
CÁLCULO VECTORIAL
SERIES DE FOURIER
VARIABLE COMPLEJA

Javier Pérez González

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Asignatura: Fundamentos Matemáticos I

Curso: Segundo

Titulación: Ingeniero de Telecomunicación

septiembre 2006

1. Estructura euclídea de \mathbb{R}^n. Curvas	1
1.1. Producto escalar. Bases ortogonales.	1
1.1.1. Ejercicios	2
1.1.2. Ejercicios	3
1.1.3. Producto vectorial en \mathbb{R}^3	4
1.1.4. Ejemplos	6
1.1.5. Ejercicios	6
1.2. Curvas en el plano	7
1.2.1. Recta tangente en un punto de una curva plana	7
1.2.2. Ejercicios	8
1.2.3. Curvas paramétricas en el espacio. Velocidad, aceleración, curvatura.	9
1.2.4. Componentes tangencial y normal de la velocidad y de la aceleración	11
1.2.5. Ejercicios	13
2. Campos vectoriales. Integrales de línea	15
2.1. Campos vectoriales	15
2.1.1. Ejemplos	16
2.2. Integrales de línea	17
2.2.1. Integral de línea de un campo escalar	17

2.2.1.1. Observaciones	17
2.2.1.2. Circunferencias	19
2.2.1.3. Segmentos	19
2.2.1.4. Ejercicios	20
2.2.2. Integral de línea de un campo vectorial	20
2.2.2.1. Observaciones	21
2.2.2.2. Ejemplos	22
2.2.2.3. Ejercicios	22
2.3. Campos conservativos	23
2.3.1. Conservación de la energía en un campo de fuerzas conservativo	25
2.3.2. Condiciones necesarias para que un campo sea conservativo	26
2.3.3. Ejercicios	28
2.4. Teorema de Green	29
2.4.1. Ejercicios	31
3. Rotacional y divergencia	33
3.1. Rotacional y divergencia de un campo vectorial	33
3.1.1. ejercicios	39
4. Coordenadas curvilíneas	40
4.1. Coordenadas polares	40
4.1.1. Expresión de la velocidad y la aceleración en coordenadas polares	42
4.1.2. Expresión de la divergencia en coordenadas polares	43
4.1.3. Gradiente en coordenadas polares	45
4.1.4. Significado de los factores de escala	46
4.2. Coordenadas esféricas	47
4.2.1. Expresión de la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas	49
4.2.2. Expresión de la divergencia en coordenadas esféricas	50
4.2.3. Gradiente en coordenadas esféricas	51
4.2.4. Significado de los factores de escala	52

4.3. Coordenadas cilíndricas	53
4.3.1. Ejercicios	54
4.4. Coordenadas curvilíneas ortogonales	54
4.4.1. Ejercicios	56
5. Superficies. Integrales de superficie	58
5.1. Superficies en \mathbb{R}^3	58
5.1.1. Plano tangente en un punto de una superficie	59
5.1.1.1. Ejercicios	60
5.2. Área de una superficie	61
5.2.1. Ejercicios	62
5.3. Integral de superficie de un campo escalar	63
5.3.1. Ejemplos	64
5.3.2. Ejercicios	66
5.4. Integral de superficie de un campo vectorial	66
5.4.1. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie	68
5.4.2. Ejercicios	69
6. Teoremas de Stokes y de Gauss	70
6.1. Teorema de Stokes	70
6.2. Teorema de la divergencia	73
6.3. Aplicaciones de los teoremas de Stokes y de la divergencia	74
6.3.1. El rotacional en hidrodinámica	74
6.3.2. La ecuación de continuidad de la hidrodinámica	76
6.3.3. La ley de Gauss y la ecuación de Poisson en electrostática	77
6.4. Funciones armónicas	79
6.4.1. Ejercicios	79
7. Números complejos	81
7.1. Operaciones básicas con números complejos	81
7.1.1. Forma cartesiana de un número complejo	81

7.1.2. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo	82
7.1.3. Forma polar y argumentos de un número complejo	83
7.1.4. Fórmula de De Moivre	84
7.1.5. Raíces de un número complejo	84
7.1.6. Ejercicios	86
7.2. Sucesiones y series	87
7.2.1. Sucesiones	88
7.2.2. Series	90
7.2.2.1. La particularidad del estudio de las series	93
7.2.3. Algunos criterios de convergencia para series de términos positivos	94
7.2.4. Ejercicios	96
7.3. Funciones complejas	97
7.3.1. La función exponencial	97
7.3.2. Logaritmos complejos	98
7.3.3. Potencias complejas	98
7.3.4. Ejercicios	99
8. Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier	100
8.1. Análisis y síntesis	100
8.1.1. Sinusoides	100
8.2. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier	101
8.2.1. Observaciones	102
8.2.2. Ejemplos	104
8.2.3. Series de Fourier seno y coseno	106
8.2.4. Convergencia de las series de Fourier	107
8.2.5. Ejercicios	108
8.3. Geometría de las series de Fourier	110
8.3.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier	113
8.3.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia	113
8.3.3. Ejercicios	114

8.4. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta	114
8.4.1. Observaciones	116
8.4.2. Convolución y DFT	118
8.4.3. Ejercicios	119
8.5. Transformada de Fourier	120
8.5.1. Comentarios	120
8.5.2. La transformada inversa de Fourier	121
8.5.3. Propiedades de la transformada de Fourier	122
8.5.4. Ejemplos	124
8.5.5. Ejercicios	125
8.6. Convolución y transformada de Fourier	126
8.6.1. ¿Qué es la convolución?	127
8.6.2. Propiedades de la convolución	129
8.6.3. Convolución y Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)	129
8.6.3.1. Propiedades de los sistemas	130
8.6.3.2. Respuesta impulsiva de un filtro discreto	130
8.6.3.3. Respuesta impulsiva de un filtro analógico	131
9. Funciones holomorfas. Integración en el campo complejo	132
9.1. Derivada de una función de variable compleja	132
9.1.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	133
9.1.2. Propiedades de las funciones holomorfas	134
9.2. Series de potencias complejas	135
9.2.1. Ejercicios	138
9.3. Integración en el campo complejo	139
9.3.1. Existencia de primitivas	140
9.3.2. Índice de un punto respecto a un camino cerrado	143
9.3.3. Cadenas	145
9.4. Teorema de Cauchy y fórmula de Cauchy	146
9.4.1. Singularidades aisladas. Teorema de los residuos	148

9.4.1.1. Singularidades aisladas	148
9.4.2. Cálculo de residuos	149
9.4.2.1. Polos de cocientes de funciones holomorfas	151
9.5. Aplicaciones del teorema de los residuos para calcular integrales reales	151
9.5.1. Integrales del tipo $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t) dt$	151
9.5.2. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$	152
9.5.3. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$	154
9.5.4. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx$	157
9.5.5. Integrales del tipo V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{x Q(x)} dx$	158
9.6. Aplicación del teorema de los residuos para sumar series	159
9.6.1. Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$	159
9.6.2. Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$	161
9.6.3. Ejercicios	161

Lección 1

Estructura euclídea de \mathbb{R}^n . Curvas

1.1. Producto escalar. Bases ortogonales.

Voy a recordarte algunas cosas que ya debes conocer. Como sabes, \mathbb{R}^n es un espacio vectorial en el que suele destacarse la llamada *base canónica* formada por los vectores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ donde \mathbf{e}_k es el vector cuyas componentes son todas nulas excepto la que ocupa el lugar k que es igual a 1.

Dados dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define su producto escalar $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ por:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Este producto escalar se llama *producto escalar euclídeo*. Observa que el producto escalar de dos vectores no es un vector sino un número real. La notación $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ es frecuentemente usada en los libros de Física para representar el producto escalar de los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} . Las dos notaciones son útiles y las usaremos en lo que sigue.

Las siguientes propiedades del producto escalar se deducen fácilmente de la definición:

- $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle$ para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (simetría).
- $\langle \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x} | \mathbf{z} \rangle + \beta \langle \mathbf{y} | \mathbf{z} \rangle$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ (linealidad).

La norma euclídea de un vector \mathbf{x} se define por

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

En libros de física es frecuente representar la norma euclídea por $|\mathbf{x}|$ y se le llama módulo o magnitud o longitud del vector \mathbf{x} . También es frecuente seguir el convenio de que una letra en negrita, por ejemplo \mathbf{v} , representa un vector (digamos, la velocidad); y la misma letra pero en tipo normal, v , representa su norma (que sería la rapidez o celeridad). Ni que decir tiene que este convenio da lugar a muchísimas confusiones. Advertido quedas.

Dados dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} , el número $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ se llama la **distancia** (euclídea) entre \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$. Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $|\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (es decir, los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} están en una misma recta que pasa por el origen).

Desigualdad triangular.

Para todos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ se verifica que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$. Además, supuesto que \mathbf{x} e \mathbf{y} no son nulos, la igualdad $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ equivale a que hay un número $\lambda > 0$ tal que $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y}$ (es decir, los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} están en una misma semirrecta que pasa por el origen).

1.1 Definición. Se dice que los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} son **ortogonales**, y escribimos $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, cuando su producto escalar es cero. Se dice que un vector \mathbf{x} es ortogonal a un conjunto de vectores $E \subset \mathbb{R}^n$ cuando \mathbf{x} es ortogonal a todo vector en E . Un conjunto de vectores no nulos que son mutuamente ortogonales se dice que es un **conjunto ortogonal** de vectores; si, además, los vectores tienen todos norma 1 se dice que es un **conjunto ortonormal** de vectores. Una base vectorial que también es un conjunto ortogonal (ortonormal) se llama una **base ortogonal** (ortonormal).

Si \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores no nulos, el vector

$$\Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\langle \mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle} \mathbf{y}$$

se llama **proyección ortogonal de \mathbf{x} sobre \mathbf{y}** .

Puedes comprobar que el vector $\mathbf{x} - \Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ es ortogonal a \mathbf{y} . En particular, si \mathbf{y} es un **vector unitario** (de norma 1) entonces el vector $\mathbf{x} - \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \mathbf{y}$ es ortogonal a \mathbf{y} .

1.1.1. Ejercicios

1. Prueba la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Sugerencia. Comprueba que la ecuación $\langle \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} | \mathbf{x} - \lambda \mathbf{y} \rangle = 0$, en la que λ es un número real arbitrario y \mathbf{x} e \mathbf{y} son vectores que se suponen fijos, es un trinomio de segundo grado en la variable λ . Ten en cuenta que dicho trinomio toma siempre valores mayores o iguales que cero (¿por qué?) lo que proporciona información sobre su discriminante.

2. Prueba la desigualdad triangular.

Sugerencia. Una estrategia para probar desigualdades entre normas euclídeas es elevar al cuadrado. La desigualdad $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$ es equivalente a la desigualdad triangular pero es muy fácil de probar desarrollando el término $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

3. **Teorema de Pitágoras.** Prueba que los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} son ortogonales si, y solo si, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

4. Prueba que el vector $\mathbf{x} - \Pi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ es ortogonal a \mathbf{y} .

Las componentes de un vector en una base ortonormal son muy fáciles de calcular. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n y sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Puedes comprobar que

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_j \rangle \mathbf{u}_j \quad (1.1)$$

Es decir, \mathbf{x} es la suma de sus proyecciones ortogonales sobre los vectores de la base. Las componentes de \mathbf{x} en dicha base son, por tanto, $(\langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_1 \rangle, \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_2 \rangle, \dots, \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_n \rangle)$.

El producto escalar y la norma es invariante por cambios de base ortonormales. Es decir, si $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^n ; $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ son vectores de \mathbb{R}^n cuyas coordenadas en la base B son, respectivamente, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ y $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, entonces se verifica que:

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j$$

En particular,

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n \alpha_j^2}$$

1.1.2. Ejercicios

1. Comprueba la igualdad (1.1) y prueba las dos afirmaciones anteriores.

1.2 Definición. Sea H es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ una base ortonormal de H . Dado un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, el vector de H definido por

$$\Pi_H(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j \quad (1.2)$$

se llama la **proyección ortogonal** de \mathbf{x} sobre H .

Es inmediato que el vector $\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})$ es ortogonal a cada uno de los vectores \mathbf{v}_j , $1 \leq j \leq k$ y, por la linealidad del producto escalar, deducimos que $\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})$ es ortogonal a H .

1.3 Teorema (Distancia mínima de un punto a un subespacio). Sean H un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ una base ortonormal de H . Dado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se verifica que la distancia mínima de \mathbf{x} al subespacio H es igual a

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j \right\| \quad (1.3)$$

Demostración. Llamemos $\Pi_H(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j$. El vector $\Pi_H(\mathbf{x})$ está en H . Queremos probar que $\|\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ para todo $\mathbf{y} \in H$. En efecto, para todo $\mathbf{y} \in H$ se tiene que el vector $\Pi_H(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ también está en H por lo que los vectores $\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})$ y $\Pi_H(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$ son ortogonales y, usando el teorema de

Pitágoras, deducimos que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|(\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})) + (\Pi_H(\mathbf{x}) - \mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})\|^2 + \|\Pi_H(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|^2$$

esta igualdad implica que $\|\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, y la igualdad se da solamente cuando $\mathbf{y} = \Pi_H(\mathbf{x})$, esto es, la distancia mínima de \mathbf{x} a H se alcanza solamente en el punto $\Pi_H(\mathbf{x})$. \square

Cuando la dimensión de H es grande, puede calcularse fácilmente el vector $\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x})$ de la siguiente forma. Se amplía la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ a una base ortonormal $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ de \mathbb{R}^n . De la igualdad

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j + \sum_{j=k+1}^n \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_j \rangle \mathbf{u}_j$$

se sigue que

$$\mathbf{x} - \Pi_H(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \sum_{j=1}^k \langle \mathbf{x} | \mathbf{v}_j \rangle \mathbf{v}_j = \sum_{j=k+1}^n \langle \mathbf{x} | \mathbf{u}_j \rangle \mathbf{u}_j$$

Este proceder es muy útil cuando $k = n - 1$ y permite calcular fácilmente la distancia de un punto a un hiperplano (subespacio vectorial de dimensión $n - 1$). Teniendo en cuenta que la distancia es invariante por traslaciones, este resultado te permite calcular la distancia de un punto a una recta o la distancia de un punto a un plano.

1.4 Definición. Supuesto que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz puede escribirse en la forma:

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

La medida en radianes del ángulo que forman los vectores no nulos \mathbf{x} e \mathbf{y} se define como el único número $t \in [0, \pi]$ que verifica la igualdad

$$\cos t = \frac{\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|}$$

Naturalmente, como consecuencia de esta definición, se verifica que $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos t$.

1.1.3. Producto vectorial en \mathbb{R}^3

En física se representan los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^3 con las letras $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Es decir:

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

Naturalmente, si (x, y, z) es un vector de \mathbb{R}^3 se tiene que $(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

En Matemáticas se prefiere la expresión (x, y, z) y en física se prefiere $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Debes tener bien claro que son dos formas de escribir lo mismo.

1.5 Definición. En \mathbb{R}^3 se define el **producto vectorial** de dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ como el vector:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}$$

No es imprescindible memorizar esta definición pues se verifica que:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k}$$

Donde el determinante de la matriz se ha calculado formalmente considerando $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ como símbolos algebraicos. De aquí se deduce que *el producto vectorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es nulo cuando los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} son linealmente dependientes* (suele decirse que son paralelos).

Las siguientes propiedades del producto vectorial son fáciles de comprobar.

- $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ (es anticonmutativo).
- $(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ (linealidad).
- El vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es ortogonal a los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Usando estas propiedades y sabiendo que $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, es fácil calcular productos vectoriales. Una precaución que debes tener al trabajar con productos vectoriales es no usar la propiedad asociativa porque, en general, es falsa. Por ejemplo $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ pero $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

Vamos a calcular la norma euclídea del producto vectorial. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \cos^2 t = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 t \end{aligned}$$

siendo t la medida en radianes del ángulo que forman los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} . Como $0 \leq t \leq \pi$, se tiene que $\sin t \geq 0$, y deducimos que

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin t$$

De aquí se sigue que el **número $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ es igual al área del paralelogramo construido sobre los vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} .**

Realmente, antes hemos probado la bonita **identidad de Lagrange**:

$$\|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle^2 + \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2$$

que relaciona la norma, el producto escalar y el producto vectorial.

También usaremos de aquí en adelante las letras \mathbf{i}, \mathbf{j} para representar los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^2 , es decir, los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$. El contexto indicará claramente cuándo dichas letras representan vectores de \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 .

1.1.4. Ejemplos

En la definición de muchas magnitudes físicas intervienen el producto escalar o el producto vectorial. Los siguientes ejemplos son significativos.

- **Trabajo.** El trabajo, W , realizado por una fuerza constante \mathbf{F} (recuerda que la fuerza es un vector) al mover un objeto un desplazamiento \mathbf{d} (vector desplazamiento) viene dado por el producto escalar $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$.
- **Momento de una fuerza (par de torsión).** El momento, τ , también llamado par de torsión, de una fuerza \mathbf{F} que actúa en un punto A del espacio con vector de posición \mathbf{r}_a respecto de un punto B con vector de posición \mathbf{r}_b , está dado por el producto vectorial $\tau = (\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b) \times \mathbf{F}$.
- **Momento cinético (o momento angular).** Sea una partícula de masa m , con una velocidad \mathbf{v} situada en un punto cuyo vector de posición es \mathbf{r} . El momento cinético, \mathbf{L} , (respecto al origen) de dicha partícula se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$.
- **Fuerza magnética ejercida por un campo magnético sobre una carga.** Una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un campo magnético constante \mathbf{B} , experimenta una fuerza magnética, \mathbf{F}_m , dada por $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. De hecho, esta igualdad se usa para *definir* el vector \mathbf{B} (que se llama también *densidad de flujo magnético*).

1.6 Definición. El producto $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$ se llama **triple producto escalar** de los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} .

El volumen del paralelepípedo determinado por los vectores \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} es igual a $|\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})|$.

1.1.5. Ejercicios

1. Calcula el área del paralelogramo de vértices $(0, 0, 0)$, $(5, 0, 0)$, $(2, 6, 6)$, $(7, 6, 6)$.
2. Calcula el área del triángulo de vértices $(-1, 1, 2)$, $(1, -1, 3)$, $(2, 3, -1)$.
3. Calcula el área del paralelogramo en \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(5, -2)$, $(2, -1)$.
4. Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $(1, 0, 6)$, $(2, 3, -8)$, $(8, -5, 6)$.
5. Calcula el volumen del paralelepípedo con aristas concurrentes AB, AC, AD siendo $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 0, 3)$, $C = (4, 1, 7)$, $D = (3, -1, -2)$.
6. Prueba que la mínima distancia de un punto $P = (a, b, c)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ es igual a

$$\frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\|(A, B, C)\|}$$

Sugerencia. Haz una traslación. Ten en cuenta que el vector (A, B, C) es ortogonal al plano.

1.2. Curvas en el plano

En todo lo que sigue consideraremos funciones de una o varias variables con derivada continua o con derivadas parciales de primer orden continuas respectivamente.

Una curva Γ en el plano puede venir dada de tres formas.

a) Como la gráfica de una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ donde I es un intervalo de \mathbb{R} :

$$\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

b) De forma implícita como el conjunto de puntos donde se anula una función, g , de dos variables:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$$

c) Por medio de ecuaciones paramétricas $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ donde $t \in I$ siendo I un intervalo de \mathbb{R} :

$$\Gamma = \gamma(I) = \{(x(t), y(t)) : t \in I\}.$$

Observa que **a)** es un caso particular de **b)** pues la gráfica de una función f es el conjunto de puntos donde se anula la función de dos variables $g(x, y) = f(x) - y$, y también es un caso particular de **c)** pues la gráfica de una función f tiene como ecuaciones paramétricas $\gamma(x) = (x, f(x))$.

1.2.1. Recta tangente en un punto de una curva plana

El cálculo de la recta tangente depende de cómo venga dada la curva. Consideremos los tres casos posibles.

a) La tangente en un punto $(a, b) = (a, f(a)) \in \Gamma$ es la recta de ecuación $y - b = f'(a)(x - a)$. El vector $(1, f'(a))$ es tangente a Γ en el punto (a, b) y el vector $(f'(a), -1)$ es ortogonal a Γ en el punto (a, b) .

b) La tangente en $(a, b) \in \Gamma$ es la recta de ecuación implícita $\langle \nabla g(a, b) | (x - a, y - b) \rangle = 0$. Donde $\nabla g(a, b)$ es el vector gradiente de g en (a, b) . Se supone que $\nabla g(a, b) \neq (0, 0)$, pues en otro caso la tangente en (a, b) no está definida. El vector gradiente $\nabla g(a, b)$ es ortogonal a Γ en el punto (a, b) .

c) Supuesto que $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$, la tangente a γ en t_0 es la recta de ecuaciones paramétricas $(x, y) = \gamma(t_0) + t\gamma'(t_0)$. El vector $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ es tangente a γ en t_0 (suele decirse, aunque no es del todo correcto, vector tangente a Γ en $\gamma(t_0)$). En los puntos en los que el vector derivada es el vector cero no está definida la tangente.

Podemos interpretar una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ como la trayectoria que recorre un móvil cuyo vector de posición en el instante t viene dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. En tal caso, el vector derivada, $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$, es la **velocidad** del móvil en el instante t y la norma euclídea de dicho vector, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ es la **rapidez** o **celeridad** del móvil en el instante t .

La distancia recorrida por el móvil desde el instante $t = a$ hasta el instante $t = b$ se obtiene, como es natural, integrando la rapidez y viene dada por $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. Dicho de otra forma: la **longitud de la curva** $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, donde $a \leq t \leq b$, viene dada por $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ se dice que es **suave** si tiene derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$ continua y que no se anula nunca. En tal caso se define el **vector tangente unitario** como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Como $\langle \mathbf{T}(t) | \mathbf{T}(t) \rangle = 1$, se deduce que $\langle \mathbf{T}'(t) | \mathbf{T}(t) \rangle = 0$, es decir, supuesto que $\mathbf{T}'(t) \neq (0, 0)$, el vector $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal al vector tangente. Se define por ello el **vector normal unitario** a la curva como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

1.2.2. Ejercicios

1. Justifica que $\langle \mathbf{T}'(t) | \mathbf{T}(t) \rangle = 0$.
2. Calcula las rectas tangente y normal a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > 0, b > 0$), en un punto genérico (u, v) de la misma.
3. Sea $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - t)$. Representa gráficamente la curva γ para $-3 \leq t \leq 3$. Calcula la recta tangente a γ para $t = 0$ y para $t = 1$. Observa que $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0)$. Comprueba que γ es una curva suave. Observa que la expresión *tangente a γ en $(0, 0)$* es ambigua porque la curva pasa dos veces por $(0, 0)$ y, en cada caso, lo hace con distinta velocidad.

Los siguientes ejercicios ponen de manifiesto que la forma geométrica de una curva no proporciona información sobre la derivabilidad de la misma ni sobre su longitud. *Lo importante de una curva es cómo se recorre dicha curva, es decir, la función que la define.*

4. a) Sea $\gamma(t) = (t, |t|)$. Representa gráficamente la curva γ para $-1 \leq t \leq 1$. Calcula la recta tangente a γ para un valor $t < 0$ y para un valor $t > 0$. ¿Es γ derivable en $t = 0$?
 b) Sea $\gamma(t) = (t^3, t^2|t|)$. Representa gráficamente la curva γ para $-1 \leq t \leq 1$. Calcula la recta tangente a γ para un valor $t < 0$ y para un valor $t > 0$. ¿Es γ derivable en $t = 0$? ¿Es γ una curva suave?
5. Sea $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $\lambda(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$ donde $0 \leq t \leq 2\pi$. Representa gráficamente las curvas γ y λ . Calcula el vector derivada y la rapidez de cada curva. Calcula la longitud de γ y la de λ .
6. Sea $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ donde $0 \leq t \leq 2\pi$. Representa gráficamente la curva γ . ¿Tiene γ derivada continua? ¿Es γ una curva suave? Calcula la longitud de γ .

Si $f(x, y)$ es un campo escalar de dos variables, las curvas de ecuación implícita $f(x, y) = c$ o, lo que es igual $f(x, y) - c = 0$, donde c es una constante, se llaman **curvas de nivel**. De lo dicho antes, se sigue que **el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ es ortogonal en todo punto (x, y) (en el que $\nabla f(x, y) \neq (0, 0)$) a la curva de nivel que pasa por dicho punto.**

1.2.3. Curvas paramétricas en el espacio. Velocidad, aceleración, curvatura.

Las definiciones que hemos dado antes para curvas paramétrica en el plano pueden generalizarse sin esfuerzo a curvas paramétricas en \mathbb{R}^n . Como en las aplicaciones físicas el caso $n = 3$ tiene especial importancia, consideraremos en lo que sigue curvas en \mathbb{R}^3 aunque la mayoría de los conceptos que vamos a estudiar se generalizan fácilmente a \mathbb{R}^n .

