arbelo* al espacio comprendido por tres semicírculos descritos con diámetros que fuesen una línea dada y dos partes cualesquiera en que se divida, tal como el AEDFCBA (fig.193*d*); y su superficie es igual á la del círculo trazado sobre BD como diámetro. En efecto, pues que $AC^2=(AD+DC)^2=AD^2+2AD\times DC+DC^2$ y $BD^2=AD\times DC$, será $AC^2=AD^2+DC^2+2BD^2$; pero siendo los semicírculos, como los cuadrados de sus diámetros, será AC^2: semicírc. ABC::AD^2: semicírc. AED::DC^2: semicírc. DFC:: (BD^2: semicírc. trazado sobre BD como diámetro)::$2BD^2$: círc. trazado sobre BD como diámetro y en virtud de lo espuesto (268 teor. 5.º), será AC^2: semicír. ABC::$AD^2+DC^2+2BD^2$: semicírc. AED+semicírc. DFC+círculo trazado sobre BD como diámetro; y pues que $AC^2=AD^2+DC^2+2BD^2$, será semicírc. ABC= semicírc. AED+ semicírc. DFC+ círculo trazado sobre BD como diámetro.

Y quitando de ambos miembros los semicírculos AED+DFC, quedará el arbelo AEDFCBA= al círc. trazado sobre BD como diámetro.

Tanto el arbelo de Proclo, como el de Arquímedes son figuras á que se pueden hallar círculos que les sean iguales; pero no se pueden hallar espacios rectilíneos que les equivalgan. Mas Vieta inventó otro *arbelo* al que se puede hallar un espacio rectilíneo que le sea igual. En efecto, sea el círculo BCDEFG (fig. 193*e*); si el radio se coloca seis veces sobre la circunferencia, señalando los puntos B, C, D, E, F, G, y haciendo centro en B se traza con el mismo radio el arco CA, y haciendo centro en F con el mismo radio se traza el arco EA, se tendrá el espacio CAEDC comprendido por los tres arcos CA, AE, CDE, que es el arbelo de Vieta: y cuya superficie es igual al rombo CAED; pues los cuatro segmentos *m*, *n*, *r*, *s*, son iguales, y quitando al rombo los *r*, y *s*, y añadiendo en su lugar los *m*, *n*, resultará el arbelo CAED igual á dicho rombo.

Arquimedes llamó *Salinon* al espacio AFBMDGCNA (fig. 193*f*), comprendido entre cuatro semicírculos formados como diámetros sobre una línea dada AB, dos segmentos iguales AC, BD y sobre la parte intermedia CD; y resulta que dicho espacio es igual al círculo trazado sobre GF como diámetro. En efecto, siendo $FG^2=DA^2=(CD+AC)^2=CD^2+2CD\times AC+AC^2$, si añadimos á ambos miembros AC^2, será $DA^2+AC^2=CD^2+2CA^2+2DC\times AC=CD^2+2AC(AC+CD)$, y siendo AC=DB, resultará AB—CD=2AC lo que dá

$$AC=\frac{AB-CD}{2},\ \text{y}\ AC+CD=\frac{AB+CD}{2},\ \text{luego}\ DA^2+AC^2=CD^2+2\times\frac{AB-CD}{2}\times\frac{AB+CD}{2}=CD^2+\frac{AB^2-CD^2}{2}=\frac{AB^2+CD^2}{2}=\frac{AB^2}{2}+\frac{CD^2}{2}.$$

Y como las superficies de los círculos son como los cuadrados de sus diámetros, se tendrá

$$\text{semicírc. AB}:\frac{AB^2}{2}::\text{semicír. CD}:\frac{CD^2}{2}::\text{círc. CA}:CA^2::\text{círc. DA}:DA^2,$$

lo que da (268)

$$\text{semic. AB}+\text{semic. CD}:\frac{AB^2}{2}+\frac{CD^2}{2}::\text{círc. CA}+\text{círc. DA}:CA^2+DA^2;$$

y siendo iguales los consecuentes, resulta que tambien lo serán los antecedentes; y tendrémos semic. AB+semic.CD=círc.CA+círc.(DA=FG), y quitando del primer miembro los dos semicírculos ANC, DMB, y del segundo el círc. CA que equivale á dichos dos semicírculos, quedará el salinon AFBMDGCNA igual al círculo trazado sobre FG como diámetro, que era L. Q. D. D.

531 Entendido esto, pasemos á hacer algunas consideraciones acerca de las cantidades geométricas que son *máximas* ó *mínimas* en su especie.

Cuando hay muchas cantidades de una misma especie, se da el nombre de *máximo* á la que es mayor que todas las otras, y *mínimo* á la menor. Así, el diámetro de un círculo es un máximo entre todas las líneas que unen dos puntos de la circunferencia, y la perpendicular es un mínimo entre todas las líneas tiradas desde un punto á una línea dada.

Teor. *Entre todos los triángulos de una misma base y perímetro el triángulo máximo es aquel en que los dos lados no determinados son iguales.*

Espl. Sea AC=CB (fig. 194) y AM+BM=AC+CB; digo que el triángulo isósceles ACB es mayor que el AMB que tiene la misma base AB y el mismo perímetro.

Dem. Porque si haciendo centro en C con un radio CA=CB, se describe una circunferencia que encuentre á la prolongacion de AC en D, y se tira la BD, el ángulo DBA será recto (454 cor. 3.º). Prolónguese la perpendicular BD hácia N, hágase MN=MB y tírese AN, con lo cual tendrémos que bajando desde los puntos M y C las MP y CG perpendiculares á DN; pues que CA=CD y MN=MB, será AC+CB=AD y AM+MB=AM+MN. Pero AC+CB=AM+MB; luego AD=AM+MN; pero AM+MN>AN, luego AD>AN; pero si la oblicua AD es mayor que la oblicua AN debe estar mas remota de la perpendicular AB, luego DB>BN; luego BG que es mitad de BD será mayor que BP mitad de BN (366 esc).

Ahora, los triángulos ABC, ABM que tienen la misma base AB son entre sí como sus alturas BG,BP; luego pues que se tiene BG>BP, el triángulo isósceles ACB es mayor que el ABM de la misma base y perímetro. L. Q. D. D.

532 Teor. *Entre todos los polígonos isoperímetros y de un mismo*

número de lados; el que es un máximo tiene sus lados iguales.

{*Dem.* Porque sea ABCDEF (fig. 195) el polígono máximo; si el lado BC no es igual á CD, fórmese sobre la base BD un triángulo isósceles BOD que sea isoperímetro con BCD, y tendrémos que el triángulo BOD será mayor que BCD, y por consiguiente el polígono ABODEF será mayor que ABCDEF, luego este último no sería el *máximo* entre todos los que tienen el mismo perímetro y el mismo número de lados, lo que es contra el supuesto; luego se debe tener BC=CD. Por la misma razon se tendrá CD=DE=EF=&c, luego todos los lados del polígono máximo son iguales entre sí.

{533 Teor. *De todos los triángulos formados con dos lados dados que formen entre sí un ángulo arbitrario, el máximo es aquel en que los dos lados dados forman ángulo recto.*

{*Espl.* Sean los dos triángulos BAC, BAD (fig. 196), que tienen el lado AB comun y el AC=AD: si el ángulo BAC es recto, digo que el triángulo BAC será mayor que el BAD, en que el ángulo en A es agudo ú obtuso.

{*Dem.* Porque siendo la misma la base AB, los dos triángulos BAC, BAD son como sus alturas AC, DE; pero la perpendicular DE es mas corta que la oblicua AD ó su igual AC, luego el triángulo BAD es menor que BAC. L. Q. D. D.

{534 Teor. *De todos los polígonos formados con lados dados y uno solo á arbitrio, el máximo debe ser tal que todos sus ángulos esten inscritos en una semicircunferencia de que el lado desconocido sea el diámetro.*

{*Dem.* Sea ABCDEF (fig. 197) el mayor de los polígonos formados con los lados dados AB, BC, CD, DE, EF y el último AF á arbitrio; tírense las diagonales AD, DF; si el ángulo ADF no fuese recto, se podría, conservando las partes ABCD, DEF tales como son aumentar el triángulo ADF, y por consiguiente el polígono entero hará recto el ángulo ADF por la proposicion precedente; pero este polígono no se puede aumentar, pues que se ha supuesto que ha llegado á su *máximo*; luego el ángulo ADF es ya un ángulo recto. Lo mismo sucede con los ABF, ACF, AEF; luego todos los ángulos A, B, C, D, E, F del polígono *máximo* estan inscritos en una semicircunferencia que tiene por diámetro el lado indeterminado AF, que era L. Q. D. D.

{*Esc.* Esta proposicion da orígen á una cuestion, á saber, si hay muchas maneras de formar polígonos con lados dados y uno desconocido que sea el diámetro de la semicircunferencia, en que los otros lados esten inscritos. Antes de decidir esta cuestion, es necesario observar que si una misma cuerda AB (fig. 198) subtende arcos descritos con diferentes radios AC, AD, el ángulo en el centro apoyado sobre esta cuerda será menor en el círculo, cuyo radio es mayor; así, ACB<ADB, en virtud de lo demostrado (372).

{535 Teor. *No hay mas de un modo de formar el polígono* ABCDEF (fig. 197) *con lados dados y uno desconocido que sea el diámetro de la semicircunferencia en que estan inscritos los otros lados.*

{*Dem.* Porque supongamos que se haya encontrado un círculo que satisfaga á la cuestion: si se toma un círculo mayor, las cuerdas AB, BC, CD, corresponderán á ángulos en el centro menores, luego la suma de estos ángulos en el centro será menor que dos ángulos rectos, y así los estremos de los lados no llegarán á los estremos de un diámetro. Lo contrario se verificará si se toma un círculo menor, luego el polígono de que se trata no se puede inscribir sino en un solo círculo.

{*Esc.* Se puede mudar á arbitrio el órden de los lados AB, BC, CD &c; y el diámetro del círculo circunscrito será siempre el mismo, así como la superficie del polígono; porque cualquiera que sea el órden de los arcos AB, BC &c, basta que su suma componga la semicircunferencia; y el polígono tendrá siempre la misma superficie, pues que será igual al semicírculo menos los segmentos AB, BC &c, cuya suma es siempre la misma.

{536 Teor. *De todos los polígonos formados con lados dados, el máximo es el que se puede inscribir en un círculo.*

{*Espl.* Sea ABCDEFG (fig. 199) el polígono inscritible y *abcdefg* el no inscritible formado con lados iguales, de manera que se tenga AB = *ab*, BC = *bc* &c; digo que el polígono ABCDEFG es mayor que el otro.

{*Dem.* Para probarlo, tírense el diámetro EM y las AM, MB; sobre *ab* = AB fórmese el triángulo *abm* = ABM, y únase el punto *e* con el *m* por medio de la *em*. En virtud de la proposicion (534) el polígono EFGAM es mayor que el *efgam*. Por la misma razon el polígono EDCBM es mayor que *edcbm*, luego el polígono entero EFGAMBCDE es mayor que *efgambcde*. Quitando de una y otra parte los triángulos iguales ABM, *abm*, quedará el polígono inscrito ABCDEFG mayor que el *abcdefg*, que era L. Q. D. D.

{*Esc.* Se demostrará, como en la proposicion precedente, que no puede haber sinó un solo círculo, y por consiguiente tampoco mas de un polígono *máximo* que satisfaga á la cuestion; y este polígono sería aun de la misma superficie, de cualquier modo que se mudase el órden de los lados.

{537 Teor. *El polígono regular es un máximo entre todos los polígonos isoperímetros y de un mismo número de lados.*

{*Dem.* Porque el polígono regular tiene todos sus lados iguales y se puede inscribir en un círculo (471 cor. 5.°); luego (532 y 536) este polígono es un máximo.

{538 Teor. *Dos ángulos en el centro medidos en dos círculos diferentes, son entre sí como los arcos comprendidos divididos por los radios.*

{*Espl.* Sean C y O (fig. 200) los dos ángulos: vamos á demostrar que el ángulo C es al ángulo O como $\frac{AB}{AC}$ es á $\frac{DE}{DO}$.

{*Dem.* Con un radio $OF = AC$ descríbase el arco FG, comprendido entre los lados OD,OE prolongados; á causa de los radios iguales AC,OF, se tendrá (§ 452) $C:O::AB:FG$, ó (§ 257) $:: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$; pero á causa de los arcos semejantes FG,DE, se tiene $FG:FO::DE:DO$, luego la relacion $\frac{FG}{FO}$ es igual á la relacion $\frac{DE}{DO}$, y se tiene por consiguiente $C:O:: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$, que era L. Q. D. D.

{539 Teor. *De dos polígonos regulares isoperímetros, el que tiene mas lados tiene mayor superficie.*

{*Dem.* Porque sea DE (fig. 201) el semilado de uno de los polígonos, O su centro, OE su apotema; sea AB el semilado del otro polígono, C su centro, y CB su apotema; supónganse los centros O y C situados á una distancia cualquiera OC, y las apotemas OE,CB en la direccion OC; con lo que DOE y ACB serán los semiángulos en el centro de los polígonos; y como estos ángulos no son iguales, las líneas CA, OD prolongadas se encontrarían en un punto F; bájese desde este punto sobre OG la perpendicular FG, desde los puntos O y C, como centros descríbanse los arcos GI, GH terminados en los lados OF, CF.

{Esto supuesto, se tendrá por el teorema precedente $O:C:: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; pero DE es al perímetro del primer polígono, como el ángulo O es á cuatro ángulos rectos, y AB es al perímetro del segundo, como el ángulo C es á cuatro rectos; luego pues que los perímetros de los polígonos son iguales, será $DE:AB::O:C$ ó $DE:AB:: \frac{GI}{OG} : \frac{GH}{CG}$; multiplicando los antecedentes por OG, y los consecuentes por CG, se tendrá $DE \times OG:AB \times CG::GI:GH$; pero los triángulos semejantes ODE,OFG dan $OE:OG::DE:FG$; de donde resulta $DE \times OG = OE \times FG$; del mismo modo se tendrá $AB \times CG = CB \times FG$; luego $OE \times FG:CB \times FG::GI:GH$, ó $OE:CB::GI:GH$; luego si se hace ver que el arco GI es mayor que el GH, se seguirá de aquí que la apotema OE es mayor que CB.

{Concíbase para esto del otro lado de CF la figura CKX totalmente igual á la figura CGX, de manera que se tenga $CK = CG$, el ángulo $HCK = HCG$, y el arco $KX = XG$: la curva KXG abrazará al círculo KHG, y será (374) mayor que este arco; luego GX, mitad de GXK, es mayor que GH, mitad de GHK, luego con mayor razon $GI > GH$.

{De aquí resulta que la apotema OE es mayor que CB; pero teniendo los dos polígonos un mismo perímetro, son entre sí como sus apotemas; luego el polígono que tiene DE por semilado es mayor que el que tiene por semilado á AB; el primero tiene mas lados pues que su ángulo en el centro es menor, luego *de dos polígonos regulares isoperímetros, el que tiene mas lados es mayor.*

{540 Teor. *El círculo es mayor que todo polígono isoperímetro.*

{*Dem.* Ya está probado que de todos los polígonos isoperímetros, y de un mismo número de lados, el polígono regular es el mayor; así no se trata mas que de comparar el círculo con un polígono regular cualquiera isoperímetro con él. Sea AI (fig. 202) el semilado de este polígono, C su centro; sea en el círculo isoperímetro el ángulo $DOE = ACI$, y por consiguente el arco $DE =$ al semilado AI. El polígono P es al círculo C, como el triángulo ACI es al sector DOE, y así será $P:C::\frac{1}{2}AI \times CI:\frac{1}{2}DE \times OE::CI:OE$; tírese por el punto E la tangente EG, que encuentre á OD prolongada en G, los triángulos semejantes ACI,GOE darán la proporcion $CI:OE::AI = DE:GE$; luego $P:C::DE:GE$, ó $::DE \times \frac{1}{2}OE:GE \times \frac{1}{2}OE::$ sector DOE: triáng. GOE; pero el sector DOE es menor que el triángulo GEO; luego P es menor que C, luego el círculo es mayor que todo polígono isoperímetro.

{*Esc.* El círculo no solo es mayor que cualquier polígono isoperímetro, sino que cualquiera otra figura de igual perímetro, y estando terminada por cualquier curva.}

De los planos, de su posicion, y de los ángulos sólidos.

541 Hasta aquí solo hemos considerado las líneas que se hallaban sobre un mismo plano; pero ahora vamos á manifestar las posiciones que pueden tener las líneas con los planos donde ellas no se hallan, y la posicion que pueden tener entre sí los diferentes planos.

En primer lugar advertirémos que se dice de una recta que es *perpendicular á un plano*, ó de un plano que es *perpendicular á una recta*, cuando dicha recta es perpendicular á todas las líneas que en dicho plano pasan por el punto en que esta perpendicular encuentra al plano, cuyo punto se llama el *pie* de la perpendicular.

Se dice que una recta es *paralela á un plano*, ó que un plano es *paralelo á una recta*, cuando no se pueden encontrar, aunque se prolonguen todo lo que se desee; y dos planos se dice que son *paralelos* cuando no se pueden encontrar, á cualquier distancia que se prolonguen.

542 Teor. *Una recta nó puede estar parte en un plano y parte fuera de él.*

Dem. Supongamos, si es posible, que la parte AC de la línea ACB (fig. 203) esté en el plano MN, y la parte CB fuera de él, esto es, mas arriba ó mas abajo. Ahora, como una recta que se halla en un plano se puede prolongar lo que se quiera (341), tendrémos que en el plano MN se podrá prolongar la AC, por ejemplo hasta E, y por lo mismo habrá dos rectas ACB,ACE, que tendrán un segmento comun, lo que es imposible (354); y por lo mismo tambien lo será el que *parte de una recta* &c.

Esc. *Si dos puntos* A,B (fig. 204) *estan en un plano* MN, *la recta* AB *que los une, estará tambien en el mismo plano*; porque si la recta estuviese representada por ACB fuera del plano, tirando en él la recta AFB, las dos rectas ACB,AFB encerrarían espacio; lo que es imposible (358).

543 Teor. *Dos rectas que se cortan, estan en un mismo plano y determinan su posicion.*

Dem. Sean AB,AC (fig. 205) dos rectas que se cortan en A: en primer lugar, podemos concebir un plano en que se encuentre la AB; si despues hacemos girar este plano al rededor de AB hasta que pase por C, resultará que la línea AC, que tiene dos de sus puntos A y C en este plano, se hallará toda entera en él; luego la posicion de este plano está determinada por la sola condicion de comprender dos rectas AB,AC. L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego *un triángulo ABC, ó tres puntos A,B,C que no se hallan en línea recta, determinan la posicion de un plano*; porque estos se pueden unir por medio de tres líneas.

Cor. 2.° *Luego dos paralelas AB, CD* (fig. 206) *determinan la posicion de un plano*; porque si se tiran las secantes EF,HG que se corten, el plano que pase por estas, será el plano en que se hallen dichas paralelas, pues cada una tiene dos puntos H, E y F, G en el plano que pasa por las dos secantes.

544 Teor. *Si dos planos se cortan, su interseccion comun es una línea recta.*

Dem. Porque si en los puntos comunes á los dos planos se encontrasen tres que no estuviesen en línea recta, los dos planos de que se trata, pasando cada uno por estos tres puntos, no formarían sino un solo y mismo plano, lo que es contra el supuesto.

545 Teor. *Si una recta* AP (fig. 207) *es perpendicular á otras dos* PB, PC, *que se cruzan en su pie en el plano* MN, *será perpendicular á toda recta* PQ *tirada por su pie en el mismo plano, y por lo mismo será perpendicular al plano* MN.

Dem. Porque si por un punto Q, tomado á arbitrio en la PQ, concebimos la recta BC en el ángulo BPC; tal (§479 esc. 2.° de probl. 5.°) que $BQ = QC$, y las AB, AQ, AC, tendrémos que el triángulo BPC, dará (§ 490) $PC^2 + PB^2 = 2PQ^2 + 2QC^2$; el triángulo BAC dará $AC^2 + AB^2 = 2AQ^2 + 2QC^2$. Restando la primera ecuacion de la segunda, se tendrá $AC^2 + AB^2 - PC^2 - PB^2 = 2AQ^2 + 2QC^2 - 2PQ^2 - 2QC^2 = 2AQ^2 - 2PQ^2$; y observando que los triángulos APC, APB son ambos rectángulos en P, tendrémos $AC^2 - PC^2 = AP^2$, y $AB^2 - PB^2 = AP^2$; por lo que la ecuacion de arriba se convertirá en $2AP^2 = 2AQ^2 - 2PQ^2$, y tomando la mitad $AP^2 = AQ^2 - PQ^2$, ó $AQ^2 = AP^2 + PQ^2$; luego el triángulo APQ es rectángulo en P, y por lo mismo AP perpendicular á PQ.

{*Esc.* Aquí se ve, no solamente que es posible que una recta sea perpendicular á todas las que pasan por su pie en un plano, sino que esto sucede siempre que esta línea es perpendicular á dos rectas tiradas en el plano, lo que demuestra la legitimidad de la definicion (541).}

Cor. 1.° *La perpendicular* AP *es mas corta que una oblicua cualquiera* AQ; porque ella es cateto, y la oblicua hipotenusa de un triángulo rectángulo.

Cor. 2.° *Por un punto* P *dado sobre un plano, no se puede levantar sino una perpendicular á este plano*; porque si se supone que puedan levantarse dos perpendiculares por el mismo punto P, concibiendo pasar por ellos un plano, cuya interseccion con el MN sea PQ, las dos perpendiculares de que se trata, serían perpendiculares á la linea PQ en el mismo plano, lo que es imposible.

Tambien es imposible bajar desde un punto fuera de un plano dos perpendiculares á éste plano; porque si suponemos que AP, AQ sean estas dos perpendiculares, resultaría que el triángulo APQ tendría dos ángulos rectos APQ, AQP, lo que es imposible.

Cor. 3.° Luego *la verdadera distancia de un punto á un plano se debe medir por la perpendicular tirada al plano desde dicho punto*; por ser la única que se puede tirar de su especie.

{546 Teor. *Las oblicuas* AB, AC, AD (fig. 208), *que distan igualmente de la perpendicular, son iguales; y de dos oblicuas* AE, AD *que distan desigualmente de la perpendicular, la que mas se aleja es la mas larga.*

{*Dem.* Porque siendo rectos los ángulos APB, APC, APD, si se suponen las distancias PB, PC, PD iguales entre sí, los triángulos APB, APC, APD tendrán dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego serán iguales, luego las hipotenusas ó las oblicuas AB, AC, AD serán iguales entre sí. Igualmente si la distancia PE es mayor que PD ó su igual PB, tendrémos que siendo recto el angulo APB, el ABE será obtuso (368); luego será mayor que el AEB, y por lo mismo $AE > AB = AD$.

{*Cor.* Todas las oblicuas iguales AB, AC, AD &c, terminan en la circunferencia BCD de un círculo descrito desde el pie de la perpendicular P como centro; luego dado un punto A, fuera de un plano, si se quiere encontrar sobre este plano el punto P en que caerá la perpendicular bajada desde A, se señalarían en este plano tres puntos B, C, D, equidistantes del punto A, se buscará despues el centro del círculo que pasa por estos puntos, y este centro será el punto buscado P.

{*Esc.* El ángulo ABP es el menor de todos los que forman la AB con las líneas que pasan por B en el plano MN (*), y por lo mismo es lo que se llama *la inclinacion de la oblicua* AB *sobre el plano* MN; esta inclinacion es igual para todas las oblicuas AB, AC, AD &c, porque los triángulos ABP, ADP &c son iguales.

{547 Teor. *Sea* AP (fig. 209) *una perpendicular al plano* MN, *y* BC *una linea situada en este plano: si desde el pie de la perpendicular, se tira* PD *perpendicular á* BC, *y se tira la* DA; *digo que* DA *será perpendicular á* BC *en el plano que pasa por las dos líneas* AD, CB.

{*Dem.* Porque si se toma DB=DC, y se tirán las PB, PC, AB, AC, tendrémos por construccion DB=DC, por lo que la oblicua PB =PC; de donde se deduce que los triángulos APC, APB serán iguales (360), y darán AB=AC; luego la AD tiene dos de sus puntos A y D equidistantes de los estremos B y C; luego AD (377) es perpendicular á BC, que era L. Q. D. D.

{*Esc.* 1.° Se ve al mismo tiempo que BC es perpendicular al plano APD; pues que (545) BC es perpendicular á un tiempo á las dos lineas rectas AD, PD.

{*Esc.* 2.° Las dos lineas AE, BC ofrecen el ejemplo de dos líneas que sin ser paralelas no se encuentran, porque no estan situadas sobre un mismo plano. La mas corta distancia de estas líneas, es la recta PD que es á un tiempo perpendicular á AP y á BC; porque si se juntan otros dos puntos como A y B, se tendrá AB > AD, AD > PD; luego con mayor razon AB > PD.

{Las dos líneas AE, CD, aunque no situadas en un mismo plano, se reputa que forman un ángulo recto; porque AE y la paralela *bc* tirada por uno de sus puntos tal como P á la línea BC, forman un ángulo recto. Del mismo modo la AB y la PD que representan dos rectas cualesquiera, no situadas en el mismo plano, se reputa que forman el mismo ángulo que formaría con AB la paralela á PD tirada por uno de los puntos de AB, tal como el AB*b*, si suponemos que la B*b* sea paralela á PD. }

(*) *En efecto, dicho ángulo es menor que cualquiera otro* ABO; *porque si tomamos la parte* BO = BP, *y concebimos la* AO, *será* AO > AP, *y los dos triángulos* ABO, ABP *nos darian* (375 cor.) *el ángulo* ABO > *que el* ABP.

548 Teor. *Si una línea* AP (fig. 210) *es perpendicular al plano* MN, *toda línea* DE *paralela á* AP *será perpendicular al mismo plano.*

Dem. Porque concibiendo un plano que pase por las paralelas AP, DE, su interseccion con el MN será PD; y tirando en dicho plano la BC perpendicular á PD, y uniendo el punto A con el D, tendrémos que BC (547 esc. 1.°) será perpendicular al plano APDE; luego el ángulo BDE será recto; pero el EDP es tambien recto, pues que AP es perpendicular á PD, y DE paralela á AP; luego la línea DE es perpendicular á las dos rectas DP, DB; luego es perpendicular á su plano MN. L. Q. D. D.

Cor. 1.° Recíprocamente: *si las rectas* AP, DE *son perpendiculares al mismo plano* MN, *serán paralelas*; porque si no lo fuesen, concibiendo por D una paralela á AP, esta paralela sería perpendicular al plano MN; luego se podrían levantar dos perpendiculares por un mismo punto á un mismo plano, lo que es imposible (545 cor. 2.°).

Cor. 2.° *Dos líneas* A *y* B *paralelas á una tercera* C, *son paralelas entre sí*; porque si se concibe un plano perpendicular á la C, las líneas A y B paralelas á esta perpendicular, serán perpendiculares al mismo plano; luego, por el colorario precedente, serán paralelas entre sí; aquí se supone que las tres líneas no estan en el mismo plano, porque sinó, esta proposicion ya estaba demostrada (386*a* cor. 1.°).

549 Teor. *Si la línea* AB (fig. 211) *es paralela ó una recta* CD, *tirada en el plano* MN, *será paralela á este plano.*

Dem. Porque si la línea AB que está en el plano ACDB encontrase al plano MN, esto no podría verificarse sinó en algun punto de la CD, interseccion comun de los dos planos MN, y el que pasa por AB y CD; pero AB no puede encontrar á CD por serle paralela; luego tampoco encontrará al plano MN, y por lo mismo será paralela á este plano. L. Q. D. D.

550 Teor. *Dos planos* MN, PQ (fig. 212) *perpendiculares á una misma recta* AB, *son paralelos entre sí.*

Dem. Porque si se encontrasen en alguna parte, y suponemos que O sea uno de sus puntos comunes, tirándo las OA, OB, tendríamos que la línea AB perpendicular al plano MN, sería perpendicular á la AO, tirada por su pie en este plano; por la misma razon AB sería perpendicular á BO; luego AO y OB serían dos perpendiculares bajadas desde un mismo punto O, sobre la misma recta, lo que es imposible; luego los planos MN, PQ no se pueden encontrar; luego son paralelos. L. Q. D. D.

551 Teor. *Las intersecciones* EF, GH (fig. 213) *de dos planos paralelos* MN, PQ *con un tercer plano* FG, *son líneas paralelas.*

Dem. Porque si las líneas EF, GH, situadas en un mismo plano, que aquí es el EFHG, no son paralelas, prolongadas se encontrarán; luego los planos MN, PQ en que se hallan, tambien se encontrarán, y por lo mismo no serian paralelos, contra el supuesto; luego &c.

552 Teor. *La línea AB (fig. 212) perpendicular al plano MN, es perpendicular al plano PQ paralelo á MN*

Dem. Porque si despues de haber tirado á arbitrio la línea BC en el plano PQ, se concibe un plano que pase por AB y BC, este cortará al MN en una línea, tal como la AD, que será paralela á BC (551); pero AB perpendicular al plano MN, es perpendicular á la recta AD; luego será tambien perpendicular á su paralela BC; y pues que la línea AB es perpendicular á toda recta BC que pasa por su pie en un mismo plano PQ, se sigue que es perpendicular al plano PQ, que era L. Q. D. D.

553 Teor. *Las partes EG, FH (fig. 213) de paralelas comprendidas por planos paralelos MN, PQ son iguales.*

Dem. Porque concibiendo un plano EGHF que pase por las paralelas EG, FH, encontrará á los planos paralelos en las líneas EF y GH; estas intersecciones son tambien paralelas (551) así como EG, FH, luego la figura EGHF es un paralelogramo, y por lo mismo (466 cor. 1.°) tendrémos EG = FH, que era L. Q. D. D.

Cor. De aquí se sigue que *dos planos paralelos tienen todos sus puntos equidistantes los unos de los otros*; porque si EG y FH son perpendiculares á los dos planos MN, PQ, serán paralelas entre sí, luego serán iguales.

{554 Teor. *Si dos ángulos CAE DBF (fig. 214), no situados en el mismo plano, tienen sus lados paralelos, y dirigidos en un mismo sentido, estos ángulos serán iguales, y los planos donde se hallan serán paralelos.*

{*Dem.* Tómese AC=BD, AE=BF, y tírense las CE, DF, AB, CD, EF; pues que AC es igual y paralela á BD, la figura ABDC es un paralelogramo (463); luego CD es igual y paralela con AB. Por una razon semejante EF será igual y paralela con AB; luego tambien CD es igual y paralela á EF; luego la figura CEFD es un paralelogramo; y así el lado CE es igual y paralelo á DF; luego los triángulos CAE, DBF tienen sus tres lados iguales entre sí; luego el ángulo CAE=DBF, que era L. 1.° Q. D. D.

{En segundo lugar, digo que el plano ACE es paralelo al plano BDF; porque supongamos que el plano paralelo á BDF, tirado por el punto A, encuentre á las líneas CD, EF en otros puntos que en C y E, por ejemplo en G y H; entónces, segun la proposicion (553), las tres líneas AB, GD, FH serán iguales; pero las tres AB, EF, DC lo erán ya; luego se tendrá CD=GD y FH=EF, lo que es absurdo; luego el plano ACE es paralelo á BDF, que era L. 2.° Q. D. D.

{*Cor. Si dos planos paralelos ME, PQ son cortados por otros dos planos CABD, EABF, los ángulos CAE, DBF formados por las intersecciones de los planos paralelos, serán iguales*; porque la intersec-

cion AC es paralela á BD (551), AE lo es á BF; luego el ángulo CAE=DBF.

{555 Teor. *Si tres rectas AB, CD, EF (fig. 214) no situadas en el mismo plano, son iguales y paralelas, los triángulos ACE, BDF formados de una y otra parte por los estremos de estas rectas, serán iguales y sus planos paralelos.*

{*Dem.* Porque siendo AB igual y paralela á CD, la figura ABDC es un paralelogramo; luego el lado AC es igual y paralelo á BD; por una razon semejante los lados AE, BF son iguales y paralelos; del mismo modo los CE, DF; luego los dos triángulos CAE, BDF son iguales: por otra parte se probará, como en la proposicion precedente, que sus planos son paralelos; luego &c.

{556 Teor. *Dos rectas comprendidas entre planos paralelos estan cortadas en partes proporcionales.*

{*Espl.* Supongamos que la BA (fig. 215) encuentre á los planos paralelos MN, PQ, RS en A, E, B, y que la CD encuentre á los mismos planos en C, F, D: voy á demostrar que se tendrá

AE:EB::CF:FD.

{*Dem* Tírese AD que encuentre al plano PQ en G, y las AC, EG, GF, BD; las intersecciones EG, BD de los planos paralelos PQ, RS con el plano ABD, son paralelas; luego (474 cor.) AE:EB::AG:GD; igualmente siendo paralelas las intersecciones AC, GF, se tiene AG:GD::CF:FD; luego, á causa de la razon comun AG:GD, se tendrá AE:EB::CF:FD, que era L. Q. D. D.}

557 Teor. *El ángulo comprendido por dos planos MAN, MAP (fig. 216), se puede medir por el ángulo NAP que forman entre sí las dos perpendiculares AN, AP, tiradas en cada uno de estos planos á la interseccion comun AM.*

Espl. Ante todas cosas advertirémos que se llama *ángulo* ó inclinacion de dos planos, á aquella cantidad mas ó menos grande que el un plano está separado del otro; y para demostrar la legitimidad de su medida, probarémos en primer lugar que esta medida es constante, ó que es la misma, cualquiera que sea el punto de la comun interseccion por el que se tiren las dos perpendiculares.

Dem. En efecto, si se toma otro punto M, y se tira la MC en el plano MN, y la MB en el plano MP, perpendiculares á la comun interseccion AM, tendrémos que, pues MB y AP son perpendiculares á una misma línea AM, serán paralelas entre sí. Por la misma razon, MC es paralela á AN, luego el ángulo BMC = PAN (§ 554); luego es indiferente tirar las perpendiculares al punto M ó al punto A; luego el ángulo comprendido será siempre el mismo.

Ahora es necesario probar, que si el ángulo de los planos aumenta ó disminuye en una cierta relacion, el ángulo PAN aumentará ó disminuirá en la misma razon. Para conseguirlo, descríbase en el plano

PAN desde el centro A, y con un radio arbitrario el arco NDP, desde el centro M, descríbase con igual radio el arco CEB, tírese AD á arbitrio; siendo los dos planos PAN,BMC perpendiculares á una misma recta MA, serán paralelos (550); luego las intersecciones AD,ME de estos dos planos con el tercero AMD serán paralelas; luego el ángulo BME, será igual á PAD (554).

Al ángulo formado por dos planos MP, MN, se le suele llamar *esquina ó borde*; esto supuesto, si el ángulo DAP fuese igual al DAN, la esquina DAMP, sería igual á DAMN; porque la base PAD, se podría colocar exactamente sobre su igual DAN, la altura AM permaneciendo la misma, las dos esquinas coincidirían la una con la otra. Tambien se advierte, que si el ángulo DAP estuviese contenido un cierto número exacto de veces en el PAN, la esquina DAMP, estaría contenida otras tantas veces en el PAMN: si los ángulos PAD y PAN fuesen incomensurables, demostraríamos por el método espuesto (452), que la relacion de dichas esquinas no podía ser mayor ni menor que la de dichos ángulos; luego cualquiera que sea la relacion del ángulo DAP al ángulo PAN, la esquina DAMP estará en esta misma relacion con la PAMN; luego el ángulo NAP se puede tomar por la medida de la esquina PAMN, ó del ángulo que forman entre sí los dos planos MAP, MAM (*).

Esc. 1.° Cuando el ángulo que mide la inclinacion es recto, se dice que el un plano es perpendicular al otro.

Esc. 2.° Cuando dos planos se atraviesan mútuamente, los ángulos opuestos al vértice son iguales, y los ángulos adyacentes valen juntos dos ángulos rectos; luego si un plano es perpendicular al otro, este es perpendicular al primero. Igualmente, en el concurso de los planos paralelos con un tercer plano, se verifican las mismas igualdades de ángulos, y las mismas propiedades que en el concurso de dos líneas paralelas con otra tercera.

558 Teor. *Si una línea AP (fig. 217), es perpendicular á un plano MN, todo plano APB que pase por AP, será perpendicular al plano MN.*

Dem. Sea BC la interseccion de los planos AB,MN; si en el MN se tira DE perpendicular á BP, siendo la línea AP perpendicular al plano MN, será perpendicular á cada una de las dos rectas BC,DE; pero el ángulo APD, formado por las dos perpendiculares PA,PD á la comun interseccion BP, mide al ángulo que forman los planos AB, MN; luego pues que este ángulo es recto, los dos planos son perpendiculares entre sí. L. Q. D. D.

Esc. Cuando tres rectas, tales como AP,BP,DP, son perpendiculares entre sí, cada una de estas es perpendicular al plano de las otras dos, y los tres planos son perpendiculares entre sí.

(*) *A los ángulos que forman entre sí dos planos, se les suele llamar* ángulos diedros, *ó formados por dos caras; tambien le llaman algunos* ángulos planos, *por estar formados por planos.*

559 Teor. *Si el plano AB (fig. 217), es perpendicular al plano MN, y en el AB se tira la AP perpendicular á la interseccion comun PB, digo que PA será perpendicular al plano MN.*

Dem. Porque si en el plano MN, se tira PD perpendicular á PB, el ángulo APD será recto, pues que los planos son perpendiculares entre sí; luego la línea AP es perpendicular á las dos rectas PB,PD; luego es perpendicular á su plano MN, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° *Si el plano AB es perpendicular al plano MN, y por un punto P de la comun interseccion se levanta una perpendicular al plano MN digo que esta perpendicular estará en el plano AB*; porque si no lo estuviese, se podría tirar en el plano AB una perpendicular AP á la interseccion comun BP, la cual sería al mismo tiempo perpendicular al plano MN; luego en el mismo punto P habría dos perpendiculares al plano MN, lo que es imposible.

Cor. 2.° De aquí se deduce, que *en el punto P de la AP, que es perpendicular al plano MN, no se puede concebir una línea PR en el espacio que sea perpendicular á la AP, si no se halla en el plano MN*; porque si supusiéramos que PR era perpendicular á la AP, concibiendo un plano que pasase por AP y PR, este encontraría al MN en una línea, tal como la PC, que sería perpendicular á la AP, luego tendríamos que el ángulo APC sería recto: y como por el supuesto el APR debía serlo, serían iguales; pero esto es un absurdo, porque el uno es todo, y el otro parte; luego la PR no puede estar fuera del plano MN.

Cor. 3.° De aquí se deduce, que *á todo plano MN lo podemos considerar como el concurso de todas las perpendiculares que en el espacio se pueden concebir por un mismo punto P de una línea, tal como la AP*; cuya consecuencia nos será de la mayor importancia en lo sucesivo.

560 Teor. *Si dos planos AB,AD son perpendiculares á un tercero MN, su interseccion comun AP será perpendicular á este tercer plano.*

Dem. Porque si por el punto P se levanta una perpendicular al plano MN, esta perpendicular se debe hallar toda á un tiempo en el plano AB, y en el AD, luego será su intersecion comun AP. L. Q. D. D.

Esc. Por el mismo método con que (373) demostrámos que la línea recta era mas corta que cualquiera otra sobre un plano, podemos demostrar que es mas corta en el espacio. En efecto, si suponemos que A y M (fig. 218), sean dos puntos del espacio, vamos á demostrar que la recta AM, es menor que la curva ABCDM.

Para esto, concibamos que se tome un punto cualquiera de la curva, tal como el punto C, y uniéndolo con los estremos de la recta, el triángulo ACM dará $AC + CM > AM$; uniendo ahora los puntos A y C con otro punto cualquiera B, intermedio del arco ABC, y los puntos C y M con otro cualquiera D del arco CDM, tendrémos otros dos triángulos ABC y CDM, en los que se verificará que AB + BC > AC y CD + DM > CM; y sumando estas desigualdades se tendrá AB + BC + CD + DM > AC + CM; si volviéramos á concebir líneas tiradas á puntos intermedios de cada uno de estos arcos, tendríamos un nuevo conjunto de líneas que sería mayor que el antecedente; y como al paso que este conjunto de líneas crece, se acerca á la curva, se deduce que la curva es mayor que cualquer conjunto de líneas; y como cualquiera de estos conjuntos es mayor que la recta, con mas razon será la curva mayor que la recta.

{Si la recta cortase á la curva, entónces como cada parte de recta AC,CM (fig. 219), seria menor que la parte correspondiente de curva ADC,CBM, todas las partes juntas serían menores que la curva correspondiente; luego tenemos demostrada la proposicion con toda generalidad.

{561 *Esc.* Cuando desde un punto fuera de un plano se baja una perpendicular á dicho plano, el punto donde esta perpendicular encuentra al plano, se dice que es la *proyeccion* del punto primitivo; del mismo modo se llama proyeccion de una figura cualquiera sobre un plano, la figura que resulta en dicho plano de bajar perpendiculares desde todos los puntos de la figura. La teoría de las *proyecciones* forma en el dia el asunto de una ciencia nueva que se llama *Geometría descriptiva*, y es muy interesante; pero nosotros sobre este punto solo demostrarémos por ahora, que la *proyeccion de una recta es otra recta.* Para lo cual observarémos, que si desde todos los puntos de la AB, que se halla fuera del plano PQ (fig. 220), se bajan perpendiculares á dicho plano, estas serán (548 cor. 1.°) paralelas entre sí; y pasando por una recta, se hallarán todas en un mismo plano, que será perpendicular al propuesto; y la interseccion con este plano contendrá el pie de dichas perpendiculares, y será por consiguiente la proyeccion de la recta.

{*Cor.* De aquí se deduce, que si la recta fuese perpendicular al plano, su proyeccion será un punto; porque todas las perpendiculares se confundirán con ella; y si fuese paralela, la proyeccion sería igual y paralela con la línea primitiva, porque entónces la figura ABB′A′ sería un paralelogramo.}

562 Se llama *ángulo sólido* al espacio angular, comprendido entre muchos planos que se reunen en un mismo punto; asi el ángulo sólido S (fig. 221), está formado por la reunion de los planos ASB, BSC,CSD,DSA; de aquí se deduce, que son necesarios lo menos tres planos para formar un ángulo sólido; porque dos no formarían sinó una *esquina* ó *borde*. Entendido esto, vamos á manifestar, que *si un ángulo sólido está formado por tres ángulos planos, en cuyo caso se llama ángulo* triedro, *la suma de dos ángulos cualesquiera, será mayor que el tercero.*

Espl. Sea S (fig. 222), el ángulo sólido formado por los tres ángulos planos ASB, BSC, ASC, y supongamos que ASB sea el mayor de los tres: digo que se tendrá ASB<ASC+BSC.

Constr. Fórmese en el plano ASB el ángulo BSD=BSC tírese á arbitrio la recta ADB, y habiendo tomado SC = SD, tírense las AC,BC.

Dem. Los dos lados BS, SD son iguales á los dos lados BS, SC, el ángulo BSD=BSC; luego los dos triángulos BSD, BSC són iguales; luego BD=BC. Pero como AB<AC+BC, quitando por una parte la BD, y por otra su igual BC, quedará AD < AC. Ahora, en los triángulos ASD, ASC, los dos lados AS, SD son iguales á los dos AS, SC, el tercero AD es menor que el tercero AC; luego (375) el angulo ASD < ASC. Y añadiendo BSD = BSC, se tendrá ASD+BSD, ó lo que es lo mismo ASB<ASC+BSC. L. Q. D. D.

563 Teor. *La suma de todos los ángulos planos que forman un ángulo sólido, es siempre menor que cuatro ángulos rectos.*

Dem. Córtese el ángulo sólido por un plano cualquiera ABCDE (fig. 223): desde un punto O tomado en este plano, tirensé á todos los ángulos las líneas OA, OB, OC, OD, OE, y tendrémos que la suma de los ángulos de los triángulos ASB, BSC &c, formados al rededor del vértice S, equivale á la suma de los ángulos de un igual número de triángulos AOB,BOC &c, formados al rededor del punto O. Pero en el punto B que se forma un ángulo sólido compuesto de los tres planos ABS, SBC, ABC, se tiene ABC < ABS + SBC, ó
ABO + OBC < ABS + SBC; del mismo modo en el punto C se tendrá BCO + OCD < BCS + SCD, y lo mismo se probará respecto de todos los ángulos del polígono ABCDE. De donde se sigue, que en los triángulos, cuyo vértice está en O, la suma de los ángulos que tienen su vértice en el perímetro de la figura es menor que la suma de los ángulos que tienen su vértice en el mismo perímetro, y que se hallan en los triángulos, cuyo vértice está en S; luego para que se verifique el que las sumas totales sean iguales, es indispensable que la suma de los ángulos formados al rededor del punto O, sea mayor que la suma de los formados al rededor del punto S; pero la suma de los formados al rededor de O, es igual á cuatro ángulos rectos (352, 4.°); luego la suma de los ángulos planos que forman el ángulo sólido S es menor que cuatro rectos. L. Q. D. D.

{*Esc.* Esta demostracion supone qne el ángulo sólido es *convexo*, ó que el plano de una cara prolongada no puede jamas cortar al ángulo sólido; porque si fuese de otro modo, la suma de los ángulos planos no tendría límites, y podría ser una magnitud cualquiera.

{564 Teor. *Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos, iguales cada uno al suyo, los planos en que se hallan los ángu-*

los iguales estarán igualmente inclinados.

{*Espl.* Sea el ángulo ASC = DIF (fig. 224), el ASB = DIE, y el BSC = EIF: digo que los dos planos ASC, ASB, tendrán entre sí una inclinacion igual á la de los planos DIF, DIE.

{*Constr.* Habiendo tomado SB á arbitrio, tírese BO perpendicular al plano ASC; desde el punto O donde esta perpendicular encuentra al plano, tírense OA, OC perpendiculares á SA, SC, y tírense las AB, BC; tómese despues IE=SB, tírese EP perpendicular al plano DIF, desde el punto P tírense PD, PF perpendiculares á ID, IF; y por último tírense las DE, EF.

{*Dem.* El triángulo SAB es rectángulo en A, y el IDE en D (547); y pues que el ángulo ASB = DIE, se tiene tambien SBA=IED. Por otra parte SB=IE, luego el triángulo SAB, es igual al IDE; luego SA=ID, y AB=DE; del mismo modo se demostrará que SC=IF, y BC=EF. Esto supuesto, el cuadrilátero SAOC, es igual al IDPF, porque poniendo el ángulo ASC sobre su igual DIF, á causa de SA =ID, y SC=IF, el punto A caerá en D, y el C en F. Al mismo tiempo AO perpendicular á SA caerá sobre DP perpendicular á ID, é igualmente OC sobre PF; luego el punto O caerá sobre P, y se tendrá AO=DP. Pero los triángulos AOB, DPE son rectángulos en O y en P, la hipotenusa AB=DE, y el lado AO=DP, luego los triángulos son iguales (376 cor. 2.°), y por lo mismo el ángulo OAB=PDE. Pero el ángulo OAB es la inclinacion de los dos planos SAC, SAB, y el PDE es la inclinacion de los dos planos DIF, DIE; luego estas dos inclinaciones son iguales.

{*Esc.* 1.° Debemos observar que el ángulo A del triángulo rectángulo OAB, no es propiamente la inclinacion de los dos planos ASC, ASB, sino cuando la perpendicular BO; cae con relacion á SA hácia el mismo lado que SC; si cayese del otro lado, entónces el ángulo de de los dos planos sería obtuso, y junto con el ángulo A del triangulo OAB, valdría dos rectos. Pero en el mismo caso, el ángulo de los dos planos IDF, IDE, sería tambien obtuso, y junto con el ángulo D del triángulo DPE valdría dos rectos; luego como el ángulo A sería siempre igual á D, se concluirá del mismo modo que la inclinacion de los dos planos ASC, ASB, es igual á la de los IDE IDF, que era L. Q. D. D.

{Esc. 2.° *Si dos ángulos sólidos se componen de tres ángulos planos iguales respectivamente en cada uno, y al mismo tiempo los ángulos iguales ú homólogos estan dispuestos de la misma manera en los dos ángulos sólidos, entónces estos dos ángulos serán iguales, y puestos el uno sobre el otro coincidirán.* En efecto, se ha visto ya que el cuadrilátero SAOC se puede colocar sobre su igual IDPF; así, colocando SA sobre ID, SC caerá sobre IF, y el punto O sobre P; pero á causa de la igualdad de los triángulos AOB, DPE, la perpendicular OB al plano ASC es igual á la perpendicular PE al plano IDF, ademas estas perpendiculares se dirigen en un mismo sentido; luego el punto B caerá sobre el punto E, la línea SB sobre IE, y los dos ángulos sólidos coincidirán enteramente el uno con el otro.

{Hemos advertido que esta coincidencia no tiene lugar sino suponiendo que los ángulos planos iguales *estan dispuestos del mismo modo* en ambos ángulos sólidos; porque si los ángulos planos iguales estuviesen *dispuestos en un órden inverso*, ó lo que viene á ser lo mismo si las perpendiculares OB, PE en vez de estar dirigidas en el mismo sentido con relacion á los planos ASC, DIF, estuviesen dirigidas en sentidos contrarios, entónces sería imposible hacer coincidir los dos ángulos sólidos el uno con el otro. Sin embargo, no por eso dejaría de ser verdadero el que, segun el teorema antecedente, los planos en que se hallan los ángulos iguales estarían igualmente inclinados entre sí; de manera que los dos ángulos sólidos serían iguales en todas las partes que los constituyen, aunque no se pueden superponer. Esta clase de igualdad que no es absoluta ó de superposicion, merece distinguirse con un nombre particular, y por lo mismo la llamarémos *igualdad por simetría.* Así los dos ángulos sólidos de que se trata, que están formados por tres ángulos planos iguales cada uno al suyo, pero dispuestos en un órden inverso, se llamarán *ángulos iguales por simetría*, ó simplemente *ángulos simétricos.*

{La misma advertencia se aplica á los ángulos sólidos formados de mas de tres ángulos planos: así, un ángulo sólido formado por los ángulos planos A, B, C, D, E, y otro ángulo sólido formado por los mismos en un órden inverso A, E, D, C, B pueden ser tales, que los planos en que están los ángulos iguales, estén igualmente inclinados entre sí.

{En las figuras planas no hay propiamente *igualdad por simetría*; y todas las que se quisiesen caracterizar con este nombre serían igualdades absolutas ó de superposicion; la razon es que se puede trastornar una figura plana, y tomar indiferentemente lo de arriba por lo de abajo; y no se puede ejecutar lo mismo en los sólidos ó volúmenes, en que la tercera dimension se puede tomar en dos sentidos diferentes.

{565 Probl. *Dados los tres ángulos planos que forman un ángulo sólido, encontrar por una construccion plana el ángulo que forman entre sí dos cualesquiera de estos planos.*

{*Espl.* Sea S (fig. 225) el ángulo sólido propuesto, en el cual se conocen los tres ángulos planos ASB, ASC, BSC: se pide el ángulo que forman entre sí dos de estos planos, por ejemplo los ASB, ASC.

{*Res.* Supongamos hecha la misma construccion que en el teorema precedente, y tendrémos que el ángulo OAB (fig. 224) será el ángulo buscado. Se trata, pues, de encontrar el mismo ángulo por una construccion plana ó trazada sobre un plano.

{Para esto fórmese sobre un plano los ángulos B′SA, ASC, B″SC iguales á los ángulos BSA,ASC,BSC en la figura sólida; tómense B′S y B″S, iguales cada una á BS de la figura sólida, desde los puntos B′ y B″ bájense B′A, B″C perpendiculares á SA y SC, que se encontrarán en un punto O; desde el punto A como centro, y con un radio AB′, descríbase la semicircunferencia B′*b*E; en el punto O levántese sobre B′E la perpendicular O*b* que encuentre á la circunferencia en *b*, tírese A*b*, y el ángulo EA*b* será la inclinacion buscada de los dos planos ASC,ASB en el ángulo sólido.

{*Dem.* Todo está reducido á probar que el triángulo AO*b* de la figura plana es igual al triángulo AOB de la figura sólida (fig. 224). Para conseguirlo, observarémos que los dos triángulos B′SA,BSA son rectángulos en A, los ángulos en S son iguales por construccion, luego los ángulos en B y B′ son tambien iguales. Pero la hipotenusa SB′, es igual á la hipotenusa SB, luego estos triángulos son iguales; luego SA de la figura plana es igual á SA de la figura sólida, y tambien AB′, ó su igual A*b* en la figura plana es igual á AB en la figura sólida. Del mismo modo se demostrará que SC es igual por una y otra parte; de donde se sigue que el cuadrilátero SAOC es igual en ambas figuras, y por tanto AO de la figura plana es igual con AO de la figura sólida; luego en ambas los triángulos rectángulos AO*b*, AOB tienen la hipotenusa y un lado igual; luego son iguales, y el ángulo EA*b* hallado por la construccion plana, es igual á la inclinacion de los dos planos SAB,SAC en el ángulo sólido L. Q. D. D.

{*Esc.* 1.° Cuando el punto O cae entre A y B′ en la figura plana, el ángulo EA*b* se hace obtuso, y mide siempre la verdadera inclinacion de los planos; por esta razon se ha señalado por EA*b*, y no por OA*b* la inclinacion pedida, á fin de que la misma solucion convenga á todos los casos sin escepcion.

{*Esc.* 2.° Dados tres ángulos planos, no siempre se puede formar con ellos ángulo sólido; pues para que se pueda ejecutar, es necesario en primer lugar que la suma de los tres ángulos dados sea menor que cuatro rectos, sin lo cual no se puede formar; ademas es necesario que despues de haber tomado dos de los ángulos á arbitrio B′SA, ASC, el tercero CSB″ sea tal que la perpendicular B″C al lado SC encuentre al diámetro B′E entre sus estremos B′ y E. Así, los límites de la magnitud del ángulo CSB″ son los que hacen terminar á la perpendicular B″C en los puntos B′ y E. Desde estos puntos, bájense sobre SC las perpendiculares B′I,EK, que encuentren en I y K á la circunferencia descrita con el radio SB″, y los límites del ángulo CSB″ serán CSI y CSK.

{Pero en el triángulo isósceles B′SI la línea CS prolongada siendo perpendicular á la base BI, se tiene el ángulo B′SP=PSI; por lo que sus suplementos serán iguales, y se tendrá CSI=CSB′=ASC+

ASB′, y en el triángulo ESK, siendo la línea SC perpendicular á EK, se tiene el ángulo CSK=CSE; por otra parte á causa de los triángulos iguales ASE,ASB′, el ángulo ASE = ASB′, luego CSE ó CSK = ASC — ASB′.

{De aquí resulta que el problema será posible siempre que el tercer ángulo CSB″ sea menor que la suma de los otros dos ASC,ASB′, y mayor que su diferencia, condicion que va conforme con la proposicion (562); porque en virtud de ella, es necesario que se tenga CSB″ < ASC + ASB′, y que tambien sea ASC < CSB″ + ASB′, ó CSB″ > ASC — ASB′.

{566 Probl. *Dados dos de los tres ángulos planos que forman un ángulo sólido, con el ángulo que sus planos forman entre sí, hallar el tercer ángulo plano.*

{*Espl.* Sean ASC,ASB′ los dos ángulos planos dados, y supongamos que CSB″ sea el tercer ángulo que se busca: entónces haciendo la misma construccion que en el problema antecedente, el ángulo comprendido entre los planos de los dos primeros sería EA*b*. Pero del mismo modo que se determina el ángulo EA*b* por medio de CSB″, siendo dados los otros dos, se puede determinar CSB″ por medio de EA*b*, lo que resolverá el problema propuesto.

{*Res.* Así, habiendo tomado SB′ á arbitrio, fórmese el ángulo EA*b* = al de los dos planos dados; desde el punto *b* donde el lado A*b* encuentra á la circunferencia descrita desde el centro A y con el radio AB′, bájese sobre AE la perpendicular *b*O, y desde el punto O bájese sobre SC la perpendicular indefinida OCB″, la que terminará en B″, de manera que SB″=SB′, y el ángulo CSB″ será el tercer ángulo plano pedido.

{*Dem.* Porque si se forma un ángulo sólido con los tres ángulos B′SA,ASC,CSB″, la inclinacion de los planos en que se hallan los ángulos dados ASB′,ASC, será igual al ángulo dado EA*b*.

{*Esc.* Si un ángulo sólido está formado por cuatro ángulos planos, en cuyo caso se llama ángulo *tetraedo*, y estos ángulos planos son los ASB,BSC,CSD,DSA (fig. 221), el conocimiento de estos ángulos no nos basta para determinar las inclinaciones mútuas de sus planos; porque con los mismos ángulos planos se podrían formar una infinidad de ángulos sólidos. Pero si se añade una condicion, por ejemplo, si se da la inclinacion de los dos planos ASB.BSC, entonces el ángulo sólido está enteramente determinado, y se podrá encontrar la inclinacion de dos de sus planos cualesquiera. En efecto, si concebimos un ángulo *triedro*, ó compuesto de tres ángulos planos, formados por los ángulos planos ASB,BSC,ASC, los dos primeros ángulos son dados, así como la inclinacion de sus planos; luego se podrá determinar por el problema que acabamos de resolver, el tercer ángulo ASC. Despues si se considera el ángulo sólido triedro formado por los ángulos planos ASC,ASD,DSC, cuyos tres ángulos son conocidos, resulta que el ángulo sólido está determinado. Pero el ángulo sólido tetraedro está formado por la reunion de los dos ángulos sólidos triedros, de que se acaba de hablar, luego pues que estos ángulos parciales son conocidos y determinados, el ángulo total será igualmente conocido y determinado.

{El ángulo de los dos planos ASD,DSC, se encontraría inmediatamente por medio del segundo ángulo sólido parcial. En cuanto al ángulo de los dos planos BSC,CSD, sería necesario buscar en un ángulo sólido parcial, el ángulo formado por los dos planos ASC,DSC, y en el otro el formado por los dos planos ASC,BSC, la suma de estos dos ángulos será el ángulo comprendido entre los planos BSC,DSC.

{Del mismo modo se hallará que para determinar un ángulo sólido *pentaedro*, ó compuesto de cinco ángulos planos, es necesario conocer ademas de los ángulos planos que le componen, dos de las inclinaciones mútuas de sus planos, y se necesitarían tres, si el ángulo fuese *exâedro*, y $n - 3$ si el ángulo sólido se compusiese de n ángulos planos.

Apéndice á todo lo que antecede.

Antes de pasar á la 3.ª parte, creemos oportuno añadir en esta edicion algunas proposiciones importantes que corresponden indistintamente á lo que precede; y son las siguientes:

{1.ª *Si se unen los puntos del medio de un cuadrilátero cualquiera, resultará un paralelogramo.*

{*Espl.* Sea el cuadrilátero ABCD (fig. 323); si por los puntos F, G,H,E, que se hallan en la mitad de los lados AB, BC, CD, DA, tiramos las FG, GH, HE, EF, voy á demostrar que FGHE es un paralelogramo.

{*Dem.* Si tiramos las diagonales AC, BD, se tendrá que FG y EH serán paralelas entre sí, por ser paralelas (475) á AC. Por la misma causa GH y FE son paralelas; luego FGHE es un paralelogramo, que era L. Q. D. D.

{2.ª *Si de la hipotenusa de un triángulo rectángulo se toman porciones iguales á los lados adyacentes, el cuadrado del segmento de enmedio es equivalente á dos veces el rectángulo contenido por los segmentos estremos.*

{*Espl.* Sea ABC (fig. 324) un triángulo rectángulo en B; de la hipotenusa AC tómese $AE = AB$, y $CD = CB$; digo que $DE^2 = 2AD.\ CE$.

{*Dem.* Porque $AC^2 = (AD + DE + EC)^2 = AD^2 + 2AD.\ DE + DE^2 + 2AD.\ EC + 2DE.\ EC + EC^2$.

{Por otra parte $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AE^2 + CD^2 = (AD + DE)^2 + (DE + EC)^2 = AD^2 + 2AD.\ DE + DE^2 + DE^2 + 2DE.\ EC + EC^2$;

luego si igualamos los segundos miembros y suprimimos los términos comunes, se tendrá $DE^2 = 2AD.\ EC$, que espresa L. Q. D. D.

{3.ª *Dividir un círculo en partes iguales por medio de círculos concéntricos.*

{*Res.* y *Dem.* Supongamos que se quiera dividir en tres partes iguales el círculo ABX (fig. 325); divídase el radio AC en tres partes iguales AE, ED, DC; en E y D levántense las perpendiculares EG, DF hasta que encuentren á una semicircunferencia que se trazará sobre CA como diámetro; tírense CF y CG; y desde C como centro, con las distancias CF, CG descríbanse los círculos FHI, GKL: con lo que el círculo propuesto quedará dividido en las tres partes iguales que se pedian. En efecto, tirando AF, y AG, tendrémos (488 esc. 2.°) $CF^2 = AC.DC$; por lo que $AC^2:CF^2::AC^2:AC.DC::AC:DC$; pero círc.° ABX:círc.° FHI::$AC^2:CF^2$; luego círc.° ABX:círc.° FHI::AC:DC::3:1; luego el círculo FHI es la tercera parte del círculo ABX. Del mismo modo se probará que el círculo GKL es las dos terceras partes del ABX. Por consiguiente los espacios anulares y el círculo interior FHI todos son iguales.

{*Esc.* Si se pidiese dividir el círculo en partes que tubiesen una razon dada, por círculos concéntricos, en vez de dividir el radio AC en partes iguales, se dividiría en partes que tuviesen la razon dada, y despues se haría la construccion anterior.

