Algunas historias relacionadas con Fourier y sus coeficientes

Seminario de Historia de la Matemática

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Algunas historias relacionadas con Fourier y sus coeficientes

A. Cañada

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

Principales aportaciones en el siglo XVIII

- Taylor, 1714 (leyes físicas que rigen el movimiento de la cuerda: para vibraciones pequeñas, la aceleración normal es proporcional a la curvatura)

Principales aportaciones en el siglo XVIII

- Taylor, 1714 (leyes físicas que rigen el movimiento de la cuerda: para vibraciones pequeñas, la aceleración normal es proporcional a la curvatura)
- D'Alembert, 1747; Euler, 1749 (deducción analítica del modelo y solución del mismo)

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

Principales aportaciones en el siglo XVIII

- Taylor, 1714 (leyes físicas que rigen el movimiento de la cuerda: para vibraciones pequeñas, la aceleración normal es proporcional a la curvatura)
- D'Alembert, 1747; Euler, 1749 (deducción analítica del modelo y solución del mismo)
- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; 0 < x < \pi, t > 0$$

  $$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \; 0 \leq x \leq \pi$$

  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; t \geq 0$$

Principales aportaciones en el siglo XVIII

- Taylor, 1714 (leyes físicas que rigen el movimiento de la cuerda: para vibraciones pequeñas, la aceleración normal es proporcional a la curvatura)
- D'Alembert, 1747; Euler, 1749 (deducción analítica del modelo y solución del mismo)
- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0$$
  $$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi$$
  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0$$
- Bernouilli (Daniel), 1753 (propuso ¿una solución diferente?)

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

Solución del problema

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0$$

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

Solución del problema

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; 0 < x < \pi, t > 0$$

  $$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \; 0 \leq x \leq \pi$$
  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; t \geq 0$$

- D'Alembert, Euler (propagación de ondas)

  $$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)]$$

  donde $\tilde{f}$ es la extensión a $\mathbb{R}$, impar y $2\pi-$ periódica de la función f.

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

Solución del problema

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi, t > 0$$

  $$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi$$
  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0$$

- D'Alembert, Euler (propagación de ondas)

  $$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)]$$

  donde $\tilde{f}$ es la extensión a $\mathbb{R}$, impar y $2\pi-$ periódica de la función f.

- Bernouilli (superposición de ondas "sencillas")

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt),$$

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

La cuerda vibrante (siglo XVIII)

Observación importante sobre la solución propuesta por D. Bernouilli

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, t > 0$$

  $$u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = 0, \ 0 \leq x \leq \pi$$
  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \geq 0$$

- Bernouilli

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt),$$

Observación importante sobre la solución propuesta por D. Bernouilli

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \ 0 < x < \pi, t > 0$$

$$u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = 0, \ 0 \le x \le \pi$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ t \ge 0$$

- Bernouilli

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt),$$

- $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx), \ \forall \ x \in [0,\pi],$$

Observación importante sobre la solución propuesta por D. Bernouilli

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \; 0 < x < \pi, t > 0$$

  $$u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = 0, \; 0 \leq x \leq \pi$$
  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; t \geq 0$$

- Bernouilli

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) \cos(nt),$$

- $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx), \; \forall \, x \in [0,\pi],$$

- ¿Cómo se calculan los coeficientes f_n?

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

Aportaciones de Fourier

- Fourier, 1807 (Mémoire sur la propagation de la chaleur, enviado a la Academia de Ciencias de París)

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

Aportaciones de Fourier

- Fourier, 1807 (Mémoire sur la propagation de la chaleur, enviado a la Academia de Ciencias de París)
- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ 0 < x < \pi,\ 0 < t < T,$$

  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T,\ u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq \pi.$$

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

Aportaciones de Fourier

- Fourier, 1807 (Mémoire sur la propagation de la chaleur, enviado a la Academia de Ciencias de París)

- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \; 0 < x < \pi, \; 0 < t < T,$$

  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; 0 \le t \le T, \; u(x,0) = f(x), \; 0 \le x \le \pi.$$