Por definición, una curva en \mathbb{R}^3 es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. La función γ debe ser de la forma

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

En lo que sigue supondremos que las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son derivables con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. El punto $\gamma(a)$ se llama *punto inicial* de la curva u *origen* y el punto $\gamma(b)$ se llama *punto final* o *extremo*. Cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ se dice que la curva es *cerrada*. Una curva se dice que es *simple* si pasa una sola vez por cada uno de sus puntos, es decir si no se corta a sí misma o, lo que es igual, la función γ es inyectiva en $[a, b]$, o sea, $\gamma(u) \neq \gamma(v)$ siempre que $u, v \in [a, b]$ y $u \neq v$. Una curva cerrada se dice que es simple si γ es inyectiva en $[a, b[$. Una curva cerrada y simple se llama una *curva de Jordan*.

Podemos interpretar una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ como la trayectoria en \mathbb{R}^3 que recorre un móvil cuyo vector de posición en el instante t viene dado por $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Se dice entonces que γ es la **función de trayectoria** del móvil. En tal caso, el vector derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es la **velocidad** del móvil en el instante t y la norma euclídea de dicho vector, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ es la **rapidez** o **celeridad** del móvil en el instante t . Debes tener clara la diferencia entre estos conceptos.

Una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se dice que es **suave** si tiene derivada $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ continua y que no se anula nunca. En tal caso se define el **vector tangente unitario** como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

Como $\langle \mathbf{T}(t) | \mathbf{T}(t) \rangle = 1$, se deduce que $\langle \mathbf{T}'(t) | \mathbf{T}(t) \rangle = 0$, es decir, supuesto que $\mathbf{T}'(t) \neq (0, 0, 0)$, el vector $\mathbf{T}'(t)$ es ortogonal al vector tangente. Se define por ello el vector **normal principal unitario** a la curva como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}$$

Se define el **vector binormal** como el producto vectorial del vector tangente unitario por el vector normal principal unitario

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)$$

Es claro, por las definiciones dadas, que, en todo instante t , el sistema $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que se llama el **triedro intrínseco** de la curva γ .

La distancia recorrida por el móvil desde el instante $t = a$ hasta el instante $t = b$ se obtiene, como es natural, integrando la rapidez y viene dada por $\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$. Dicho de otra forma: la **longitud de la curva** $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, donde $a \leq t \leq b$, viene dada por

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

La función $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida para todo $t \in [a, b]$ por

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du$$

se llama función **longitud de arco** y nos da la distancia recorrida por el móvil hasta el instante t . Por su definición, es claro que $s(t)$ es una primitiva de $\|\gamma'(t)\|$, es decir, $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$. Observa que la igualdad $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$ tiene una interpretación física clara: *la derivada del espacio recorrido respecto al tiempo es la rapidez*. Esta igualdad suele expresarse en la forma

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

y a ds se le llama **elemento diferencial de longitud de arco**.

Se define la **aceleración** como la derivada de la velocidad, es decir, la derivada segunda, $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$, de la función de trayectoria. En física son frecuentes las siguientes notaciones.

- $\mathbf{r}(t)$ para representar la función de trayectoria que hemos representado por $\gamma(t)$.

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

Es un vector.

- $\mathbf{v}(t)$ para representar la velocidad.

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Es un vector.

- $v(t)$ para representar la rapidez.

$$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$

Es un número.

- $\mathbf{a}(t)$ para representar la aceleración.

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$$

Es un vector.

Seguiremos estas notaciones de aquí en adelante.

1.2.4. Componentes tangencial y normal de la velocidad y de la aceleración

Como en todo instante t el triedro intrínseco $\{\mathbf{T}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{B}(t)\}$ forma una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , podemos referir a dicha base cualquier vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ y sabemos que dicho vector es igual a la suma de sus proyecciones ortogonales sobre los elementos de dicha base, esto es:

$$\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} | \mathbf{T}(t) \rangle \mathbf{T}(t) + \langle \mathbf{u} | \mathbf{N}(t) \rangle \mathbf{N}(t) + \langle \mathbf{u} | \mathbf{B}(t) \rangle \mathbf{B}(t)$$

Como el vector velocidad tiene la dirección del vector $\mathbf{T}(t)$ se sigue que $\langle \mathbf{v}(t) | \mathbf{N}(t) \rangle = \langle \mathbf{v}(t) | \mathbf{B}(t) \rangle = 0$, por lo que

$$\mathbf{v}(t) = \langle \mathbf{v}(t) | \mathbf{T}(t) \rangle \mathbf{T}(t) = \left\langle \mathbf{v}(t) \left| \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} \right. \right\rangle \mathbf{T}(t) = \|\mathbf{v}(t)\| \mathbf{T}(t) = v(t) \mathbf{T}(t)$$

Es decir, las componentes del vector velocidad en el triedro intrínseco son $(v(t), 0, 0)$.

Derivando la igualdad anterior obtenemos:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \mathbf{T}'(t) = v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{N}(t)$$

que es la expresión del vector aceleración en el triedro intrínseco. Esta igualdad nos dice que el vector aceleración está siempre situado en el plano engendrado por los vectores $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ por lo que $\langle \mathbf{a}(t) | \mathbf{B}(t) \rangle = 0$, $\langle \mathbf{a}(t) | \mathbf{T}(t) \rangle = v'(t)$ y $\langle \mathbf{a}(t) | \mathbf{N}(t) \rangle = v(t) \|\mathbf{T}'(t)\|$.

El vector $\mathbf{a}_T(t) = v'(t) \mathbf{T}(t)$, que es la proyección ortogonal de la aceleración sobre el vector tangente unitario, se llama **aceleración tangencial**.

El vector $\mathbf{a}_N(t) = v(t) \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{N}(t)$, que es la proyección ortogonal de la aceleración sobre el vector normal principal, se llama **aceleración normal**.

Es decir, las componentes del vector aceleración en el triedro intrínseco son $(v'(t), v(t) \|\mathbf{T}'(t)\|, 0)$.

Advertencia. En muchos textos de física se llama aceleración tangencial a la *norma* del vector $\mathbf{a}_T(t) = v'(t) \mathbf{T}(t)$ y la representan por $a_T(t) = v'(t)$, es decir, la aceleración tangencial es la derivada de la rapidez. Esta aceleración representa la *variación de la velocidad en la dirección del movimiento* y cuando un vehículo acelera es la que hace que tu espalda se pegue al asiento.

Así mismo, es frecuente llamar **aceleración normal** y también **aceleración centrípeta** a la *norma* del vector $\mathbf{a}_N(t) = v(t) \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{N}(t)$ y representarla por $a_N(t) = v(t) \|\mathbf{T}'(t)\|$. Esta aceleración representa la variación de la dirección del vector tangente unitario, tiene la dirección de la normal a la curva y es la responsable de que cuando un vehículo toma una curva te sientas empujado contra una puerta.

Expresiones útiles para las aceleraciones tangencial y normal se deducen de las igualdades siguientes.

$$\langle \mathbf{r}'(t) | \mathbf{r}''(t) \rangle = \langle \mathbf{v}(t) | \mathbf{a}(t) \rangle = \langle v(t) \mathbf{T}(t) | v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{N}(t) \rangle = v(t) v'(t)$$

$$\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t) = v(t) \mathbf{T}(t) \times (v'(t) \mathbf{T}(t) + v(t) \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{N}(t)) = v(t)^2 \|\mathbf{T}'(t)\| \mathbf{B}(t)$$

de donde

$$a_T(t) = v'(t) = \frac{\langle \mathbf{v}(t) | \mathbf{a}(t) \rangle}{v(t)} = \frac{\langle \mathbf{r}'(t) | \mathbf{r}''(t) \rangle}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$a_N(t) = v(t)\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{v(t)} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

1.7 Definición. La **curvatura** de una curva suave $\mathbf{r}(t)$ es, por definición, el número

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$$

En consecuencia, obtenemos la siguiente expresión para la aceleración normal

$$a_N(t) = \kappa(t)v(t)^2$$

Obtenemos así la expresión

$$\mathbf{a}(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + \kappa(t)v(t)^2\mathbf{N}(t)$$

El **radio de curvatura** se define como

$$\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$$

Por tanto, también podemos escribir

$$a_N(t) = \frac{v(t)^2}{\rho(t)}$$

Observación. En algunas de las fórmulas anteriores interviene el producto vectorial. Te recuerdo que este producto solamente está definido para vectores de \mathbb{R}^3 por lo que dichas fórmulas solamente tienen sentido para curvas en el espacio. Pueden particularizarse dichas fórmulas para curvas en \mathbb{R}^2 de la forma que sigue. Dada una curva en \mathbb{R}^2 , $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, podemos asociarle una curva en \mathbb{R}^3 por la igualdad $\lambda(t) = (x(t), y(t), 0)$ es decir, se trata de *la misma curva plana y vista dentro del espacio tridimensional*. Podemos ahora particularizar las expresiones anteriores para λ y así obtenemos las siguientes igualdades.

La curvatura de una curva plana suave $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ viene dada por

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{\|(x'(t), y'(t), 0) \times (x''(t), y''(t), 0)\|}{\|(x'(t), y'(t), 0)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

Si en la última expresión suprimimos el valor absoluto se obtiene lo que se llama *curvatura con signo*. Podemos particularizar la expresión obtenida para el caso de que la curva venga dada como la gráfica de una función f , es decir, por medio de una función del tipo $\gamma(x) = (x, f(x))$. En este caso es fácil obtener que la curvatura (con signo) viene dada por

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

En este caso la curvatura es positiva donde la curva es convexa ($f''(x) > 0$) y es negativa donde la curva es cóncava ($f''(x) < 0$).

La (norma de la) componente normal de la aceleración de una curva plana suave $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ viene dada por

$$a_N(t) = v(t)\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\|\mathbf{v}(t) \times \mathbf{a}(t)\|}{v(t)} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}}$$

Finalmente, te recuerdo la *segunda ley del movimiento de Newton*, $\mathbf{F}(t) = m\mathbf{a}(t)$, donde $\mathbf{F}(t)$ es la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un objeto de masa m y $\mathbf{a}(t)$ es la aceleración que experimenta dicho objeto en el instante t . Conociendo la aceleración es fácil calcular, por integración componente a componente, la velocidad y la función de trayectoria.

1.2.5. Ejercicios

1. La función de trayectoria de un móvil viene dada por $\gamma(t) = (3 \cos t, 3 \sin t, t)$.
 - a) Calcula su velocidad y aceleración.
 - b) Calcula las componentes tangencial y normal de la aceleración.
 - c) Calcula el triedro intrínseco de la trayectoria.

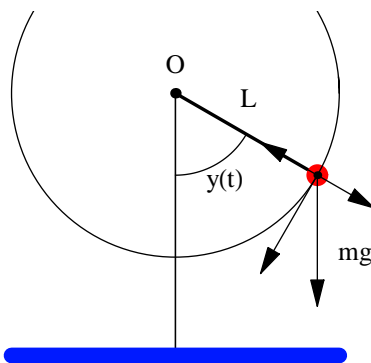
2. La función de trayectoria de un móvil viene dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$.
 - a) Calcula su velocidad y aceleración.
 - b) Calcula las componentes tangencial y normal de la aceleración.
 - c) Calcula el vector tangente unitario y el vector normal unitario.

3. Movimiento circular.

La función de trayectoria de un móvil viene dada por $\mathbf{r}(t) = (R \cos \theta(t), R \sin \theta(t))$ donde $\theta(t)$ es la medida en radianes del ángulo que forma el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ con la parte positiva del eje de abscisas. La **velocidad angular** del móvil se define como $\omega(t) = \theta'(t)$ (la rapidez de variación del ángulo $\theta(t)$ respecto del tiempo). La **aceleración angular** se define como $\omega'(t)$. Cuando $\omega'(t) = 0$ se dice que se trata de un **movimiento circular uniforme**.

- a) Calcula su velocidad y aceleración.
 - b) Calcula la aceleración tangencial y la aceleración normal.
 - c) Calcula el vector tangente unitario y el vector normal unitario.
 - d) Supuesto que el móvil tiene masa m , calcula la fuerza necesaria para producir el movimiento.
 - e) Particulariza los resultados obtenidos para el caso de un movimiento circular uniforme.
4.
 - a) Calcula la curvatura de la elipse $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, donde $0 < b < a$. ¿En qué puntos la curvatura alcanza sus valores máximo y mínimo?
 - b) Calcula la curvatura de la parábola de ecuación $y = x^2$. ¿En qué punto de ella la curvatura alcanza su máximo valor? ¿Alcanza la curvatura algún valor mínimo?
 - c) Calcula la curvatura de la cúbica alabeada $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$.
 5. Un proyectil se dispara desde el origen con ángulo de elevación α y rapidez inicial v_0 . Suponiendo que la única fuerza que actúa sobre el proyectil es la de atracción gravitatoria, calcular la función de trayectoria. ¿Qué valor de α hace máximo el alcance del proyectil? ¿Qué valor de α hace que la altura alcanzada sea máxima y cuál es el valor de ésta?
 6. Consideremos un péndulo ideal. Se trata de un punto material de masa m sujeto por una varilla perfectamente rígida de longitud L y masa despreciable que puede girar sin rozamiento alrededor de un punto fijo O . Suponemos que el movimiento ocurre en el plano XY . Elegimos

el punto O como origen de coordenadas y notamos $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$ los vectores de la base canónica. Notamos por $y(t)$ la medida en radianes del ángulo que forma la varilla con el semieje negativo de ordenadas (la vertical por O). Los ángulos se miden hacia la derecha con valores positivos y hacia la izquierda con valores negativos. Inicialmente se supone que el péndulo está en el punto $(0, -L)$.



- Escribe la ecuación de la trayectoria que sigue el péndulo en función de $y(t)$.
- Aplicando la segunda ley del movimiento de Newton deduce que $y(t)$ verifica la ecuación diferencial $y''(t) + \frac{g}{L} \sin(y(t)) = 0$.

Lección 2

Campos vectoriales. Integrales de línea

2.1. Campos vectoriales

Un **campo escalar** de n variables es una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto de \mathbb{R}^n . Un **campo vectorial** es una función que a cada punto de una región de un espacio vectorial hace corresponder un vector de dicho espacio. Concretamente, un campo vectorial de n variables es una aplicación $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde A es un subconjunto de \mathbb{R}^n . Dicha función debe ser de la forma $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ donde F_1, F_2, \dots, F_n son campos escalares de n variables llamados **componentes** de \mathbf{F} . Se dice que \mathbf{F} es continuo o que tiene derivadas parciales o que es de clase C^k (tiene derivadas parciales de orden k continuas) cuando todos los campos escalares componentes de \mathbf{F} tienen la correspondiente propiedad. Por ejemplo, las funciones

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{-y}{1+x^2+y^2} \right) = \frac{x}{1+x^2+y^2} \mathbf{i} - \frac{y}{1+x^2+y^2} \mathbf{j}$$
$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(\frac{-x}{1+x^2}, \frac{-y}{1+y^2}, \frac{-z}{1+z^2} \right) = -\frac{x}{1+x^2} \mathbf{i} - \frac{y}{1+y^2} \mathbf{j} - \frac{z}{1+z^2} \mathbf{k}$$

son campos vectoriales de 2 y 3 variables de clase C^∞ definidos en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 respectivamente. Como puedes ver, nada nuevo hay en el concepto de campo vectorial pues se trata de un tipo particular de funciones vectoriales. Ahora bien, cuando decimos que una función $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ donde $A \subset \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial, es porque la visualizamos de una forma especial y consideramos que dicha función hace corresponder a cada vector $\mathbf{x} \in A$ el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ con origen en el punto \mathbf{x} .

En general, los campos vectoriales de 2 variables son funciones de la forma

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$$

Y los campos vectoriales de 3 variables son funciones de la forma

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}$$

2.1.1. Ejemplos

- **Campo gravitacional.** La ley de la gravitación de Newton establece que la norma euclídea (la magnitud se dice en física) de la fuerza (no olvides que la fuerza es un vector) de atracción gravitacional, \mathbf{F} , entre dos objetos de masas m y M es

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{mMG}{r^2}$$

donde r es la distancia euclídea entre dichos objetos y G es la constante gravitacional universal. Si el objeto de masa M se encuentra en el origen y el objeto de masa m se encuentra en un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$, entonces $r = \|\mathbf{r}\|$. Como, además, la fuerza ejercida por el objeto de masa M sobre el objeto de masa m está dirigida desde éste hacia el origen y un vector unitario en dicha dirección es $-\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, deducimos que dicha fuerza viene dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{mMG}{\|\mathbf{r}\|^3} \mathbf{r}$$

Esta igualdad vectorial puede escribirse también en la forma:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} - \frac{mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k}$$

- **Campo eléctrico producido por una carga.** La ley de Coulomb establece que la norma euclídea (la magnitud se dice en física) de la fuerza (no olvides que la fuerza es un vector), \mathbf{F} , ejercida entre dos cargas eléctricas q y Q es

$$\|\mathbf{F}\| = \frac{|qQ|}{4\pi\epsilon r^2}$$

donde r es la distancia euclídea entre dichas cargas y ϵ es una constante. Si la carga Q se encuentra en el origen y la carga q se encuentra en un punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$, entonces $r = \|\mathbf{x}\|$. Como, además, la fuerza ejercida por la carga Q sobre la carga q actúa en la dirección del segmento de recta que une ambas cargas y es atractiva o repulsiva según que ambas cargas sean de distinto o de igual signo, y un vector unitario en la dirección del vector \mathbf{x} es $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$, deducimos que dicha fuerza viene dada por

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$$

La fuerza ejercida por unidad de carga es, por definición, el campo eléctrico, \mathbf{E} , creado por la carga Q que viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x})}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{\|\mathbf{x}\|^3} \mathbf{x}$$

- **Campos de gradiente.** Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ donde A es un subconjunto de \mathbb{R}^n un campo escalar de n variables. El **gradiente** de dicho campo escalar en un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ es, por definición, el vector

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

La aplicación $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada $\mathbf{x} \in A$ hace corresponder el gradiente de f en \mathbf{x} se llama **campo vectorial gradiente** de f .

2.2. Integrales de línea

2.2.1. Integral de línea de un campo escalar

2.1 Definición. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva con derivada continua y sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a la imagen de γ , esto es, $\gamma([a, b]) \subset A$. La integral de línea de f sobre la curva γ es el número

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \quad (2.1)$$

Para $n = 2$, poniendo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, la integral (2.1) se expresa en la forma

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Para $n = 3$, poniendo $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la integral (2.1) se expresa en la forma

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

2.2.1.1. Observaciones

Suelen usarse distintas notaciones para las integrales de línea de campos esdcalares. Es frecuente la notación

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds$$

en la cual el símbolo ds indica que se integra respecto al elemento diferencial de longitud de arco. Esta notación está de acuerdo con el hecho de que cuando la función f es la función constantemente igual a 1 se tiene que

$$\int_{\gamma} 1 = \int_{\gamma} 1 ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

es la longitud de la curva γ .

Cuando la curva γ es una curva cerrada a algunos les gusta usar el símbolo $\oint_{\gamma} f(x, y) ds$ para indicar la integral de línea de f sobre γ . No necesito decirte que no debes preocuparte por el símbolo que se usa sino que lo importante es comprender bien la definición de lo que dicho símbolo significa.

Cuando la función f es positiva, el valor de la integral de línea (2.1) puede interpretarse como el área de un lado de una cortina que cuelga de un alambre cuya forma viene dada por la curva γ y cuya altura en cada punto $\gamma(t)$ viene dada por $f(\gamma(t))$.

Otra posible interpretación es cuando $f(\gamma(t))$ es la densidad lineal en el punto $\gamma(t)$ de un alambre cuya forma viene dada por la curva γ ; en tal caso la integral (2.1) nos da la masa total del alambre. El

centro de masas del alambre es el punto de coordenadas (α, β) dadas por:

$$\alpha = \frac{\int_{\Gamma} x f(x, y) ds}{\int_{\Gamma} f}, \quad \beta = \frac{\int_{\Gamma} y f(x, y) ds}{\int_{\Gamma} f}$$

Cuando la densidad es constante el centro de masas se denomina **centroide** (que es una propiedad geométrica de la curva).

Una integral de línea depende de dos funciones: la función f y la función γ . Necesitas conocer dichas funciones para poder calcular la integral. Cuando se integra sobre curvas sencillas como, por ejemplo, un segmento o una circunferencia la función γ se da por sabida. Esto puede dar lugar a confusiones. Intentaré aclarar este punto.

Calculemos la integral de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la circunferencia unidad $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, es decir, la circunferencia de radio 1 centrada en el origen. Dicha circunferencia viene dada por la función $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ para $-\pi \leq t \leq \pi$. Tenemos que

$$\int_{\Gamma} f = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t, \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi$$

Pero también la función $\lambda(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ para $-\pi \leq t \leq \pi$ tiene como imagen la circunferencia unidad Γ , esto es $\lambda([- \pi, \pi]) = \Gamma$, y se tiene que

$$\int_{\lambda} f = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(2t), \sin(2t)) \sqrt{(-2\sin(2t))^2 + 4\cos^2(2t)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} 2 dt = 4\pi$$

¿Cuál de estas dos integrales es la que nos piden cuando nos dicen que calculemos la integral de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sobre la circunferencia unidad? Lo usual es que nos pidan la primera de las dos integrales. Observa que la función $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ donde $-\pi \leq t \leq \pi$ *recorre la circunferencia unidad una sola vez*, mientras que la función $\lambda(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ donde $-\pi \leq t \leq \pi$ *recorre la circunferencia unidad dos veces*. Es decir, **para calcular una integral de línea de una función sobre una curva lo importante no es la imagen geométrica de la curva** (en este ejemplo una circunferencia) **sino la función que la representa, es decir, cómo se recorre dicha curva** (en este ejemplo la función λ recorre la circunferencia con rapidez doble que γ).

Por esta misma razón una notación como

$$\int_{\Gamma} f$$

Para representar la integral de línea de un campo escalar f sobre una curva *definida como un subconjunto*, esto es, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, no tiene sentido salvo que especifiquemos antes la forma en que dicha curva se recorre. En resumen, no debes confundir una curva γ , que es una función, con su imagen, Γ , que es un conjunto de puntos.

Como las integrales de línea en segmentos y en circunferencias aparecen mucho conviene introducir una notación apropiada para ellas y precisar su significado.

2.2.1.2. Circunferencias

En adelante representaremos por $C((a, b), r)$ la **circunferencia** de centro (a, b) y radio r . Dicha circunferencia es la imagen de la aplicación $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t)$. Como $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-r \sin t)^2 + r^2 \cos^2 t} = r$, si f es un campo escalar definido en los puntos de dicha circunferencia tenemos que

$$\int_{C((a,b),r)} f = r \int_{-\pi}^{\pi} f(a + r \cos t, b + r \sin t) dt$$

Debido a la periodicidad de las funciones seno y coseno, podemos reemplazar en la integral anterior el intervalo $[-\pi, \pi]$ por cualquier intervalo de longitud 2π ; por ejemplo, $[0, 2\pi]$.

2.2.1.3. Segmentos

Dados dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} en \mathbb{R}^n ($n \geq 2$), representaremos por $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ el **segmento** que une \mathbf{x} con \mathbf{y} esto es, el conjunto $\{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : 0 \leq t \leq 1\}$. Dicho segmento es la imagen de la aplicación $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Como $\|\gamma'(t)\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, si f es un campo escalar definido en los puntos de dicho segmento tenemos que

$$\int_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} f = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \int_0^1 f((1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}) dt$$

Con frecuencia hay que integrar sobre segmentos en \mathbb{R}^2 que son verticales u horizontales. En estos casos podemos simplificar un poco los cálculos como sigue.

Un segmento horizontal es el que une dos puntos de la forma (a, u) , (b, u) . Una parametrización natural de dicho segmento es $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, u)$. Tenemos así que

$$\int_{[(a,u),(b,u)]} f = \int_a^b f(t, u) dt$$

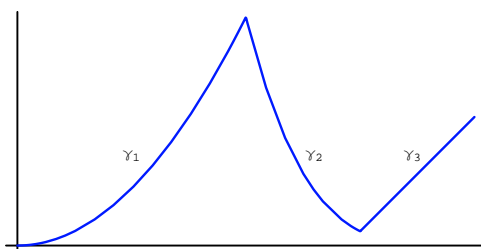
Un segmento vertical es el que une dos puntos de la forma (u, a) , (u, b) . Una parametrización natural de dicho segmento es $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (u, t)$. Tenemos así que

$$\int_{[(u,a),(u,b)]} f = \int_a^b f(u, t) dt$$

Con frecuencia es necesario calcular integrales de línea sobre curvas que no tienen derivada continua pero que pueden expresarse como una yuxtaposición de curvas con derivada continua. Estas curvas se llaman **curvas con derivada continua a trozos o caminos**. Por ejemplo, si unimos varios segmentos uno a continuación de otro obtenemos una **poligonal** que es un tipo frecuente de camino. Otro ejemplo puedes verlo en la gráfica siguiente.