{4.ª *Dividir un círculo dado en partes iguales é isoperímetras por semicircunferencias escéntricas.*

{*Res.* Supongamos que se quiera dividir el círculo APBQ (fig. 326) en cinco partes iguales. Dividirémos el diámetro AB en cinco partes iguales AC, CD, DE, EF, FB. Sobre AC,AD, AE y AF como diámetros, descríbanse los semicírculos AGC,AID,ALE y ANF. Sobre BC,BD, BE y BF hácia el lado opuesto, descríbanse los BHC, BKD, BME, y BOF, y tendrémos que el círculo APBQ quedará dividido en cinco partes iguales por las curvas AGCHB, AIDKB, ALEMB y ANFOB compuestas cada una de dos semicircunferéncias, y equivalentes á la semicircunferéncia APB.

{*Dem.* Porque (504 cor. 2.°) AB: semic.ª APB::AD: semic.ª AID:: BD: semic.ª BKD. Y siendo $AB = AD + DB$, se tendrá (269) semic.ª $APB =$ semic.ª $AID +$ semic.ª $BKD = AIDKB$; y del mismo modo se probará que los demas conjuntos compuestos cada uno de dos semicircunferencias AGCHB, ALEMB y ANFOB son todos iguales á la semicircunferéncia del círculo primitivo; por consiguiente los mencionados espacios tienen iguales sus perímetros.

{Ahora, sup. APB:AB^2:: sup. ANF:AF^2:: sup. ALE:AE^2.

{Pero (268 teor. 2.°)

sup. APB: sup. ANF — sup. ALE::AB^2:AF^2 — AE^2.

{Ahora, si suponemos que el punto S sea el medio de EF, y en vez de AF, ponemos AS + SF, y por AE, su igual AS − ES = AS − SF, el último término se reducirá á 2AS.EF; y como sup. ANF − sup. ALE = espacio ALEFN, se tendrá sup. APB: esp. ALEFN::AB²: 2AS.EF. Duplicando los dos primeros términos, y dividiendo despues los consecuentes por 2, resulta

círculo APBQ: espacio ALEFN::AB²:AS.EF. Por la misma razon, tendrémos círculo APBQ: espacio FOBME::AB²:BS.EF; y como estas dos proporciones tienen unos mismos antecedentes, será

círc.° APBQ:AB²:: esp. ALEFN:AS.EF:: esp. FOBME:BS.EF. De donde (268 teor. 5.°) cír.° APBQ:AB²:: esp. ALEMBOFN:AS.EF + BS.EF = (AS + BS). EF = AB.EF; y suprimiendo AB en los consecuentes y alternando, será círc.° APBQ: esp. ALEMBOFN :: AB : EF :: 5:1.

Y como demostraríamos que cada uno de los otros cuatro espacios es la quinta parte del círculo total, resulta L. Q. D. H. y D.

Esc. Si se pidiese dividir el círculo en partes que tubiesen una razon dada por círculos escéntricos, en vez de dividir el diámetro AB en partes iguales, le dividiríamos en partes que tuviesen la razon dada, y despues se haría la construccion anterior.

5.ª *Si el ángulo* A *del triángulo* BAC (fig. 327) *se divide en dos partes iguales por medio de la* AD *se tendrá* AB×AC = BD. DC + AD².

Dem. Porque si le circunscribimos una circunferencia, prolongamos AD hasta E y tiramos la EC, los triángulos BAD, EAC semejantes, por tener iguales los ángulos BAD, EAC por el supuesto, y los ABD, AEC por lo demostrado (454 cor. 2.°), darán BA:AE::AD:AC; de donde BA.AC = AE.AD = (AD + DE). AD = AD² + DE.AD.

Pero, por lo demostrado (491), resulta DE.AD = BD.DC: luego AB.AC = AD² + BD.DC; que era L. Q. D. D.

6.ª *En todo triángulo* ABC (fig. 328), *el producto de dos lados es igual al del diámetro* CE *del círculo circunscrito por la perpendicular* AD *bajada al otro lado desde su ángulo opuesto.*

Dem. Porque, tirando AE, los triángulos ABD, AEC semejantes (485 cor. 2.°) dan AB:CE::AD:CA; de donde AB.AC = CE.AD; que era L. Q. D. D.

Cor. Si multiplicamos esta ecuacion por BC, se tendrá AB.AC.BC = CE.AD.BC; pero AD.BC es el dúplo de la superficie del triángulo ABC (515); *luego el producto de los tres lados de un triángulo es igual á su superficie multiplicada por el dúplo del diámetro del círculo circunscrito.*

7.ª *En todo cuadrilátero* ABCD (fig. 329) *inscrito en un círculo, el producto* AC.BD, *de las dos diagonales, es igual á la suma* AB.CD + AD.BC *de los productos de los lados opuestos.*

Dem. Si se toma CO = AD, y se tira BO, que corte á la diagonal AC en I, los triángulos ABD, IBC serán semejantes, por tener (454 cor. 2.°) el ángulo ABD = al CBI, el ADB = al BCI, y darán

AD : CI :: BD : BC; de donde AD. BC = CI. BD.

Los triángulos ABI, BDC son semejantes, porque de ser AD = CO, resulta AO = DC y el ángulo ABI = al DBC; siendo el BAI = al BDC (454 cor. 2.°): luego se tendrá AB:BD::AI:CD; que da AB.CD = AI. BD. Sumando será AD. BC + AB. CD = CI. BD + AI. BD = BD. (CI + AI) = BD.AC; que espresa L. Q. D. D.

8.ª *Las dos diagonales de un cuadrilátero inscrito son inversamente como las sumas de los productos de los lados que terminan en sus estremos*; es decir, (fig. 329) que BD:CA::AB.BC + AD.DC:AD.AB + BC.DC.

Dem. Los triángulos semejantes ABD, IBC, dan BD:BC::AB:BI; de donde BI.BD = BC.AB.

Si se tira la CO, el triángulo ICO será semejante al ABI, y por consiguiente al BDC; lo que dará BD:CO::DC:OI; de donde OI.BD = CO.DC = AD.DC.

Sumando los dos resultados, y observando que BI.BD + OI.BD, se reduce á BO.BD, se tendrá BO.BD = AB.BC + AD.DC. Si se toma BP = AD, y se tira CKP, se obtendrá del mismo modo CP.CA = AB.AD + BC.CD. Y formando proporcion, será

BO.BD:CP.CA::AB.BC + AD.DC:AB.AD + BC.CD.

Pero de ser el arco CO = BP, resulta el OCB = al CBP, y por consiguiente la cuerda BO = PC; por lo que, suprimiendo estos factores en la primera razon, resulta L. Q. D. D.

Esc. Estos dos teoremas pueden servir para encontrar las diagonales cuando se conozcan los lados.

9.ª *Hallar en líneas la relacion de los productos de dos ó tres líneas dadas.*

Res. y *Dem.* Supongamos que se tengan cuatro líneas representadas por A, B, a, b, y que se pida espresar en líneas la relacion de $A\times B:a\times b$.

Para esto, hallarémos una cuarta proporcional X, á B, a, b; y la relacion de A:X será la que se pide.

Porque resultando $X = \frac{ab}{B}$, se tiene $A:X::A:\frac{ab}{B}::A\times B:a\times b$.

Si fuesen seis las líneas, y se quisiere hallar la relacion de $A\times B\times C: a\times b\times c$; hallaríamos primero una cuarta proporcional X á las c, A, B y resultaría $X = \frac{A\times B}{c}$; hallaríamos otra Z, á las C, a, b, lo que dará $Z = \frac{a\times b}{C}$; y las dos rectas X, Z, guardarán la relacion pedida.

En efecto, $X:Z::\frac{A\times B}{c}:\frac{a\times b}{C}::A\times B\times C:a\times b\times c$.

Esc. Fundados en este problema, podrémos siempre hallar espresada por líneas rectas la relacion de dos superficies ó volúmenes cualesquiera; pues que, en última análisis, toda superficie equivale al producto de dos líneas, y todo volúmen al de tres.

10.ª *Hallar la comun medida, si la hay entre la diagonal y el lado del cuadrado.*

Res. y *Dem.* Sea ABCG (fig. 330) un cuadrado cualquiera, y AC su diagonal.

Es necesario primero colocar CB sobre CA, tantas veces como se pueda; y para esto descríbase desde el centro C y con el radio CB el semicírculo DBE; y se verá que CB está contenida una vez en AE dejando por resta AD; por lo que ahora es necesario comparar AD con BC ó con su igual AB.

Colóquese AD sobre AB las veces que se pueda y se hallará que está contenida dos veces, dejando BH por resta; pero como esta y con mas razon las siguientes van disminuyendo, bien pronto se escaparían por su pequeñez; y este método solo sería un medio mecánico muy imperfecto, por el cual nada se podría concluir para decidir si las líneas AC, CB tienen entre sí ó no una comun medida. Pero hay un medio muy simple de evitar las líneas decrecientes, y de no tener que operar sino con líneas que permanecen siempre de la misma magnitud.

En efecto, el ángulo ABC siendo recto, AB es una tangente, y AE una secante tirada desde el mismo punto, de modo que se tiene

AD : AB :: AB : AE.

Así, en la segunda operacion, en que se trata de comparar AD con AB, se puede, en vez de esta relacion, tomar la de AB á AE; pero AB ó su igual CD está contenida dos veces en AE dejando la resta AD; luego el resultado de la segunda operacion es el cociente 2 con la resta AD, que es necesario comparar con AB.

La tercera operacion, que consiste en comparar AD con AB, se reducirá del mismo modo á comparar AB ó su igual CD con AE, y se tendrá aun 2 por cociente y AD por resta.

Donde se ve que la operacion no se terminará jamas, y que por lo mismo no hay comun medida entre la diagonal y el lado del cuadrada: verdad conocidad ya (487 cor. 2.°) (pues que estas dos líneas son entre sí como $\sqrt{2}:1$), pero que adquiere un mayor grado de claridad por la resolucion geométrica.

Cor. De aquí resulta que siendo 1 el lado del cuadrado, su diagonal está espresada por la fraccion continua

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\text{\&c.}$$

11.ª *Dos rectas tiradas por el punto de contacto de dos círculos, cortan arcos cuyas cuerdas son paralelas.*

Dem. Si los círculos se tocan interiormente, los ángulos BAT, y AST (fig. 101) son iguales, por tener ambos por medida la mitad del arco AXT; y por la misma razon el ángulo BAQ = APQ; pero BAQ = BAT, luego AST = APQ; por lo que será (385) PQ paralela á ST. Si los círculos se tocan esteriormente, resulta que el ángulo AMR = EAR, por tener ambos por medida la mitad del arco AZR; pero EAR = BAT por opuestos al vértice; luego AMR = AST; y en virtud de lo demostrado (384), será RM paralela á ST.

12.ª *Si por el punto E, dentro ó fuera de una circunferencia (fig. 331) se tiran dos líneas AB,CD perpendiculares entre sí hasta cortar á la circunferencia, se tendrá* $CE^2 + ED^2 + EB^2 + EA^2 =$ *al cuadrado del diámetro.*

Dem. Porque si se tira BF paralela á CD, y las AF,AD,CB y DF, se tendrá (446) que DF = CB, y $DF^2 = CB^2 = CE^2 + EB^2$: el triángulo AED tambien rectángulo en E, dará $AD^2 = AE^2 + ED^2$, y sumando, se tendrá $DF^2 + AD^2 = AE^2 + ED^2 + CE^2 + EB^2$. Pero, siendo BF paralela á CD, el ángulo ABF será recto, por deber ser igual con el AED; luego AF será un diámetro, y el ángulo ADF será recto; por lo que el triángulo ADF, dará

$AF^2 = DF^2 + AD^2 = AE^2 + ED^2 + CE^2 + EB^2$, que espresa L. Q. D. D.

13.ª *Dividir harmónicamente una recta dada y en una razon dada.*

Espl. Se dice de una recta que está cortada harmónicamente, cuando consta de tres segmentos, tales, que la línea total guarde con uno de los estremos, la misma razon, que el otro estremo con la parte media: y así, lo que se pide es *dividir la recta* AB (fig. 332), de manera que AB:BG::AH:HG::K:L.

Res. Tírese por A una recta cualquiera AC, que se prolongará por ambos lados, de modo que AC = AD = K; tírese CB, y tomando AE = L, tírese la EF paralela con AB, y por F, la FG paralela con CA; y tirando la FD, quedará cortada la AB del modo que se pedía.

Dem. Por ser FG paralela con AC, se tiene AC:GF::AB:BG. Por ser FG paralela con AD, los triángulos HGF,HAD, dan AD = AC: GF::AH:HG; y como estas proporciones tienen comun la primera razon, será AB:BG::AH:HG::AC = K:FG = AE = L: que era L. Q. D. H y D.

14.ª *En un triángulo cualquiera, los paralelogramos descritos en dos de los lados, equivalen al descrito en la base, y limitado por paralelas á la línea que une el vértice con el punto de concurso de los lados esteriores de los paralelogramos.*

Espl. Sean ADEB y BGFC (fig. 333) paralelogramos descritos sobre los dos lados AB y BC del triángulo ABC; prolónguense DE y FG hasta que se encuentren en H; únase este punto con el vertice B; tírense AK, CL paralelas á BH, únase K con L; y se tendrá que AK y CL, siendo iguales y paralelas con BH, serán iguales y paralelas entre sí, y la figura AKLC será un paralelogramo, que voy á demostrar es igual con ADEB + BGFC.

{*Dem.* Si se prolonga HB hasta que encuentre á la base AC en I, los paralelogramos KAIM y AKHB que tienen una misma base AK y se hallan entre unas mismas paralelas, son equivalentes. Pero AKHB y BADE que tienen la misma base AB, y se hallan entre unas mismas paralelas, son tambien equivalentes. Luego KAIM es equivalente á BADE. Y como del mismo modo se demostrará que LCIM es equivalente á BCFG, resulta que el paralelogramo total KACL es equivalente á los dos paralelogramos juntos ABED y BCFG; que era L. Q. D. D.

{15.ª *La suma de los cuadrados de las rectas tiradas desde un punto cualquiera á dos ángulos opuestos de un rectángulo, equivalen á la de los otros dos.*

{*Espl.* Si desde el punto E, (fig. 334) dentro ó fuera de un rectángulo, se tiran rectas á los cuatro ángulos, voy á demostrar que $AE^2 + EC^2 = BE^2 + ED^2$.

{*Dem.* Uniendo E con F, interseccion de las dos diagonales, como estas se dividen (468) en partes iguales, se tiene (490) $AE^2 + EC^2 = 2AF^2 + 2EF^2$, $BE^2 + ED^2 = 2BF^2 + 2EF^2 = 2AF^2 + 2EF^2$. Y como los segundos miembros son iguales, será $AE^2 + EC^2 = BE^2 + ED^2$, que espresa L. Q. D D.

{16.ª *Los cuadrados de los lados de un cuadrilátero equivalen juntos á los cuadrados de sus dos diagonales mas cuatro veces el cuadrado de la recta que une los puntos medios de estas.*

{*Espl.* Sea ABCD (fig. 335) un cuadrilátero cualquiera, en que las diagonales AC, BD estén divididas en dos partes iguales en E y F; voy á demostrar que $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2$.

{*Dem.* Si se tiran las EF, DF, FB, tendrémos (490) $AB^2 + BC^2 = 2AF^2 + 2BF^2$, $CD^2 + DA^2 = 2AF^2 + 2DF^2$; sumando se tiene $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 4AF^2 + 2BF^2 + 2DF^2 = AC^2 + 2(BF^2 + DF^2) = AC^2 + 2(2BE^2 + 2EF^2) = AC^2 + 4BE^2 + 4FE^2 = AC^2 + BD^2 + 4FE^2$, que espresa L. Q. D. D.

{17.ª *El diámetro del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual al esceso de la suma de los catetos sobre la hipotenusa.*

{*Dem.* La (fig 336) da 2 triángulo ABC $= 2$ (AOB + BOC + AOC) = OD (AB + BC + AC); por otra parte, 2 triángulo ABC = AB BC; luego igualando los segundos miembros y duplicando, será $2OD\,(AB + BC + AC) = 2AB.BC = (AB + BC)^2 - AB^2 - BC^2 =$

$(AB + BC)^2 - AC^2 = (AB + BC + AC)\,(AB + BC - AC)$; que da $2OD = AB + BC - AC$; que espresa L. Q. D. D.

{18.ª *La perpendicular, tirada desde un punto cualquiera de la circunferencia al diámetro, es media proporcional entre los segmentos que en ella causan las rectas tiradas desde los estremos del diámetro por otro punto cualquiera de la circunferencia; es decir, que* DF (fi. 337) *es media proporcional entre los segmentos* DE y DG.

{*Dem.* Los triángulos ABC, GBD rectángulos el uno en C y el otro en D, tienen comun el ángulo DBG; luego el tercer ángulo BAC = al BGD; y por consiguiente los triángulos ADE, GDB son (485 cor. 2.°) semejantes, y dan AD: DE:: DG: DB; de donde AD. DB = DE. DG; pero AD. DB = DF^2; luego DE. DG = DF^2, de donde DE: DF:: DF: DG; que espresa L. Q. D. D.

{19.ª *Hallar la mas corta distancia entre dos rectas no situadas en el mismo plano.*

{*Espl.* Sean AB, CD (fig. 339) dos rectas dadas, no situadas en el mismo plano, de las cuales nos proponemos hallar la mas corta distancia.

{Por AB, háganse pasar dos planos perpendiculares entre sí, que encuentren á CD, por ejemplo el uno en C, y el otro en D; desde los puntos C y D tírense CA y DB perpendiculares á AB; en el plano ABD, tírese DE paralela y AE perpendicular á BA, lo que formará el rectángulo ABDE; y en el plano CAE, únase CE, y tírese AI perpendicular á CE; en fin, en el plano CDE, tírese IK paralela á DE hasta que encuentre á CD en K, hágase AL = IK, y únase KL; y se tendrá que la recta KL es perpendicular á un tiempo á las dos rectas dadas AB, CD; y es mas corta que cualquiera otra línea, que uniese dos puntos de las AB, CD.

{*Dem.* En efecto, las tres rectas AB, AC, AE siendo por construccion perpendiculares entre sí, la una de ellas AB es perpendicular al plano de las otras dos (558 esc.), luego AB es perpendicular á AI (545); por otra parte KI es paralela á AB, y pues que se ha hecho AL = KI, se sigue que la figura AIKL es un rectángulo. Esto supuesto, el ángulo AIK es recto, así como AIC: luego la recta AI es perpendicular al plano KIC, ó CDE; luego su paralela KL es perpendicular al mismo plano BCE, y por consiguiente lo es á CD. Luego la recta KL es perpendicular á un mismo tiempo á las dos rectas AB,CD.

{Ahora, si por un punto cualquiera M de la CD, se tira MN paralela á DE ó á AB, la distancia del punto M á la recta AB será igual con AN, pues que el ángulo BAN es recto. Pero se tiene AN > AI = KL; luego KL es la mas corta distancia de las líneas dadas AB,CD. L. Q. D. H y D.

{*Esc.* El deseo de perfeccionar esta obra, la utilidad que resulta de promover los adelantamientos científicos, y mis constantes esfuerzos para simplificar la esposicion de sus principios, han llamado de tal modo mi atencion en todas ocasiones, que no he omitido diligencia alguna para coadyuvar á tan importantes objetos. Por esta causa, he añadido en el testo de esta edicion, al tratar de la igualdad y semejanza de los triángulos, muchos casos que he podido deducir de varias indicaciones que se hallan diseminadas en las diferentes obras tanto antiguas como modernas, siendo por lo general mias las demostraciones. Y en consecuencia de otros trabajos ulteriores sobre este particular, he hallado otros seis casos de igualdad de triángulos, y cinco de semejanza, qué juzgo dignos de atencion; por lo que terminaré este apéndice con las once proposiciones que siguen.

{" 20.ª *Dos triángulos isósceles son iguales cuando tienen iguales un ángulo y un lado homólogo.*"

{*Dem.* De tener un ángulo homólogo igual, se sigue (485 cor. 3.°) que son equiángulos; y como ademas tienen un lado igual, resulta (361) que los triángulos son iguales. L. Q. D. D.

{21.ª *Dos triángulos son iguales, cuando tienen bases y alturas iguales, y ademas tienen igual el ángulo opuesto á la base*; es decir, *que si los triángulos* ABC, *abc* (fig. 316 a) *tienen* BC=*bc*, AD=*ad*, y áng. BAC= áng. *bac*, *dichos triángulos son iguales.*

{*Dem.* Circunscribiendo al triángulo ABC un círculo, y superponiendo el *abc*, de modo que *bc* se confunda exactamente con su igual BC, cayendo la perpendicular *da* por la parte superior de BC, tendrémos, que por ser áng. BAC= áng. *bac*, el punto *a* caerá precisamente sobre algun punto del arco BAC (§ 458); luego si el punto *a* no se confunde con A, al hacer la superposicion, caerá en un punto tal como E; y la *ad* estará representada por EF, perpendicular á BC, y por consiguiente (383) paralelá con AD; y como AD=*ad* por el supuesto, será AD=EF; luego (§ 463) AE será paralela con DF, y el arco BA= arco EC (§ 446), añadiéndoles el AE, será BAE=AEC; luego cuerda BA= cuerda EC, y la BE=AC; luego los triángulos BAC,BEC son iguales (359); y como el BEC representa al *bac*, se deduce que los ABC, y *abc* son iguales, que era L. Q. D. D.

{Si la perpendicular ó altura cayese fuera de la base, circunscrito el círculo y hecha la superposicion, estarian representados los triángulos por los A′E′C′,E′B′C′, y se sacaria la misma consecuencia.

{El caso en que una perpendicular ó altura caiga dentro de un triángulo, y la otra fuera, no es compatible con la circunstancia de ser igual el ángulo opuesto á la base.

{22.ª *Dos triángulos son iguales cuando tienen iguales un ángulo y su lado opuesto, y las rectas que se tiren homólogamente á los espresados lados opuestos sean tambien iguales*; es decir, que los triángulos

ABC, *abc* (fig. 316*b*) serán iguales si áng. BAC = áng. *bac*, BC=*bc*, y si siendo áng. AMB= áng. *amb*, se tiene AM=*am*.

{*Dem.* Bajando las perpendiculares AD, *ad*, los triángulos ADM, *adm*, rectángulos en D y en *d*, serán iguales (376 cor. 2.°); luego AD=*ad*; por lo que, en virtud de la proposicion anterior, los triangulos ABC, *abc* son iguales, que era L. Q. D. D.

{23ª. *Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual, y las rectas que desde dicho ángulo se tiren homólogamente al lado opuesto, le dividan en partes respectivamente iguales*; es decir, que los triángulos ABC, *abc* (fig. 316*c*) serán iguales si áng. BAC= áng. *bac*; y si siendo áng. AMB= ang. *amb*, se verifica que BM = *bm*, y MC=*mc*.

{*Dem.* Si sumamos estas ecuaciones, será BC=*bc*; y concibiendo circunscritos círculos á estos triángulos, y unidos sus centros O, *o* con los vértices y con los puntos M, *m*; tendrémos que, pues los ángulos BAC, *bac* son iguales, tambien lo serán sus duplos (454 cor. 1.°) BOC, *boc*; y por ser isósceles los triángulos OBC, *obc*, serán iguales (prop. 20ª.), y darán BO=*bo*, y áng. OBM= áng. *obm*; luego los triángulos BOM, *bom* son iguales (360) y dan OM=*om*, áng. BMO= áng. *bmo*; y como áng. AMB = áng. *amb*, restando, será áng. OMA= áng. *oma*; y como los puntos M, *m*, se hallan dentro de los círculos, será AO>OM y *ao*>*om*; por lo que los triángulos OMA, *oma* tienen dos lados iguales, á saber AO = *ao* por radios iguales á BO, y *bo*, y MO=*mo*, é igual tambien el ángulo opuesto al mayor de los lados; luego (376 esc. 1.°) serán iguales y darán AM=*am*; luego en virtud de la proposicion anterior, los triángulos ABC, *abc* serán iguales. L. Q. D. D.

{24.ª *Dos triángulos son iguales si tienen dos lados iguales, y considerando el otro lado por base, las alturas son iguales*: es decir, que los triángulos ABC, *abc* (fig. 316*b*) son iguales, si se tiene AB=*ab*, AC=*ac* y AD=*ad*.

{*Dem.* Porque los triángulos ABD, *abd* rectángulos en D y *d* serán iguales (376 cor. 2.°) y darán áng. ABD= áng. *abd*; por la misma razon el áng. en C igual al en *c*; y (386*e* cor. 2.°) el BAC= *bac*; luego los triángulos ABC, *abc* serán iguales (360). L. Q. D. D.

{25.ª *Dos triángulos son semejantes cuando tienen un ángulo igual, y las rectas que desde dicho ángulo se tiren homólogamente á los lados opuestos, sean proporcionales con dichos lados*: es decir, que los triángulos ABC, *abc* (fig. 322*a*) son semejantes, si se verifica que áng. BAC= áng. *bac*, y que siendo tambien áng. AMB= áng. *amb*, se tenga AM:BC::*am*:*bc*.

{*Dem.* Bajando las perpendiculares AD, *ad* los triángulos ADM, *adm* serán (485 cor. 2.°) semejantes, y darán AM : AD : : *am* : *ad*; y como esta proporcion y la del supuesto tienen unos mismos antecedentes, resulta (267 teor 2.° cor.) AD:BC::*ad*:*bc*, que nos dice (485 8°. caso) que los triángulos ABC, *abc* son semejantes. L. Q. D. D.

¶26.ª *Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual, y las rectas que desde dicho ángulo se tiren homólogamente al lado opuesto, le dividan en partes proporcionales*: es decir, que los triángulos ABC, *abc* (fig. 322*b* serán semejantes, si áng. BAC = áng. *bac*, y si siendo áng. AMB = áng. *amb*, se verifica que BM : MC : : *bm* : *mc*.

¶*Dem.* Circunscríbanse círculos á dichos triángulos, y únanse sus centros con todos los vértices y con los puntos M, *m*, donde la recta, dada de posicion, encuentra á la base; y tendrémos que, pues los ángulos BAC, *bac* son iguales, tambien lo serán sus duplos (454 cor. 1.°) BOC, *boc*; luego los triángulos BOC, *boc* que son isósceles; serán (485 cor. 3.°) semejantes, y darán OB:BC::*ob*: *bc*, áng. OBM= áng. *obm*, y áng. OCB = áng. *ocb*.

¶Ahora, componiendo la proporcion del supuesto, tendrémos BC: BM::*bc*:*bm*. Alternando esta proporcion y la anterior, tendrán comun la razon de BC:*bc*, y formando proporcion con las otras, será OB: *ob*::BM:*bm*; y como áng. OBM=áng. *obm*, resulta (484) que los triángulos BOM, *bom* serán semejantes, y darán OB:OM::*ob*:*om*, y áng. MOB= áng. *mob*; y como BO=AO, y *bo*=*ao*, por radios será AO: OM::*ao*:*om*.

¶Siendo por el supuesto áng. AMB= áng. *amb*, y habiendo acabado de demostrar, que áng. OMB= áng. *omb*, restando estas ecuaciones, será áng. AMO= áng. *amo*; y como el punto M se halla dentro del círculo, la OM<OA; luego los triángulos AOM, *aom* son (485 4.° caso) semejantes, y darán áng. AOM= áng. *aom*.

¶Por otra parte, siendo áng. BOC= áng. *boc*, y BOM=*bom*, restando, será áng. MOC= áng. *moc*; y como AOM=*aom*, restando de esta ecuacion, la anterior, se tendrá áng. AOC= áng. *aoc*; por lo que los triángulos isósceles AOC, *aoc* serán (485 cor. 3.°) semejantes, y darán áng. OCA= áng. *oca*; y como áng. OCB = áng. *ocb*, sumando, se tendrá áng. ACB= áng. *acb*; pero áng. BAC= áng. *bac* por el supuesto; luego (485 cor. 1.°) los triángulos ABC, *abc* son semejantes, que era L. Q. D. D.

¶27.ª *Dos triángulos son semejantes, siempre que tengan dos lados del uno proporcionales con dos lados del otro, y las perpendiculares que desde el ángulo que forman dichos lados se tiren al lado opuesto sean proporcionales con dicho lado*; es decir, que los triángulos ABC, *abc* (figs. 322*c*, 322*d*, 322*e*) son semejantes, si se verifica que AB:AC::*ab*:*ac*, y AD:BC::*ad*:*bc*.

¶*Dem.* Si los lados AB, AC (fig. 322*c*) fuesen iguales, los *ab*, *ac* tambien lo serian (259); y los triángulos ABC, *abc* serian isósceles, y darian BD=DC = $\frac{1}{2}$BC, *bd* = *dc* = $\frac{1}{2}$*bc*; y como las mitades tienen

la misma razon que los todos, la segunda proporcion del supuesto se convertiría en AD:BD::*ad*:*bd*; y como los ángulos ADB, *adb* son iguales por rectos, los triángulos ABD, *abd* serán semejantes (484), y darán áng. DBA= áng. *dba*, ó áng. CBA= áng. *cba*; por lo que los triángulos ABC, *abc* serán (485 cor. 1.°) semejantes.

¶Si fuesen desiguales los lados AB, AC y por ejemplo AB fuese el mayor, formaríamos (fig. 322*d*, 322*e*) áng. CAE=ABC; y teniendo los triángulos ABE, CAE, el ángulo comun AEB, serán semejantes y darán AB:AC::BE:AE::AE:CE; y verificando lo mismo en el triángulo *abc*, se tendrá igualmente *ab*:*ac*::*be*:*ae*::*ae*:*ce*, y en virtud de la primera proporcion del supuesto, será BE:AE::AE:EC::*bc*:*ac*::*ae*:*ce* (*m*); y por lo demostrado (289 esc.), será BE: EC:: BE²: AE²:: *be*²: *ae*²:: *be*: *ce*.

¶Dividiendo la proporcion que resulta de comparar la primera y última razon, será BC: BE:: *bc*: *be*; y como alternada la segunda proporcion del supuesto, tendrá la razon BC: *bc* comun con esta, será AD: *ad*:: BE: *be*. Pero de la serie de razones iguales (*m*) se sacá BE: *be*:: EA: *ea* (*n*); luego será AD: *ad*:: EA: *ea*; y como los ángulos en D y *d* son rectos, los triángulos AED, *aed* son semejantes (485 5.° caso), y darán áng. AED= áng. *aed*.

¶Ahora, en la (fig. 322*d*) los ángulos AED, AEC, son unos mismos así como los *aed*, *aec*; luego la ecuacion anterior, se convertirá en áng. AEC= ang. *aec*, ó áng. AEB= áng. *aeb*; y en virtud de la proporcion (*n*), los triángulos ABE, *abe* serán (484) semejantes, y darán áng. ABE= áng. *abe*, ó lo que es lo mismo áng. ABC= áng. *abc*; pero siendo rectos los ángulos en D y *d*, los ACD, *acd*, ó lo que es lo mismo, los ACB, *acb* serán agudos; luego los triángulos ABC,*abc* tienen dos lados proporcionales, igual el áng. opuesto al lado menor, y de una misma especie el que en ambos triángulos se opone al lado mayor; luego (485 6.° caso) serán semejantes.

¶La ecuacion áng. AED= áng. *aed*, nos da en la (fig. 322*e*) áng. AEC áng. *aec*, ó lo que es lo mismo áng. AEB= áng. *aeb*, y en virtud de la proporcion (*n*), resulta (484), que los triángulos ABE,*abe* son semejantes, y darán áng. ABE= áng. *abe*, ó lo que es lo mismo áng- ABC= áng. *abc*. Pero (§ 368) AEB>ADB; luego será obtuso; y con mas razon será obtuso el áng. ACB y el *acb*: por lo que los ángulos BAC, *bac* serán agudos; y en su consecuencia los triángulos ABC, *abc* que tienen un ángulo igual, á saber ABC=*abc*, y proporcionales los lados que forman un ángulo agudo en ambos, serán semejantes envirtud del séptimo caso (§ 485). Luego queda probada la proposicion en todos los casos que pueden ocurrir. L. Q. D. D.

¶28.ª *Dos triángulos son semejantes cuando teniendo desiguales los lados que forman un ángulo, son entre sí proporcionales, y se verifica ademas que la perpendicular tirada al lado opuesto á dicho ángulo, di-*

vide al espresado lado ó á su prolongacion en partes proporcionales: es decir, que los triángulos ABC, *abc* (fig. 322*d* y 322*e*) son semejantes siempre que AB, AC, siendo desiguales, asi como *ab*, *ac*, se tenga AB:AC:: *ab*: *ac*, y siendo AD, *ad* perpendiculares á BC, *bc*, sea BD:DC::*bd*:*dc*.

{*Dem.* Si AB > AC, formarémos el ángulo CAE=ABC, y procediendo en un todo como en el caso anterior, deducirémos la proporcion BC: BE:: *bc*: *be*, y convirtiendo, se tiene BC: EC:: *bc*: *ec*; y componiendo la segunda proporcion del supuesto para la (fig. 322*d*) y dividiendo para la (fig. 322*e*), será BC: DC:: *bc*: *dc*. Como estas dos porporciones tienen unos mismos antecedentes, resulta EC: DC:: *ec*: *dc*; la cual compuesta respecto de la (fig. 322*d*) y dividida respecto de la (fig. 322*e*), da DE: EC:: *de*: *ec*; pero de la serie de razones (*m*) se saca EA: EC:: *ea*: *ec* (*n*); y como está proporcion y la anterior tienen unos mismos consecuentes, será DE: EA:: *de*: *ea*; luego los triángulos DAE, *dae* rectángulos en D y *d* tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales; luego (§ 485...5.° caso) son semejantes, ydan áng. AED= áng. *aed*, ó AEC=*aec*; y en virtud de la proporcion (*n*), resulta que los triángulos CAE, *cae* son (484) semejantes; luego áng. ACE= áng. *ace*, y (353) áng, ACB= áng. *acb*. Péro por el supuesto se tiene AB > AC, *ab* > *ac*; luego los triángulos ABC, *abc* tienen dos lados proporcionales é iguales los ángulos opuestos al mayor de los lados; por lo que (485, 4.° caso) serán semejantes; que era L. Q. D. D.

{29ª. *Dos triángulos son semejautes cuando tienen un ángulo igual, y los productos de los lados que le forman son proporcionales con los cuadrados de los lados opuestos al ángulo igual*; es decir, que los triángulos ABC, *abc* (figuras 322*d* y 322*e*) son semejantes, si áng. BAC= áng. *bac*, y BA. AC: BC²:: *ba*. *ac*: *bc*.²

{*Dem.* En efecto, por lo demostrado (517) se tiene triáng. ABC: triáng. *abc*:: BA. AC: *ba*. *ac*. Por otra parte, bajando las perpendiculares AD, *ad* se tiene (515 esc.) triáng. ABC: triáng. *abc*:: BC. AD: *bc*. *ad*; y como estas proporciones tienen la primera razon comun; será BA. AC: *ba*. *ac*::BC. AD: *bc*. *ad*; y como, alternada la proporcion del supuesto, tiene comun con esta, la primera razon, será BC²: *bc*²:: BC. AD: *bc*. *ad*; dividiendo los antecedentes de esta por BC, y los consecuentes por *bc*, se convierte en BC: *bc*:: AD: *ad*; luego los triángulos ABC, *abc* tienen un ángulo igual, y las bases son proporcionales con las alturas; luego en virtud del (8.° caso §. 485) serán semejantes; que era L. Q. D. D.

{30.ª *Dos triángulos son iguales, cuando tienen iguales un ángulo y su lado opuesto, y los productos de los lados que forman el ángulo son tambien iguales*; es decir, que si los triángulos ABC. *abc* (fig. 322*d*, y 322*e*) tienen áng BAC= áng. *bac*, BA. AC=*ba*. *ac*, y BC=*bc*, serán iguales.

{*Dem.* La segunda ecuacion elevada al cuadrado, da BC²=bc², y como con dos ecuaciones se puede formar proporción, tendrémos BA. AC: *ba*. *ac*:: BC²: *bc*²; luego, en vírtud de la proposicion anterior, lo ménos que se ha de verificar es que los triángulos han de ser semejantes; por lo que tendrán áng. ABC= áng. *abc*, y áng. ACB= áng. *acb*; y como BC=*bc* por el supuesto, dichos triángulos son iguales (361), que era L. Q. D. D.

PARTE TERCERA.

De las Prismas, y medicion de sus superficies y volúmenes.

567 Pasamos ya á considerar la estension con sus tres dimensiones de longitud, latitud y profundidad ó grueso, ó de la estension sin prescindir de ninguna dimension, ó de una porcion cualquiera del espacio absoluto. Cuando esta estension se halla terminada por planos se llama en general *solido*, ó mas bien *cuerpo poliedro*; siendo indispensable para esto que los planos esten todos terminados por líneas rectas, porque de lo contrario no formarían sinó un *ángulo sólido*.

Cuando el cuerpo consta de cuatro caras se llama en particular *tetraédro*; cuando de seis *exaédro*; cuando de ocho *octaédro*; cuando de doce *dodecaédro*; cuando de veinte *icosaédro* &c. El tetraédro es el mas simple de los poliedros, porque es necesario á lo menos tres planos para formar un ángulo sólido, y estos tres planos dejan un vacío que para quedar terminado es idispensable á lo ménos otro plano.

La interseccion comun de dos caras adyacentes de un poliedro se llama *lado* ó *arista* del poliedro.

Cuando el poliedro tiene dos caras opuestas iguales y paralelas y las demas caras son paralelogramos, se llama *prisma*; los dos planos paralelos é iguales se llaman las *bases* del prisma, y los paralelogramos *caras del prisma*: de donde resulta que *todas las aristas laterales de un prisma son iguales*; porque BG=CH por lados opuestos del paralelógramo BH (fig. 226); CH=DI por la misma razon en el CI, luego BG=CH=DI=&c.

568 Para concebir formado un sólido de esta especie, supongamos que ABCDE (fig. 226) sea un polígono cualquiera; si en un plano paralelo á ABC &c, se tiran las líneas FG, GH, HI, &c, iguales y paralelas á los lados AB, BC, CD, &c, se formará un polígono FGHIK igual á ABCDE; y si despues se unen los vértices de los ángulos homólogos por medio de las rectas AF, BG, CH, &c, las caras ABGF, BCHG &c serán paralelogramos, y el sólido ABCDEFGHIK formado de este modo será un prisma, cuyas bases son ABCDE, FGHIK.

De otro modo podrémos concebir originado el prisma, á saber, suponer que la base ABCDE se mueve paralelamente á sí misma ó á lo largo de una recta tál como la BG.

Tambien se puede concebir originado el prisma del movimiento de una recta BG que se mueva paralelamente á sí misma, ó á una recta dada de posicion al rededor de una figura rectilínea cualquiera tal como la ABCDE.

Se llama *altura* del prisma á la perpendicular tirada desde una de las bases á la opuesta ó á su prolongacion; y cuando las aristas del prisma son perpendiculares á la base, entónces se dice que el prisma es *recto* como el ABCDHEFG (fig. 227), y cuando esto no se verifica se dice que el prisma es *oblicuo* tal como el ABCDEKFGHI (fig. 226).

El prisma se llama *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, *exagonal*, &c, segun sea la base *triángulo*, *cuadrilátero*, *pentágono*, *exágono*, &c. Como hay diferentes especies de cuadriláteros resulta que tambien el prisma cuadrangular recibe diferentes nombres; así, cuando la base es un rectángulo se llama *paralelepípedo*; cuando es romboide prisma *romboidal*; cuando rombo, prisma *rombal*; cuando es un trapezoide, se podría llamar *trapezoidal*; cuando un trapecio *trapecial*, y finalmente cuando la base es un cuadrado y la altura es igual al lado de este cuadrado, se le da el nombre de *cubo*.

Se llama *diagonal* en un poliedro á la línea que une los vértices de dos ángulos sólidos no adyacentes á una misma arista; y se dice due un poliedro es *simétrico*, cuando se compone de otros dos que, teniendo una base comun, estan construidos semejantemente el uno sobre esta base y el otro debajo; pero con la condicion de que los vértices de los ángulos sólidos homólogos esten situados á distancias iguales del plano de la base sobre una misma recta perpendicular á este plano;

Por ejemplo: si la recta ST (fig. 228) es perpendicular al plano ABC, y en el punto O donde encuentra á este plano, está dividida en dos partes iguales, los dos cuerpos SABC, TABC, que tienen comun la base ABC, formarán un poliedro simétrico.

Se llaman *vértices* de un poliedro, los puntos situados en los vértices de sus diferentes ángulos sólidos.

Entendido esto, pasemos á demostrar las propiedades de estos cuerpos; pero ante todas cosas observarémos que lo que vamos á demostrar es respecto de los poliedros de ángulos salientes, á que llamamos *convexos*; designando con este nombre á aquellos cuya superficie no se puede cortar por una recta sinó en dos puntos. En estos cuerpos el plano de una cara prolongada no puede cortar al cuerpo; luego es imposible que el poliedro se halle parte sobre el plano de una cara y parte debajo, y por lo mismo se hallará todo de un mismo lado de este plano.

569 Teor. *Dos poliedros no pueden tener los mismos vértices, y*

en el mismo número, sin coincidir el uno con el otro.

Dem. Porque si suponemos construido uno de ellos, y se quiere construir otro que tenga los mismos vértices y en el mismo número, cada plano de los que formen el segundo tendrá con su correspondiente en el primero tantos puntos comunes como ángulos haya en la cara del poliedro; y como en cada cara ha de haber lo menos tres ángulos, resulta (543 cor. 1.°) que todas las caras coincidirán, y por consiguiente los poliedros, que era L. Q. D. D.

570 Teor. *Dos prismas son iguales, cuando tienen un ángulo sólido igual comprendido por tres planos, iguales cada uno al suyo y semejantemente colocados.*

Espl. Sea la base ABCDE (fig. 226), igual á la base *abcde*, el paralelogramo ABGF igual al *abgf*, y el paralelogramo BCHG igual al *bchg*: digo que el prisma ABCI será igual al prisma *abci*.

Dem. Por ser las bases ABCDE, *abcde* iguales, se podrán colocar de manera que se confundan exactamente; pero los tres ángulos planos que forman el ángulo sólido B son iguales á los tres ángulos planos que forman el ángulo sólido *b*, cada uno al suyo, á saber, ABC=*abc*, ABG=*abg* y GBC=*gbc*; ademas estos ángulos están igualmente colocados, luego los ángulos sólidos B y *b* son iguales, y por consiguiente el lado BG caerá sobre su igual *bg*. Tambien se ve que á causa de los paralelogramos iguales ABGF, *abgf*, el lado GF caerá sobre su igual *gf* y GH sobre *gh*; luego la base superior FGHIK coincidirá exactamente con su igual *fghik*, y los dos sólidos quedarán confundidos en uno solo, pues que tendrán los mismos vértices. L. Q. D. D.

Esc. Un prisma queda enteramente determinado cuando se conoce su base ABCDE, y se da conocida de magnitud y posicion la arista BG. Porque si por el ángulo G se tira GF igual y paralela á AB, GH igual y paralela á BC, y en el plano FGH paralelo á ABC se describe el polígono FGHIK igual á ABCDE, quedarán determinados todos los vértices del prisma.

Luego dos prismas construidos con los mismos datos no pueden ser desiguales, lo que confirma la proposicion que acabamos de demostrar.

Fundados en el teorema antecedente demostrarémos que *si los ángulos homólogos opuestos de las bases de un paralelepípedo recto se unen por medio de las diagonales DB, HF* (fig. 229), *el plano DBFH que pase por ellas, dividirá al paralelepípedo ABCDEFGH en dos prismas ABDEFH, DBCGHF iguales.*

Dem. Por la naturaleza del prisma resulta que ABCD es igual con EFGH, y por lo mismo ABD será igual con DBC, con EFH y con FGH; luego el ángulo sólido en E será igual al ángulo sólido en C, pues el ángulo BCG=AEF por rectos, el GCD=AEH por la misma razon, y el BCD=HEF por la igualdad de dichos triángulos. Por otra parte EH=BC por ser ambas iguales con FG por lados opuestos de paralelogramos; EF=CD por ser ambas iguales con HG, y EA=CG por ser aristas laterales; luego los dos prismas triangulares tienen las dos circunstancias del teorema antecedente, y por lo mismo son iguales.

Cor. Luego el prisma triangular ABDHEF es la mitad del paralelepípedo ABCDHEFG que tiene la misma altura y cuya base ABCD es dupla de la ABD del primero.

571 Teor. *En todo paralelepípedo los planos opuestos son iguales y paralelos; y recíprocamente si un poliedro está terminado por seis planos paralelos de dos en dos, es un paralelepípedo.*

Dem. Por ser paralelepípedo, las bases ABCD,EFGH (fig. 229) son paralelogramos iguales y sus lados son paralelos; luego solo falta probar que lo mismo se verifica respecto de las demas caras laterales opuestas, tales como AEHD,BFGC. Pero AD es igual y paralela con BC, pues que la figura ABCD es un paralelogramo; por una razon semejante AE es igual y paralela con BF; luego el ángulo DAE es igual al CBF (554), y el plano DAE paralelo á CBF; luego tambien el paralelogramo DAEH es igual al CBFG.

Del mismo modo se demostrará que los paralelogramos opuestos ABFE, DCGH son iguales y paralelos. L. 1.° Q. D. D.

Ahora, si suponemos que los seis planos sean paralelos, esto es, que AF paralelo á GD, AH á BG, y AC á EG; vamos á probar que el poliedro AG es un paralelepípedo. Para esto observarémos que las comunes intersecciones de los planos AF, DG con el AC serán dos líneas AB, DC paralelas. Las AD, BC comunes secciones de los planos paralelos AH, BG con el AC serán paralelas; luego la figura AC es un paralelogramo.

Del mismo modo demostraríamos que todos los demas lo eran; pero el AF nos dá (466 cor. 1.°) AB igual y paralela con EF; el BG nos da BC igual y paralela con FG; de donde se deduce (554) que el ángulo EFG=ABC; por lo que (468 esc. 2.°) el paralelogramo ABCD será igual con el EFGH; luego dicho cuerpo es un paralelepípedo. L. 2.° Q. D. D.

Cor. Pues que el paralelepípedo es un sólido comprendido por seis planos, de los cuales los opuestos son iguales y paralelos, resulta que *una cara cualquiera y su opuesta se pueden tomar por las bases del paralelepípedo.*

Esc. Dadas tres rectas AB, AE, AD no situadas en el mismo plano y formando entre sí ángulos dados, se puede construir sobre estas rectas un paralelepípedo; para lo cual es necesario tirar por el estremo de cada recta un plano paralelo al plano de las otras dos, á saber, por el punto B un plano paralelo á DAE, por D uno paralelo á BAE; y por E otro paralelo á BAD; con lo que los concursos mútuos de estos planos formarán el paralelepípedo pedido.

572 Teor. *Si dos paralelepípedos AG, AL (fig. 230) tienen una base comun ABCD, y sus bases opuestas EFGH, IKLM están en un mismo plano y entre las mismas paralelas EK, HL, estos dos paralelepípedos serán equivalentes entre sí ó lo que es lo mismo, iguales en volúmen.*

Espl. Aquí pueden ocurrir tres casos, de los cuales dos están representados en la figura, y el tercero ocurriría cuando FG se confundiese con IM; pero la demostracion es la misma para todos, y digo primero que el prisma triángular AEIDHM es igual al prisma triangular BFKCGL.

Dem. En efecto, pues que AE es paralela á BF, y HE á FG, el ángulo AEI=BFK, HEI=GFK, y HEA=GFB, y de estos seis ángulos los tres primeros forman el ángulo sólido E, y los otros tres forman el ángulo sólido F, resulta que los ángulos sólidos E y F son iguales. Ahora, si se coloca el prisma AEM sobre el BFL, de modo que la base AEI caiga sobre la base BFK, estas dos bases coincidirán por ser iguales (360), pues tambien AI es paralela é igual con BK; y pues que el ángulo sólido E es igual al F, el lado EH caerá sobre su igual FG; habiéndose confundido los dos lados EA, EH con con los dos lados FB, FG, todo el paralelogramo HEAD se habrá confundido con el BFGC: y por la misma razon se habrán confundido los demas paralelogramos; luego estos prismas serán iguales. Luego si de una misma cantidad, quitamos dichos prismas, los residuos que nos queden serán iguales; pero si del poliedro AEL se quita el prisma AEM, quedará el paralelepípedo AIL; y si del mismo AEL se quita el prisma BFL quedará el paralelepípedo AEG; luego los dos paralelepípedos AIL, AEG son iguales en volúmen.

573 Teor. *Dos paralelepípedos de la misma base y altura son iguales en volúmen, ó son equivalentes.*

Dem. Porque si suponemos que ABCD (fig. 231) sea la base comun de los dos paralelepípedos AG, AL, resulta que por tener una misma altura, sus bases superiores EFGH,IKLM se hallarán sobre un mismo plano. Ahora, si se conciben prolongados los planos ABFE, DCGH, y los ADMI, CBKL hasta que se encuentren, formarán por su comun interseccion (571) un paralelepípedo que tendrá la misma base ABCD, y cuya base opuesta estará representada por el paralelogramo NOPQ. Ahora, este tercer paralelepípedo será igual en volúmen al AG (572), pues que teniendo la misma base inferior, las bases superiores están en un mismo plano y entre las paralelas GQ y FN. Por la misma razon este tercer paralelepípedo será igual con el AL; luego los dos paralelepípedos AG, AL que tienen la misma base y altura son iguales en volúmen, ó son equivalentes. L. Q. D. D.

574 Teor. *Todo paralelepípedo se puede convertir en un paralelepípedo rectángulo de igual volúmen, que tenga la misma altura y una base equivalente.*

Dem. Porque si suponemos que AG (fig. 231), sea el paralelepípedo propuesto, y desde los puntos A, B, C, D se tiran las AI, BK, CL, DM perpendiculares al plano de la base, tendrémos formado el paralelepípedo AL igual en volúmen al paralelepípedo AG, y cuyas caras laterales AK, BL &c serán rectángulos. Luego si la base ABCD es un rectángulo, AL será el paralelepípedo rectángulo equivalente al propuesto AG. Pero si ABCD (fig. 232) no es un rectángulo, se tirarán las AO y BN perpendiculares á CD, despues las perpendiculares OQ y NP á la base ABCD, con lo cual se tendrá el poliedro ABNOQPKI que será un paralelepípedo rectángulo; en efecto, por construccion la base ABNO y su opuesta IKPQ son rectángulos; las caras laterales lo son tambien, pues que las aristas AI, OQ &c son perpendiculares al plano de la base; luego el poliedro AP es un paralelepípedo rectángulo. Pero los dos paralelepípedos AP, AL se pueden reputar que tienen la misma base ABKI y la misma altura AO; luego son equivalentes ó iguales en volúmen; luego el paralelepípedo AG (fig. 231.) que se habia reducido á un paralelepípedo equivalente AL, se encuentra de nuevo convertido en un paralelepípedo rectángulo AP, que tiene la misma altura AI, y cuya base ABNO es equivalente á la base ABCD. L. Q. D. D.

575 Teor. *Toda seccion NOPQR* (fig. 226) *hecha en un prisma por un plano paralelo á la base ABCDE, es igual á esta base.*

Dem. Porque las partes AQ, BP, CO &c de paralelas comprendidas entre los planos paralelos ABC, NOP son iguales, y asi todas las figuras ABPQ, BCOP &c son paralelogramos. De aqui se sigue que el lado PQ es igual á AB, OP á BC, ON á CD &c, ademas los lados iguales son paralelos; luego (554) el ángulo ABC=QPO, el BCD=PON &c; luego los dos polígonos ABCDE, NOPQR tienen los lados y los ángulos iguales respectivamente; luego son iguales.

576 Como los poliedros estan terminados por planos, resulta que para hallar su superficie, no tenemos que hacer otra cosa que hallar separadamente la de cada uno de sus planos, sumar todas estas espresiones y se tendrá la superficie total; pero cuando el poliedro es un prisma, podemos cifrar el modo de hallar su superficie en la regla contenida en el siguiente

Teor. *La superficie lateral de un prisma es igual á un paralelogramo que tenga por base una de las aristas del prisma, y por altura el perímetro de una seccion perpendicular á una arista; ó lo que es lo mismo, su espresion se halla multiplicando una de las aristas por el perímetro de dicha seccion.*

Dem. Supongamos que se nos dé el prisma *abcdefghik* (fig. 226), y tendrémos que su superficie lateral será igual á la de todas las caras *ag, bh, ci, dk, ef*; pero si por un punto cualquiera de una de las aristas se hace pasar un plano *mnopq* perpendicular á dicha arista, tendrémos (548) que será perpendicular á todas las demas aristas; luego el paralelogramo $ag=gb\times mq$, el $bh=ch\times mn$, el $ci=di\times no$, el $dk=ke\times op$, el $ef=ek\times pq$; y como todas las aristas *af, bg, ch, di, ek son iguales*, se tendrá que *superficie lateral de prisma abcdefghik*= á los paralelogramos $ag+bh+ci+dk+ef=bg\times mq+ch\times mn+di\times no+ke\times op+ek\times pq=$ (sustituyendo *bg* á las demas aristas, y sacándola fuera de un paréntesis como factor común) $=bg\,(qm+mn+no+op+pq)$ $=bg\times$ perímetro de seccion *mnopq*.

Y como un paralelogramo que tuviese por base el lado *bg* y por altura el perímetro *mnopq* de la seccion, tendrá por superficie esta misma espresion, resulta L. Q. D. D.

Cor. De aquí se sigue que cuando el prisma sea recto, la seccion será paralela é igual con la base, y por lo mismo *la superficie de un prisma recto se halla multiplicando una de las aristas por el perímetro de la base.*

Esc. 1.° Si á esto añadimos la superficie de las dos bases, ó el duplo de una de ellas porque son iguales, se tendrá la superficie total del prisma.

{*Esc.* 2.° Si suponemos que el paralelepípedo ABCDE (fig. 227) sea rectángulo, y concebimos la línea BH, que por ir desde un ángulo sólido á su opuesto, se llama *diagonal*, tendrémos que como el triángulo BDH será rectángulo en D, nos dará (487) $BH^2=BD^2+DH^2$; pero el triángulo BCD tambien será rectángulo en C y dará $BD^2=CD^2+BC^2$; luego $BH^2=CD^2+BC^2+DH^2$; y como $CD=AB$, y $BF=HD$, resultará $BH^2=AB^2+BC^2+BF^2$, y $BH=\sqrt{AB^2+BC^2+BF^2}$, que nos dice que *la diagonal de un paralelepípedo rectángulo es igual á la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de las tres aristas que forman uno de los ángulos sólidos.*}

577 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos AG, AL* (fig. 227), *que tienen la misma base ABCD, son entre sí como sus alturas AE, AI.*

Dem. Aqui pueden ocurrir dos casos, ó que las alturas sean comensurables, ó que no lo sean: supongamos 1.° que las alturas AE, AI sean entre sí como dos números enteros, tales como 15 : 8; si dividimos la AE en quince partes iguales, la AI contendrá 8 de estas partes; y tirando por los puntos de division *x, y, z &c*, planos paralelos á la base, estos planos dividirán al poliedro AG en 15 paralelepípedos parciales, que serán todos iguales entre sí por tener bases y alturas iguales; bases iguales porque toda seccion MIKL hecha en un prisma paralela á su base ABCD es igual á ésta base; alturas iguales porque estas son las mismas divisiones *Ax, xy, yz* &c; pero de estos 15 paralelepípedos iguales ocho están incluidos en AL; luego el paralelepípedoAG es al AL como 15 es á 8, ó en general como la altura AE es á la altura AI.

2.° Supongamos ahora que las AE, AI sean incomensurables, ó que la relacion no se pueda espresar por números: digo que tambien se verificará que *vol.* AG: *vol.* AL::AE:AI, porque si esta proporcion no se verifica, supongamos que se tenga *vol.* AG: *vol.* AL::AE:Ao. En este caso dividiendo AE en partes iguales que cada una sea menor que oI, habrá á lo menos un punto de division *m* entre *o* é I. Sea P el paralelepípedo que tiene por base ABCD, y por altura A*m*; pues que las alturas AE, A*m* son entre sí por construccion como dos números enteros, se tendrá *vol.* AG: P:: AE: A*m*; pero esta proporcion y la del supuesto tienen unos mismos antecedentes; luego (267 cor. de teor. 2.°) *vol.* AL:P::Ao:A*m*; y como A*o* es mayor que A*m*, se necesitaría para que se verificase la proporcion, que el paralelepípedo AL fuese mayor que P; pero AL es al contrario menor, por ser parte de él; luego es imposible que el cuarto término de la proporcion *vol.* AG: *vol.* AL::AE:X sea una línea mayor que AI. Por un razonamiento semejante se demostraría que dicho cuarto término no podría ser menor que AI; luego si no puede ser mayor ni menor será igual.

578 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos AG, AK* (fig. 233) *que tienen la misma altura AE, son entre sí como sus bases ABCD,AMNO.*

Dem. Habiendo colocado el uno al lado del otro como representa la figura, prolónguese el plano ONKL hasta que encuentre al DCGH, cuya comun seccion sea PQ, y tendrémos un tercer paralelepípedo AQ, que se podrá comparar con cada uno de los paralelepípedos AG,AK. Los AG, AQ, teniendo la misma base AEHD, son entre sí como sus alturas AB, AO; igualmente los AQ, AK que tienen la misma base AOLE, son entre sí como sus alturas AD, AM, lo cual nos dará estas dos proporciones *vol.*AG:*vol.*AQ::AB:AO,*vol.*AQ:*vol.*AK::AD:AM; multiplicando ordenadamente, y suprimiendo en el resultado el factor comun *vol.*AQ, se tendrá *vol.* AG: *vol.* AK::AB×AD:AO×AM; pero AB×AD representa la base ABCD, y AO×AM representa la base AMNO; luego dos paralelepípedos rectángulos de la misma altura son entre sí como sus bases. L. Q. D. D.

579 Teor. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas, ó como los productos de sus tres dimensiones.*

Dem. Porque habiendo colocado los dos paralelepípedos AG,AZ, de manera que sus superficies tengan el ángulo comun BAE, prolónguense los planos necesarios para formar el tercer paralelepípedo AK de la misma altura que el AG, y se tendrá por la proposicion precedente, *vol.*AG:*vol.* AK::ABCD:AMNO; pero los dos paralelepípedos AK, AZ, que tienen la misma base AMNO, son entre sí como sus alturas AF, AX; luego será *vol.*AK:*vol.*AZ::AE:AX; multiplicando ordenadamente estas dos proporciones, y omitiendo en la primera razon el factor comun *vol.* AK, se tendrá

*vol.*AG:*vol.*AZ::ABCD×AE:AMNO×AX;

y como en vez de las bases ABCD,AMNO se pueden sustituir sus valores AB×AD y AO×AM, tendrémos

*vol.*AG:*vol.*AZ::AB×AD×AE:AO×AM×AX;

luego *dos paralelepípedos rectángulos* &c.

Cor. De aquí se deduce que se puede tomar por medida de un paralelepípedo rectángulo el producto de su base por su altura ó el producto de sus tres dimensiones. Y de este modo es como se valúan todos los otros poliedros.

Esc. Para comprender bien esta medida, debemos tener presente que se entiende por producto de dos ó de muchas líneas, el producto de los números que representan estas líneas, y estos números dependen del valor de la unidad lineal que se puede tomar á arbitrio. Esto supuesto, el producto de las tres dimensiones de un paralelepípedo es un número que no significa nada en sí mismo, y que sería diferente si se hubiese tomado otra unidad lineal. Pero si se multiplican del mismo modo las tres dimensiones de otro paralelepípedo, valuándolas relativamente á la misma unidad lineal, los dos productos serán entre sí como los volúmenes de los poliedros, y darán la idea de su magnitud relativa.

La magnitud de un sólido ó de un cuerpo geométrico ó su estension, constituye lo que llama su *volúmen* (*), y esta palabra se emplea particularmente para señalar la medida de un sólido: así se dice que *el volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de su base por su altura, ó al producto de sus tres dimensiones.*

Siendo iguales las tres dimensiones del cubo, resulta que si llamamos 1 á un lado, se tendrá para su volúmen $1\times1\times1$ ó $1^3=1$; si el lado es 2 su volúmen será $2\times2\times2$ ú 8; si el lado es 3 su volúmen será $3\times3\times3=27$, y así en adelante; por lo que estando los lados en la razon de los números 1,2,3, &c, los mismos cubos ó sus volúmenes son como los números 1,8,27 &c. De aquí es de donde proviene el nombre de *cubo*, que se da al producto que resulta de tres factores iguales ó de multiplicar un número dos veces por sí mismo.

Por ser iguales las tres dimensiones del cubo, es el que se toma por unidad de medida; y entónces el paralelepípedo se compone de tantos cubos iguales con el que sirve de unidad, como unidades hay en el producto de sus dimensiones, que es lo que manifiesta la figura 234.

{580 Si nos propusiesemos formar un cubo duplo de otro dado,

(*) *Se ha usado para espresar el volúmen, de la palabra* solidez; *pero como en la idea que nos formamos de la solidez entra la de impenetrabilidad, y los cuerpos geométricos son penetrables, hemos creido mas oportuno usar de la palabra volúmen que de la otra.*

sería preciso que el lado del cubo buscado fuese al lado del cubo dado, como la raiz cúbica de 2 á la unidad. Por una construccion geométrica se halla fácilmente la raiz cuadrada de 2, pues es la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el cual cada cateto sea igual con la unidad; pero no se puede encontrar del mismo modo su raiz cúbica, á lo ménos por las simples operaciones de la Geometría elemental, que no suponen sinó líneas rectas y circulares cuyos radios son derminados.