- Solución de Fourier: superposición de "temperaturas sencillas":

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \exp(-n^2 t) \mathrm{sen}(nx), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{sen}(nx)$$

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

Aportaciones de Fourier

- Fourier, 1807 (Mémoire sur la propagation de la chaleur, enviado a la Academia de Ciencias de París)
- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \; 0 < x < \pi, \; 0 < t < T,$$

  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; 0 \leq t \leq T, \; u(x,0) = f(x), \; 0 \leq x \leq \pi.$$
- Solución de Fourier: superposición de “temperaturas sencillas”:

  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \exp(-n^2 t) \mathrm{sen}(nx), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{sen}(nx)$$

El problema de la conducción del calor (siglo XIX)

Aportaciones de Fourier

- Fourier, 1807 (Mémoire sur la propagation de la chaleur, enviado a la Academia de Ciencias de París)
- $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \; 0 < x < \pi, \; 0 < t < T,$$
  $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \; 0 \le t \le T, \; u(x,0) = f(x), \; 0 \le x \le \pi.$$
- Solución de Fourier: superposición de "temperaturas sencillas":
  $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \exp(-n^2 t)\mathrm{sen}(nx), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{sen}(nx)$$
- $$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{sen}(nx)\,dx, \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Descripción general del problema

Descripción general del problema

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \ n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Descripción general del problema

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Taylor, 1715 (Methodus incrementorum directa et inversa)

Descripción general del problema

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \ n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Taylor, 1715 (Methodus incrementorum directa et inversa)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \, x^n$$

Descripción general del problema

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \; n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Taylor, 1715 (Methodus incrementorum directa et inversa)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \, x^n$$

- $$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \; \forall \, x \in \mathbb{R}$$

¡Cuidado con el problema planteado!

¡Cuidado con el problema planteado!

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \; n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

¡Cuidado con el problema planteado!

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \; n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Esto nos avisa de las dificultades

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\,(2n-1)x}{2n-1} =$$

¡Cuidado con el problema planteado!

Dada una función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, verificando $f(0) = f(\pi) = 0$ (y posiblemente algunas condiciones adicionales), ¿existirán coeficientes adecuados $f_n, \ n \in \mathbb{N}$ tales que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx)$$

en el intervalo $[0, \pi]$?

Esto nos avisa de las dificultades

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\,(2n-1)x}{2n-1} =$$

$$\begin{cases} \pi/4, \ 0 < x < \pi, \\ 0, \ x = 0, \\ -\pi/4, \ -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = f(x)$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) =$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) =$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2k+1} \right)$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2k+1} \right)$$

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, n^{2k+1}, \ \forall \, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Primer paso: desarrollar por Taylor e igualar coeficientes

$$\textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(nx) =$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(nx)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2k+1} \right)$$

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, n^{2k+1},\ \forall\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

¡Sistema lineal, con infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas!

Sistema lineal desarrollado

$$
\begin{array}{rl}
f'(0) = & f_1 1 \; + \; f_2 2 \; + \; f_3 3 \; + \; f_4 4 \; + \; \ldots \\
-f'''(0) = & f_1 1^3 \; + \; f_2 2^3 \; + \; f_3 3^3 \; + \; f_4 4^3 \; + \; \ldots \\
f^{v)}(0) = & f_1 1^5 \; + \; f_2 2^5 \; + \; f_3 3^5 \; + \; f_4 4^5 \; + \; \ldots \\
& \ldots \\
(-1)^k f^{2k+1)}(0) = & f_1 1^{2k+1} \; + \; f_2 2^{2k+1} \; + \; f_3 3^{2k+1} \; + \; f_4 4^{2k+1} \; + \; \ldots \\
& \ldots
\end{array}
$$

Segundo paso: cortar “por lo sano”: considerar una situación finita, resolver el sistema finito y pasar al límite

Segundo paso: cortar "por lo sano": considerar una situación finita, resolver el sistema finito y pasar al límite

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{m} g_n^m \, n^{2k+1}, \; 0 \leq k \leq m-1$$