En esta gráfica las curvas γ_1 , γ_2 , γ_3 se yuxtaponen para formar un camino que llamaremos γ . En estas circunstancias se define

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \int_{\gamma_3} f$$



Es decir, para integrar una función sobre un camino se suman las integrales de dicha función sobre las curvas con derivada continua que forman dicho camino. Por ejemplo, si usamos la notación $[z_1, z_2, \dots, z_n]$ para indicar una poligonal cuyos vértices son z_1, z_2, \dots, z_n , entonces

$$\int_{[z_1, z_2, \dots, z_n]} f = \int_{[z_1, z_2]} f + \int_{[z_2, z_3]} f + \dots + \int_{[z_{n-1}, z_n]} f$$

2.2.1.4. Ejercicios

- Calcula las siguientes integrales de línea de la función f sobre la curva γ .
 - $f(x, y) = x^2 - y^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ donde $0 \leq t \leq \pi$.
 - $f(x, y) = 2x$, $\gamma(t) = (t, t^2)$ donde $0 \leq t \leq 1$.
 - $f(x, y, z) = y \sin z$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ donde $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - $f(x, y, z) = xz$, $\gamma(t) = (6t, 3\sqrt{2}t^2, 2t^3)$ donde $0 \leq t \leq 1$.
- Calcula el área de la parte del cilindro $x^2 + y^2 = ax$ que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- Calcula la masa total de un alambre cuya forma es la de la curva $y = \log x$ comprendida entre $x_1 = 1$ y $x_2 = e$, si la densidad lineal (gr/cm) en cada punto del alambre es igual al cuadrado de su abscisa.
- Calcula la integral de la función $f(x, y) = xy$ a lo largo de la poligonal $[(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (1, 0)]$.

2.2.2. Integral de línea de un campo vectorial

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave y sea $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a la imagen de γ , esto es, $\gamma([a, b]) \subset A$. La componente tangencial de \mathbf{F} sobre γ en un punto $\gamma(t)$ es la proyección ortogonal del vector $\mathbf{F}(\gamma(t))$ sobre el vector tangente unitario a γ en el punto $\gamma(t)$, es decir, es el vector $\langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{T}(t) \rangle \mathbf{T}(t)$ donde $\mathbf{T}(t) = \gamma'(t) / \|\gamma'(t)\|$. Es usual representar por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ el campo escalar que a cada punto de la curva γ hace corresponder el producto escalar $\langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{T}(t) \rangle$.

2.2 Definición. La integral de línea de \mathbf{F} sobre γ se define como la integral de línea del campo escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ sobre γ , esto es, el número dado por

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{T}(t) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt \quad (2.2)$$

Expresando el campo vectorial y la curva por medio de sus funciones componentes $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ y $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$, tenemos que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(t) \cdot \gamma'(t) dt = \sum_{k=1}^n \int_a^b F_k(\gamma(t)) \gamma_k'(t) dt$$

2.2.2.1. Observaciones

Para esta integral suelen emplearse las notaciones

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds, \quad \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma$$

No olvides que con frecuencia en Física se usa la letra \mathbf{r} en lugar de γ para representar la curva sobre la que se integra.

Para $n = 2$, poniendo $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, la integral (2.2) se expresa en la forma

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(x(t), y(t)) | (x'(t), y'(t)) \rangle dt = \int_a^b (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt$$

En este caso son frecuentes la notaciones

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad \int_{\gamma} P dx + Q dy$$

para representar la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ sobre γ .

Para $n = 3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$, y tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) | (x'(t), y'(t), z'(t)) \rangle dt = \\ &= \int_a^b (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt \end{aligned}$$

En este caso son frecuentes la notaciones

$$\int_{\gamma} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad \int_{\gamma} P dx + Q dy + R dz$$

para representar la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ sobre γ .

La integral de línea de un campo vectorial sobre una curva suave depende de la orientación de la misma. Precisemos esta idea. Toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene una **orientación natural** que es la que establece el sentido de recorrido de la curva conforme el punto $\gamma(t)$ se desplaza desde $\gamma(a)$ hasta $\gamma(b)$ a medida que el parámetro t aumenta desde $t = a$ hasta $t = b$. La curva $\sim \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\sim \gamma(t) = \gamma(a + b - t)$ para todo $t \in [a, b]$, se llama **curva opuesta** de γ . Observa que $\sim \gamma$ es la *misma*

curva γ recorrida en sentido contrario pues el punto $\sim \gamma(t)$ se desplaza desde $\gamma(b)$ hasta $\gamma(a)$ a medida que el parámetro t aumenta desde $t = a$ hasta $t = b$. Teniendo en cuenta que $(\sim \gamma)'(t) = -\gamma'(a+b-t)$, tenemos que

$$\int_{\sim \gamma} \mathbf{F} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(a+b-t)) | -\gamma'(a+b-t) \rangle dt = [a+b-t = u] = - \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(u)) | \gamma'(u) \rangle du = - \int_{\gamma} \mathbf{F}$$

La integral de línea de un campo vectorial sobre un camino formado por yuxtaposición de curvas suaves se define como la suma de las integrales de línea de dicho campo vectorial sobre las curvas suaves que forman el camino.

2.2.2.2. Ejemplos

- **Trabajo.** Consideremos un camino $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya imagen está en una región $A \subset \mathbb{R}^n$ en la que está definido un campo vectorial $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada punto $\mathbf{x} \in A$ asigna un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ que interpretamos como una fuerza que actúa en \mathbf{x} . El trabajo, W , realizado por el campo de fuerzas \mathbf{F} al desplazar una partícula a lo largo del camino \mathbf{r} viene dado por la integral de línea de \mathbf{F} sobre \mathbf{r} .

$$W = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

- **Ley de Ampère.** Se comprueba experimentalmente que un largo alambre recto que lleva una corriente estacionaria I produce un campo magnético \mathbf{B} . La relación entre la corriente I del conductor y el campo magnético (densidad de flujo magnético) \mathbf{B} producido por la misma, viene dada por la ley de Ampère que establece que la integral de línea de \mathbf{B} sobre cualquier curva de Jordan suave \mathbf{r} que rodee al conductor es igual a $\mu_0 I$.

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I$$

- **Circulación de un campo vectorial a lo largo de un camino.** Consideremos un camino $\mathbf{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuya imagen está en una región $A \subset \mathbb{R}^n$ en la que está definido un campo vectorial $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. La circulación de \mathbf{F} a lo largo del camino \mathbf{r} es el número dado por $\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Como acabamos de ver, dependiendo de su naturaleza, la circulación de un campo admite distintas interpretaciones.

2.2.2.3. Ejercicios

1. Calcula la integral de los siguientes campos vectoriales, \mathbf{F} , a lo largo de los caminos \mathbf{r} que se indican en cada caso.

a) $\mathbf{F}(x, y) = x^2 y^3 \mathbf{i} - y \sqrt{x} \mathbf{j}$, $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} - t^3 \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 1$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = xy \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + zx \mathbf{k}$, $\gamma(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, $\gamma(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$d) \mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \mathbf{k}, \gamma(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \sin^3 t\mathbf{j} + (t^3/2\pi)\mathbf{k}, 0 \leq t \leq \sqrt[3]{2\pi}.$$

2. Calcula las siguientes integrales

$$a) \int_{\mathbf{r}} xy dx + (x - y) dy, \text{ donde } \mathbf{r} \text{ es la poligonal } [(0, 0), (2, 0), (3, 2)].$$

$$b) \int_{\mathbf{r}} x\sqrt{y} dx + 2y\sqrt{x} dy, \text{ donde } \mathbf{r} \text{ es el camino formado por la yuxtaposición del primer cuadrante de la circunferencia unidad y el segmento } [(0, 1), (4, 3)].$$

$$c) \int_{\mathbf{r}} (xy + \log x) dy, \text{ donde } \mathbf{r} \text{ es el segmento de la parábola } y = x^2 \text{ desde el punto } (1, 1) \text{ al punto } (3, 9).$$

$$d) \int_{\mathbf{r}} yz dy + xyz dz, \mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1.$$

3. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (x + y, x - y)$ para llevar un punto material desde el origen de coordenadas hasta el punto $(2, 0)$ en cada uno de los siguientes casos.

a) A través del segmento que une dichos puntos.

b) A través de la semicircunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1, y \geq 0$.

c) A través de la semicircunferencia $(x - 1)^2 + y^2 = 1, y \leq 0$.

4. Calcula el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{G}(x, y, z) = (x, y, z)$ para llevar un punto material desde el origen de coordenadas hasta el punto $(1, 1, 1)$ en cada uno de los siguientes casos.

a) A través del segmento que une dichos puntos.

b) A través de la poligonal $[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)]$.

5. Calcula el trabajo realizado por el campo gravitacional creado por una masa M situada en el origen de coordenadas para trasladar una partícula de masa unidad desde el punto $(1, 1, 1)$ al punto $(2, 2, 2)$ a través del segmento que une dichos puntos.

2.3. Campos conservativos

Recuerda que una integral de línea de un campo vectorial depende de dos funciones: el campo vectorial \mathbf{F} y el camino γ ; hay que conocer dichas funciones para poder calcular la integral. Para ello, todo lo que necesitas es obtener una primitiva, G , de la función $g(t) = \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$ y aplicar la regla de Barrow

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b g(t) dt = G(b) - G(a)$$

Observa que la función g depende del camino γ . Puede ocurrir que dos caminos γ_1 y γ_2 tengan los mismos puntos inicial y final pero las integrales $\int_{\gamma_1} \mathbf{F}$ y $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}$ sean distintas. El siguiente importante

resultado nos dice que los campos vectoriales con la propiedad de que sus integrales de línea sobre cualquier camino dependen solamente de los puntos inicial y final del camino son campos de gradiente, y nos muestra cómo calcular una integral de línea de un campo de gradiente.

2.3 Teorema. Sea $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde A es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n , un campo vectorial continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

a) Para todo camino cerrado γ en A se verifica que $\int_{\gamma} \mathbf{F} = 0$.

b) La integral de línea de \mathbf{F} es independiente del camino, es decir, cualesquiera sean los caminos γ_1 y γ_2 en A con los mismos puntos inicial y final se verifica que $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}$.

c) \mathbf{F} es un campo de gradiente, es decir, existe un campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$.

Si el campo \mathbf{F} verifica alguna de estas afirmaciones, en cuyo caso las verifica todas, se dice que es un **campo conservativo** (en A).

Demostración. Es fácil probar que a) es equivalente a b). No es tan fácil probar que b) implica c) y no lo haremos aquí. Probaremos que c) implica b). Para ello supongamos que hay un campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva suave en A , entonces, por la regla de la cadena, se tiene que la función $G(t) = f(\gamma(t))$ es derivable y

$$G'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle = \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$$

Es decir, $G(t) = f(\gamma(t))$ es una primitiva de $\langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$, luego

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b G'(t) dt = G(b) - G(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Lo que prueba que la integral de \mathbf{F} a lo largo de γ solamente depende de los puntos inicial y final de γ , por tanto cualesquiera sean los caminos γ_1 y γ_2 en A con los mismos puntos inicial y final se verifica que $\int_{\gamma_1} \mathbf{F} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}$. \square

2.4 Definición. Un conjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que dos puntos cualesquiera de A pueden unirse por medio de una curva *contenida* en A se llama un **dominio**.

Si \mathbf{F} es **conservativo en un dominio** A , el campo escalar $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$ está determinado de manera única salvo una constante aditiva y se llama una **función potencial** de \mathbf{F} en A . Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un camino en A y $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in A$, según hemos visto en la demostración del teorema (2.3), se verifica que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_{\gamma} \nabla f \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

2.5 Ejemplo. El campo eléctrico producido por una carga puntual Q situada en un punto (a, b, c) viene dado por

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{(x-a, y-b, z-c)}{((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^{3/2}}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(a, b, c)\}$$

Es fácil comprobar que la función

$$f(x, y, z) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

es una función potencial para \mathbf{E} en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(a, b, c)\}$. ◆

Análogamente se prueba que el campo gravitacional producido por un objeto de masa M es conservativo.

La ley de Ampère nos dice que el campo magnético producido por una corriente eléctrica estacionaria no es conservativo.

2.3.1. Conservación de la energía en un campo de fuerzas conservativo

a) Supongamos un objeto de masa m que recorre una trayectoria $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que en cada punto $\mathbf{r}(t)$ de la trayectoria actúa sobre el móvil una fuerza total $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$. En virtud de la segunda ley de Newton del movimiento, se verificará que la fuerza total $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$ que actúa sobre el móvil en cada punto de la trayectoria está relacionada con la aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ por la igualdad $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t)$. En consecuencia, el trabajo realizado por dicha fuerza es

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_a^b m\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \frac{m}{2} \int_a^b \frac{d}{dt} (\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)) dt = \\ &= \frac{m}{2} (\|\mathbf{r}'(b)\|^2 - \|\mathbf{r}'(a)\|^2) = \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2 \end{aligned}$$

donde hemos representado con $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ la rapidez del móvil en el instante t . La cantidad $\frac{1}{2} m v(t)^2$ se llama **energía cinética**. Hemos probado así que **el trabajo que realiza una fuerza sobre un móvil es igual al incremento que experimenta la energía cinética del mismo debido a la acción de dicha fuerza**.

b) Supongamos que un móvil se mueve en un campo de fuerzas conservativo $\mathbf{F}_c(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ donde f es un campo escalar. En estas condiciones se define la **energía potencial** en un punto (x, y, z) por la igualdad $P(x, y, z) = -f(x, y, z)$, y por tanto $\mathbf{F}_c(x, y, z) = -\nabla P(x, y, z)$. En esta situación, por lo visto en el teorema (2.3), se verifica que

$$W_c = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}} \nabla P \cdot d\mathbf{r} = P(\mathbf{r}(a)) - P(\mathbf{r}(b))$$

Igualdad que expresa que **el trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo al mover un objeto a lo largo de un camino es igual a la diferencia de la energía potencial del objeto en los puntos inicial y final del camino**.

c) Si además de las fuerzas del campo conservativo \mathbf{F}_c actúa sobre el móvil en cada punto $\mathbf{r}(t)$ de su trayectoria una fuerza exterior \mathbf{F}_e , entonces la fuerza total que actúa sobre el móvil será $\mathbf{F} = \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_e$

y el trabajo realizado por dicha fuerza viene dado por

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2 = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = \\ &= P(\mathbf{r}(a)) - P(\mathbf{r}(b)) + \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

de donde se sigue que el trabajo realizado por las fuerzas exteriores al campo viene dado por

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{1}{2} m v(b)^2 + P(\mathbf{r}(b)) \right) - \left(\frac{1}{2} m v(a)^2 + P(\mathbf{r}(a)) \right)$$

d) En particular, si sobre el móvil no actúan fuerzas exteriores, $\mathbf{F}_e = 0$, y el móvil se desplaza debido solamente a la acción del campo \mathbf{F}_c deducimos que

$$\frac{1}{2} m v(b)^2 + P(\mathbf{r}(b)) = \frac{1}{2} m v(a)^2 + P(\mathbf{r}(a))$$

Igualdad que expresa que **la suma de la energía cinética y de la energía potencial del objeto permanece constante**. Este resultado se conoce como **ley de conservación de la energía** y es válida para campos *conservativos*.

2.3.2. Condiciones necesarias para que un campo sea conservativo

El siguiente resultado, fácil de probar, proporciona condiciones necesarias para que un campo sea conservativo.

2.6 Proposición. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathbf{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 . Pongamos $\mathbf{F}(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$. Condiciones **necesarias** para que \mathbf{F} sea conservativo en A es que se verifiquen las igualdades

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall x \in A, 1 \leq i < j \leq n} \quad (2.3)$$

Igualdades que equivalen a que la matriz jacobiana de \mathbf{F} sea simétrica.

Para el caso de un campo vectorial de dos variables $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ las condiciones (2.3) se reducen a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad (2.4)$$

Para el caso de un campo vectorial de tres variables $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ las condiciones (2.3) se reducen a

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z), \quad \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) \quad (2.5)$$

Es natural preguntarse si estas condiciones necesarias son también suficientes para que un campo sea conservativo. La respuesta es que, en general, no son suficientes. Por ejemplo, el campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (2.6)$$

satisface las igualdades (2.4) pues

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

Sin embargo la integral de dicho campo en la circunferencia unidad es igual a

$$\int_{C((0,0),1)} \mathbf{F} = \int_{-\pi}^{\pi} \langle (-\sin t, \cos t) | (-\sin t, \cos t) \rangle dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

lo que prueba que el campo no es conservativo.

Por tanto, las condiciones necesarias (2.3) no son en general suficientes para asegurar que un campo que las cumpla sea conservativo en A . Cuando un campo vectorial verifica las condiciones (2.3) se dice que es **localmente conservativo** en el abierto A .

2.7 Definición. Un dominio se llama **simplemente conexo** cuando todo camino cerrado en el dominio puede *deformarse de forma continua sin salirse del dominio* hasta convertirlo en un punto *del dominio*.

La formalización matemática de la idea intuitiva de *deformación continua* es complicada y considero innecesario precisarla aquí. Intuitivamente, un dominio simplemente conexo en \mathbb{R}^2 es un dominio que *no tiene agujeros*. Pero esta idea intuitiva ya no sirve para dimensiones mayores que 2. Si a \mathbb{R}^2 le quitamos un punto (o un conjunto finito de puntos) obtenemos un dominio que no es simplemente conexo; si esto mismo lo hacemos con \mathbb{R}^3 el dominio que obtenemos es simplemente conexo. Un ejemplo de dominio simplemente conexo en \mathbb{R}^2 es una región acotada del plano cuya frontera es una curva cerrada y simple.

El siguiente resultado establece condiciones suficientes para que un campo localmente conservativo sea conservativo.

2.8 Teorema (Condiciones suficientes). Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 que es localmente conservativo en A . Entonces se verifica que \mathbf{F} es conservativo en todo dominio simplemente conexo $D \subset A$.

Un resultado que es equivalente al anterior y muy útil para calcular integrales de línea de campos vectoriales es el siguiente.

2.9 Teorema. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase C^1 que es localmente conservativo en A . Sean γ_1 y γ_2 dos caminos cerrados en A (o bien dos caminos con los mismos puntos inicial y final) tales que **es posible deformar continuamente el camino γ_1 en el camino γ_2 sin salirse de A** (manteniendo fijos los puntos inicial y final), entonces se verifica que

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} = \int_{\gamma_2} \mathbf{F}$$

2.3.3. Ejercicios

1. Estudia si los siguientes campos son conservativos en el dominio que se indica en cada caso. Cuando el campo sea conservativo calcula la función potencial que se anula en el origen.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x - y)\mathbf{i} + (y + y^2 x)\mathbf{j}$, $A = \mathbb{R}^2$.

b) $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + 3y^2 x)\mathbf{i} + (-y^3 + 3yx^2)\mathbf{j}$, $A = \mathbb{R}^2$.

c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x)\mathbf{i} + (-x^2 \operatorname{sen} y - \operatorname{sen} x)\mathbf{j}$, $A = \mathbb{R}^2$.

d) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3z^4\mathbf{i} + 3x^2y^2z^4\mathbf{j} + 4x^2y^3z^3\mathbf{k}$, $A = \mathbb{R}^3$.

2. a) Justifica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), -\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)$ es conservativo en el abierto $\Omega = \{(x, y) : x > 0\}$.

- b) Sean $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ (puedes suponer que $x > 1$ e $y > 0$). Pongamos $a = (1, 0)$, $b = (x, 0)$, $c = (x, y)$. Calcula la función

$$f(x, y) = \int_{[a, b]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{[b, c]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y comprueba que es una función potencial de \mathbf{F} en Ω .

3. a) Justifica que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-2xy}{(1+x^2)^2 + y^2}, \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2 + y^2}\right)$ es conservativo en \mathbb{R}^2 .

- b) Pongamos $a = (0, 0)$, $b = (x, 0)$, $c = (x, y)$. Calcula la función

$$f(x, y) = \int_{[a, b]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{[b, c]} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

y comprueba que es una función potencial de \mathbf{F} .

4. Calcula las siguientes integrales de línea.

a) $\int_{\mathbf{r}} y dx + x dy$, $\mathbf{r}(t) = (t+1) \cos^4 t \mathbf{i} + (t/\pi + \operatorname{sen}^4 t) \mathbf{j}$, $0 \leq t \leq \pi$.

b) $\int_{\mathbf{r}} (z^3 + 2xy) dx + x^2 dy + 3xz^2 dz$, $\mathbf{r}(t) = [(1, 1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1)]$.

c) $\int_{\mathbf{r}} (2xz + \operatorname{sen} y) \mathbf{i} + x \cos y \mathbf{j} + x^2 \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \operatorname{sen} t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

d) $\int_{\mathbf{r}} 4x e^z \mathbf{i} + \cos y \mathbf{j} + 2x^2 e^z \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^4 \mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

5. Indica algunos dominios en los que el campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

sea conservativo. Calcula la integral de dicho campo sobre la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 1.

6. Estudia si el campo $\mathbf{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ es conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ (ten en cuenta que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ no es un dominio simplemente conexo).

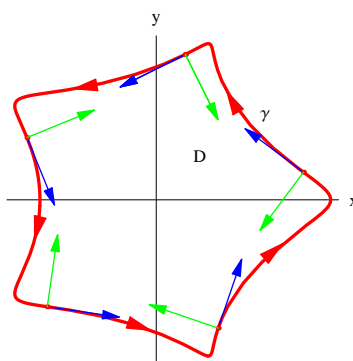
2.4. Teorema de Green

La versión más elemental del teorema de Green relaciona una integral de línea sobre una curva cerrada y simple en \mathbb{R}^2 y una integral doble sobre la región acotada por la curva. Se dice que una curva γ cerrada y simple en \mathbb{R}^2 está **orientada positivamente** cuando se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj. En otras palabras, cuando recorremos la curva γ en el sentido que indica su vector tangente en cada punto, la región interior de γ queda siempre a nuestra izquierda.

Observa que estamos usando un resultado, conocido como teorema de la curva de Jordan, que afirma que una curva γ en \mathbb{R}^2 cerrada y simple divide al plano en dos regiones disjuntas cuya frontera común es la curva. Una de las regiones está acotada y se llama interior de γ y la otra se llama exterior de γ . Este resultado tan intuitivo es muy difícil de demostrar. Nos apoyamos en él más que nada por comodidad de lenguaje pues para lo que estamos haciendo puede evitarse su uso.

Una definición matemática más precisa de lo que se entiende por *orientación positiva* es la siguiente. Sea γ una curva suave cerrada y simple; llamemos D a la región interior de γ y sea $\mathbf{P} \in \gamma$ un punto de γ . La curva γ tiene en \mathbf{P} dos vectores normales unitarios que son opuestos entre sí. Sea \mathbf{N} un vector normal unitario a γ en \mathbf{P} . Se dice que \mathbf{N} es la **normal interior** a γ en \mathbf{P} si hay un número $\delta > 0$ tal que $\mathbf{P} + t\mathbf{N} \in D$ y $\mathbf{P} - t\mathbf{N} \notin D$ siempre que $0 < t < \delta$ (esta condición expresa que si se avanza un poquito desde \mathbf{P} en la dirección de \mathbf{N} se entra en D y si se avanza en la dirección opuesta a \mathbf{N} se sale de D). Se dice que γ está orientada positivamente cuando el determinante de la matriz cuya primera fila es el vector tangente unitario a γ en un punto t y cuya segunda fila es el vector normal interior a γ en un punto t es siempre positivo (de hecho, igual a 1). Esto es lo mismo que exigir que el giro que lleva el vector tangente unitario al vector normal interior sea siempre en sentido contrario a las agujas del reloj.

La siguiente gráfica muestra un ejemplo de una curva cerrada simple positivamente orientada. Observa que el giro que lleva el vector tangente (en azul) al vector normal interior (en verde) es siempre en sentido contrario a las agujas del reloj.



2.10 Teorema (Teorema de Green). Sea γ un camino cerrado y simple en \mathbb{R}^2 que está orientado positivamente y sea D la región del plano limitada por γ . Sean P, Q campos escalares con derivadas parciales de primer orden continuas definidos en un abierto que contiene a D . En estas condiciones se verifica que la integral de línea del campo $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ sobre el camino γ es igual a la integral

doble de la función $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ sobre D . Es decir

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y)$$

Es frecuente representar con ∂D la curva frontera de D , es decir γ , orientada positivamente.

El teorema de Green permite facilitar el cálculo de algunas integrales de línea (o de integrales dobles) transformándolas en integrales dobles (o en integrales de línea).

Una aplicación del teorema de Green es para calcular áreas. Como el área de la región D viene dada por $\iint_D 1 d(x, y)$ podemos transformar esta integral doble en una integral de línea sobre la frontera ∂D sin más que elegir funciones P, Q tales que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$. Hay muchas posibilidades pero las más sencillas son $P(x, y) = 0, Q(x, y) = x; P(x, y) = -y, Q(x, y) = 0; P(x, y) = -y/2, Q(x, y) = x/2$; por lo que obtenemos las siguientes expresiones para el área:

$$\text{Área}(D) = \iint_D 1 d(x, y) = \int_{\partial D} x dy = - \int_{\partial D} y dx = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

El teorema de Green también es válido para regiones acotadas por caminos de Jordan en las que se han hecho agujeros, es decir regiones acotadas cuya frontera está formada por varios caminos de Jordan que no tienen puntos comunes siempre que cada camino frontera esté orientado de modo que la región quede siempre a la izquierda cuando se recorre dicho camino. Esto significa que el camino frontera más exterior de todos (aquel en cuyo interior se encuentra contenida la región) debe tener orientación positiva y los restantes caminos frontera (los que forman los agujeros – la región se encuentra en el exterior de los mismos) deben tener orientación negativa (recorrido en el sentido de las agujas del reloj). En otras palabras, representando por Γ la unión de todas las curvas frontera, debe ocurrir que el determinante de la matriz cuya primera fila es el vector tangente unitario a Γ en un punto t y cuya segunda fila es el vector normal interior a Γ en un punto t es siempre positivo (de hecho, igual a 1).