{Por esta causa el problema de la duplicacion del cubo ha sido célebre entre los antiguos Geómetras, así como el de *la triseccion del ángulo* ó *del arco* que es sobre poco mas. ó ménos del mismo órden; y tanto el uno como el otro quedarían resueltos completamente, si se hallase un medio de hacer con líneas rectas y circulares la construccion enunciada (508), como lo hemos hecho en la nota de dicho párrafo. En efecto, si quisiéramos formar un cubo duplo de otro cuyo lado estuviese representado por la línea X (fig. 157**), haríamos $Z = 2X$, y efectuando aquella construccion, demostraríamos que las $IK = Z$, HB, HI, $BC = X$, eran continuo proporcionales geométricas; por lo cual las podríamos poner de este modo $\div\div X:HI:HB:Z$; y en virtud de lo espuesto (289), será $X^3:HI^3::X:Z::X:2X::1:2$; de donde $HI^3 = 2X^3$, luego el cubo construido con HI como lado será duplo del formado sobre la línea dada X.}

581 Teor. *El volúmen de un paralelepípedo, y en general el volúmen de un prisma cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

Dem. Porque 1.° un paralelepípedo cualquiera es equivalente á un paralelepípedo rectángulo de la misma altura, y de una base equivalente (574). Pero el volúmen de este se halla multiplicando su base por su altura; luego el volúmen del primero es del mismo modo igual al producto de su base por su altura.

2.° Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de la misma altura y de dupla base (570 cor.); y como el volúmen de este es igual á su base multiplicada por su altura, resulta que la del prisma triangular es igual al producto de su base, mitad de la del paralelepípedo, multiplicada por su altura.

3.° Un prisma cualquiera se puede dividir en tantos prismas triangulares de la misma altura como triángulos se pueden formar en el polígono que le sirve de base. Pero el volúmen de cada prisma triangular es igual á su base multiplicada por su altura; y pues que la altura es la misma para todos, se sigue que la suma de todos los prismas parciales será igual á la suma de todos los triángulos que les sirven de bases, multiplicada por la altura comun. Luego *el volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Cor. *De aquí resulta que si dos prismas cualesquiera tuviesen una misma altura y sus bases fuesen iguales ó equivalentes, serían iguales en volúmen.*

De la pirámide y de la medicion de su superficie y volúmen.

582 Se da el nombre de *pirámide* á un poliedro que tiene por base una figura cualquiera, y cuyas caras son triángulos que tienen un ángulo en un mismo punto llamado *cúspide* ó *vértice* de la pirámide, y sus bases son los lados de la base de la pirámide; tal es el SABCDE (fig. 235) en que el polígono ABCDE es la base de la pirámide, S su cúspide ó vértice, los triángulos ASB,BSC,CSD &c son las caras de la pirámide, y las líneas SA,SB,SC &c se llaman *aristas* de la pirámide.

Toda línea que desde el vértice se tire perpendicularmente á la base, tal como la SO (figs. 235, 236), ó á su prolongacion, se llama *altura* de la pirámide; y toda línea tal como la SK que desde el vértice S se tira en una de las caras perpendicularmente al lado sobre que insiste, se llama *apotéma* de la pirámide.

Las pirámides toman nombre del número de lados de su base; por lo que si la base es un triángulo se llama *triangular*, si un cuadrilátero *cuadrangular*, si un pentágono *pentagonal* &c.

Cuando el polígono de la base es regular, y ademas la línea que desde el cúspide va al centro del polígono y se llama el *eje* de la pirámide, es perpendicular á la base, la pirámide se llama *regular* (*); y cuando le falta alguna de estas dos circunstancias se llama *irregular.*

La pirámide se dice que es *recta*, cuando el eje es perpendicular á la base, como la SABCDE (fig. 235), y que es *oblicua* cuando no, como la de la (fig. 236).

583 Teor. *En toda pirámide regular los triángulos laterales* ASB, BSC,CSD &c (fig. 235), *son isósceles é iguales entre sí.*

Dem. Por ser la pirámide regular se verificará 1.° que la SO será perpendicular al plano ABCDE; 2.° que los radios oblicuos OA, OB, OC, OD, OE serán iguales, lo cual nos dará que los triángulos SAO, SOB serán iguales, porque tienen comun el lado SO, iguales los lados OA, OB, é iguales los ángulos SOA, SOB por rectos; luego se verificará (360) que las hipotenusas SA y SB serán iguales; del mismo modo demostraríamos que $SB = SC$ &c, luego $SA = SB = SC$ &c, lo que prueba que los triángulos ASB, BCE &c, son isósceles; y como ademas de esto los lados AB,BC,CD &c son iguales, resulta que dichos triángulos tienen los tres lados del uno iguales con los tres lados del otro, luego son iguales.

Cor. De aquí resulta que concibiendo planos que pasen por la altura SO y por cada una de las aristas, quedará dividida la pirámide

(*) *Develey advierte que á la pirámide regular se debería llamar mas bien pirámide uniforme; pues en rigor no hay mas pirámide regular que el tetraédro.*

en tantas pirámides triangulares como lados tiene la base; y como aunque la pirámide fuese irregular, podríamos dividir su base en tantos triángulos como lados tiene, si por cada arista y la línea que une dicho punto con el vértice, se conciben planos, quedará dividida la pirámide en tantas pirámides triangulares como lados tiene.

584 Como la pirámide es un poliedro, resulta que su superficie se hallará encontrando separadamente la de cada triángulo, y añadiendo á la suma de todos la superficie de la base; pero cuando la pirámide es regular, podemos dar otra regla mas sencilla para hallar su superficie, y es la contenida en el siguiente

Teor. *La superficie lateral de toda pirámide regular es igual á la de un triángulo cuya base es el perímetro de la pirámide y la altura es igual con la apotema, ó se halla multiplicando el perímetro de la base por la mitad de la apotema, ó la apotema por la mitad del perímetro de la base.*

Dem. Por ser regular la pirámide, todos los triángulos laterales serán iguales, y por lo mismo la superficie lateral equivaldrá á tantas veces uno de ellos como caras tiene la pirámide; y como esta tiene tantas caras como lados la base, resulta que llamando n al número de lados de la base, será *superficie lateral de pirám. reg.* $= n$. triángulos; pero la superficie de un triángulo tal como el ASB (fig. 235) se halla multiplicando la apotema SK que llamarémos $ap.$ por el lado AB que llamarémos L, luego la superficie de uno de los triángulos laterales será $\frac{L \times ap.}{2}$, lo que dará

superficie lat. de pirám. reg. $= \frac{n \times L \times ap.}{2} = \frac{nL \times ap.}{2}$; y como nL es igual con el perímetro de la base, se tendrá

superficie de pirám. reg. $=$ *perím. de base* $\times \frac{ap.}{2}$; pero esta espresion es la de un triángulo que tuviese por base al perímetro, y cuya altura fuese igual con la apotema, luego &c.

Esc. Si á la espresion de la superficie lateral añadimos la superficie de la base, se tendrá la superficie total de la pirámide.

585 Teor. *Si una pirámide* SABCD (fig. 237) *se corta con un plano paralelo á la base* ABCD, *se verificarán tres cosas*: 1.ª *este plano cortará á todas las aristas* SA, SB, SC &c, *en partes proporcionales, que tendrán unas con otras la misma razon que las de otra recta* SE, *tirada desde el vértice de la pirámide al plano de su base; y la misma razon tambien que dos lados homólogos cualesquiera* AB, ab *de la base y de la seccion.*

2.ª *La seccion* abcd *será semejante á la base* ABCD.

3.ª *La superficie de la base* ABCD *tendrá con la* abcd *de la seccion, la misma razon que los cuadrados de las líneas* SE, Se.

Dem. 1.ª Si nos figuramos que por la recta SE y por las aristas de la pirámide pasan los planos SEA, SEB, SEC &c, estos planos cortarán á la seccion *abcd* en las líneas *ea*, *eb*, *ec* &c. Sentado esto, como las comunes secciones de los planos paralelos son líneas paralelas (551), los triángulos ASE, BSE, ASB, BSC &c, serán semejantes á sus correspondientes *aSe*, *bSe*, *aSb*, *bSc* &c (482), luego los lados de estos triángulos serán proporcionales y darán

SE:*Se*::SA:*Sa*::SB:*Sb*::SC:*Sc*::&c:&c::AB:*ab*::BC:*bc*::&c.

2.ª Una vez que los triángulos AEB, BEC, CED &c en que está dividido el plano ABCD de la base por los planos que pasan por la recta SE y por las aristas de la pirámide, tienen sus lados respectivamente paralelos á los de los triángulos *aeb*, *bec*, *ced* &c, en que está dividida la seccion *abcd* por los mismos planos, resulta que todos estos triángulos son semejantes unos á otros (485 cor. 4.°), luego las dos figuras ABCD, *abcd* que se componen de los tales triángulos serán figuras semejantes (496).

3.ª Y por ser semejantes las figuras ABCD, *abcd*, tendrán unas con otras la misma razon que los cuadrados de sus líneas homólogas (518 esc. 1.°) y por lo mismo ABCD:$abcd$::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2; por ser AB:*ab*::SE:*Se*.

Cor. De aquí se deduce, que *si cortamos las dos pirámides SABCD, SFGH* (fig. 238), *que tienen iguales sus alturas SE, SI, con un plano paralelo al de sus bases, las secciones* abcd, fgh, *tendrán una con otra la razon de las bases ABCD, FGH; y si estas fuesen iguales tambien lo serán las secciones.*

Porque por lo demostrado últimamente, será ABCD:$abcd$::AB^2:ab^2::SE^2:Se^2; por la misma razon FGH:fgh::SI^2:Si^2; pero SE$=$SI por el supuesto, y como el plano es paralelo á las bases, cortará partes iguales de las alturas; luego siendo Ee, Ii iguales, los residuos *Se*, *Si* serán iguales, y por lo mismo las dos proporciones de arriba tendrán igual la última razon, y podrémos formar proporcion con las otras dos; lo que nos dará ABCD:*abcd*::FGH:*fgh* ó ABCD:FGH::*abcd*:*fgh*, y si ABCD fuese igual con FGH que forman la primera razon, se tendria que las secciones *abcd*, *fgh* que forman la segunda, serian iguales.

Esc. Se dice de dos pirámides que son semejantes, cuando sus bases son semejantes, y ademas tienen todas las líneas homólogas proporcionales; y como todas las líneas de la pirámide SABCD son proporcionales con las de la S*abcd*, y ademas ABCD es semejante con *abcd*, resulta que la pirámide quitada S*abcd*, que se llama *deficiente*, es semejante con la total SABCD.

586 La parte ABCD*dabc* que queda, se llama *tronco ó trozo de pirámide*, ó *pirámide truncada*; y para hallar su superficie no hay mas

que encontrar primero la de los trapecios laterales Ab, Bc, Cd, &c, y añadiendo á esto la superficie de las dos bases opuestas, se tendrá la del trozo; pero si la pirámide de que resulta el trozo es regular, el trozo tambien lo será, y se puede hallar su superficie lateral como se espresa en el siguiente

Teor. *La superficie lateral de todo trozo de pirámide regular se halla multiplicando la parte de la apotema comprendida entre las dos bases opuestas por la semisuma de los perímetros de las bases paralelas, ó por el perímetro de una seccion hecha á distancias iguales de las bases paralelas.*

Dem. Porque observando que todos los trapecios tendrán una misma altura Kk (fig. 237), será *Superficie lateral de trozo de pirámide regular* $ABCDdacb = Ab + Bc + Cd + Da =$ (§ 516)

$$kK \times \frac{AB+ab}{2} + kK \times \frac{BC+bc}{2} + kK \times \frac{CD+cd}{2} + kK \times \frac{DA+da}{2} =$$

$$kK \times \frac{(AB+ab+BC+bc+CD+cd+DA+da)}{2} =$$

$kK \times \dfrac{\text{perím. } ABCD + \text{perím. } abcd}{2}$; y como en virtud de lo demostrado (516 esc.), se tiene que $\dfrac{AB+ab}{2} = mn$, $\dfrac{BC+bc}{2} = no$, $\dfrac{CD+cd}{2} = op$, y $\dfrac{DA+da}{2} = pm$; resulta tambien que,

Sup. lat. de trozo de pir. reg. $= kK \times mn + kK \times no + kK \times op + kK \times pm = kK \times (mn + no + op + pm) = kK \times$ *perím. de secc. hecha á distancias iguales de las bases paralelas*, que era L. Q. D. D.

587 Teor. *A toda pirámide se le puede inscribir y circunscribir un número de prismas, de manera que la diferencia entre la suma de los circunscritos y la de los inscritos sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.*

Dem. Sea SABC (fig. 239) la pirámide propuesta: si se divide la altura en un número cualquiera de partes iguales, por ejemplo en 4, y por los puntos de division se conciben planos paralelos á su base, tendrémos dividida la pirámide en otra SQRT, y en tantos trozos QRTMNL, LMNHGF, FGHCBA, como partes tenía la altura ménos una. Concibiendo ahora un prisma ZVSTRQ que tenga la misma base y altura que la pirámide, y en cada trozo dos prismas de la misma altura que él, que el uno tenga por base la mayor del trozo y el otro la menor, tendrémos el número de prismas circunscritos ZVSTRQ, OPTNML, IKNHGF, DEHCBA, y el de los inscritos QRTNml, LMNHgf, FGHCba; pero el primer prisma circunscrito ZVSTRQ, es igual con el primer inscrito QRTNml por tener la misma base y altura (581 cor.); el 2.° circunscrito por la misma razon tambien es igual con el 2.° inscrito, y el 3.° con el 3.°; luego la diferencia entre la suma de los circunscritos é inscritos, está representada por el último circunscrito DEHCBA; y si inscribiéramos y circunscribiéramos duplo número de prismas, el último circunscrito que espresaría la diferencia, sería dos veces menor que el DEHCBA, y continuando del mismo modo, como el último prisma vá haciéndose dos veces menor, al cabo de cierto tiempo llegará á ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea, pero este prisma espresa la diferencia entre la suma de los circunscritos y la de los inscritos, luego *á toda pirámide se le puede inscribir y circunscribir &c.*

Cor. De aquí se infiere que siendo el volúmen de la pirámide mayor que la suma de los prismas inscritos, y menor que la de los circunscritos con mas razon se podrá inscribir ó circunscribir nn número de prismas, de modo que la diferencia entre la suma de estos, y el volúmen de la pirámide, sea menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea.

588 Teor. *Dos pirámides de igual base y altura son iguales en volúmen.*

Dem. Sean SABC, S′A′B′C′ (fig. 239) las dos pirámides; si se concibe dividida su altura en un mismo número de partes iguales, y por los puntos de division se hacen pasar planos, las secciones que causen estos planos serán iguales (585 cor.); concibiendo ahora un prisma circunscrito á cada una de las partes en que queda dividida la pirámide, y llamando S la suma de los prismas circunscritos á SABC, y S′ á la de los circunscritos á S′A′B′C′, tendrémos $S = S'$, ó $\dfrac{S}{S'} = 1$; pues cada prisma de la SABC, por tener igual base y altura que el correspondiente en la S′A′B′C′, es igual con él; pero S se puede acercar á la pirámide SABC (cor. antec.) tanto como se quiera, y S′ á S′A′B′C′; luego tenemos aquí dos cantidades variables S, S′, que se pueden acercar tanto como se quiera á dichas dos constantes, y cuya relacion es constante, á saber, la unidad; luego en virtud de lo demostrado (328), inferimos que esta relacion es la de las dos pirámides SABC, S′A′B′C′, y por lo mismo tendrémos

$$\frac{SABC}{S'A'B'C'} = 1, \text{ ó } SABC = S'A'B'C'.$$

589 Teor. *Todo prisma triángular se puede dividir en tres pirámides iguales en volúmen ó equivalentes.*

Dem. Sea ABCFDE (fig. 240) el prisma propuesto: si por las diagonales AD,AF de dos caras contiguas del prisma, concebimos que pase un plano, quedará dividido el prisma en dos pirámides, una triangular ADEF (fig. 241), cuya base DEF y la altura AE, serán las mismas que las del prisma; y la otra cuadrangular (fig. 242), que tendrá por base á la otra cara BCFD, y por altura á la altura del triángulo BAC de la base. Si por las aristas DA,AC de esta, concebimos un plano DAC, su comun seccion con el BCFD, será la diagonal DC, por lo que dicha pirámide quedará dividida en otras dos triángulares ABCD,ACDF, que tendrán bases iguales, porque la diagonal DC divide al paralelogramo DBCF en dos partes iguales, y tambien una misma altura por tener su vértice comun en A; por lo cual estas dos pirámides serán iguales en volúmen. Ahora, la pirámide DBAC se puede considerar tambien que tiene por base al triángulo BAC que es una de las bases del prisma, y por altura la misma que la del prisma; y como las dos bases opuestas de un prisma son iguales, resulta que las dos pirámides DBAC, y ADFE son iguales tambien en volúmen (588); luego las tres pirámides son iguales en volúmen, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° De aquí se deduce que *toda pirámide triangular es el tercio de un prisma triangular de igual base y altura*; porque equivaliendo el prisma BACDEF á tres pirámides iguales con la ADEF, cada una de estas será el tercio del prisma; y como podemos concebir á toda pirámide dividida en tantas pirámides triangulares como lados tiene su base (583 cor.), y cada una será el tercio del prisma de igual base y altura, resulta que en general *toda pirámide, de cualquier clase que sea, es igual á la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

Cor. 2.° De donde se deduce, que siendo el volúmen del prisma igual á la superficie de su base multiplicada por su altura, la de la pirámide que es su tercera parte, *será igual á la superficie de la base multiplicada por el tercio de la altura.*

{Cor. 3.° *Para hallar el volúmen de un trozo de pirámide se halla primero el de la pirámide total, y de él se resta el de la pirámide que falta*; pero como no se conoce ni la pirámide total ni la deficiente, deberémos manifestar como se hallan sus alturas, pues las bases son conocidas por ser las del trozo. Para esto observarémos que dividiendo la proporcion (585 1.ª) AB:*ab*::SE:*se*, se tendrá

$AB - ab : AB :: SE - se : SE = \frac{AB \times Ee}{AB - ab}$, y comparando con el consecuente, será $AB - ab : ab :: SE - Se : Se = \frac{ab \times Ee}{AB - ab}$; y llamando *A* á la altura Ee del trozo, *L* al lado AB de la base mayor, *l* al correspondiente de la base menor, y A', a, á la altura total SE y á la deficiente Se, se tendrá $A' = \frac{L \times A}{L - l}$ y $a = \frac{l \times A}{L - l}$.

{*La pirámide truncada equivale á tres pirámides de igual altura que ella, y que la una tuviese por base la mayor de la truncada, otra la menor, y la otra una superficie que fuese media proporcional geométrica entre la base mayor y la menor*; pero no nos detendrémos en demostrarlo, porque no ocurren casos en que hacer aplicacion de esta proposicion y por otra parte, lo dicho basta para hallar su volúmen cuando sea necesario.}

De los poliedros regulares, ó de los cinco cuerpos que se conocen con el nombre de cuerpos regulares.

590 En general se llaman *poliedros regulares* aquellos, cuyas caras son polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos sólidos son todos iguales entre sí: y vamos á demostrar que solo hay cinco poliedros con estas circunstancias.

En efecto, si las caras son triángulos equiláteros, podrémos formar un cuerpo en que cada ángulo sólido se componga de tres ángulos de triángulo equilátero, pues entre los tres solo valen π ó dos ángulos rectos, el cual se llama *tetraédro*, porque está terminado (fig. 243) por cuatro caras. Cuatro ángulos de triángulo equilátero tambien pueden formar ángulo sólido, porque juntos no valen mas de 240° ó $\frac{4}{3}\pi$, y el cuerpo que resulta se llama *octaédro* porque está terminado (fig. 244) por ocho caras iguales. Cinco ángulos de triángulo equilátero tambien pueden formar ángulo sólido, porque juntos no valen sinó 300° ó $\frac{5}{3}\pi$, y el cuerpo que resulta se llama *icosaédro* porque está terminado (fig. 245) por veinte caras. Con seis ángulos de triángulo equilátero no se puede formar ángulo sólido, porque juntos valen 360° ó 2π, y hemos demostrado (563) que la suma de los ángulos planos que han de formar el ángulo sólido no puede llegar á valer 360° ó 2π. Luego con ángulos de triángulo equilátero no se pueden formar sinó tres cuerpos regulares.

591 Valiendo el ángulo del cuadrado 90° ó $\frac{1}{2}\pi$, resulta que con tres ángulos de cuadrado se podrá formar un ángulo sólido; porque su suma vale solo 270° ó $\frac{3}{2}\pi$; el cuerpo que se forma de este modo se llama *exaédro* ó *cubo*, por constar (fig. 246) de seis cuadrados iguales. Con cuatro ángulos de cuadrado no se puede formar un ángulo sólido, porque valen ya 360° ó 2π.

592 Valiendo el ángulo del pentágono regular 108°, tres ángulos compondrán 324°, y por lo mismo podrán formar ángulo sólido; el

cuerpo que se origina de este modo se llama *dodecaédro* porque está terminado (fig. 247) por doce planos ó caras. Con cuatro ángulos de pentágono no se puede formar ángulo sólido porque equivalen á $432^\circ > 2\pi$.

593 Valiendo el ángulo del exágono 120°, tres ángulos de exágono valen 360°, que como ya llega esta suma á 360° ó 2π, no se puede formar ángulo sólido; y como con ménos razon se podrá formar con tres ángulos de polígono de mas lados, por aumentar el valor de los ángulos cuando aumenta el número de los lados, resulta que no hay sinó los cinco cuerpos regulares que hemos dicho, y que se atribuyen á Platon.

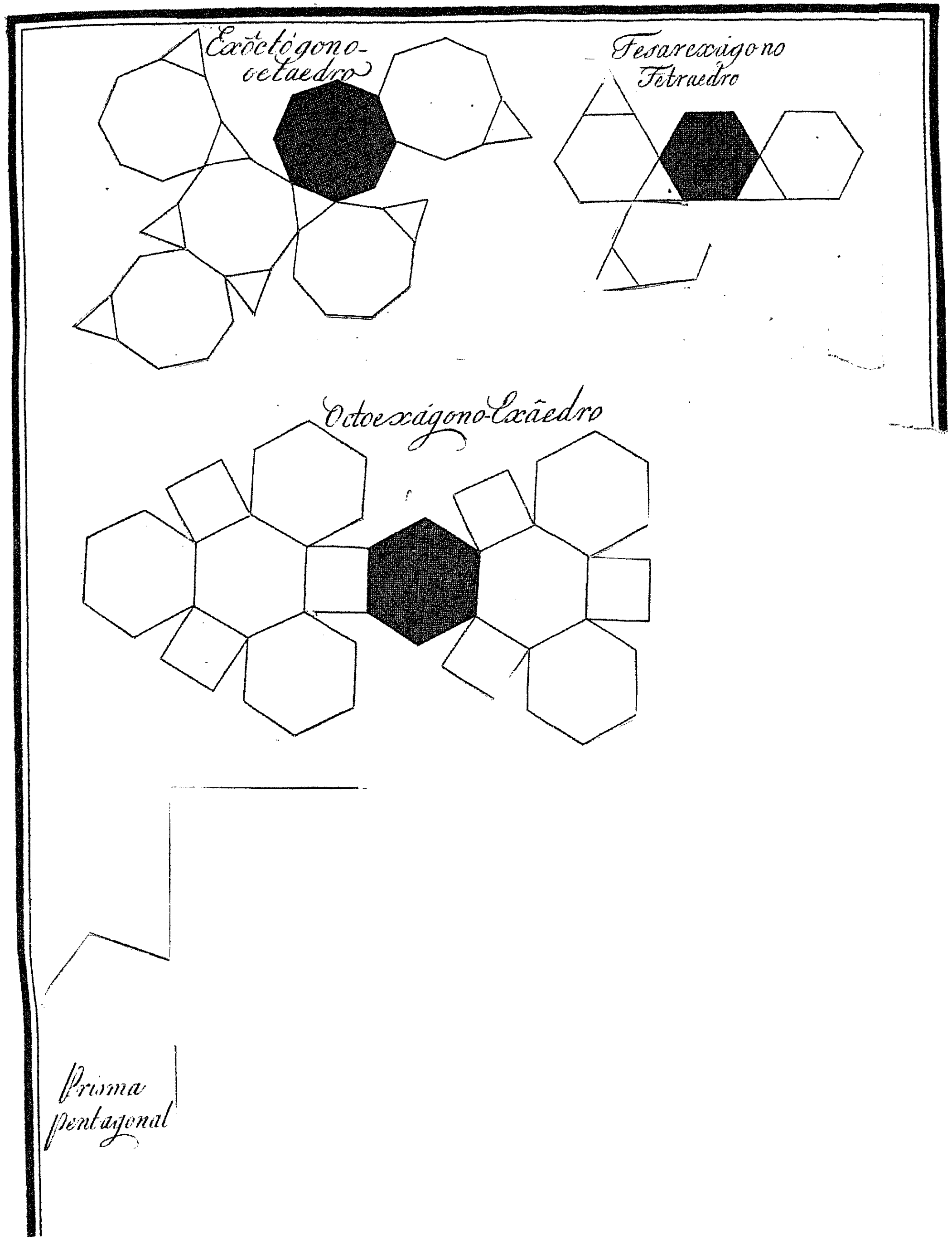
Para hallar su superficie, se determina la de una cara y se multiplica por el número de ellas. Para encontrar su volúmen observarémos que siendo el *tetraédro* una pirámide, lo hallarémos conforme hemos dicho (589 cor. 2.°); el *octaédro* no viene á ser otra cosa que dos pirámides cuadrangulares reunidas por su base, y la regla que acabamos de citar nos dará su volúmen; y siendo el *exaédro* un cubo nos servirá la regla (579 esc.).

Ahora, para hallar el vólumen del *dodecaédro* y del *icosaédro* los considerarémos como compuestos de tantas pirámides como caras tienen; cuya base sea cada cara, y la altura la mitad de la distancia que hay entte dos caras opuestas.

594 *Esc.* Los cuerpos regulares que son en número de cinco, los hemos presentado en perspectiva; pero aquí los vamos á presentar en las dos láminas adjuntas, delineados en un plano y cortados juntamente con algunos otros cuerpos, á fin de que los principiantes se acostumbren á doblarlos de manera que cierren espacio; lo que conseguirán doblando los planos por las comunes intersecciones que se hallen en el parage opuesto á aquel por donde está medio cortado el grueso del carton.

{Si prescindimos de que todos los polígonos sean semejantes, se hallarán otros cuerpos regulares; y hay trece que se atribuyen á Arquimedes; hé aquí como se espresa Pappus en la pág. 129 de sus colecciones matemáticas.

{"Los filósofos aseguran que Dios, el primero y hacedor de todo, dió con razon y justicia al mundo la figura esférica, habiendo elegido la mejor y mas hermosa de todas las que hay en la misma esfera para esplicar los fenómenos naturales; y ademas, añaden que de todas las figuras sólidas de igual superficie, es la mayor la esfera. Y así otras cosas que dicen hay en ella, son á la verdad claras y necesitan de menor prueba; pero que sea mayor que las otras figuras, no lo prueban los mismos filósofos, sino que solamente lo afirman; ni se puede persuadir fácilmente sin grandísima contemplacion. Mas así como en los teoremas antecedentes hemos hallado que el círculo es la



mayor de todas las figuras regulares que tienen igual ámbito que él; del mismo modo procuremos ahora manifestar lo que viene á ser una consecuencia, y es que de todas las figuras regulares y sólidas de igual superficie, la mayor es la esfera. Pero hablemos ántes algo acerca de los mismos sólidos con que se debe comparar la esfera. Se pueden pues comprender muchas figuras sólidas que tengan diversas superficies; pero cualquiera juzgará mas dignas de que se hable de ellas á aquellas que parecen ser regulares, y de estas mucho mas ya á los conos, ya á los cilindros, ya á los que se llaman poliedros. Mas estos son, no solamente las cinco figuras, á saber el tetraédro, exaédro, octaédro, dodecaédro, y el icosaédro que se atribuyen al divinísimo Platon, sinó tambien las trece que inventó Arquimedes (*), terminadas por polígonos, sí equiláteros y equiángulos, pero no semejantes. El 1.° es el octaédro que está terminado por 4 triángulos y otros tantos exágonos. Despues, tres de 14 caras, de los cuales el 1.° está terminado por 8 triángulos y 6 octógonos, el 2.° por 6 cuadrados y 8 exágonos, el 3.° por 8 triángulos y 6 cuadrados. Despues dos de 26 caras, de los cuales el 1.° está terminado por 8 triángulos y 18 cuadrados; el 2.° por 12 cuadrados, 8 exágonos y 6 octógonos; despues tres de 32 caras, de los cuales el 1.° consta de 20 triángulos y 12 decágonos; el 2.° de 12 pentágonos y 20 exágonos; el 3.° de 20 triángulos y 12 cuadrados. Despues de estos hay uno de 38 caras, el cual consta de 32 triángulos y 6 cuadrados; á este siguen dos de 62 caras, de los cuales el 1.° está terminado por 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos; el 2.° por 30 cuadrados, 20 exágonos y 12 decágonos. Finalmente el último es de 92 caras, el cual está terminado por 80 triángulos y 12 decágonos. Mas, cuantos ángulos sólidos y cuantos lados tenga cada una de estas figuras poliedras, lo averiguarémos de este modo. Cuando los ángulos sólidos de las figuras simplemente poliedras constan de 3 ángulos planos, se determinarán los ángulos planos que tienen todas las bases del poliedro, y la 3.ª parte del número hallado será el número de ángulos sólidos; en las figuras poliedras, cuyo ángulo sólido consta de 4 ángulos planos, averiguados todos los ángulos planos que tienen las bases del poliedro, tomando la 4.ª parte de este número, se tendrá el número de ángulos sólidos. Del mismo modo las poliedras cuyo ángulo sólido consta de cinco ángulos planos, la 5.ª parte de la multitud de ángulos planos es el número de la multitud de ángulos sólidos. El número de lados que tiene cada una de las figuras poliedras, lo hallarémos de este modo: averiguados ya todos los lados que tienen las superficies que terminan al poliedro, su número es igual á la mul-

(*) *Develcy llama* poliedros semi-regulares *á los trece que inventó Arquimedes.*

titud de ángulos planos. Pero por cuanto cada lado es comun á dos planos, es claro que la mitad de dicho número es el número de lados del poliedro. Así, como el 1.° de los 13 poliedros desemejantes está terminado por 4 triángulos y otros tantos exágonos, tiene á la verdad 12 ángulos sólidos, pero 18 lados; porque de los 4 triángulos hay 12 ángulos y 12 lados, y de los 4 exágonos 24 ángulos y 24 lados; y siendo su suma 36, es preciso que el número de ángulos sólidos sea la 3.ª parte del número predicho, porque tambien cada uno de los ángulos sólidos del número está formado por 3 ángulos planos. Pero la multitud de lados es la mitad del mismo número, á saber 36, de suerte que los lados son 18. Pero de aquellos que constan de 14 bases, el 1.° está terminado por 8 triángulos y 6 cuadrados, de suerte que tiene 12 ángulos sólidos, pues cada ángulo supuesto está comprendido por 4 ángulos planos, pero lados tiene 24. El 2.° que está terminado por 6 cuadrados y 8 exágonos, tendrá 24 ángulos sólidos; pues cada uno consta de 3 ángulos planos, y lados tendrá 36. De aquellos que tienen 26 caras, el 1.° que está terminado por 8 triángulos y 18 cuadrados, tendrá 24 ángulos sólidos y 48 lados; el 2.° que está terminado por 12 cuadrados, 8 exágonos y 6 octógonos, tendrá 48 ángulos sólidos y 72 lados. De aquellos que constan de 32 caras, el primero que está terminado por 20 triángulos y 12 pentágonos, tendrá 30 ángulos sólidos y 60 lados; el 2.° que está terminado por 12 pentágonos y 20 exágonos tendrá 60 ángulos sólidos y 90 lados; el 3.° que está terminado por 20 triángulos y 12 decágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 90 lados. Pero aquel que consta de 38 caras, por cuanto está terminado por 32 triángulos y 6 cuadrados, tendrá 40 ángulos sólidos y 60 lados. De aquellos que constan de 62 caras, el 1.° que está terminado por 20 triángulos, 30 cuadrados y 12 pentágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 120 lados; el 2.° que está terminado por 30 cuadrados, 20 exágonos y 12 decágonos, tendrá 120 ángulos sólidos y 180 lados. Por último, el que consta de 92 caras por cuanto está terminado por 80 triángulos y 12 pentágonos, tendrá 60 ángulos sólidos y 150 lados. Y así, estas figuras que ó ya tienen ángulos desemejantes, ó ya están terminadas por polígonos desiguales y desemejantes, omitámoslas por la perturbacion y confusion. Pero aquellas que se llaman las cinco figuras, es importante el compararlas con la esfera, pues porque están terminadas por planos iguales y semejantes, ellas solas tienen ángulos sólidos iguales, y por lo mismo son mas regulares que las demas. Mas el que no se pueda hallar mas que estas cinco figuras que estén terminadas por polígonos equiláteros iguales, se ha demostrado ya, tanto por Euclides, como tambien por otros." Así continúa con su objeto, demostrando una multitud de proposiciones interesantes.

{En los cursos que espliqué á mis discípulos en el Real Seminario de Nobles de Madrid, les presenté estos cuerpos delineados en un plano, y cortados como los que se ven en las láminas citadas; y llamó de tal suerte su atencion, que me los pidieron para delinearlos ellos, y algunos se formaron hasta dos juegos completos.}

De los tres cuerpos redondos.

595 En general se llama cuerpo *redondo* aquel que está terminado por una superficie que no presenta esquinas ó ángulos sólidos. La Geometría elemental solo considera tres de estos cuerpos, á los cuales tambien se les da el nombre de *cuerpos de revolucion*, porque se puede considerar que resultan de girar una superficie al rededor de una línea, á la cual se le da el nombre de *eje*.

En general se llama *cilindro* á un cuerpo cuyas dos bases opuestas son dos círculos iguales y paralelos, y cuya superficie lateral es convexa; tal es el EFCD (fig. 248); la línea AB que une los dos centros de las bases se llama su *eje*; cuando el eje es perpendicular á las bases, el cilindro es *recto* y su eje sirve de *altura*; cuando no, *oblicuo* tal como el EFCD (fig. 249); en este caso la altura es la perpendicular DO, tirada desde un punto cualquiera de la base superior á la inferior, ó á su prolongacion.

El cilindro recto se puede concebir originado de la revolucion de un rectángulo ABCD al rededor del lado inmóvil AB; con este movimiento los lados AD, BC permaneciendo siempre perpendiculares á AB describen planos circulares iguales DHP, CGQ que se llaman las *bases del cilindro*; el lado CD describe su *superficie lateral*, que es una superficie convexa, y la línea AB es el *eje* del cilindro.

El cilindro oblicuo no es cuerpo de revolucion; pero se le puede considerar formado del movimiento de un círculo FGCQ (fig. 249), que se mueva paralelamente á sí mismo en la direccion de la línea CD; ó del movimiento de la CD al rededor de la circunferencia FGCQ paralelamente á ella misma.

596. Teor. *Toda seccion hecha en un cilindro paralela á las bases es un círculo.*

Dem. Porque si concebimos un número cualquiera de planos EFCD, HGQP &c (figs. 248 y 249) que pasen por los dos centros, la comun seccion de todos estos planos será el eje AB. Las comunes secciones de estos planos con los de los círculos que le sirven de base serán diámetros, y por consiguiente las PA,HA,DA,FB,GB &c radios; ahora, como la seccion es paralela á las bases, se tendrá MK paralela á FC; y como por otra parte las MF y CK lo son tambien por la generacion del cilindro, las figuras MFBI,LGBI,KCBI &c, serán paralelogramos y darán FB = MI, BG = LI, BC = IK &c, y como FB, BG, BC &c son iguales, tambien lo serán las MI, LI, KI &c; luego distando todos los puntos de la seccion igualmente de I, esta seccion será un círculo. L. Q. D. D.

597 Teor. *Si en el círculo que sirve de base al cilindro, se inscribe y circunscribe un polígono, y se consideran dos prismas que tengan estas bases y la misma altura que el cilindro, el primero se dice que está inscrito en el cilindro, y el segundo que está circunscrito; y voy á demostrar que la superficie del cilindro es mayor que la del prisma inscrito, y menor que la del circunscrito.*

Dem. Porque si llamamos p al perímetro de la base del prisma inscrito de un número de lados espresado por n, é inscribimos otro prisma de duplo número de lados, la superficie de este será mayor que la del anterior; pues siempre será igual al perímetro de su base multiplicado por el lado del cilindro; y como hemos manifestado (459) que de muchas figuras inscritas en una misma curva, cual es aquí la circunferencia del círculo de la base del cilindro, la que tiene mayor número de lados es la que tiene mayor perímetro, no hay duda en que aumentando uno de los factores ha de aumentar el producto, y por lo mismo la superficie de este último prisma será mayor que la del prisma primitivo.

Ademas, como un prisma tiene tantas aristas como lados el polígono de su base, y estas aristas se hallan en la superficie convexa del cilindro, pues tiene sus estremos comunes con dicha superficie, se sigue que por tener el prisma de n lados, n líneas en la superficie del cilindro, y el de duplo número de lados $2n$ líneas en la misma superficie convexa, la superficie lateral del prisma de duplo número de lados se acerca mas á la convexa del cilindro que la del prisma anterior de n lados; y como si volviésemos á inscribir otro prisma de duplo número de lados, demostraríamos del mismo modo que la superficie de este sería mayor que la del anterior, y que se iba aproximando mas á la superficie del cilindro, y así sucesivamente, se sigue que tenemos aquí dos cantidades, una variable que es la superficie del prisma que vamos inscribiendo, y otra constante que es la del cilindro, en que la variable al paso que crece se acerca á la constante; luego en virtud de lo demostrado (323), la constante es mayor que la variable; y como la constante es la superficie convexa del cilindro, y la variable la superficie lateral de cualquier prisma inscrito en él, inferimos que la superficie convexa del cilindro es mayor que la lateral del prisma inscrito. L. 1.° Q. D. D.

La superficie convexa del cilindro es menor que la lateral del prisma circunscrito; en efecto, llamando P al perímetro de la base del prisma circunscrito, y L al lado del cilindro á que lo está, la superficie lateral de dicho prisma será $P\times L$; si circunscribimos á la base del cilindro un polígono de duplo número de lados, el perímetro de este (459) es menor que el del anterior, y por consiguiente la superficie del prisma circunscrito que tenga esta base, tambien será menor que la del prisma anterior; y por tener duplo número de líneas en la superficie convexa del cilindro, y hallarse entre esta superficie y la del prisma anterior, se aproximará mas á ella que la superficie del espresado prisma anterior: y circunscribiendo así otros prismas de duplo número de lados, manifestaríamos del mismo modo que la superficie lateral iba disminuyendo al mismo tiempo que se aproximaba á la superficie convexa del cilindro; de donde se sigue que tenemos aquí dos cantidades, una variable que es la superficie del prisma que se circunscribe, y otra constante que es la superficie convexa del cilindro, en que la variable, al paso que mengua, se acerca á la constante, por lo que la constante será menor (324) que cualquier valor de la variable; luego la superficie convexa del cilindro es menor que la lateral de cualquier prisma circunscrito á él, que era L. 2.° Q. D. D.

597*a* Teor. *La superficie convexa del cilindro recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su lado, y el volúmen á la superficie de la base por su lado ó altura.*

Dem. 1.° Si concebimos circunscrito un prisma al cilindro, llamando P al perímetro de su base y L al lado del cilindro, será *Sup. de prisma circunscrito* $= P\times L$; y llamando X á lo que P lleva á la circunferencia de la base que llamarémos C, será $P = C + X$, y llamando Z al esceso que lleva la superficie del prisma circunscrito á la del cilindro, será *Sup. de cil.* $+ Z = P\times L = (C + X)L$.

En esta ecuacion las cantidades Z y X son variables, pues dependen del número de lados del prisma circunscrito; y como la superficie del cilindro es una cantidad constante, el valor que resulte para ella por esta ecuacion en un valor particular de X y de Z, ese mismo tendrá en todos; pero cuando $X = 0$, es tambien $Z = 0$, y como en este caso la ecuacion anterior se convierte en *Sup. del cil.* $= C\times L$, resulta L. 1.° Q. D. D.

2.° El volúmen del mismo prisma circunscrito, llamando P′ á la superficie de su base, será (581) $P'\times A$; y llamando X′ al esceso que lleva P′ á la superficie del círculo de la base que espresarémos con C′, y Z′ al esceso del volúmen del prisma sobre el del cilindro, tendrémos *vol. de cil.* $+ Z' = (C' + X')A$; de donde inferirémos por la misma razon que ántes, que *vol. de cil.* $= C'\times A$, que era L. 2.° Q. D. D.

{*Esc.* 1.° Si el cilindro fuese oblicuo, se debería multiplicar el lado por el perímetro de una seccion perpendicular á dicho lado; y como esta seccion sería una elipse que aun no hemos manifestado como se rectifica, se arrollará un hilo al cilindro perpendicularmente al lado, y su longitud se multiplicará por dicho lado.

{*Esc.* 2.° A pesar de la sencillez y exactitud de la demostracion que acabamos de dar, juzgamos mas á propósito el método que sigue por las razones espuestas al fin del (§ 518*a*).

{598 Teor. *La superficie lateral S de todo cilindro recto, es igual á la de un círculo, cuyo radio es medio proporcional entre el lado del cilindro y el diámetro de la base; es decir, que si llamamos S á dicha superficie, L al lado y D al diámetro, será* S = círc. *cuyo radio* ($A = \sqrt{L \times D}$).

{*Dem.* Porque si esto no se verifica, dicha superficie será mayor ó menor: supongamos primero que S > círc. A, y circunscríbase al círculo A un polígono regular P, inscríbasele otro p, tales (519) que $P:p <$ S: círc. A.

{Ahora, concíbase circunscrita á la base del cilindro una figura P′ semejante á P, cuyo perímetro lo señalarémos con ϖ; y por cuanto por el supuesto $D = 2R{:}A{::}A{:}L{::}2A{:}2L$, tendrémos, dividiendo por 2 los antecedentes de la primera y última razon, $R{:}A{::}A{:}2L$, de donde

(289) $R^2{:}A^2{::}R{:}2L{::}\frac{R}{2}{:}L{::}\frac{R\varpi}{2}{:}L\varpi$, y como (518 cor.) $P'{:}P{::}R^2{:}A^2$.

se tendrá $P'{:}P{::}\frac{R\varpi}{2}{:}L\varpi$, luego siendo (518) $P' = \frac{R\varpi}{2}$, tendrémos $P = L\varpi$; y por lo mismo, sustituyendo este valor de P en la desproporcion de arriba, será $L\varpi : p < S :$ círc. A; pero $L\varpi$: círc. $A < L\varpi{:}p$ por ser $p <$ cír. A; luego con mayor razon se tendrá $L\varpi$: círc. $A < S$: círc. A; de donde resulta que $L\varpi < S$, esto es, que la superficie lateral del prisma circunscrito es menor que la del cilindro; pero esto es un absurdo (597); luego tambien será absurdo el supuesto que á él nos ha conducido; este era que la superficie lateral del cilindro era mayor que círc. A, luego no se puede hacer este supuesto.

{Tampoco puede ser $S <$ círc. A, porque en este caso haciendo $P : p <$ círc. $A : S$, y concibiendo inscrita en la base del cilindro una figura p', semejante á p, á cuyo perímetro llamarémos ϖ', tendrémos análogamente á lo espuesto en el caso anterior $p'{:}p{::}R^2{:}A^2{::}\frac{R\varpi'}{2}{:}L\varpi'$ y siendo $p' < \frac{R\varpi'}{2}$, porque el radio R del círculo es mayor que el recto del polígono p' inscrito, tendrémos $p < L\varpi'$.
Pero $P{:}p <$ círc. $A{:}S < P{:}S$, y por tanto $S < p$; luego con mayor razon será $S < L\varpi'$, esto es, la superficie del cilindro menor que la del prisma inscrito, contra lo demostrado (597); luego si S no puede ser mayor ni menor que el círculo A, tendrémos $S =$ círc. A.

{*Cor.* 1.° De aquí se deduce que como la superficie del círculo trazado con el radio A es igual á 3,14159 &c A^2, y $A^2 = D \times L$, será *superf. de cilindro* = 3,14159 &c $\times D \times L$; pero 3,14 &c $\times D$ es igual con la circunferencia de la base; luego si la llamamos C, será *superf. de cilind. rec.* = C$\times L$, que quiere decir que *la superficie lateral del cilindro recto es igual con la circunferencia de su base multiplicada por el lado.*

{Si en vez de D substituyéramos su valor $2R$, sacaríamos *superf. de cilind. rect.* = 6,28318 &c $\times R \times L$.

{*Cor.* 2.° Partiendo por 2, por 4, y en general por n, los dos miembros de la ecuacion sup. de cil. rec. = C$\times L$, demostraríamos que *para hallar la superficie del semicilindro, se habia de multiplicar la semicircunferencia por el lado; para hallar la del cuadrante de cilindro, multiplicar el cuadrante de circunferencia por el lado*, y en general *para hallar la superficie de un sector cilíndrico, multiplicar el arco por el lado*; de manera que si en vez del arco ponemos sus valores (506), tendrémos con relacion al diámetro:
Superficie del sector cilíndrico = arco × lado = 0,0087266463$\times D \times G \times L$.
Con relacion al radio
Sup. de sect. cilíndr. = arco × lado = 0,0174532925$\times R \times G \times L$,
y con relacion á la circunferencia
Sup. de sect. cilíndr. = arco × lado = 0,0027777778$\times G \times C \times L$.

{599 Teor. *Dado un cilindro y dos magnitudes desiguales A, B, se puede inscribir y circunscribir á dicho cilindro un prisma, tal que el volúmen del circunscrito tenga con el del inscrito una razon menor que la de la mayor magnitud A á la menor B.*

{*Dem.* Porque si en el círculo que sirve de base al cilindro se inscribe y circunscribe (519) un polígono con esta circunstancia, como los prismas que tengan estas bases y una misma altura, tal como la del cilindro, guardarán la misma razon que las bases, tendrían una razon menor que la de A:B, que era L. Q. D. D.

{600 Teor. *Dado un cilindro y una magnitud cualquiera E, se puede inscribir en él cilindro un prisma tal que la diferencia entre el volúmen de dicho prisma y el del cilindro, sea menor que el volúmen dado E.*

{*Dem.* Porque si en el círculo (fig. 250) que sirve de base al cilindro, inscribimos y circunscribimos un cuadrado, y consideramos un prisma inscrito y otro circunscrito que tengan estas bases, resultará que el prisma inscrito será la mitad del prisma circunscrito, pues la base es la mitad de la de este (520); y como el cilindro es menor que el prisma circunscrito, resulta que el prisma inscrito será mayor que la mitad del cilindro; si ahora en los segmentos BKA, AND &c tiramos líneas BK, KA, AN, ND &c á los puntos medios de los arcos, tendrémos que concibiendo prismas que tengan por bases estos triángulos BKA, AND &c, la suma de estos prismas será mayor que la mitad de la suma de los segmentos cilíndricos; porque cada prisma elevado sobre BKA será la mitad del elevado sobre la base BAPQ, y por consiguiente siendo este prisma mayor que el segmento cilíndrico que tiene por base al segmento BKA, resulta que será menor que dicho segmento; y como continuando del mismo modo iríamos á cada paso quitando mas de la mitad de lo que quedaba, resulta que al cabo de cierto tiempo llegará á ser (325) la suma de los segmentos cilíndricos menor que el volúmen dado E.

{601 Teor. *A todo cilindro G se le puede circunscribir un prisma tal que la diferencia entre el volúmen del prisma circunscrito y el del cilindro, sea menor que un volúmen cualquiera dado E.*

{*Dem.* Para probarlo, supongamos circunscrito al cilindro un prisma P é inscrito otro p, tal que (599) $P:p < G+E:G$, y tendrémos que como $G > p$, será $P:G < P:p$, y con mayor razon $P:G < G+E:G$, de donde resulta, dividiendo esta desproporcion, $P-G:G < E:G$, y por tanto $P-G < E$, que era L. Q. D. D.

{602 Teor. *El volúmen de todo cilindro G es igual al de un paralelepípedo K que tenga por base un cuadrado, cuyo lado X sea medio proporcional entre la circunferencia C de la base y la mitad del radio R, y la altura A sea la del cilindro.*

{*Dem.* Porque si esto no se verifica, el volúmen del cilindro será mayor ó menor que el de dicho paralelepípedo. Supongamos primero que sea mayor, esto es, que $G > K$, y siendo X el lado de la base de este paralelepípedo, será $X = \sqrt{\frac{C \times R}{2}}$, y su volúmen que está expresado por $X^2 \times A$, será $= \frac{C \times R}{2} \times A$; luego se tendrá $G > \frac{C \times R}{2} \times A$; en cuyo caso, inscribiendo al cilindro un prisma p tal (600) que $G-p < G-K$, tendrémos $p > K$; y como tanto el prisma p como el paralelepípedo tienen una misma altura, á saber la del cilindro, resultará llamando p' á la superficie de la base del inscrito que $p' \times A > \frac{C \times R}{2} \times A$ ó $p' > \frac{C \times R}{2}$, lo que es absurdo; pues tenemos demostrado que la superficie de todo polígono inscrito es menor que la del circulo circunscrito, que está representada por $\frac{C \times R}{2}$; luego no se puede suponer que el cilindro sea mayor que el tal paralelepípedo.

{Tampoco se puede suponer que sea menor; porque si suponemos que $G < K$, circunscribiendo al cilindro (601) un prisma P tal que $P-G < K-G$, tendrémos $P < K$, ó llamando P' á la superficie de la

base de P, será $P' \times A < \frac{C \times R}{2} \times A$, lo que dá $P' < \frac{C \times R}{2}$, lo que tambien es un absurdo; luego si no se puede suponer que el volúmen del cilindro sea mayor ni menor que el espresado paralelepípedo, será igual. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se deduce que como el volúmen de un paralelepípedo se halla multiplicando la superficie de la base por su altura, el volúmen del cilindro será igual á la superficie de este cuadrado multiplicado por su altura, y como el cuadrado es igual á la superficie del círculo de la base del cilindro, tenemos que *el volúmen del cilindro es igual á la superficie de su base multiplicada por su altura*; luego sustituyendo los valores de dicha superficie (522 cor. 1.°), tendrémos con relacion al radio *vol. de cilind.* $= 3{,}1415926536 \times R^2 \times A$, con relacion al diámetro *vol. de cilind.* $= 0{,}7853981634 \times D^2 \times A$, y con relacion á la circunferencia *vol de cilind.* $= 0{,}0795774715 \times C^2 \times A$.

{*Esc.* 1.° Como las mismas proposiciones que acabamos de demostrar respecto del cilindro, hubiéramos demostrado respecto de un sector ó segmento cilíndrico, resulta que *el volúmen de estos dos cuerpos estará representado por la superficie de la base multiplicada por la altura del cilindro.*

{*Esc.* 2.° Lo que acabamos de demostrar conviene tanto al cilindro recto como al oblicuo; porque todo está fundado en la regla que hay para hallar el volúmen de un prisma, la cual es la misma para el prisma recto que para el oblicuo.}

603 Se da el nombre de *cono* á un cuerpo que tiene por base un círculo, y está terminádo por una superficie curva que termina en un punto S llamado *cúspide* ó *vértice* del cono; tal es SCDBE (fig. 251), la línea que desde el cúspide va á parar al centro del círculo de la base, se llama el *eje* del cono; cuando esta línea es perpendicular á la base, el cono es *recto*, tal como el (fig. 251); y cuando no, *oblicuo* como el representado por la (fig. 252); en el cono oblicuo se llama altura á la perpendicular bajada desde el cúspide á la base ó á su prolongacion, en el recto la altura está representada por el eje.

El cono recto es tambien cuerpo de revolucion, y se origina de un triángulo rectángulo tal como el SAB, que gira al rededor de un cateto SA que permanece inmóvil, pues en este movimiento el cateto AB describe un plano circular BDCE que es la *base*, y la hipotenusa SB que recibe el nombre de *lado del cono* ó *apotema*, traza la superficie convexa del cono.

{El cono tambien se puede concebir originado por el movimiento de una recta SCM al rededor del punto S, pero sujeta á pasar por todos los puntos de la circunferencia CDBE. Si suponemos la SCM indefinidamente prolongada por arriba y por abajo, trazará por este movimiento una superficie cónica, que no tendrá límites ni por la parte superior ni por la inferior.

604 Teor. *Toda seccion FKHI hecha en un cono, paralela á su base, es un círculo.*

Dem. Esta proposicion quedará probada, si demostramos que todas las líneas GF, GK, GH &c (fig. 251, 252) que desde G van á parar á la superficie convexa, son iguales entre sí. Para probarlo, supongamos que por el eje SA pasen todos los planos SAC, SAD &c que se quieran; y tendrémos que las comunes secciones con la base y con la seccion, serán líneas paralelas; luego resultará en el triángulo SCA (§ 476) SA: SG::CA:GF, en el SAD será SA:SG::AD:GK, en el SBA será SA:SG::BA:HG y como todas estas proporciones tienen comun la razon SA:SG, será CA:GF::AD:GK::BA:HG:: &c, pero los antecedéntes de todas estas razones son iguales, luego los consecuentes tambien lo serán y tendrémos GF=GK=GH=&c, luego la seccion será un círculo.}

Esc. La parte FCDBH que queda comprendida entre la base y la seccion, se llama *tronco ó trozo de cono, ó cono truncado*; y el trozo del cono recto se puede considerar originado de la revolucion del trapecio FCAG al rededor del lado GA.

605 Teor. *Si en el círculo que sirve de base al cono se inscribe un polígono, y se cricunscribe otro, y se consideran dos pirámides que tengan por bases estos polígonos y el vértice en el del cono, la primera se dice que está* inscrita *en el cono, y la segunda* circunscrita; *y vamos á probar que la superficie lateral del cono es mayor que la de la pirámide inscritas y menor que la de la circunscrita.*

Dem. Porque si llamamos p al perimetro de la inscrita y *ap.* á su apotema, se tendrá que la superficie de la pirámide inscrita estará representada (584) por $\frac{P\times ap.}{2}$; ahora, si inscribimos otra pirámide de duplo número de lados, el perímetro de su base (459) será mayor que el de la base de la anterior y su apotema tambien será mayor; por lo que su superficie lateral será mayor que la de la pirámide anterior. Y como esta de duplo número de lados tendrá un duplo número de aristas en la superficie convexa del cono, se acerca su superficie mas á la del cono que la de la pirámide primitiva. Siguiendo inscribiendo pirámides de duplo número de lados, manifestaríamos del mismo modo que la superficie iba aumentando al mismo tiempo que se aproximaba á la superficie convexa del cono; luego tenemos aquí dos cantidades, una variable que es la superficie lateral de la pirámide inscrita, que al paso que va creciendo se aproxima á la constante que es la superficie convexa del cono; luego la superficie convexa del cono es mayor que la lateral de cualquier pirámide inscrita en él.

Si llamamos P al perímetro de la base de la pirámide circunscrita y *Ap.* á su apotema, se tendrá que $\frac{P\times Ap.}{2}$ representará su superficie; y si circunscribimos otra pirámide de duplo número de lados del de esta última, el perímetro de su base (459) será menor que el de la base de la pirámide primitiva y su apotema será la misma por ser el lado del mismo cono; luego la superficie lateral de la de duplo número de lados es menor que la de la primitiva. Y como en la de duplo número de lados hay duplo número de caras, y cada cara es tangente á la superficie convexa del cono y tiene por lo mismo una línea en dicha superficie, se sigue que la superficie de la de duplo número de lados se aproxima mas á la del cono. Circunscribiendo pirámides de duplo número de lados, manifestaríamos del mismo modo que la superficie lateral iba disminuyendo al paso que se aumentaban los lados, y que al mismo tiempo se iba aproximando su superficie á confundirse con la del cono: luego nos encontramos aquí con dos cantidades, una variable que es la superficie de la pirámide circunscrita, que al paso que mengua se aproxima á la constante que es la superficie convexa de cono; luego la superficie convexa del cono es menor que la lateral de cualquier pirámide circunscrita á él, que era todo L. Q. D. D.

605*a* Teor. *La superficie convexa de un cono recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por la mitad de su apotema, y el volúmen igual á la superficie de la base por el tercio de su altura.*

Dem. 1.° Si concebimos una pirámide regular circunscrita al cono, tendrémos que espresando con P su perímetro, y con L su apotema, que es el lado del cono inscrito, será (584) *Sup. lat. de pirám. circunscrita* $=\frac{P\times L}{2}$; llamando X al esceso de P sobre C circunferencia de la base, y Z al esceso de la superficie de la pirámide sobre la del cono, tendrémos *Sup. lat. de cono recto*$+Z=(C+X)\times\frac{L}{2}$; y como la superficie del cono no depende de X ni de Z que varían con el número de lados de la pirámide circunscrita resulta que, el valor que tenga en un caso particular de las variables X y Z, lo tendrá en todos; y como cuando X=o, es tambien Z=o, se tendrá *Sup. lat. de cono recto* $=\frac{C\times L}{2}$, que espresa L. 1.° Q. D. D.

2.° El volúmen de la misma pirámide circunscrita, llamando P′ á la superficie de su base y A á su altura que es la misma del cono, será (589 cor. 2.°) *Volúmen de Pirám. circunscrita* $=P'\times\frac{A}{3}$, y llamando X′ al esceso de P′ sobre la superficie del círculo que señalarémos con C′, Y′ al esceso del volúmen de la pirámide sobre el del cono, tendrémos, *Vol. de Cono* $+Z'=(C'+X')\times\frac{A}{3}$, y por las mismas consideraciones de ántes deduciremos que *Vol. de Cono* $=C'\times\frac{A}{3}$, que era L. 2.° Q. D. D.

{*Esc.* Por la misma razon que espusimos al fin del (§ 518*a*), juzgo mas á propósito para llegar á esta conclusion, lo que sigue:

{606 Teor. *La superficie lateral* S (fig. 253) *de todo cono recto es igual á la de un círculo cuyo radio* A *es medio proporcional entre el lado* L *del cono y el radio* R *del círculo de su base.*

{*Dem.* Porque si esto no se verifica, será mayor ó menor: supongamos 1.° que S $>$ círc. A, y circunscríbase al círculo *A* una figura *P* é inscríbase otra *p*, de manera que $P:p<S:$ círc. A; circunscríbase tambien á la base del cono una figura P' semejante á P, á cuyo perímetro le llamarémos ϖ, y por cuanto $R:A::A:L$ por el supuesto, será (§ 289) $R:L::R^2:A^2::$ (§ 518 cor.) $P':P$, ó multiplicando por $\frac{\varpi}{2}$ los dos términos de la primera razon, será $\frac{R\varpi}{2}:\frac{L\varpi}{2}::P':P$; y como $P'=\frac{R\varpi}{2}$, se tendrá tambien $P=\frac{L\varpi}{2}$; por lo que sustituyendo este valor en la desproporcion de arriba, será $\frac{L\varpi}{2}:p<S:$ círc. A; pero $\frac{L\varpi}{2}:$ círc. $A<\frac{L\varpi}{2}:p$ porque círc. $A>p$; luego con mas razon se tendrá $\frac{L\varpi}{2}:$círc. $A<S:$ círc. A, de donde $\frac{L\varpi}{2}<S$; pero $\frac{L\varpi}{2}$ espresa (605) la superficie de la pirámide circunscrita al cono, luego esta desigualdad nos dice que la superficie de la pirámide circunscrita es menor que la del cono, contra lo acabado de demostrar; luego no se puede verificar que $S>$ círc. A.

{2.° Si suponemos que $S<$ cír. A, harémos $P:p<$círc. $A:S$, é inscribiendo en la base del cono una figura p' semejante á p, se tendrá $p':p::R^2:A^2:R::L$.

{Si espresamos por ϖ' el perímetro del polígono p' inscrito en la

base del cono, y cuyo lado supondrémos que sea el *ab* (fig. 253), tendrémos para la superficie de dicho polígono $p'=\frac{\varpi'}{2}.Og$; y la superficie de la pirámide inscrita que tenga por base al espresado polígono, será *superficie de pir. insc.*$=\frac{\varpi'}{2}.Cg$; comparando se tendrá p': *Sup. de pir. inscr.* $::\frac{\varpi'}{2}.Og:\frac{\varpi'}{2}.Cg::Og:Cg$.

{Pero concibiendo por g la gt paralela á la CG, será $Og:gt::OG:GC$, esto es, :: $R:L$.

{Y como el ángulo gtC es mayor (368) que el tOg, que es recto, será obtuso, y por consiguiente su lado opuesto Cg en el triángulo gtC será el mayor de todos y se tendrá $gC>gt$; por consiguiente $Og:gC<Og:gt$; luego $Og:gC<R:L$.

{Por lo que p': *sup. de pir. inscr.* $<R:L$; y pues que $p':p::R:L$, será tambien p': *sup. de pir. insc.* $<p':p$; luego (106) *sup. de pir. inscr.* $>p$; pero como ántes teníamos $P:p<$ círc. $A:S$, se verificará con mas razon P: *sup. de pir. inscr.* $<$ círc. $A:S$; y como P $>$ círc. A, con mas razon será círc. A: *sup. de pir. inscr.* $<$ círc. $A:S$, lo que dá (106) $S<$ *sup. de pir. inscr*; esto es, la superficie del cono menor que la de la pirámide inscrita en él, contra lo demostrado anteriormente; luego si no se puede suponer que la superficie del cono sea mayor ni menor que la del círculo A será igual, y se tendrá $S=$círc. A: que era L. Q. D. D.