Segundo paso: cortar “por lo sano”: considerar una situación finita, resolver el sistema finito y pasar al límite

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{m} g_n^m \, n^{2k+1}, \; 0 \leq k \leq m-1$$

$$f_n = \lim_{m \to +\infty} \; g_n^m, \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

Segundo paso: cortar “por lo sano”: considerar una situación finita, resolver el sistema finito y pasar al límite

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{m} g_n^m \, n^{2k+1}, \; 0 \leq k \leq m-1$$

$$f_n = \lim_{m \to +\infty} \; g_n^m, \; \forall \, n \in \mathbb{N}$$

$$g_1^m = \frac{m^2(m-1)^2 \ldots 2^2}{(m^2-1)((m-1)^2-1))\ldots(2^2-1)} H(m)$$

$$H(m) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2} \right]$$

Segundo paso: cortar “por lo sano”: considerar una situación finita, resolver el sistema finito y pasar al límite

$$(-1)^k f^{2k+1)}(0) = \sum_{n=1}^{m} g_n^m \, n^{2k+1}, \; 0 \le k \le m-1$$

$$f_n = \lim_{m \to +\infty} \; g_n^m, \; \forall \, n \in \mathbb{N}$$

$$g_1^m = \frac{m^2(m-1)^2 \dots 2^2}{(m^2-1)((m-1)^2-1))...(2^2-1)} H(m)$$

$$H(m) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 ... n_k^2} \right]$$

- $$f_1 = \lim_{m \to +\infty} \; g_1^m = 2 \sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \le n_1 < n_2 < \dots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 ... n_k^2} \right]$$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$?

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} =$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = 1$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$
  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = 1$
- Intentos previos sin éxito: Jacob Bernouilli, Johan Bernouilli, Daniel Bernouilli, Leibniz, Stirling, de Moivre, etc.

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+n} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$
  $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} \ldots = 1$
- Intentos previos sin éxito: Jacob Bernouilli, Johan Bernouilli, Daniel Bernouilli, Leibniz, Stirling, de Moivre, etc.
- $$\text{Euler, 1735 (28 años)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$
  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = 1$
- Intentos previos sin éxito: Jacob Bernouilli, Johan Bernouilli, Daniel Bernouilli, Leibniz, Stirling, de Moivre, etc.
- $$\text{Euler, 1735 (28 años)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = \frac{2^{24}76977927\pi^{26}}{27!}$$

Una mini excursión al problema de Basilea

- ¿ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$
  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = 1$
- Intentos previos sin éxito: Jacob Bernouilli, Johan Bernouilli, Daniel Bernouilli, Leibniz, Stirling, de Moivre, etc.
- $$\text{Euler, 1735 (28 años)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \ldots, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{26}} = \frac{2^{24} 76977927 \pi^{26}}{27!}$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$
  es irracional, $\forall\, k \in \mathbb{N}$

Principales ideas de la demostración de Euler

Principales ideas de la demostración de Euler

- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

Principales ideas de la demostración de Euler

- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$

  $$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

Principales ideas de la demostración de Euler

- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall \, x \in \mathbb{R}$

  $$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right)$

Principales ideas de la demostración de Euler

- $\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \; \forall\, x \in \mathbb{R}$

  $$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{x}{k\pi}\right)\left(1 - \dfrac{x}{-k\pi}\right)$

  $= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$

Principales ideas de la demostración de Euler

- $\text{sen}\, x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \; \forall\, x \in \mathbb{R}$

  $$\frac{\text{sen}\, x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

- $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{x}{k\pi}\right)\left(1 - \dfrac{x}{-k\pi}\right)$

  $= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$

- $$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

Principales ideas de la demostración de Euler

- $\text{sen } x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

  $$\frac{\text{sen } x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}$$

- $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right)$

  $= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \dfrac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$

- $$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

$$¿\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}\ ?$$

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

$$¿\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}\ ?$$

(¡algo sabemos, pero poco!)

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

$$¿\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}\ ?$$

(¡algo sabemos, pero poco!)