2.11 Teorema (Teorema de Green para dominios con agujeros). Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo de clase C^1 definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$. Sean $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, curvas de Jordan en A disjuntas dos a dos tales que:

- $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ se encuentran en el interior de γ .
- γ_i se encuentra en el exterior de γ_j para $i \neq j$.
- Todas las curvas $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, están orientadas positivamente (sentido antihorario).

Sea D la región obtenida por la intersección del interior de γ con el exterior de cada una de las curvas $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$. En estas hipótesis se verifica que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma - \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \mathbf{F} \cdot d\gamma_j = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \quad (2.7)$$

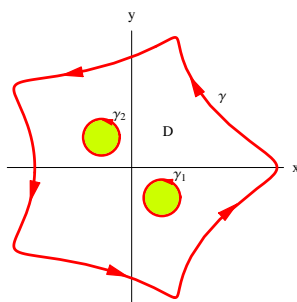
En particular, si el campo $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es localmente conservativo en un abierto que contiene a D , se verifica que

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \sum_{j=1}^k \int_{\gamma_j} \mathbf{F} \cdot d\gamma_j \quad (2.8)$$

Observa que en el enunciado del teorema hemos supuesto que todas las curvas tienen orientación antihoraria y por eso, en la igualdad (2.7), las integrales sobre las curvas interiores se restan en lugar de sumarse.

La igualdad (2.8) es muy útil porque permite reducir el cálculo de una integral de línea de un campo conservativo sobre una curva γ que puede ser complicada, al cálculo de una o varias integrales sobre curvas sencillas (por ejemplo, circunferencias).

La siguiente gráfica muestra un ejemplo de un dominio como el que se considera en el enunciado del teorema.



Naturalmente, la razón de considerar dominios con agujeros es porque se supone que en esos agujeros el campo tiene algún tipo de singularidad. Con frecuencia un agujero está producido por un punto en el que el campo se hace infinito.

2.4.1. Ejercicios

1. Comprueba la validez del teorema de Green en cada uno de los siguientes casos.

- $\mathbf{F}(x, y) = xy^2\mathbf{i} - yx^2\mathbf{j}$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y^3x^2\mathbf{j}$, $\gamma = [(0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 0)]$.
- $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$, γ es el camino obtenido por la yuxtaposición del segmento de parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(2, 4)$ y de la poligonal $[(2, 4), (0, 4), (0, 0)]$.

2. Utiliza el teorema de Green para calcular el área de las regiones del plano limitadas por las siguientes curvas.

- La elipse, $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $a > 0$, $b > 0$.
- La astroide, $\gamma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $a > 0$.
- Un arco de cicloide, $\gamma(t) = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, donde $a > 0$.
- Una poligonal cerrada orientada positivamente $\gamma = [(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n), (x_1, y_1)]$.

3. Utiliza el teorema de Green para calcular las siguientes integrales de línea.

a) $\int_{\gamma} e^y dx + 2xe^y dy$ donde $\gamma = [(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 0)]$.

b) $\int_{\gamma} x^2 y^2 dx + 4xy^3 dy$ donde $\gamma = [(0, 0), (1, 3), (0, 3), (0, 0)]$.

c) $\int_{\gamma} (y + e^{x^3}) dx + (2x + \cos(y^2)) dy$ donde γ es la curva frontera de la región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$.

d) $\int_{\gamma} (x^3 - y^3) dx + (x^3 + y^3) dy$ donde γ es la curva frontera de la región limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

e) $\int_{\gamma} (\cos x - \frac{1}{6}x^2 y^3) dx + (\frac{1}{6}x^3 y^2 + 2e^y) dy$ donde γ es la elipse positivamente orientada $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

f) $\int_{\Gamma} (e^{x^2} - y^3) dx + (e^{y^2} + x^3) dy$. Donde Γ es la frontera positivamente orientada de la región del plano Ω limitada por las circunferencias $\gamma_1 = C((0, 1), 1)$ y $\gamma_2 = C((0, 2), 2)$.

4. El **centroide** de una región plana $D \subset \mathbb{R}^2$ se define como el punto (c_1, c_2) cuyas coordenadas vienen dadas por

$$c_1 = \frac{1}{\text{Área}(D)} \iint_D x d(x, y), \quad c_2 = \frac{1}{\text{Área}(D)} \iint_D y d(x, y)$$

Supuesto que D es la región limitada por un camino cerrado simple, γ , justifica que

$$c_1 = \frac{1}{2\text{Área}(D)} \int_{\gamma} x^2 dy, \quad c_2 = -\frac{1}{2\text{Área}(D)} \int_{\gamma} y^2 dx$$

a) Calcula el centroide del triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

b) Calcula el centroide de un semicírculo de radio R .

5. Haz uso del teorema de Green para dominios con agujeros, o bien del teorema (2.9), para probar que la integral de línea del campo $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

sobre cualquier curva cerrada simple que rodee el origen es igual a 2π .

Prueba de la misma forma que la integral de línea del campo

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

sobre cualquier curva cerrada simple que rodee el origen es igual a 0.

Lección 3

Rotacional y divergencia

3.1. Rotacional y divergencia de un campo vectorial

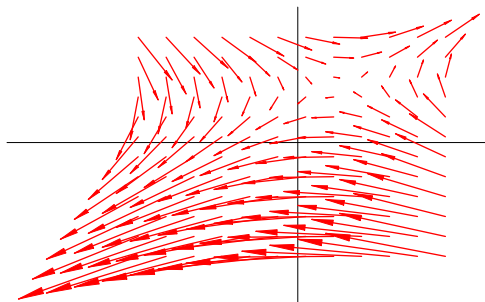
Para dar una interpretación intuitiva del significado físico del rotacional y de la divergencia de un campo vectorial es conveniente considerar en primer lugar campos bidimensionales.

Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial de clase C^1 , sea γ un camino cerrado simple positivamente orientado y D la región del plano limitada por γ . El teorema de Green afirma que

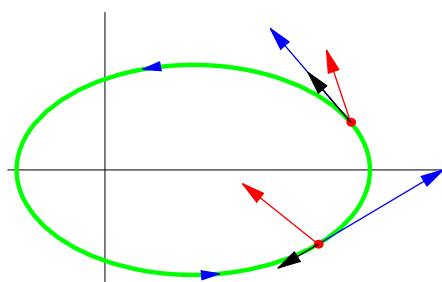
$$\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \quad (3.1)$$

Como ya sabes, la integral $\int_{\gamma} \mathbf{F}$ se llama **circulación** del campo \mathbf{F} a lo largo de γ . Para dar una interpretación de dicha integral consideremos que el campo $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es el campo de velocidades de un fluido plano, esto es, $\mathbf{F}(x, y)$ es el vector velocidad del fluido en el punto (x, y) . Se supone que la velocidad no depende del tiempo sino solamente de las coordenadas espaciales del punto, es decir, que se trata de un fluido estacionario. En cada punto $\gamma(t)$ del camino γ la velocidad del fluido es $\mathbf{F}(\gamma(t))$; la proyección ortogonal de dicho vector sobre el vector unitario tangente a γ en el punto $\gamma(t)$ es el vector $\langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{T}(t) \rangle \mathbf{T}(t)$, donde $\mathbf{T}(t) = \gamma'(t) / \|\gamma'(t)\|$. Este vector tiene el mismo sentido que el vector tangente si el número $\langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle$ es positivo y distinto sentido cuando dicho número es negativo; en el primer caso la velocidad del fluido en el punto $\gamma(t)$ va en el mismo sentido que el del recorrido de la curva y en el segundo caso la velocidad del fluido en el punto $\gamma(t)$ va en sentido opuesto al del recorrido de la curva.

La siguiente gráfica muestra un campo vectorial.



La siguiente gráfica muestra una curva cerrada simple positivamente orientada (una elipse); en dos puntos de la misma se representan los vectores del campo anterior en rojo, los vectores tangente en azul y las proyecciones ortogonales de los primeros sobre los segundos en negro. En uno de los puntos la proyección ortogonal tiene el mismo sentido que el vector tangente y en el otro tiene sentido opuesto.



Puesto que $\int_{\gamma} \mathbf{F} = \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt$, si el valor de esta integral es positivo esto nos dice que el fluido circula a lo largo de la curva γ en el mismo sentido que el definido por la orientación de γ y si el valor de esta integral es negativo entonces el fluido circula a lo largo de la curva γ en sentido opuesto al de la orientación de γ . Si el valor de la integral es nulo es porque no hay circulación neta del fluido a lo largo de γ .

Supongamos que $\int_{\gamma} \mathbf{F} > 0$. En tal caso, por la continuidad del campo, se verificará también que $\int_{\sigma} \mathbf{F} > 0$ para todo camino cerrado simple σ positivamente orientado que esté “suficientemente próximo” al camino γ . Deducimos que en este caso se formará en las proximidades de γ un pequeño tubo que el fluido recorrerá en sentido antihorario.

Consideremos la igualdad (3.1) y supongamos que en un punto (a, b) es $\frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial P}{\partial y}(a, b) > 0$. Entonces, por la continuidad de las derivadas parciales, se tendrá que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) > 0$ para todo punto (x, y) en un disco centrado en (a, b) de radio suficientemente pequeño. Si γ es cualquier camino de Jordan contenido en dicho disco, se deduce de dicha igualdad que la circulación del campo a lo largo de dicho camino será en sentido antihorario y concluimos que en el punto (a, b) se formará un pequeño remolino.

Una propiedad, fácil de justificar, de las integrales dobles afirma que si h es una función continua

en una región del plano D cerrada y acotada entonces hay algún punto $(a, b) \in D$ para el que se verifica la igualdad $\iint_D h(x, y) d(x, y) = h(a, b) \text{Área}(D)$.

Usando esta propiedad y teniendo en cuenta la igualdad (3.1) es fácil probar que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{C((a,b),\rho)} \mathbf{F} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{C((a,b),\rho)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \frac{\partial Q}{\partial x}(a, b) - \frac{\partial P}{\partial y}(a, b)$$

El número $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$ se llama **rotación** del campo \mathbf{F} en el punto (x, y) . Se dice que el campo es **irrotacional** cuando $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$ para todo punto (x, y) de su dominio de definición.

Como consecuencia también del teorema de Green, sin más que cambiar Q por P y P por $-Q$, se verifica la igualdad

$$\int_{\gamma} P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) \tag{3.2}$$

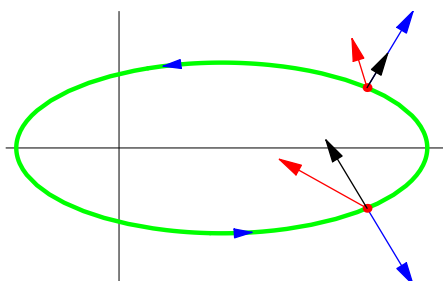
Pongamos $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x, y) dy - Q(x, y) dx &= \int_a^b (P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)) dt = \\ &= \int_a^b \left\langle P(x(t), y(t))\mathbf{i} + Q(x(t), y(t))\mathbf{j} \middle| \frac{y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}}{\|y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}\|} \right\rangle \|x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}\| dt = \\ &= \int_a^b \langle \mathbf{F}(\gamma(t)) | \mathbf{n}(t) \rangle \|\gamma'(t)\| dt = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Donde hemos representado por $\mathbf{n}(t)$ el vector unitario normal a la curva γ en el punto $\gamma(t)$ que apuntan hacia el exterior de la misma. Supuesto que la curva está orientada positivamente, $\mathbf{n}(t)$ viene dado por:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}}{\|y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}\|} = \frac{y'(t)\mathbf{i} - x'(t)\mathbf{j}}{\|x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}\|}$$

La siguiente gráfica muestra una curva cerrada simple positivamente orientada (una elipse); en dos puntos de la misma se representan los vectores del campo antes considerado en rojo, los vectores normales unitarios exteriores en azul y las proyecciones ortogonales de los primeros sobre los segundos en negro. En uno de los puntos la proyección ortogonal tiene el mismo sentido que el vector normal exterior y en el otro tiene sentido opuesto.



Al igual que la proyección ortogonal del vector campo sobre el vector unitario tangente a la curva mide *la circulación del fluido a lo largo de la curva*, la proyección ortogonal del vector campo sobre el vector unitario normal exterior a la curva mide el **flujo de fluido a través de la curva**, por ello, se

define el **flujo del campo a través del camino** γ como la integral $\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Si dicha integral es positiva eso significa que sale más fluido del que entra (por lo que dentro de la curva debe haber *manantiales*) y si es negativa significa que sale menos fluido del que entra (por lo que dentro de la curva debe haber *sumideros*).

Hemos justificado la igualdad

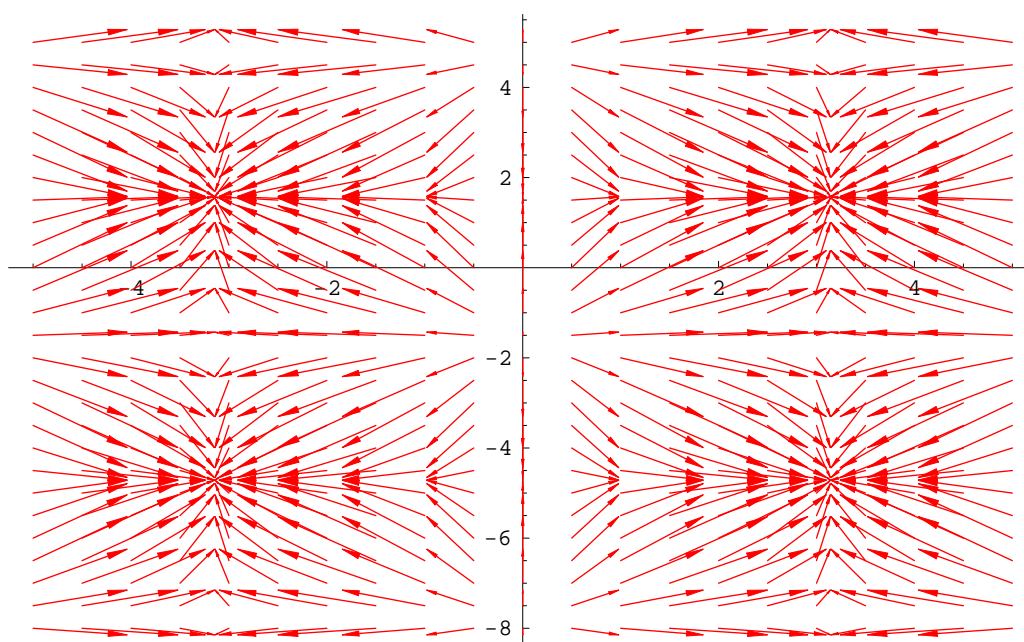
$$\int_{\gamma} P(x, y) dy - Q(x, y) dx = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y)$$

A partir de aquí podemos razonar como lo hicimos anteriormente para obtener que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \int_{C((a,b),\rho)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial P}{\partial x}(a, b) + \frac{\partial Q}{\partial y}(a, b)$$

El número $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ se llama **divergencia** del campo \mathbf{F} en el punto (x, y) . Donde la divergencia es positiva hay manantiales y el fluido “diverge” hacia otros lados y donde la divergencia es negativa hay sumideros y el fluido “converge” hacia ellos. Se dice que el campo es incompresible cuando su divergencia es idénticamente nula.

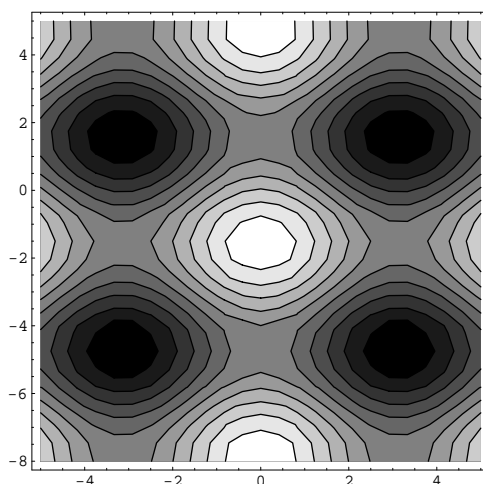
En el siguiente ejemplo se pone de manifiesto lo que acabamos de afirmar.



Observa que hay puntos a los que los vectores de este campo parecen dirigirse (por ejemplo, los puntos $(3.1, 1.6)$, $(3.1, -4.7)$ y sus simétricos respecto al eje de ordenadas) y hay otros puntos de los que los vectores de este campo parecen estar alejándose (por ejemplo, los puntos $(0, 1.5)$, $(0, -1.5)$, $(0.5, -4.5)$). Si este campo lo interpretamos como el campo de velocidades de un fluido estacionario,

las zonas hacia donde se dirigen los vectores son sumideros y las zonas de donde los vectores se alejan (divergen) son manantiales. Es decir, el fluido fluye de los manantiales a los sumideros. *La divergencia es una medida de la magnitud de un manantial o de un sumidero.*

La siguiente gráfica es una representación por curvas de nivel de la divergencia del campo anterior. En las zonas más claras la divergencia es positiva (fuentes o manantiales) y en las más oscuras es negativa (sumideros).



A continuación nos proponemos generalizar los conceptos anteriores. No hay dificultad ninguna en extender el concepto de divergencia para campos vectoriales de n variables.

3.1 Definición. Sea $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial con derivadas parciales de primer orden definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$. Se llama divergencia de \mathbf{F} en un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ y se nota $\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})$ al número

$$\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})$$

Observa que la divergencia de un campo vectorial es un campo escalar. Suele usarse una notación simbólica para representar la divergencia. Para ello se define el *operador nabla*, ∇ , como

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Este operador cuando actúa sobre un campo escalar, f , produce su gradiente.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$$

La divergencia de un campo vectorial \mathbf{F} en un punto \mathbf{x} puede escribirse como el *producto escalar simbólico* del vector ∇ por el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

$$\text{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(\mathbf{x})$$

Comprobaremos más adelante que la divergencia de un campo en \mathbb{R}^3 tiene un significado físico que generaliza lo visto para el caso de campos bidimensionales.

Es conveniente enunciar ahora, para referencia posterior, un resultado obtenido anteriormente como consecuencia del teorema de Green.

3.2 Teorema (Teorema de la divergencia en \mathbb{R}^2). Sean γ un camino cerrado simple positivamente orientado y D la región del plano limitada por γ . Sea $\mathbf{F} : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contiene a D . Notemos por \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a γ . Entonces se verifica que

$$\boxed{\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) \, d(x, y)} \quad (3.3)$$

Este resultado puede generalizarse, al igual que el teorema de Green, para dominios con agujeros.

En el caso particular de que el campo \mathbf{F} sea el campo de gradiente de un campo escalar f , $\mathbf{F} = \nabla f$, la igualdad anterior nos dice que

$$\int_{\gamma} \nabla f \cdot \mathbf{n} = \iint_D \operatorname{div}(\nabla f)(x, y) \, d(x, y) = \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) d(x, y)$$

Como \mathbf{n} es el vector unitario normal exterior a γ ; en cada punto (x, y) de γ el producto escalar $\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{n}(x, y)$ es la derivada del campo escalar f en el punto (x, y) en la dirección del vector unitario normal exterior a γ en dicho punto. Suele usarse la notación $\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{n}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x, y)$, con ello obtenemos la igualdad

$$\int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = \iint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right) d(x, y)$$

La generalización del concepto de rotación de un campo bidimensional vamos a hacerla para campos vectoriales en el espacio. Para ello nos vamos a guiar por el teorema (2.8) de la lección anterior que afirma que una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ de clase C^1 definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^2$ sea conservativo en todo dominio simplemente conexo $D \subset A$ es que para todo $(x, y) \in A$ se verifique la igualdad $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$ o, lo que es igual, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$; esto es, con la terminología introducida más arriba, que el campo sea irrotacional.

El resultado análogo para un campo de tres variables $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ establece las condiciones

$$\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

Estas ideas llevan a la siguiente definición.

3.3 Definición (Rotacional de un campo vectorial). Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial con derivadas parciales de primer orden definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^3$. Se define el **rotacional** de \mathbf{F} en un punto $(x, y, z) \in A$ como el vector

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \right) \mathbf{k} \quad (3.4)$$

Se dice que un campo es **irrotacional** cuando su rotacional es idénticamente nulo.

Para recordar esta definición se acostumbra a representar simbólicamente el rotacional por medio del operador nabla en tres dimensiones

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

Con ello podemos escribir el rotacional como el siguiente producto vectorial simbólico

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, z) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, z) \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, z) \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, z) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, z) \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Podemos también definir el rotacional de un campo de dos variables, $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$, por el convenio de asociar a dicho campo el campo de tres variables $\mathbf{F}_3(x, y, z) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ y definir $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) = \operatorname{rot} \mathbf{F}_3(x, y, z)$. Con ello, resulta que $\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) \mathbf{k}$. Observa que el teorema de Green puede escribirse en la forma:

$$\boxed{\int_{\gamma} \mathbf{F} = \iint_D \operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{k} d(x, y)} \quad (3.5)$$

Comprobaremos más adelante que el rotacional de un campo en \mathbb{R}^3 tiene un significado físico que generaliza lo visto para el caso de campos bidimensionales.

Teniendo en cuenta el teorema (2.8), las igualdades (2.4) y la definición de rotacional, obtenemos el siguiente resultado.

3.4 Teorema. *Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto $A \subset \mathbb{R}^3$. Una condición necesaria y suficiente para que dicho campo sea conservativo en todo dominio simplemente conexo contenido en A es que \mathbf{F} sea irrotacional en A .*

3.1.1. ejercicios

Los ejercicios de esta lección son los propuestos en el libro de James Stewart *Cálculo Multivariable 4Ed.* en la sección 16.5 (página 1081) números: 1-8, 12, 19, 23-29, 30, 31, 33, 34 y 36.

Lección 4

Coordenadas curvilíneas

4.1. Coordenadas polares

La función $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ es una biyección de $\Omega = \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi]$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Los números ρ y θ dados por $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ donde $\rho > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ se llaman las coordenadas polares del punto de coordenadas cartesianas (x, y) .

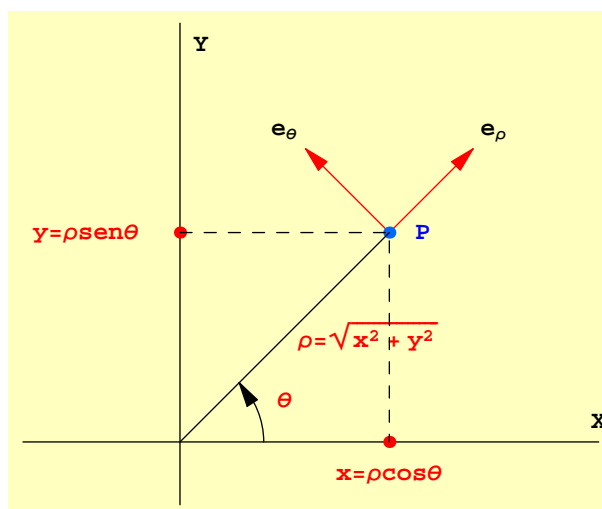


Figura 4.1: Coordenadas polares

En vez de elegir el intervalo $]-\pi, \pi]$ para medir en radianes el **ángulo polar** θ , podemos elegir cualquier otro intervalo semiabierto de longitud 2π , por ejemplo $[0, 2\pi[$. La elección más conveniente desde un punto de vista matemático, por razones de cálculo (definición del arcotangente) y de simetría, es $]-\pi, \pi]$. Observa que lo que hacemos es medir ángulos en sentido antihorario desde la parte negativa del eje de abscisas. Los valores de θ en el intervalo $]-\pi, 0[$ corresponden a puntos situados en el semiplano inferior ($y < 0$) y valores de θ en el intervalo $]0, \pi[$ corresponden a puntos situados

en el semiplano superior ($y > 0$). Los valores de θ en el intervalo $] -\pi/2, \pi/2[$ corresponden a puntos situados en el semiplano de la derecha ($x > 0$) y valores de θ en $] \pi/2, \pi] \cup] -\pi, -\pi/2[$ corresponden a puntos situados en el semiplano de la izquierda ($x < 0$).

En muchos textos se afirma que el ángulo polar, θ , viene dado por la igualdad $\theta = \arctg(y/x)$, debes tener claro que eso es falso cuando $x < 0$. Recuerda que la función arcotangente toma valores en el intervalo $] -\pi/2, \pi/2[$. Para (x, y) en el segundo cuadrante ($x < 0, y > 0$) el ángulo polar está en el intervalo $] \pi/2, \pi[$ y es igual a $\arctg(y/x) + \pi$, y para (x, y) en el tercer cuadrante ($x < 0, y < 0$) el ángulo polar está en el intervalo $] -\pi, -\pi/2[$ y es igual a $\arctg(y/x) - \pi$.