{*Cor.* Como de la proporcion R:A::A:L se saca $A^2=R\times L$, y superficie de círculo cuyo radio es $A=3,14\&c\times A^2$, tendrémos que *Sup. lat. de con. rect.*$=3,14\&\times R\times L$; pero $3,14\&\times R=\frac{3,14\&c\times D}{2}=\frac{C}{2}$ luego podrémos decir que *la superficie lateral del cono es igual á la semicircunferencia de la base multiplicada por su lado, ó á la circunferencia multiplicada por la mitad del lado.*

Luego sup. lat. de cono rect.$=\frac{C}{2}\times L=\frac{C\times L}{2}=C\times\frac{L}{2}$ y con relacion al diámetro se tendrá *sup. lat. de con. rec.*$=1,570963268\times D\times L$.

{*Esc.* Si por el punto D medio del lado AB (fig. 254), suponemos tirada la DE paralela á BC, tendrémos que como se verificará AB:AD::BF:DG, será DG la mitad de BF, y por lo mismo la circunferencia trazada con el radio DG será la mitad de la circunferencia de la base; luego tambien podemos decir que la *superficie lateral del cono recto es igual á la circunferencia de un círculo que pase por el medio del lado multiplicada por dicho lado.*}

607 Teor. *Si un cono recto ABC (fig. 254), se corta con un plano DQE paralelo á la base BPC, la superficie del trozo de cono DBCE es igual á un círculo, cuyo radio Z es medio proporcional entre la apotema DB, y la suma FB + GD de los radios de los círculos de los planos paralelos BPC, DQE.*

Dem. Por ser DB:Z::Z:BF+DG, será $Z^2 = DB \times (BF + DG) = (AB - AD) \times (BF + DG) = AB \times BF + AB \times DG - AD \times BF - AD \times DG = AB \times BF - AD \times DG$ (pues siendo AB:AD::BF:DG, será $AB \times DG = AD \times BF$); luego (529 cor.) círculo cuyo radio es Z = círculo cuyo radio es $\sqrt{AB \times BF}$ — círc. cuyo radio es $\sqrt{AD \times DG}$; pero círculo cuyo radio es $\sqrt{AB \times BF}$ = superf. ABC, círculo cuyo radio es $\sqrt{AD \times DG}$ = sup. ADE; luego círculo cuyo radio es Z = sup. ABC — sup. ADE = á la superficie DBCE, que era L. Q. D. D.

Esc. Pero la superficie del círculo cuyo radio es Z es igual con $3{,}14\&c \times Z^2 = 3{,}14\&c \times DB \times BF + DG)$; y concibiendo una línea MN por medio de BD paralela á BF, se tendrá que será igual con $\frac{BF+DG}{2}$ y su duplo $2MN = BF + DG$; luego si sustituimos este valor en la espresion de arriba, se tendrá

Sup. de cír. $Z = 3{,}14\&c \times DB \times 2MN = 3{,}14\&c \times DB \times MNO$; y como $3{,}14\&c. \times MNO$ es igual con la circunferencia del círculo cuyo diámetro es MNO, y dicho círculo Z es igual á la superficie del trozo de cono, resulta que la superficie *del trozo de cono es igual á su lado multiplicado por la circunferencia de un círculo que pase á distancias iguales de las dos bases paralelas.*

{608 Teor. *Todo cono es la tercera parte de un cilindro de igual base y altura que él.*

{*Espl.* Supongamos que haya un cono y un cilindro que tengan por base el círculo ABCD (fig. 250), y una misma altura de cualquier magnitud que sea: vamos á probar que el cono es la tercera parte del cilindro.

{*Dem.* Si el cono no es la tercera parte del cilindro, ó lo que es lo mismo, si el cilindro no es triplo del cono, resultará que el cilindro será mayor ó menor que el triplo de dicho cono. Supongamos primero que sea mayor, y que el esceso sea el volúmen E, y tendrémos *cilindro* = 3*cono*+E.

{Esto supuesto, concibamos inscrito en el cilindro un prisma *p*, tal que la diferencia entre el volúmen del cilindro y el del prisma sea menor (600) que E; y si suponemos que la base de este prisma sea el polígono AKBLCMDN, y la altura la misma pue el cono y cilindro,

tendrémos *cilindro*—p<E ó *cilindro*<p+E; y como suponíamos *cilindro*=3*cono*+E, será 3*cono*+E<p+E, lo que dá 3*cono*<p, por lo que dividiendo por 3 será *cono*<$\frac{p}{3}$; pero la tercera parte del prisma está representada por una pirámide de la misma base y altura, luego tendrémos que *cono<pirámide*, cuya base sea AKBLCMDN, y cuya altura sea la misma que la del prisma, á saber la del cilindro y cono; y como la base de esta pirámide está inscrita en el círculo que sirve de base al cono, la pirámide estará inscrita en el cono y será parte suya; luego la desigualdad anterior nos dice que el todo es menor que su parte, lo que es absurdo; luego tambien será absurdo el suponer que el cilindro es mayor que el triplo del cono.

{Tampoco se puede suponer que sea menor, porque si llamamos E á la diferencia, será *cilindro* + E = 3*cono*: esto supuesto, circunscribamos al cilindro un prisma P, tal (601) que P—*cilindro* < E, lo que dará P < *cilindro*+E, por lo cual será P < 3*cono* y $\frac{P}{3}$ < *cono*; pero $\frac{P}{3}$, esto es, la tercera parte del prisma P es igual á una pirámide de la misma base y altura; y como la base del prisma P está circunscrita á la del cono, y ademas tienen una misma altura, resulta que la pirámide que es la tercera parte del prisma circunscrito ó $\frac{P}{3}$, es una pirámide circunscrita al cono; luego la desigualdad anterior nos dice que la *pirámide circunscrita al cono* < *cono*; pero el cono es parte respecto de la pirámide circunscrita que es todo; luego esta desigualdad nos dice que el todo es menor que su parte, lo cual, siendo absurdo, manifiesta que el cilindro no puede ser menor que el triplo del cono; y como tampoco podia ser mayor, resulta que será igual; luego *cilindro* = 3 *cono* y *cono* = $\frac{cilindro}{3}$, que era L. Q. D. D.

{*Cor.* De aqui se deduce que como para hallar el volúmen del cilindro se ha de multiplicar la superficie de la base (602 cor.) por la altura, para hallar el del *cono* tendrémos que *multiplicar la superficie de la base por el tercio de la altura del cono*; luego será con relacion al radio *vol. de cono* = superf. de base$\times\frac{A}{3} = 1{,}047197551 2 \times R^2 \times A$ con relacion al diámetro *vol. de cono* $= 0{,}2617993878 \times D^2 \times A$ y con relacion á la circunferencia *vol. de cono* $= 0{,}0265258238 \times C^2 \times A$.

{*Esc.* 1.° Aquí tambien se verificará que lo que acabamos de demostrar conviene tanto al cono recto como al oblicuo.}

Esc. 2.° Para hallar el volúmen del trozo de cono....CDBEIHKF (fig. 251), *se hallará el del cono total* SCDBE *y el del deficiente* SFKHI, *y se restará este de aquel.* Pero como en el trozo no se conoce ni la altura total del cono ni la del deficiente, las determinarémos por este procedimiento. Sea A la altura del trozo, á la del deficiente, R el radio de la base inferior, r el de la superior, y los triángulos semejantes SAC, SGF darán $AC=R:FG=r::SA=A+a:SG=a$; que, dividiendo, será $R-r:r::A+a-a:a$; que da $a=\frac{Ar}{R-r}$, y $SA=A+a=A+\frac{Ar}{R-r}$ $=\frac{AR-Ar+Ar}{R-r}=\frac{AR}{R-r}$.

Luego tendrémos vol. de trozo CDBEIHKF=conoSCDBE—cono SFKHI$=3{,}14\&c\times R^2\times\frac{1}{3}\frac{AR}{R-r}-3{,}14\&c\times r^2\times\frac{1}{3}\frac{Ar}{R-r}=3{,}14\&c.\times\frac{A}{3}\times$ $(\frac{R^3-r^3}{R-r})=3{,}14\&c\times\frac{A}{3}(R^2+Rr+r^2)=3{,}14\&c.\times\frac{A}{3}\times R^2+3{,}14\&c\times\frac{A}{3}\times$ $Rr+3{,}14\&c\times\frac{A}{3}\times r^2$; y llamando X á una media proporcional geométrica entre R y r, lo que dará $X^2=Rr$, se tendrá vol de trozo $=3{,}14\&c.\,.\,R^2.\frac{1}{3}A+3{,}14\&c.X^2.\frac{1}{3}A+3.14\&c.\,r^2.\frac{1}{3}A$, que nos dice que *el volúmen de un trozo de cono equivale al de tres conos de igual altura que él, y cuyas bases, sean la del uno la base inferior A la del otro la superior, y la del otro una base media praporcional geométrica entre las dos de dicho trozo.*

609 Teor. *Si un polígono regular de un número par de lados se hace girar al rededor de la línea respecto de la cual es simétrico, voy á demostrar que trazará un cuerpo cuya superficie será igual á la de un cilindro, cuya base tenga por radio el radio recto del polígono, y el lado ó altura sea igual á la línea al rededor de que gira.*

Espl. Sea el polígono ABCDEFGHI &c. (fig. 255): voy á demostrar que si gira al rededor de la línea AH, trazará un cuerpo, cuya superficie será igual á la de un cilindro recto, en que el radio de la base sea Op, y la altura ó lado la AH.

Dem. Para probarlo, concibamos que se tiren desde los estremos de cada lado y desde el medio, perpendiculares á la AH, y los radios rectos Op, Oq, Or &c. Ahora, el lado BA trazará un cono, cuya superficie tendrá por espresion (606 esc.) circunf. pp'.AB; pero los triángulos ABb, pOA son rectángulos el primero en b, y el segundo en p, y tienen comun el ángulo en A, luego los ángulos pOA, ABb son iguales, y por lo mismo los triángulos rectángulos ABb, pOp' serán semejantes (485 cor. 2.°) y darán AB:Ab::Op:pp':: circunf. Op: circunf. pp'; de donde multiplicando estremos y medios, será AB . circunf. pp'=Ab . circunf. Op; luego la superficie del cono originado por AB tendrá por espresion á Ab . circunf. Op. Ahora, cada lado BC, CD &c trazará un trozo de cono, y la espresion de su superficie será por ejemplo en el CD (607 esc.) circun. rt . DC; y como los triángulos CDS, Ort son semejantes, por tener los lados perpendiculares, será CD:CS::Or:rt::circunf. Or: circunf. rt, de donde CD . circunf. rt=CS . circunf. Or=circunf. Or . cd.

Del mismo modo demostraríamos que la superficie originada por un lado cualquiera, *es igual á la circunferencia que traza el radio recto multiplicada por la parte de la AH, comprendida por las perpendiculares tiradas desde los estremos de cada lado*: luego resultará

Sup. de cuerpo originado por ABCDEFGH=circunf. Op. Ab+ circunf. Oq . bc+circunf. Or . cd+ circunf. Ou . de + circunf. Ox×ef+ circunf.Oy . fg + circunf. Oz . gH: y como todos los radios rectos Op, Oq &c son iguales, las circunferencias que tracen tambien lo serán, y por lo mismo sustituyendo arriba circunf. Op, en vez de las demas circunferencias de Oq &c en todos los términos habrá un factor comun que será circunf. Op, y sacándolo fuera de un paréntesis nos dará

Sup. de cuerpo originado por ABCDEFGH=
circunf. Op.(Ab+bc+cd+de+ef+fg+gH)=circunf. Op.AH; pero circunferencia Op . AH, es igual á la superficie lateral de un cilindro en que el radio de su base sea Op, y el lado ó altura AH; luego *la superficie de este cuerpo &c.*

Cor. De aquí se deduce que si solo hubiéramos considerado una parte cualquiera del polígono, tal como ABCD, su superficie hubiera sido circunf. Op . Ad.

Esc. Si el polígono que girase estuviese circunscrito, del cual solo se espresan en la (fig. 255) los dos últimos lados, se demostraría del mismo modo que *Sup. de cuerpo originado por polígono circunscrito* =circunf. OP . QR.

610 Teor. *Si el polígono ABCDEFGH gira al rededor de AH, trazará un cuerpo cuyo volúmen será igual al de un cono que tenga por base la superficie de dicho cuerpo y por altura el radio recto de dicho polígono.*

Dem. Para probarlo, averiguarémos primero el volúmen que trazará el triángulo ABO, y tendrémos bajando la Bb perpendicular á OA, que el triángulo rectángulo ABb trazará un cono cuyo volúmen será sup. de círc. orig. por Bb.$\frac{Ab}{3}$, y el BbO otro, cuyo volúmen será sup. de círc. orig. por $bB.\frac{bO}{3}$; de manera que el originado por todo el triángulo ABO, será sup. de círc. orig. por $Bb\ (\frac{Ab}{3}+\frac{bO}{3})$=sup. de círc. orig. por $Bb.\frac{AO}{3}$.

Ahora, como sup. de circ. Bb=3,14&c. Bb^2 y (606 cor.) sup. de cono orig. por AB=3,141&c. Bb. AB, será sup. de círc. Bb:sup. de cono AB::3,14&Bb^2:3,14&c. Bb. AB::Bb:AB, y como los triángulos ABb, ApO son semejantes por ser ambos rectángulos, y tener comun el ángulo en A, será Bb:AB::Op:OA; luego como estas proporciones tienen una razon comun, será sup. de círc Bb:sup. de cono AB::Op:OA de donde sup. de cír. Bb=sup. de cono AB $.\frac{Op}{OA}$.

Luego sustituyendo este valor en la espresion de arriba, será *vol. de cuerpo orig. por triáng.* ABO=sup. de cono AB$.\frac{Op}{AO}.\frac{AO}{3}$= sup. de cono AB$.\frac{Op}{3}$.

Esta espresion nos dice que *el volúmen del cuerpo que traza un triángulo al girar al rededor de uno de los lados es igual á la superficie que traza un lado multiplicada por el tercio de la perpendicular á dicho lado, tirada desde el otro estremo del lado que sirve de eje á dicho cuerpo.*

Por la misma razon se verificará que el volúmen que traza el triángulo VCO será *superficie de cono orig. por* CV$.\frac{Oq}{3}$; y como la del originado por el triángulo VBO será *superficie de cono* BV$.\frac{Oq}{3}$, tendrémos que *volúmen de cuerpo orig.* por BCO será=superfi. de cono CV$.\frac{Oq}{3}$—superfi. de cono BV$.\frac{Oq}{3}=\frac{Oq}{3}$. (sup. de cono CV— sup. de cono BV)=$\frac{Oq}{3}$. sup. orig. por CB.

Del mismo modo sacaríamos que el volúmen que trazáse el triángulo COD estaría representado por superfi. orig. por CD. $\frac{Or}{3}$; el trazado por el triángulo EOF, por sup. EF$.\frac{Ox}{3}$; él trazado por el triángulo FOG, por sup. FG$.\frac{Oy}{3}$; y que el trazado por el triángulo GOH, por sup. GH$.\frac{Oz}{3}$.

Por lo que solo nos resta demostrar que la misma regla se verifica respecto del volúmen originado por el triángulo DOE.

En efecto, volúmen originado por triángulo DOE=vol. oríg. por rectángulo DdeE—vol. orig. por triáng. DdO—vol. orig. por triáng. EOe=(por ser iguales los triángulos DdO, EOe) vol. orig. por rect. DdeE—2vol. orig. por DdO.

Pero el volúmen originado por el triángulo DdO girando al rededor de Od es el de un cono en que el radio de la base es Dd; y el volúmen originado por el rectángulo DdeE es un cilindro en que el radio de la base es Dd; por consiguiente será

Vol. descr. por triáng. DOE=cil. orig. por rect. DdeE—2cono orig. por DdO= circunf. D$d\times\frac{Dd}{2}\times de$— 2circunf. D$d\frac{Dd}{2}\times\frac{dO}{3}$ =circunf. Dd. D$d(\frac{de}{2}-\frac{dO}{3})$= circunf. D$d$. D$d$. $\frac{2}{3}$ dO=circunf. Dd. D$d.\frac{de}{3}$; pero circunf. Dd. (de=DE), es la superficie del cilindro que traza el lado DE; luego se tendrá por ser Dd=Ou), vol. descr. por triáng. DOE= sup. orig. por DE. $\frac{Ou}{3}$; y como todos los radios rectos Op, Oq, Or &c son iguales, se tendrá *vol. de cuerpo orig. por* ABCDEFGH=sup. AB . $\frac{Op}{3}$+ sup. CB $.\frac{Op}{3}$ + sup. CD$.\frac{Op}{3}$ + &c= $\frac{Op}{3}$(sup. AB+ sup. BC+ sup.CD+ sup.DE+ sup.EF+ sup.FG+ sup.GH)= $\frac{Op}{3}\times$ sup. orig. por ABCDEFGH.

Pero esta es la espresion del volúmen de un cono cuya base fuese igual á la superficie que originase ABCDEFGH, y la altura Op; luego queda demostrada la proposicion.

Esc. 1.° Lo mismo hubiéramos demostrado de una porcion cualquiera de polígono que hubiéramos considerado girar al rededor de la AH.

Esc. 2.° Del mismo modo hubiéramos demostrado que *el volúmen del cuerpo originado por el polígono circunscrito era igual al de un cono que tuviese por base la superficie de dicho cuerpo, y por altura el* *radio recto de dicho polígono*, que aquí es el radio OP del círculo, ó lo que es lo mismo, que dicho volúmen será igual á *su superficie multiplicada por* $\frac{OP}{3}$.

611 El tercer cuerpo redondo que junto con el cilindro y el cono considera la Geometría elemental, es la *esfera*: y se entiende por esfera un cuerpo terminado por una superficie curva, cuyos puntos estan todos á igual distancia de un punto comun que se llama *centro*.

La esfera tambien es un cuerpo de revolucion, porque se puede concebir originada por el movimiento de un semicírculo DAEK (fig. 256) al girar al rededor del diámetro DK; pues entónces cada punto de la superficie de este cuerpo se habrá originado de uno del semicírculo generador, que dista una misma magnitud del centro, á saber, una magnitud igual al radio de dicho semicírculo.

El diámetro DK, al rededor del cual ha girado el semicírculo para engendrar la esfera, se llama *eje* de la esfera, y los estremos D y K del eje se llaman *polos*: se da el nombre de *radio* de la esfera á una línea que desde el centro va á terminar á su superficie.

El cuerpo DABC que se origina de la revolucion del sector del círculo DCA, se llama *sector esférico*, el cual se compone de la parte DAFBM, que se llama *casquete esférico*, y del cono AFBMC. Se llama *zona esférica* á la parte de la superficie de la esfera comprendida por dos planos paralelos, cuyos planos se llaman las *bases* de la *zona*; cuando uno de los planos es tangente á la esfera, esto es, cuando no tiene comun con su superficie sino un punto, no tiene la zona mas de una base.

612 Teor. *Toda seccion de la esfera causada por un plano es un círculo.*

Dem. Sea AFBM la seccion causada por un plano en la esfera cuyo centro es C. Desde el punto C concíbase la perpendicular CO al plano AMB, y diferentes rectas CM, CM' &c á diferentes puntos de la curva AMB en que termina la seccion.

Las oblicuas CM, CM', CB son iguales, pues que son radios de la esfera, y por lo mismo (546 cor.) la curva AFBM en que terminan, será un círculo.

Cor. 1.° De aquí se deduce que *si la seccion pasa por el centro de la esfera, su radio será el de la esfera*; y por lo mismo todos los círculos que resultan de planos que pasen por el centro serán iguales; á estos se les llama *círculos máximos*, y á los que no pasan por el centro se les ha dado el nombre de *círculos menores*.

Cor. 2.° *Dos círculos máximos se dividen siempre en dos partes iguales*; porque su comun interseccion pasando por el centro es un diámetro.

Cor. 3.° *Todo círculo máximo divide á la esfera y á su superficie en dos partes iguales*, á que se ha dado el nombre de *hemisferios*; porque si despues de haber separado dichas dos partes, se las aplica sobre la base comun, volviendo su convexidad hácia un mismo lado, las dos superficies coincidirán la una con la otra sin que haya puntos mas cerca del centro los unos que los otros.

Cor. 4.° Toda seccion que no pase por el centro será un círculo, que se llama *menor*, y todos los círculos menores tienen su centro en la línea que desde el centro de la esfera se tira perpendicularmente á dicho círculo.

Cor. 5.° *Los círculos menores van siendo mas pequeños á proporcion que se alejan mas del centro*; porque mientras mayor es la distancia CO, mas pequeña es la cuerda AB, diámetro del círculo menor AMB.

Cor. 6.° *Por dos puntos dados sobre la superficie de la esfera, se puede hacer pasar un arco de círculo máximo*; porque dados los dos puntos y el centro de la esfera se tienen ya tres puntos que determinan la posicion de un plano.

Sin embargo, si los dos puntos dados estuviesen en los estremos de un diámetro de la esfera, entónces estos dos puntos y el centro estarán en línea recta, y habría tantos círculos máximos como se quisiesen, que cumpliesen con la condicion de pasar por los dos puntos dados.

{613 Teor. *La comun interseccion de dos esferas es un círculo.*

{*Espl.* Sean ABC, CBD (fig. 257) las dos esferas: voy á demostrar que su comun interseccion es un círculo.

{*Dem.* Uniendo los centros de dichas esferas con dos puntos cualesquiera de la comun interseccion, que supondrémos sean C y B, tendrémos que los triángulos ECO, EBO serán iguales, porque tienen los tres lados del uno iguales á los otros tres lados del otro; luego las alturas serán iguales, esto es, CM=MB; luego los triángulos ECM, EMB tienen iguales las hipotenusas EC, EB por radios, y CM, MB por lo que acabamos de demostrar; y como dos triángulos son iguales en este caso (376 cor. 2.°), resultará que las CM y BM irán á parar á un mismo punto de la EO; luego las dos líneas CM y MB se hallarán en un mismo plano; y como demostraríamos del mismo modo que todas las perpendiculares que se tirasen desde un punto cualquiera de la comun interseccion á la línea que une los dos centros, serían iguales y se hallarían en un mismo plano, resulta que todos los puntos de dicha interseccion se hallan en un plano que pasa por todas estas perpendiculares, que distan igualmente del punto en que dicho plano corta á la línea que une los centros; luego la comun interseccion de dos esferas es un círculo. L. Q. D. D.}

614 Teor. *Si en el semicírculo de que se origina la esfera, se inscribe un semipolígono regular, se le circunscribe otro, y se concibe que giren estos semipolígonos al mismo tiempo que el semicírculo, se tendrá un cuerpo inscrito y otro circunscrito y voy á demostrar que la superficie de la*

esfera será mayor que la del cuerpo inscrito, y menor que la del circunscrito.

Dem. 1.° Si llamamos r (fig. 258) al radio recto del polígono inscrito, y D al diámetro de la esfera, tendrémos que *circunf.* $r \cdot D$ será (609) la espresion de la superficie de dicho cuerpo; si ahora inscribimos otro polígono de duplo número de lados, su radio recto r' aumentará, y por lo mismo la espresion de su superficie que es circunf. $r' \cdot D$ aumentará; y como el cuerpo que este origina tendrá un duplo número de circunferencias en la esfera, y ademas su superficie está entre la de la esfera y la del cuerpo originado por el polígono anterior, resulta que la superficie de este cuerpo es mayor que la del anterior, y se aproxima mas á la de la esfera; si volviéramos á inscribir polígonos de duplo número de lados de este último, sería la superficie del cuerpo que originase, mayor que la del anterior, y se acercaria mas á la de la esfera; luego tenemos aquí una cantidad variable, que es la superficie del cuerpo inscrito, que al paso que crece se acerca á la constante; luego la constante será mayor que cualquier valor de la variable, y por lo mismo la superficie de la esfera mayor que la de cualquier cuerpo inscrito en ella. L. 1.° Q. D. D.

2.° Llamando R al radio de la esfera ó del semicirculo de que se origina, se tendrá que R será el radio recto del semipolígono circunscrito, y resultará que la superficie del cuerpo circunscrito será (609) *circunf.* $R \cdot GL$; si aumentamos el número de lados del polígono, GL disminuirá (502), y volviendo á aumentar los lados volverá á disminuir; luego la espresion *circunf.* $R \cdot GL$ disminuye cuando el número de lados se aumenta; pero cuando el número de lados crece, el polígono traza un cuerpo que se aproxima mas á la esfera, porque va teniendo mas circunferencias comunes con ella, y ademas se halla entre la esfera y el de menos lados; luego tenemos aquí una cantidad variable, que es el cuerpo originado por el polígono circunscrito, que al paso que disminuye se acerca á la superficie de la esfera; luego en virtud de lo demostrado (324) la superficie de la esfera será menor que la de dicho cuerpo circunscrito. L. 2.° Q. D. D.

{Cor. De aquí se deduce que *la superficie del cuerpo inscrito es menor que el cuádruplo de la superficie de un círculo máximo, y la del circunscrito mayor.* Porque como la superficie de un círculo máximo es igual á la circunferencia multiplicada por la mitad del radio ó cuarta parte del diámetro, la del cuádruplo será igual á la circunferencia multiplicada por el diámetro ó á $C \cdot D$. Ahora, la superficie del cuerpo inscrito es *circunf.* $r \cdot BD =$ *circunf.* $r \cdot D$; y como siendo r el radio recto del polígono inscrito, es menor que el radio R del círculo, la circunferencia trazada con r será menor que la trazada con R, y será *circunf.* $r \cdot D <$ *circunf.* $R \cdot D = C \cdot D$; luego la superficie del cuerpo inscrito es menor que el cuádruplo de la de un círculo máximo. La del

cuerpo circunscrito es *circunf.* $R \cdot GL = C \cdot GL$, y como $GL > BD = D$, resulta que *circunf.* $R \cdot GL > C \cdot D$; luego la del cuerpo circunscrito mayor &c.}

614a Teor. *La superficie de la esfera es igual á la circunferencia de un círculo máximo multiplicada por el diámetro; y el volúmen igual á la superficie de la misma esfera multiplicada por el tercio del radio.*

Dem. 1.° Concibiendo circunscrito á la esfera un cuerpo originado por la revolucion de un semipolígono circunscrito al semicírculo generador (fig. 255), y llamando C á la circunferencia del círculo máximo trazado por OP, se tendrá (609 esc.) *Sup. de Cuerpo circunscrito* $= C \cdot QR$; y espresando por X el esceso de QR sobre el diámetro AH que representarémos por D, y por Z el esceso de la superficie del cuerpo circunscrito sobre el de la esfera, se tendrá *Sup. de Esfera* $+ Z = C \cdot (D + X)$ y como la superficie de la esfera es independiente del valor que puedan tener las cantidades X y Z que varían con el número de lados del semipolígono que se circunscribe al semicírculo generador, resulta que el valor que tenga en un valor particular de X y Z, lo tendrá en todos; pero cuando $X = 0$, es tambien $Z = 0$, y como en este caso la ecuacion anterior se convierte en *Sup. de Esfera* $= C \cdot D$, resulta L. 1.° Q. D. D.

2.° Si espresamos por V' el volúmen del cuerpo circunscrito á la esfera originado por la revolucion del semipolígono circunscrito al rededor del eje, S' á la superficie de dicho cuerpo, y R al radio de la esfera, será (610 esc. 2.°) $V' = S' \times \frac{R}{3}$. Y siendo la superficie y volúmen en el cuerpo circunscrito mayor que en la esfera, si llamamos Z' al esceso que el volúmen del cuerpo circunscrito lleva al de la esfera, y X' al esceso que la superficie del cuerpo circunscrito lleva á la de la esfera que señalarémos con S, será *Volúmen de Esfera* $+ Z' = (S + X') \times \frac{R}{3}$; y como el volúmen de la esfera es independiente de los valores de X' y Z' que varían con el número de lados del polígono circunscrito, el valor que tenga en un valor particular de X' y de Z', ese mismo tendrá en todos; pero cuando $X' = 0$, es tambien $Z' = 0$, luego tendremos

Volúmen de Esfera $= S \cdot \frac{R}{3}$. L. 2.° Q. D. D.

{*Esc.* Igualmente juzgamos mas á propósito para deducir estas verdades lo que sigue:

{615 Teor. *El volúmen del cuerpo inscrito es menor que el cuádruplo de un cono, cuya base sea la superficie de un círculo máximo y la altura igual al radio de la esfera, y el circunscrito mayor.*

Dem. El volúmen del cuerpo inscrito es igual (610) al de un cono, cuya base sea la superficie de este cuerpo, y sualtura el radio recto; pero la superficie del cuerpo es menor (614 cor.) que el cuádruplo del círculo máximo, y su altura r es menor tambien que el radio R de la esfera, luego el volúmen del este cuerpo inscrito menor &c.

Ahora, el volúmen del circunscrito es igual á un cono, cuya base sea igual en superficie á la de este cuerpo, y la altura el radio de la esfera; y como dicha superficie es mayor (614 cor.) que el cuádruplo de dicho círculo máximo, resulta que el volúmen del circunscrito será mayor que el cuádruplo de dicho cono. L. Q. D. D.

616 Teor. *Si en una esfera se inscribe y circunscribe un cuerpo del modo que hemos dicho (614), vamos á probar que la superficie del circunscrito está con la del inscrito en razon duplicada de sus lados homólogos, y los volúmenes en razon triplicada.*

Dem. 1.° La superficie del circunscrito á que llamarémos P, será (609) circunf. R . GL (fig. 258), y la del inscrito á que llamarémos p, será circunf. r . BD, y tendrémos $P:p::$ circunf. R . GL: circunf. r . BD; pero circunf. R:circunf.r::R:r::ZG:ZB::2ZG=GL:2ZB=BD, luego sustituyendo esta razon en la compuesta de arriba, se convertirá en $P:p::GL \cdot GL:BD \cdot BD::GL^2:BD^2$.

Ahora, por ser los polígonos semejantes, resulta que los triángulos GZO;ZPB lo son, y dan GZ:ZB::GO:BP, y duplicando los términos GL:BD::GF:BN, de donde $GL^2:BD^2::GF^2:BN^2$; luego sustituyendo en vez de la razon $GL^2:BD^2$ su igual, se tendrá $P:p::GF^2:BN^2$, que era L. 1°. Q. D. D.

2.° Llamando P' al volúmen del cuerpo circunscrito, y P á su superficie, será $P'=$(§ 610)$P \cdot \frac{ZO}{3}$, y llamando p' al del inscrito y p á su superficie, se tendrá $p'=p.\frac{ZP}{3}$, de donde $P':p'::P.\frac{ZO}{3}:p.\frac{ZP}{3}::$ $P \cdot ZO:p \cdot ZP$; pero (518 cor.) $P:p::GF^2:BN^2$ y $ZO:ZP::FG:BN$, multiplicando estas dos proporciones, se tendrá $P.ZO:p \cdot ZP::GF^2.FG:BN^2.BN::FG^3:BN^3$, luego será $P':p'::FG^3:BN^3$, que era L. 2.° Q. D. D.

617 Teor. *La superficie S de la esfera es igual al cuádruplo de la de uno de sus círculos máximos á que llamarémos C'.*

Dem. Porque si esto no se verifica, será mayor ó menor: sea el círculo X igual con el cuádruplo de C', y suponiendo primero que $S > X$, resultará que (479 probl. 5.°) hallando dos magnitudes G y H tales que $G:H < S:X$, y concibiendo circunscrito é inscrito á la esfera un cuerpo tal que (§ 499) $GF:BN < G:\sqrt{G \times H}$, se tendrá

$GF^2:BN^2 < G^2:G \times H::G:H < S:X$, y llamando P,p á sus superficies, se tendrá por ser (§ 614) $S < P, S:p < P:p$, y como (616) $P:p::GF^2:BN^2$, se tendrá $S:p < FG^2:BN^2 < S:X$, de donde $p > X$; esto es, la superficie del cuerpo inscrito mayor que el cuádruplo del círculo máximo contra lo demostrado (614 cor.), luego no se puede suponer que $S > X$.

Tampoco puede ser $S < X$, pues haciendo entónces $G:H < X:S$ y $FG:BN < G:\sqrt{G \times H}$, será $P:S < P:p < G:H$ (como arriba) $< X:S$, de donde $P < X$; esto es, la superficie del cuerpo circunscrito menor que el cuádruplo del círculo máximo, contra lo demostrado en el mismo corolario; luego tampoco puede ser $S < X$, luego se tendrá $S=X$, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° Luego *para hallar la superficie de la esfera no tendrémos mas que cuadruplicar la de uno de sus círculos máximos*, y tendrémos con relacion al diámetro *sup. de esfera* $= 4$ círc. máx. $= 4 \times 0{,}785\&c \times D^2 = 3{,}1415926536 \times D^2$, con relacion al radio saldrá *superficie de esf.* $= 12{,}5663706144 \times R^2$, y con relacion á la circunferencia será *superficie de esf.* $= 0{,}3183098862 \times C^2$.

Cor. 2.° De aquí se deduce que *la superficie de la esfera es igual á la de un círculo que tenga por radio el diámetro de la esfera*; porque siendo el diámetro de la esfera cuádruplo de la mitad del radio, este círculo será cuádruplo de uno de los máximos de la esfera.

Cor. 3.° Tambien resulta que *la superficie de la esfera es igual á la superficie lateral del cilindro circunscrito á ella*; porque como la superficie de este se halla multiplicando la circunferencia de la base, que es un círculo máximo, por el diámetro que es cuádruplo de la mitad del radio, se tendrá que esta superficie del cilindro es igual al cuádruplo de la de un círculo máximo, y por lo mismo igual á la de la esfera.

Esc. Por el mismo método hubiéramos llegado á demostrar que la superficie de un casquete esférico, y de una zona esférica, era igual á la parte del cilindro circunscrito correspondiente; de manera que si señalamos con A la altura de dicho casquete ó zona, será *sup. de casquete esfér.* $=$ (con relacion á D) $= 3{,}1415926536 \times D \times A$ y *sup. de zona esfér.* $=$ (con relacion á D) $= 3{,}1415926536 \times D \times A$.

618 Teor. *El volúmen de la esfera es cuádruplo del de un cono que tenga por base á un círculo máximo de la esfera, y por altura el radio de la esfera.*

Espl. Sea la esfera GFKH (fig. 259) á que llamarémos E: vamos á demostrar que su volúmen es cuádruplo del volúmen del cono EALBM, á que llamarémos C.

Dem. Porque si esto no se verifica, será mayor ó menor: supongamos primero que sea $E > 4C$, y tendrémos que haciendo (488

esc. 1.°) $E:4C > K:L > K^3:N^3$; si circunscribimos (fig. 258), é inscribimos á la esfera dos cuerpos P', p', tales (499) que $GF:BN < K:N$, se verificará por ser $E < P'$, que
$E:p' < P':p' :: (\S\ 616)\ FG^3:BN^3 < K^3:N^3 < K:L < E:4C$; luego $p' < 4C$ contra lo demostrado (615), luego no puede ser $E < 4C$.

{Tampoco se puede suponer menor; porque si fuese $E < 4C$, haríamos $4C:E < K:L < K^3:N^3$ y $FG:BN < K:N$, con lo cual será $P':E < P':p' :: GF^3:BN^3 < K^3:N^3 < K:L < 4C:E$; por lo que resultaría $P' < 4C$ contra lo demostrado (615); luego si no puede ser $E > 4C$ ni $E < 4C$, será forzosamente $E = 4C$.

{Cor. De aquí se deduce que *el hemisferio es igual al duplo del cono que tiene la misma base y altura, ó al cono que tiene la misma base y dupla altura.*

{619. Teor. *El volúmen de la esfera es los dos tercios del cilindro circunscrito á ella.*

{*Dem.* Porque si por el centro E de la esfera (fig. 259) se tira la FH paralela á AB, y las EA,EB, será $\frac{1}{6}$ cilindro ABCD $= \frac{1}{3}$ cilindro ABHF $=$ cono AEB $=$ (§ 618) $\frac{1}{4}$ esfera FGHK; luego pues que $\frac{1}{6}$ cilindro ABCD $= \frac{1}{4}$ esfera FGHK, será esfera FGHK $= \frac{4}{6}$ cilindro ABCD $= \frac{2}{3}$ cilindro ABCD, que era L. Q. D. D.

{*Cor.* 1.° De aquí resulta que *para hallar el volúmen de la esfera, no hay mas que multiplicar la superficie de un círculo máximo por los dos tercios del diámetro*; porque para hallar el del cilindro ABCD se debe multiplicar por todo el diámetro, de manera que

$$\textit{vol. de esf.} = \text{sup. de círc. máx.} \times \tfrac{2}{3}\,D = \text{sup. de círc. máx.} \times \frac{4R}{3} = 4$$

$$\text{sup. de círc. máx.} \times \frac{R}{3} = (\S\ 617)\ \text{sup. de esfera} \times \frac{R}{3},$$ lo que quiere

decir, que *el volúmen de la esfera tambien es igual á su superficie multiplicada por el tercio del radio, ó es igual al volúmen de un cono que tenga por base un círculo cuya superficie sea la de la esfera, y la altura el radio de la misma esfera.*

{*Cor.* 2.° Luego con relacion al diámetro, será

$$\textit{vol. de esf.} = \text{sup.} \times \frac{R}{3} = \text{círc. máx.} \times \tfrac{2}{3}\,D = 0{,}5235987756 \times D^3,$$ con

relacion al radio, será *volúm. de esfera* $= 4{,}1887902048 \times R^3$, y con relacion á la circunferencia, será *volúm. de esfera.* $= 0{,}01688686 39 \times C^3$.

{620 *Esc.* Pues que la esfera es $\frac{2}{3}$ cilindro circunscrito y el cono GALBM inscrito $= \frac{1}{3}$ cilindro, tendrémos Cono GALBM : Esf. GFKH: cilindro DABC :: $\frac{1}{3}$ cilindro DABC : $\frac{2}{3}$ cilindro DABC : cilindro ABCD $= \frac{3}{3}$ cilindro ABCD :: 1 : 2 : 3.

{*Cor.* 1.° De donde se deduce que *el volúmen del cilindro circunscrito á la esfera es igual al volúmen de la esfera junto con el del cono inscrito.*

{*Cor.* 2.° Luego *el volúmen del cono inscrito es igual al volúmen que trazan los dos segmentos* GDF,FAK *al girar al rededor de* GK; porque el cilindro se origina de todo el rectángulo DAKG, y la esfera del semicírculo GFK.

Comparacion de las superficies y volúmenes de los cuerpos en general, y en particular cuando son semejantes.

{621 Se dice de dos ó mas cuerpos que son semejantes cuando están terminados por un mismo número de superficies semejantes, y cuyos ángulos sólidos homólogos son iguales en número y en cantidad, esto es, que haya en ambos cuerpos un mismo número de ángulos sólidos, y que cada uno de estos se componga respectivamente de un mismo número de ángulos planos iguales.

{Teor. *Las superficies de dos cuerpos semejantes guardan la razon de los cuadrados de los lados homólogos.*

{*Dem.* Comparando dos cuerpos cuyas superficies sean A,B,C, &c, a,b,c, &c, se tendrá *Sup. de Cuerpo* $= A + B + C + D +$ &c. *sup. de cuerpo* $= a + b + c + d +$ &c; y comparando de dos en dos las superficies será $A:a :: B:b :: C:c :: D:d :: \ldots\ldots L^2:l^2$; comparando la suma de antecedentes y consecuentes será
$A + B + C + D +$ &c : $a + b + c + d +$ &c :: $L^2:l^2$; luego *Sup. de Cuerpo : sup. de cuerpo* :: $L^2:l^2$, que era L. Q. D. D.

{622 Teor. *Las superficies de dos esferas son como los cuadrados de los diámetros, radios y circunferencias de sus círculos máximos.*

{*Dem.* Comparando dos esferas, se tendrá
Sup. de Esf. $= 3{,}14159 \times D^2$, *sup. de esf.* $= 3{,}14159 \times d^2$; formando proporcion será *Sup. de Esf. : sup. de esf.* :: $3{,}141$&c $\times D^2 : 3{,}141$ &c $\times d^2 :: D^2:d^2 :: K^2:r^2 :: C^2:c^2$.

{De otro modo. Por ser la superficie de una esfera cuádrupla de la de uno de sus círculos máximos, será *Sup. de Esf.* $= 4$ *circ. Máx.* y la otra será *sup. de esf.* $= 4$ *circ. máx.* y formando proporcion se tendrá *Sup. de Esf. : sup. de esf.::4Cir. Máx.:4cir. máx.::Circ. Máx.:circ. máx.*:: $D^2:d^2 :: R^2:r^2$, por ser los círculos como los cuadrados de sus radios, diámetros &c.

{623 Teor. *Las superficies laterales de dos prismas son generalmente como los productos de sus aristas por el perímetro de una seccion perpendicular á dichas aristas.*

{*Dem.* Comparando dos prismas el uno denominado grande y el otro pequeño, se tiene *Sup. Lat. de Prism.* $=$ *Perím. de Sec.* $\times$ *Arista*, *sup. lat. de prism.* $=$ *perím. de sec.* $\times$ *arista*, y formando proporcion, será *Sup. Lat. de Prism. : sup. lat. de prism.:: Perím. de Seccion* $\times$ *Arista: perím. de seccion* $\times$ *arista*, que dice que las *superficies de los prismas* *están en razon compuesta directa de los perímetros de las secciones y de las aristas.*

Haciendo *Arista* = *arista*, será

Sup Lat. de Prism. : *sup. lat. de prism.* :: *Perím. de Sec.* : *perím. de sec.*, que dice que á igualdad de aristas, *las superficies están en razon directa de los perímetros de las secciones.*

Suponiendo que *Per. de Sec.* = *per. de sec.* será

Sup. Lat. de Pris. : *sup. lat. de pris.* :: *Arista* : *arista*, que dice que á igualdad de perímetros, *las superficies son como las aristas.*

Si la primera razon es de igualdad, esto es, si *Sup. Lat. de Prisma* = *sup. lat. de prisma*, la segunda tambien lo será, y resultará *Perím. de Sec.* × *Ar.* = *perím. de sec.* × *ar.*, y sacando de esta ecuacion la relacion de los perímetros de las secciones y de las aristas, será

$$\left.\begin{array}{l}\textit{Perím. de Sec.} : \textit{perím. de sec.} :: \textit{ar.} : \textit{Ar.}\\ \textit{Ar.} : \textit{ar.} :: \textit{perím. de sec.} : \textit{Perím. de Sec.}\end{array}\right\}$$

cuyas dos proporciones quieren decir que *á igualdad de superficies, los perímetros de las secciones están en razon inversa de las aristas, y las aristas en razon inversa de los perímetros de las secciones.*

{Si lo suponemos todo desigual, multiplicando estremos y medios en la proporcion primitiva, será

Sup. Lat. de Pris × *per. de sec.* × *ar.* = *sup. lat. de pris.* × *Per. de Sec.* × *Ar.*

Sacando de aquí la relacion de los perímetros y de las aristas se tiene

Per. de Sec.: *per. de sec.*:: *Sup. Lat. de Pris.* × *ar.*: *sup. lat. de pris.* × *Ar.* que dice que á *desigualdad de todo, los perímetros están en razon compuesta, directa de las superficies é inversa de las aristas.*

Ar.: *ar.*:: *Sup. Lat. de Pris.* × *per. de sec.*: *sup. lat. de pris.* × *Per. de Sec.* que dice que, *á desigualdad de todo, las aristas están en razon compuesta, directa de las superficies de los prismas é inversa de los perímetros.*

{Si suponemos semejantes los prismas se tendrá

Per. de Sec. : *per. de sec.* :: *Ar.* : *ar.*; y como en vez de una de las razones componentes de una compuesta, se puede sustituir otra igual con ella, en la proporcion primitiva en vez de *Perím. de Sec.* : *perím. de sec.* podrémos sustituir *Ar.* : *ar.* que le será igual en este caso, y se tendrá

Sup. Lat. de Prism. : *sup. lat. de prism.* :: *Ar.* × *Ar.* : *ar.* × *ar.* :: $(Ar.)^2 : (ar.)^2$ que dice que *las superficies de los prismas semejantes son como los cuadrados de sus aristas.*

{Si tuviésemos dos cilindros, sería *Sup. de Cilindro* = $C \times L$ = $3{,}14159 \times D \times L$; *sup. de cil.* = $c \times l$ = $3{,}14159 \times d \times l$, y se ejecutaría del mismo modo la comparacion.

{624 Teor. *Los volúmenes de dos prismas guardan la misma razon que los productos de las superficies de las bases por sus alturas.*

{*Dem.* Comparando dos prismas analogos á los anteriores, será

Vol. de Prism. = *Sup. de* $B \times A$, *vol. de prism.* = *sup. de* $b \times a$

Vol. de Prism. : *vol. de prism.* :: *Sup. de* $B \times A$: *sup. de* $b \times a$

{Si las alturas son iguales, se tendrá

Vol. de Prism. : *vol. de prism.* :: *Sup. de B* : *sup. de b*,

y si fuesen iguales las bases se tendría

Vol. de Prism. : *vol. de prism.* :: *A* : *a*.

{Ahora, si fuesen semejantes se tendría

Sup. de B : *sup. de b* :: $A^2 : a^2$;

por lo que sería sustituyendo la segunda razon en vez de la primera, *Vol. de Prism.* : *vol. de prism.* :: $A^2 \times A : a^2 \times a :: A^3 : a^3 :: \ldots\ldots L^3 : l^3$ en general.

{Si tuviésemos dos conos sería.

Vol. de Cono = *Sup. de* $B \times \frac{A}{3}$, *vol. de cono* = *sup. de* $b \times \frac{a}{3}$ y se ejecutaría del mismo modo la comparacion.

{625 Teor. *Los volúmenes de dos esferas son como los cubos de los diámetros, radios y circunferencias de sus círculos máximos.*

{*Dem.* Porque comparando dos esferas se tiene

Vol. de Esf. = 0,5235 &c × D^3, *vol. de esf.* = 0,5235 &c × d^3;

y formando proporcion, será

Vol. de Esf. : *vol. de esf.* :: 0,5235 &c × D^3 : 0,5235 &c × d^3 :: $D^3 : d^3 :: R^3 : r^3 :: C^3 : c^3$ que nos dice *que los volúmenes de dos esferas son como los cubos de los diámetros, radios y circunferencias de sus círculos máximos.*}

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

626 La palabra *Trigonometría*, quiere decir *medicion de triángulos*, porque este fué sin duda su primer objeto; pero en el dia esto corresponde á la *planimetría*, ó parte de la Geometría que trata de la medicion de las superficies planas, y por Trigonometría, se entiende la *ciencia que trata de la resolucion de los triángulos.* Cuando el triángulo que se ha de resolver es rectilíneo la Trigonometría se llama *plana* ó *rectilínea*; y cuando está formado sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos se llama *Trigonometría esférica.*

Se dice que se resuelve un triángulo, cuando por medio de aquellas cosas que le determinan, se viene en conocimiento de las demas. Las cosas que constituyen ó determinan un triángulo son, ó *los tres lados, ó dos lados y el ángulo comprendido, ó un lado y los dos ángulos adyacentes*; pues hemos visto (359, 360, 361) que todos los triángulos en que se reunan estas circunstancias tienen iguales todas las otras partes; luego la Trigonometría nos debe suministrar medios para resolverlos en cada uno de estos tres casos, lo que en efecto se verifica.

Pero como en todo triángulo hay seis cosas que considerar, á saber, tres lados y tres ángulos, y en cada uno de los casos de arriba entran tres cosas conocidas, y se indaga entónces el valor de las otras tres, se ha generalizado mas el objeto de la Trigonometría, y se dice que es la ciencia que trata de resolver este problema general.

Dadas tres de las seis cosas de que consta un triángulo, hallar las otras tres; y como seis cosas se pueden combinar de tres en tres de veinte modos diferentes, vamos á ver á cuantos casos se reducen; para lo cual supondrémos que en cada ángulo del triángulo se coloque una de las letras mayúsculas A,B,C, como se ejecuta casi siempre por ser las primeras del alfabeto, y llamarémos para mayor claridad *a*,*b*,*c*, á los lados opuestos á estos ángulos; de manera que *a* sea el lado opuesto al ángulo A,*b* á B, y *c* á C; si formamos las veinte combinaciones que se pueden ejecutar con estas seis letras, y las colocamos del modo siguiente:

abc,	*ab*A,	*ab*C,	*a*AB,	*a*BC,	ABC
	*ab*B,	*ac*B,	*a*AC,	*b*AC	
	*ac*A,	*bc*A,	*b*AB,	*c*AB	
	*ac*C		*b*BC		
	*bc*B		*c*AC		
	*bc*C		*c*BC		

Observarémos, que la primera no tiene ninguna otra semejante, y conduce á este caso: *dados los tres lados, hallar lo demas, que son los tres ángulos*. Las seis que están en la segunda columna, que constan de dos letras minúsculas y una mayúscula de la misma especie, ó lo que es lo mismo, de dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos están comprendidos en este solo caso: *dados dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos, hallar lo demas*. Las tres que están en la tercera columna, que constan de dos letras minúsculas y una mayúscula de diferente especie, ó lo que es lo mismo de dos lados y el ángulo comprendido, conduce á este solo caso: *dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar lo demas*. Las seis que están en la cuarta columna conducen á este solo caso: *dados dos ángulos y un lado opuesto á uno de ellos, hallar lo demas*. Las tres que están en la quinta columna, que constan de dos letras mayúsculas y una minúscula de diferente especie, ó lo que es lo mismo de un lado y de los dos ángulos adyacentes, conduce á este solo caso: *dado un lado y los dos ángulos adyacentes, hallar todo lo demas*. Finalmente la sesta, que no tiene semejante, conduce al caso en que se dan los tres ángulos. Luego en un triángulo cualquiera, sea rectilíneo, sea esférico, el problema general que se propone resolver la Trigonometría no conduce sinó á los seis casos que acabamos de espresar, y que podrémos ordenar del modo siguiente:

I. Dados los tres lados, hallar los tres ángulos.

II. Dados dos lados y el ángulo comprendido, hallar el otro lado y los dos ángulos.

III. Dado un lado y los ángulos adyacentes, hallar el otro ángulo y los dos lados.

IV. Dados dos ángulos y un lado opuesto á uno de ellos, hallar los otros dos lados y el ángulo.

V. Dados dos lados y el ángulo opuesto al uno de ellos, hallar el otro lado y los dos ángulos.

VI. Dados los tres ángulos, hallar los tres lados.

Si suponemos que los triángulos son rectilíneos, que son de los que nos vamos á ocupar por ahora, tendrémos que los tres primeros casos son los de la igualdad de los triángulos; y como el cuarto es lo mismo que el tercero, porque dados dos ángulos cualesquiera en un triángulo rectilíneo, se sabe el tercero, que es el suplemento de la suma de los otros dos, resulta que en los cuatro primeros casos siempre se puede resolver el triángulo.

627 En el quinto se pueden dar dos resoluciones cuando el ángulo conocido es el opuesto al lado menor, porque los datos pueden corresponder á dos triángulos. En efecto, supongamos que en el ABC (fig. 260), se nos den conocidos los dos lados BA,BC, y el ángulo en C opuesto al menor de ellos AB. Si haciendo centro en B con un radio BA trazamos el arco AD, y unimos el punto B con el D, resultará que siendo BD = BA por radios de un mismo círculo, el triángulo BDC tiene los mismos datos que el propuesto. Como el triángulo BAD es isósceles, el ángulo BAD = BDA, y como este es suplemento del BDC, resulta que tambien lo será el BAD; luego si en este caso se supiese ademas si el ángulo opuesto al otro lado era agudo ú obtuso, entonces no habría duda ninguna.

Cuando el ángulo que se da conocido es el opuesto al lado mayor, entónces no cabe duda, pues que el opuesto al otro lado es por precision agudo; porque si el dado es recto ú agudo, debiendo ser el otro menor, porque al menor lado se opone el menor ángulo, lo será igualmente. Si el dado fuese obtuso, el otro sería agudo; porque en un triángulo no puede haber mas de un ángulo recto ú obtuso, y han de ser los otros dos agudos por precision. Por esta misma razon tampoco habrá duda cuando sin saber si el ángulo dado es el opuesto al lado mayor ó al menor, sea recto ú obtuso; porque los otros dos serán indispensablemente agudos.

628 El sesto caso es de todo punto indeterminado en los triángulos rectilíneos; porque los datos pueden corresponder á cuantos triángulos se quieran.

En efecto, si en el ABC (fig. 261), se nos dan conocidos los tres ángulos A,B,C, resulta que, si por un punto cualquiera *b* de uno de sus lados tiramos la *bc* paralela á BC, el triángulo A*bc* tendrá los mismos ángulos (482) que el triángulo ABC; y como lo mismo se verificaría respecto de otro punto cualquiera *b'* tomado en la AB, indefinidamente prolongada por arriba y por abajo, resulta que este caso conviene á cuantos triángulos se quiera; luego por el conocimiento de los ángulos no se puede determinar la magnitud absoluta de los lados: sin embargo, la Trigonometría manifiesta la relacion que tienen entre sí.

629 Si los ángulos de los triángulos fuesen proporcionales con los lados opuestos, no presentaría dificultad la resolucion de los triángulos; pero como hemos visto (478) que si se divide en dos partes iguales el ángulo de un triángulo, el lado opuesto queda dividido en partes proporcionales á los lados de dicho ángulo, se deduce que si el triángulo no es equilátero, á la mitad de los ángulos no corresponderá la mitad de los lados, y por lo mismo en un triángulo cualquiera, la razon que guardan los ángulos no es la misma que la de los lados opuestos. Por esta causa se ha necesitado echar mano de un sistema de líneas ausiliares, que sirviendo para determinar los ángulos ó los arcos que los miden, sean al mismo tiempo proporcionales con los lados de los triángulos: es muy importante el percibir con exactitud la naturaleza de estas líneas ausiliares, que se conocen con el nombre de *líneas trigonométricas*, y vamos á dar á conocer.

630 Como hemos visto (452 esc. 1.°) que un ángulo se mide por el arco del círculo interceptado entre sus lados, se deduce que todo lo que determine á un arco, determinará igualmente al ángulo de que es medida; por esta causa vamos á determinar las líneas trigonométricas de los arcos, y lo que se diga respecto de estos, quedará igualmente dicho de los ángulos que miden.

Esto supuesto, se llama en general *seno recto* ó simplemente *seno* de un arco á la perpendicular tirada desde el estremo de dicho arco al radio ó diámetro que pasa por el otro estremo; así BD (fig. 262) es el seno del arco AB.

A la parte del diámetro interceptada entre el seno y el estremo del arco se le llama *seno verso*, por lo que AD es el seno verso de AB.

Se da el nombre de *tangente trigonométrica* ó simplemente *tangente* de un arco á la parte de la *tangente geométrica* (*) tirada al estremo de dicho arco, interceptada entre el punto de contacto y el punto donde la encuentra el radio prolongado que pasa por el otro estremo, á que se da el nombre de *secante*; de manera que la naturaleza de la tangente y secante es que se han de terminar mútuamente, ó que la una se ha de prolongar hasta que encuentre á la otra; y así, la tangente del arco AB es AE, y la secante CE. Luego á todo arco corresponden cuatro líneas trigonométricas: un *seno*, un *seno verso*, una *tangente* y una *secante*.

(*) *En la Geometría se considera la tangente como una línea recta indefinida, que tiene un solo punto comun con la circunferencia; pero aquí tiene siempre una magnitud determinada, y por eso nos ha parecido conveniente distinguirlas.*

631 Si consideramos ahora el arco BF, tendrémos que BH será su seno, FH su seno verso, GF su tangente, y CG su secante; y suponiendo que ABF sea un cuadrante, resultará que BF será complemento de AB, y las líneas BH,FH,GF,GC serán las líneas del complemento de AB. En muchas ocasiones es indispensable hacer uso de las líneas del complemento; y como hubo un tiempo en que los libros de las ciencias se escribían todos en latin, y en esta lengua era elegancia el poner lo regido antes de lo regente, al introducirlas en el cálculo escribían abreviadamente *co. sinus*, *co. tangens*, *co. secans*, &c. con lo cual querían dar á entender *complementi sinus*, ó *seno del complemento*, *complementi tangens* ó *tangente del complemento* &c, de donde omitiendo el punto y castellanizando estas voces, se han convertido en *coseno*, *cotangente*, *cosecante y coseno verso*; por lo cual podemos decir ahora, que á todo arco corresponden ocho líneas trigonométricas: cuatro suyas propiamente, y otras cuatro de su complemento.

Como siendo ABF un cuadrante, la FC es perpendicular á AC, resulta que la figura BDCH es un paralelogramo; pues por ser BH perpendicular á CF, será paralela á AC, y BD y FC tambien lo son por perpendiculares á una tercera que es AC; luego BH que es el coseno de AB será igual á DC, y por lo mismo se dice tambien que el coseno de un arco *es la parte del radio interceptada entre el centro y el seno*; estas líneas entran con mucha frecuencia en los cálculos, y por lo mismo se escriben abreviadamente de este modo: en vez de *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cosecante*, *seno verso*, *coseno verso*, se pone *sen.*, *cos.*, *tang.*, *cot.*, *sec.*, *cosec.*, *sen. vers.*, *cos. vers.*

632 Teor. *El seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo.*

Dem. Porque si prolongamos el seno BD hasta que vuelva á encontrar á la circunferencia por abajo en un punto tal como S, tendrémos que por ser CDA perpendicular á BDS, la dividirá en dos partes iguales en D, y tambien al arco BAS; luego *sen.* $AB = BD = \frac{1}{2}BDS = \frac{1}{2}$cuerda $BAS = \frac{1}{2}$cuerda 2 AB, que era L. Q. D. D.

Cor. 1.° Como la mayor cuerda de un círculo es el diámetro, resulta que siendo su mitad el seno de un cuadrante, *el mayor seno que se puede considerar es el radio que sirve de seno al cuadrante ó á* $\frac{1}{2}\pi$.

Cor. 2.° Igualmente se deduce que el *seno de* $30^\circ = \frac{1}{2}R$, porque es la mitad de la cuerda de 60° que es el lado del exágono. Tambien tiene un valor absoluto, conocido y determinado la tangente de 45°; pues si el ángulo $ACB = 45^\circ$ ó $\frac{1}{4}\pi$, tambien valdrá otros 45° ó $\frac{1}{4}\pi$ el AEC, y será isósceles el triángulo AEC; por lo que se tendrá $AE = AC$, que nos dice que la tangente de 45° ó de $\frac{1}{4}\pi$ es igual con el radio.

633. Teor. *Dado el seno de un arco y el radio, se pueden determinar en valores suyos todas las demas líneas trigonométricas.*

Dem. En efecto, el triángulo BDC (fig. 262) será rectángulo en D por ser el seno BD perpendicular al radio CA, y nos dará (487 cor.) $BD^2+DC^2=BC^2$ (a) ó $DC=\sqrt{BC^2-BD^2}$ (b), y poniendo en vez de estas líneas sus valores, tendrémos $cos=\sqrt{R^2-sen.^2}$ (c).

Como el radio es una cantidad constante que entra indispensablemente en todos los cálculos donde se hace uso de líneas trigonométricas, se toma por unidad, y en este caso las ecuaciones de arriba se convierten en

$$sen.^2+cos.^2=1^2=1 \quad (d),\qquad cos.=\sqrt{1^2-sen.^2}=\sqrt{1-sen.^2}\quad (e).$$

Tambien nos daría el triángulo rectángulo el seno en valores del coseno, pues la ecuacion (a) da

$$BD^2=BC^2-DC^2,\ ó\ BD=\sqrt{BC^2-DC^2},$$

ó poniendo sus valores, será

$$sen.^2=R^2-cos.^2=1-cos.^2\ (f),\ y\ sen.=\sqrt{R^2-cos.^2}=\sqrt{1-cos.^2}\ (g).$$

Para hallar el seno verso, observarémos que $AD=AC-DC$, ó

$$sen.\ vers.=R-cos.=[(e)]\ 1-\sqrt{1-sen.^2}\quad (h).$$

Ahora, como AE es tambien perpendicular á AC, resulta que BD y AE son paralelas, y por lo mismo los triángulos AEC, BDC serán (482) semejantes, y darán $DC:BD::CA:AE=\frac{CA\times BD}{DC}$, ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, y observando que en el último resultado siempre se supondrá el radio igual con la unidad, tendrémos $tang.=\frac{R\times sen.}{cos.}=\frac{1\times sen.}{cos.}=\frac{sen.}{cos.}$ (i); despejando el seno y el coseno en esta ecuacion, tendrémos

$$sen.=tang.\times cos.\quad (k),\qquad cos.=\frac{sen.}{tang.}\quad (l)$$

Los mismos triángulos nos darán $DC:AC::BC:CE=\frac{AC\times BC}{DC}$, ó poniendo los valores será $sec.=\frac{R\times R}{cos.}=\frac{R^2}{cos.}=\frac{1}{cos.}$ (m), de donde tambien $cos.=\frac{1}{sec.}$ (n).

Como el triángulo ACE es rectángulo en A, tenemos tambien $CE^2=CA^2+EA^2$, ó $sec.^2=R^2+tang.^2$ (n'),

lo que da $sec.=\sqrt{1+tang.^2}$ (n'').