- 1978, R. Apéry: si $k = 1$, la suma es un número irracional

Una miniexcursión a la actualidad (y la función zeta de Riemann)

$$¿ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}}, \quad k \in \mathbb{N} \, ?$$

(¡algo sabemos, pero poco!)

- 1978, R. Apéry: si $k = 1$, la suma es un número irracional
- 2004, S. Fischler: el conjunto de los valores de k para los que la suma anterior es irracional es un conjunto infinito.

Vuelta al trabajo (las sumas obtenidas por Euler permiten mejorar la expresión del primer coeficiente)

Vuelta al trabajo (las sumas obtenidas por Euler permiten mejorar la expresión del primer coeficiente)

$$f_1 = 2\sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0)\left[\sum_{2\le n_1<n_2<\ldots<n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2}\right] =$$

Vuelta al trabajo (las sumas obtenidas por Euler permiten mejorar la expresión del primer coeficiente)

$$f_1 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{2 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2} \right] =$$

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{2k+1)}(0) \left[\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} \right] =$$

Vuelta al trabajo (las sumas obtenidas por Euler permiten mejorar la expresión del primer coeficiente)

$$f_1 = 2\sum_{k=0}^{\infty} f^{2k+1)}(0)\left[\sum_{2\leq n_1<n_2<\ldots<n_k} \frac{1}{n_1^2 n_2^2 \ldots n_k^2}\right] =$$

$$2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k f^{2k+1)}(0)\left[\sum_{n=0}^{k}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

¿La derivación respecto de π?

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi), \ s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi),\ s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$s(\pi) = f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi)\ldots$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi),\ s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$s(\pi) = f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi)\dots$$
$$s''(\pi) = f^{2)}(\pi) - f^{4)}(\pi) + f^{6)}(\pi) - f^{8)}(\pi)\dots$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi),\ s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$s(\pi) = f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi)\dots$$
$$s''(\pi) = f^{2)}(\pi) - f^{4)}(\pi) + f^{6)}(\pi) - f^{8)}(\pi)\dots$$

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi)$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi),\ s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$s(\pi) = f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi)\dots$$
$$s''(\pi) = f^{2)}(\pi) - f^{4)}(\pi) + f^{6)}(\pi) - f^{8)}(\pi)\dots$$

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi)$$

$$s''(x) + s(x) = f(x)$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi} s(\pi), \;\; s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$\begin{aligned} s(\pi) &= f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi) \dots \\ s''(\pi) &= f^{2)}(\pi) - f^{4)}(\pi) + f^{6)}(\pi) - f^{8)}(\pi) \dots \end{aligned}$$

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi)$$

$$s''(x) + s(x) = f(x)$$

$$s(x) = a \cos x + b \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \int_0^x f(s) \cos s \, ds - \cos x \int_0^x f(s) \operatorname{sen} s \, ds$$

¿La derivación respecto de π?

$$f_1 = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi) = \frac{2}{\pi}s(\pi),\; s(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f^{2n)}(\pi)$$

$$s(\pi) = f(\pi) - f^{2)}(\pi) + f^{4)}(\pi) - f^{6)}(\pi)\dots$$
$$s''(\pi) = f^{2)}(\pi) - f^{4)}(\pi) + f^{6)}(\pi) - f^{8)}(\pi)\dots$$

$$s''(\pi) + s(\pi) = f(\pi)$$

$$s''(x) + s(x) = f(x)$$

$$s(x) = a\cos x + b\,\mathrm{sen}x + \mathrm{sen}x\int_0^x f(s)\cos s\, ds - \cos x\int_0^x f(s)\mathrm{sen}s\, ds$$

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x)\mathrm{sen}x\;\; dx$$

¿La derivación respecto de π?

¿La derivación respecto de π?

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{sen} x \ \ dx$$

¿La derivación respecto de π?

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{sen} x \; dx$$

$$-a = s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(0) = 0$$

¿La derivación respecto de π?