Viendo (x, y) como el número complejo $x + iy$, el ángulo polar de (x, y) no es otra cosa que el argumento principal de $x + iy$.

Cuando se utiliza el sistema de coordenadas polares los vectores se refieren a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta\}$ que se ha representado en la figura anterior. En el lenguaje típico de los textos de física, se dice que el vector \mathbf{e}_ρ es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta ρ manteniendo θ constante, y el vector \mathbf{e}_θ es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta θ manteniendo ρ constante. En términos matemáticos, quizás más precisos, observa que el vector de posición del punto P es $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, su variación con respecto a ρ manteniendo θ constante es la derivada parcial respecto a ρ y su variación con respecto a θ manteniendo ρ constante es la derivada parcial respecto a θ .

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta) \quad (4.1)$$

Observa que estos vectores son ortogonales $\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = 0$.

Para obtener una base ortonormal a partir de ellos todo lo que tenemos que hacer es normalizarlos. El primero tiene norma igual a 1 y el segundo tiene norma igual a ρ . Por tanto, *los vectores*

$$\mathbf{e}_\rho = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

forman una base ortonormal. Es a dicha base a la que se refiere un vector cuando se usan coordenadas polares.

Observa que los vectores de esta base dependen del ángulo polar θ , es decir, no se trata de una base fija. Una notación más correcta para estos vectores, para indicar su dependencia de θ , sería $\mathbf{e}_\rho(\theta)$ y $\mathbf{e}_\theta(\theta)$. Pero esta notación no suele usarse. En textos de Física es frecuente usar las notaciones $\mathbf{e}_\rho = \hat{\rho}$, $\mathbf{e}_\theta = \hat{\theta}$. Además, a estos vectores se les llama *versores*.

En general, la expresión en la base $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta\}$ de un vector $\mathbf{v} = (x, y)$ se obtiene por el método usual (igualdad (1.1)) calculando sus proyecciones ortogonales sobre los vectores de la base.

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\rho \rangle \mathbf{e}_\rho + \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle \mathbf{e}_\theta \quad (4.2)$$

Observa que si escribimos \mathbf{v} en la forma $\mathbf{v} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ entonces $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\rho \rangle = \rho$ y $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle = 0$. Dicho de otra forma, si (ρ, θ) son las coordenadas polares de un punto (x, y) , se verifica que $(x, y) = \rho \mathbf{e}_\rho$.

Recuerda que la matriz jacobiana de una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ es la matriz cuyas filas son los vectores gradiente de las funciones componentes de \mathbf{F} y, en consecuencia, sus columnas son las derivadas parciales de \mathbf{F} respecto a cada una de sus variables. Se entiende, claro está, que la derivada parcial de un campo vectorial respecto de una de sus variables, es el vector formado por las derivadas parciales de los campos escalares componentes de \mathbf{F} respecto a dicha variable.

Las columnas de la matriz jacobiana de $g(\rho, \theta)$ las hemos obtenido en (4.1). Las normas euclídeas de las columnas de la matriz jacobiana se llaman **factores métricos** o **factores de escala** del cambio a coordenadas polares y son $\{1, \rho\}$.

4.1.1. Expresión de la velocidad y la aceleración en coordenadas polares

Consideremos un móvil cuya trayectoria en el plano viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Sean $(\rho(t), \theta(t))$ las coordenadas polares de $\mathbf{r}(t)$ de forma que $\mathbf{r}(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t)) = \rho(t)\mathbf{e}_\rho(t)$ donde $\mathbf{e}_\rho(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$. Observa que $\mathbf{e}_\rho'(t) = \theta'(t)(-\sin \theta(t), \cos \theta(t)) = \theta'(t)\mathbf{e}_\theta(t)$, donde $\mathbf{e}_\theta(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$. Tenemos así que

$$\mathbf{r}'(t) = \rho'(t)\mathbf{e}_\rho(t) + \rho(t)\mathbf{e}_\rho'(t) = \rho'(t)\mathbf{e}_\rho(t) + \rho(t)\theta'(t)\mathbf{e}_\theta(t) \quad (4.3)$$

que es la expresión de la velocidad en coordenadas polares.

Esta igualdad suele escribirse con notación más clásica en la forma

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\theta\mathbf{e}_\theta$$

Imaginemos ahora que \mathbf{r} es la función de trayectoria de un móvil y que $\mathbf{r}(a)$ es su punto inicial; entonces la distancia, $s(t)$, recorrida por el móvil en cada momento t viene dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^t \|\rho'(t)\mathbf{e}_\rho(t) + \rho(t)\theta'(t)\mathbf{e}_\theta(t)\| dt = \int_a^t \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t)\theta'(t))^2} dt$$

Y, por tanto, $s'(t) = \sqrt{(\rho'(t))^2 + (\rho(t)\theta'(t))^2}$. Esta igualdad suele escribirse en la forma

$$(ds)^2 = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2 \quad (4.4)$$

y se llama *elemento diferencial de longitud* en coordenadas polares. Observa que aquí aparecen los factores de escala 1 y ρ elevados al cuadrado y multiplicando a las correspondientes diferenciales $(d\rho)^2$ y $(d\theta)^2$.

Derivando la igualdad (4.3) y teniendo en cuenta que $\mathbf{e}_\theta'(t) = -\theta'(t)\mathbf{e}_\rho(t)$, puedes comprobar que la aceleración viene dada por:

$$\mathbf{r}''(t) = (\rho''(t) - \rho(t)(\theta'(t))^2)\mathbf{e}_\rho(t) + (2\rho'(t)\theta'(t) + \rho(t)\theta''(t))\mathbf{e}_\theta(t) \quad (4.5)$$

4.1.2. Expresión de la divergencia en coordenadas polares

Sea $\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ un campo vectorial de dos variables. La divergencia de este campo es el campo escalar dado por $\text{div}\mathbf{f}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$. Consideremos la expresión de \mathbf{f} en coordenadas polares:

$$\mathbf{F}(\rho, \theta) = \mathbf{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (f_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), f_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta))$$

y calculemos las componentes $F_\rho(\rho, \theta)$ y $F_\theta(\rho, \theta)$ de $\mathbf{F}(\rho, \theta)$ respecto de la base $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta\}$, esto es, $\mathbf{F}(\rho, \theta) = F_\rho(\rho, \theta)\mathbf{e}_\rho + F_\theta(\rho, \theta)\mathbf{e}_\theta$. Sabemos que dichas componentes viene dadas por las correspondientes proyecciones ortogonales:

$$F_\rho(\rho, \theta) = \langle \mathbf{F}(\rho, \theta) | \mathbf{e}_\rho \rangle = f_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta + f_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta \quad (4.6)$$

$$F_\theta(\rho, \theta) = \langle \mathbf{F}(\rho, \theta) | \mathbf{e}_\theta \rangle = -f_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta + f_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta \quad (4.7)$$

Para obtener la expresión de la divergencia de f en coordenadas polares debemos expresar la igualdad $\text{div}\mathbf{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ en términos de las funciones F_ρ, F_θ y de sus derivadas parciales. Hay dos formas de hacer esto.

De forma indirecta

Derivamos en las igualdades anteriores haciendo uso de la regla de la cadena (derivación de una función compuesta). Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}(\rho, \theta) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos^2 \theta + \frac{\partial f_1}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta \sin \theta + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin^2 \theta \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}(\rho, \theta) &= -\frac{\partial f_1}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)(-\rho \sin \theta) \sin \theta - \frac{\partial f_1}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\rho \cos \theta \sin \theta + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)(-\rho \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\rho \cos^2 \theta \\ &- f_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cos \theta - f_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

Sumando estas igualdades, después de dividir por ρ la segunda de ellas, se deduce que

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - \frac{1}{\rho} F_\rho(\rho, \theta)$$

Es decir

$$\text{div}\mathbf{f}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho} F_\rho(\rho, \theta)$$

igualdad que suele escribirse en la forma

$$\text{div}\mathbf{f} = \frac{\partial F_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} F_\rho \quad (4.8)$$

E incluso más condensado, en la forma

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}}$$

que es la expresión de la divergencia de \mathbf{f} en polares.

De forma directa

El camino que hemos seguido antes para obtener la expresión de la divergencia en coordenadas polares es un *camino indirecto*, pues hemos calculado las derivadas $\frac{\partial F_\rho}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$ y, al hacerlo, nos hemos dado cuenta de que podíamos hacer una operación sencilla con ellas para relacionarlas con $\frac{\partial f_1}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Un camino más natural consiste en expresar $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ en función de $F_\rho(\rho, \theta)$ y $F_\theta(\rho, \theta)$; es decir, se trata de obtener las coordenadas cartesianas $(f_1(x, y), f_2(x, y))$ del vector $\mathbf{f}(x, y)$ en función de las coordenadas de dicho vector respecto de la base $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta\}$. Basta para ello tener en cuenta que:

$$(f_1(x, y), f_2(x, y)) = F_\rho(\rho, \theta)\mathbf{e}_\rho + F_\theta(\rho, \theta)\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\rho(\rho, \theta) \\ F_\theta(\rho, \theta) \end{pmatrix}$$

Es decir, la matriz cuyas columnas son los vectores \mathbf{e}_ρ y \mathbf{e}_θ es justamente la matriz del cambio de base que necesitamos. Naturalmente, en esta igualdad debemos ver a ρ y a θ como funciones de x e y , $\rho(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta(x, y) = \arctg(y/x)$ ¹. Tenemos que

$$f_1(x, y) = \cos(\theta(x, y))F_\rho(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x)) - \sin(\theta(x, y))F_\theta(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x)) \quad (4.9)$$

$$f_2(x, y) = \sin(\theta(x, y))F_\rho(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x)) + \cos(\theta(x, y))F_\theta(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x)) \quad (4.10)$$

Una vez que disponemos de $f_1(x, y)$ y $f_2(x, y)$ en función de $F_\rho(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x))$ y de $F_\theta(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctg(y/x))$, todo lo que tenemos que hacer es calcular, aplicando la regla de la cadena, las derivadas parciales $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y)$ sumarlas, simplificar y sustituir (x, y) por $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Te propongo que hagas esto en un ejercicio.

Este método tiene el inconveniente de que los cálculos pueden ser más largos pero tiene la gran ventaja de que puede seguirse en cualquier situación similar. Es decir, cualquier operación sobre un campo vectorial $\mathbf{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ que haga intervenir a las funciones componentes f_1 y f_2 y a sus derivadas parciales de los órdenes que sean, puede expresarse en coordenadas polares usando las igualdades (4.9) y (4.10).

¹Ten en cuenta que aunque $\theta(x, y)$ se puede diferenciar de $\arctg(y/x)$ en una constante ($\pm\pi$) esto no influye para nada en el cálculo de las derivadas parciales de $\theta(x, y)$ que es lo que ahora nos interesa.

4.1.3. Gradiente en coordenadas polares

Sea f un campo escalar de dos variables. Sabemos que el gradiente de f es el campo vectorial dado por $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{j}$. Hagamos en esta igualdad $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$ para obtener

$$\nabla f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)\mathbf{j}$$

La expresión del gradiente de f en polares es $\nabla f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) = f_\rho(\rho, \theta)\mathbf{e}_\rho + f_\theta(\rho, \theta)\mathbf{e}_\theta$ donde f_ρ y f_θ son las componentes del vector $\nabla f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$ en la base $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta\}$. Dichas componentes sabemos que vienen dadas por las igualdades (4.6) y (4.7) donde las componentes f_1 y f_2 del campo \mathbf{F} deben reemplazarse por las componentes $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ del campo ∇f . Por ello, podemos escribir dichas igualdades en la forma

$$f_\rho(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) \frac{\partial(\rho \cos \theta)}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) \frac{\partial(\rho \sen \theta)}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$$

$$f_\theta(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) \frac{\partial(\rho \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) \frac{\partial(\rho \sen \theta)}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$$

Hemos obtenido así que

$$\nabla f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)\mathbf{e}_\theta \quad (4.11)$$

Es conveniente introducir la función $h(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$ con lo que la igualdad anterior se escribe mejor en la forma

$$\nabla f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta) = \frac{\partial h}{\partial \rho}(\rho, \theta)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \theta}(\rho, \theta)\mathbf{e}_\theta \quad (4.12)$$

Observa que en esta igualdad a la izquierda tenemos el gradiente de f calculado en la expresión de f en coordenadas cartesianas y evaluado en el punto $(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$, y a la derecha lo que tenemos son las derivadas parciales de la función compuesta $h(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sen \theta)$ evaluadas en el punto (ρ, θ) . En los textos de Física es frecuente que no se distinga entre la función f y la función h (pues, en definitiva, son la *misma función* expresada en *distintas* coordenadas) y que escriban la igualdad (4.11) en la forma

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \quad (4.13)$$

igualdad que constituye la expresión del gradiente en polares.

Observa que en la expresión anterior del gradiente aparecen los inversos de los factores de escala multiplicando a las derivadas parciales a las que está asociado cada uno de ellos. Como sabes, los factores de escala son $\{1, \rho\}$; el primero de ellos, 1, está asociado a la primera columna de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas que corresponde a la derivación parcial respecto a la primera variable, ρ ; el segundo de ellos, ρ , está asociado a la segunda columna de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas que corresponde a la derivación parcial respecto a la segunda variable, θ .

4.1.4. Significado de los factores de escala

Consideremos la matriz jacobiana de la función que introduce las coordenadas polares.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz define una aplicación lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 que a cada vector (x, y) hace corresponder el vector $\mathcal{A} \cdot (x, y)$. Un cálculo fácil proporciona

$$\|\mathcal{A} \cdot (x, y)\| = \sqrt{x^2 + \rho^2 y^2}$$

Deducimos que para vectores situados en el eje de abscisas, es decir, de la forma $(x, 0)$, se verifica que $\|\mathcal{A} \cdot (x, 0)\| = \|(x, 0)\|$ y, por la linealidad, se sigue que $\|\mathcal{A} \cdot (x, 0) - \mathcal{A} \cdot (z, 0)\| = \|(x, 0) - (z, 0)\|$, esto es, la aplicación $(x, y) \mapsto \mathcal{A} \cdot (x, y)$ conserva distancias en el eje X. Pues bien, este es el significado de que el factor de escala asociado a la primera variable sea igual a 1.

Deducimos también que para vectores situados a lo largo del eje de ordenadas, es decir, de la forma $(0, y)$, se verifica que $\|\mathcal{A} \cdot (0, y)\| = \rho \|(0, y)\|$ y, teniendo en cuenta la linealidad, se sigue que $\|\mathcal{A} \cdot (0, y) - \mathcal{A} \cdot (0, z)\| = \|(0, y) - (0, z)\|$, esto es, la aplicación $(x, y) \mapsto \mathcal{A} \cdot (x, y)$ multiplica distancias por ρ en el eje Y. Pues bien, este es el significado de que el factor de escala asociado a la segunda variable sea igual a ρ .

En resumen, los factores de escala indican las dilataciones a lo largo de los ejes que hace la aplicación lineal asociada a la matriz jacobiana de la aplicación $g(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Suele decirse que la aplicación g es la que, a *escala infinitesimal*, produce esas dilataciones. La expresión “*escala infinitesimal*” se entiende de la siguiente forma. Supongamos que fijamos valores $\rho = \rho_0$ y $\theta = \theta_0$ y sea δ un número *muy pequeño* (lo que en los siglos XVII y XVIII se llamaba un *infinitésimo*; terminología que todavía usan algunos textos de Física). Entonces, por la definición de derivada, tenemos que

$$\begin{aligned} \|g(\rho_0 + \delta, \theta_0) - g(\rho_0, \theta_0)\| &\simeq \delta \left\| \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0) \right\| = \delta \\ \|g(\rho_0, \theta_0 + \delta) - g(\rho_0, \theta_0)\| &\simeq \delta \left\| \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0) \right\| = \delta \rho_0 \end{aligned}$$

La primera igualdad nos dice que si efectuamos “incrementos infinitesimales” en la primera variable la aplicación g conserva distancias y la segunda igualdad nos dice que si efectuamos “incrementos infinitesimales” en la segunda variable la aplicación g multiplica las distancias por el correspondiente valor de la primera variable.

La expresión (4.4) del elemento diferencial de longitud en coordenadas polares tiene en cuenta dichos factores de escala.

Naturalmente, para calcular la longitud de una curva dada por sus ecuaciones paramétricas polares $\mathbf{r}(t) = (\rho(t) \cos \theta(t), \rho(t) \sin \theta(t))$, $a \leq t \leq b$, lo que se hace es integrar la rapidez con que dicha curva se recorre:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(\rho'(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \theta'(t) \sin \theta(t))^2 + (\rho'(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \theta'(t) \cos \theta(t))^2} = \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2}$$

en consecuencia, la longitud de \mathbf{r} viene dada por

$$\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2 \theta'(t)^2} dt$$

Observa que el valor obtenido para $\|\mathbf{r}'(t)\|$ podíamos haberlo calculado directamente usando la igualdad (4.3) y recordando que la norma euclídea es invariante por cambios de base ortonormales.

Al igual que cada factor de escala mide la dilatación infinitesimal a lo largo de un eje, el producto de los factores de escala, en nuestro caso ρ , mide el cambio en el área de un rectángulo a escala infinitesimal. El producto de los factores de escala es justamente el determinante jacobiano. Recuerda que la fórmula del cambio de variables a coordenadas polares en una integral doble afirma que si f es un campo escalar continuo en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ se verifica que

$$\iint_A f(x, y) d(x, y) = \iint_B f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d(\rho, \theta)$$

donde $B = \{(\rho, \theta) : (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in A\}$. Observa que B es la expresión del conjunto A en coordenadas polares, es decir $A = g(B)$, y que en la segunda integral se multiplica por ρ . Si particularizamos la igualdad anterior para la función constante $f(x, y) = 1$ obtenemos

$$\text{Área}(g(B)) = \iint_A 1 d(x, y) = \iint_B \rho d(\rho, \theta)$$

Si B es un rectángulo muy pequeño (un rectángulo *infinitesimal*) se verifica que

$$\iint_B \rho d(\rho, \theta) \approx \rho \iint_B d(\rho, \theta) = \rho \text{Área}(B)$$

Deducimos que $\text{Área}(g(B)) \approx \rho \text{Área}(B)$. En los libros de física se dice que $\rho d\rho d\theta$ es el *elemento diferencial de área* en coordenadas polares.

4.2. Coordenadas esféricas

La función $g(r, \theta, \phi) = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$ es una biyección de $\Omega = \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times]-\pi, \pi]$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Los números (r, θ, ϕ) dados por $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$ donde $r > 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi < \phi \leq \pi$, se llaman las **coordenadas esféricas** del punto de coordenadas cartesianas (x, y, z) .

Nota. La notación y el orden en que se escriben las coordenadas esféricas varía de unos textos a otros. En muchos textos los papeles de ϕ y θ están intercambiados con respecto a los nuestros.

Por lo que se refiere al intervalo $]-\pi, \pi]$ elegido para medir en radianes el ángulo ϕ , podemos hacer las mismas observaciones que las hechas para las coordenadas polares. Con frecuencia dicho intervalo se sustituye por $[0, 2\pi[$ lo que, dicho sea de paso, complica las fórmulas del cambio de cartesianas a esféricas. Cuando en un libro se usen coordenadas esféricas debes comprobar cómo se definen dichas coordenadas.

Cuando se utiliza el sistema de coordenadas esféricas los vectores se refieren a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ que se ha representado en la figura anterior (trasladada al punto P). En el lenguaje

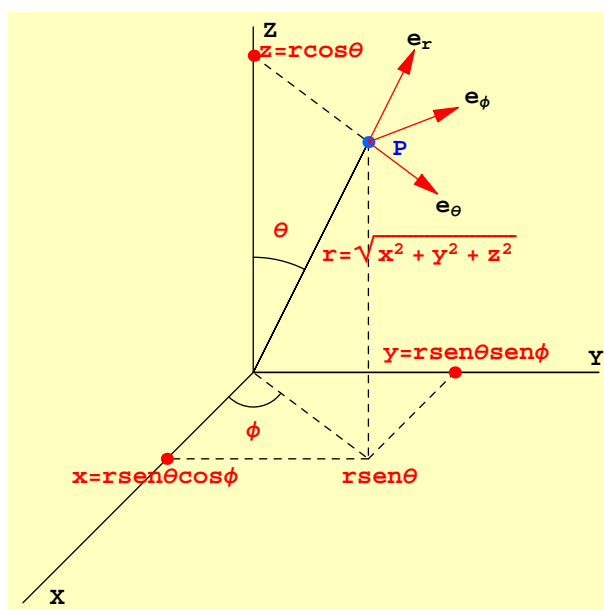


Figura 4.2: Coordenadas esféricas

típico de los textos de física se dice que el vector \mathbf{e}_r es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta r manteniendo θ y ϕ constantes, el vector \mathbf{e}_θ es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta θ manteniendo r y ϕ constantes y el vector \mathbf{e}_ϕ es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta ϕ manteniendo r y θ constantes. En términos matemáticos, quizás más precisos, observa que el vector de posición del punto P de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) es $g(r, \theta, \phi) = (r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta)$; su variación con respecto a r manteniendo θ y ϕ constantes es la derivada parcial respecto a r , su variación con respecto a θ manteniendo r y ϕ constantes es la derivada parcial respecto a θ y su variación con respecto a ϕ manteniendo r y θ constantes es la derivada parcial respecto a ϕ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta, \phi) = (\cos \phi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \theta) \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) = (r \cos \phi \cos \theta, r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, -r \operatorname{sen} \theta) \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\partial g}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) = (-r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, 0) \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que estos vectores son ortogonales dos a dos, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, para $i \neq j$. Para obtener una base ortonormal a partir de ellos todo lo que tenemos que hacer es normalizarlos. Se calculan fácilmente sus normas $\|\mathbf{u}_1\| = 1$, $\|\mathbf{u}_2\| = r$, $\|\mathbf{u}_3\| = r \operatorname{sen} \theta$. Deducimos que los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (\cos \phi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \theta) \\ \mathbf{e}_\theta &= (\cos \phi \cos \theta, \operatorname{sen} \phi \cos \theta, -\operatorname{sen} \theta) \\ \mathbf{e}_\phi &= (-\operatorname{sen} \phi, \cos \phi, 0) \end{aligned}$$

forman una base ortonormal. **Es a dicha base a la que se refiere un vector cuando se usan coordenadas esféricas.** Observa que los vectores de esta base dependen de la posición del punto, es decir, no

se trata de una base fija. Fíjate en que si (r, θ, ϕ) son las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) , se verifica que $(x, y, z) = r\mathbf{e}_r$. En general, la expresión en la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$ de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se obtiene por el método usual calculando sus proyecciones ortogonales sobre los vectores de la base:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_r \rangle \mathbf{e}_r + \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle \mathbf{e}_\theta + \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\phi \rangle \mathbf{e}_\phi \quad (4.14)$$

Observa que si escribimos \mathbf{v} en la forma $\mathbf{v} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$, entonces $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_r \rangle = r$ y $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle = \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\phi \rangle = 0$.

Recuerda que la matriz jacobiana de una función de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ es la matriz cuyas filas son los vectores gradiente de las funciones componentes de \mathbf{f} y, por tanto, sus columnas son las derivadas parciales de \mathbf{f} respecto a cada una de sus variables; entendiendo, claro está, que la derivada parcial de un campo vectorial respecto de una variable es el vector formado por las derivadas parciales de sus componentes respecto de dicha variable.

Las columnas de la matriz jacobiana de la aplicación g que introduce las coordenadas esféricas son los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$. Las normas euclídeas de las columnas de la matriz jacobiana se llaman **factores métricos** o **factores de escala** del cambio a coordenadas esféricas y son $\{1, r, r \sin \theta\}$.

Nota. En algunos libros de física se usa la notación $\mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{r}}, \mathbf{e}_\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $\mathbf{e}_\phi = \hat{\boldsymbol{\phi}}$.

4.2.1. Expresión de la velocidad y la aceleración en coordenadas esféricas

Consideremos un móvil cuya función de trayectoria viene dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$. Sean $(r(t), \theta(t), \phi(t))$ las coordenadas esféricas de $\mathbf{r}(t)$ de forma que

$$\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos \phi(t) \sin \theta(t), r(t) \sin \phi(t) \sin \theta(t), r(t) \cos \theta(t)) = r(t)\mathbf{e}_r(t)$$

donde $\mathbf{e}_r(t) = (\cos \phi(t) \sin \theta(t), \sin \phi(t) \sin \theta(t), \cos \theta(t))$. Es fácil comprobar que

$$\mathbf{e}_r'(t) = \theta'(t)\mathbf{e}_\theta(t) + \phi'(t) \sin \theta(t)\mathbf{e}_\phi(t).$$

Deducimos que

$$\mathbf{r}'(t) = r'(t)\mathbf{e}_r(t) + r(t)\mathbf{e}_r'(t) = r'(t)\mathbf{e}_r(t) + r(t)\theta'(t)\mathbf{e}_\theta(t) + r(t)\sin \theta(t)\phi'(t)\mathbf{e}_\phi(t) \quad (4.15)$$

que es la expresión de la velocidad en coordenadas esféricas.