Los triángulos BDC, GEC tambien son semejantes por ser ámbos rectángulos, el uno en D y el otro en F, y ademas ser el ángulo $DBC=FCG$ por alternos internos entre las paralelas BD, FC siendo la secante CG; luego nos darán estas dos proporciones

$$BD:DC::CF:GF=\frac{DC\times CF}{BD},\qquad BD:BC::CF:CG=\frac{BC\times CF}{BD},$$

de donde poniendo los valores, será $cot.=\frac{R\times cos.}{sen.}=\frac{1\times cos.}{sen.}=\frac{cos.}{sen.}$ (o)

que da tambien $sen.=\frac{cos.}{cot.}$ (p) y $cos.=cot.\times sen.$ (q);

$cosec.=\frac{R\times R}{sen.}=\frac{R^2}{sen.}=\frac{1^2}{sen.}=\frac{1}{sen.}$ (r), que da tambien $sen.=\frac{1}{cosec.}$ (s)

Si dividimos los dos términos del valor de la *cot.* por *cos.* no se alterará su valor, y nos resultará

$$cot.=\frac{\frac{cos.}{cos.}}{\frac{sen.}{cos.}}=\frac{1}{\frac{sen.}{cos.}}=[(i)]\frac{1}{tang.}\ (t),\ \text{de donde}\ tang.=\frac{1}{cot.}\ (t');$$

valor que tambien hubiéramos sacado de comparar los lados de los triángulos semejantes CGF, CEA; que nos hubieran dado

$$EA:AC::CF:GF=\frac{AC\times CF}{EA};\ ó\ cot.=\frac{R\times R}{tang.}=\frac{1}{tang.}.$$

Del coseno verso casi no se hace uso; mas no obstante pondrémos aquí su espresion que es $FH=FC-CH$; y como $CH=BD$ por lados opuestos de paralelógramo, y BD es el seno, tendrémos por último $cos.\ vers.=R-sen.$ (u).

Si en las espresiones (i), (o), (m) de la tangente, cotangente, y secante, ponemos en vez del coseno su valor $\sqrt{1-sen.^2}$, tendrémos

$$tang.=\frac{sen.}{\sqrt{1-sen.^2}}(i'),\quad cot.=\frac{\sqrt{1-sen.^2}}{sen.}(o'),\ y\ sec.=\frac{1}{\sqrt{1-sen.^2}}(m');$$

donde se ve que tenemos espresadas todas las líneas trigonométricas en valores del radio y del seno, que era lo que intentábamos ejecutar.

634 Si suponemos que el arco AB crece, y se convierte por ejemplo en ABb, como el punto B se irá acercando á F, resulta que su

seno BD crecerá y se habrá convertido en bd, y tambien crecerá su seno verso AD que será ahora Ad; y convirtiéndose el ángulo ACB en ACb que es mayor que ACB, resulta que las dos líneas AE, Cb se encontrarán á mayor distancia; de manera que cuando crece el arco AB, crece tambien su tangente y su secante; por el contrario el coseno es ahora dC, que ha menguado; el coseno verso que es Fh tambien es menor que FH; la cotangente Fg y la cosecante Cg tambien han menguado; luego en general cuando crece el arco, sin llegar á ser un cuadrante, crecen todas sus líneas, y menguan todas sus *colíneas* ó *líneas de su complemento.*

{Esto mismo nos lo dicen las fórmulas; pues la del seno, siendo igual á la mitad de la cuerda del arco duplo, y creciendo la cuerda cuando el arco crece, resulta que debe crecer tambien el seno.

{El coseno siendo igual con $\sqrt{1 - sen.^2}$ debe resultar menor cuando el seno crezca. El seno verso siendo $= 1 - cos.$ debe crecer cuando mengua el coseno, que es cuando crece el arco.

{La tangente siendo $= \dfrac{sen.}{cos.}$ debe crecer cuando crezca el seno ó mengüe el coseno, y como cuando el arco crece se verifican las dos circunstancias, resulta que la tangente crece en razon de lo que crece el seno, y de lo que mengua el coseno.

{La cotangente siendo $= \dfrac{1}{tang.}$ debe menguar cuando el arco crece, porque crece la tangente.

{La secante siendo $= \dfrac{1}{cos.}$ debe crecer, porque mengua el coseno.

{La cosecante siendo $= \dfrac{1}{sen.}$ debe menguar, porque crece su seno.}

635 Si suponemos que el arco ABb continúa creciendo, y que se convierta por ejemplo en el cuadrante ABbF; entónces *de las ocho líneas trigonométricas, tres son iguales con cero, á saber, el coseno, el coseno-verso y la cotangente; tres con el radio, á saber, el seno, el seno verso y la cosecante; y dos infinitas, á saber, la tangente y la secante.*

En efecto, el coseno se reduce á cero, porque entonces habiéndose confundido el estremo del arco con el radio CF no hay distancia ninguna entre ellos, el coseno verso hF lo hace, porque habiéndose reducido el coseno al punto F, no hay distancia entre el y dicho punto; la cotangente lo hace igualmente, porque ha de ser la parte de la tangente geométrica en F, comprendida entre dicho punto y el parage

en que la encuentre el radio que pasa por F; luego para encontrar á dicho radio no necesita salir del punto F, y por lo mismo es cero; el que estas líneas se hayan convertido en cero, nada tiene de particular, porque cuando el arco es igual á un cuadrante, su complemento es cero, y por lo mismo no habiendo arco, tampoco debe haber líneas; solo resulta finita la cosecante, y es porque siendo el radio prolongado, no puede reducirse á cero nada mas que la prolongacion, y por eso en este caso queda igual con el radio.

Siendo el seno entónces la mitad de la cuerda de 180° ó π que es el diámetro, se convierte en el radio; el seno verso es igual con el radio en este caso, porque el seno va á parar al centro; y finalmente la cosecante lo es tambien, por cuanto la cosecante es el radio prolongado hasta que encuentre á la cotangente, que se ha reducido al punto F; luego no se debe prolongar nada dicho radio para encontrar á la cotangente.

Finalmente la secante y tangente son infinitas, porque siendo ABbF un cuadrante, la FC es perpendicular á AC, y siéndolo tambien la AE, resulta que estas dos líneas son paralelas; y como dos paralelas jamas se pueden encontrar, y por la naturaleza de la tangente y secante la una se debe prolongar hasta que encuentre á la otra, resulta que no tendrán fin ó serán infinitas.

{Todo esto nos lo dan á conocer tambien las fórmulas halladas (633); pues en este caso de ser el arco de 90° ó $\frac{1}{2}\pi$ se convierten en

$$sen. = \tfrac{1}{2} cuerda \pi = \tfrac{1}{2} D = R = 1, \; cos. = \sqrt{1 - sen.^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0,$$

$$sen.\ vers. = R - cos. = 1 - 0 = 1, \qquad tang. = \frac{sen.}{cos.} = \tfrac{1}{0} = \infty,$$

$$cot. = \frac{cos.}{sen.} = \tfrac{0}{1} = 0 \text{ ó } cot. = \frac{1}{tang.} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$sec. = \frac{1}{cos.} = \tfrac{1}{0} = \infty, \qquad cosec. = \frac{1}{sen.} = \tfrac{1}{1} = 1. \qquad \}$$

636 Si concebimos que el arco ABbF crece aun y se convierte en AFM, tendrémos que su seno MN, habrá menguado; su coseno MT, su cotangente FV, y su coseno verso FT habrán vuelto á aparecer, teniendo la cotangente y el coseno una posicion inversa á la que tenían ántes; pues ahora se cuentan desde F y T hácia la derecha del radio CF cuando ántes se contaban desde F y H hácia la izquierda de dicho radio. La tangente será ahora la AL, y la secante la CL, y habrán disminuido porque ántes eran infinitas; caen ahora por la parte de abajo porque el radio ó diámetro que pasa por el estremo M no puede encontrar á la tangente en A por la parte su-

perior por ser divergentes: el seno verso AN ha continuado creciendo.

637 Teor. *Las líneas de un arco son las mismas en magnitud que las de su suplemento, escepto el seno verso; pero se diferencian en posicion, escepto el seno, el coseno verso y la cosecante que convienen en un todo á ámbos arcos.*

Dem. En efecto, por la naturaleza del seno que hemos cifrado en su definicion, se echa de ver que MN conviene tanto al arco AFM como al MP que le sirve de suplemento, y guarda la misma posicion por cuanto cae sobre el diámetro AP. El coseno verso FT es en un todo el mismo tambien para ámbos arcos. El coseno del arco AFM es MT y el de MP tambien es MT; luego en magnitud convienen; pero se diferencian en posicion; pues respecto del AFM se cuenta desde M hácia el estremo A del arco, y respecto del MP se cuenta desde M hácia la parte opuesta al otro estremo P del arco. La FV es tambien cotangente del arco AFM, y del PM; pero la posicion respecto de este es opuesta á la que guarda respecto de aquel; esta diferencia se señala en el cálculo por medio del signo—que corresponde al coseno y cotangente del arco obtuso. La tangente PQ y la secante CQ del MP son iguales con las AL y CL del AFM; porque los triángulos CPQ, CAL son iguales (361) por tener AC = CP por radios de un mismo círculo, iguales los ángulos en C por opuestos al vértice, los en A y P por rectos; luego será PQ = AL y CQ = CL; pero se diferencian en posicion, por cuanto las PQ, CQ caen sobre el diámetro AP, y las AL, CL debajo. La cosecante CV permanece igual en magnitud porque es la misma para ámbos arcos, y en posicion porque en ámbos se halla sobre el diámetro que es sobre el que se han empezado á considerar primitivamente.

Por último, el seno verso de AFM es AN, y el de MP es NP que no convienen ni en posicion ni en magnitud.

{*Esc.* Si continuáramos mas adelante, hallaríamos que en el arco igual á la semicircunferencia, el seno y la tangente eran cero; la cotangente y la cosecante infinitas; el coseno, el coseno verso y la secante igual con el radio; y finalmente el seno verso igual con el diámetro; pero siendo esto suficiente para entender la Trigonometria rectilínea, dejarémos las demas consideraciones para mas adelante (*).}

(*) *Sin embargo, para dar á conocer la nueva notacion con que Mr. A. L. Cauchy ha tratado de dar precision á varias fórmulas, harémos la siguiente observacion.*

Un arco no puede tener sino un solo seno, porque este queda de todo punto determinado por su misma definicion (630); pero un mismo seno puede corresponder á varios arcos: así es, por ejemplo, que el seno MN (fig. 262) corresponde tanto al arco AFM como al PM; y aun si consideramos un arco, compuesto de toda la circunferencia AFMPKA y del arco AFM, tendria el mismo seno MN; y en general, la misma línea MN será seno, no solo de los arcos AFM y PM, sinó de cada uno de estos arcos, aumentado en un número cualquiera de circunferencias.

Entendido esto, si a representa una cantidad positiva, ó negativa, Mr. Cauchy emplea la notacion arc. sen. ((a)) ó arc. tang. ((a)) para espresar uno cualquiera de los arcos que tienen la cantidad a por seno ó por tangente; y emplea la notacion. arc. sen. (a), ó arc. tang. (a para espresar aquel arco que tiene el menor valor numérico, entre todos los arcos que tienen el mismo seno ó la misma tangente.

Y en general teniendo presente Mr. Cauchy, que el resultado de una operacion efectuada sobre una cantidad, puede tener muchos valores, diferentes los unos de los otros, emplea para designar indistintamente uno cualquiera de estos valores, la notacion en que la cantidad se halla entre paréntesis dobles, y reserva la notacion ordinaria para el valor mas simple, ó el que parezca merecer mejor ser notado.

638 Por medio de estas líneas se sujetan los arcos y por consiguiente los ángulos de que son medida; pues á cada uno corresponde una línea de diferente magnitud; ademas, estas líneas tienen una relacion determinada con los lados de los triángulos, porque dependiendo todas del seno (633) vamos á demostrar que *en un triángulo los senos de los ángulos son como los lados opuestos.*

Porque sea el triángulo ABC (fig. 263): si le circunscribimos un círculo, resultará que el arco BMA (454) será duplo del que mide al ángulo en C; el ANC duplo del que mide al en B; y el BOC duplo del que mide al en A; luego cada lado del triángulo es la cuerda del arco duplo del que mide al ángulo opuesto, y por lo mismo (632) la mitad de cada lado será el seno de su ángulo opuesto; luego *sen.* $C = \frac{1}{2}BA$; *sen.* $B = \frac{1}{2}AC$; *sen.* $A = \frac{1}{2}BC$, y poniendo en proporcion será *sen.* C : *sen.* B : *sen.* A :: $\frac{1}{2}BA : \frac{1}{2}AC : \frac{1}{2}BC :: BA : CA : BC$; luego *los senos de los ángulos de un triángulo son exáctamente proporcionales con los lados opuestos*; luego las líneas ausiliares que hemos elegido tienen las dos circunstancias indispensables para la resolucion de dichos triángulos.

639 Teor. *Todas las líneas trigonométricas son proporcionales con los radios de los círculos con que están trazados los arcos.*

Dem. En efecto, si suponemos que haciendo centro en C (fig. 264) vértice del ángulo DCG, se trazan con los radios CA, CD dos arcos de círculo AB, DG, y bajamos desde A y D las AP, DE perpendiculares á CG, resultará que serán los senos respectivos de los arcos AB, DG, que tendrán un mismo número de grados por ser ámbos medida del ángulo DCG: las líneas CP, CE serán sus cosenos, PB y EG sus senos versos; y levantando por B y G las perpendiculares BN, GM á la CG serán las tangentes, y CN, CM las secantes. Ahora, los triángulos semejantes CAP,CDE nos darán CD:CA::DE:AP::CE:CP, ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, y acentuando las líneas correspondientes al radio CA, que tambien señalarémos con la R acentuada, tendrémos $R:R'::sen.:sen.'::cos.:cos'$ (a), y los triángulos semejantes CBN, CGM tambien nos darán CG:CB::GM:EN::CM:CN, ó $R:R'::tang.:tang.'::sec.:sec.'$ (b).

{Comparando en la proporcion (a) la diferencia de antecedentes con la de consecuentes respecto de las dos primeras razones, será $R - sen.:R' - sen.'::R:R'$, y como $R - sen. = cos\ vers.$ será $cos.\ vers.:cos.\ vers'::R:R'$; ejecutando lo mismo con la primera y última razon, será $R - cos.:R' - cos.'::R:R'$ ó (633 (h)) $sen.\ vers.:sen.\ vers.'::R:R'$.

Ahora $cot. = \dfrac{R^2}{tang.}$, $cot.' = \dfrac{R'^2}{tang.'}$, luego

$cot.:cot.'::\dfrac{R^2}{tang.}:\dfrac{R'^2}{tang.'}::R^2 \times tang.':R'^2 \times tang.$, y sustituyendo en esta última razon compuesta en vez de la razon componente $tang.':tang.$, su igual (b) $R':R$, será $cot:cot.'::R^2 \times R':R'^2 \times R::R:R'$; del mismo modo $cosec. = \dfrac{R^2}{sen.}$, $cosec.' = \dfrac{R'^2}{sen.'}$, luego

$cosec.:cosec.'::\dfrac{R^2}{sen.}:\dfrac{R'^2}{sen.'}::R^2 \times sen.':R'^2 \times sen::(a)\ R^2 \times R':R'^2 \times R::R:R'$;

y como estas proporciones tienen comun la razon $R:R'$, se deduce que $R:R'::sen.:sen.'::cos.:cos.'::tang.:tang.'::sec.:sec.'::cot.:cot.'::cosec.:cosec.'::sen.\ vers.:sen.\ vers.'::cos.\ vers.:cos.\ vers.'$.

{*Cor.* Luego si respecto de un radio cualquiera calculamos estas líneas para todos los arcos comprendidos en el cuadrante, y ponemos al lado de cada arco el valor de las líneas trigonométricas que le corresponden, estas tablas nos servirán para hallar estas mismas líneas, cuando correspondan á otro radio; y ademas por medio de ellas cuando se nos dé un arco podrémos determinar la magnitud de sus líneas trigonométricas, y tambien dada la magnitud de una línea trigonométrica podrémos hallar el valor del arco á que corresponde.}

Las tablas que se han calculado es suponiendo el radio igual con la unidad; luego si suponemos que L sea la línea trigonométrica correspondiente al radio $R = 1$, y espresamos por L' la línea trigonométrica correspondiente á otro radio cualquiera R', tendrémos en general por la proposicion anterior $1:L::R':L'$, de dondo $L' = R'.L$; que nos dice que *cuando tengamos el valor de una linea trigonométrica cualquiera calculada en el supuesto de ser el radio igual con la unidad, y la deseemos tener cuando el radio tenga un valor cualquiera, no hay mas que multiplicar el valor calculado en el supuesto de ser 1 el radio por el valor del nuevo radio.*}

De la formacion de las tablas de las líneas trigonométricas.

640 No han sido en todos tiempos unas mismas las lineas de que se ha hecho uso para fijar los ángulos; los antiguos se valían para esto de las cuerdas de los arcos. Tolomeo ya hace uso de las cuerdas en la resolucion de sus triángulos, y pone en el primer libro de su Almagesto una tabla en que están calculadas las cuerdas de los arcos de medio en medio grado, considerando al radio dividido en 60 partes, y al diámetro por consiguiente en 120: despues los Árabes usaron de las mitades de las cuerdas de los arcos duplos como se ve ya en las tablas alfonsinas; y á los números que espresaban las partes del radio que correspondian á cada media cuerda, les dieron alegóricamente el nombre de *senos*. Tambien se ven en Copérnico calculadas las mitades de estas cuerdas ó los senos; Regio Montano introdujo las tangentes, á cuyo cánon le llamó *fecundo*; y en las obras de Vieta se hallan calculadas las secantes á que él llama *cánon fecundísimo.* Despues que el Baron de Neper descubrió los logaritmos, se sustituyeron estos á los números de partes del radio que correspondían á cada línea. Los métodos con que estos Geómetras calcularon todas sus tablas eran muy penosos; pero despues de la invencion del cálculo diferencial, se han encontrado muy sencillos como manifestarémos á su tiempo.

{Sin embargo no podemos menos de manifestar como se pueden formar por medio de los conocimientos que tenemos hasta ahora, que eran los que tenían los antiguos, por dos razones: la 1.ª porque de este modo se podrán comparar ámbos métodos, y la 2.ª porque los jóvenes acostumbrados al espíritu geométrico, miran con respecto y timidez unas tablas, cuya formacion ignoran, lo que les abate al manejarlas. Y así vamos á construir en parte estas tablas, para lo cual tenemos suficiente con las tres proposiciones siguientes.

{641 1.ª *Dado el seno de un arco, hallar el seno de su mitad.*

{Sea BD (fig. 265) el seno dado del arco AHB, y tendrémos que tirando la cuerda AEB del arco, su mitad AE será el seno pedido; pero suponiendo el radio igual con la unidad, se tiene

$$AE = \tfrac{1}{2}AB = (488\ \text{esc. } 2.^{\circ})\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2AC \times AD} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2AC(AC - DC)} = \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2 \times 1(1 - cos.\ AHB)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2cos.\ AHB} = \ldots$$

$\tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - sen.^2 AHB}}$; luego si llamamos A al arco AHB, será

$$sen.\tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-sen.\,A^2}}\quad (w)$$

{642 2.ª *Dados los senos y por consiguiente* (633) *los cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de la suma y de la diferencia de dichos arcos.*

{Sean AB = A y BD = B (fig. 266) los arcos que se nos dan: y tendrémos que suponiendo colocado el uno á continuacion del otro, será ABD = AB + BD = $A+B$, y colocando el arco BD desde B hasta M, se tendrá AM = AB − BM = AB − BD = $A-B$; luego si bajamos las perpendiculares DF, MP, será DF = *sen.* (A + B) y MP = *sen.* ($A-B$); para encontrar estos valores, unirémos el punto M con D, tirarémos el radio CB que será perpendicular (436) á MD; bajarémos desde B la BE perpendicular á AC y tirando la HK perpendicular, y la HL paralela á AC, los triángulos BCE, HCK serán semejantes y darán BC : CH :: BE : HK,

ó $R:cos.B::sen.A:KH=\dfrac{sen\,A\times cos.B}{R}$

y BC:CH::CE:CK, ó $R:cos.\,B::cos.\,A:CK=\dfrac{cos.A\times cos.B}{R}$

{Los triángulos DHL, CBE son semejantes por ser DH perpendicular á BC, DL prolongada á CE, y LH tambien prolongada sería perpendicular á BE, por serlo á su paralela DF; luego darán

CB:DH::CE:DL ó $R:sen.B::cos:A:DL=\dfrac{sen\,B\times cos.A}{R}$

CB:DH::BE:LH, ó $R:\ sen.\,B::sen.\,A:LH=\dfrac{sen.A\times sen.B}{R}$;

pero $DF=LF+DL=HK+DL=\dfrac{sen.A\times cos.B}{R}+\dfrac{sen.B\times cos.A}{R}$,

y como DF = *sen.* (A + B), se tendrá

$$sen.\,(A+B)=\frac{sen\,A\times cos.B+sen.B\times cos\,A}{R}\quad (u)$$

y $cos.\,(A+B)=cos.\,ABD=CF=CK-KF=CK-HL=\ldots\ldots$

$$\frac{cos.A\times cos.B}{R}-\frac{sen.A\times sen.B.}{R}=\frac{cos.A\times cos.B-sen\,A\times sen.B}{R}\quad (x).$$

{Para hallar el seno MP y el coseno PC de la diferencia de estos

arcos, tirarémos desde M la MN paralela á AC, y tendrémos que los triángulos MHN y DLH son (361) iguales, por ser DH = MH, el ángulo DHL = NMH y LDH = NHM por correspondientes; luego MN = HL, HN = DL; por lo que *sen.*(A − B) = *sen.*(AMB − BD) = *sen.* (AMB − BM) = *sen.* AM = MP = NK = HK − HN = HK − DL =

$$\frac{sen.A\times cos.B}{R}-\frac{sen.B\times cos.A}{R}=\frac{sen.A\times cos.B-sen.B\times cos.A}{R}\quad (y),$$

y $cos.(A-B)=cos.AM=CP=CK+PK=CK+MN=CK+HL=$

$$\frac{cos.A\times cos.B}{R}+\frac{sen.A\times sen.B}{R}=\frac{cos.A\times cos.B+sen.A\times sen.B}{R}\quad (z).$$

{643 Cor. De aquí se deduce que *la suma de los senos de dos arcos es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de dichos arcos es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

{Porque si suponemos el radio igual con la unidad y sumamos las ecuaciones (*u*), (*y*) tendrémos

$$sen.(A+B)+sen.(A-B)=2sen.A.cos.B;$$

y si las restamos, tendrémos

$$sen.(A+B)-sen.(A-B)=2cos.A.sen.B;$$

que haciendo $A+B=A'$ y $A-B=B'$, nos resultará (§ 229)

$$A=\frac{A'+B'}{2},\quad B=\frac{A'-B'}{2};$$

ejecutando estas sustituciones, tendrémos

$$sen.A'+sen.B'=2sen.\frac{A'+B'}{2}\times cos.\frac{A'-B'}{2}$$

$$sen.\,A'-sen.B'=2cos.\frac{A'+B'}{2}\times sen.\frac{A'-B'}{2},$$

que dividida la primera por la segunda, nos dará

$$\frac{sen.A'+sen.B'}{sen.A'-sen.B'}=\frac{2\,sen.\dfrac{A'+B'}{2}\times cos.\dfrac{A'-B'}{2}}{2cos.\dfrac{A'+B'}{2}\times sen.\dfrac{A'-B'}{2}}=\frac{sen.\dfrac{A'+B'}{2}}{cos.\dfrac{A'+B'}{2}}\times$$

$$\frac{cos.\dfrac{A'-B'}{2}}{sen.\dfrac{A'-B'}{2}}=[633,\ (i),\ (o)]\ tang.\frac{A'+B'}{2}\times cot.\frac{A'-B'}{2}=$$

$$(t)\ tang.\frac{A'+B'}{2}\times\frac{1}{tang.\frac{A'-B'}{2}}=\frac{tang.\frac{A'+B'}{2}}{tang.\frac{A'-B'}{2}}$$

que, puesta en proporcion, da

$$sen.A'+sen.B':sen.A'-sen.B'::tang.\frac{A'+B'}{2}:tang.\frac{A'-B'}{2},$$ que traducida, manifiesta L. Q. D. D.

{644 3.ª *Dado el seno y por consiguiente el coseno de un arco, hallar el seno y coseno del arco duplo.*

{Para esto, harémos B = A en las fórmulas de la suma y se tendrá

$$Sen2A=\frac{sen.A\times cos.A+sen.A\times cos.A}{R}=\frac{2sen.A\times cos.A}{R}\ \text{(aa)},$$

y $$Cos.\ 2A=\frac{cos.A\times cos.A.-sen.A\times sen.A}{R}=\frac{cos.A^2-sen.A^2}{R}\ \text{(bb)}.$$

{Haciendo ahora, 2A=A', estas fórmulas se nos convertirán en

$$sen.A'=\frac{2sen.\frac{1}{2}A'\times cos.\frac{1}{2}A'}{R}\text{(aa')},\quad cos.\ A'=\frac{cos.^2\frac{1}{2}A'-sen.^2\frac{1}{2}A'}{R}\text{(bb')}$$

{645 Ahora, para manifestar como con el ausilio de estas proposiciones se pueden formar las tablas, observarémos en primer lugar que siendo el seno de $30°=\frac{1}{2}R$ (632 cor. 2.°), ó $\frac{1}{2}$ haciendo el radio igual con la unidad, podrémos hallar por medio de la fórmula (w § 641) el seno de 15°, y luego el de 7° y 30', y continuando del mismo modo hallaríamos al cabo de la 11.ª operacion que $sen.0°+0'+52''+44'''+3^{iv}+45^{v}$ = (reduciéndolo todo á quebrado decimal de minuto) $sen.\ 0',87890625=0,000255663461867$ partes del radio, supuesto igual con la unidad.

{Los arcos no son proporcionales con los senos, porque si esto se verificase á un arco triplo corresponderia un seno triplo y por lo mismo siendo el seno de $30°=\frac{1}{2}$ el de 90° deberia ser $\frac{3}{2}$ cuando solo es igual con $1=\frac{2}{2}$ (*); pero no obstante *cuando los arcos son muy*

pequeños podemos suponerlos proporcionales con los senos. Para convencernos de esto, observarémos que siendo el seno del arco de $0',87890625=0,000255663461867$, la longitud del mismo arco, en el supuesto de ser el radio $=1$, será

$$\text{arco de}\ \frac{30°}{2^{11}}=\frac{6\times \text{arco de } 30°}{6\times 2^{11}}=\frac{\text{arco de } 180°}{6\times 2^{11}}=\frac{3,14159265358979324}{12288}=0,000255663464676;$$ donde vemos que convienen tanto el arco como el seno en los 11 primeros guarismos decimales; luego para hallar los senos con diez guarismos exactos, podrémos suponerlos proporcionales con los arcos hasta los de un arco cuádruplo de este, pues multiplicando tanto el seno como el arco por 4, aun convienen en los diez primeros guarismos; luego podrémos hallar el seno de 1' por esta proporcion: $0',87890625:1'::sen.\ 0',87890625=0,000255663461867:sen.\ 1'=\frac{0,000255663461867}{0',87890625}=0,000290888205$; duplicándolo tendrémos $sen.\ 2'=0,00058177641$; y tomando la sesta parte nos vendrá $sen.\ 10''=0,0000484813675$; duplicando y triplicando este valor tendríamos el de 20'', de 30'' &c.

{Ahora podríamos calcular el coseno, y por medio de la fórmula (aa § 644) hallaríamos el de 4', y luego el de 8' &c y por medio de las ((u), (y), § 642), las de la suma y diferencia de estos arcos. Teniendo ya los senos, podrémos determinar por su medio la demas lí-

---

(*) La relacion de los arcos es mayor que la de sus cuerdas y que la de sus senos.

En efecto, si suponemos que el arco AEC sea igual con el CB (fig. 267) y que dichos dos arcos juntos valgan menos que una semicircunferencia, el ángulo ACB será obtuso y en virtud de lo demostrado (489), *será* $AB^2=AC^2+CB^2+2CB\times CD$ *y como* $CA=BC$ *por el supuesto y* $CD<CA$ *porque CD es cateto y CA hipotenusa del triángulo CDA, tendrémos*

$$AB^2=2AC^2+2CD\times AC<2AC^2+2AC^2=4AC^2,$$

y estrayendo la raiz cuadrada, será $AB<2AC$, *lo que da* $\frac{AB}{AC}<2$.

Y como la relacion de los arcos ACB y AEC es $\frac{ACB}{AEC}=\frac{2AEC}{AEC}=2$,

será $\frac{ACB}{AEC}>\frac{BA}{AC}$, *ó* $ACB:AEC>BA:AC$, *que nos dice que la relacion* de los arcos es mayor que la de sus cuerdas.

Y dividiendo por 2 esto desproporcion, tendrémos

$\frac{ACB}{2}:\frac{AEC}{2}>\frac{BA}{2}:\frac{AC}{2}::sen.\ \frac{1}{2}ACB:sen.\ \frac{1}{2}AEC$, *que nos dice que* la relacion de los arcos es mayor que la de los senos.

neas trigonométricas, de manera que disponiéndolas luego convenientemente al lado de sus arcos respectivos, tendríamos las tablas que se piden, y que tienen el nombre de tablas *naturales*, porque están las líneas trigonométricas espresadas en partes del radio.

{He aquí una

Tabla de los senos, tangentes y secantes para cada grado del cuadrante.

Grados	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*	*Cotangente*	*Secante*	*Cosecante*	*Grados*
1	0174524	9998477	0174551	57.289962	1.0001523	57.298688	89
2	0348995	9993908	0349208	28.636253	1.0006095	28.653708	88
3	0523360	9986295	0524078	19.081137	1.0013723	19.107323	87
4	0697565	9975641	0699268	14.300666	1.0024419	14.335587	86
5	0871557	9961947	0874887	11.430052	1.0038198	11.473713	85
6	1045285	9945219	1051042	9.5143645	1.0055083	9.5667722	84
7	1218693	9925462	1227846	8.1443494	1.0075098	8.2055090	83
8	1391731	9902681	1405408	7.1153697	1.0098276	7.1852965	82
9	1564345	9876883	1583844	6.3137515	1.0124651	6.3924532	81
10	1736482	9848078	1763270	5.6712818	1.0154266	5.7587705	80
11	1908090	9816272	1943803	5.1445540	1 0187167	5.2408431	79
12	2079117	9781476	2125566	4.7046301	1.0223406	4.8097343	78
13	2249511	9743701	2308682	4.3314759	1.0263041	4.4454115	77
14	2419219	9702957	2493280	4.0107809	1.0306136	4.1335655	76
15	2588190	9659258	2679492	3.7320508	1.0352762	3.8637033	75
16	2756374	9612617	2867454	3.4874144	1.0402994	3.6279553	74
17	2923717	9563048	3057307	3.2708526	1.0456918	3.4203036	73
18	3090170	9510565	3249197	3.0776835	1.0514622	3.2360680	72
19	3255682	9455186	3443276	2.9042109	1.0576207	3.0715535	71
20	3420201	9396926	3639702	2.7474774	1.0641778	2.9238044	70
21	3583679	9335804	3838640	2.6050891	1.0711450	2.7904281	69
22	3746066	9271839	4040262	2.4750869	1.0785347	2.6694672	68
23	3907311	9205049	4244748	2.3558524	1.0863604	2.5593047	67
24	4067366	9135455	4452287	2.2460368	1.0946363	2.4585933	66
25	4226183	9063078	4663077	2.1445069	1.1033779	2.3662016	65

26	4383711	8987940	4877326	2.0503038	1.1126019	2.2811720	64
27	4539905	8910065	5095254	1.9626105	1.1223262	2.2026893	63
28	4694716	8829476	5317094	1.8807265	1.1325701	2.1300545	62
29	4848096	8746197	5543091	1.8040478	1.1433541	2.0626653	61
30	5000000	8660254	5773503	1.7320508	1.1547005	2.0000000	60
31	5150381	8571673	6008606	1.6642795	1.1666334	1.9416040	59
32	5299193	8480481	6248694	1.6003345	1.1791784	1.8870799	58
33	5446390	8386706	6494076	1.5398619	1.1923633	1.8360785	57
34	5591929	8290376	6745085	1.4825610	1.2062179	1.7882916	56
35	5735764	8191520	7002075	1.4281480	1.2207746	1.7434468	55
36	5877853	8090170	7265425	1.3763819	1.2360680	1.7013016	54
37	6018150	7986355	7535541	1.3270448	1.2521357	1.6616401	53
38	6156615	7880108	7812856	1.2799416	1.2690182	1.6242692	52
39	6293204	7771460	8097840	1.2348972	1.2867596	1.5890157	51
40	6427876	7660444	8390996	1.1917536	1.3054073	1.5557238	50
41	6560590	7547096	8692867	1.1503684	1.3250130	1.5242531	49
42	6691306	7431448	9004040	1.1106125	1.3456327	1.4944765	48
43	6819984	7313537	9325151	1.0723687	1.3673275	1.4662792	47
44	6946584	7193398	9656888	1.0355303	1.3901686	1.4395565	46
45	7071068	7071068	1000000	1.0000000	1.4142136	1.4142136	45
	Coseno	*Seno*	*Cotangente*	*Tangente*	*Cosecante*	*Secante*	

Como la circunferencia del círculo se ha dividido en estos últimos tiempos en 400 grados, corresponden 100 al cuadrante; y no creemos inoportuno el poner aquí la adjunta

Tabla de los senos para cada grado de la division centesimal del cuadrante.

Arcos.	*Senos.*	*Arcos.*	*Senos.*	*Arcos.*	*Senos.*	*Arcos.*	*Senos.*	*Arcos.*	*Senos.*
1	0157073	21	3239174	41	6004202	61	8181497	81	9557930
2	0314108	22	3387379	42	6129071	62	8270806	82	9602937
3	0471065	23	3534748	43	6252427	63	8358074	83	9645574
4	0627905	24	3681246	44	6374240	64	8443279	84	9685832
5	0784591	25	3826834	45	6494480	65	8526402	85	9723699
6	0941083	26	3971479	46	6613119	66	8607420	86	9759168
7	1097343	27	4115144	47	6730125	67	8686315	87	9792228
8	1253332	28	4257793	48	6845471	68	8763067	88	9822873
9	1409012	29	4399392	49	6959128	69	8837656	89	9851093
10	1564345	30	4539905	50	7071068	70	8910065	90	9876883
11	1719291	31	4679298	51	7181263	71	8980276	91	9900233
12	1873813	32	4817537	52	7289687	72	9048271	92	9921147
13	2027873	33	4954587	53	7396311	73	9114033	93	9939617
14	2181432	34	5090414	54	7501111	74	9177546	94	9955620
15	2334454	35	5224986	55	7604060	75	9238795	95	9969177
16	2486899	36	5358268	56	7705132	76	9297765	96	9980269
17	2638730	37	5490228	57	7804304	77	9354440	97	9988896
18	2789911	38	5620834	58	7901550	78	9408808	98	9995066
19	2940403	39	5750053	59	7996847	79	9460854	99	9998760
20	3090170	40	5877853	60	8090170	80	9510565	100	1000000

}

646 Como los senos de los ángulos son proporcionales con los lados opuestos de los triángulos (638), la resolucion de estos se ejecuta por medio de proporciones, en las que para sacar un cuarto término siempre se necesita hacer una multiplicacion y una division; lo cual es muy engorroso cuando los términos tienen muchos guarismos, y por lo mismo ántes que el Baron de Neper descubriese los logaritmos, los cálculos trigonométricos eran muy complicados. Pero despues de esta maravillosa invencion, calculó este sabio los logaritmos de las líneas trigonométricas, y dispuso unas tablas en que al lado de cada arco está calculado el logaritmo de las partes del radio que corresponden

á su línea trigonométrica, y á estas tablas que son las que en el dia se manejan, se les ha dado el nombre de *tablas trigonométricas artificiales*.

{Con el fin de que los principiantes entiendan bien su construccion, no hay cosa mas á propósito que hacerles encontrar por sí mismos varios de los valores que en ellas se contienen. Por lo que hallarémos en primer lugar el seno artificial de $30°$; para lo cual observarémos que su seno natural siendo $= \frac{1}{2} = 0,5$, el seno artificial será Log. $\frac{1}{2} =$ Log. $0,5 = (\S\ 309)\ 9,6989700$, luego deberémos tener en las tablas *log. sen.* $30° = 9,6989700$ como en efecto se verifica.

{Si queremos hallar, por ejemplo, el seno de $2'$, buscarémos el logaritmo de $0,000581776 41$, que en virtud de lo dicho (309) hallarémos ser $6,7647561$ que es el mismo valor que se halla en las tablas para el logaritmo del seno de $2'$. Del mismo modo se hallarían los demas.}

Ahora solo falta el que manifestemos la disposicion de las tablas, refiriéndonos siempre á las de nuestro antecesor don Tadeo Lope, ínterin publicamos otras mas completas.

Lo primero que observarémos es que solo se necesitan los valores de las líneas hasta $45°$; lo cual está fundado en que siendo una colínea igual á la línea de su complemento, la colínea del arco A será igual á la línea de $(\frac{1}{2}\pi - A)$; por esta causa se presenta una llana que fuera de todo tiene por la parte superior el número de grados empezando por cero, y que está dividida en once columnas, escepto la primera llana que solo está dividida en nueve, y desde la segunda hasta la octava se hallan en diez.

La primera es angostita y tiene en la parte superior la señal de minutos, porque de arriba abajo se cuentan en ella los minutos; la segunda tiene la señal de segundos, porque se cuentan en ella, y se ve que van de diez en diez, porque las tablas están calculadas de diez en diez segundos; la tercera tiene la palabra *log. sen.* porque en ella están los logaritmos de los senos de los arcos que espresan los grados, minutos y segundos que hay superiores al renglon correspondiente; la cuarta está señalada con *dif.* (en la primera llana falta esta columna), qne indica diferencia, porque cada número que se halla en ella espresa la diferencia entre los logaritmos de los senos entre que se halla colocado; la quinta contiene los logaritmos de los cosenos como indica *log. cos.*; la sesta señalada con *d* (esta columna falta en las ocho primeras llanas) contiene las diferencias de dos cosenos consecutivos; la séptima contiene los logaritmos de las tangentes como indica *log. tang.*; la octava que está señalada con *dif. com.* espresa la diferencia de dos tangentes consecutivas, y dice que la diferencia es *comun*, porque la misma diferencia lo es tambien de los logaritmos de las cotangentes que se hallan en la novena columna señalada con *log. cot.*; la décima tiene tambien la señal de segundos, pero se debe empezar á contar por abajo; y la undécima, la de minutos que tambien se deben contar por abajo.

{En estas tablas no se hallan los senos versos, cosenos versos ni cosecantes, porque estas líneas se deducen inmediatamente de los senos y cosenos por las fórmulas del (§ 633), y porque por otra parte no son indispensables; sin embargo, como solo es el seno verso el que no es comun para un arco y para el que le sirve de suplemento, D. José Mendoza y Rios, capitan de navío de S. M. C. ha calculado los logaritmos de los senos versos, cosenos versos y susenos versos en sus apreciables tablas para el uso de la navegacion: en las cuales llama *suseno verso* de un ángulo al seno verso de su suplemento; y dice que ha añadido esto, porque de su uso en los cálculos trigonométricos podrán sacarse muchas utilidades, cuya especificacion se reserva este Sábio Español para otra ocasion.}

Las tablas trigonométricas tienen por la parte de abajo fuera del cuadro un número que es el complemento del que hay fuera por arriba, menos una unidad; y hay en cada columna por abajo tambien su letrero, pero poniendo *coseno* donde corresponde *seno* por arriba, *cotangente* donde arriba *tangente*, &c; lo cual está fundado en que una colínea no es mas que la línea de su complemento.

647 Hasta aquí hemos considerado que el radio con que se han formado las tablas era igual con la unidad, y como en este caso los valores de los senos, cosenos, tangentes de menos de 45° y cotangentes de mas de 45°, son quebrados, sus logaritmos son defectivos y para evitarlos se han puesto los complementos logarítmicos, por cuya causa en los resultados de los cálculos se deberá tener cuidado con rebajar la decena por causa del complemento; mas para evitar esto se supone el radio igual con diez mil millones de partes, cuyo logaritmo es 10,0000000, y considerando las tablas formadas bajo este aspecto solo hay que aumentar una decena al logaritmo de las tangentes de mas de 45°, y á los de las cotangentes de menos de 45°. Siendo esta consideracion mas sencilla en la práctica, la preferirémos siempre.

Dos usos tienen estas tablas: 1.° Hallar en ellas el logaritmo de una línea trigonométrica de un arco dado; y 2.° dado el logaritmo de una línea, determinar el número de grados, minutos, &c que corresponden á su arco.

Para lo primero, se debe advertir en primer lugar si el arco que se dá, llega ó pasa de 45°; *si no llega á 45° se deberá buscar el número de grados por la parte de arriba, despues en la columna de los minutos se buscarán los que tenga el arco propuesto, y luego en la columna de los segundos se buscarán las decenas que hay en el arco propuesto inferiores al número de minutos hallado, y se verá que logaritmo hay enfrente de es-*

tas decenas de segundo en la columna de la línea trigonométrica que se busca; despues si el arco tiene ademas unidades de segundo, se verá la diferencia que tenga á su lado este logaritmo, se multiplicará por las unidades de segundo que haya, y el producto despues de separado un guarismo, se deberá añadir al logaritmo hallado si es línea, y si es colínea se deberá restar; si ademas de unidades de segundo hubiese décimas, y aun centésimas &c, se multiplicará la diferencia de las tablas por las unidades y decimales de segundo, en cuyo producto se separará un guarismo mas de los que correspondan por las decimales que haya.

Si el número de grados pasa de 45 se deberá buscar por la parte de abajo, y entónces los minutos y segundos se cuentan hácia arriba en las columnas de la derecha. Propongámonos, por ejemplo, hallar el logaritmo de la tangente de 27° 43′ 57″, 3. Para esto buscarémos primero el logaritmo que en la columna de la tangente en el cuadro donde dice por arriba 27, se halla enfrente del 50″ que está inferior al 43′, y se hallará que es *log. tang.* 27° 43′ 50″=... 9,7207315

A esto añadiré el producto de 7″, 3 por 512 diferencia de las tablas, que es.. 374

y tendré *log. tang.* 27° 43′ 57″, 3=.......................... 9,7207689

Sea ahora el logaritmo que se quiere buscar, el correspondiente al coseno de 53°37′26″,35. Primero buscaré el logaritmo coseno 53°37″20″ contando por abajo, y en las columnas de la derecha; y tengo *log. cos.* 53° 37′ 20″=.. 9,7731328

De esto restaré el producto de 6″, 35 por 286 diferencia de las tablas, que dá.. 182

y tendrémos *log. cos.* 53°37′26″,35=...................... 9,7731146

648 Para hallar el valor del arco cuando se da el logaritmo de una línea trigonométrica, se procederá del modo siguiente: *se busca en la columna de la línea trigonométrica que se dá, tanto por arriba como por abajo, la característica del logaritmo conocido; despues se van buscando los primeros guarismos, y asi se continúa hasta que se halle el logaritmo exáctamente ó se encuentre entre dos; si se halla exáctamente no hay mas qne ver el número de grados que hay fuera del cuadro arriba ó abajo, segun en donde esté el nombre de la línea que se conoce; despues si es por arriba se tomarán en las columnas de los minutos y segundos de la izquierda, los que haya hasta la decena de segundos de enfrente del logaritmo hallado; y si es por abajo, se tomarán los minutos y segundos en las columnas de la derecha.*

Si no se encuentra exactamente *se restará del propuesto el menor de los dos entre que se halle, y esta diferencia despues de añadido un cero se dividirá por la diferencia de las tablas, y el cociente será el número de unidades y decimales de segundo que se han de añadir á los grados, minutos y decenas de segundos hallados antes, si el arco que se busca cor-*

responde á línea, y se deberá restar si corresponde á colínea.

{Propongámonos, por ejemplo, hallar el arco en que el logaritmo de su seno es 9,9339523.

{Lo primero que harémos es buscar en la columna de los senos entre cuales se halla. y encontramos que se halla en la graduacion de abajo entre el del seno 59° 11′ 40″ y el de 59° 11′ 50″; por

lo que del propuesto..	9,9339523
restaré el *log. sen.* 59° 11′ 40″=......................................	9,9339478
á la diferencia...	0045

le añadiré un cero y la dividiré por la diferencia que se halla en las tablas que es 125, y el cociente $\frac{450}{125}=3'',6$, me dará los segundos y decimales de segundo; por lo cual infiero que 9,9339523 es el logaritmo del seno de 59° 11′ 43″,6.

{Supongamos ahora que se quiera hallar el arco cuya cotangente tiene por logaritmo 10,4753632. Lo primero que harémos será buscar en la columna de las cotangentes, entre cuales se halla este logaritmo sin atender á la decena, porque no se halla en las tablas, y encontramos contando en la graduacion de arriba que se halla entre las cotangentes de 18° 30′ 10″ y 18° 30′ 20″, siendo el menor el de este último.

Por consiguiente de *log.* propuesto..............................	10,4753632
restaré *log. cot.* 18° 30′ 20″=..	10,4753402
A la resta..	230

le añadiré un cero, y dividiéndola por 700, que es la diferencia de las tablas, resulta $\frac{2300}{700}=\frac{23}{7}=3{,}2859=3''$, 3 que serán los segundos y décimas que se habrán de restar de 18° 30′ 20″ para tener el arco correspondiente al log. de la cotangente dada, y se tendrá por último

10,4753632=*log. cot.* 18°30′16″,7

{Estas reglas hasta hallar las decenas de segundo no tienen nada de particular, porque dependen de la disposicion que se ha dado á las tablas; y así solo manifestarémos por qué se ha de ejecutar lo demas: y es porque la diferencia que se halla en las tablas es la que proviene de 10″; luego para hallar la que proviene de otro número cualquiera de segundos, formarémos esta proporcion 10″ : *n* número de segundos que se dan::D, diferencia de tablas : $d=\frac{n\times D}{10}$

{Ahora, si el arco dado corresponde á una línea, como á mayor

arco corresponde mayor línea, y por consiguiente mayor logaritmo, resulta que se deberá añadir la diferencia *d* al logaritmo correspondiente al menor arco. Por el contrario, si el arco es de colínea como al mayor arco corresponde menor colínea y por consiguiente menor logaritmo, se deberá restar dicha diferencia del logaritmo correspondiente al arco menor. Y como esta diferencia *d* viene espresada por $\frac{n\times D}{10}$ que quiere decir que el producto del número de segundos por la diferencia tabular, se ha de dividir por 10, lo que se consigue corriendo la coma un lugar hácia la izquierda, resulta demostrada la regla en los mismos términos que se enunció.

{Permutando esta proporcion, será $D{:}d{::}10''{:}n=\frac{d\times 10''}{D}$; luego la diferencia entre el menor de los que se hallan en la tabla y el propuesto, se deberá multiplicar por 10, lo que se consigue añadiendole un cero, y despues se deberá dividir el producto por la diferencia que se halla en las tablas. Este número de segundos se deberá añadir si el arco que se pide corresponde á línea; pues á mayor logaritmo corresponderá mayor línea, y por consiguiente mayor arco; y se deberá restar si corresponde á colínea; pues á mayor logaritmo corresponde menor colínea, y de consiguiente menor arco.}

De la resolucion de los triángulos rectángulos.

649 Para la resolucion de los triángulos rectángulos solo se necesitan dos proporciones generales que se conocen con el nombre de *analogías*.

1.ª *El radio de las tablas es al seno de uno de los ángulos agudos como la hipotenusa es al lado opuesto á dicho ángulo agudo.*

En efecto, sea CDE (fig. 264) un triángulo rectángulo cualquiera: si suponemos que con una parte CA igual con el radio de las tablas se traza el arco AB, resultará que AP será el seno que se halle en las tablas, y CP su coseno; y como los triángulos CAP, CDE son semejantes por ser las AP, DE paralelas, tendrémos CA:AP::CD:DE, ó R. *de* T: *sen. áng. ág.* :: *hip.*: *lad. opuesto.*

Si comparámos con el lado CP, tendrémos CA:CP::CD:CE, ó R *de* T: *cos. áng. ag.* :: *hip.*: *lad. ady. á dicho áng. agudo* por lo que esta primera analogía se enuncia tambien: *el radio de las tablas es al coseno de uno de los ángulos agudos como la hipotenusa es al lado adyacente á dicho ángulo agudo.*

{Como el radio de las tablas se considera igual con la unidad, resulta, que, hallando el cuarto término en las dos proporciones de arriba, será DE=CD×AP=*Hip.*×*sen. áng. op. á* DE, y CE=CD×CP=*Hip.*×*cos. áng. ady. á* CE, cuyas espresiones nos manifiestan que *en vez de un ca-*

teto de un triángulo rectángulo se puede siempre sustituir la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto, ó por el coseno del ángulo adyacente, tomados en las tablas.}

650 La 2.ª analogía se enuncia: *el radio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo agudo es al cateto opuesto.*

En efecto, sea el triángulo CDE (fig. 264) rectángulo en E: si suponemos que con el radio CB= al radio de las tablas, se traza un arco BA, y levantamos la BN tangente en B, que será por consiguiente perpendicular á CE, los triángulos CBN, CDE serán semejantes y darán CB=R. *de* T: BN=*tang. áng. ag.* :: CE=*cat. adyacente á dicho áng. ag.* : DE= *cateto opuesto*; y como la tangente de un ángulo es la misma que la contangente de su complemento, y en un triángulo rectángulo un ángulo agudo es complemento del otro, resulta que *tang. áng.* C será lo mismo que *cotang. áng.* CNB=CDE; por lo que esta analogía, tambien se puede enunciar así: CB=R. *de* T: BN =*cot. áng. ag.* :: CE = *cat. op. á dicho áng.* : DE = *cateto adyacente.*

{De donde resulta, tomando el radio por unidad, DE=CE×BN, que quiere decir que *en todo triángulo rectángulo un cateto es igual ála tangente trigonométrica de su ángulo opuesto multiplicada por el otro cateto.*}

651 En la resolucion de los triángulos rectángulos pueden ocurrir dos casos, á saber: el que se dé un lado, y el que se den dos; y cada uno de estos se divide en otros dos, á saber, cuando uno de los lados dados es la hipotenusa, y cuando no lo es; de donde resultan cuatro casos: 1.° cuando se dá la hipotenusa y un ángulo; 2.° cuando un cateto y un ángulo; 3.° cuando la hipotenusa y un cateto; y 4.° cuando se dan los dos catetos; todos ellos se resuelven con el ausilio de estas analogías, advirtiendo que se usa de la 1.ª siempre que se dé ó se busque la hipotenusa, y de la 2.ª cuando no.

{Propongámonos, por ejemplo, resolver el triángulo ABC (fig. 268) rectángulo en C, en que se conoce la hipotenusa AB que es de 258 varas, y el ángulo A de 30° 57′ y 5″, 7; para esto se escriben los datos en el mismo triángulo del modo que se ve en la figura; no se especifica el ángulo en C, porque se dá conocido que ha de ser recto por la naturaleza del triángulo.

{Para hallar el lado BC opuesto al ángulo dado A, usarémos de la primera analogía diciendo, R:*sen.*30°57′5″,7::258:BC que hallarémos por logaritmos del modo siguiente

$$\text{Log. BC} = \left\{ \begin{array}{lr} \textit{log sen.}\ 30^\circ 57' 0'' \ldots\ldots = & 9{,}7112080 \\ \textit{part. corresp. á}\ 5'',7.\ .\ = & 200 \\ \textit{log.}\ 258.\ \ldots\ldots\ldots\ldots = & 2{,}4116197 \\ \textit{compl. log. R}.\ \ldots\ldots = & 0, \\ \hline & +2{,}1228477 \end{array} \right\} = \text{L. } 132{,}693.$$

{Despues para hallar el otro lado AC nos podríamos valer de la misma analogía, despues de hallar el ángulo en B=90°−30°57′5″,7=59°2′54″,3, pero es mas elegante el encontrar lo que se busca directamente por lo que se dá; y así usarémos de la misma analogía, pero transformada de este modo *R:cos.*30°57′5″,7::AB=258 varas.:AC, que hallarémos por logaritmos del modo siguiente

$$\textit{Log.}\ \text{AC} = \left\{ \begin{array}{lr} \textit{log. cos.}\ 30^\circ 57' 0'' = \ldots\ldots & 9{,}9332931 \\ \text{parte correspondiente á } 5'',7, & \\ \text{que se deberá restar por} & \\ \text{ir disminuyendo los cosenos} & \\ \text{al crecer el arco} = \ldots\ldots & -72 \\ \textit{log.}\ 258 = \ldots\ldots\ldots\ldots & 2{,}4116197 \\ \textit{compl. log.}\ \text{R} = \ldots\ldots & 0, \\ \hline & +2{,}3449056 \end{array} \right\} = \text{L. } 221{,}26.$$

{952 Aunque la aplicacion de estas analogías no presenta dificultad, no obstante en la práctica suele ofrecer alguna, particularmente si no se tiene costumbre de resolver cuestiones de esta especie; porque en este caso es necesario repasarlas. Con la mira de dar á los principiantes todos los ausilios posibles, les vamos á poner aquí una tabla en que están calculadas las partes de cada triángulo, de tal modo que conservando únicamente en la memoria el manejo de las tablas no puedan equivocarse.

{Para esto, supondrémos que el triángulo sea el ABC (fig. 269) rectángulo en C, en el cual señalarémos cado ángulo constantemente por la letra mayúscula que hay en su vértice, y el lado opuesto por la minúscula correspondiente; de manera que los ángulos los supondrémos A, B, C, y los lados *a*, *b*, *c*; y la solucion general de los diferentes casos dará la siguiente

TABLA

que contiene la resolucion de los cinco casos de un triángulo rectilíneo, rectángulo en C.

Casos.	Datos.	Partes buscadas	Valores de las partes buscadas en las que se dan.	Determinacion por logaritmos.
I	C, A, c	B, a, b	$B=90^\circ-A; a=c\times \text{sen.}A, b=c\times\cos.A$....	$\log. a=\log.c+\log.\text{sen.}A$; $\log.b=\log.c+\log.\cos.A$
II	C, A, b	B, a, c	$B=90^\circ-A; a=b\times\text{tang.}A; c=\frac{b}{\cos. A}$..	$\log.a=\log.b+\log.\text{tang.}A$; $\log.c=\log.b+\text{compl.}\log.\cos.A$
III	C, A, a	B, b, c	$B=90^\circ-A; b=a\times\cot.A; c=\frac{a}{\text{sen.}A}$......	$\log.b=\log.a+\log.\cot.A$; $\log.c=\log.a+\text{compl.}\log.\text{sen.}A$
IV	C, c, a	A, B, b	$\text{sen.}A=\frac{a}{c}$, $\cos.B=\frac{a}{c}$; $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$	$\log.\text{sen.}A=\log.a+\text{compl.}\log.c$; $\log.\cos B=\log.a+\text{compl.}\log.c$; $\log.b=\frac{1}{2}[\log.(c+a)+\log.(c-a)]$
V	C, a, b	A, B, c	$\text{tang.}A=\frac{a}{b}$; $\text{tang.}B=\frac{b}{a}$; $c=\sqrt{a^2+b^2}$	$\log.\text{tang.}A=\log.a+\text{compl.}\log.b$; $\log.\text{tang.}B=\log.b+\text{compl.}\log.a$; $\log.c=\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)$

{En ella se ve que el 2.° y 3er caso corresponden al 2.° enunciado (651): aquí los hemos separado para distinguir cuando el lado dado es el opuesto ó el adyacente al ángulo que se conoce.

{Para entender el manejo de esta tabla, resolverémos por medio de ella un caso, teniendo presente que si resulta alguna decena en la característica de los logaritmos que obtengamos, se debe borrar pues provendrá del complemento; y sea por ejemplo el de un triángulo en que se conozca un cateto de 827 varas, y el ángulo adyacente de 37°45′16″,34; para esto vemos que es el caso II, y si queremos para mayor claridad lo escribirémos poniendo C en el ángulo recto, A en el ángulo dado, y B en el otro; y será tal como el de la (fig. 269) y por la tabla hallo B=90°−A=90°−37°45′16″,34=52°14′43″,66.

$$\log.a=\left\{\begin{array}{ll}\log.b=\log.827=\text{.........................} & 2,9175055\\ +\log.\text{tag.}A=\left\{\begin{array}{l}\log.\text{tang.}37^\circ45'10''=\\ \text{parte corres. á }6,''34=\end{array}\right. & \begin{array}{r}9,8889431\\ 276\end{array}\\ \hline & 12,8064762\end{array}\right\}=\log.640,44$$

$$\log.c=\left\{\begin{array}{ll}\log.b=\log.827\text{.........................} & 2,9175055\\ +\text{com.}\log.\cos.A=\text{..................} & 0,1020206\\ \hline & 3,0195261\end{array}\right\}=\log.1045,98$$

luego quedará resuelto el triángulo siendo un ángulo de 37°45′16″,34, otro de 52°14′43″,66, la hipotenusa de 1045,98 varas, el lado opuesto al ángulo de 37° &c de 640,44 y el otro de 827.}

De los Triángulos oblicuángulos.

653 Cuando un triángulo no tiene ningun ángulo recto, se llama *oblicuángulo*, y por consiguiente, como dados los tres ángulos no se puede determinar nada acerca de los lados, sinó su relacion (638) que es la de los senos de los ángulos opuestos, resulta que solo tenemos que resolver cinco casos en los triángulos oblicuángulos, que son los cinco primeros enunciados (626). Para resolver el primero, se necesita hacer una pequeña construccion, que es el bajar una perpendicular desde el ángulo mayor al lado opuesto; con lo cual quedará dividido en dos triángulos rectángulos, en los que se conoce la hipotenusa, el ángulo recto, y uno de los catetos en cada uno, á saber, los segmentos del lado sobre que cae la perpendicular que calcularémos del modo espuesto (494 esc.), y podrémos de este modo hallar un ángulo, y luego por medio de él los otros dos.

{Sea por ejemplo el triángulo ABC (fig. 270), en el cual suponemos que se conocen los lados AC de 820 varas, AB de 600, BC de 450, y se tendrá que será el segmento mayor

$AD=\frac{1}{2}AC+\frac{(AB+BC)(AB-BC)}{2AC}=410+96,03=506,03$; y ahora para hallar el ángulo A diríamos permutando la primera analogía transformada de los triángulos rectángulos, $AB=600:DA=506,03::R:\cos.A$, de donde

$$L.\ \cos.\ A=\left\{\begin{array}{ll} \log.\ 506,03\ \ldots\ldots = & 2,7041763 \\ \log.\ R\ \ldots\ldots\ldots\ldots = & 10,0000000 \\ \text{compl.}\log.\ldots 600 = & 7,2218487 \\ \hline & 9,9260250 \end{array}\right\} = Log.\ \cos.\ 32^\circ\ 30'\ 3'',14$$

{Ahora para hallar el ángulo en C, podríamos resolver el trián. gulo BDC; pero como ya tenemos hallado el logaritmo de AB, nos ahorrarémos esto, si resolvemos el ABC por la analogía general (638), en la cual observarémos al hacer las aplicaciones, que si buscamos lado, debemos empezar por seno, y si seno, debemos principiar por lado, y así dirémos $BC=450:BA=600::sen.A=sen.32^\circ30'3'',14:sen.C$, que por logaritmos hallarémos

$$Log.\ sen.\ C=\left\{\begin{array}{ll} l.\ s.\ 32^\circ\ 30'0'' = & 9,7302165 \\ p.\ cor.\ á\ 3'',\ 14 = & 104 \\ \log.\ 600\ldots\ldots = & 2,7781513 \\ \text{compl.}\ l.\ 450\ldots = & 7,3467875 \\ \hline & 9,8551657 \end{array}\right\} = L.\ sen.\ 45^\circ\ 45'\ 33'',\ 9$$

Para hallar el ángulo ABC, sumarémos el A con el C, y la suma la restarémos de 180°, lo que nos dará $B=101^\circ44'22'',96$.}

654 Para resolver el segundo caso necesitamos de esta analogía.

La suma de dos lados de un triángulo es á su diferencia como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la mitad de la diferencia; que demostrarémos de este modo.

Sea el triángulo ABC (fig. 271), y tendrémos en virtud de lo demostrado (538) $sen.\ A:BC::sen.B:AC$, que por lo dicho (267 teor. 7.°) será $sen.\ A+sen\ B:sen.\ A-sen.\ B::BC+AC:BC-AC$, y como la primera razon(643) es igual con la de $tang.\frac{A+B}{2}:tang.\frac{A-B}{2}$, tendrémos $BC+AC:CB-AC::tang.\frac{A+B}{2}:tang.\frac{A-B}{2}$, que espresa la analogía dicha. (*)

(*) *Esta proposicion se puede demostrar con mucha elegancia por una construccion gráfica.*

Ahora, por medio de ella resolverémos el caso enunciado; porque cuando se nos dé un ángulo hallarémos la suma de los otros dos restándole de 180°, y tomando la mitad tendrémos conocidos los tres primeros términos de la proporcion; la cual nos dará el cuarto que espresará la semidiferencia, con lo cual se obtendrá el ángulo mayor sumando la mitad de la suma con la mitad de la diferencia, y el menor restando de la mitad de la suma la mitad de la diferencia, y el tercer lado se hallará por lo espuesto (638).