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} x \; dx$$

$$-a = s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(0) = 0$$

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} f(x) \text{sen} x \; dx$$

¿La derivación respecto de π?

$$s(\pi) = -a + \int_0^{\pi} f(x)\text{sen}x \ \ dx$$

$$-a = s(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f^{2n)}(0) = 0$$

$$s(\pi) = \int_0^{\pi} f(x)\text{sen}x \ \ dx$$

$$f_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\text{sen}x \, dx$$

Funciones continuas no derivables

Relación del tema con la convergencia de series de Fourier

Relación del tema con la convergencia de series de Fourier

- Fourier publica su libro en 1822

Funciones continuas no derivables

Relación del tema con la convergencia de series de Fourier

- Fourier publica su libro en 1822
- Algunos años después se prueba (Dirichlet, 1829) que la derivabilidad de una función es suficiente para la convergencia puntual de su serie de Fourier

Funciones continuas no derivables

Relación del tema con la convergencia de series de Fourier

- Fourier publica su libro en 1822
- Algunos años después se prueba (Dirichlet, 1829) que la derivabilidad de una función es suficiente para la convergencia puntual de su serie de Fourier
- ¿Será suficiente la continuidad de una función para la convergencia puntual de su serie de Fourier?

Funciones continuas no derivables

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

- Riemann, 1868: definió una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier intervalo real finito $[a, b]$, $a < b$, se cumple: f es integrable en $[a, b]$ aunque f es discontinua en un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$.

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

- Riemann, 1868: definió una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier intervalo real finito $[a, b]$, $a < b$, se cumple: f es integrable en $[a, b]$ aunque f es discontinua en un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$. Además, Riemann demostró que una primitiva cualquiera F de $f$satisface: F es continua en todo punto, pero en cada intervalo real finito hay infinitos puntos donde F no es derivable.

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

- Riemann, 1868: definió una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier intervalo real finito $[a, b]$, $a < b$, se cumple: f es integrable en $[a, b]$ aunque f es discontinua en un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$. Además, Riemann demostró que una primitiva cualquiera F de $f$satisface: F es continua en todo punto, pero en cada intervalo real finito hay infinitos puntos donde F no es derivable.
- Weierstrass, 1872: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en todo punto y no derivable en ninguno.

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

- Riemann, 1868: definió una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier intervalo real finito $[a, b]$, $a < b$, se cumple: f es integrable en $[a, b]$ aunque f es discontinua en un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$. Además, Riemann demostró que una primitiva cualquiera F de $f$satisface: F es continua en todo punto, pero en cada intervalo real finito hay infinitos puntos donde F no es derivable.
- Weierstrass, 1872: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en todo punto y no derivable en ninguno.

  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde $0 < b < 1$ y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$.

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

- Riemann, 1868: definió una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier intervalo real finito $[a, b]$, $a < b$, se cumple: f es integrable en $[a, b]$ aunque f es discontinua en un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$. Además, Riemann demostró que una primitiva cualquiera F de $f$satisface: F es continua en todo punto, pero en cada intervalo real finito hay infinitos puntos donde F no es derivable.
- Weierstrass, 1872: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en todo punto y no derivable en ninguno.

  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde $0 < b < 1$ y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$.
- Hardy, 1916: se tiene la misma conclusión que Weierstrass suponiendo hipótesis más generales: $0 < b < 1$ y $ab \geq 1$

Funciones continuas no derivables

Algunos ejemplos

- Riemann, 1868: definió una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cualquier intervalo real finito $[a, b]$, $a < b$, se cumple: f es integrable en $[a, b]$ aunque f es discontinua en un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$. Además, Riemann demostró que una primitiva cualquiera F de $f$satisface: F es continua en todo punto, pero en cada intervalo real finito hay infinitos puntos donde F no es derivable.
- Weierstrass, 1872: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en todo punto y no derivable en ninguno.

  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, donde $0 < b < 1$ y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$.
- Hardy, 1916: se tiene la misma conclusión que Weierstrass suponiendo hipótesis más generales: $0 < b < 1$ y $ab \geq 1$
- H. Okamoto, 2005: A remark on continuous, nowhere differentiable functions, Proc. Japan Acad. 81, Ser. A, 47-50.