Esta igualdad suele escribirse con notación más clásica en la forma

$$d\mathbf{r} = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \mathbf{e}_\phi(t)$$

La distancia, $s(t)$, recorrida por el móvil, desde un tiempo inicial a hasta el tiempo t viene dada por

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^t \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2 + (r(t)\sin \theta(t)\phi'(t))^2} dt$$

Y, por tanto, $s'(t) = \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t)\theta'(t))^2 + (r(t)\sin \theta(t)\phi'(t))^2}$. Esta igualdad suele escribirse en la forma

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + (r \sin \theta)^2(d\phi)^2 \quad (4.16)$$

y se llama *elemento diferencial de longitud* en coordenadas esféricas. Observa que aquí aparecen los factores de escala 1 , r y $r \operatorname{sen} \theta$ elevados al cuadrado y multiplicando a las correspondientes diferenciales $(d\rho)^2$, $(d\theta)^2$ y $(d\phi)^2$.

Derivando la igualdad (4.15) puedes comprobar que la aceleración viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(t) &= (r''(t) - r(t)(\theta'(t))^2 - r(t)(\phi'(t))^2 \operatorname{sen}^2 \theta(t)) \mathbf{e}_r(t) + \\ &+ (2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t) - r(t)(\phi'(t))^2 \operatorname{sen} \theta(t) \cos \theta(t)) \mathbf{e}_\theta(t) + \\ &+ (2r'(t)\phi'(t) \operatorname{sen} \theta(t) + 2r(t)\phi'(t)\theta'(t) \cos \theta(t) + r(t)\phi''(t) \operatorname{sen} \theta(t)) \mathbf{e}_\phi(t) \end{aligned}$$

4.2.2. Expresión de la divergencia en coordenadas esféricas

Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ un campo vectorial de tres variables. La divergencia de este campo es el campo escalar dado por $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y, z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$. Consideremos la expresión de \mathbf{f} en coordenadas esféricas:

$$\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = \mathbf{f}(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$$

y sean $F_r(r, \theta, \phi)$, $F_\theta(r, \theta, \phi)$ y $F_\phi(r, \theta, \phi)$ las componentes de $\mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ respecto de la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$, esto es, $\mathbf{F}(r, \theta, \phi) = F_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi$. La expresión de la divergencia de \mathbf{f} en coordenadas esféricas consiste en expresar la igualdad

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}(r, \theta, \phi) &= \operatorname{div} \mathbf{f}(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) + \\ &+ \frac{\partial f_2}{\partial y}(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) \end{aligned}$$

en términos de las funciones $F_r(r, \theta, \phi)$, $F_\theta(r, \theta, \phi)$, $F_\phi(r, \theta, \phi)$ y de sus derivadas parciales. El camino indirecto consistente en calcular derivadas parciales de F_r , F_θ y F_ϕ para tratar de relacionarlas con $\operatorname{div} \mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ no se ve nada claro (puedes intentarlo para convencerte). Seguiremos el camino directo como hicimos para las coordenadas polares. Para ello expresaremos las componentes cartesianas del campo \mathbf{f} en función de sus componentes F_r , F_θ y F_ϕ en la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$. La matriz del cambio de esta base a la base canónica es la que tiene como columnas los vectores \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , y \mathbf{e}_ϕ .

$$\begin{aligned} (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z)) &= F_r(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_r + F_\theta(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\theta + F_\phi(r, \theta, \phi)\mathbf{e}_\phi = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi \operatorname{sen} \theta & \cos \phi \cos \theta & -\operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta & \operatorname{sen} \phi \cos \theta & \cos \phi \\ \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_r(r, \theta, \phi) \\ F_\theta(r, \theta, \phi) \\ F_\phi(r, \theta, \phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Naturalmente, debemos considerar r , θ y ϕ como funciones de x , y , z .

$$\begin{aligned} r &= r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \theta(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \phi &= \phi(x, y, z) = \operatorname{arctg}(y/x) \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores permiten expresar $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$ y $f_3(x, y, z)$ en función de $F_r(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z))$, $F_\theta(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z))$ y $F_\phi(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \phi(x, y, z))$. Ahora

hay que calcular, aplicando la regla de la cadena, las derivadas parciales $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z)$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z)$ y $\frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z)$ sumarlas, simplificar y sustituir (x, y, z) por $(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$. Los cálculos son largos pero mecánicos. El resultado final es el siguiente.

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r(r, \theta, \phi)) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen} \theta F_\theta(r, \theta, \phi)) + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} F_\phi(r, \theta, \phi)$$

Observa que en esta igualdad a la izquierda tenemos la divergencia de \mathbf{f} calculada en la expresión de \mathbf{f} en coordenadas cartesianas y evaluada en el punto $(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$, y a la derecha lo que tenemos son las derivadas parciales de las componentes de la función compuesta $\mathbf{F}(r, \theta, \phi)$ evaluadas en el punto (r, θ, ϕ) .

4.2.3. Gradiente en coordenadas esféricas

Sea f un campo escalar de tres variables. Sabemos que el gradiente de f es el campo vectorial dado por

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \mathbf{k}$$

La expresión del gradiente de f en esféricas viene dada por

$$\nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) = f_r(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r + f_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta + f_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$$

donde f_r , f_θ y f_ϕ son las componentes del vector $\nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$ en la base $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi\}$. En virtud de la igualdad (4.14), tenemos que

$$\begin{aligned} f_r(r, \theta, \phi) &= \langle \nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) | \mathbf{e}_r \rangle \\ f_\theta(r, \theta, \phi) &= \langle \nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) | \mathbf{e}_\theta \rangle \\ f_\phi(r, \theta, \phi) &= \langle \nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) | \mathbf{e}_\phi \rangle \end{aligned}$$

Haciendo estos productos escalares y teniendo en cuenta la regla de la cadena se obtiene fácilmente la igualdad siguiente.

$$\begin{aligned} \nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) &= \frac{\partial}{\partial r} f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) \mathbf{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Es conveniente introducir la función $h(r, \theta, \phi) = f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$ con lo que la igualdad anterior se escribe mejor en la forma

$$\nabla f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) = \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta}(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial h}{\partial \phi}(r, \theta, \phi) \mathbf{e}_\phi$$

En los textos de física es frecuente que no se distinga entre la función f y la función h (pues, en definitiva, son la *misma función* expresada en *distintas* coordenadas) y que escriban la igualdad anterior en la forma

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

igualdad que constituye la expresión del gradiente en coordenadas esféricas.

Observa que en la expresión anterior del gradiente aparecen los inversos de los factores de escala multiplicando a las derivadas parciales a las que está asociado cada uno de ellos. Como sabes, los factores de escala son $\{1, r, r \operatorname{sen} \theta\}$; el primero de ellos, 1, está asociado a la primera columna de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas que corresponde a la derivación parcial respecto a la primera variable, r ; el segundo de ellos, r , está asociado a la segunda columna de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas que corresponde a la derivación parcial respecto a la segunda variable, θ , el tercero de ellos, $r \operatorname{sen} \theta$, está asociado a la tercera columna de la matriz jacobiana del cambio de coordenadas que corresponde a la derivación parcial respecto a la tercera variable, ϕ .

4.2.4. Significado de los factores de escala

Consideremos la matriz jacobiana en un punto genérico (r, θ, ϕ) de la función que introduce las coordenadas esféricas.

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \cos \phi \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \cos \phi & -r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & r \cos \theta \operatorname{sen} \phi & r \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz define una aplicación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 que a cada vector (x, y, z) hace corresponder el vector $\mathcal{S} \cdot (x, y, z)$. La norma euclídea de la imagen de un vector en dicha transformación viene dada por la igualdad siguiente.

$$\|\mathcal{S} \cdot (x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + r^2 y^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta z^2}$$

Deducimos que para vectores situados a lo largo del eje X, es decir, de la forma $(x, 0, 0)$, se verifica que $\|\mathcal{S} \cdot (x, 0, 0)\| = \|(x, 0, 0)\|$ y, teniendo en cuenta la linealidad, se sigue que la aplicación $(x, y, z) \mapsto \mathcal{S} \cdot (x, y, z)$ conserva distancias en el eje X. Pues bien, este es el significado de que el factor de escala asociado a la primera variable sea igual a 1.

Deducimos también que para vectores situados a lo largo del eje Y, es decir, de la forma $(0, y, 0)$, se verifica que $\|\mathcal{S} \cdot (0, y, 0)\| = r \|(0, y, 0)\|$ y, teniendo en cuenta la linealidad, se sigue que la aplicación $(x, y, z) \mapsto \mathcal{S} \cdot (x, y, z)$ multiplica distancias por r en el eje Y. Pues bien, este es el significado de que el factor de escala asociado a la segunda variable sea igual a r .

Deducimos también que para vectores situados a lo largo del eje Z, es decir, de la forma $(0, 0, z)$, se verifica que $\|\mathcal{S} \cdot (0, 0, z)\| = r \operatorname{sen} \theta \|(0, 0, z)\|$ y, teniendo en cuenta la linealidad, se sigue que la aplicación $(x, y, z) \mapsto \mathcal{S} \cdot (x, y, z)$ multiplica distancias por $r \operatorname{sen} \theta$ en el eje Z. Pues bien, este es el significado de que el factor de escala asociado a la tercera variable sea igual a $r \operatorname{sen} \theta$.

En resumen, los factores de escala indican las dilataciones a lo largo de los ejes que hace la aplicación lineal asociada a la matriz jacobiana de $g(r, \theta, \phi) = (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta)$. Suele decirse que la aplicación g es la que, a *escala infinitesimal*, produce esas dilataciones.

Al igual que cada factor de escala mide la dilatación infinitesimal a lo largo de un eje, el producto de los factores de escala, en nuestro caso $r^2 \operatorname{sen} \theta$, mide el cambio en el volumen de un ortoedro a

escala infinitesimal. El producto de los factores de escala es justamente el determinante jacobiano. Recuerda que la fórmula del cambio de variables a coordenadas esféricas en una integral triple afirma que si f es un campo escalar continuo en un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\iiint_A f(x, y, z) d(x, y, z) = \iiint_B f(r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) r^2 \operatorname{sen} \theta d(r, \theta, \phi)$$

donde $B = \{(r, \theta, \phi) : (r \operatorname{sen} \theta \cos \phi, r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, r \cos \theta) \in A\}$. Observa que B es la expresión del conjunto A en coordenadas esféricas, es decir $A = g(B)$, y que en la segunda integral se multiplica por $r^2 \operatorname{sen} \theta$. Si particularizamos la igualdad anterior para la función constante $f(x, y, z) = 1$ obtenemos

$$\text{Volumen}(g(B)) = \iiint_A 1 d(x, y, z) = \iiint_B r^2 \operatorname{sen} \theta d(r, \theta, \phi)$$

Si B es un ortoedro muy pequeño (un ortoedro *infinitesimal*) se verifica que

$$\iiint_B r^2 \operatorname{sen} \theta d(r, \theta, \phi) \simeq r^2 \operatorname{sen} \theta \iiint_B d(r, \theta, \phi) = r^2 \operatorname{sen} \theta \text{Volumen}(B)$$

y obtenemos $\text{Volumen}(g(B)) \simeq r^2 \operatorname{sen} \theta \text{Volumen}(B)$. Suele decirse que $r^2 \operatorname{sen} \theta dr d\theta d\phi$ es el *elemento diferencial de volumen* en coordenadas esféricas.

4.3. Coordenadas cilíndricas

La función $g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta, z)$ es una biyección de $\Omega = \mathbb{R}^+ \times]\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Los números (ρ, θ, z) donde $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, con $\rho > 0$ y $-\pi < \theta \leq \pi$, se llaman las **coordenadas cilíndricas** del punto (x, y, z) .

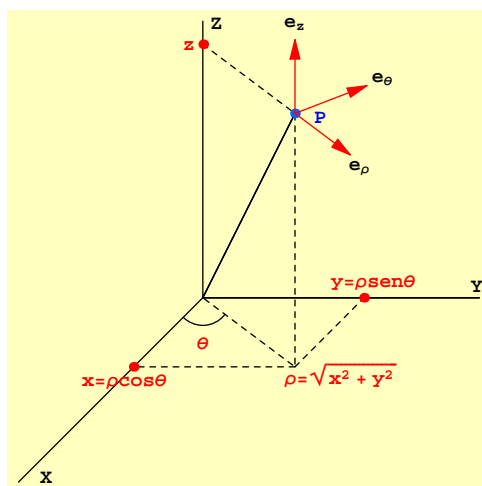


Figura 4.3: Coordenadas cilíndricas

Cuando se utiliza el sistema de coordenadas cilíndricas los vectores se refieren a una base ortormal $\{e_\rho, e_\theta, e_z\}$ que se ha representado en la figura (4.3) (trasladada al punto P). En el lenguaje típico de los textos de física se dice que el vector e_ρ es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta ρ manteniendo θ y z constantes, el vector e_θ es un vector unitario en

el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta θ manteniendo ρ y z constantes y el vector \mathbf{e}_z es un vector unitario en el sentido en que se mueve el punto P cuando aumenta z manteniendo ρ y θ constantes. En términos matemáticos, quizás más precisos, observa que el vector de posición del punto P es $g(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ su variación con respecto a ρ manteniendo θ y z constantes es la derivada parcial respecto a ρ , su variación con respecto a θ manteniendo ρ y z constantes es la derivada parcial respecto a θ y su variación con respecto a z manteniendo ρ y θ constantes es la derivada parcial respecto a z .

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 &= \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta, z) = (-\rho \sin \theta, \rho \cos \theta, 0) \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\partial g}{\partial z}(\rho, \theta, z) = (0, 0, 1)\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que estos vectores son ortogonales dos a dos, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$, para $i \neq j$. Para obtener una base ortonormal a partir de ellos todo lo que tenemos que hacer es normalizarlos. Se calculan fácilmente sus normas $\|\mathbf{u}_1\| = 1$, $\|\mathbf{u}_2\| = \rho$, $\|\mathbf{u}_3\| = 1$. Deducimos que los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_z &= (0, 0, 1) = \mathbf{k}\end{aligned}$$

forman una base ortonormal. **Es a dicha base a la que se refiere un vector cuando se usan coordenadas cilíndricas.** Observa que los vectores de esta base dependen de la posición del punto, es decir, no se trata de una base fija. Fíjate en que si (ρ, θ, z) son las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) , se verifica que $(x, y, z) = \rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{k}$. En general, la expresión en la base $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{k}\}$ de un vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se obtiene por el método usual calculando sus proyecciones ortogonales sobre los vectores de la base:

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\rho \rangle \mathbf{e}_\rho + \langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle \mathbf{e}_\theta + \langle \mathbf{v} | \mathbf{k} \rangle \mathbf{k} \quad (4.17)$$

Observa que si escribimos \mathbf{v} en la forma $\mathbf{v} = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$, entonces $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\rho \rangle = \rho$, $\langle \mathbf{v} | \mathbf{e}_\theta \rangle = 0$, y $\langle \mathbf{v} | \mathbf{k} \rangle = z$.

4.3.1. Ejercicios

1. Completa el estudio de las coordenadas cilíndricas conforme al esquema seguido en el estudio de las coordenadas polares y esféricas. Es decir, debes calcular la velocidad, aceleración, divergencia y gradiente en coordenadas cilíndricas y hacer una interpretación de los factores de escala y de los elementos diferenciales de longitud y volumen.

4.4. Coordenadas curvilíneas ortogonales

Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R}^3 y sea $g: A \rightarrow B$ una biyección de A sobre B. Representaremos por (x, y, z) un punto genérico de B y por (u, v, w) un punto genérico de A. La biyección g permite

describir los puntos de B mediante puntos de A , pues dado un punto $(x, y, z) \in B$ hay un único punto $(u, v, w) \in A$ tal que $g(u, v, w) = (x, y, z)$; diremos que dicho punto (u, v, w) son las g -coordenadas del punto (x, y, z) y también diremos que la aplicación g introduce en B un sistema de coordenadas curvilíneas. Naturalmente, para que estas coordenadas definidas por g sean útiles hay que suponer que la función g tiene buenas propiedades analíticas. Suele suponerse como condición mínima para g que sea de clase C^1 , es decir que sus funciones componentes tengan derivadas parciales continuas y también se supone que el determinante jacobiano de g no se anula nunca. Estas condiciones aseguran que la biyección inversa de g es una función de clase C^1 en B . Las funciones que verifican estas propiedades (biyecciones de clase C^1 cuya biyección inversa también es de clase C^1) se llaman **difeomorfismos**. Suele exigirse también que la matriz jacobiana de g calculada en cualquier punto de A tenga la propiedad de que sus vectores columna sean dos a dos ortogonales. Cuando la aplicación g verifica estos requisitos (es un difeomorfismo de A sobre B cuya matriz jacobiana tiene columnas ortogonales) se dice que dicha aplicación define un **sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales** en B . Las coordenadas esféricas y las cilíndricas son ejemplos de coordenadas curvilíneas ortogonales (y también lo son las coordenadas polares en el plano).

4.1 Ejemplo. Consideremos la aplicación

$$g(u, v, w) = (u^2 - v^2, 2uv, w^2)$$

Es evidente que dicha aplicación no es biyectiva en todo su dominio natural de definición que es \mathbb{R}^3 . Para obtener un conjunto en el que sea una biyección debemos restringir su dominio de definición. Para ello vamos a considerar el conjunto $A = \{(u, v, w) : u > 0, v > 0, w > 0\}$. En el conjunto A la función g toma valores en el conjunto $B = \{(x, y, z) : y > 0, z > 0\}$. Sea (x, y, z) un punto cualquiera de B . Es fácil comprobar que el punto

$$(u, v, w) = \left(\frac{\sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}(x + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{2}y}, \sqrt{-\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{z} \right)$$

está en A y $g(u, v, w) = (x, y, z)$. Por tanto g es una biyección de A sobre B . Es claro que la función g es de clase C^∞ . Su matriz jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 2u & -2v & 0 \\ 2v & 2u & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix}$$

Y el determinante jacobiano es igual a $8u^2w + 8v^2w$. Deducimos que g es un difeomorfismo de A sobre B . Además las columnas de la matriz jacobiana son ortogonales.

Concluimos que la aplicación g introduce un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales en B . Las g -coordenadas de un punto $(x, y, z) \in B$ son la única terna $(u, v, w) \in A$ tal que $g(u, v, w) = (x, y, z)$. ◆

Volvamos a la situación general y supongamos que $g : A \rightarrow B$ define un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales en B . En tal caso los vectores columna de la matriz jacobiana de g , es decir

las derivadas parciales de g , normalizados constituyen una base ortonormal de \mathbb{R}^3 que notaremos por $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$. Se dice que esta base está asociada al sistema de coordenadas dado y es a esa base a la que se refieren los vectores en el sistema de coordenadas definido por g . En general los vectores de la base dependen de las coordenadas (u, v, w) , no es una base fija. Las normas euclídeas de los vectores columna de la matriz jacobiana de g se llaman **factores de escala** o **factores métricos**, los representaremos por $\{a, b, c\}$ (son funciones de u, v, w).

Para expresar el vector gradiente de un campo escalar f dado en coordenadas cartesianas

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\mathbf{k}$$

en g -coordenadas, lo que hacemos es calcular las componentes del vector $(\nabla f)(g(u, v, w))$ en la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$. Llamemos (f_u, f_v, f_w) a las componentes del vector $(\nabla f)(g(u, v, w))$ en la base $\{\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w\}$. Sabemos que

$$\begin{aligned} f_u(u, v, w) &= \langle (\nabla f)(g(u, v, w)) | \mathbf{e}_u \rangle \\ f_v(u, v, w) &= \langle (\nabla f)(g(u, v, w)) | \mathbf{e}_v \rangle \\ f_w(u, v, w) &= \langle (\nabla f)(g(u, v, w)) | \mathbf{e}_w \rangle \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la regla de la cadena para derivadas parciales y las definiciones dadas, puedes comprobar que

$$(\nabla f)(g(u, v, w)) = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial u} f(g(u, v, w)) \mathbf{e}_u + \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial v} f(g(u, v, w)) \mathbf{e}_v + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial w} f(g(u, v, w)) \mathbf{e}_w$$

Debes entender bien lo que significa esta igualdad: a la izquierda aparece la función gradiente de f evaluada en el punto $g(u, v, w)$, a la derecha figuran las derivadas parciales *de la función compuesta* $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$ dividida cada una de ellas por el factor de escala que corresponde a su variable y multiplicada por el correspondiente vector de la base asociada a las nuevas coordenadas (y no olvides que dichos vectores dependen de u, v, w). La expresión obtenida para el gradiente es válida para todo sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

4.4.1. Ejercicios

1. Completa el estudio general de las coordenadas curvilíneas ortogonales conforme al esquema seguido en el estudio de las coordenadas polares y esféricas. Es decir, debes calcular la velocidad y el elemento diferencial de longitud, la aceleración y divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales y hacer una interpretación de los factores de escala y de los elementos diferenciales de longitud y volumen.
2. Representa la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es $r = 1$.
3. Representa una parte de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es $\theta = \pi/4$.
4. Representa una parte de la superficie ecuación en coordenadas esféricas es $\phi = \pi/4$.
5. Representa una parte de la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $r = 1$.

6. Representa una parte de la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $\theta = \pi/4$.
7. Representa una parte la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas es $r = 1$.

Lección 5

Superficies. Integrales de superficie

En todo lo que sigue consideraremos funciones de una o varias variables con derivada continua o con derivadas parciales de primer orden continuas respectivamente.

5.1. Superficies en \mathbb{R}^3

Una superficie S en el espacio \mathbb{R}^3 puede venir dada de tres formas:

- a) Como la **gráfica de una función** $z = f(x, y)$ donde $(x, y) \in A$ siendo A un conjunto de \mathbb{R}^2 .

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

- b) Por medio de **ecuaciones paramétricas**, es decir, se trata de una superficie de la forma $S = \gamma(A)$ donde γ es una función de dos variables con valores en \mathbb{R}^3 . La función γ transforma un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ en una superficie en \mathbb{R}^3 . En este caso se acostumbra a interpretar los puntos del conjunto A como *parámetros* que describen la superficie. Si notamos $(s, t) \in A$ un elemento genérico de A , la función γ debe ser de la forma

$$\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$$

y, por tanto

$$S = \gamma(A) = \{(x(s, t), y(s, t), z(s, t)) : (s, t) \in A\}$$

- c) De **forma implícita** como el conjunto de puntos $g(x, y, z) = 0$ donde se anula un campo escalar diferenciable de tres variables.

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$$

Observa que **a)** es un caso particular de **c)** (basta considerar $g(x, y, z) = f(x, y) - z$) y también es un caso particular de **b)** (basta considerar $\gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$).

5.1.1. Plano tangente en un punto de una superficie

Se dice que un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ es *tangente* a una superficie S en un punto $(a, b, c) \in S$ si se verifica que \mathbf{w} es el vector tangente en el punto (a, b, c) a una curva *contenida* en S y que pasa por dicho punto. Se dice que un vector $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ es *ortogonal* a una superficie S en un punto $(a, b, c) \in S$ si se verifica que \mathbf{w} es ortogonal a todo vector tangente a S en el punto (a, b, c) .

Se verifica que el plano tangente a la superficie en el punto (a, b, c) contiene a todos los vectores tangentes a la superficie en dicho punto. El cálculo del plano tangente depende de cómo venga dada la superficie. Consideremos los tres casos posibles.

La superficie viene dada por ecuaciones paramétricas.

Sea $S = \gamma(A)$ donde $A \subset \mathbb{R}^2$ y

$$\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$$

Para calcular el plano tangente en un punto $\gamma(s_0, t_0) = (a, b, c) \in S$, basta darse cuenta de que las curvas $\alpha(s) = \gamma(s, t_0)$ y $\beta(t) = \gamma(s_0, t)$ están contenidas en S y pasan por el punto (a, b, c) . Los vectores tangentes a dichas curvas en (a, b, c) vienen dados por

$$\begin{aligned}\alpha'(s_0) &= \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0) \right) = \frac{\partial x}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial s}(s_0, t_0)\mathbf{k} \\ \beta'(t_0) &= \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0), \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0) \right) = \frac{\partial x}{\partial t}(s_0, t_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial t}(s_0, t_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial t}(s_0, t_0)\mathbf{k}\end{aligned}$$

que son los vectores columna de la matriz jacobiana de γ en (s_0, t_0) . *Se supone que dichos vectores son linealmente independientes pues en otro caso el plano tangente a S en (a, b, c) no está definido.* El plano tangente a S en (a, b, c) es la traslación a dicho punto del plano vectorial engendrado por estos dos vectores. En consecuencia, el plano tangente tiene las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$(x, y, z) = \gamma(s_0, t_0) + s \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) + t \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0), \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

La superficie está dada implícitamente.