{Supongamos para dar un ejemplo de este caso que en el triángulo ABC (fig. 272) se dan AB de 120 varas, AC de 340; y el ángulo en A de 30° 40′ 25″, por lo cual tendrémos

$$\frac{B+C}{2}=\frac{180^\circ-30^\circ40'25''}{2}=\frac{149^\circ19'35''}{2}=74^\circ\ 39'\ 47'',\ 5;$$

lo que nos dará $AC+AB:AC-AB::tang.\frac{B+C}{2}:tang.\frac{B-C}{2}$ ó $460:220::tang.74^\circ39'47'',5:tang.\frac{B-C}{2}$, que hallarémos por logaritmos del modo siguiente:

$$L.tang.\frac{B-C}{2}=\left\{\begin{array}{ll} \log.tang.74^\circ39'40''\ldots\ldots = & 10,5617762 \\ \text{parte corresp. á los } 7'',5\ldots = & 620 \\ \log\ 220\ldots\ldots\ldots\ldots = & 2,3424227 \\ \text{compl.}\log.460\ldots\ldots\ldots = & 7,3372422 \\ \hline & 20,2415031 \\ & 1 \end{array}\right\}=L.\ t.\ 60^\circ\ 10'4'',1.$$

{Para hallar los ángulos en B y C, tendrémos que $B=74^\circ39'47'',5+60^\circ\ 10'.4'',1=134^\circ\ 49'\ 51'',6$ y $C=74^\circ\ 39',\ 47'',5-60^\circ\ 10'\ 4'',1=14^\circ\ 29'\ 43'',4$

{Para hallar el lado BC dirémos $sen.\ C:AB::sen.A:BC$, ó $sen.\ 14^\circ29'43''$,

Sea el triángulo ABC (fig. 340); haciendo centro en A con un radio igual al lado mayor AB, trácese la semicircunferencia FBD, que corta al lado AC prolongado en F y D, tírense DB y FB, la que se prolongará hasta que encuentre á la DE que se tirará por D paralelamente á BC: con lo cual, el triángulo FDE, nos dará CF: CD:: BF: BE; ó AB + AC: AB − AC :: BF: BE.

Pero si considerámos el cateto BD como radio, en los triángulos DBF, DBE rectángulos en B, los lados BF y BE serán las tangentes de los ángulos FDB y BDE; pero siendo isósceles el triángulo DAB, y teniendo comun el ángulo BAC con el propuesto, se tiene $2ADB=2ABD=\pi-BAC$.

Por otra parte $ACB+CBA=\pi-BAC$; *luego será* $2ADB=ACB+CBA$;

4:120::*sen.* 30°40'25'':BC que por logaritmos, será

$$\text{Log. BC}=\left\{\begin{array}{l} \textit{log. sen. } 30^\circ\ 40'\ 20''\ldots\ldots = 9{,}7076775 \\ \textit{parte cor. á } 5''\ldots\ldots = \qquad 177 \\ \textit{log. } 120\ldots\ldots = 2{,}0791813 \\ \textit{compl. l. s. } 14^\circ\ 29'\ 43'',4. = 0.6015355 \\ \hline \cancel{1}2{,}3884120 \end{array}\right\} = \textit{Log. } 244,575$$

655 Para resolver el 3.° y 4.° caso no tenemos mas que hacer uso de la analogía general (638) de que *los senos de los ángulos son como los lados opuestos*; pues como dados dos ángulos se conoce el tercero, restando su suma de 180°, la simple proporcion nos dará los lados.

{Sea, por ejemplo, el triángulo ABC (fig. 271) en que supondrémos el ángulo en C de 70°27'57'', el A de 65° 20', y el lado BC de 533 varas; hallarémos primero el ángulo en B sumando 70° 27' 57'' con 65° 20', y restando esta suma de 180°, lo que nos dará áng. B=44°12'3''; y para hallar los lados AC, AB, dirémos *sen.* A:*sen*B::BC:AC;

ó *sen* 65°20':*sen.* 44°12'3''::533:AC, *sen.* A:*sen.* C::BC:BA

ó *sen.* 65°20':*sen.* 70°27'57''::533:BA, que por logaritmos nos darán.

$$\text{Log. AC}=\left\{\begin{array}{l} \textit{log. sen. } 44^\circ 12' 0''\ldots\ldots = 9{,}8433356 \\ \textit{par. corresp. á } 3''\ldots\ldots = \qquad 65 \\ \textit{log. } 533\ldots\ldots = 2{,}7267272 \\ \textit{compl. log. sen. } 65^\circ 20'\ldots = 0{,}0415550 \\ \hline \cancel{1}2{,}6116243 \end{array}\right\} = \textit{Log. } 408,\ 91.$$

$$\text{Log. BA}=\left\{\begin{array}{l} \textit{log. sen. } 70^\circ 27' 50''\ldots\ldots = 9{,}9742495 \\ \textit{part. corresp. á } 7''\ldots\ldots = \ldots\ldots 52 \\ \textit{log. } 533\ldots\ldots = 2{,}7267272 \\ \textit{compl. log. sen } 65^\circ 20\ldots = 0{,}0415550 \\ \hline \cancel{1}2{,}7425369 \end{array}\right\} = \textit{Log. } 552,\ 76.$$

656 Para la resolucion del 5.° caso tambien usarémos de la misma

---

lo que da $BF = tang.\ ADB = tang.\ \frac{ACB+CBA}{2}$; *y como* $BDE = ADE - ADB = ACB - \frac{ACB+CBA}{2} = \frac{ACB-ABC}{2}$, *se tendrá* $BE = tang.\ BDE = tang.\ \frac{ACB-ABC}{2}$: *y sustituyendo, será* $AB + AC : AB - AC :: tang.\ \frac{ACB+ABC}{2} : tang.\ \frac{ACB-ABC}{2}$. *L. Q. D. D.*

analogía, solo que aquí se pueden dar dos resoluciones cuando el ángulo conocido es el opuesto al lado menor, las que vamos á dar en el supuesto de que en el triángulo ABC (fig. 273) se dan conocidos los lados AC de 500 varas, AB de 400, y el ángulo en C opuesto al menor de ellos AB de 30° 40'.

Se tendrá pues para determinar el ángulo B por la analogía general AB: *sen.* C : : AC : *sen* B, ó 400: *sen.* 30°40'::500: *sen.* B, que hallarémos por logaritmos del modo siguiente:

$$\text{L. senB}=\left\{\begin{array}{l} \textit{log. sen. } 30^\circ 40' = 9{,}7076064 \\ \textit{log. } 500\ldots\ldots = 2{,}6989700 \\ \textit{compl. log. } 400. = 7{,}3979400 \\ \hline \cancel{1}9{,}8045164 \end{array}\right\} = \text{L. } \textit{sen.} \left\{\begin{array}{l} 39^\circ\ 36'\ 34'',\ 6 \\ \text{ó} \\ 140^\circ\ 23'\ 25'',\ 4 \end{array}\right.$$

Es decir, que el ángulo en B puede tener uno de estos dos valores; y como no podemos determinar cual de los dos le conviene, deberémos en este caso resolver el triángulo en los dos supuestos.

Resolvámoslé primero en el supuesto de ser dicho ángulo obtuso ó de 140°23'25'',4.

En este caso, para hallar el ángulo en A procederémos del modo siguiente: sumarémos los ángulos conocidos, y será B+C=140°23'25'', 4+30°40'=171°3',25'',4.

Restando ahora este valor de 180°, nos vendrá el valor del tercer ángulo BAC=180°−171°3'25'',4=8°56'34'',6.

Solo resta determinar el lado BC, para lo cual tendrémos por la analogía general *sen.* B : AC : : *sen.* A : BC, ó *sen.* 140°23'25'',4:500::*sen.* 8°56'34'',6:BC, que por logaritmos será

$$\text{Log. BC}=\left\{\begin{array}{l} \textit{log: } 500\ldots\ldots = 2{,}6989700 \\ \textit{log. sen. } 8^\circ 56' 30''\ldots\ldots = 9{,}1915315 \\ \textit{par. corresp á } 4'',\ 6\ldots = \ldots\ldots 615 \\ \textit{comp. l. s. } 140^\circ 23' 25',4. = 0{,}1954836 \\ \hline \cancel{1}2{,}0860466 \end{array}\right\} = \textit{Log. } 121,91.$$

Para resolvérlo en el 2.° caso, determinarémos ante todas cosas el ángulo A en el supuesto de ser agudo el ángulo opuesto al lado AC: en cuyo caso el triángulo estará representado por ACB' siendo el ángulo B'=39°36'34',6, y obtendrémos el ángulo CAB' de 109°43'25'',4; y para hallar el lado B'C dirémos *sen.* C:AB'=AB::*sen.* A:B'C, ó *sen.* 30°40':400::*sen.* 109°43'25'',4:B'C, que por logaritmos será

$$\text{Log. B'C}=\left\{\begin{array}{l} \textit{log. s. } 109^\circ 43' 25'',4 = \textit{log.} \\ \textit{sen. } 70^\circ 16' 34'',6\ldots\ldots = 9{,}9737423 \\ \textit{log. } 400\ldots\ldots = 2{,}6020600 \\ \textit{compl. log. sen. } 30^\circ 40'\ldots = 0{,}2923936 \\ \hline \cancel{1}2{,}8681959 \end{array}\right\} = \textit{Log. } 738,24$$

con la cual dejamos resueltos todos los casos de la Trigonometría rectilínea.

GEOMETRÍA PRÁCTICA.

ó aplicacion de la Geometría elemental á la medicion de las líneas y ángulos en el terreno y al levantamiento de planos topográficos.

De la nivelacion, medicion de las líneas y de los instrumentos con que se ejecutan estas operaciones.

657 Ya hemos visto (336) que el orígen de la Geometría no fué otro que la medicion de los terrenos; y que despues su objeto se ha elevado y estendido, de manera que para dicha medicion y sus operaciones análogas se ha conservado con el nombre de *Geometría práctica.* Una parte de esta ciencia es la division de las tierras, á la cual se ha dado el nombre de *geodesia*; pero el asunto de esta parte de la geometría práctica se ha estendido, y tiene por objeto *la medida de la tierra, ó de una parte de su superficie*; por lo que se llaman *operaciones geodésicas* á todas aquellas que se ejecutan con el objeto de determinar los principales puntos de los estados.

La figura de la tierra que hasta estos últimos tiempos se habia creido ser una esfera, se ha encontrado que es semejante á la que presenta una naránja: esto es, aplanada por los polos A y B en la forma que se vé (fig. 274); la línea AB que une los dos polos se llama el *eje* de la tierra, y la CD el *diámetro*; la relacion que tiene AB con CD es segun nuestro Sabio Don Jorge Juan la de 265 á 266; toda línea que es paralela á la superficie de la tierra ó á la de las aguas del mar cuando estan en calma, se llama línea *horizontal*, y toda línea que es perpendicular á una horizontal, se llama *vertical*. Un hilo cualquiera del cual cuelgue un cuerpecillo, cuando se le abandona, manifiesta la direccion *vertical*; y toda perpendicular á esta línea presenta la *horizontal*.

Todos los puntos de la superficie de la tierra, ó todos los puntos de la superficie de los líquidos, se dice que están á un *nivel*. Si por un punto cualquiera A de la superficie terrestre concebimos una linea tangente MN, se dice que dos puntos tales como A y N están en el *nivel aparente*. Dos puntos P y Q de esta línea que distasen igualmente del punto de contacto estarán en el *nivel verdadero*; porque podemos concebir que por ellos pase una superficie semejante á la de la tierra. De modo que dos puntos estarán en el *nivel verdadero* siempre que como P y Q, ó como A y R estén á igual distancia de O centro de la tierra; y estarán en el nivel *aparente* cuando, como A y Q, ó como A y N, ó como A y M, ó como P y N disten desigualmente de dicho centro.

Todo círculo máximo que pasa por los polos se llama *meridiano* de la tierra; y el círculo máximo perpendicular al meridiano, se llama *ecuador*. La distancia CO del centro de la tierra al ecuador es segun el mismo don Jorge Juan de $8447854\frac{1}{4}$ varas españolas, y la OA del centro al polo, de 8416095 varas españolas. En las operaciones que por ahora van á llamar nuestra atencion no influye nada el aplanamiento de la tierra; y por lo mismo supondrémos que sea una esfera, cuyo radio sea medio proporcional aritmético entre AO y CO; por lo que será de 8431974,625 varas españolas (*).

{Si unimos el centro O con un punto cualquiera Q de la MN tangente en A, tendrémos que el punto Q estará en el nivel aparente con el punto A, y el punto R en el verdadero; la parte QR interceptada entre estos dos puntos se llama *la diferencia entre el nivel verdadero y el aparente.* Importa mucho tener determinada esta diferencia para ciertas distancias, y por lo mismo observarémos que $RQ=OQ-OR$; y como en el supuesto de ser la tierra esférica el ángulo A será recto, tendrémos $QR=\sqrt{OA^2+AQ^2}-OR$; ahora llamando D á la diferencia RQ que buscamos, d á la distancia dada AQ, y R al radio AO $=OR$, tendrémos que $D=\sqrt{R^2+d^2}-R$. Con el ausilio de esta fórmula, y suponiendo como hemos dicho R=8431974,625 varas, y que d es igual con 50 varas, con 100 &c, se ha formado la siguiente

(*) *En el* § 34 *de mi compendio de* Mecánica práctica *se hallarán los valores de los ejes de la tierra deducidos de todas las observaciones hechas hasta el dia. Igualmente se hallan en el* § 565 *del tomo* 2.° *de mi compendio de Matemáticas, donde se encuentra ademas el volúmen y el peso de todo el globo terrestre.*

{*Tabla en que se contienen las diferencias entre el nivel verdadero y aparente á diferentes distancias.*

Distancias espresadas en varas españolas.	Diferencias entre el nivel verdadero y aparente espresadas en cienmilésimas de vara.	Distancias espresadas en varas españolas.	Diferencias entre el nivel verdadero y aparente espresadas en cienmilésimas de vara.
50.	0,00015	900.	0,04803
100.	0,00059	950.	0,05351
150.	0,00133	1000.	0,05929
200.	0,00237	1100	0,07175
250.	0,00370	1200.	0,08539
300.	0,00533	1300.	0,10021
350.	0,00726	1400.	0,11622
400.	0,00949	1500.	0,13342
450.	0,01200	1600.	0,15180
500.	0,01482	1700.	0,17137
550.	0,01793	1800.	0,19212
600.	0,02134	1900.	0,21406
650.	0,02505	2000.	0,23719
700.	0,02965	3000.	0,53368
750.	0,03335	4000.	0,94877
800.	0,03795	5000.	1,48245
850.	0,04284	6000.	2,13414 }

{La tabla que acabamos de poner es acaso la mas exacta de cuantas se han publicado; pues las de otros autores no se han calculado con todo rigor matemático. En efecto, la fórmula de que se han valido es la siguiente. Como la tangente es media proporcional entre la secante y su parte esterna (493), se tiene QS:AQ::AQ:QR; de donde resulta $QR = \frac{AQ^2}{QS}$.

{Ahora, como QR que es la diferencia entre el nivel verdadero y aparente es siempre muy pequeña en comparacion del diámetro ROS de la tierra, en vez de toda la secante QRS ponen en el denominador solo el diámetro RS y se valen de la espresion $QR = \frac{AQ^2}{RS}$ para

formar dichas tablas. Aunque el error que de esto pueda resultar no sea de mucha trascendencia, causa sin embargo mucha estrañeza á los principiantes el que para determinar, porque se necesita atender á ella, la diferencia QR, se desprecie y se repute por nula la misma QR.

{Esta tabla basta para los usos comunes de la nivelacion: mas cuando interesa mucho que dicha operacion sea rigorosamente exacta, como por ejemplo, cuando se hace con el objeto de asegurarse de la posibilidad de realizar alguna empresa hidráulica, como el sangrar un rio, abrir un canal, desecar una laguna &c, es indispensable atender, ademas de la diferencia entre el nivel verdadero y aparente, á corregir las alturas de nivel observadas, por lo que influye la refraccion terrestre. Por esta causa, habiéndome comisionado el Gobierno para que hiciese una nivelacion con el importante objeto de examinar si era posible el proyecto de conducir á Madrid las aguas de los rios Jarama, Guadalix, &c. y deseando yo no omitir ninguna diligencia que pudiese conducir para que la operacion se verificase con la exactitud que exigía la importancia del proyecto, no pude menos de emprender el cálculo rigoroso aunque bastante complicado, por tres razones muy principales: 1.ª porque los trabajos de Puissant, que son los que merecen mas confianza, no tienen toda la exactitud posible, pues están calculados por la fórmula inexacta $QR = \frac{AQ^2}{RS}$; 2.ª porque estando en medidas francesas, hubiera sido una complicacion estraordinaria el hacer las reducciones; y 3.ª, porque variando los efectos de la refraccion por la presion y temperatura de la atmósfera y por otras muchas circunstancias, las tablas formadas para hacer estas correcciones en Francia no pueden servir con la misma exactitud en España.

{Para proceder con acierto, principié por tomar un término medio entre los principales resultados obtenidos por Puissant, Delambre, Zac, &c. y obtuve que el coeficiente de la refraccion cuando la altura del barómetro es 0, 76 metros y la temperatura 10.° del termómetro centigrado es 0, 07853; y haciendo las convenientes reducciones, he obtenido que la refraccion en Madrid, donde la altura media del barómetro es de 30 pulgadas 6,5 líneas españolas, que hacen 2,545139 pies españoles ó 0,709 metros, y la temperatura media es de 15° del termómetro centígrado, está espresada por 0,07189. Con este dato he calculado la adjunta tabla, en la cual, al lado de la distancia á que se supone que está de la mira el nivel, se halla la correccion que se debe hacer, teniendo en consideracion la diferencia entre el nivel verdadero y aparente y la refraccion; es decir, que á la altura observada se debe rebajar la cantidad que está enfrente del número que mas se aproxima á la distancia del nivel á la mira; por lo que, si á la distancia de 2810 pies la altura de la línea de nivel es 7 pies, por ejemplo, se debe rebajar la cantidad de 0,133 que está enfrente de 2800 que es el número mas próximo de la tabla, y resulta que la altura corregida es de 6,867 pies.

{*Tabla en que se contiene la correccion que se debe hacer por la diferencia entre el nivel verdadero y aparente y por la refraccion. Es decir, que á la altura de mira de cada estacion se le debe quitar la cantidad que corresponde en la columna de la correccion, segun la distancia del nivel á la mira, para que se tenga la verdadera altura.*

A la distancia en pies de	*Se debe restar la cantidad en pies de*	*A la distancia en pies de*	*Se debe restar la cantidad en pies de*
50.....	0,000	1300......	0,029
100.....	0,000	1350......	0,031
150.....	0,000	1400......	0,033
200.....	0,001	1450......	0,036
250.....	0,001	1500	0,038
300.. ...	0,002	1550......	0,041
350.....	0,002	1600......	0,043
400.....	0,003	1650......	0,046
450.....	0,003	1700......	0,049
500	0,004	1750......	0,052
550.....	0,005	1800......	0,055
600.....	0,006	1850......	0,058
650	0,007	1900......	0,061
700.....	0,008	1950	0,064
750.....	0,010	2000..	0,068
800.	 0,011	2050......	... 0,071
850.....	0,012	2100......	0,074
900.....	0,014	2150......	... 0,078
950.....	0,015	2200......	0,082
1000.....	0,017	2250......	0,086
1050.....	0,019	2300......	. . 0,089
1100	0,020	2350	0,093
1150.....	0,022	2400......	0,097
1200.....	0,024	2450......	... 0,102
1250.....	. . .0,026	2500......	0,106

2550.....	0,110	5300.....	0,475
2600.....	0,114	5400.....	0,494
2650.....	0,119	5500	0,512
2700.....	0,123	5600.....	0,531
2750.....	0,128	5700.....	0,550
2800.....	0,133	5800... ..	 0,569
2850.....	 0,137	5900.....	0,589
2900.....	0,142	6000.....	0,609
2950.....	0,147	7000.. ...	0,829
3000.....	0,152	8000.....	1,083
3100.....	0,163	9000.....	1,371
3200.....	0,173	10000.....	1,692
3300.....	0,184	11000.....	2,048
3400.....	0,196	12000.....	2,437
3500.....	0,207	13000.....	2,860
3600.....	0,219	14000.....	3,317
3700.....	0,232	15000.....	3,808
3800.....	0,244	16000.....	4,333
3900.....	0,257	17000.....	4,891
4000.....	0,271	18000.....	5,482
4100... ..	0,284	19000..	6,110
4200.....	0,298	20000.....	6,770
4300.....	0,313	21000.....	7,470
4400.....	0,328	22000.	8,191
4500.....	0,343	23000.	8,953
4600	0,358	24000	9,748
4700.....	0,374	25000... ..	...10,577
4800.	0,390	26000.....	. .11,441
4900	 0,406	27000.....	...12,338
5000.....	0,423	28000.. ...	...13,268
5100.....	0,440	29000.....	...14,233
5200.....	. .. 0,458	30000.....	...15,232.}

658 Aunque las desigualdades de la superficie terrestre son muy cortas en comparacion de toda la gran masa de nuestro globo, no obstante importa en muchísimas ocasiones determinar lo que un punto está mas alto que otro, y la operacion por cuyo medio se averigua,

se llama *nivelacion*. Los instrumentos para nivelar se conocen con el nombre de *niveles*, y se pueden reducir á tres, que son el nivel de *albañil*, el de *aire* y el de *agua*.

El nivel de albañil se compone de dos reglas iguales BA,BC (fig. 275), que forman un ángulo ABC, de cuyo vértice cuelga un hilo que en su estremo tiene un plomito, y que el otro estremo está unido á una clavija que tiene por la parte opuesta; en el medio de los lados tiene un travesaño GH ó un arco de círculo KL, que están divididos por el medio; y si colocado este instrumento sobre un plano, el hilo BD oculta la línea de division, que hay en el medio del travesaño ó del arco, es señal de que la línea sobre que insiste es una línea horizontal; porque en este caso el hilo BD es perpendicular á GH, y á la línea que une los puntos A y C que es paralela con GH. Ahora, si se quisiera averiguar si un plano era horizontal, se colocará el nivel en otra posicion cualquiera RS, y si la línea RS lo estuviese, estaríamos seguros de que todo el plano lo estaba; pues la posicion de un plano queda determinada por dos líneas que se hallen en él y que se encuentren.

El nivel de aire (fig. 276) es un tubito de vidrio que está lleno por lo regular de espíritu de vino, dejando vacío un poquito donde se halla una búrbuja de aire; el principio en que estriba su construccion está tomado de la Hidrostática, y es: *que si dos fluidos ó dos líquidos, ó un fluido y un líquido incapaces de mezclarse, están en una vasija, aquel que en igual volúmen tenga menor peso, ocupará la parte superior*; y como el aire pesa menos que el espíritu de vino, deberá irse siempre á la parte mas alta; luego cuando, colocado este instrumento sobre un plano, la ampollita de aire ocupe el medio del tubo, que es el espacio que hay entre las dos argollitas K,L, será señal de que no está el punto A mas alto ni mas bajo que el punto B; luego estarán á nivel.

El nivel de agua es un tubo de laton, hoja de lata &c, que en sus estremos A y B (fig. 277) tiene otros dos de cristal AI, BK; y su construccion estriba tambien en el siguiente principio hidrostático, á saber: que *si en un tubo de brazos comunicantes se echa un líquido cualquiera, subirá en ámbos brazos á una misma altura*; por lo que los estremos de dicha superficie estarán á nivel.

659 Con este nivel se ejecutan las nivelaciones entre puntos que no distan demasiado. Ahora, para nivelaciones entre puntos demasiado remotos, se usa de niveles con anteojo. Cuando para averiguar la diferencia de nivel entre dos puntos, solo se necesita colocar el nivel en un parage, se llama *nivelacion simple*; y cuando en dos ó mas, *nivelacion compuesta*.

Supongamos que se intente hallar la diferencia del nivel entre los dos puntos C y D (fig. 278), y tendrémos que si colocamos el nivel en B sobre poco mas ó menos á igual distancia de C y D, echamos

agua en el nivel, clavamos verticalmente en C y D dos miras, como las representadas (fig. 279), y miramos por los puntos M,N de la superficie del agua, y hacemos que otro suba la tablilla de la mira hasta que la visual tirada por M y N, vaya á parar á la línea que separa lo blanco de lo negro, tendrémos que los puntos E, F serán dos puntos de nivel verdadero; porque si concebimos en el punto *m* una circunferencia concéntrica con la de la tierra de que será tangente la EMNF, los puntos E,F distarán igualmente del punto de contacto *m*. Ahora, midiendo con una vara dividida en pulgadas y líneas, ó mejor en pies, décimas, centésimas y milésimas de pie, las alturas CE,DF, y restándolas, el residuo será la diferencia de nivel entre C y D; y para saber que punto es el mas alto, observarémos que es el mas próximo á la línea de nivel, porque si los dos puntos E y F están á nivel, distan igualmente del centro de la tierra, y si el punto D dista menos de F que el C de E, manifiesta que D dista mas del centro de la tierra ó está mas alto que C.

Si por la naturaleza del terreno la visual fuese á terminar en uno de los puntos tal como D′, la diferencia de nivel estaría representada por CE; y si terminase mas abajo del obgeto, como si supusiéramos que el segundo punto estaba en D″ y que la visual terminase en D′ la diferencia de nivel estaría representada por la suma de CE con D′D″; porque entónces estando E y D′ en el verdadero nivel, estaría D′ mas alto que C, la magnitud CE; y como D″ está mas alto que D′ la magnitud D′D″, se tendrá que D″ estará mas alto que C la magnitud CE+D′D″.

Hemos dicho que se coloque el nivel sobre poco mas ó menos á igual distancia de C y D, porque si la diferencia entre estas distancias fuese considerable se debería atender á la diferencia entre el nivel verdadero y aparente.

Cuando el terreno es demasiado desigual, las miras son de unos 12 pies, y entónces se suelen llamar *estadales de agrimensores* como se representan en la (fig. 280). En este caso la varilla *m* sirve para bajar y subir la tabla A, lo que se necesite. Pero como en muchas ocasiones no basta esto, lo que se ejecuta es dirigir la puntería por mas arriba ó por mas abajo de la línea de nivel. Y así, pues que segun tenemos colocado nuestro nivel (fig. 278), el punto D″ no se puede ver en la línea de nivel, mirarémos desde M al punto L″ y verémos en que punto encuentra este rayo visual al tubo QN, y averiguando la distancia NQ y ML′, los triángulos semejantes MNQ, ML′D″ nos darán MN, longitud del nivel: NQ, lo que sube la puntería :: MD′, distancia del nivel al punto D′:D′L″, diferencia de nivel. En los niveles de otras construcciones se ponen las piezas competentes para averiguar lo que sube ó baja la puntería.

660 Cuando la distancia entre los dos puntos es muy considerable no se puede hacer solo por una nivelacion simple, y se necesitan

dos ó mas: en cuyo caso se llama *estacion* á cada una de las nivelaciones simples que se ejecutan. Para lo cual se procede del modo siguiente. Supongamos que se quiera hallar la diferencia de nivel entre dos puntos tales como A y D (fig. 281); lo primero se clava una mira en A, y se coloca el nivel en E, y á igual distancia sobre poco mas ó menos si se puede, por ejemplo en B, se clava otra mira ó estadal, se señalan los puntos a y b de nivel, se averiguan las alturas Aa y Bb y se apuntan en un papel; despues se pasa el nivel á otro punto F, dejando clavada la mira en B, y á igual distancia sobre poco mas ó menos se coloca otra mira en C; se señalan los puntos de nivel e, c, y se apuntan las alturas Be, Cc; se pasa el nivel á G, y con las mismas circunstancias que ántes se averigua el valor de Cf, Dd; se suman los valores de Aa, Be, Cf que representan las alturas de los primeros términos, se suman igualmente los valores de Bb, Cc, Dd que representan las de los segundos, se restan estas dos sumas y el esceso espresará la diferencia de nivel: estando mas alto el primer término si la suma de los primeros términos es menor, y el segundo si la de estos lo es.

La razon de esta regla es fácil de percibir; porque sean a y b las alturas del primer término Aa y segundo Bb de la primera estacion; a', b', las mismas cantidades Be, Cc relativas á la segunda estacion, y así sucesivamente. La diferencia de nivel entre A y B será $b-a$; la de los puntos B y C será $b'-a'$; la de los C y D será $b''-a''$, &c, &c.

Ahora, como el punto A está mas alto que el B, la cantidad $b-a$, y el punto B mas alto que el C la cantidad $b'-a'$, resulta que el punto A estará mas alto que el punto C la suma de las dos diferencias halladas; y continuando del mismo modo estas consideraciones, se hallará por último para la diferencia de nivel entre los puntos A y D.

$$\textit{Dif. de N.} = (b-a)+(b'-a')+(b''-a'')+(b'''-a''')+\&c = (b+b'+b''+b'''+\&c)-(a+a'+a''+a'''+\&c)$$

cuyo resultado manifiesta la regla que se ha enunciado.

Esc. Cuando el terreno no permite colocar el nivel en medio de cada estacion, se averiguan las distancias al mismo tiempo, para contar con la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero segun la primera tabla del §. 657; y tambien contar con la refraccion por la segunda tabla si la operacion debiese ser de mucha trascendencia.

Para hacer las apuntaciones con órden sin que resulte confusion, se puede usar de uno de estos dos medios: ó en una cuartilla de papel se señalan seis columnas, y se ponen en la primera los nombres que tienen los parages que sirven de primer término; en la próxima á su derecha la altura de la línea de nivel; en la siguiente la distancia de dichos primeros términos al parage donde se coloca el nivel, y en las otras tres se escribe lo mismo respecto de los segundos; ó se va formando un borrador en que se señalen todas las estaciones, apuntando allí las dimensiones que se toman como se señala en la figura 281, donde el 4...5 quiere decir que la altura de la línea de nivel respecto al punto A estaba mas alta 4 pies y 5 pulgadas; el 180 que la distancia que hay desde A á E es de 180 pies &c, todo lo cual se comprende mucho mejor viendo practicar una nivelacion (*).

{Tanto las miras representadas por la figura 279, como los estadales de agrimensor, figurados en la 280 son defectuosos por las razones siguientes: 1.ª Para clavarlos en el terreno, si es la mira (fig. 279) se tiene que golpear con un mazo en la parte superior; y aunque la punta de abajo sea de hierro, se suele encontrar mucha dificultad para clavarla, y aun se abolla la punta ó se rompe con mucha fre-

(*) *Bien persuadido de esta verdad la Real Academia de San Fernando de Madrid me comisionó en 2 de mayo de 1802 para que en los meses de vacaciones diese un curso de Geodesia para el aprovechamiento de los discípulos que estudian las Matemáticas en las cátedras de la Academia, valiéndome para ello de los instrumentos que esta poseia. Desde este tiempo hemos ejecutado varias operaciones curiosas é importantes: y pondrémos aquí el resultado de la nivelacion de Madrid practicada en el mes de Setiembre de 1807.*

El punto mas alto de Madrid es la puerta de Santa Bárbara. El quicio de la hoja izquierda de dicha puerta al salir de Madrid está mas alto que el de la puerta de los Pozos 15 pies, 7 pulgadas y 7 líneas; que el de la de Fuencarral 42 pies, 1 pulgada y 6 líneas; que el de la del Conde-Duque 55 pies, 6 pulgadas y 4 líneas; y que la losa donde encaja el pestillo de la puerta de San Bernardino 91 pies, 11 pulgadas y 5 líneas.

Como tenia ya nivelado con mis discípulos del Seminario el punto mas alto del guardacanton de la plazuela del Seminario, que está 1 pie, 5 pulgadas y 6 líneas mas alto que dicha losa, y el escalon de la Real Capilla Parroquia de San Antonio de la Florida, no seguímos por este parage la nivelacion, sinó que continuamos por la puerta de Recoletos; esta por las operaciones hechas en 1804 se hallaba 83 pies, 7 pulgadas y 9 líneas mas baja que el quicio de dicha puerta de Santa Bárbara; y continuando la nivelacion desde la puerta de Recoletos hallamos que su quicio estaba mas alto que el punto mas alto del último banco de piedra que hay en el salon del Prado, al bajar hácia la izquierda 50 pies, 1 pulgada y 6 líneas; por consiguiente este punto se halla mas bajo que el quicio de la puerta de Santa Bárbara 133 pies, 9 pulgadas y 3 líneas.

La puerta de Atocha está mas baja que la de Recoletos 93 pies, 3 pulgadas y 4 líneas, y que la de Santa Bárbara 176 pies, 11 pulgadas y 1 línea. El piso inferior del portillo de Valencia estaba mas bajo que el de la puerta de Recoletos 120 pies, 6 pulgadas y 8 líneas, y por con-

cuencia la vara; si es el estadal (fig. 280) se golpea en la punta postiza; pero en muy pocas ocasiones se consigue clavar como corresponde; 2.ª porque no hay ningun medio de asegurarse de que se clavan verticalmente, y si las alturas se miden estando colocada la mira oblicuamente, se pueden cometer errores de mucha consideracion; y 3.ª porque, como en todos los puntos donde se coloque la mira, escepto en el primero y último, ha de servir por segundo término de una estacion y por primero de la estacion siguiente, resulta que para que sirva de primer término de esta se necesita volver ó desclavar para volverla á colocar, de modo que se presente la tabla que separa lo blanco de lo negro hácia el paraje donde se coloca el nivel en la estacion siguiente, cuya operacion no se puede hacer jamás sin mover el terreno, y casi nunca se puede colocar con

---

siguiente mas bajo que el quicio de la puerta de Santa Bárbara 204 pies, 2 pulgadas y 5 líneas. El portillo de Embajadores está mas bajo que la puerta de Recoletos 130 pies, 3 pulgadas y 7 líneas, y que el quicio de la puerta de Santa Bárbara 213 pies, 11 pulgadas y 4 líneas. La piedra que sirve de quicio á la hoja de la derecha del portillo derecho, al salir de la puerta de Toledo, estaba mas baja que la puerta de Recoletos 68 pies, 7 pulgadas y 2 líneas, y que el quicio de la de Santa Bárbara 152 pies, 2 pulgadas y 11 líneas. El piso inferior de la puerta de Segovia está mas bajo que el de la de Recoletos 189 pies, 4 pulgadas y 1 línea, y que el quicio de la puerta de Santa Bárbara 272 pies, 11 pulgadas y 10 líneas. El piso de la puerta de San Vicente está mas bajo que la puerta de Recoletos 192 pies, 3 pulgadas y 7 líneas y que la puerta de Santa Bárbara 275 pies, 11 pulgadas y 4 líneas. Por consiguiente el punto mas bajo de Madrid es la puerta de San Vicente. Ahora, por las operaciones hechas en 1806 el piso de la puerta de San Vicente está mas bajo que la balaustrada de lo alto del Palacio nuevo 230 pies, 5 pulgadas y 8 líneas, luego el punto mas alto de dicha balaustrada está 45 pies, 4 pulgadas y 8 líneas mas bajo que el quicio de la puerta de Santa Bárbara.

Como al mismo tiempo que nivelábamos se iban apuntando las distancias entre las estaciones, pondrémos aquí el perímetro de Madrid. Desde la puerta de San Bernardino á la de Santa Bárbara, hay 6612 pies; desde esta á la de Recoletos 2176; desde la de Recoletos á la de Atocha yendo por el Prado 6511 pies; de la de Atocha á la de Toledo 6578; desde la de Toledo á la de Segovia 4356; desde la de Segovia á la de San Vicente 3801; desde la de San Vicente á la de San Bernardino 6906; por consiguiente el perímetro de Madrid por el parage donde hicimos nuestra nivelacion, que es por fuera de las tapias, escepto la parte que hay desde la puerta de Recoletos á la de Atocha que fuimos por el Prado, es de 36940 pies, que solo falta para dos leguas 3060 pies.

firmeza sin variar ó mover el punto que sirvió de segundo término de la nivelacion precedente: y como es esencial el que la altura de la línea de nivel del primer término de toda estacion se tome con relacion al mismo punto con que se tomó la altura del segundo término de la estacion anterior, pueden resultar de aquí unos errores de mucha consideracion.

{Por esta causa, convencido de la necesidad que había de no omitir ninguna diligencia para que la nivelacion que ejecuté en el año de 1819 con el objeto de averiguar la posibilidad de realizar el proyecto de traer aguas á Madrid, resultase con la mayor exactitud posible, me ví precisado á escogitar un medio por el cual se evitasen los citados inconvenientes; y no viendo en los autores mas célebres que tratan esta materia ninguna cosa satisfactoria, despues de varias tentativas, ideé la mira que se ve representada en la (fig. 280*).

{La parte á donde se ha de dirigir la visual no es plana como en en las figuras 279 y 280, sinó convexa y semejante á una lenteja, con el fin de que el choque del aire no la haga mover demasiado. En vez de estar toda la parte superior pintada de blanco y la inferior de negro, lo estaban como se representa en la figura, que por ámbas partes era igual, y solo se diferenciaba en que el cuadrante que por un lado era blanco, por el opuesto era negro; y de este modo se conseguía no solo presentar un punto único bien marcado donde hacer coincidir las cerdas del anteojo, sinó que como por esta disposicion se presentaban cuatro puntos en que los dos cuadrantes opuestos eran blancos, y los otros dos negros, no había que dar vuelta ninguna á la mira, pues cualquiera posicion que tuviese el nivel en una estacion respecto de su anterior, siempre se verá por el anteojo alguno de los cuatro puntos del concurso de los cuadrantes de diferente color.

{Como es de la mayor importancia el que la mira tenga la mayor altura, se dió á la vara la longitud de 20 pies españoles, y se dividió en décimas, centésimas y milésimas de pie. Con el fin de colocarla siempre vertical, caía la plomada *rt*, y se conseguía que tomase dicha posicion con el ausilio de los cuatro tornillos del pie que reposaban sobre unos zoquetes de madera. La lenteja se bajaba y se subía por medio de unas poleas *b i* colocadas á los estremos de la vara. De manera que hice la operacion de un modo tan satisfactorio y que correspondió de tal modo á la exactitud con que me propuse practicarla, que no puedo menos de recomendar el uso de estas miras en nivelaciones de importancia.}

Entendido esto, pasemos á la medicion de las líneas.

661 Todas las operaciones geodésicas estriban sobre una preliminar que es la medicion de una línea ausiliar que se llama *base*. Los instrumentos necesarios para medir una base que ha de servir para

operaciones de poco momento son una *cadena* ó *cuerda*, *jalones*, *piquetes* y un *mazo*.

La cadena que regularmente se usa suele tener cien pies de largo, que conviene engarganten los eslabones los unos con los otros en la forma que se ve en la (fig. 282). Cada eslabon debe ser de un pie, y de diez en diez pies hay una medalla donde están señalados los pies que hay hasta allí. En sus estremos termina con unas grandes argollas, que juntas con el último eslabon deben formar la longitud de un pie, y ademas el radio del piquete ó estaca (fig. 283), con el fin de que cuando esté la argolla puesta en el piquete corresponda el principio de la cadena con el centro ó punta del piquete.

Lo primero que se necesita es alinear la base ó línea recta que se se quiere medir; y así, si se quiere tirar una línea en la direccion de A á B (fig. 284), se plantan en A y en B dos jalones que son los representados (fig. 284*), bien sea con la tablilla *a* ó sin ella; y despues se van colocando detras otros, de manera que mirando desde el primero A queden ocultos por el segundo; y para medirla se van clavando con el mazo (fig. 283) los piquetes á los estremos de la cadena; el sugeto que va delante lleva una porcion de piquetes debajo del brazo, los cuales los va cogiendo el que viene detras, y tantos como sean los piquetes que levante tantas serán las cadenas que se hayan medido.

Esc. En esta operacion conviene mucho el que la cadena esté bien tirante, y por lo mismo hemos aconsejado la construccion de la representada en la figura, pues aquellas en que los eslabones se unen por medio de anillos, pandean mucho mas, cuando es menester saltar algun hoyo. A la cadena podria suplir una cuerda con ciertas preparaciones, ó un compás de varas, pero no con tanta exactitud.

Las cadenas que yo usé en la citada nivelacion eran de alambre muy delgadito, á manera de rosario; y en vez de piquetes usé de unas agujas de hierro que se clavaban con mucha facilidad sin necesidad de mazo y que se podian llevar en la mano hasta diez sin gran incomodidad.

662 Si fuese necesario tirar ó medir una recta entre dos objetos remotos A y B (fig. 285), que desde el uno no se pueda ver el otro, se plantaría un jalon D hácia el medio de estos objetos, y de modo que se descubran ámbos desde allí; se pondria otro E en el alineamiento ED; despues se volvería al jalon D para examinar si el rayo visual DE va á parar al punto A; si se separa de él, se mudará el jalon D hácia la derecha ó hácia la izquierda, y se volverá á poner el jalon E en el nuevo alineamiento DE. Se probará aun si este alineamiento prolongado pasa por el punto A; si se separa de él, se volverá á ejecutar lo mismo hasta que el alineamiento DB corresponda exactamente al medio del punto A. Establecidos ya bien dos jalones E

y D se continuará el alineamiento como en la práctica precedente, haciendo colocar los jalones I, K &c. La línea AHGFE, se medirá de la misma manera.

Esc. Esta operacion se hace con mucha prontitud por dos sugetos diestros, y es el medio de que se hace uso en los ejércitos para alinearse en la línea de batalla.

663 Solo con el ausilio de la cadena y los jalones podemos resolver varios problemas.

1.° *Formar un ángulo recto, ó tirar una perpendicular á una línea dada.*

Res. Tómense 12 pies ó unidades en la cadena; con los lados 3, 4 y 5 en que se descompone el 12, fórmese un triángulo, y el ángulo comprendido por los lados, 3 y 4 será el ángulo recto pedido, y por consiguiente el un lado perpendicular al otro.

Dem. Porque valiendo los lados del triángulo 3, 4 y 5, se tiene $3^2+4^2=5^2$; luego el triángulo construido es rectángulo (489 cor.)

Esc. Si se pidiese un ángulo de sesenta grados se formaria un triángulo equilátero.

2.° *Medir una línea inaccesible.*

Res. 1.ª Sea por ejemplo AB (fig. 286) la línea inaccesible á causa del rio que la atraviesa; levántese en su estremo B una perpendicular BL; divídase en dos partes iguales en H, y clávese en este punto un piquete; levántese en L la perpendicular indefinida LD; búsquese el punto D, desde el cual tirando una visual por H vaya á parar al punto A, y digo que la línea LD es igual á la distancia AB que se pedía.

Dem. Porque los triángulos ABH,HLD son rectángulos en B y L por construccion; ademas tienen BH=HL tambien por construccion, y los ángulos en H iguales por opuestos al vértice; luego son iguales (361) y darán AB=LD, que era L. Q. D. H. y D.

Res. 2.ª Tiradas las perpendiculares BL y LD, desde un punto cualquiera D de esta ultima, tírese una visual al punto A; póngase un piquete en el punto H donde encuentra á la BL; mídanse las distancias LH,LD,BH y la línea AB se sacará por esta proporcion

LH:LD::BH:AB.

Dem. Porque en este caso los triángulos ABH,HLD son semejantes, pues ademas del ángulo recto en B y en L tienen los ángulos en H iguales por opuestos al vértice; y comparando sus lados homólogos, se tendrá HL:LD::BH:AB, que era L. Q. D. H. y D.

Res. 3.ª Prolónguese á arbitrio la línea AB hácia C; desde este punto C tírese una línea CE que forme con AC un ángulo de una magnitud cualquiera, procurando sin embargo que se aproxime lo posible al ángulo recto; despues mídase una magnitud cualquiera de C á D que se colocará tambien de D á E.

Desde el punto D al A tírese una línea, y póngase un piquete en el punto F donde encuentre á la BE que se formará tambien con jalones. Mídase bien exactamente la distancia BF que se llevará de F á G, y se hallará la línea AB por esta proporcion

EG:FG=BF::BC:AB.

Dem. Porque si se concibe BH paralela á CE, los triángulos BFH, FED serán semejantes y darán EF:BF::DE:BH; los triángulos ACD, ABH son tambien semejantes y dan AC:AB::CD:BH; y como DE=CD, estas dos proporciones tienen comun la segunda razon, y por lo mismo darán EF:BF::AC:AB, que dividiéndola se convierte en EF—BF:BF::AC—AB:AB; y como BF=FG, se tiene EG:FG::BC:AB.

Tambien se puede resolver esta cuestion del modo siguiente:

Plántese verticalmente un piquete BC (fig. 287), á poca distancia en el alineamiento de AB, plántese otro piquete DE, cuya altura sea tal que el vértice se halle en el rayo visual AC: despues mídase exactamente BD, la altura de los piquetes BC,DE, y se obtendrá la línea AB por esta proporcion DE:BC::AD:AB, ó dividiendo DE—BC:BC::AD—AB=BD:AB, que traducida nos dará esta regla. *La diferencia de los jalones es al menor como la distancia de estos es á la distancia por medir.*

Esc. Sabiendo formar un ángulo recto y de 60° (probl. 1.° y esc.) y dividir un ángulo en dos partes iguales (363 probl. 2.°), resulta que haciendo el uso conveniente de dichas construcciones, se podrán formar con la mayor facilidad sobre el terreno los ángulos de 45°,22°30′,11°15′,5°37′30″&c, 67°30′,78°45′,84°22′30″ &c, 33°45′,39°22′30″ &c, &c. Lo cual es de mucha utilidad en la fortificacion de campaña.

664 Con solo el ausilio de la cadena y piquetes se pueden medir tambien las alturas accesibles é inaccesibles por su pie; porque si nos proponemos medir la torre AB (fig. 288), plantarémos bien verticalmente un jalon EC, nos alejarémos alguna distancia de este jalon, y plantarémos otro DF, de manera que se pueda ver el estremo A de la torre por un rayo visual FEA que entrase con el estremo del piquete. Mírese tambien un punto de la torre tal como G por un rayo visual FG que pase por H, de manera que CH = DF. Ejecutado esto, si concebimos la FG, será paralela é igual con la DB, y se tendrán los dos triángulos semejantes AGF,EHF que dan FH:HE::FG:AG, y como los tres primeros términos de esta proporcion son conocidos por la medida que se puede hacer de ellos, se sigue que si al cuarto AG se añade la parte que está debajo de la línea GF que se puede medir, se tendrá la altura AB de la torre ó de cualquiera otro objeto.

Se puede omitir el tirar la visual FG, pero entónces despues de haber plantado el jalon CE se buscará el punto I del terreno de-

terminado por el rayo visual AI; despues se medirá la base IB, la porcion IC, y la altura del jalon CE; y los triángulos semejantes ABI,ECI darán la altura pedida por esta proporcion IC:EC::IB:AB.

Si la torre fuese inaccesible por su pie, se mediría primero por el método anterior la distancia inaccesible BC ó BD, y se ejecutaría lo demas como se acaba de manifestar.

Esta cuestion se puede tambien resolver cuando hay sol, por medio de la sombra. Para esto plántese un piquete DE (fig. 289) que esté bien vertical; despues mídase la sombra EF del piquete, tomada sobre un plano horizontal, la altura ED de este piquete sin comprender en ella la parte sumergida en tierra, y la sombra BC de la torre, que deberá tomarse tambien sobre un plano horizontal: despues para hallar la AB formarémos esta proporcion.

La sombra EF del piquete : á su altura DE, :: la sombra BC de la torre : á su altura AB.

Cuyo procedimiento está fundado en que los dos triángulos ABC, DEF teniendo iguales sus tres ángulos homólogos son semejantes. En efecto, el ángulo B = al en E por ser AB y DE perpendiculares al horizonte ó verticales; el ángulo A formado sobre el vértice de la torre es igual al ángulo D formado sobre el vértice del piquete por el rayo solar DF, que se puede considerar paralelo al rayo AC, de donde se deduce que el tercer ángulo igual al tercero.

Tambien se puede resolver la misma cuestion del modo siguiente: póngase á arbitrio como en C (fig. 290) un espejo bien horizontal; colóquese verticalmente un piquete ED, de manera que estando un ojo en su vértice D perciba el de la torre en medio del espejo C, mídanse despues exactamente las distancias BC, CE y la altura del piquete DE, con lo cual se tendrá AB por esta proporcion CE:ED::BC:AB; porque los triángulos ABC,CED son semejantes, pues el ángulo en B es igual con el E por rectos, y los en C por una propiedad que tiene la luz de formar el ángulo de incidencia ACB igual al de reflexion DCE; luego los dos triángulos son semejantes.

665 Cuando las operaciones son de grande importancia como las de levantar el plano de una provincia ó reyno, medir un arco de meridiano &c, es necesario recurrir á otra clase de instrumentos mas delicados para medir la base, y conviene que se mida lo menos dos veces para comparar los resultados. Por esta causa en aquella famosa espedicion que en compañía de los Académicos franceses hicieron nuestros sábios Don Jorge Juan y Don Antonio Ulloa en 1735, para medir un arco de meridiano inmediato al ecuador, se dividieron en dos compañías; y cada una principió por su lado á medir la base que en el llano de Yaruqui va desde Oyámbaro á Caraburu. Don Antonio Ulloa, Bouguer y la Condamine empezaron la medida desde Carabu-

ru; Don Jorge Juan y Mr. Godin desde Oyámbaro; en cuyo principio se hizo una gran señal semejante á las que se fueron colocando despues en toda la estension de la meridiana, y á la que se ve en lo (fig. 291), debajo de la cual se puso una gran piedra de molino, y sobre esta se hizo justamente en el parage donde caía la vertical del vértice de la señal, un pequeño punto que sirvió de principio á la medida de la base; diligencia que se practicó igualmente en el otro estremo.

{No era menos importante para la exactitud de la medida de la base, el método con que se debía hacer esta; pues el corto error de una línea en cada 10 toesas produciría otro considerable de casi 61 de estas en el grado. Esta consideracion los obligó á tomar todas las precauciones siguientes.

{Hicieron tres perchas de tres pulgadas de grueso en cuadro, de veinte pies franceses de largo cada una, de madera bien seca, para que fuesen poco sensibles en las intemperies, y no tomasen con facilidad otra figura que la recta; y en sus estremos clavaron planchas de cobre de línea y media de grueso, para que estuviesen bien terminadas como se ve en la (fig. 292).

{Para el gobierno y manejo de estas perchas al colocarlas en la direccion de la base y horizontalmente, hicieron unos caballetes semejantes con corta diferencia á los que describe Mr. Cassini en su medida de la tierra pág. 100, sobre los cuales se situaban, y daban todos los movimientos necesarios; pero con tanta lentitud y trabajo, que les fué preciso abandonarlos. Desde que tomaron esta resolucion fueron varias las ideas que se les presentaron para su construccion, las cuales ponían prontamente en práctica é iban secesivamente reformando hasta que usaron de los caballetes de Pintor que se ven en la (fig. 293), los cuales no solo se manejaban con prontitud, sinó que conservaban firmemente las perchas en la situacion que se ponían. Consistían en tres palos taladrados en sus estremos, por donde pasaba una clavija *a* que servía de eje, tanto para mantenerlos juntos, cuanto para poner el pie del medio atras, y los otros dos delante, en *b* había clavada una sortija por donde pasaba un cordel colgado, con cuyo estremo se ataba la percha prontamente por medio de un hojal y un boton, quedando el otro estremo firme en la clavija *d*, y volteando esta, subía y bajaba con suavidad la percha lo necesario.

{El canto ó estremo de la primera percha se ponía perpendicularmente sobre el punto desde donde se empezaba á medir por medio de una plomada que se dejaba caer de un hilo muy delgado A (fig. 294), que tocaba al piquete donde se había dejado la otra el dia antecedente, y se empezaba aquel dia á proseguir; la percha se colocaba en la direccion de la base por medio de otra plomada que se tenía en la mano, de lo cual se había encargado Mr. Godin, mientras Don Jor-

ge Juan procuraba situarla horizontalmente, por medio de un nivel de aire que ponía encima de una regla de dos varas de largo muy acepillada y exacta, para evitar con ella las ténues desigualdades de la percha.

{Puesta la primera percha se colocaba la segunda y tercera, haciendo se tocasen con prolijidad por sus estremos para que no se moviesen de la situacion en que estaban, y se disponían como se ve en la (fig. 294); despues de lo cual, se pasaba la mas atrasada adelante, y se iba ganando terreno, de suerte que siempre se veían dos perchas sin movimiento, y otra que se estaba disponiendo en línea recta para ir avanzando en la medida.

{La toesa de hierro que llevó Mr. Godin de París iba siempre con ellos; la cual estaba marcada con gran prolijidad, y se ponía siempre á la sombra donde ni el sol ni el agua la maltratasen, y con el termómetro á su lado para que diese el grado de calor ó frio que obtenía, y se le pudiesen hacer las correcciones esenciales sobre este punto.

{Todos los dias medían dos y tres veces las perchas estando en una línea recta, tomando con un compás de varas la longitud de la toesa con la mayor precision, y se iba trasfiriendo sobre las perchas en las cuales se iban clavando tachuelas en los puntos donde caía la punta del compas, para señalar sobre las cabezas exáctamente cada toesa, y siempre que se encontraba diferencia en la longitud de las perchas (que tenían todas tres juntas en línea 10 toesas), se hacía la correccion de añadir ó sustraer lo que se había notado, teniendo cuidado de quitar la corta diferencia que causaba el compás al medir las dos últimas toesas de los estremos; pues como las planchas de cobre estaban mas bajas que la superficie de las perchas, las dos últimas toesas se medían inclinadas, y reducidas al plano en que se medían las otras, había $\frac{2}{27}$ de línea de correccion.

{Siempre que el terreno iba declinando y que las perchas por haberlas de llevar horizontales, se hallaban muy altas ó bajas en los caballetes, se restituían á su lugar por medio de una plomada, dejando todas las noches un piquete bien clavado, en el cual tenían marcado con un punto el sitio donde había quedado la medida.

{La obra se fué haciendo con cuanta delicadeza se pudo emplear, empezando el dia 8 de Octubre de 1736, y estuvieron ocupados en ella hasta 5 de Noviembre; pero todos los dias se avanzaba con mayor diligencia, pues si el primer dia no medían mas de 40 toesas, en los últimos midieron 520, habilitados ya con la continuacion del trabajo, y quitados en los primeros dias los impedimentos.

{Midieron despues la pequeña quebrada por Geometría tomando los ángulos con una plancheta, su anchura era solo de 9 toesas, y agregada á la medida de las perchas, y hechas todas las correcciones precisas, hallaron la base en línea horizontal de 6272 toesas, 4 pies, 2 pulgadas, y 2 líneas.

{Don Antonio Ulloa con Mr. Bouguer y la Condamine la concluyeron de 6272 toesas, 4 pies y 5 pulgadas, que no difiere de la anterior determinacion de Don Jorge Juan mas que en 2 pulgadas y 10 líneas.

{La diferencia de las dos determinaciones aunque corta, fué preciso dividirla y tomar un medio entre las dos medidas, de suerte que establécieron la base de 6272 toesas, 4 pies $3\frac{1}{2}$ pulgadas, que es la distancia horizontal desde la señal que se hízo en la piedra de molino colocada en Oyámbaro hasta la señal en la piedra de molino colocada en Caraburu.

{La otra compañía compuesta de don Antonio Ulloa y de Mr. Bouguer y la Condamine, tambien usaron para el manejo de las tres perchas que tenían, hermanas de las otras, de los mismos caballetes que describe Mr. Cassini en su medida de la tierra pág. 100; pero á corto tiempo los encontraron con el propio defecto notado ántes; su poca solidez y mala disposicion para manejarlos les precisó á abandonarlos inmediatamente, y á medir con las perchas por el suelo, de la misma manera que los otros lo hicieron sobre los caballetes de Pintor, y solo se diferenciaron en el método de conducir la medida en la direccion de la base, porque en lugar de valerse de la plomada de que los otros se sirvieron, elevaron dos cábrias de cuyas ligaduras C,G (fig. 295) pendían dos plomadas GM,CD, cayendo el primero directamente sobre el piquete F, desde donde se empezaba la medida, y poniéndose un observador con su anteojo detras de la plomada GM, hacía que enfilasen las dos plomadas de las cábrias con la señal mas inmediata de las que se habían clavado sobre la base, con lo cual y tendiendo una cuerda desde el piquete E al F que se ponía debajo de la plomada CD, quedaba esta dirigida y exáctamente sobre la base, sirviéndoles para guiar inmediatamente á ella las perchas; y para que estas ú otro cualquier accidente, no pudiesen doblar la cuerda, tuvieron la precaucion de clavar las varas largas, que la mantenían recta.

{Como el terreno no era horizontal ni tampoco exactamente unido, no podian llevar de continuo sus perchas sobre él; y para allanar este inconveniente se valieron de cuñas y piquetes con las cuales elevaban las perchas lo necesario, y echaban las plomadas que se ofrecían como se ve en la (fig. 296).

{Examinaban diariamente la longitud de sus perchas por medio de una de ellas que la habían hallado mas constante; tenían cuidado de guarecerlas lo mas que se podía de todo género de humedad y calor, y algunas veces las cotejaban con la toesa de hierro de que se servía la otra compañía.

{La medida de las bases es una de las operaciones mas delicadas é importantes de la Geodésia; porque de su exactitud y de la medicion de los ángulos, es de lo que depende la determinacion rigorosa de las distancias.

{Por esta causa los Astrónomos franceses que se encargaron de la grande operacion para fijar el metro difinitivo, emplearon reglas de platina y de cobre que formasen termómetros metalicos.

{Estas reglas eran cuatro, que señalaron con los números 1,2,3 y 4 para mayor claridad, y tenían de largo 12 pies franceses, con cerca de 6 líneas de ancho y una de grueso. Cada una (fig. 297), estaba cubierta de una regla de cobre 6 líneas mas corta que la regla de platina; una y otra estaban fijas solo por uno de sus estremos, á fin de que la dilatacion de los metales no se manifestase, sinó por el lado del otro estremo que estaba libre. Entónces se apreciaba á cada momento el efecto de la temperatura por la cantidad en que se dilataba el cobre mas que la platina: esta cantidad ó diferencia de las dos dilataciones se estimaba con el ausilio de las divisiones *a,b* trasladadas hácia el estremo de la regla de cobre.

{Cada division era $\frac{1}{20000}$ de la longitud de la regla de cobre y la pieza *n* que se llama el nuñez por lo que dirémos muy en breve, daba partes diez veces menores ó 200 milésimas de la misma longitud. Las divisiones se leían fácilmente por medio de las lentes *L,L'*.

{La lengüeta *cd* era una pequeña regla de platina dividida tambien en 200 milésimas de la misma regla de metal, sujeta á correr entre dos ranuras del lado del termómetro metálico; servía para medir el pequeño intervalo que se dejaba entre las reglas cuando se media la base, y su nuñez era *n'*. Para preservar estas reglas de los accidentes que podían sobrevenirles en el transporte, y hacerlas aun mas propias para el uso á que se destinaban, estaba cada una encajada en una pieza de madera, de modo que permanecía constantemente en línea recta. Sobre el pequeño techo TT' (fig. 298) que lo cubría todo, había dos puntas de hierro *p,p'* en los estremos de cada regla, que se colocaban en la direccion de la base cuando se operaba.

{Los trípodes sobre que se colocaban las reglas, tenían cada uno tornillos en sus ángulos, con cuyo ausilio se podían levantar ó bajar estas reglas para poder hacer uso de las lengüetas.

{El instrumento ACB es una especie de escuadra compuesta de un arco de círculo graduado, y de una pieza de cobre, á la que está fijo hácia su medio un nivel de aire *ef*. Este instrumento se colocaba sobre cada regla al modo que lo hacen los albañiles; y cuando el nivél señalaba verticalidad de la pieza de cobre, se escribía el número de grados que señalaba la línea del estremo de esta regla. Despues se volvía el instrumento y se colocaba la pieza de cobre en la situacion vertical; entónces el arco que había corrido era el duplo de la inclinacion de la regla de platina.

{Se reconoció por esperimentos muy delicados y repetidos con mucho cuidado, que el termómetro metálico de la regla número 1 señalaba 385,3 partes á la temperatura del hielo, y que la dilatacion de cada regla era de 0,9245 partes por una parte de los termómetros. Esto supuesto, si t' es el término medio de todas las observaciones del termómetro metálico de la regla número 1, hechas durante la medida de la base, tendrémos que $(t'-385,3\ partes)\times0,9245$ será la correccion media de temperatura relativa á esta regla tomada por *módulo* al grado de hielo; módulo que designarémos por M.

{Los mismos esperimentos han hecho conocer que la regla núm. 2 espuesta á la misma temperatura, era mas corta que la primera en 0,2, y que su termómetro señalaba entónces 385,5 *partes*: por consiguiente la correccion que conviene á esta regla es

$$(t''-385,5)\times0,9245-0,2\ partes.$$

{Tambien se vió que las correcciones respectivas de las reglas núm. 3 y 4, son en las mismas circunstancias $\begin{cases}(t'''-380,3)\times0,9245-0,4p;\\(t^{IV}-384,3)\times0,9245-0,4p;\end{cases}$ ahora, multiplicando cada una de estas correcciones por el número de veces que las reglas correspondientes se han colocado sobre la base, se tendrá la correccion para las cuatro reglas; pero este resultado se puede encontrar mas simplemente, porque si t señala el término medio de las observaciones de los cuatro termómetros, hechas durante la medida de la base, la correccion media buscada será

$$(t-383,85)\times0,9245-0,25\ partes=P.$$

{Las partes de esta espresion representarán doscientas milésimas de la longitud fija M.

{En 1784 emplearon con muy buen éxito los sábios ingleses para medir la base de Hounslowheao tubos de vidrio, cuya dilatacion es menor que la del acero, del hierro fundido y de toda especie de cobre. Los esperimentos que se hicieron sobre este punto dieron á conocer que una vara maciza de vidrio es mas dilatable que un tubo de la misma materia. Pero despues estos sábios juzgaron á propósito medir una base de verificacion con una cadena de acero perfectamente construida, tan exacta y mas sólida que la de tubos de vidrio. Las dos bases situadas á 60 millas de distancia la una de la otra, habiendo sido unidas por una serie de 24 triángulos, no se encontraron sinó $4\frac{1}{2}$ pulgadas de diferencia entre la medida directa de una de ellas y el resultado del cálculo.

{Como la medida de una base es un asunto de tanta importancia, se debe imponer á los jóvenes en el manejo de las perchas; las que habia con este objeto en el Seminario eran de 12 pies de largo, y se sostenian en unas mesillas de la forma que se presentan en la (fig. 299), en las cuales el tornillo *a* servía para sujetar la pieza *b* de madera cuando estaba ya la meseta A en la posicion conveniente.}

De los instrumentos que sirven para medir los ángulos.