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X.

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X.

Baire, 1899: X es de segunda categoría en sí mismo.

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X.
Baire, 1899: X es de segunda categoría en sí mismo.

$X = C([a,b], \mathbb{R})$, con la norma uniforme.

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X.

Baire, 1899: X es de segunda categoría en sí mismo.

$X = C([a, b], \mathbb{R})$, con la norma uniforme.

$$M = \{f \in X : \exists\ x \in [a, b) : \text{ existe } f'(x+)\}$$

¿Hay muchas funciones continuas no derivables?

Algo podemos decir usando el análisis funcional

Sea X un espacio de Banach real cualquiera. Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X.
Baire, 1899: X es de segunda categoría en sí mismo.

$X = C([a, b], \mathbb{R})$, con la norma uniforme.

$$M = \{f \in X : \exists\ x \in [a, b) : \text{ existe } f'(x+)\}$$

Banach y Mazurkiewicz, 1931: M es de primera categoría en X y por tanto $X \setminus M$ es de segunda categoría en X.

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Algunos ejemplos

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Algunos ejemplos

- Du Bois-Reymond, 1873: función continua cuya serie de Fourier no converge en un conjunto denso de puntos.

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Algunos ejemplos

- Du Bois-Reymond, 1873: función continua cuya serie de Fourier no converge en un conjunto denso de puntos.
- Carleson, 1966: la serie de Fourier de una función continua converge c.p.d.

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Algunos ejemplos

- Du Bois-Reymond, 1873: función continua cuya serie de Fourier no converge en un conjunto denso de puntos.
- Carleson, 1966: la serie de Fourier de una función continua converge c.p.d.
- Kahane y Katznelson, 1966: dado cualquier subconjunto A de medida cero, existe una función continua tal que su serie de Fourier no converge en A.

Continuidad y convergencia puntual de series de Fourier

Algunos ejemplos

- Du Bois-Reymond, 1873: función continua cuya serie de Fourier no converge en un conjunto denso de puntos.
- Carleson, 1966: la serie de Fourier de una función continua converge c.p.d.
- Kahane y Katznelson, 1966: dado cualquier subconjunto A de medida cero, existe una función continua tal que su serie de Fourier no converge en A.
- Premio Abel 2006 ha sido concedido a Carleson, entre otras cosas por sus importantes contribuciones al análisis armónico

Teoría de conjuntos de Cantor

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$$

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) =$$

$$a_0' + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n' \cos(nx) + b_n' \text{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) =$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \operatorname{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

¿es verdad que $a_0 = a'_0,\ a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \mathrm{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

  ¿es verdad que $a_0 = a'_0,\ a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?

- Previamente habían intentado resolver este problema, sin tener éxito: Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann.

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) =$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \operatorname{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

  ¿es verdad que $a_0 = a'_0,\ a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?
- Previamente habían intentado resolver este problema, sin tener éxito: Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann.
- Cantor probó en 1870 que la respuesta era afirmativa

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \mathrm{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

  ¿es verdad que $a_0 = a'_0,\ a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$?
- Previamente habían intentado resolver este problema, sin tener éxito: Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann.
- Cantor probó en 1870 que la respuesta era afirmativa aunque se renunciara a la igualdad en un conjunto finito de puntos.

Teoría de conjuntos de Cantor

Relación del tema con la teoría de series de Fourier

- Heine, en 1869, plantea a Cantor (con 24 años de edad) el problema de la unicidad del desarrollo de una función en serie trigonométrica.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)) =$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \operatorname{sen}(nx)), \ \forall \ x \in \mathbb{R}.$$

¿es verdad que $a_0 = a'_0, \ a_n = a'_n, \ b_n = b'_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$?

- Previamente habían intentado resolver este problema, sin tener éxito: Heine, Dirichlet, Lipschitz y Riemann.
- Cantor probó en 1870 que la respuesta era afirmativa aunque se renunciara a la igualdad en un conjunto finito de puntos.
- Es más, Cantor demostró que se puede renunciar a la igualdad en un conjunto A tal que algún derivado suyo $A^{n)}$ sea finito.