Se trata de una superficie de la forma $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ donde g es un campo escalar de tres variables. Para calcular el plano tangente a S en un punto $(a, b, c) \in S$, basta observar que el vector gradiente de g calculado en (a, b, c) es ortogonal a todo vector tangente a S en (a, b, c) . Ello es consecuencia de que si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva contenida en la superficie S que pasa por el punto $\alpha(t_0) = (a, b, c)$, entonces se tiene que $g(\alpha(t)) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, por lo que la derivada de la función compuesta $g(\alpha(t))$ es idénticamente nula, es decir $\langle \nabla g(\alpha(t)) | \alpha'(t) \rangle = 0$ para todo $t \in [a, b]$. En particular, para $t = t_0$ obtenemos que $\langle \nabla g(a, b, c) | \alpha'(t_0) \rangle = 0$.

Deducimos que el plano tangente a S en (a, b, c) es el plano que tiene como vector ortogonal $\nabla g(a, b, c)$ y que pasa por el punto (a, b, c) . *Se supone que $\nabla g(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ pues en otro caso, el plano tangente en (a, b, c) no está definido.* En consecuencia, el plano tangente es el plano de ecuación cartesiana

$$\langle \nabla g(a, b, c) | (x - a, y - b, z - c) \rangle = \frac{\partial g}{\partial x}(a, b, c)(x - a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a, b, c)(y - b) + \frac{\partial g}{\partial z}(a, b, c)(z - c) = 0$$

La superficie es la gráfica de una función.

Sea $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}^2$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables. Entonces dicha superficie está definida implícitamente por la ecuación $g(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$. Como consecuencia de lo visto en el punto anterior, el plano tangente en un punto $(a, b, c) = (a, b, f(a, b)) \in S$ es el plano de ecuación $\langle \nabla g(a, b, c) | (x - a, y - b, z - f(a, b)) \rangle = 0$ y, como, $\nabla g(a, b, c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right)$, se sigue que la ecuación del plano tangente es

$$z - c = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Observa que S tiene como ecuaciones paramétricas $\gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ por lo que los vectores $\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right)$ y $\left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$ son tangentes a S en el punto (a, b, c) . Puedes comprobar que el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$ es ortogonal a dichos vectores, como debe ser según lo dicho anteriormente.

Si $g(x, y, z)$ es un campo escalar, las superficies de ecuación implícita $g(x, y, z) = c$ o, lo que es igual $g(x, y, z) - c = 0$, donde c es una constante, se llaman *superficies de nivel* (cuando el campo se interpreta como un potencial se llaman *superficies equipotenciales*). De lo dicho antes, se sigue que *el vector gradiente $\nabla g(x, y, z)$ es ortogonal en todo punto (x, y, z) (en el que $\nabla g(x, y, z) \neq \mathbf{0}$) a la superficie de nivel que pasa por dicho punto.*

Una forma interesante de ver la gráfica de una función es mediante curvas de nivel. Por este método lo que se hace es representar la gráfica de una función en \mathbb{R}^3 proyectando sobre el plano XY las curvas intersección de dicha superficie con planos paralelos al plano XY (**curvas de nivel**). Las curvas de nivel unen los puntos de la superficie que tienen la misma altura. Estás acostumbrado a ver estas representaciones porque los mapas topográficos representan el relieve del terreno por curvas de nivel. Esta representación permite ver las zonas donde la función varía más rápidamente porque las curvas de nivel están más próximas entre sí.

5.1.1.1. Ejercicios

1. Calcula las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto P_0 indicado.

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0, \quad P_0 = (1, -1, 4)$$

$$z - \log(x^2 + y^2) = 0, \quad P_0 = (1, 0, 0)$$

$$x^2 + y^2 + z^3 - 2x + 4y + 3z + 1 = 0, \quad P_0 = (3, 4, -3)$$

$$4 - x^2 - 4z^2 = y, \quad P_0 = (0, 0, 1)$$

$$z(xy - 1) - (x + y) = 0, \quad P_0 = (1, 2, 3)$$

$$z + e^z + 2x + 2y - x^2 - y^2 - 3 = 0, \quad P_0 = (1, 1 + \sqrt{e}, 1)$$

$$\gamma(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + u \cos v \mathbf{j} + v \operatorname{sen} u \mathbf{k}, \quad P_0 = (1, 1, 0)$$

$$\gamma(u, v) = (u + v, 3u^2, u - v), \quad P_0 = (2, 3, 0)$$

2. Halla la ecuación de la tangente en el punto $(3, -2, 1)$ a la curva dada como intersección del elipsoide $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 27$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - 2z^2 = 11$.
3. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 - 2z = 4$ en el punto $(3, 1, 3)$. Comprueba el resultado expresando la curva por sus ecuaciones paramétricas.
4. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la intersección de las superficies $4xz = (x + z)y$, $3z^2 + y = 5x$ en el punto $(1, 2, 1)$.

5.2. Área de una superficie

Sea una superficie $S = \gamma(A)$ donde $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$ y A es un subconjunto de \mathbb{R}^2 que, por sencillez, supondremos que es de la forma $A = [a, b] \times [c, d]$. En todo lo que sigue se supone que la parametrización γ es *buena* en el sentido de que *recubre la superficie una sola vez*. Esto es tanto como exigir que γ sea una función inyectiva aunque puede permitirse que en S haya algunas *curvas* que se recubran más de una vez por γ .

Consideremos particiones $a = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = b$ y $c = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = d$ de los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente. Tenemos que

$$S = \gamma(A) = \gamma\left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} [s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k]\right) = \bigcup_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \gamma([s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k])$$

Teniendo en cuenta la propiedad aditiva del área, se sigue que

$$\text{Área}(S) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \text{Área}(\gamma([s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k])) \quad (5.1)$$

A continuación calcularemos de forma aproximada el área de un pequeño trozo de la superficie. Para ello sean h y k números “muy pequeños” y consideremos el trozo de superficie $S_0 = \gamma([s_0, s_0 + h] \times [t_0, t_0 + k])$. Aproximaremos dicha superficie por el paralelogramo con vértice en $\gamma(s_0, t_0)$ engendrado por los vectores $\mathbf{v1} = \gamma(s_0 + h, t_0) - \gamma(s_0, t_0)$ y $\mathbf{v2} = \gamma(s_0, t_0 + k) - \gamma(s_0, t_0)$. Sabemos que el área de dicho paralelogramo viene dada por la norma del producto vectorial de $\mathbf{v1}$ por $\mathbf{v2}$. Teniendo en cuenta la definición de derivada parcial, podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\mathbf{v1} \simeq h \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0), \quad \mathbf{v2} \simeq k \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0)$$

por lo que

$$\|\mathbf{v1} \times \mathbf{v2}\| \simeq hk \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_0, t_0) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_0, t_0) \right\|$$

Observa que lo que estamos haciendo es aproximar el área de S_0 por el área de un paralelogramo contenido en el plano tangente a S_0 en el punto $\gamma(s_0, t_0)$. Es decir, para medir el área de S_0 lo que hacemos es sustituir S_0 por su proyección sobre dicho plano tangente.

Esto no debe de extrañarte. Tú vives sobre la superficie de la tierra que es parecida a una esfera pero te comportas como si vivieras sobre un plano: el plano tangente a la Tierra en tu lugar de residencia. Por ejemplo, para medir el área de una región cuadrada cuyo lado es de 5 kilómetros, no se tiene en cuenta la pequeña curvatura de dicha región y afirmamos que el área es de 25 kilómetros cuadrados; lo que hacemos es aproximar un trozo de la esfera “Tierra” por un trozo de su plano tangente. El error que se comete es muy pequeño. Si pudiéramos tapizar la superficie de la Tierra con teselas de 1 centímetro de lado, bastaría conocer cuántas teselas se necesitan para tener una buena aproximación del área de la superficie total de la Tierra. La siguiente gráfica ilustra estas ideas.

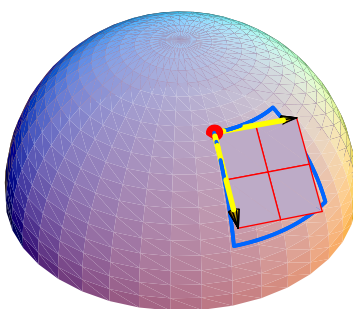


Figura 5.1: Aproximación local de una superficie por su plano tangente

Teniendo ahora en cuenta la igualdad (5.1), deducimos que

$$\text{Área}(S) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \text{Área}(\gamma([s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k])) \simeq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} (s_j - s_{j-1})(t_k - t_{k-1}) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_{j-1}, t_{k-1}) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_{j-1}, t_{k-1}) \right\|$$

En el límite estas sumas convergen a la integral doble $\iint_A \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t)$. Esto lleva a definir el área de una superficie S dada paramétricamente por

$$\boxed{\text{Área}(S) = \iint_A \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t)} \quad (5.2)$$

El vector $\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t)$ recibe el nombre de **producto vectorial fundamental**.

Si la superficie es la gráfica de una función $S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}^2$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables, entonces dicha superficie tiene como ecuaciones paramétricas $\gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ por lo que $\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$, $\frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$. En este caso tenemos que

$$\boxed{\text{Área}(S) = \iint_A \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y) \right\| d(x, y) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2} d(x, y)} \quad (5.3)$$

5.2.1. Ejercicios

1. Calcula las siguientes áreas.

- a) De la parte del plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, ($a > 0, b > 0, c > 0$) que se encuentra en el primer octante.
- b) De la gráfica de la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$ para todo $(x, y) \in A$ donde A es el círculo de centro el origen y radio 1.
- c) De la parte de la semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ limitada por el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = r^2$ (se supone que $R > r$).
- d) De la superficie (un toro) $S = \gamma([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ donde

$$\gamma(s, t) = ((R + r \cos t) \cos s, (R + r \cos t) \sin s, r \sin t) \quad (0 < r < R)$$

- e) De la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b \leq a, z \geq 0$.
- f) De la superficie $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + v \mathbf{k}$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$.
- g) De la superficie $\mathbf{r}(u, v) = u v \mathbf{i} + (u + v) \mathbf{j} + (u - v) \mathbf{k}$, donde $u^2 + v^2 \leq 1$.

5.3. Integral de superficie de un campo escalar

Supongamos ahora que f es un campo escalar definido en una región del espacio que contiene a la superficie $S = \gamma(A)$. Para definir la integral de f sobre S , procedemos como antes dividiendo la superficie en pequeños parches $S_{j,k} = \gamma([s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k])$, evaluamos la función f en un punto de cada parche, por ejemplo en $\gamma(s_{j-1}, t_{k-1})$, y formamos la suma

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f(\gamma(s_{j-1}, t_{k-1})) \text{Área}(\gamma([s_{j-1}, s_j] \times [t_{k-1}, t_k])) \simeq \\ & \simeq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m (s_j - s_{j-1})(t_k - t_{k-1}) f(\gamma(s_{j-1}, t_{k-1})) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s_{j-1}, t_{k-1}) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s_{j-1}, t_{k-1}) \right\| \end{aligned}$$

En el límite estas sumas convergen a la integral doble $\iint_A f(\gamma(s, t)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t)$. Definimos, por tanto, la integral del campo escalar f sobre la superficie S como

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_A f(\gamma(s, t)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t)} \quad (5.4)$$

En el caso particular de que la superficie sea la gráfica de una función $S = \{(x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}^2$ y $h: A \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables, tenemos que

$$\boxed{\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_A f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)^2} d(x, y)} \quad (5.5)$$

Te recuerdo que estamos suponiendo que todas las funciones que consideramos son de clase C^1 , es decir que tienen derivadas parciales de primer orden continuas. Las superficies definidas por funciones de clase C^1 que tienen plano tangente en todo punto se llaman **superficies suaves**. Con frecuencia es preciso calcular integrales sobre superficies que tienen aristas y no son suaves pero que son **suaves a trozos** esto es, que se obtienen “pegando” varias superficies suaves; por ejemplo, la superficie

formada por las caras de un poliedro. En tal caso, **la integral sobre una superficie suave a trozos se define como la suma de las integrales sobre cada una de las superficies suaves que la forman.**

Naturalmente, el valor de la integral (5.4) no debe depender de la forma en que representemos la superficie. Efectivamente, esto es así debido a una propiedad muy especial del producto vectorial.

Sea pues, una superficie S dada por $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ donde $(s, t) \in A \subset \mathbb{R}^2$, e introduzcamos parámetros nuevos (u, v) por $s = \alpha(u, v)$, $t = \beta(u, v)$ donde $(u, v) \in B$ siendo $B = \{(u, v) : (\alpha(u, v), \beta(u, v)) \in A\}$. Pongamos $\phi(u, v) = \gamma(\alpha(u, v), \beta(u, v))$ la nueva parametrización de S . Probaremos que

$$\iint_A f(\gamma(s, t)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t) = \iint_B f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \right\| d(u, v) \quad (5.6)$$

En virtud del teorema del cambio de variables, tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_A f(\gamma(s, t)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t) = \\ & = \iint_B f(\phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \right\| \left| \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} \right| d(u, v) \end{aligned}$$

Donde hemos representado por $\frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)}$ el determinante jacobiano de la transformación. La igualdad (5.6) la obtenemos ahora como consecuencia de la siguiente igualdad

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(u, v)} \frac{\partial \gamma}{\partial s}(\alpha(u, v), \beta(u, v)) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\alpha(u, v), \beta(u, v))$$

que tú mismo puedes comprobar o hacerlo con el programa *Mathematica*.

5.3.1. Ejemplos

5.1 Ejemplo (Centro de masa de una superficie). Sea $S = \gamma(A)$ una superficie y sea $\rho : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que representa la densidad superficial de una lámina cuya forma es la de la superficie S , es decir, $\rho(x, y, z)$ es la densidad de S en el punto $(x, y, z) \in S$ medida en unidades de masa por superficie (por ejemplo, en gr/cm^2). La masa total de la superficie viene dada por la integral de superficie de la función ρ sobre S . El **centro de masa** de S es el punto (a, b, c) definido por

$$a = \frac{\iint_S x \rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}, \quad b = \frac{\iint_S y \rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}, \quad c = \frac{\iint_S z \rho(x, y, z) dS}{\iint_S \rho(x, y, z) dS}$$

Cuando la densidad es constante el centro de masas se denomina **centroide** (que es una propiedad geométrica de la superficie). \blacklozenge

5.2 Ejemplo (Fórmula de Pappus para el área de una superficie de revolución). Este resultado establece que el área de la superficie de revolución obtenida girando una curva plana simple alrededor

de una recta que no la corta situada en su mismo plano es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia que describe el centroide de la misma.

Vamos a probar la afirmación anterior. Supongamos, por comodidad, que la curva está contenida en el plano XZ y viene dada por $\alpha(t) = (x(t), z(t))$ donde $a \leq t \leq b$. Suponemos también que $z(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Observa que estas hipótesis no son restrictivas pues el caso general puede reducirse a éste mediante un giro y una traslación que son movimientos del espacio que conservan las áreas. Al girar la curva alrededor del eje X se obtiene una superficie de revolución S que está dada por $\gamma(s, t) = (x(t), z(t) \cos s, z(t) \sin s)$ para $a \leq t \leq b$, $0 \leq s \leq 2\pi$. Deducimos que, el área de la superficie S viene dada por

$$\text{Área}(S) = \iint_A \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| ds dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_a^b z(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt \right] ds = 2\pi \int_a^b z(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Recordemos que la segunda coordenada del centroide de la curva α viene dada por

$$\beta = \frac{\int_{\alpha} z ds}{\int_{\alpha} ds} = \frac{\int_a^b z ds}{\lambda(\alpha)} = \frac{\int_a^b z(t) \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} dt}{\lambda(\alpha)}$$

donde $\lambda(\alpha)$ es la longitud de la curva α . Concluimos que $\text{Área}(S) = 2\pi\beta\lambda(\alpha)$ y $2\pi\beta$ es la longitud de la circunferencia que recorre el centroide al girar la curva alrededor del eje X. \blacklozenge

El siguiente resultado, aunque no está directamente relacionado con este tema, lo incluyo aquí por completitud.

5.3 Ejemplo (Fórmula de Pappus para el volumen de un sólido de revolución). El volumen de un sólido de revolución obtenido girando una figura plana alrededor de una recta que no la corta situada en su mismo plano es igual al producto del área de la figura plana por la longitud de la circunferencia que describe el centroide de la misma.

Vamos a probar la afirmación anterior. Supongamos, por comodidad, que la figura plana, F, está contenida en el plano XZ y su frontera es una curva dada por $\alpha(t) = (x(t), z(t))$ donde $a \leq t \leq b$. Suponemos también que $x(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Observa que estas hipótesis no son restrictivas pues el caso general puede reducirse a éste mediante un giro y una traslación que son movimientos del espacio que conservan los volúmenes. Al girar la figura plana, F, alrededor del eje Z se obtiene un sólido de revolución Ω que está limitado por la superficie dada por $\gamma(s, t) = (x(t) \cos s, z(t) \sin s, z(t))$ para $a \leq t \leq b$, $0 \leq s \leq 2\pi$.

El volumen de Ω viene dado por $\iiint_{\Omega} 1 d(x, y, z)$. Haciendo un cambio de variables a coordenadas cilíndricas, tenemos que $\text{Volumen}(\Omega) = \iiint_{\Omega} d(x, y, z) = \iiint_B \rho d(\rho, \theta, z)$ donde

$$B = \{(\rho, \theta, z) : (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \in \Omega\} = \{(\rho, \theta, z) : (\rho, z) \in F, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

En consecuencia, usando el teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Volumen}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} d(x, y, z) = \iiint_B \rho d(\rho, \theta, z) = \int_0^{2\pi} \left[\iint_F \rho d(\rho, z) \right] d\theta = \\ &= 2\pi \iint_F \rho d(\rho, z) = 2\pi \alpha \iint_F d(\rho, z) = 2\pi \alpha \text{Área}(F) \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{\iint_F \rho d(\rho, z)}{\iint_F d(\rho, z)}$$

es la abscisa del centroide de F. ◆

5.3.2. Ejercicios

Hacer los ejercicios propuestos en el libro de James Stewart *Cálculo Multivariable 4Ed.*, en la sección 16.7 (página 1103), ejercicios 5-18.

1. Calcula el centroide de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$.
2. Calcula la masa de un embudo delgado en forma de cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 \leq z \leq 4$, cuya función de densidad es $\rho(x, y, z) = 10 - z$ (gr/cm²).

5.4. Integral de superficie de un campo vectorial

Sea $S = \gamma(A)$ una superficie donde $\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$ y A es un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ un campo vectorial de tres variables definido en un abierto de \mathbb{R}^3 que contiene a la superficie S . Recuerda que para definir la integral de \mathbf{F} sobre una curva lo que se hacía era considerar un campo de vectores sobre la curva, a saber, el campo vectorial que a cada punto de la curva hace corresponder el vector tangente unitario en dicho punto. Ahora necesitamos hacer algo parecido. Necesitamos definir un campo vectorial de tres variables sobre la superficie S . Puesto que en un punto de una superficie hay muchos vectores tangentes pero hay solamente dos vectores normales unitarios opuestos entre sí, parece natural elegir uno de dichos vectores en cada punto de la superficie y de esta forma obtenemos un campo vectorial que podremos multiplicar escalarmente por \mathbf{F} lo que nos va a llevar a la integral que queremos definir.

Nos vemos así llevados a la necesidad de elegir en cada punto de una superficie uno de los dos vectores unitarios normales a la superficie en dicho punto. Representaremos por $\mathbf{n}(x, y, z)$ un vector normal unitario a S en el punto $(x, y, z) \in S$. El otro vector normal unitario será $-\mathbf{n}(x, y, z)$.

5.4 Definición. Diremos que una superficie S es **orientable** cuando es posible definir un campo vectorial *continuo* sobre S que a cada punto de S asigne uno de los vectores unitarios normales en dicho punto. Cuando dicho campo vectorial existe se llama **una orientación** de S .

Es claro que una superficie “de un solo trozo” orientable tiene dos posibles orientaciones.

Las superficies orientables tienen *dos caras* porque, intuitivamente, lo que hace una orientación es definir en cada punto de la superficie una dirección *hacia arriba* que es aquella dirección en la que apunta el vector normal y la dirección opuesta define una dirección *hacia abajo*. Por tanto podemos

distinguir una cara de S hacia arriba y otra cara de S hacia abajo. La mayoría de las superficies usuales son orientables pero hay algunas superficies que no lo son y suelen llamarse superficies de una sola cara. La más conocida es la llamada *banda de Moebius*. Aquí la tienes.

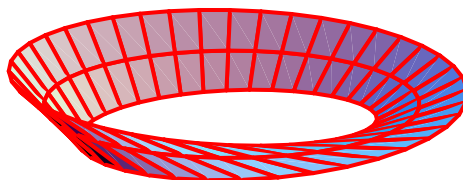


Figura 5.2: Una superficie no orientable

Se dice que la superficie $S = \gamma(A)$ es **simple** cuando la función γ es inyectiva en A . La banda de Moebius no es una superficie simple.

Supuesto que S es una superficie *suave y simple*, se verifica que la función definida para todo $(x, y, z) \in S$ por

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t)}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\|} \quad \text{donde } \gamma(s, t) = (x, y, z) \in S \quad (5.7)$$

es continua sobre S por lo que la superficie S es orientable. La orientación definida por (5.7) se dice que está **inducida** por la parametrización γ . En particular, si la superficie es la gráfica de una función $S = \{(x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A\}$ donde $A \subset \mathbb{R}^2$ y $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar de dos variables, entonces dicha superficie tiene como ecuaciones paramétricas $\gamma(x, y) = (x, y, h(x, y))$ (y es simple y suave) por lo que $\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)$, $\frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)$. En este caso tenemos que

$$\mathbf{n}(x, y, h(x, y)) = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y)}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y) \right\|} = \frac{-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\mathbf{i} - \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\right)^2 + 1}} \quad (5.8)$$

Cuando la superficie está definida implícitamente por una ecuación, es decir, se trata de una superficie de la forma $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$ donde g es un campo escalar de tres variables cuyo gradiente no se anula nunca en S , entonces una orientación en S viene dada por

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\nabla g(x, y, z)}{\|\nabla g(x, y, z)\|} \quad (5.9)$$

5.5 Definición. La integral de un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ sobre una superficie S que suponemos simple y suave, se define por

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}(\gamma(s, t)) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s, t)) \, dS \quad (5.10)$$

donde $\mathbf{n}(\gamma(s, t))$ viene dado por la igualdad (5.7) en el caso de que $S = \gamma(A)$ o por la igualdad (5.8) en el caso de que S sea la gráfica de una función h .

Es decir, la integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie S es igual a la integral de superficie del campo escalar $\mathbf{F}(\gamma(s, t)) \cdot \mathbf{n}(\gamma(s, t))$ sobre S . Teniendo en cuenta la definición de integral de superficie de un campo escalar, cuando $S = \gamma(A)$ tenemos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_A \mathbf{F}(\gamma(s, t)) \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right) d(s, t) \quad (5.11)$$

y cuando S es la gráfica de una función h tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_A \mathbf{F}(x, y, h(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x, y)\mathbf{i} - \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) d(x, y) \\ \iint_A \left(-P(x, y, h(x, y))\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - Q(x, y, h(x, y))\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) + R(x, y, h(x, y)) \right) d(x, y) \end{aligned} \quad (5.12)$$

En física suele llamarse a la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ **flujo** de \mathbf{F} a través de S .

Con frecuencia es preciso calcular integrales sobre superficies que tienen aristas y no son suaves ni orientables en el sentido que acabamos de definir pero que son suaves y orientables a trozos esto es, que se obtienen “pegando” varias superficies suaves y orientables; por ejemplo, la superficie formada por las caras de un poliedro. En tal caso, **la integral de un campo vectorial sobre una superficie suave y orientable a trozos se define como la suma de las integrales sobre cada una de las superficies suaves y orientables que la forman.**

Para una **superficie cerrada**, esto es una superficie que es la frontera de un dominio acotado en \mathbb{R}^3 , se conviene que la **orientación positiva** es aquella en la que los vectores normales apuntan siempre hacia el **exterior de la superficie**. Si una superficie cerrada viene dada por una parametrización, puede ocurrir que la orientación inducida por dicha parametrización no sea la orientación positiva. Cuando esto ocurre basta intercambiar las variables para que la orientación inducida sea la orientación positiva.

5.4.1. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie

Consideremos que el campo \mathbf{v} es el campo de velocidades de un fluido que se mueve en una región del espacio, esto es, $\mathbf{v}(x, y, z)$ es el vector velocidad, del fluido en el punto (x, y, z) . Suponemos, por comodidad, que la velocidad no depende del tiempo sino solamente de las coordenadas espaciales del punto, es decir, que se trata de un fluido estacionario (en el caso general en que la velocidad también depende del tiempo, las consideraciones que siguen permanecen válidas en *cada instante* t). Supongamos también que usamos el metro como unidad de longitudes y el segundo como unidad de tiempo.

Consideremos una superficie S orientada por un campo de vectores normales unitarios $\mathbf{n}(x, y, z)$. Suponemos que dicha superficie no impide el paso del fluido el cual puede fluir libremente a través de ella. Queremos calcular el volumen total de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo, es decir, el flujo (volumétrico) del fluido a través de S . Es evidente que dicho flujo depende de la posición de la superficie respecto al campo de velocidades del fluido, el flujo será máximo cuando el campo sea normal a la superficie y será nulo cuando el campo sea tangente a la superficie. Es por ello

por lo que precisamos tener una orientación en la superficie pues de esta forma podemos precisar la posición de S respecto al campo de velocidades.