666 Para la medicion de los ángulos sirven muchos instrumentos, á saber, la *plancheta*, el *grafómetro*, la *brújula*, el *teodolito*, los *cuadrantes de círculo*, los *círculos repetidores* y los *recipiángulos*; siendo cada uno de estos mas acomodado que otros en ciertos casos particulares.

Antes de pasar mas adelante, vamos á esplicar separadamente una parte que es comun casi á todos los instrumentos, y de que generalmente no se adquiere una idea bastante exacta por no esplicarla aisladamente. En primer lugar, observarémos que en el papel se trazan y se miden los ángulos con un semicírculo ACB graduado (fig. 300), que se coloca de modo que el centro O caiga en el vértice del ángulo, y sobre uno de los lados el diámetro del mismo círculo. De manera que si colocado sobre el ángulo BOD hallamos que OD cae sobre la línea que forma los 45°, dirémos que este es el valor de dicho ángulo. Para que en uno de estos semicírculos se pudiesen trazar medios grados, se necesitaría que fuese de un radio bastante grande, y debería ser enorme y enormísimo si se quiesiesen trazar hasta minutos, lo cual haría muy embarazoso el instrumento. Por esta causa se ha ideado un medio para que con la menor magnitud posible, se obtengan los ángulos con la division mas pequeña posible.

Antiguamente se trazaban varias circunferencias concéntricas, cortadas trasversalmente por líneas que iban á parar desde un grado del círculo interior á otro del esterior; estas circunferencias servían para estimar los grados de diez en diez minutos; pero como este método no era exacto, se ha abandonado desde que se inventó uno muy ingenioso que ha recibido el nombre de *Nuñez* ó *Nonius*, porque se atribuye á Pedro Nuñez; los estrangeros le suelen llamar *Vernier*, y su construccion es la siguiente (*).

Supongamos que ACB (fig. 301) sea el borde de un instrumento, al cual se le llama *limbo*, que esté dividido en un número cualquiera de partes que se distingan bien; todo el artificio consiste en aplicar sobre

(*) *Segun aparece de una obra de Pedro Nuñez, impresa en Lisboa el año de 1542, intitulada* De crepúsculis, *su division consistía en colocar varias escalas paralelas ó círculos concéntricos diferentemente divididos; y Pedro Vernier publicó en Bruselas en 1631 un pequeño tratado con el fin de perfeccionar los instrumentos astronómicos de Ticho Brahe en que hace uso de la division actual.*

este borde otra pieza graduada de este modo: se elige un número cualquiera de partes del borde del instrumento, y este espacio se divide en la pieza que ha de servir de nuñez en tantas partes mas una, como se tomaron en el limbo del instrumento; por ejemplo, si el arco tomado sobre el limbo es de 19 partes ó grados, se dividirá en el nuñez en 20 partes iguales; por consiguiente cada espacio del nuñez será igual á $\frac{19}{20}$ del espacio del limbo, y la diferencia entre el espacio del limbo y el del nuñez será $\frac{1}{20}$, que está allí representado por *ab*; luego ya *dc* valdrá $\frac{2}{20}$, porque hay dos espacios, *ef* $\frac{3}{20}$ &c.

Por consiguiente para averiguar cual es la graduacion en que divide el nuñez al limbo de un instrumento, no hay mas que ver el espacio que está dividido en el nuñez, á cuantas divisiones del limbo equivale, y tendrémos que el valor de un espacio del nuñez será un quebrado que tenga por numerador á dicho número, y por denominador á dicho número mas la unidad, que es el número de divisiones del nuñez; luego si llamamos n al número de divisiones que se toman del limbo, $\frac{n}{n+1}$ representará el valor del espacio del nuñez, y $\frac{1}{n+1}$ la diferencia entre estos dos: de modo que la diferencia entre el valor del espacio del nuñez y el del instrumento estará representada por un quebrado del espacio del limbo, cuyo numerador sea la unidad y el denominador, el número de divisiones del nuñez.

El nuñez nos sirve para apreciar los ángulos con menos error que el de dicha diferencia. Supongamos que se quisiese averiguar el valor del ángulo AOG; aquí se ve que este ángulo equivale al valor de las seis divisiones que en el limbo hay desde A á m, y ademas al valor de mn; para apreciar este valor no hay mas que ejecutar lo siguiente: *se averigua cual de las divisiones siguientes del nuñez es la que mas coincide con la del limbo, y aquí vemos que es la que pasa por* B, *se cuentan los espacios del nuñez que hay entre la línea* OG *que pasa por* n, *y la que mas coincide que es aquí la que pasa por* B, *y hallarémos que son* 13, *y dirémos que el valor* mn *es* 13 *veces la diferencia entre el valor del espacio del nuñez y el del instrumento, que en nuestro caso equivale á* $\frac{13}{20}$.

Esta práctica está fundada en que si el ángulo fuese el AOB valdría 19 de las divisiones del limbo; pero como no son partes del ángulo AOG las 13 divisiones del nuñez que comprende el ángulo GOB, deberémos restar de 19 divisiones del limbo, el valor $13\times\frac{19}{20}$ de las trece divisiones del nuñez, y tendrémos que el ángulo

$$AOG=19-13\times\tfrac{19}{20}=19-\tfrac{247}{20}=19-(12+\tfrac{7}{20})=6+\tfrac{13}{20}$$

como sacamos por la regla.

Para que todo esto se perciba con mas claridad, nos contraerémos al caso en que cada division del limbo (fig. 301) valiese un grado; en este caso, la diferencia *ab* entre el espacio del nuñez y el del limbo, valdría $\frac{1}{20}$ de $1.^{\circ}=\frac{60'}{20}=3'$; *cd* valdría $6'$; *ef* valdría $9'$ &c; y el ángulo AOG valdría $6^{\circ}+13\times3'=6^{\circ}$ y $39'$.

667 Entendido esto, para medir los ángulos que forman entre si los planos, se usa de los instrumentos A y B (fig. 302) que se llaman *recipiángulos*; cuando el ángulo es entrante se mide con el B, colocando las dos reglas m, n de manera que se ajusten bien con los planos que forman el ángulo, y viendo por la parte opuesta de cuantos grados es el arco interceptado entre a y el punto b, medio de la pieza de metal que hay en la regla m, la cual contiene un nuñez que en los que posee el Seminario dividen el limbo del instrumento de 6 en 6 minutos. Cuando el ángulo es saliente se hace uso del A, que solo se diferencia del anterior en que ademas de las dos reglas iguales m, n, hay otras dos p, q, que unidas entre sí por medio de un clavija r forman un rombo; este se coloca de modo que las dos reglas p, q se ajusten bien á los planos cuya inclinacion se mide, y de este modo resulta ser el ángulo medido el c que señalan estas dos reglas; c es igual con d por ángulos opuestos de rombo, y d es igual con e por opuesto al vértice, el cual estará representado por los grados y minutos que esprese el arco *ab*.

668 Para averiguar los ángulos que forman entre sí tres puntos que se hallan sobre el terreno, el instrumento mas sencillo y tal vez el mas antiguo es la plancheta: esta se compone de un tablero A (fig. 303) que se coloca á rosca en un trípode P; sobre el tablero se estiende un pliego de papel, se señala el punto A adonde corresponde el vértice Q del ángulo del terreno, y por las cerdas r, s de la regla FG, que se llama *alidada*, se dirigen visuales á los otros puntos C, y B, y estas visuales se señalan con un lapicero sobre el papel, donde queda formado el ángulo $bAc=$ al que forman los tres puntos B,Q,C del terreno; y midiendo este ángulo con el semicírculo, se tendrá la magnitud del que se deseaba sobre el terreno. (*)

(*) *A mi tránsito por la Coruña en enero de 1824, tuve la satisfaccion de conocer personalmente al Doctor Don Domingo Fontan, Catedrático de matemáticas sublimes en la Universidad de Santiago; el cual me enseñó una plancheta circular, inventada por él; y construida en dicha ciudad de Santiago en 1820 por los dos apreciables instrumentistas Don José y Don Domingo Lares. La espresada plancheta es sin disputa mucho mas exacta, cómoda y ventajosa que la usada generalmente; y como hace honor no solo al inventor y constructores, sinó tambien á la Nacion, pondré aquí la descripcion que el mismo Sr. Fontan tuvo á bien entregarme.*

Consta este instrumento de un trípode en forma de baston y de una cajita circular de madera de diez pulgadas de diámetro y dos de espesor.

Por lo regular lo que se intenta buscar es el ángulo que fórman dichos objetos, suponiéndolos proyectados en un plano horizontal que pase por el vértice, y entónces es esencial el que se coloque el tablero en una situacion horizontal por medio de los niveles; y como en este caso puede ocurrir el que los objetos B y C no se vean por el espacio que ocupan las cerdas, es preferible á la alidada un anteojo A (fig. 304), el cual ademas de tener la circunstancia de poder bajar y subir la puntería cuanto se necesite, reune la ventaja de ver con claridad á mayor distancia.

669 Otra de los instrumentos que sirven para medir los ángulos es la *brújula*; esta es una caja de cuatro á seis pulgadas en cuadro (fig. 305) que tiene en su medio un estilete sobre el cual hay una aguja de acero bien equilibrada, tocada á la piedra imán; el pie de dicho estilete es el centro de un círculo que hay señalado en el fondo con sus divisiones correspondientes, y todo está cubierto con un cristal para que el aire no mueva la aguja. Fuera de la caja hay una pieza EF de forma prismática paralela á uno de los diámetros AB de la

El trípode es de una construccion igual á la de los bastones de que nos servimos para sentarnos: está armado inferiormente de tres puntas para fijarlo sobre el terreno, y superiormente de tres tornillos en los cuales se asegura la mesa que ha de servir para trazar las visuales. Unos y otros quedan defendidos por medio de la empuñadura y del regaton.

La cajita contiene la alidada con su nivel de aire, el declinatorio y un rayador que tambien sirve de lapicero: se divide en dos partes; y ademas de resguardar estos aparatos, está destinada una de ellas al uso principal del instrumento; se compone de dos piezas que se sujetan por medio de un tornillo; la una es de forma triangular, tiene tres cavidades y se coloca sobre los tornillos del trípode; la otra presenta una superficie circular muy plana para que se estienda sobre ella el papel, asegurándole y manteniendole sin arrugas por medio de un anillo de laton. En su centro hay una pieza del mismo metal con un agujero cilíndrico en donde entra el ege de la alidada. Antes de operar con esta, se traza un círculo por medio de una punta fija á fin de que se puedan transportar los ángulos describiendo otro de igual radio en el borrador del plano.

Armada la plancheta se nivela en todas direcciones por medio de los tornillos, se elevan las pínulas en una posicion triangular sujetando sus estremos por medio de un pasador, se enfilan cualesquiera objetos en todo el giro del horizonte, se trazan y numeran las visuales y se escriben los nombres, ó bien sobre ellas mismas ó en un cuaderno separado, y por último se orienta la estacion con el ausilio del declinatorio.

Cuando se quiera nivelar un terreno debe tenerse presente que la visual correspondiente á la interseccion de los hilos es paralela al ege del nivel.

aguja. En uno de los lados de esta pieza hay un agujerito adonde se aplica el ojo, y en el lado opuesto se levanta una piececita de metal para enfilar por medio de ella los objetos. Tambien se coloca la brújula sobre un trípode.

La construccion de este instrumento estriba en que una de las muchas propiedades interesantes de las agujas tocadas á la piedra imán, es el dirigirse hácia el norte (*), y si colocada en un parage miramos á un objeto cualquiera, y vemos el ángulo que forma la aguja NS con la línea AB, y luego miramos á otro objeto y determinamos el mismo ángulo, *la diferencia entre estos dos ángulos observados será el ángulo que fórman dichos objetos, si la aguja ha permanecido en ámbos casos á un mismo lado de la línea* AB; porque en un mismo parage y con poca diferencia de tiempo la diferencia de tiempo la direccion de la aguja deber ser la misma; por lo cual la diferencia entre dichos ángulos observados solo dependerá del que fórman entre sí los dos objetos con el parage en que se coloca la brújula. *Si al enfilar el otro objeto, la aguja pasase al otro lado de la línea* AB, *el ángulo buscado estaría representado por la suma de los dos observados*; porque en este

Si por algun obstáculo no pudiesen enfilarse algunos objetos sin que se varíe de centro de estacion, se muda la plancheta y fijando la alidada sobre la visual del objeto, se dá un movimiento al plano del instrumento aflojando el tornillo de la pieza inferior hasta cubrir exactamente dicho objeto, se fija el plano y se concluye la estacion trazando las demas visuales. Lo mismo podrá hacerse cuando se haya suspendido una estacion, ó en el caso de que se hubiese levantado la plancheta sin concluir la medida de los ángulos. Servia el mismo artificio para repetir ó multiplicar un ángulo. Debe evitarse el error de escentricidad insensible ó de poca consecuencia en muchos casos.

El Sr. Fontan ha tenido muchas ocasiones de comprobar su utilidad en la serie de operaciones geodésicas que emprendió, con otros instrumentos suyos de la mayor perfeccion, acometiendo la árdua empresa de levantar á su costa, y contando tan solo con la cooperacion de algunos amigos, la Carta físico geométrica de Galicia; obra que tiene muy adelantada, estando casi concluida la parte occidental de esta vasta provincia hasta el meridiano del cabo de Vares y levantado el plano de la comarca de Valdeorres y otras, de modo que se halla situada la mitad de la superficie de Galicia.

(*) *No se dirige exactamente al norte, y lo que se separa de esta direccion se llama* declinacion; *la declinacion varía por muchas circunstancias, como son el lugar, el tiempo &c; el dia 23 de setiembre de 1804 á las seis de la tarde hallé en la huerta que mi amigo Don Saturio Angel de Velasco tenia á la salida de la puerta de Santa Bárbara, que dicha declinacion era de 21° y 30′ al Oeste.*

caso no solo había andado la aguja la magnitud del ángulo primitivo para llegar á la línea AB, sinó tambien todo lo que se había separado de esta, pasando al otro lado.

670 De todos los instrumentos que se han inventado para las operaciones geodésicas, los mas á proposito son el *teodolito*, y el *círculo repetidor* de Borda. El teodolito consiste en un círculo entero graduado A (fig. 306), sobre el cual se eleva verticalmente un arco de otro círculo B tambien graduado, sobre cuyo centro hay un anteojo C, que tiene por la parte inferior y en una situacion paralela un nivel de aire D. Este instrumento se coloca sobre un trípode E, y sirve para tomar á un mismo tiempo el ángulo horizontal, que forman entre sí dos objetos, y el vertical que forman con relacion al punto donde se coloca el instrumento.

La primera operacion que hay que ejecutar es poner á nivel el plano A, lo que se consigue por medio de los tornillos *a,b,c* y *d* (que está en direccion opuesta al *b*, y por lo mismo no se ve); para ejecutar esto con mayor sencillez, conviene colocar el anteojo C en la direccion de los dos tornillos *a,c*, y estando colocado el arco vertical en la division cero, se aprieta un tornillo al mismo tiempo que se afloja el opuesto, hasta que la búrbuja de aire queda en el medio del nivel, en cuyo caso queda nivelado el plano A respecto de la direccion *ac*: en otros teodolitos hay otro nivel que siempre guarda una posicion perpendicular al D, y por medio del cual se nivela todo el plano por medio de los otros dos tornillos *b* y *d*; pero como el que describimos, que es el que posee el Seminario, no tiene sinó el nivel D, para nivelar todo el plano A se le da vuelta por medio del tornillo *m* hasta que se coloque el anteojo en la direccion de los otros dos tornillos, por cuyo medio se nivela el plano en esta direccion; y estándolo ya respecto de dos líneas, lo estará todo el plano.

Tanto en la graduacion del círculo A como en la del arco vertical hay un nuñez; el del plano horizontal, en el del Seminario, da los ángulos de 3 en 3 minutos, y el vertical de 5 en 5.

671 Cuando se quiere que las divisiones de los instrumentos sean bastante pequeñas, es necesario aumentar convenientemente el diámetro del instrumento, y para que no sea tan incómodo su manejo se toma solo un arco; cuando el arco es un semicírculo se llama *grafómetro*; cuando de 90° ó $\frac{1}{2}\pi$, *cuadrante*; cuando de 60° *sestante*; cuando de 45° *octante* &c.

A pesar de toda la destreza de los instrumentistas, siempre se debe sospechar el que haya algun error en la division de los instrumentos; por esta causa se ha ideado un medio de hacer que este error sea tan pequeña como nos acomode; el cual consiste en medir un ángulo muchas veces, y el arco que resulta de la medida de *n* veces el ángulo, dividirlo por *n*; con lo cual si el error que se puede sospechar al averiguar el valor del arco total, es *a*, el que podrá haber en el ángulo observado solo será $\frac{a}{n}$; luego está en nuestra mano hacerle que sea tan pequeño como se desee. Este apreciable instrumento es el que se llama *círculo repetidor*.

Al teodolito tambien se le puede dar la forma conveniente para repetir los ángulos, y con esta modificacion lo considero mucho mas ventajoso que el círculo repetidor (*); he visto con esta circunstancia uno que conservaba Don Agustin de Betancourt, Inspector general que era de caminos, construido por Ramsdem, que parece no dejar nada que desear. (**)

672 Entendido esto, pasemos á hacer algunas operaciones, y nos ceñirémos á determinar alturas, distancias inaccesibles en parte ó en todo, y á manifestar como se levanta un plano de corta estension.

Cuando se puede uno acercar al pie de la altura AB (fig. 307), y en su plano se puede medir una base, se elige esta de manera que sea sobre poco mas ó menos igual con la altura por medir; se coloca el instrumento en su estremo, y con él se mide el ángulo de elevacion AFG; y tendrémos que el rayo visual AF, el horizontal GF y la parte AG de la altura, formarán un triángulo rectángulo, en que se conoce ademas del ángulo recto en G uno de los ángulos agudos, y el cateto FG que es igual con la base medida BD; luego hallarémos el lado AG diciendo R:tang.AFG::GF=BD:AG; y añadiendo á esto la parte BG, se tendrá toda la altura AB.

673 Cuando hay algun obstáculo que impida el acercarse al pie como en la (fig. 308), y se puede medir sin embargo una base AB en el plano de su pie, se procede del modo siguiente: colocado el instru-

(*) *Ya se van convenciendo muchos de esta verdad que yo he indicado por primera vez; y hasta el mismo Puissant no puede ménos de confesarlo en la segunda edicion de su Geodésia.*

(**) *El P. Fr. D. Agustin Canellas, Sócio y censor de la Academia de ciencias naturales y artes de Barcelona, ha inventado en estos últimos años un instrumento al que ha llamado precisivo, por medio del cual se proporciona mayor exactitud á las observaciones geodésicas y astronómicas. Segun el elogio de Cañellas, hecho por Don Ramon Muns y Seriñá, en nombre de la misma Academia, "la precision de este instrumento en los resultados de las observaciones para la medicion de los ángulos, debe ser tal que con una simple observacion puede obtenerse un resultado diez veces mas precisivo, que con el instrumento mas perfecto que conocemos en el dia." Don Cayetano Feralt, Director del gabinete de máquinas de la Junta de Comercio de Barcelona ha construido este instrumento segun las ideas del autor.*

mento en A, se toma el ángulo de elevacion CAD; y colocado en B, el ángulo CBA; con lo cual tenemos en primer lugar un triángulo CAB, en que conocemos el ángulo en B y el lado AB porque los hemos medido, y el ángulo CAB por ser suplemento del medido CAD; y en virtud de lo dicho (638) hallarémos el lado CA. Conocido este, queda ya determinado en el triángulo rectángulo CAD la hipotenusa y un ángulo, y por lo mismo podrémos hallar el cateto CD, que es la altura que deseamos.

{674 Ocurre con mucha frecuencia en esta operacion el no saber si la base está ó no en el mismo plano del pie de la altura, y aun el que no se vea el pie de la altura por medir: en cuyo caso es ya mas engorrosa la operacion. Para fijar bien las ideas, esplicarémos la que egecuté con mis discípulos del Seminario el dia 13 de Noviembre de 1806 para medir la altura del punto mas alto de la veleta de la Real Capilla parroquia de San Antonio de la Florida. En este caso, como el punto mas alto C (fig. 309) va á parar á lo interior de la iglesia, efectuamos la operacion del modo siguiente. Medimos una base AB de 100,59 pies cuyos estremos A y B se hallaban en las rejas que sirven de sumidero para que el agua llovediza pase á la alcantarilla. Desde el estremo A se dirigió la visual AC al punto mas alto de la veleta de la media naranja, y hallamos que el ángulo vertical que formaba dicha visual con la horizontal AD, que se halla en el plano vertical de los puntos A,C, era como se señala en la figura de 38°8′, y el ángulo que dicha visual, cuya proyeccion sobre el plano horizontal que pasa por A es AD, formaba con la base AB era de 59° Colocado el instrumento en B, hallamos que el ángulo vertical CBD era de 38°30′, y el horizontal DBA de 56°33′.

{Hecho esto, en el triángulo horizontal ADB conocemos la base AB y los ángulos adyacentes; luego encontrarémos uno de los lados AD, hallando el valor del tercer ángulo ADB, que resulta de 64°27′, y diciendo:

*sen.*ADB = *sen.*64°27′: AB = 100,59 :: *sen.*DBA = *sen.* 56°33′:AD que por logaritmos hallarémos ser de 93,026.

{Ahora, en el triángulo CAD que es rectángulo en D, porque la AD es horizontal y la CD vertical, conocemos ademas del ángulo recto, el lado AD y el ángulo CAD; luego por la segunda analogía de los triángulos rectángulos, dirémos

R:*tang.* CAD = *tang.* 38°8′::AD = 93,026:CD, que por logaritmos hallarémos ser de 73,029 pies. Añadiendo á esto la altura del teodolito que era de 5,28 pies, resulta que el punto mas alto de dicha veleta estaba 78,309 pies mas alto que el estremo A de la base. Ahora, si se quisiese averiguar cuanto estaba mas alto el punto de dicha veleta que otro punto cualquiera, averiguaríamos por el mismo método lo que este nuevo punto estaba mas alto ó mas bajo que el punto A de la base, y la diferencia entre dichas alturas sería la que espresase cuanto mas alto ó bajo estaba el punto C que el otro que hemos considerado.}

675 En la esplicacion que acabamos de hacer sobre la medicion de las alturas, hemos prescindido de la refraccion y diferencia de horizontes, porque cuando no media mucha distancia no influye casi nada; pero advertimos que en operaciones de grande importancia se deben hacer ciertas correcciones, que no nos podemos detener á manifestar por ahora y reservamos para mas adelante (*); pero sobre lo que sí indicarémos algo es sobre el método de medir las alturas por medio del barómetro.

En este instrumento que está representado en la (fig. 310), la altura de la columna de azogue *ab* respecto del nivel *mn*, señalado en la cubeta, indica que el peso de una columna de aire de igual diámetro,

(*) *Los acontecimientos que han sobrevenido en España, desde el año de 1807 en que yo concluí este tratado, son de tal naturaleza, que parece están fuera del alcance de cuantos métodos se han discurrido para conjeturar; y por consiguiente no se debe estrañar el que hasta ahora no haya cumplido la promesa del testo; pues las circunstancias han sido tales, que á no ser por mi asíduo y contínuo trabajo, y por el celo ardiente y patriótico que siempre he tenido para promover los progresos de este ramo tan importante de los conocimientos humanos, no hubiera podido llegar á superar los enormes y poderosos obstáculos que á cada paso he encontrado para publicar lo que hasta ahora ha salido á luz. Por esta razon creo no será inútil el dar á conocer en qué consiste el fenómeno de la* refraccion, *y el manifestar el modo de calcularla, deduciendo la regla práctica que con mas exactitud se puede seguir para hacer las correcciones convenientes en España.*

Con cuyo motivo, observaré que el globo terrestre se halla rodeado por todas partes de un fluido elástico, ralo y transparente, que se llama aire. *Todo este fluido, eminentemente necesario para nuestra existencia, forma la* atmósfera; *tiene la propiedad de condensarse por el frio y dilatarse por el calor; á medida que uno se transporta á las regiones elevadas de la atmósfera, el aire se hace mas ralo, esto es, en un mismo volúmen contiene menos cantidad de aire en peso; y á causa de su compresibilidad, sus capas inferiores son mas densas que las superiores que pesan sobre ellas. A una temperatura constante, su densidad es proporcional al peso que le comprime; y como nosotros vemos los objetos por los rayos de luz que, ó emanan, ó se reflejan de ellos, resulta que estos rayos de luz pasan por la porcion de aire que hay entre el objeto y nuestra vista, y por consiguiente no los vemos sinó á traves de este fluido. Cuando el objeto es un astro, no se ve sinó á traves de toda la atmósfera, cuya altura total es de unas noventa mil varas; y como es un hecho constantemente observado, que* la luz, pasando oblicuamente de un medio á otro cuya y que termine en la parte mas alta de la atmósfera, es igual con el peso de dicha columna de azogue; luego si un mismo barómetro lo colocamos en un parage cualquiera, y luego en otro que esté mas elevado, la columna de azogue en este será menor que en el anterior, por cuanto sobre este parage no cargará tanto aire como sobre el otro; luego si se tuviese bien conocida la relacion que guarda el peso del aire con la altura vertical de los parages, por medio de la diferencia de las columnas de azogue en el barómetro, podríamos hallar la altura vertical.

Esta relacion, así como todas las demas leyes de la naturaleza no la podemos conocer *á priori*; pero fundándose en la teoría del aire, se llega á obtener una fórmula con una cantidad indeterminada, que se determina *á posteriori*, haciendo que los resultados de la fórmula

---

densidad es diferente, muda de direccion aproximándose á la línea perpendicular á su superficie comun en el punto en que entra en el medio mas denso, *resulta que este desvío es el que se conoce con el nombre de refraccion. El rayo directo y el rayo reflejado forman con esta perpendicular, dos ángulos, de los cuales el uno es el* ángulo de incidencia *y el otro el* ángulo de refraccion; *y los senos de estos dos ángulos están siempre en una relacion constante. La esperiencia prueba tambien que la refraccion de los rayos sobre una misma superficie crece con la oblicuidad y que la fuerza refringente del aire es proporcional á su densidad ó á la presion que sufre.*

La densidad de las capas de aire aumentando progresivamente desde los límites de la atmósfera hasta la superficie de la tierra, se sigue que un rayo de luz que atraviesa oblícuamente todas estas capas, supuestas esféricas, concéntricas, en equilibrio y de un pequeño espesor, llega á nosotros siguiendo una curva cóncava hácia la superficie terrestre; pero como suponemos siempre los objetos sobre la misma direccion de los rayos de luz que recibimos de ellos, los referimos al punto que se halla sobre la tangente á la curva ó trayectoria *descrita por el rayo luminoso, al punto en que nosotros estamos. De donde resulta que la* refraccion es el ángulo que esta tangente forma con la recta tirada desde nuestro ojo al lugar real del objeto.

Se concibe, por la esplicacion sucinta que acabamos de hacer de este fenómeno, que parece ser debido á la accion que los cuerpos ejercen sobre la luz, que la refraccion astronómica ó mas bien atmosférica *es la mayor posible cuando los astros se hallan en el horizonte; que ella disminuye á medida que se elevan sobre este plano, y que es nula cuando los astros pasan por el zenit.*

El efecto de la refraccion es, pues, hacer aparecer los objetos mas elevados de lo que están efectivamente. Asi, la altura angular de un objeto observado desde la superficie de la tierra es una altura aparente;

convengan con cierto número de alturas que se miden geométricamente. Pero como todas estas fórmulas dependen de la latitud del lugar, por una observacion á que me parece no han atendido bastante los Físicos, resulta que las fórmulas sacadas en un pais no sirven para otro (*).

Con la mira de determinar una que convenga á nuestro país, he procurado medir algunas alturas geométricas, y compararlas con las barométricas; y pondré aquí el resultado de la siguiente.

El dia 15 de Diciembre de 1806 salí á las diez de la mañana con los caballeros Seminaristas que asistían á mi clase, á colocar un barómetro al nivel del primer escalon de la Real Capilla de San Antonio de la Florida; el caballero Don Francisco La-Torre, que fué entre mis discípulos á quien tocó la suerte, subió con Don Celedonio

---

y por consiguiente es necesario disminuirla de la refraccion para tener la altura verdadera.

La refraccion sobre diez grados de altura, á igualdad de circunstancias, no depende sensiblemente sinó del estado del barómetro y del termómetro en el lugar de la observacion. Los Geómetras y particularmente Mr. Laplace, han designado sus leyes; pero á una altura mas pequeña y en el horizonte sobre todo, sufre variaciones muy irregulares y de todo punto inesplicables.

Para aclarar cuanto acabamos de esponer, supongamos que TPQ sea la tierra (fig. 294) y S el sol ó cualquiera otro astro que se observe; y que AB sea la capa superior de la atmósfera, la que supondrémos para mayor claridad dividida en tres capas por los arcos CD, EF. Sea* Sm. *un rayo de luz; al llegar á la atmósfera, resulta, que ya sea por la atraccion que las capas atmosféricas egerzan sobre la luz, ó ya sea por cualquiera otra causa desconocida, el hecho es, que el rayo* Sm *en vez de seguir la línea recta* Sms *se separa de esta direccion y toma la* mn *aproximándose á la perpendicular* mL, *que se concibe en* m *á la capa AB. Si suponemos que la densidad de la capa ABDC sea unifor-*

(*) *El Señor Don Juan de Peñalver tiene ideado un método muy ingenioso para determinar una fórmula que sirva en todos los paises; y solo le falta un dato que es el tener observaciones de dos parages que se diferencien bastante en altura vertical, me lo ha dicho repetidas veces, y tengo ánimo de emprender esta série de observaciones en lo sucesivo.*

En mi Compendio de Mecánica práctica, *se halla la fórmula deducida posteriormente por Laplace para una latitud cualquiera. Y en nuestro tomo 3.° parte 1.ª la deducimos nosotros con toda exactitud refiriéndonos á medidas españolas; y determinamos por medio de ella, la altura de Madrid sobre el nivel del mar, que resulta ser de 2394 pies ó 798 varas españolas.*

Rostriaga, maquinista del Seminario, al desván que está sobre la habitacion del Señor Director general, y por medio de cuatro observaciones se sacó este resultado medio.

La altura del barómetro colocado 14 pulgadas mas bajo que el marco inferior de la ventana de dicho desván, y puesto por la parte de afuera, despues de hechas las correcciones necesarias, era de 369,321364 líneas españolas.

La altura del barómetro colocado á la misma hora al nivel del primer escalon de dicha Real Capilla, despues de hechas las correcciones, era de 373,628893 líneas españolas.

Restando ahora estas dos alturas, resulta 4,307566 líneas; y esta diferencia manifiesta que el peso de una columna de azogue de esta altura es igual al de la columna vertical de aire, que hay entre el plano horizontal del primer escalon de dicha Real Capilla y el plano horizontal que pasa por el parage donde se hallaba el otro barómetro.

Ahora, la regla mas sencilla, y al mismo tiempo la ménos exacta en otros paises, es el que una línea española de diferencia de altura en el barómetro corresponde á 75 pies españoles de altura vertical entre los dos puntos; luego por esta regla la diferencia de altura entre los dos puntos donde se colocaron los barómetros, será $75\times4,307566 = 323,06745$ pies españoles; pero el punto donde se hallaba el barómetro superior estaba 14 pulgadas mas bajo que el marco inferior de la ventana del desván, luego por el barómetro sacamos que el marco inferior de la ventana del desván estaba 324,1341 pies españoles mas alto que el piso del primer escalon de la espresada iglesia de san Antonio.

me, entónces el rayo de luz seguirá en la línea recta mn *hasta que llegue á CD; en cuyo caso, suponiendo que la capa CDFE tenga mayor densidad que la ABDC, el rayo de luz, en vez de seguir la direccion de* mnn′, *tomará la de* nr *aproximándose á la perpendicular que se concibiese en* n *á la CD; y suponiendo que la densidad de dicha capa sea uniforme en toda su estension, correrá el rayo de luz en la línea recta* nr *hasta llegar á* r, *donde si suponemos que principie la capa de mayor densidad, sufrirá la luz otro desvío, y en vez de continuar por la* rr′, *seguirá la direccion* rO *y suponiendo que en O se halle el ojo de un espectador, tendrémos que como el fenómeno de la vision se verifica siempre en línea recta, el espectador verá el objeto en la direccion de* OrS′; *y como si no hubiese habido atmósfera, el espectador veria el objeto en la direccion de la recta* OS *que va de su ojo al objeto S, resulta que al medir por egemplo el ángulo HOS que espresa la elevacion del astro sobre el horizonte OH, aparezca el ángulo ser el HOS′; y resultando por consiguiente el error que espresa el ángulo* SOS′.

De manera que el efecto de la refraccion es hacer aparacer los objetos mas altos de lo que están en efecto; y para que resulten con su altura verdadera HOS, *es necesario restar de la altura observada* HOS′, *el valor de SOS′ que es el error que causa la refraccion.*

Para que los jóvenes se convenzan por sí mismos de este fenómeno de la refraccion, les indicarémos que observen por egemplo un palo derecho que esté en parte sumergido en el agua y verán que el palo parece estar tronchado por el parage en que entra en el agua; y este fenómeno proviene de la refraccion; la cual se verifica en general siempre que la luz pasa de un medio á otro de diferente densidad, como sucede en este caso con el aire y el agua.

Para que se concibiese con claridad el fenómeno, hemos supuesto la atmósfera dividida en capas de aire de igual densidad; pero como esto no se verifica, pues que la densidad va creciendo desde lo mas alto de la atmósfera donde es la menor hasta la superficie terrestre donde es la mayor como se indica en la (fig. 296) por el espesor de los puntos, resulta que en vez de seguir la luz el polígono* mnro *de la (fig. 294*), corre efectivamente una curva* abdo *(fig. 296*) y el espectador ve el objeto en la direccion de la tangente OS′ á dicha curva: apareciendo la altura del astro mayor de lo que efectivamente es, todo el valor del ángulo SOS′.*

Cuando el objeto que se observa es un astro, la refraccion se llama astronómica, *y su efecto se debe á toda la atmósfera, porque media toda ella entre el astro y el observador, y mientras menor sea el ángulo de elevacion sobre el horizonte, el efecto de la refraccion será mayor, porque tiene que atravesar mayor parte de la atmósfera; á proporcion que el ángulo de elevacion es mayor, va disminuyendo el efecto de la refraccion, el cual será enteramente nulo cuando el astro se halle en el zenit, esto es perpendicularmente sobre el mismo observador.*

Cuando el objeto se halla dentro de la atmósfera, la refraccion se llama terrestre; *así, cuando el objeto sea el punto* c, *el efecto de la refraccion es que el rayo visual en vez de dirigirse desde* c *á* m *por la línea recta* cm, *camina por la curva* cnm; *y le vemos en la direccion de la tangente* mt, *espresando el ángulo* cmt *el error que causa la refraccion.*

Entendido esto, pasemos á manifestar como se mide la refraccion terrestre. Supongamos que desde el punto A se observa un objeto terrestre B (fig. 297); el rayo luminoso que transmite su imágen, seguirá, en virtud de lo que precede, la curva BDA, y el objeto B se verá en la direccion de la tangente AB′ á esta curva, es decir en B′; siendo el ángulo BAB′ el que mide el efecto de la refraccion sobre la posicion del objeto observado.*

Afortunadamente en la práctica de la Geodésia, la trayectoria BDA, cuya naturaleza es imposible conocer, es siempre bastante pequeña para poderse reputar como un arco de círculo ó que se confunde con su cir-

Mas por las operaciones hechas con mis discípulos del Seminario en los años de 1804 y 1806, resulta que el marco inferior de la ventana de dicho desván está 331,0987 pies mas alto que dicho primer escalon, luego solo resulta una diferencia de ménos de 7 pies. Las demas reglas ó fórmulas que son mas exactas en otros paises nos dan una diferencia mayor (*).

De-Luc ha llegado á una determinacion muy sencilla para la medicion de las alturas por el barómetro, que consiste en tomar en las tablas de logaritmos, los logaritmos de los números de líneas francesas que espresa la altura del barómetro; se halla la diferencia y en esta diferencia se corre la coma cuatro lugares hácia la derecha, y lo que resulta espresará en toesas francesas la distancia vertical entre las dos estaciones.

---

culo osculador; y en este caso el ángulo de refraccion B′AB, se halla formado por una cuerda AB y una tangente AB′, por lo que tiene por medida la mitad del arco ADB que la cuerda AB subtende. Respecto de un objeto D intermedio, la refraccion estaría representada en virtud de lo que acabamos de decir, por el ángulo B′AD, que tendria tambien por medida la mitad del arco AD. De donde se sigue que la refraccion terrestre en A, es proporcional á los arcos AD,AB.

Ahora, si por los puntos A,D,B se conciben las verticales AC,DC,BC pasarán próximamente, por el centro C de la tierra, y los arcos ad, ab, *que interceptarán en un círculo máximo, estarán aproximadamente en la misma relacion que los arcos correspondientes AD, AB. Por lo que se puede decir que la refraccion terrestre es proporcional al ángulo formado por las verticales de los estremos de la curva de refraccion. Luego si espresamos por* r *la refraccion BAB′ correspondiente á la amplitud* C *de un arco terrestre* ab; *se tendrá en general* r=nC; *siendo* n *un coeficiente, que la esperiencia debe hacer conocer, y que es constante para el mismo estado de la atmósfera; pero en general* n *varía de un modo tan irregular, que parece imposible llegar á señalar la ley de estas variaciones en virtud de las indicaciones del barómetro y del higrómetro. Mr. Delambre ha notado en Francia que* n *tiene aproximadamente por valor medio* 0,07876, *ó simplemente* 0,08. *Ha encontrado algunas veces para tiempos lluviosos del invierno* 0,15; *pero por lo regular en estío es de* 0,06 *á* 0,08, *y en el invierno de* 0,08 *á* 0,10. *Otros observadores han encontrado aun* 0,5 *para los tiempos de lluvia. Si* n *fuese negativo la refraccion bajaria las imágenes de los objetos, en lugar de elevarlos; pero*

(*) *Debemos advertir que en la medida geométrica se debe sospechar algun error, parque la altura de la cuesta de Arineros la medimos con el teodolito, y el ángulo de elevacion era demasiado agudo.*

{Es de la mayor importancia el hacer las correcciones en las alturas observadas; porque á causa de este descuido, y de otros que se han padecido en las observaciones meteorológicas, resulta que no se puede hacer uso de las que se tienen de hace mas de un siglo.

{Las correcciones que nosotros hemos hecho las hemos efectuado por la siguiente fórmula que se debe á D. Juan de Peñalver

$$a=[A'+r^2(A'-A)]\left(1-\frac{g'-g}{Mm}\right)+[n-r^2(A'-A)]\frac{g'-g}{Mm}\,,\ \text{ó}$$

$$a=A'\left(1+r^2+g\,\frac{1+2r^2}{Mm}\right)-g'\left(A'\,\frac{1+2r^2}{Mm}-\frac{2r^2A+n}{Mm}\right)-$$

---

este fenómeno es raro, y se verifica en circunstancias que no son adecuadas para ninguna operacion geodésica.

Como lo que á nosotros nos interesa conocer no es la refraccion de otros paises, sinó la que se verifica en el nuestro, cuando me propuse hacer la nivelacion citada con el fin de traer aguas á Madrid, traté de determinar el coeficiente de la refraccion que corresponde á la latitud de Madrid que casi se halla en el centro de España; y á falta de observaciones directas, el medio mas espedito era el hacer las reducciones convenientes tomando el dato de la refraccion media en Francia. Pero esta no la tomé, como generalmente se supone de 0,08; *sinó de los datos mas exactos que pone Mr. Delambre en su Astronomía. Este sábio da por término de la refraccion* 0,07876; *y teniendo presente que por diez y siete observaciones que merecen mucha confianza, hechas por el mismo en estío y en otoño, resulta el coeficiente* n=0,0783; *juzgué conveniente el tomar un término medio entre estos dos términos, y resulta por término medio para el coeficiente de la refraccion en Francia el valor de* n=0,07853; *siendo allí la temperatura media* 10 *grados del termómetro centígrado y* 0,76 *metros la altura media del barómetro. Y como en Madrid la temperatura media es* 15.° *del termómetro centigrado, y* 30 *pulgadas y* 6,5 *líneas españolas la altura media del barómetro, despues de hacer las reducciones convenientes, hallé que se puede tomar por valor medio de la refraccion en España el de* n=0,07187, *que es próximamente* $\frac{1}{14}$ *del arco terrestre interceptado entre el objeto y el observador.*

Quiere decir esto, que cuando al medir una altura, encontramos por ejemplo el ángulo de elevacion CAD (fig. 309) de 38° *y* 8′, *si querémos corregir este ángulo del efecto de la refraccion, deberémos restar de él,* $\frac{1}{14}$ *del ángulo que en el centro de la tierra formarian dos lineas verticales que se concibiesen en A y en D.*

Para esto, observarémos que un grado terrestre contiene 133019,18 *varas españolas; por consiguiente á un minuto le corresponden* 2217 *varas,*

$g\frac{2r^2A+n}{Mm}-r^2A$; en que a espresa la altura corregida, A' la altura observada en el barómetro; r espresa la relacion entre el diámetro del tubo y el de la cubeta; g' es el grado de calor observado; g es el grado de calor que señalaba el termómetro cuando se cargó el barómetro, A la altura de la columna de azogue al cargarse á la temperatura g; $\frac{1}{m}$ espresa la dilatacion del mercurio desde la fundicion del hielo hasta el agua hirbiendo; M el número de partes en que está dividido el espacio comprendido entre el hielo y el agua hirbiendo, y n es la altura del mercurio en la cubeta.

---

y á un segundo 37 varas: y pues que la distancia horizontal AD la hemos obtenido de 93 pies, que hacen 31 varas, resulta que el ángulo que formarían en el centro de la tierra dos perpendiculares á su superficie tiradas en los puntos A y D formarán un ángulo espresado por $0'',84$, *y tomando ahora* $\frac{1}{14}$ *de esta cantidad resulta* $0'',06$, *esto es*, seis centésimas *de segundo.*

Y como por la naturaleza de la operacion y del instrumento de que hemos usado, solo se han apreciado los minutos primeros, se echará de ver con cuanto fundamento hemos asegurado en el testo, que cuando no media mucha distancia, no influye casi nada la refraccion.

Por otra parte, lo que acabamos de manifestar será muy útil para los principiantes, pues que tienen ya bien especificado lo que deben hacer en el caso de que por la naturaleza de la operacion convenga atender á la refraccion.

Terminaré esta nota manifestando como influye la refraccion en la nivelacion, y cómo formé la tabla de correccion que se debe hacer á las alturas observadas por la diferencia entre el nivel verdadero y aparente y la refraccion, que es la 2.ª tabla del §. 657.

*Cuando por medio del nivel se dirige una visual OE (fig. 296**) esta línea es horizontal, y será tangente á la curva de refraccion* DrO, *de manera que estando la lenteja ó tabla de la mira realmente en* D, *nosotros por el efecto de la refraccion le suponemos en el punto* E: *y para referir el punto D al nivel verdadero B, deberémos rebajar de la altura observada el valor de* $ED=BE-DE$; *pero BE es la diferencia entre el nivel verdadero y aparente, y DE es el efecto que produce la refraccion. Luego cuando se desee atender al efecto de la refraccion, se debe restar de las alturas de nivel observadas, no la diferencia BE entre el nivel verdadero y aparente, correspondiente á la distancia OB, sinó la cantidad BD, que es la misma diferencia entre el nivel verdadero y aparente, disminuida de la parte DE originada por la refraccion.*

Ahora, haciendo aplicacion á nuestros barómetros del Seminario, tendrémos que $r=\frac{2}{33}$, $A=30$ pulgadas 6 líneas y 11 puntos ó 30,57638 pulgadas $=366,91656$ líneas; $g=10°,1$; $\frac{1}{m}=0,015398=\frac{1}{65}$ próximamente; $M=80°$; $n=7,9$ líneas; y haciendo estas sustituciones en la última fórmula se convertirá en

$$a=A'\times 1,0056-g'(A'\times 0,00019-0,002037)-1,3682487.$$

676 Antes de concluir este punto no puedo menos de observar, que cuando se hayan propagado las fórmulas de correccion, y se tengan un gran número de observaciones exactas, hechas en diferentes parages y de modo que sean comparables, se podrán calcular las tempestades, las nevadas, las lluvias, los años secos &c con mucha anticipacion, y con la misma exactitud y precision que ahora se calculan los eclipses. Esta proposicion parecerá escandalosa, así como lo parecía en otro tiempo el pensar que se podrían predecir los eclipses; pero á mí se me representa con tanta viveza la utilidad que traerá al genéro humano el saber con anticipacion los años escasos, los abundantes, aquellos en que fructificará mejor una semilla que otra &c,

---

Pero hasta ahora nosotros lo que tenemos determinado es que el efecto de la refraccion es el ángulo EOD, que en nuestro pais es $0,07187$ *ó* $\frac{1}{14}$ *del ángulo OCB que se forma en el centro de la tierra por las verticales tiradas en O y en B. Este resultado nos es útil para cuando se trata de medir alturas; pero aquí lo que nos acomoda es tenerlo espresado en línea recta, esto es, tener el valor de la DE. Para hallarle, observarémos que tirando la cuerda OB, el ángulo EOB formado por la tangente OE y la cuerda OB tiene por medida la mitad del arco* OnB *que la cuerda subtende, y como todo el arco* OnB *es la medida del ángulo en* C, *resulta que ángulo* $EOB=\frac{1}{2}$*ángulo* $C=\frac{1}{2}C$.

Ahora, tanto EOB, como el EOD son siempre tan pequeños que sin error sensible se pueden suponer proporcionales con los lados EB, ED que se les oponen en los triángulos EOB, EOD; luego podrémos poner ángulo EOB : ángulo EOD :: BE : DE; y como $EOB=\frac{1}{2}C$, $EOD=0,07187\times C$; *si espresamos por* d *la BE, que es la diferencia entre el nivel verdadero y aparente, correspondiente á la distancia OB, resultará*

$$\tfrac{1}{2}C:0,07187.C::d:DE=\frac{0,07187.C.d}{\frac{1}{2}C}=2.0,07187.d=0,14374.d=(\text{pró-}$$

ximamente) $\frac{1}{7}$ *d.*

De aquí resulta en general, que en España podemos suponer sin temor de incurrir en error, que el efecto de la refraccion espresado en línea que no puedo menos de decirlo, por si acaso puedo contribuir á acelerar esta época feliz. Mas para que no se repute por paradoja lo que el tiempo comprobará, pondré aquí algunas predicciones análogas á esta, que se tuvieron al principio por sueños, y que luego se han verificado.

{1.ª Los Franceses habían estado haciendo operaciones geodésicas, por espacio de treinta y seis años, y todas ellas les daban que la tierra era prolongada por los polos. Neuton y Huygens, sin hacer ninguna, sostenían desde su gabinete todo lo contrario. El primero se fundaba en su teoría de la gravitacion, y el otro en la de los péndulos. Como en las operaciones de los Franceses se habían empleado los mejores Astrónomos, y los mejores instrumentos, no querían conceder lo que Neuton y Huygens sostenían; pero estos, firmes en sus teorías, dijeron en que estribaba el error, propusieron el método con que se debían hacer las operaciones, se ejecutaron y hallaron el mismo resultado que Huygens y Neuton tenían determinado de antemano.

{2.ª Neuton, por las leyes de la refraccion, dijo que en el agua y en el diamante había un principio combustible, y en estos últimos tiempos ha hecho conocer la Química ser verdadera la proposicion de Neuton; pues el uno de los factores del agua es el hidró-

---

recta para el uso de la nivelacion, equivale á $\frac{6}{7}$ de la diferencia entre el nivel verdadero y aparente: *por lo que, la correccion que se debe hacer á una altura, atendiendo á la diferencia entre el nivel verdadero y aparente y á la refraccion, se reduce á* restar de la altura de mira observada, las seis séptimas partes de la diferencia entre el nivel verdadero y aparente, *que por la* 1.ª *tabla del* §. 657 *corresponda á la distancia que haya del nivel á la mira.*

Por último, debo manifestar que á iguales distancias las refracciones son iguales así como la diferencia entre el nivel verdadero y aparente; lo que confirma la conveniencia que resulta de colocar el nivel siempre que se pueda á igual distancia sobre poco mas ó menos de los dos términos de cada estacion, porque entónces no hay que hacer ninguna correccion; igualmente indicaré que para no omitir ninguna diligencia que pudiese conducir al feliz resultado de la nivelacion que practiqué en 1819, *traté de calcular las diferencias entre el nivel verdadero y aparente, considerando á la tierra con su propia figura de un esferoide aplanado por los polos. Tengo vencida ya la mayor parte de las dificultades; y habiéndome cerciorado de que dichas diferencias se aproximaban mucho á las de la* 1.ª *tabla del espresado* §. 657, *suspendí por entonces dicho trabajo, que estoy procurando continuar ahora para proporcionar á los que se dediquen á este ramo cuantos datos puedan necesitar en tan importante y delicado asunto.*

geno, y el diamante viene á ser el carbon puro; el primero que llamó la atencion de los sábios sobre la verdad de la última proposicion, fué nuestro Feijoo, al referir que en el incendio de la capilla Real se habían quemado los diamantes del copon.

{3.ª Euler concibió la idea de hacer desaparecer la aberracion de refrangibilidad en los telescopios. Dollond, fundándose en un esperimento de Neuton, se le opuso terriblemente: Euler y otros, sin ejecutar el esperimento, sostuvieron que era falso, se vió precisado Dollond á repetirlo, y encontró lo que decía Euler; y de la continuacion de estas investigaciones, resultó la invencion de los telescopios acromáticos.

{Reflexionando sobre estos hechos, se concebirá la posibilidad de lo que aseguro; y si la nacion española fuese la primera que diese el ejemplo en hacer observaciones exactas, con la mira de contribuir á un fin tan elevado, no desmerecería esta accion de las otras que la distinguen entre todas las demas. España parece está reservada para aquellas acciones gloriosas, que solo ceden en beneficio del género humano. El descubrimiento del nuevo mundo que en ninguna parte halló acogida, fué protegido en España en una de las épocas mas calamitosas de esta nacion: la espedicion de la vacuna que dará al universo lo menos la décima parte mas de poblacion, será una prueba auténtica de lo mucho que se le debe; y una serie de observaciones exactas hechas en los diferentes dominios de S. M. C. por medio de las cuales se perfeccionaría la agricultura, se evitarían las hambres, las pestes y desolaciones que acarrean, no desmerecería en nada de ser promovida por nuestro sábio Gobierno.}

De la medicion de las distancias en parte ó en todo inaccesibles, y del levantamiento de planos topográficos.

677 Cuando la distancia que se intenta medir es accesible, se ejecuta conforme hemos dicho (661) se mide una base; cuando solo es accesible por uno de sus estremos, se procederá del modo siguiente.

Supongamos que sea la BC (fig. 311) la línea que se quiera medir; en este caso se medirá una base CA desde el estremo accesible C, y en sus estremos medirémos los ángulos BCA, CAB, y la Trigonometría nos dará el lado BC. Para hacer esta operacion con la plancheta, se coloca este instrumento de manera que su centro corresponda sobre el punto C del terreno; despues se tira en el papel una línea *ca* en la direccion de la base, de una magnitud tal que contenga tantas partes de una escala cualquiera, como veces está contenida la unidad de medida en la base CA; despues se dirige la visual por C al punto B, y se tira la *cb* indefinida; despues se pone el instrumento en A, y colocado el tablero de modo que la base *ca* se halle en la direccion AC de la base medida, se dirige la visual al punto B, se tira la *ab*, y el número de partes que *cb* contenga en la misma escala será el número de unidades que contenga la BC de la medida con que se midió la base CA.

678 Si suponemos ahora que la distancia CD (fig. 312) sea de todo punto inaccesible, medirémos una base AB que sea próximamente paralela é igual con la distancia por medir CD. En A tomarémos los ángulos CAB,DAB, y pasando el instrumento á B tomarémos los ángulos CBA,DBA, y tendrémos conocido en el triángulo CAB el lado AB y los ángulos adyacentes; luego la Trigonometría nos dará el valor del lado AC. En el triángulo DAB tenemos conocidos igualmente el lado AB y los ángulos adyacentes, luego podrémos hallar el valor del lado AD. Ahora, en el triángulo CAD tenemos conocidos los lados CA,AD por lo que acabamos de decir, y el ángulo CAD que forman por ser la diferencia entre los dos ángulos observados CAB, DAB; luego la Trigonometría nos dará el otro lado CD que será la distancia que buscábamos.

Para hacer esta operacion con la plancheta, se coloca el instrumento en uno de los estremos de la base, tal como A, y despues de estar tirada la *ab* en la direccion de ella, se dirigen las visuales á los puntos C, D, y se tiran en el papel las *ac*, *ad*; despues se pasa el instrumento á B y se tiran las *bc*, *bd* en la direccion de las visuales dirigidas á los puntos C y D; y tomando con un compás la distancia *cd*, y averiguando su valor en la misma escala en que se tomaron las partes de *ab*, que espresaban las unidades de medida de AB, se tendrá el número de unidades que contiene la CD.

{679 Hemos dicho (672) que se elija la base próximamente igual con la altura por medir, y en el (678) que la base debía ser próximamente igual y paralela á la línea ó distancia por medir; porque de este modo se disminuye el error que por causa del instrumento ó del que ejecuta la operacion se debe sospechar. Para convencernos de esto observarémos que como para hallar estas distancias hacemos uso de la Trigonometría, un mismo error en el ángulo, influye mucho mas cuando el ángulo es muy pequeño; pues si suponemos (fig. 313) que AB= *ab* sea el error cometido en la observacion, este error causa en el seno del ángulo, cuando es pequeño, un error *ac*, que es mucho mayor que el AC originado cuando el ángulo es grande.

{Bouguer demuestra que *para medir una distancia es tres veces mas ventajoso valerse de un ángulo de 60° que de uno de 30°, y si es de 90° es mucho mejor. Que los errores que se cometen en el cálculo de los lados de los triángulos, cuando uno se ha engañado en la medida de los ángulos, son proporcionales á las cotangentes de dichos ángulos ó á las diferencias logarítmicas de sus senos. Que cuando está uno sujeto á dar una cierta magnitud al ángulo comprendido entre dos lados, cuya relacion*

se trata de descubrir, es necesario hacer isósceles el triángulo lo mas que sea posible, ó hacer la base que se debe medir de la misma magnitud que la otra línea. Si no se da la disposicion de la base sinó su longitud, la disposicion que se debe preferir es tomar un triángulo rectángulo que tenga por hipotenusa ó la base ó el lado que se busca. Cuando por el conocimiento de un lado se ha de hallar otro mucho mas largo, y se quiere hacer por muchos triángulos, es menester hacerlo por triángulos rectángulos semejantes, pasando por lados que crezcan en progresion geométrica; la relacion en que deben crecer lo menos ha de ser en la de 1 : √2, ó 100 : 173.}

680 Se da el nombre de *mapa* ó *plano topográfico* al dibujo en que están representados todos los objetos de un pais de corta estension. Para manifestar como se consigue esto supondrémos que se nos dé un terreno de corta estension, en el que se hallen los objetos C,D,E,F,G, H,K,I (fig. 314), y que se quiere sacar un dibujo en que los objetos guarden la misma posicion que tienen en el terreno.

Para esto, lo primero que se ejecuta es medir una base AB, desde cuyos estremos se vea el mayor número de objetos posible, se colocará el instrumento en A, y se dirigirán visuales á los puntos C,D, E,F,G, que se ven desde ámbos estremos de la base; se pasará el instrumento á B, y se dirigirán las visuales á los mismos objetos; y tendrémos que si el instrumento era la plancheta, el concurso de las visuales en el papel determinará los objetos; y si no lo es, se forman en los estremos *a* y *b* de una línea *ab*, que se tira en el papel de la magnitud que espresa la base medida, con el ausilio de un semicírculo, los ángulos *cab*, *dab*, &c del mismo número de grados que los ángulos observados CAB, DAB &c, con lo cual los lados de estos ángulos prolongados determinarán por su concurso los puntos *c*, *d* &c. Tambien se pudieran calcular por Trigonometría los lados *ac*, *ad* &c, pero esto es mas complicado.

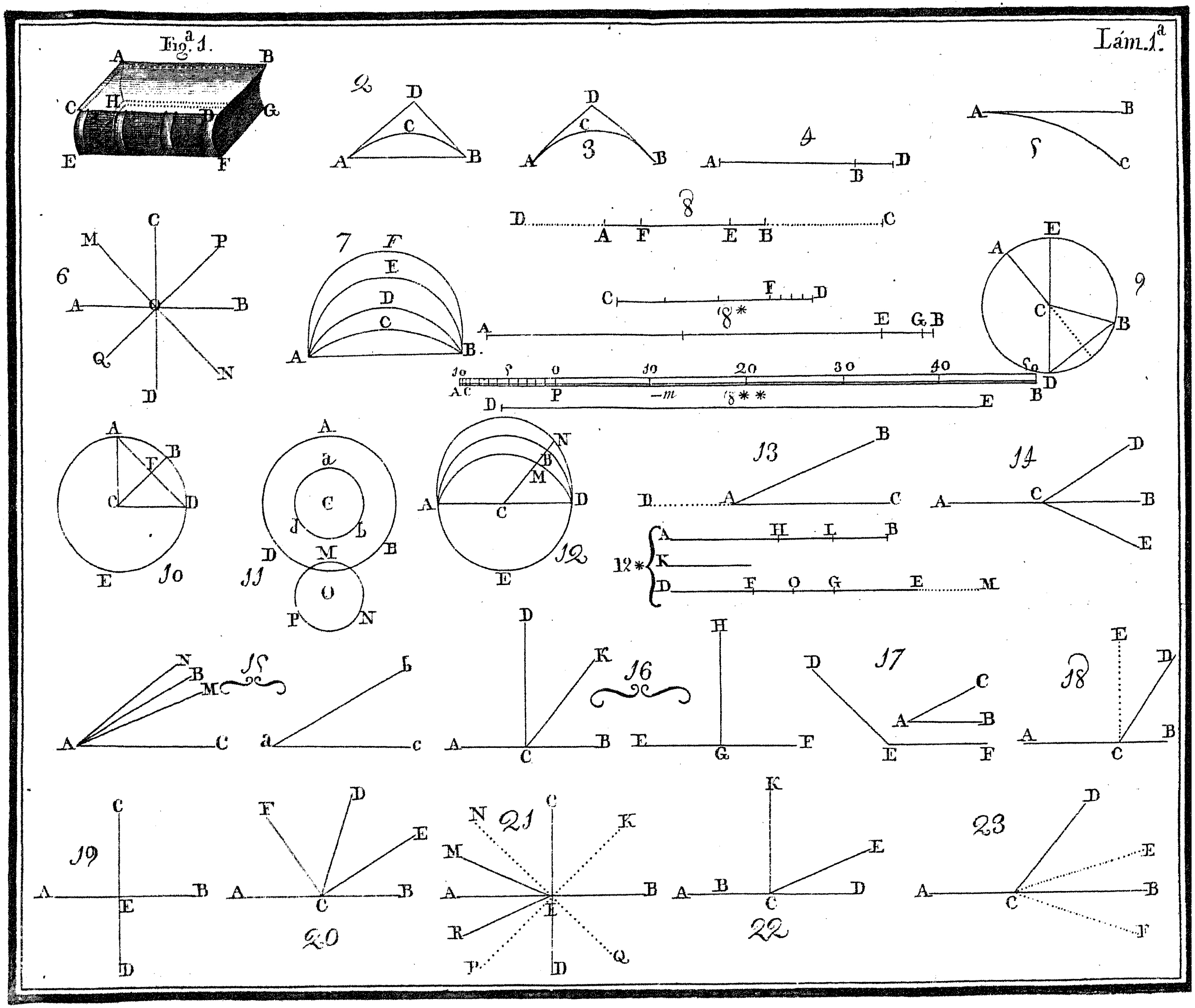
Para fijar la posicion de los puntos K, H, I, que no se ven desde ámbos estremos de la base AB medida, se elige una nueva base que se procura tenga sus estremos en dos puntos fijos ya; y con relacion á esta base se fijan los demas. Aquí para fijar el K elegirémos por nueva base la distancia FG, y colocando en sus estremos el instrumento, medirémos los ángulos KFG, KGF, que nos fijarán la posicion del punto K. Para fijar la de los puntos H, I elegirémos por base la EF, y así se continuaría si quedasen mas puntos por determinar.