Teoría de conjuntos de Cantor

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces:

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.

  A estos últimos conjuntos los llamó numerables.

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.
  A estos últimos conjuntos los llamó numerables.
- A continuación Cantor se preguntó: ¿habrá subconjuntos de $\mathbb{R}$ no numerables?

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.
  A estos últimos conjuntos los llamó numerables.
- A continuación Cantor se preguntó: ¿habrá subconjuntos de $\mathbb{R}$ no numerables?
  Cantor demostró: $\mathbb{R}$ no es numerable,

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.
  A estos últimos conjuntos los llamó numerables.
- A continuación Cantor se preguntó: ¿habrá subconjuntos de $\mathbb{R}$ no numerables?
  Cantor demostró: $\mathbb{R}$ no es numerable, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son biyectivos

Teoría de conjuntos de Cantor

- Cantor se preguntó a continuación: ¿cómo son los subconjuntos A de números reales tales que algún derivado suyo $A^{n)}$ es finito?
- Cantor demostró en 1871: si $A \subset \mathbb{R}$ es tal que $A^{n)}$ es finito para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces: A es finito ó A se puede poner en correspondencia biyectiva con $\mathbb{N}$.
  A estos últimos conjuntos los llamó numerables.
- A continuación Cantor se preguntó: ¿habrá subconjuntos de $\mathbb{R}$ no numerables?
  Cantor demostró: $\mathbb{R}$ no es numerable, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$ son biyectivos (sobre este último resultado, el mismo Cantor comentó: si no lo hubiese demostrado, no me lo creería).

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

- $$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) =$$
  $$a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \text{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus A.$$

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

- $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) =$
  $a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \text{sen}(nx)), \ \forall \ x \in \mathbb{R} \setminus A$. ¿es verdad que $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n, \ b_n = b'_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$?

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

- $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$

  $a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \mathrm{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus A$. ¿es verdad que $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n, \ b_n = b'_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$?
- Cantor (1871): si A es tal que $A^{n)}$ es finito, para algún $n \in \mathbb{N}$, la respuesta es positiva.

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

- $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) =$
  $a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \text{sen}(nx)),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus A$. ¿es verdad que $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$?
- Cantor (1871): si A es tal que $A^{n)}$ es finito, para algún $n \in \mathbb{N}$, la respuesta es positiva. Bernstein (1908), Young (1909): Si A es numerable la respuesta es positiva.

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

- $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)) =$
  $a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \mathrm{sen}(nx)), \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus A$. ¿es verdad que $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n, \ b_n = b'_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$?
- Cantor (1871): si A es tal que $A^{n)}$ es finito, para algún $n \in \mathbb{N}$, la respuesta es positiva. Bernstein (1908), Young (1909): Si A es numerable la respuesta es positiva. Existen ejemplos de subconjuntos no numerables A para los que la respuesta es positiva.

¿Se ha resuelto el problema de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica?

- $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)) =$

  $a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos(nx) + b'_n \text{sen}(nx)),\ \forall\ x \in \mathbb{R} \setminus A$. ¿es verdad que $a_0 = a'_0$, $a_n = a'_n,\ b_n = b'_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$?
- Cantor (1871): si A es tal que $A^{n)}$ es finito, para algún $n \in \mathbb{N}$, la respuesta es positiva. Bernstein (1908), Young (1909): Si A es numerable la respuesta es positiva. Existen ejemplos de subconjuntos no numerables A para los que la respuesta es positiva.
- Éste es uno de los problemas abiertos más interesantes y difíciles en la actualidad (J.M. Ash y S.T. Tetunashvili: New uniqueness theorems for trigonometric series, Proc. Amer. Math. Soc., 128, 2000, 2627-2636), y está relacionado con muchas otras áreas del análisis clásico, teoría de la medida, análisis funcional, teoría de números, teoría de conjuntos, etc.