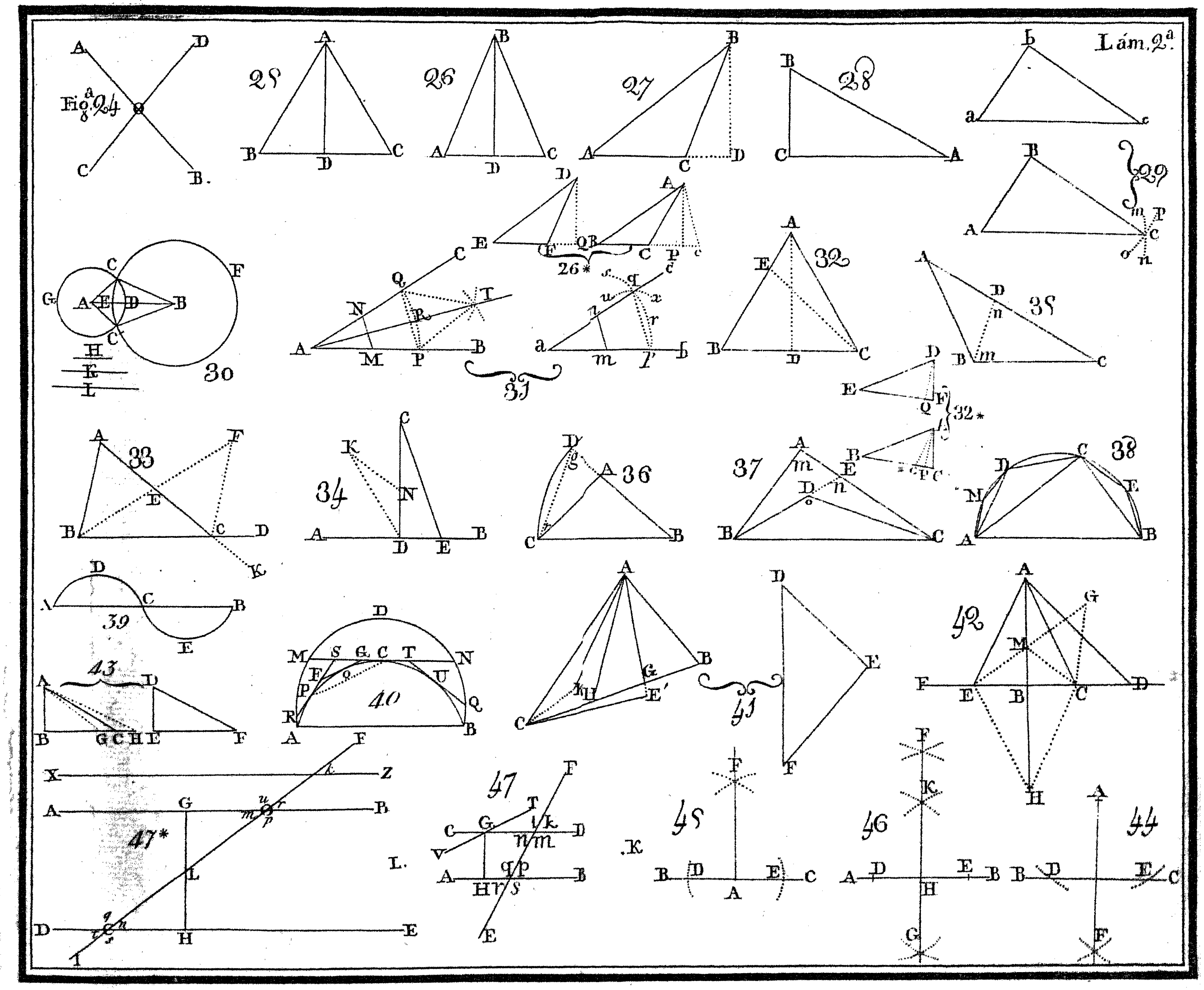
FIN DEL TOMO PRIMERO.

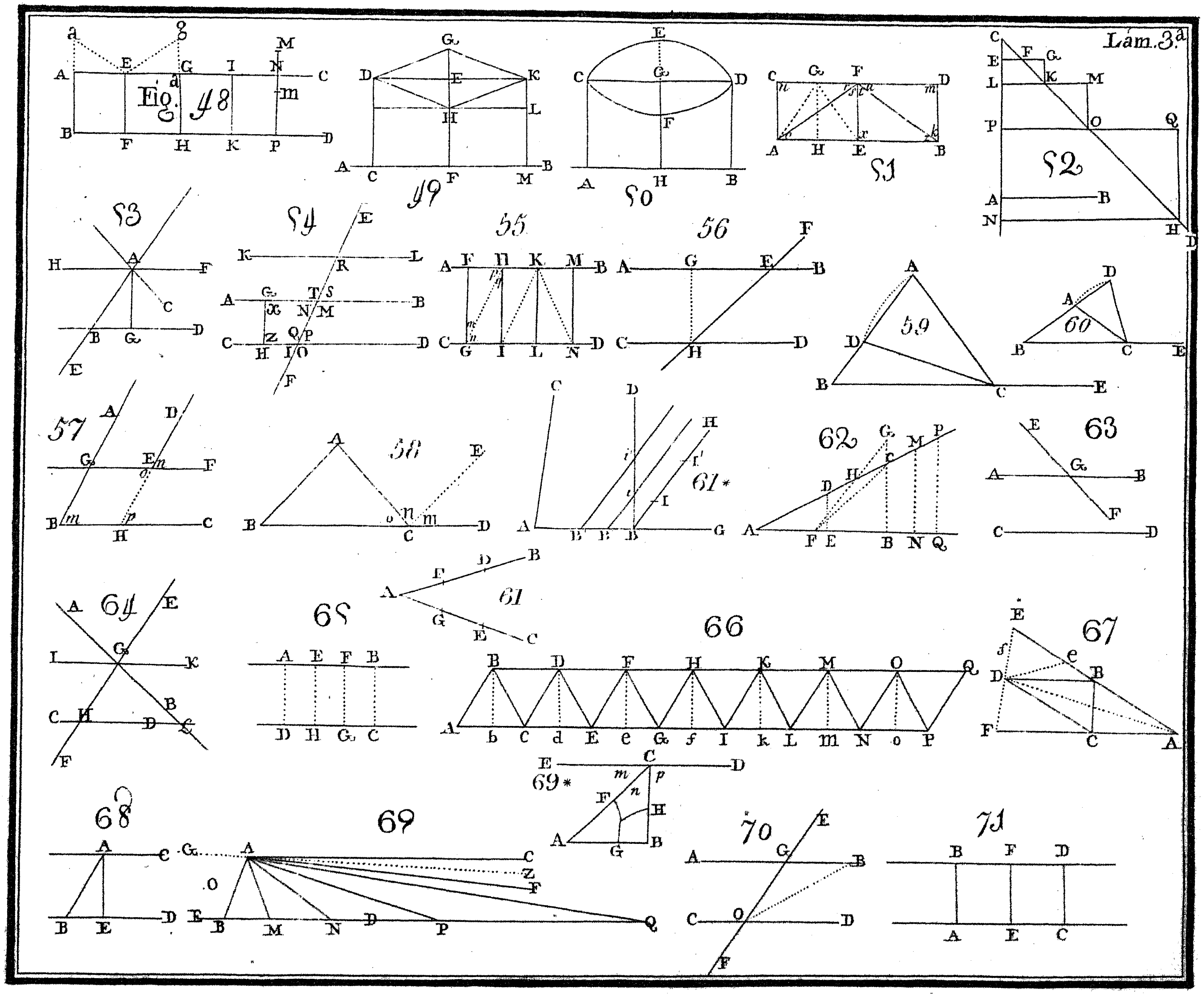
ERRATAS.

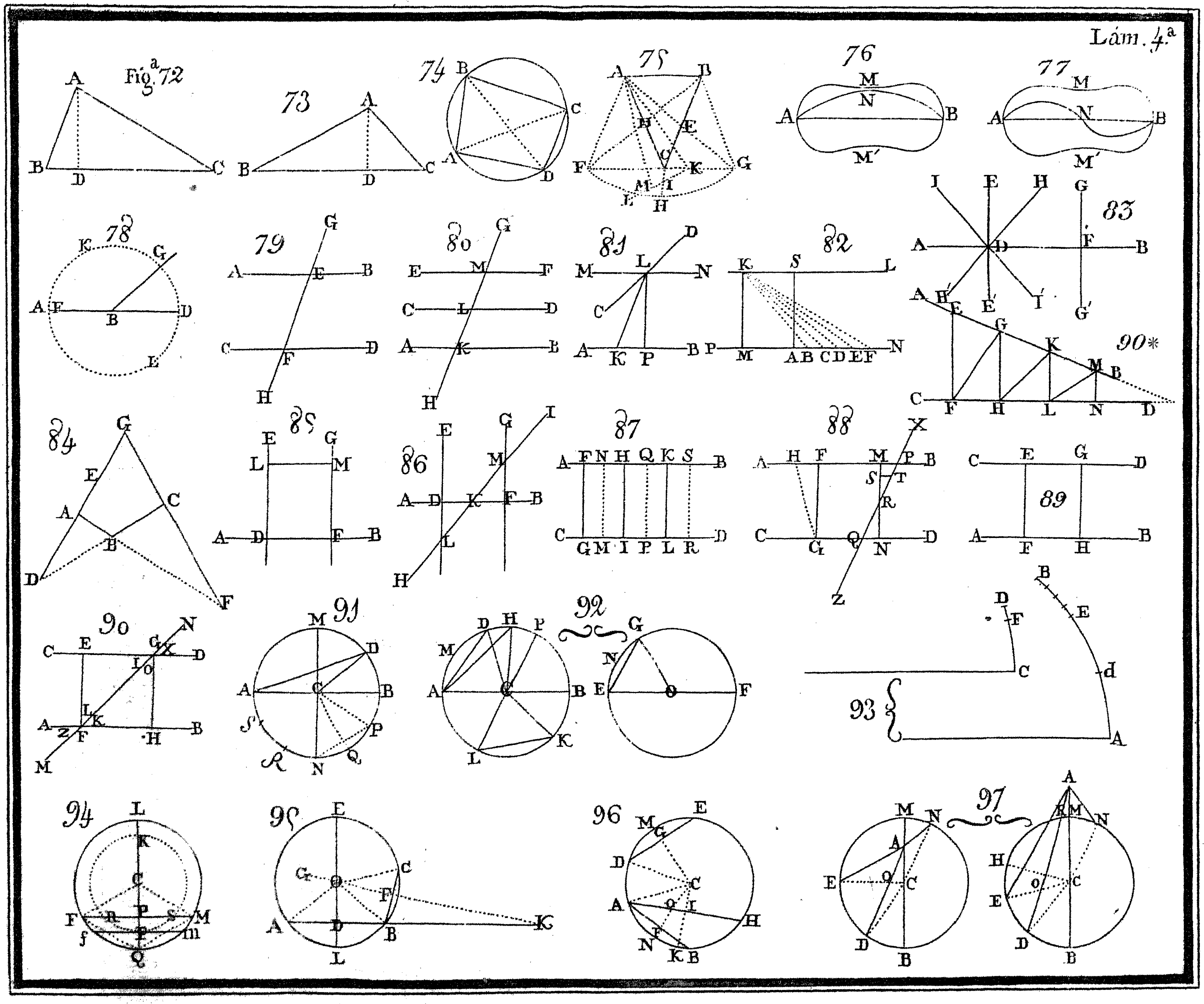
Página.	*Linea.*	*Dice.*	*Debe decir.*
49......	36.......	suplemento de p..........	suplemento de P.
80......	39.......	á la parte AMB..........	á la parte AM'B.
127.....	18.......	$\frac{2\times 180^\circ}{26}$......................	$\frac{2\times 180^\circ}{20}$.
210.....	21.......	MAM......................	MAN.
222.....	35.......	conocidad..................	conocida.
225.....	2.......	ZOD........................	2OD.
246.....	37.......	AB:*ab*::SE:*se*..............	AB:*ab*::SE:S*e*.
Idem....	38.......	AB—*ab*:AB::SE—*se*:SE.	AB—*ab*:AB::SE—S*e*:SE.
343.....	16.......	*polígono* mnro..............	*polígono* mnrO.
Idem....	17.......	*curva* abdo................	*curva* abdO.

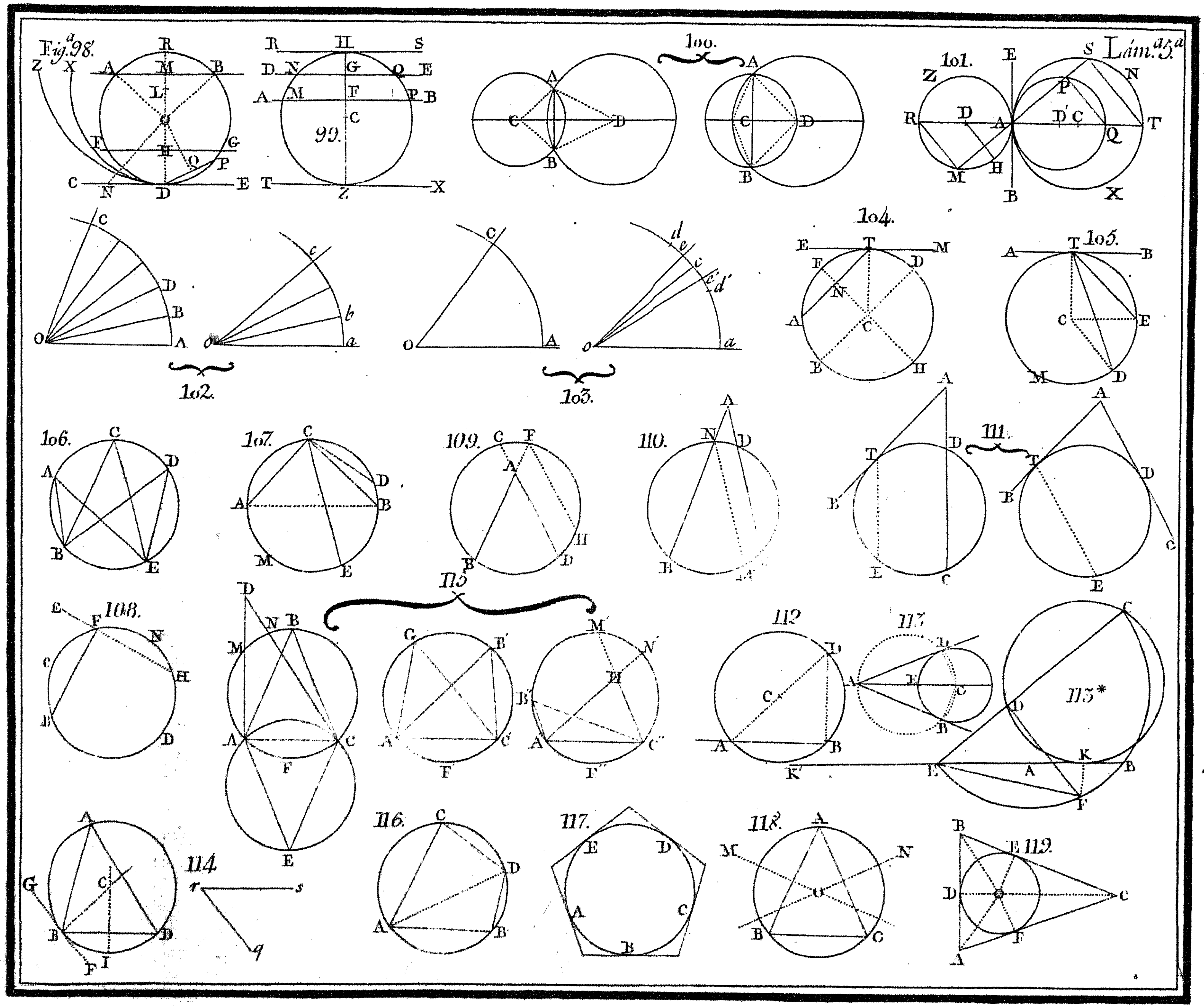
Lám. 1.ª

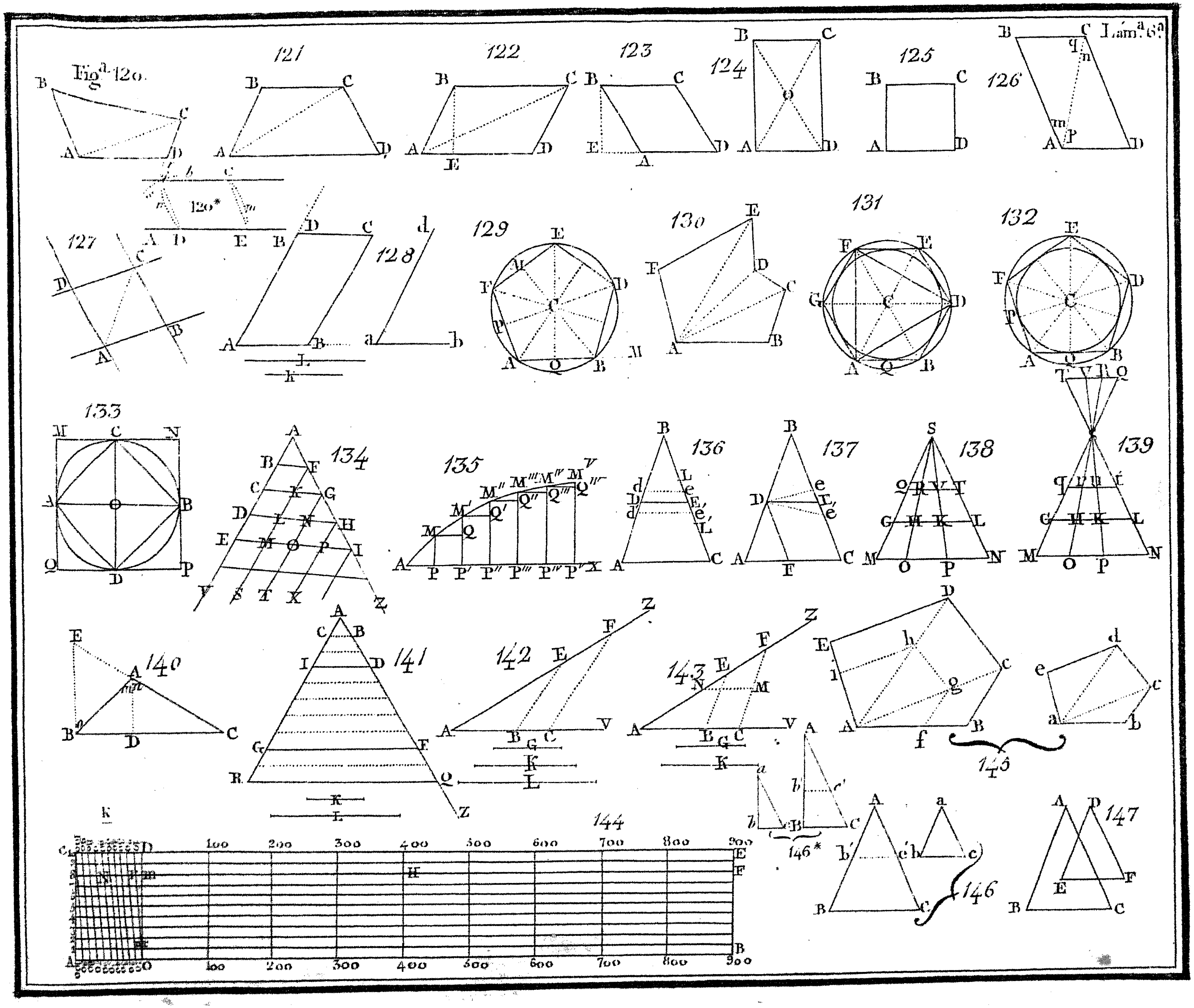



Lám. 2ª
Fig.ª 24
25
26
27
28
29
30
31
26*
32
35
32*
33
34
36
37
38
39
40
41
42
43
47*
47
45
46
44


Lám. 3.ª
Fig. 48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
61*
62
63
64
65
66
67
68
69
69*
70
71


Lám. 4.ª
Fig.ª 72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
90*
91
92
93
94
95
96
97


Lám.a 3.a
Fig.a 98.
99.
100.
101.
102.
103.
104.
105.
106.
107.
108.
109.
110.
111.
112
113
113*
114
115
116.
117.
118.
119.



Lám.a 6.a
Fig.a 120.
120*
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
146*
147
100 200 300 400 500 600 700 800 900

Lám.ª 7.ª

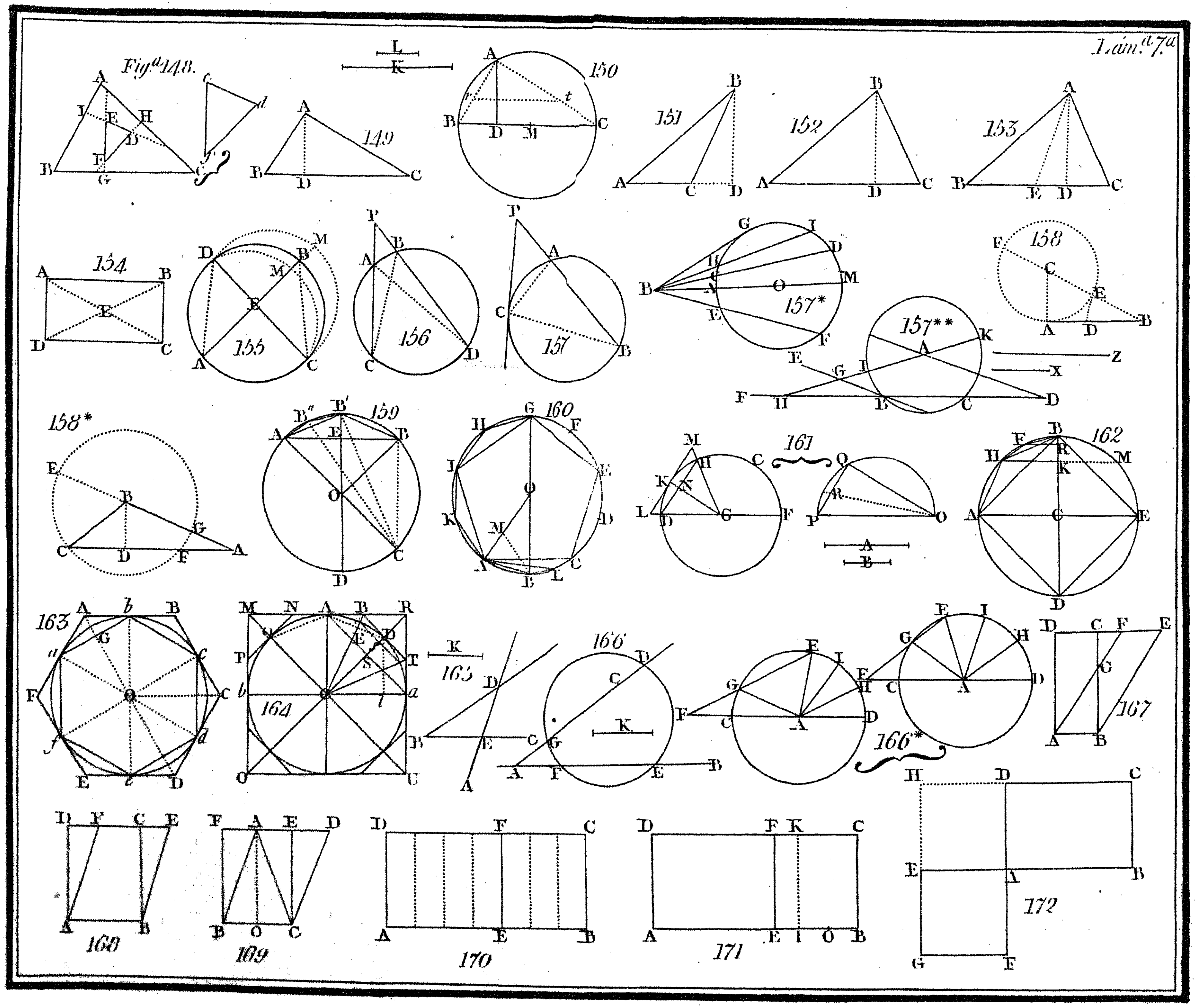
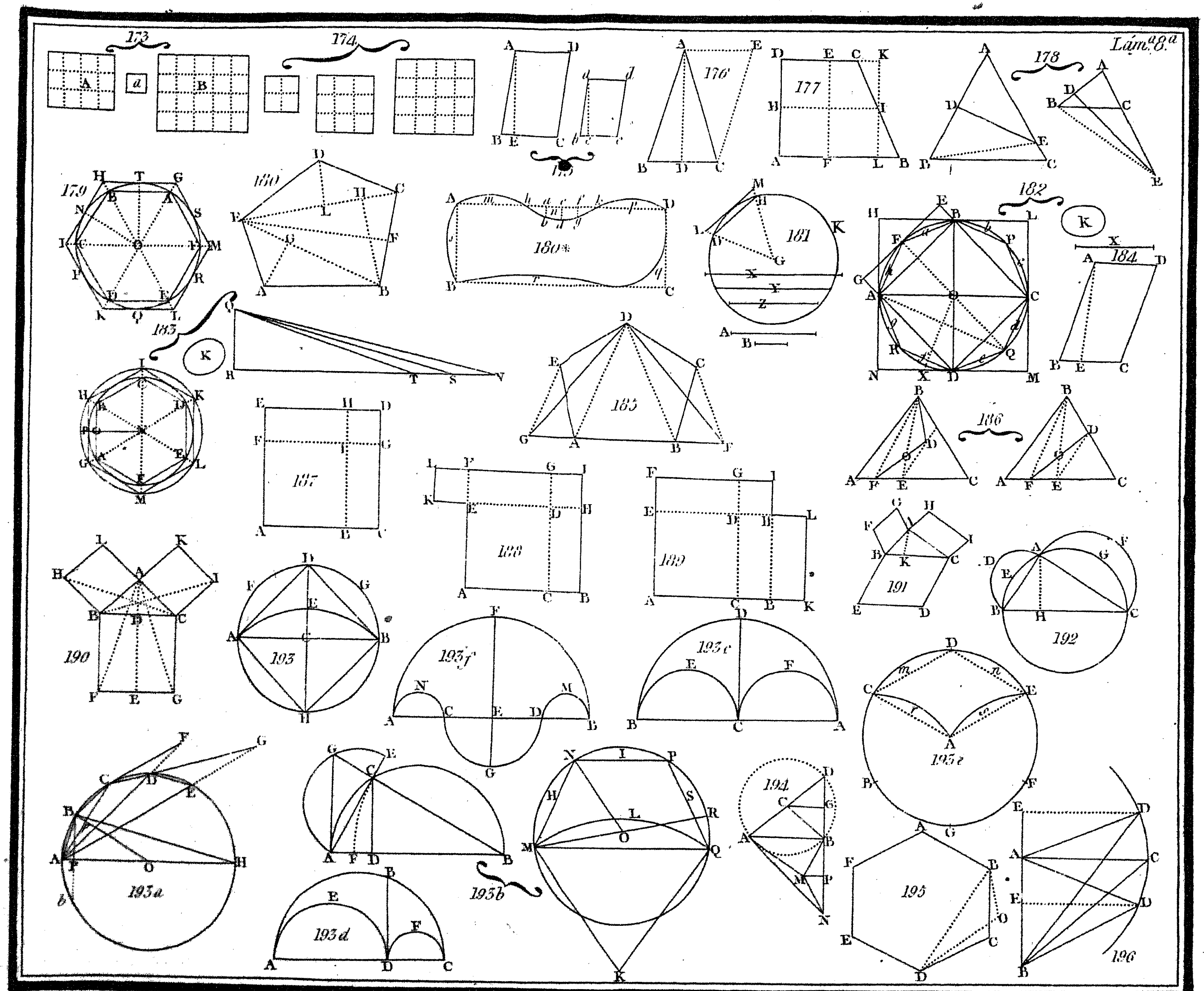


Fig.ª 148.
149
150
151
152
153
154
155
156
157
157*
157**
158
158*
159
160
161
162
163
164
165
166
166*
167
168
169
170
171
172


Lám.a 8.a
173
174
175
176
177
178
179
180
180*
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
193 a
193 b
193 c
193 d
193 e
193 f
194
195
196

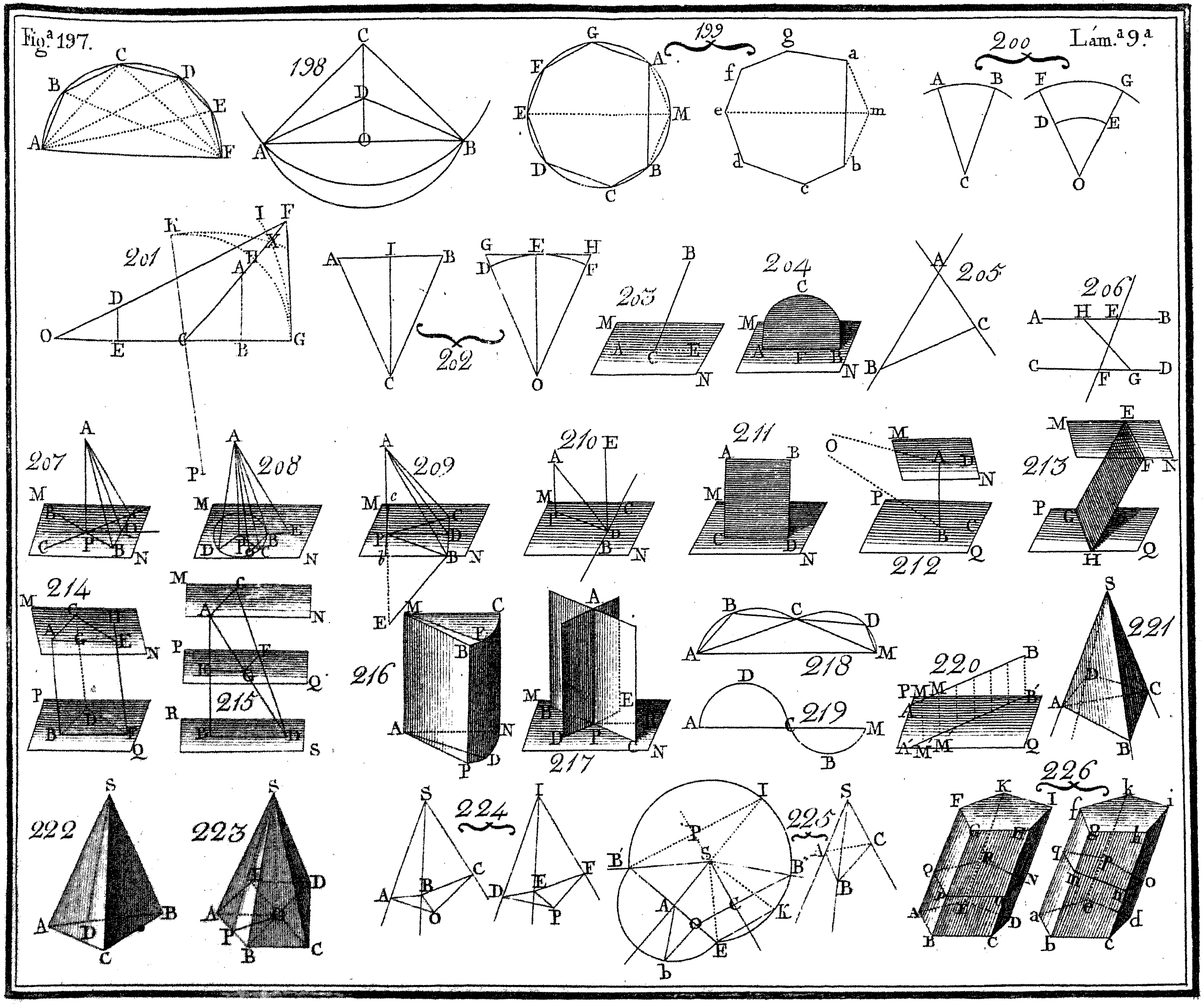
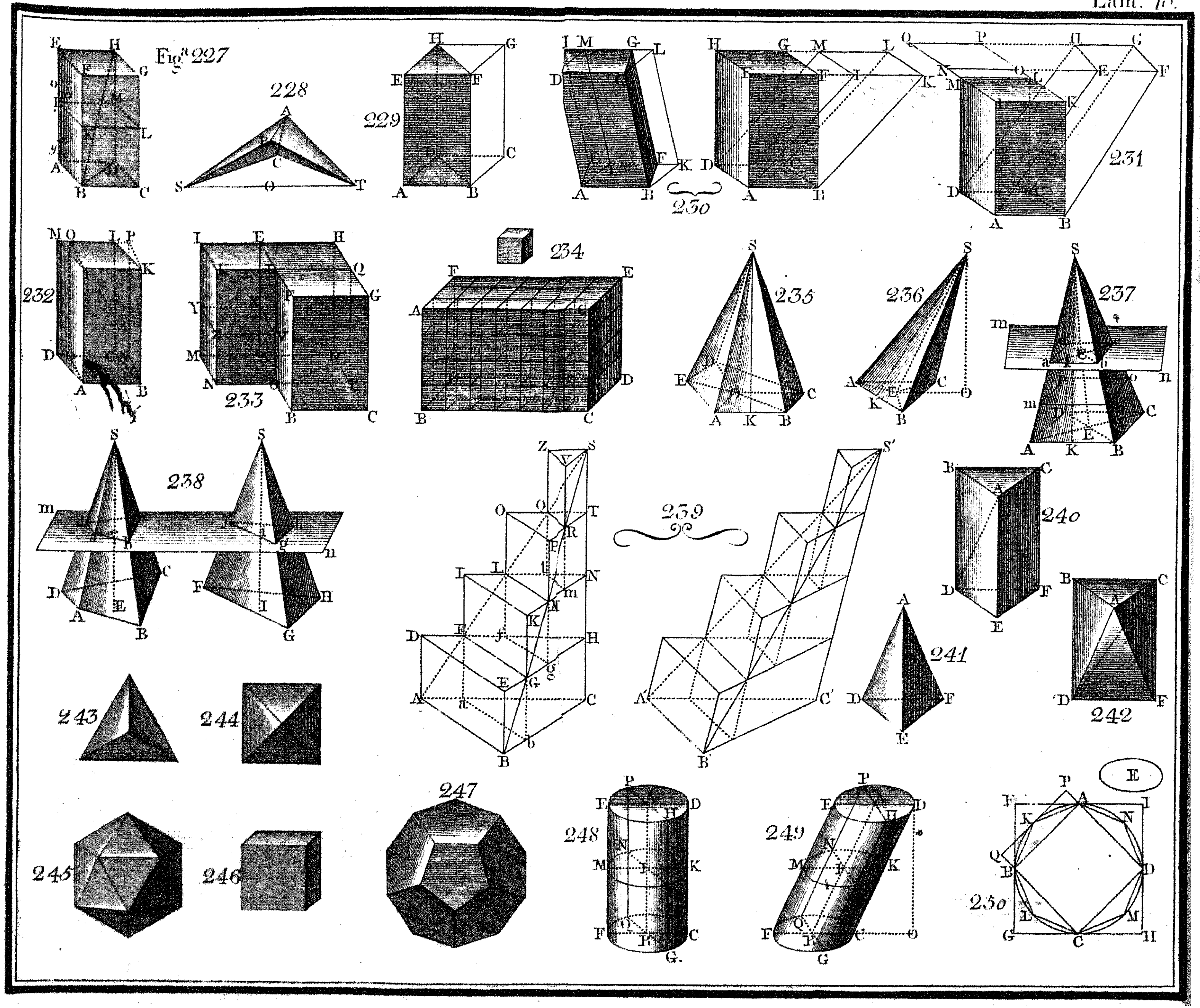
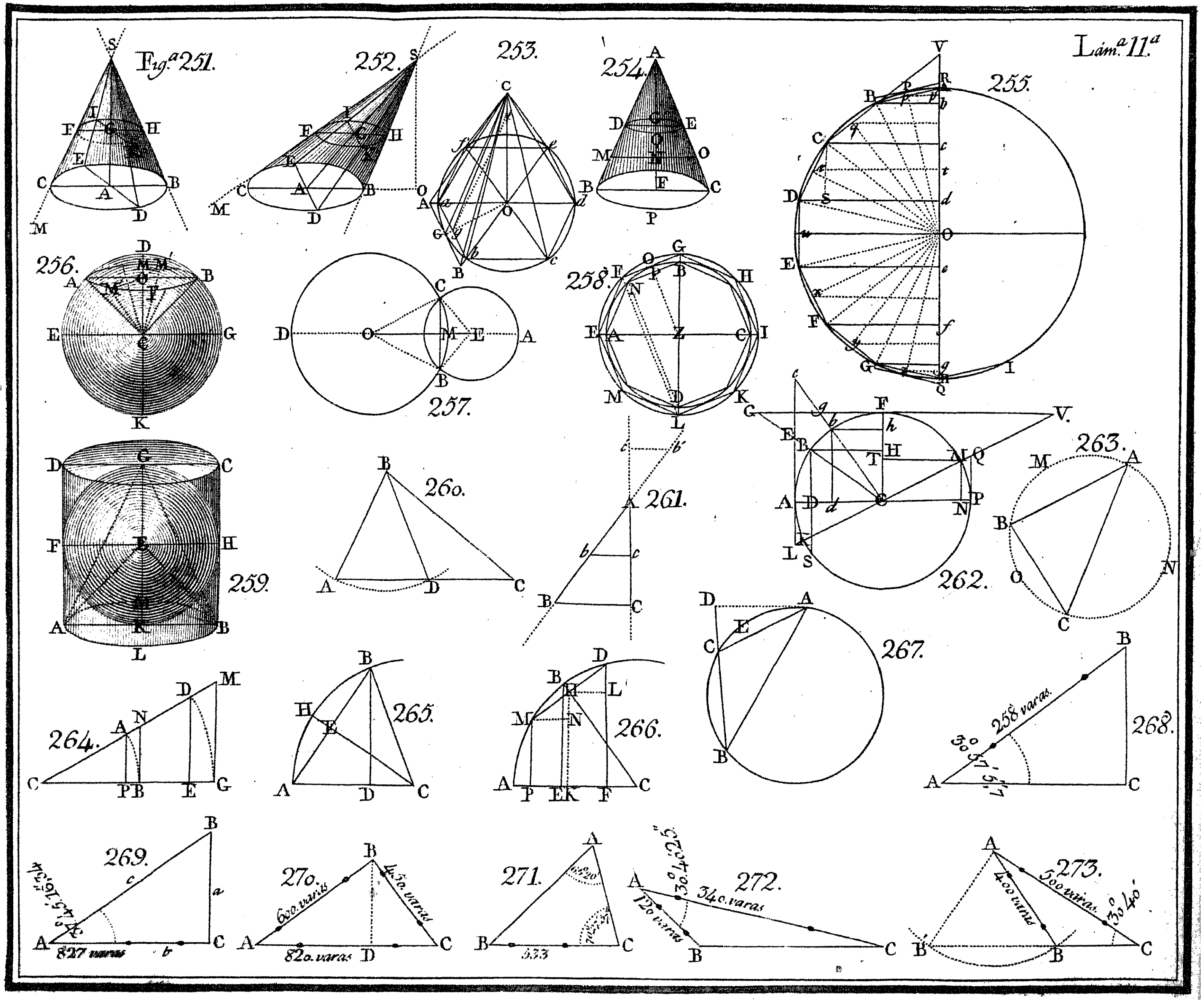
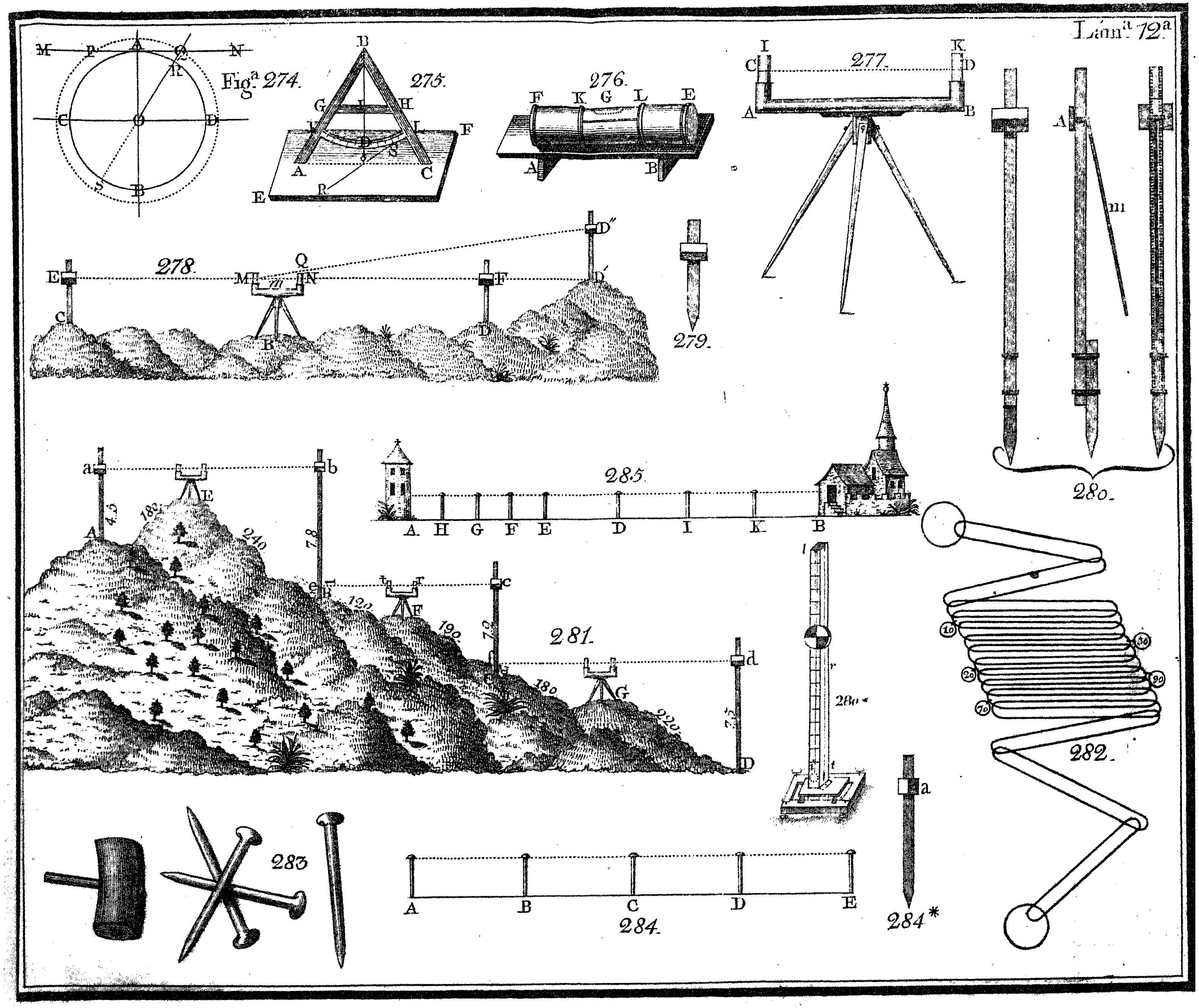
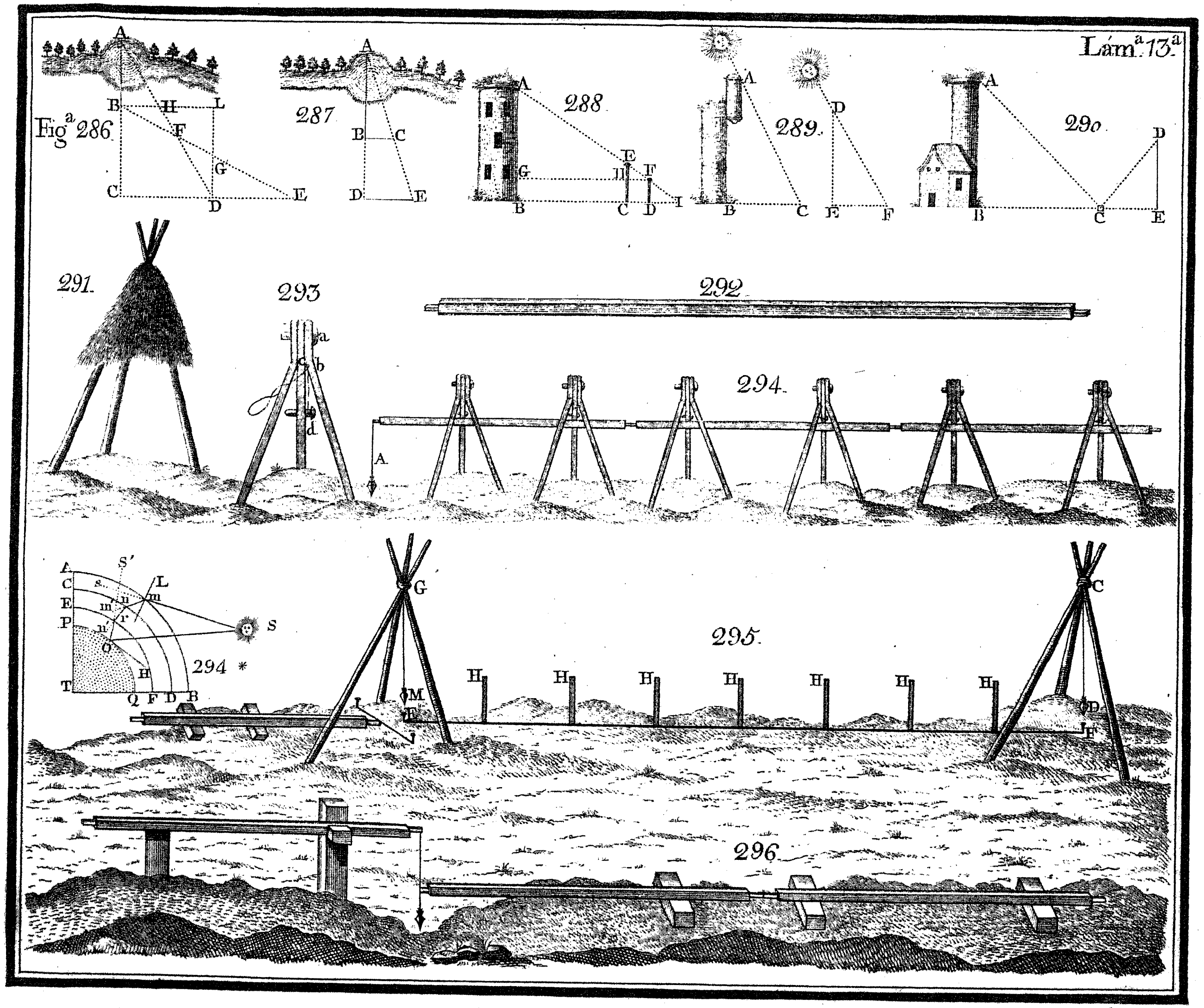


Fig.a 197.
198
199
200
Lám.a 9.a
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226

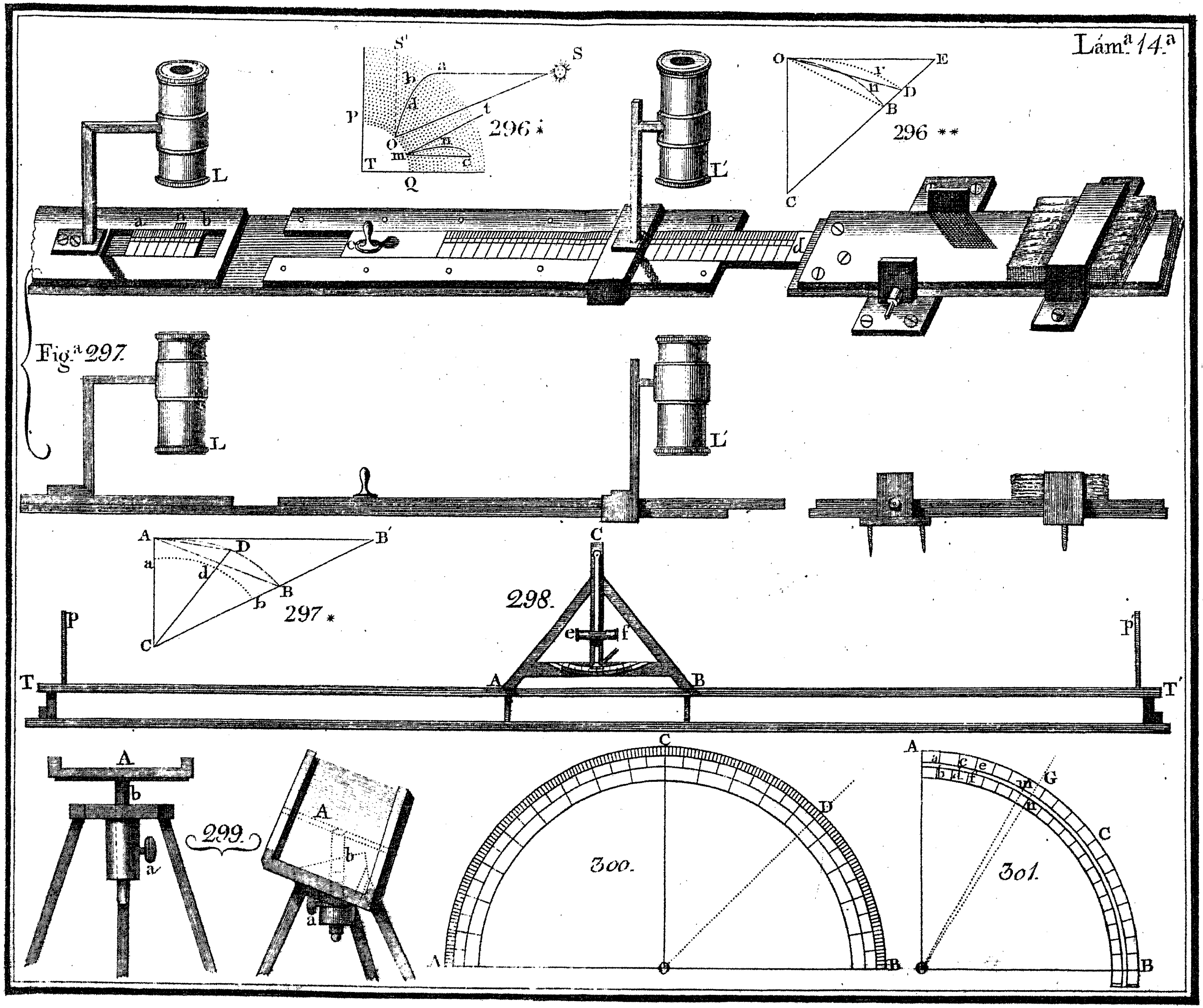

Figª 227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
E


Lám.ª 11.ª
Fig.ª 251.
252.
253.
254.
255.
256.
257.
258.
259.
260.
261.
262.
263.
264.
265.
266.
267.
268.
258 varas.
269.
827 varas
270.
600 varas
450 varas
820 varas
271.
533
272.
340 varas
120 varas
273.
500 varas
400 varas
30º 40'


Lam.a 72.a
Fig.a 274.
275.
276.
277.
278.
279.
280.
281.
282.
283
284.
284*
285.

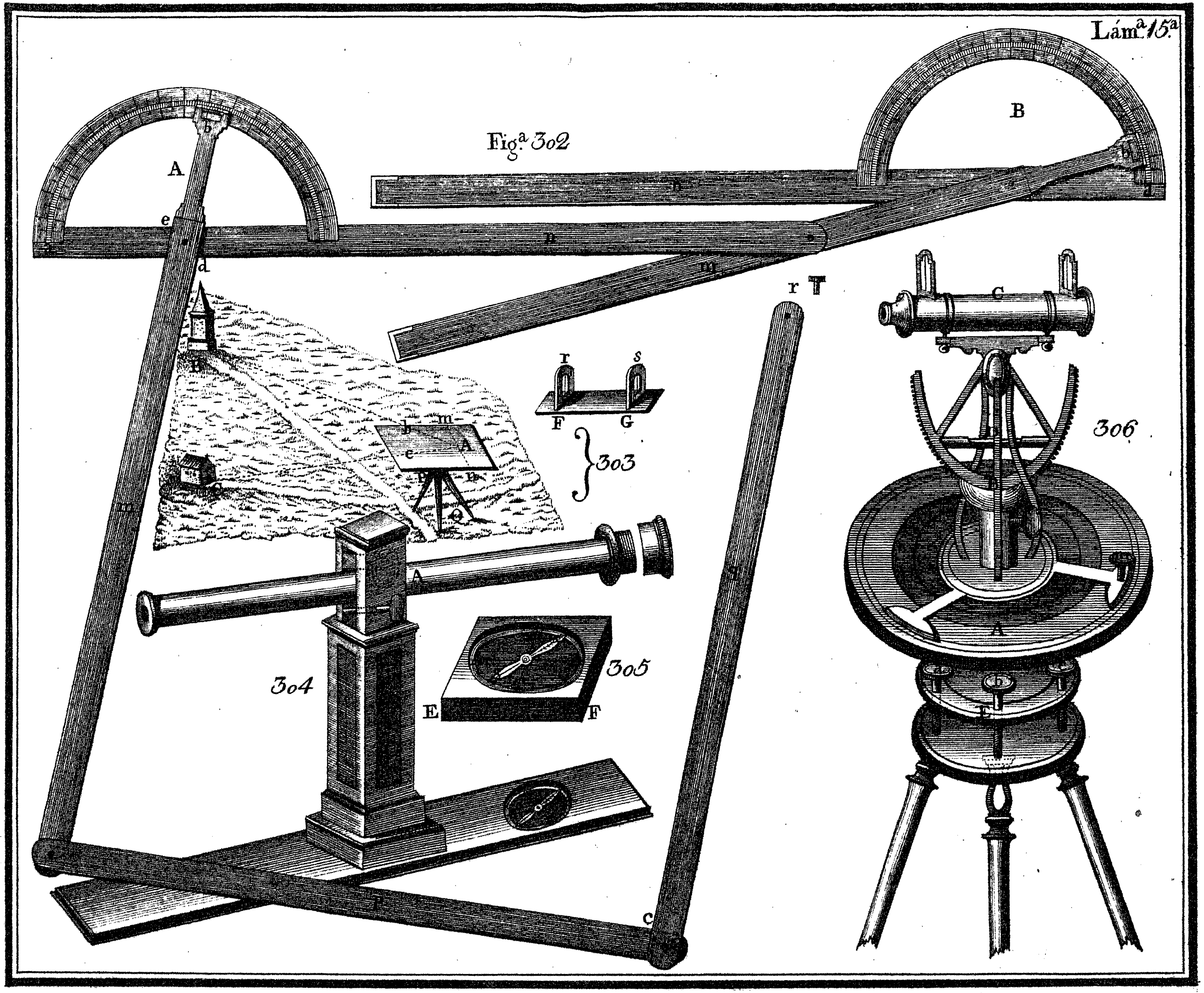


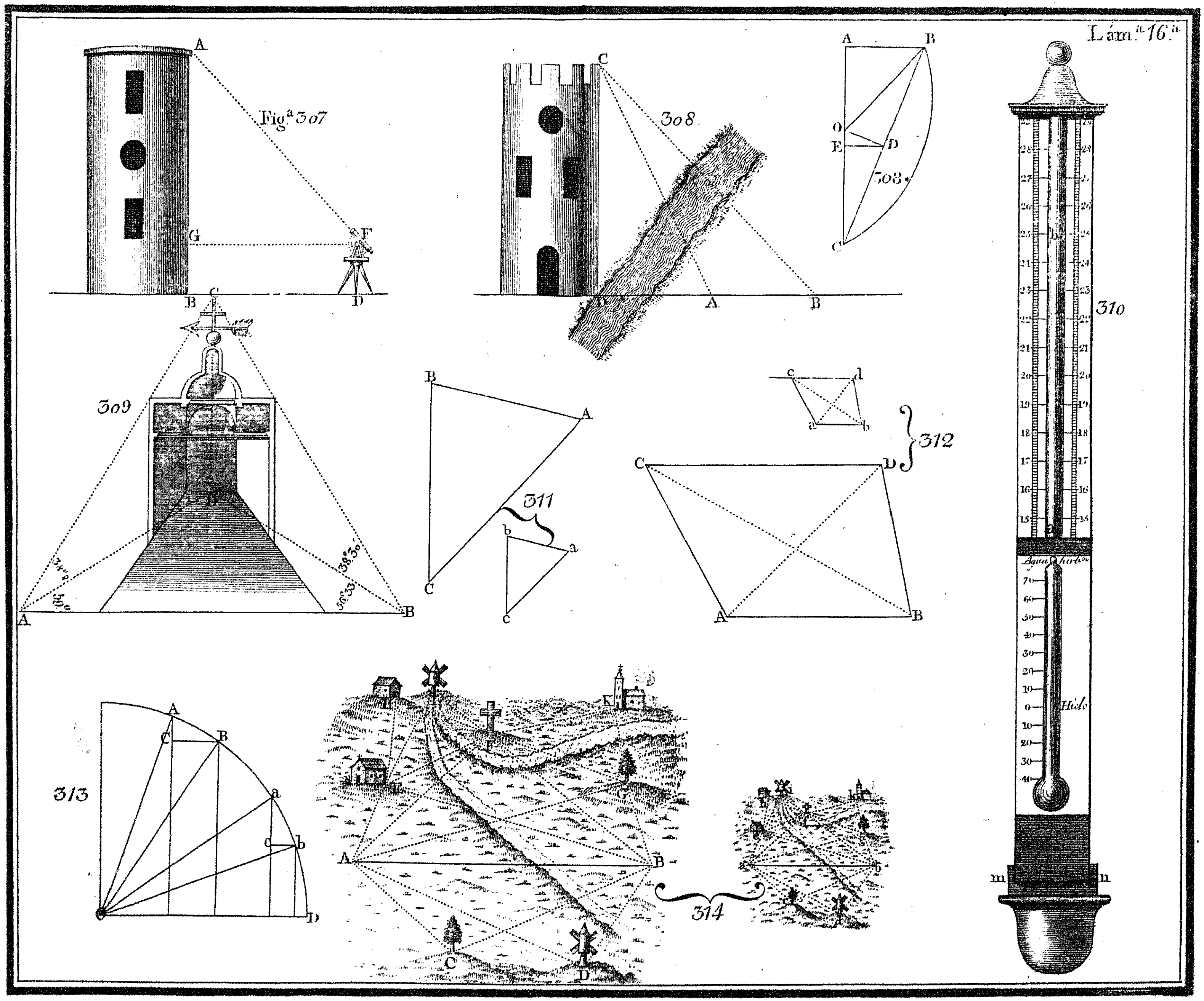
Lám.ª 13.ª
Figª 286.
287.
288.
289.
290.
291.
292.
293.
294.
294 *
295.
296.

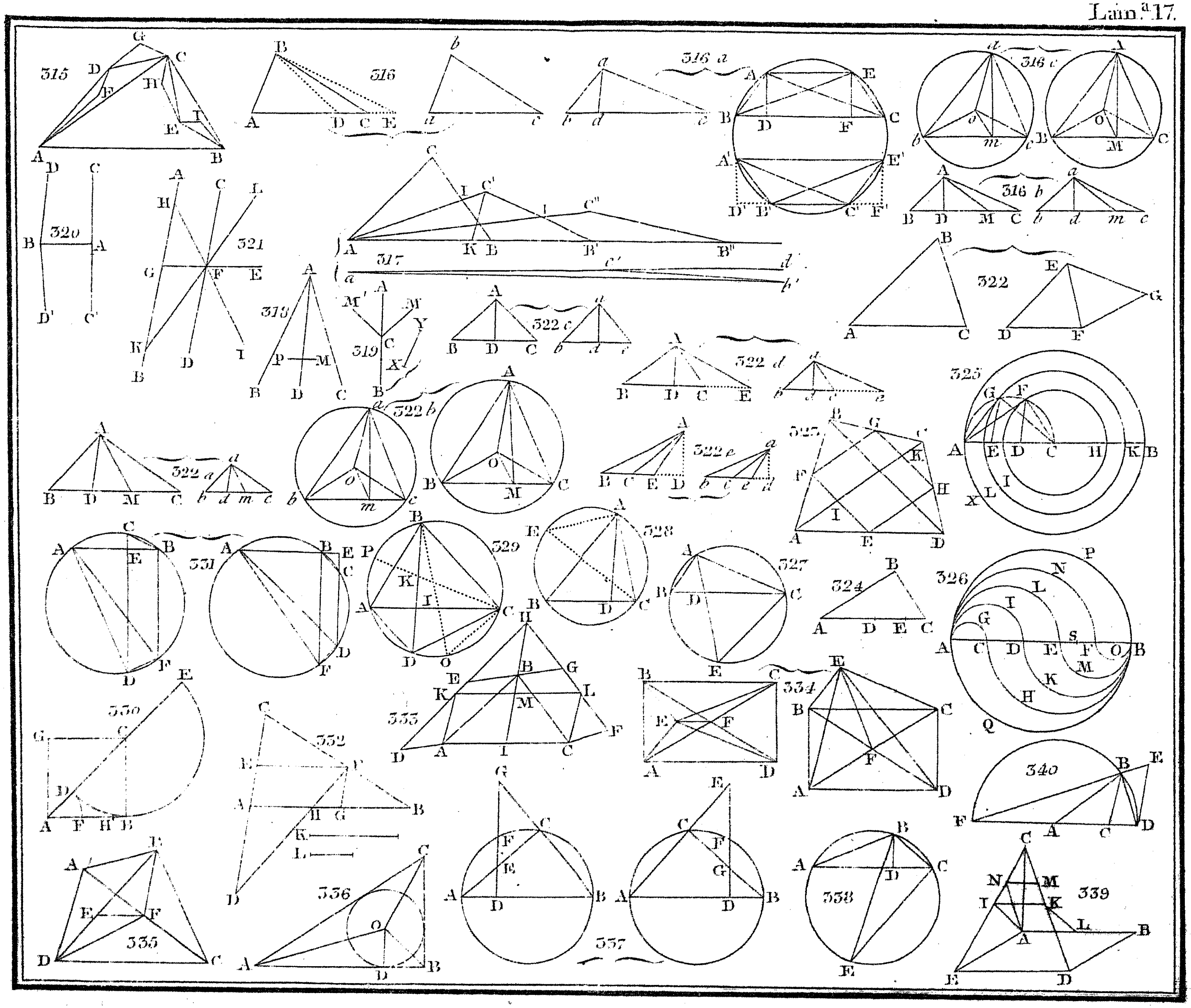


Lám.a 14.a
296 *
296 **
Fig.a 297
297 *
298.
299.
300.
301.

Lám.ª 15.ª




Lám.a 16.a
Figa 307
308
308.
309
310
311
312
313
314
Agua hirb.
Hielo


315
316
316 a
316 c
316 b
317
318
319
320
321
322
322 a
322 b
322 c
322 d
322 e
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340