Consideremos el caso más simple en que la superficie S es un paralelogramo plano engendrado por los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} y el campo de velocidades, \mathbf{v} , es constante. En este caso tan sencillo, el flujo a través de S es igual al volumen (con signo) del paralelepípedo engendrado por los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{v} , que sabemos es igual al producto mixto $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Pues el fluido que en un instante dado se encuentra en el paralelogramo, al cabo de un segundo se encontrará en otro paralelogramo trasladado del primero mediante el vector \mathbf{v} . Recuerda que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector normal a S cuya norma es igual al área de S . El número $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ se expresa en metros cúbicos por segundo. El signo de dicho número indica si el flujo es saliente (signo positivo cuando el vector \mathbf{v} y el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ forman un ángulo agudo, esto es apuntan en la misma dirección) o entrante (signo negativo cuando el vector \mathbf{v} y el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ forman un ángulo mayor de 90 grados, esto es apuntan en direcciones opuestas).

Volviendo al caso general, el vector $\mathbf{v}(x, y, z)$ puede descomponerse en cada punto (x, y, z) de la superficie S como suma de dos vectores ortogonales de los cuales uno de ellos está en el plano tangente a S en el punto considerado y el otro se obtiene como la proyección ortogonal del vector sobre el vector normal unitario $\mathbf{n}(x, y, z)$, es decir, es el vector $(\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z))\mathbf{n}(x, y, z)$. La componente tangente a S no *atraviesa* dicha superficie (lo que hace es establecer una *circulación* del fluido *sobre* la misma) y su contribución al flujo es nula. Por ello, para calcular el flujo solamente se considera la componente del campo $\mathbf{v}(x, y, z)$ que es normal a la superficie, esto es, el vector $(\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z))\mathbf{n}(x, y, z)$. Ya puedes suponer lo que sigue: dividimos la superficie en pequeños parches y aproximamos el área de cada parche como lo hemos hecho al definir la integral de superficie y en cada uno de esos parches aproximamos el flujo por el volumen de un paralelepípedo engendrado por los vectores tangentes a la superficie en un punto del parche y el vector $(\mathbf{v}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z))\mathbf{n}(x, y, z)$ calculado en ese punto; hacemos la correspondiente suma y obtenemos una aproximación del flujo a través de S . Estas aproximaciones convergen a la integral de superficie del campo $\mathbf{v}(x, y, z)$ sobre S . Por tanto, el flujo a través de S viene dado por $\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$.

Las consideraciones anteriores también sirven para justificar que el flujo de masa a través de S viene dado por $\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\rho(x, y, z)$ es la función de densidad del fluido.

El flujo de un campo vectorial a través de una superficie tiene gran importancia en el estudio de campos eléctricos y campos magnéticos. Si \mathbf{E} es un campo eléctrico, la integral de superficie $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ se llama **flujo eléctrico** de \mathbf{E} a través de S . La ley de Gauss establece que la carga eléctrica neta que hay en el interior de una superficie cerrada viene dada por $Q = \epsilon_0 \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$.

5.4.2. Ejercicios

Hacer los ejercicios propuestos en el libro de James Stewart *Cálculo Multivariable 4Ed.*, en la sección 16.7 (página 1103), ejercicios 19-28.

Lección 6

Teoremas de Stokes y de Gauss

6.1. Teorema de Stokes

El teorema de Stokes es una generalización del teorema de Green para superficies en el espacio: el teorema de Green establece una igualdad entre integrales dobles e integrales de línea y el teorema de Stokes establece una igualdad entre integrales de superficie e integrales de línea. Veremos que en el caso particular de que la superficie sea una superficie plana situada en el plano XY con normal unitaria igual a \mathbf{k} el teorema de Stokes se convierte en el teorema de Green.

Sea S una superficie que suponemos orientada por un campo continuo de vectores que a cada punto $(x, y, z) \in S$ hace corresponder un vector unitario normal a S que notaremos $\mathbf{n}(x, y, z)$. Suponemos que la superficie S es una superficie *abierta* y representamos por ∂S su *borde*. Observa que ∂S puede ser una curva cerrada o puede estar formado por varias curvas cerradas disjuntas (por ejemplo, la superficie S puede ser un trozo de cilindro circular recto sin tapaderas en cuyo caso su borde son dos circunferencias).

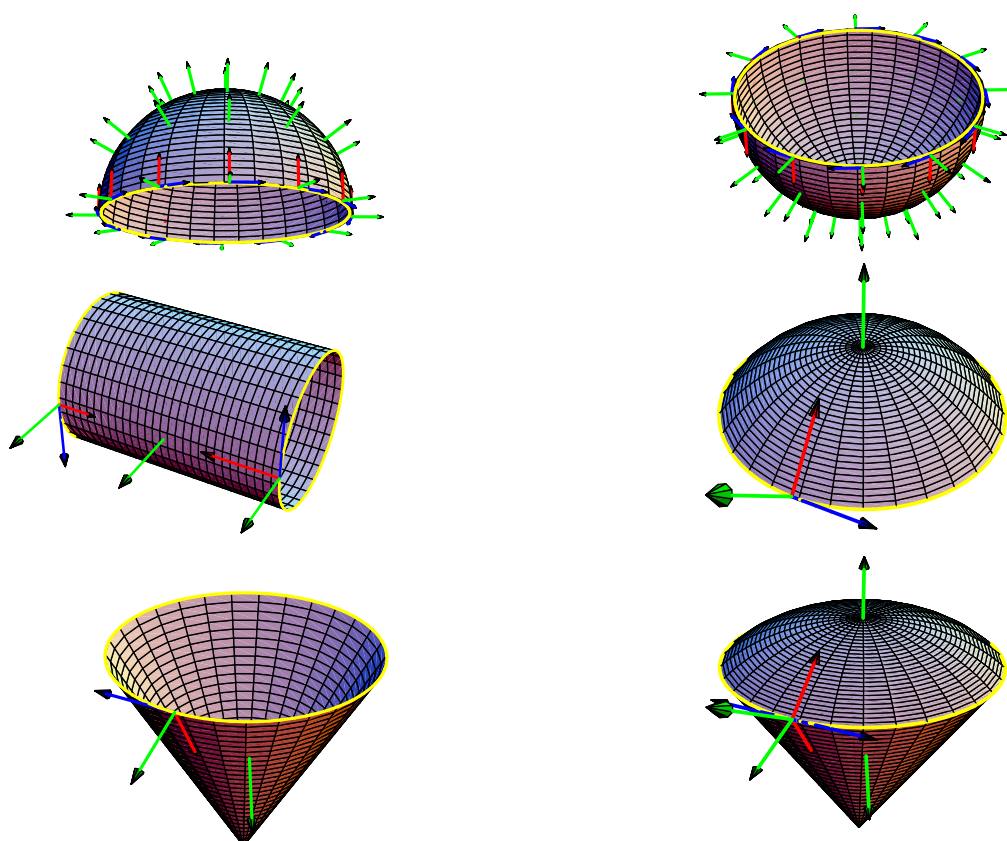
La orientación en S definida por el campo de vectores normales $\mathbf{n}(x, y, z)$ induce una orientación en ∂S que se llama **orientación inducida**. En términos familiares, la orientación inducida en ∂S es aquella en la que al recorrer caminando ∂S en el sentido que indica el vector tangente en cada punto de ∂S y con la cabeza apuntando en el sentido que indica el vector normal \mathbf{n} , la superficie S queda a nuestra izquierda.

Una definición matemática más precisa de lo que se entiende por *orientación inducida* es la siguiente. Sea $P \in \partial S$ un punto en el borde de la superficie S . La curva ∂S tiene en P dos vectores normales unitarios que son tangentes a la superficie S en P ; estos vectores son opuestos entre sí. Sea \mathbf{N} uno de dichos vectores. Representemos por H el plano tangente a S en P . Sea $B(P, \epsilon)$ una bola centrada en P de radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. Definamos $G = B(P, \epsilon) \cap S$, y sea $D = \Pi_H(G)$ la proyección ortogonal de G sobre H . Observa que Π_H deja invariante a \mathbf{N} y a P porque ambos están en H . Además, como Π_H conserva la ortogonalidad, el vector \mathbf{N} es normal en el punto P

a la curva $(\partial S)_H = \prod_H(\partial S \cap B(P, \epsilon))$. Observa que D es un dominio plano y que $(\partial S)_H$ es parte de ∂D . Pues bien, si el vector \mathbf{N} es la normal interior a ∂D en P (en el sentido que definimos al estudiar el teorema de Green) se dice que \mathbf{N} es el vector unitario normal a ∂S en P que **apunta hacia dentro** de S . **La orientación inducida en ∂S por la orientación dada de la superficie S** es aquella en la que, notando por $\mathbf{N}(x, y, z)$ el vector unitario normal que apunta hacia dentro de S y por $\mathbf{T}(x, y, z)$ el vector tangente unitario a ∂S en el punto $(x, y, z) \in \partial S$, se verifica que la base ortonormal $\{\mathbf{T}(x, y, z), \mathbf{N}(x, y, z), \mathbf{n}(x, y, z)\}$ **tiene determinante positivo** (de hecho igual a 1) para todo $(x, y, z) \in \partial S$. Observa que, cualquiera sea el vector tangente unitario $\mathbf{T}(x, y, z)$ se tiene que $\mathbf{N}(x, y, z) = \mathbf{n}(x, y, z) \times \mathbf{T}(x, y, z)$ o $\mathbf{N}(x, y, z) = -\mathbf{n}(x, y, z) \times \mathbf{T}(x, y, z)$.

Cuando S es una superficie suave y orientable a trozos se conviene en que la orientación de cada parte suave y orientable de S se haga de forma que en cada curva γ , que sea frontera común de dos partes suaves orientables, las respectivas orientaciones inducidas en γ sean *opuestas*.

Las siguientes gráficas te ayudarán a entender estas ideas.



En todos los casos se han representado en rojo los vectores normales a ∂S que apuntan hacia dentro de S , en verde los vectores normales que orientan la superficie y en azul los vectores tangentes a ∂S que proporcionan en cada caso la orientación inducida en ∂S .

Observa que las orientaciones inducidas en ∂S por las orientaciones de las semiesferas superior

e inferior son opuestas. En el caso del cilindro su borde está formado por dos circunferencias cuyas orientaciones son opuestas. La última de las superficies está formada pegando dos superficies (un casquete esférico y un cono) orientables cuyas orientaciones se eligen de forma que induzcan orientaciones opuestas en su borde común.

Comprueba que en todos los casos si andas sobre la curva borde en el sentido que indica su tangente (vector azul) y con tu cabeza apuntando en el sentido que indica la normal que orienta la superficie (vector verde), la superficie queda a tu izquierda.

El teorema de Stokes afirma que el flujo del rotacional de un campo a través de una superficie suave y orientable a trozos es igual a la circulación del campo en el borde de la misma.

6.1 Teorema (Teorema de Stokes). Sea S una superficie suave y orientable a trozos con una orientación definida por el campo de vectores normales unitarios $\mathbf{n}(x, y, z)$ y representemos por ∂S^+ el borde de S con la orientación inducida. Sea \mathbf{F} un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contenga a S . Entonces se verifica que

$$\int_{\partial S^+} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (6.1)$$

Un caso frecuente es cuando la superficie S viene dada en la forma $S = \gamma(A)$ donde $A \subset \mathbb{R}^2$ y para $(s, t) \in A$ es

$$\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)) = x(s, t)\mathbf{i} + y(s, t)\mathbf{j} + z(s, t)\mathbf{k}$$

y la orientación de S viene dada por

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \frac{\frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t)}{\left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\|} \quad \text{donde } \gamma(s, t) = (x, y, z) \in S$$

Consideremos en el espacio de los parámetros la orientación positiva $s - t$ es decir, el eje de abscisas representa la variable s y el de ordenadas la variable t . En esta situación se verifica que *la orientación positiva de la frontera de A* (en el sentido que vimos al estudiar el teorema de Green) *se corresponde con la orientación inducida en ∂S* . Esto quiere decir que si $s = s(u)$, $t = t(u)$ donde $a \leq u \leq b$, son las ecuaciones paramétricas de la frontera de A con la orientación positiva, que notaremos ∂A^+ , entonces $\Gamma(u) = \gamma(s(u), t(u))$ es una representación paramétrica de ∂S^+ .

El teorema de Green es un caso particular del teorema de Stokes. Supongamos que nuestra superficie es un dominio plano D contenido en el plano XY y que la orientamos por la normal al plano XY en la dirección del eje Z positivo. Es claro que en esta situación la normal unitaria es $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ y que el borde de D con la orientación inducida es precisamente el borde de D orientado positivamente (en el sentido que vimos al estudiar el teorema de Green) que representamos por ∂D^+ . Sea $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial definido en D . Aplicando el teorema de Stokes al campo vectorial $\mathbf{F}_3(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ obtenemos

$$\int_{\partial D^+} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \text{rot} \mathbf{F}_3 \cdot \mathbf{k} dS$$

Es claro que

$$\int_{\partial D^+} \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

Por otra parte tenemos que

$$\text{rot } \mathbf{F}_3(x, y, z) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

Concluimos que

$$\int_{\partial D^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y)$$

6.2. Teorema de la divergencia

Ya conocemos una versión del teorema de la divergencia para campos vectoriales de dos variables. En la generalización de dicho teorema para campos vectoriales de tres variables se consideran *dominios regulares* en \mathbb{R}^3 . Recuerda que un dominio es un conjunto abierto y conexo. La frontera de un dominio acotado es una superficie *cerrada*. Sea D un dominio acotado en \mathbb{R}^3 , diremos que D es un **dominio regular** cuando su frontera, que representaremos por ∂D , esté formada por trozos de superficies que tienen plano tangente en todo punto. No excluimos la posibilidad de que en las uniones de dichas superficies haya *aristas* en cuyos puntos no esté definido un plano tangente. El interior de una esfera o de un ortoedro son ejemplos de dominios regulares el segundo de ellos con aristas.

Las *superficies cerradas* que son frontera de un dominio regular se orientan mediante la *normal exterior*, concepto éste que, aunque tiene un significado intuitivo para las superficies cerradas más usuales, es fácil de precisar matemáticamente. En cada punto de ∂D (excepto quizás en las aristas si las hay, pero estos conjuntos de puntos son tan pequeños que no influyen para nada en la integral) están definidas dos normales unitarias que son opuestas una de otra. Sea $\mathbf{x} \in \partial D$ y sea \mathbf{N} un vector normal a ∂S en \mathbf{x} . Se dice que \mathbf{N} es **normal exterior** a ∂S en \mathbf{x} si para $\delta > 0$ suficientemente pequeño y para $0 < t < \delta$ se verifica que:

$$\mathbf{x} - t\mathbf{N} \in D, \quad \mathbf{x} + t\mathbf{N} \notin D$$

condiciones que expresan que si a partir del punto \mathbf{x} nos desplazamos un poquito en la dirección de \mathbf{N} *salimos* de D y si nos desplazamos en la dirección opuesta a \mathbf{N} *entramos* en D . Se verifica que ∂D es una superficie orientable y suave a trozos y la aplicación $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{n}(\mathbf{x})$ que a cada punto $\mathbf{x} \in \partial D$ (con la salvedad indicada) hace corresponder la normal exterior a ∂D en dicho punto define una orientación que se llamará la **orientación positiva** de ∂D .

6.2 Teorema (Teorema de la divergencia). *Sea D un dominio regular en \mathbb{R}^3 , \mathbf{F} un campo vectorial de clase C^1 definido en un abierto que contiene a $D \cup \partial D$ y consideremos la superficie ∂D orientada positivamente. Entonces se verifica que*

$$\boxed{\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_D \text{div } \mathbf{F}(x, y, z) d(x, y, z)} \quad (6.2)$$

Es decir, el flujo del campo \mathbf{F} a través de la frontera ∂D del dominio D es igual a la integral de la divergencia del campo en D .

Este teorema relaciona una integral de superficie con una integral de volumen. El teorema de la divergencia tiene dos autores Gauss y Ostrogradsky los textos atribuyen su autoría a uno u otro según las simpatías del autor de turno aunque lo más justo, como hacen muchos textos, sería llamarle teorema de Gauss-Ostrogradsky.

Aplicando el teorema de la divergencia al dominio $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ formado por una bola de centro \mathbf{x} y radio ϵ se deduce fácilmente que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{Vol}(B(\mathbf{x}, \epsilon))} \iint_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \text{div} \mathbf{F}(x, y, z)$$

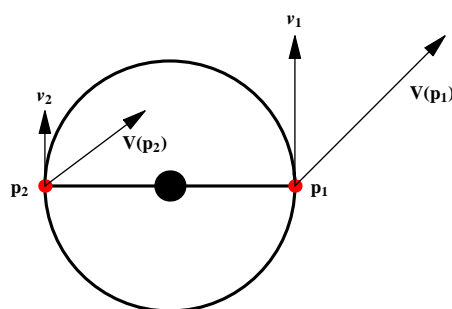
lo que permite interpretar la divergencia *como el límite del flujo por unidad de volumen*. Claramente, cuando $\text{div} \mathbf{F}(x, y, z) > 0$ entonces para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene que $\iint_{\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS > 0$ de modo que el flujo neto a través de $\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)$ es en sentido hacia afuera. Análogamente, cuando $\text{div} \mathbf{F}(x, y, z) < 0$ el flujo neto a través de $\partial B(\mathbf{x}, \epsilon)$ es en sentido hacia dentro.

6.3. Aplicaciones de los teorema de Stokes y de la divergencia

Este apartado sigue muy de cerca los apuntes de Análisis del profesor de la Universidad de Valencia Dr. Carlos Ivorra. Puedes descargar dichos apuntes y otros muchos, todos ellos excelentes, de su página Web <http://www.uv.es/~ivorra>.

6.3.1. El rotacional en hidrodinámica

Empezaremos viendo una interpretación de la circulación de un campo en el contexto de la hidrodinámica. Supongamos que \mathbf{V} es el campo de velocidades de un fluido. Esto significa que si liberamos una partícula de masa despreciable en un punto \mathbf{p} el fluido la arrastrará con velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ (no excluimos que \mathbf{V} pueda depender del tiempo además de hacerlo de la posición). Supongamos ahora que en el fluido situamos una bolita sujeta por una varilla rígida a un eje, respecto al cual puede girar a lo largo de una circunferencia de radio r . Es claro que si la bolita se encuentra en el punto \mathbf{p} el fluido la hará moverse con velocidad igual a la proyección de $\mathbf{V}(\mathbf{p})$ sobre la recta tangente a la circunferencia en \mathbf{p} , pues la componente normal de la velocidad será cancelada por las fuerzas que mantienen rígida a la varilla que sujeta la bola. Imaginemos ahora que el eje sujeta a la varilla por el centro y que ésta tiene una bolita en cada brazo como se muestra en la siguiente figura. Si las boli-



tas se encuentran en los puntos \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 , entonces su velocidad (que en módulo ha de ser la misma para ambas a causa de la rigidez de la varilla) estará determinada por los vectores $\mathbf{V}(\mathbf{p}_1)$ y $\mathbf{V}(\mathbf{p}_2)$. Al igual que en el caso anterior en realidad dependerá sólo de las proyecciones $\mathbf{v}_1 = \mathbf{V}(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_1) \mathbf{T}(\mathbf{p}_1)$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{V}(\mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_2) \mathbf{T}(\mathbf{p}_2)$ (donde hemos notado por $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ el vector tangente unitario a la circunferencia en el punto \mathbf{p}). Por ejemplo, en el caso indicado en la figura, donde $\mathbf{V}(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_1) = 2$ y $\mathbf{V}(\mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_2) = 1$, la velocidad resultante será el promedio de ambas: la varilla girará en sentido contrario a las agujas del reloj con velocidad $(2 - 1)/2 = 1/2$. La justificación de esto es la siguiente. Se trata de un problema de conservación de la cantidad de movimiento. De hecho es equivalente al siguiente: dos cuerpos de la misma masa se aproximan frontalmente de modo que sus velocidades son \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 . Si tras el choque se mueven conjuntamente, ¿a qué velocidad lo hacen? La respuesta es que la cantidad de movimiento del sistema es $m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2$ al principio y $2m\mathbf{v}$ al final. Igualando resulta que $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$. El fluido comunica una cantidad de movimiento a las bolitas y la varilla se limita a unificar las velocidades sin alterar la cantidad de movimiento.

Supongamos ahora que en vez de una varilla con dos bolitas tenemos un molinillo con n aspas. Entonces el valor numérico de la velocidad resultante será

$$\frac{1}{n} (\mathbf{V}(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_1) + \mathbf{V}(\mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_2) + \cdots + \mathbf{V}(\mathbf{p}_n) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_n))$$

Que podemos escribir en la forma

$$\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{2\pi r}{n} \mathbf{V}(\mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_1) + \frac{2\pi r}{n} \mathbf{V}(\mathbf{p}_2) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_2) + \cdots + \frac{2\pi r}{n} \mathbf{V}(\mathbf{p}_n) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{p}_n) \right)$$

donde r es el radio de la circunferencia. Esto equivale a considerar la circunferencia dividida en n partes iguales de longitud $\Delta s = 2\pi r/n$, multiplicar la longitud de cada parte por el valor de $\mathbf{V} \cdot \mathbf{T}$ en uno de sus puntos, sumar y luego dividir el resultado entre la longitud completa de la circunferencia. Finalmente, si en lugar de un molinillo ponemos un disco S de radio r , el valor numérico de la velocidad que le imprimirá el fluido vendrá dado por

$$v = \frac{1}{2\pi r} \int_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} ds = \frac{1}{2\pi r} \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$

La velocidad \mathbf{v} corresponde a una velocidad angular $\omega_r = v/r$. Así pues, representando por C la circunferencia del disco S orientada positivamente, tenemos que

$$\omega_r = \frac{1}{2\pi r^2} \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$

Sea ahora \mathbf{n} un vector unitario normal al disco. En virtud del teorema de Stokes se verifica que

$$\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

Si el centro del disco es el punto \mathbf{p} y el radio r es suficientemente pequeño se verifica que

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \simeq \pi r^2 \text{rot} \mathbf{V}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}$$

y por tanto

$$\omega_r = \frac{1}{2\pi r^2} \int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2\pi r^2} \iint_S \text{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS \simeq \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{V}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}$$

En el límite se tiene la igualdad

$$\lim_{r \rightarrow 0} \omega_r = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n}$$

Así pues, la velocidad angular que adquirirá la rueda es (aproximadamente) la mitad de la proyección del rotacional sobre el eje de giro. Claramente el rotacional indica la dirección en que hemos de situar el eje para que la velocidad de rotación sea máxima.

6.3.2. La ecuación de continuidad de la hidrodinámica

Sea $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ el campo de velocidades de un fluido y sea $\rho(x, y, z, t)$ su densidad (en general ambos dependen de la posición (x, y, z) y del tiempo t). Sea $\mathbf{p} = (x, y, z)$ un punto cualquiera y S una esfera de centro \mathbf{p} . La cantidad de fluido contenida en S en un instante dado es la integral de ρ sobre la bola B de frontera S , luego la variación de esta masa (debida a la variación de la densidad del fluido respecto al tiempo) es

$$\frac{d}{dt} \iiint_B \rho(x, y, z, t) d(x, y, z) = \iiint_B \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) d(x, y, z)$$

En la lección anterior vimos que el flujo del campo $\rho \mathbf{V}$ a través de S se interpreta como la masa de fluido que sale de S por unidad de tiempo. Sea r el radio de B y definamos

$$\begin{aligned} \psi_r(\mathbf{p}, t) &= \iiint_B \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) d(x, y, z) + \iint_S \rho(x, y, z, t) \mathbf{V}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dS = \\ &= \iiint_B \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) d(x, y, z) + \iiint_B \operatorname{div}(\rho(x, y, z, t) \mathbf{V}(x, y, z, t)) d(x, y, z) = \\ &= \iiint_B \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho(x, y, z, t) \mathbf{V}(x, y, z, t)) \right) d(x, y, z) \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el teorema de la divergencia (se entiende que el operador divergencia indica derivación respecto a las variables espaciales x, y, z). Es claro que $\psi_r(\mathbf{p}, t)$ es el incremento de la masa de fluido en B por unidad de tiempo *menos* la cantidad de masa que *entra* en B a través de S por unidad de tiempo. Por consiguiente $\psi_r(\mathbf{p}, t)/\operatorname{Vol}(B)$ es la cantidad de masa neta que se crea en B por unidad de tiempo y de volumen (el aumento o la disminución de masa en B que no entra ni sale por su frontera). Un razonamiento ya varias veces repetido permite probar fácilmente que

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\psi_r(\mathbf{p}, t)}{\operatorname{Vol}(B)} = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) + \operatorname{div}(\rho(x, y, z, t) \mathbf{V}(x, y, z, t))$$

donde $\psi(\mathbf{p}, t)$ representa la cantidad de fluido que se crea alrededor de \mathbf{p} por unidad de tiempo y de volumen. La ecuación

$$\psi(\mathbf{p}, t) = \operatorname{div}(\rho(\mathbf{p}, t) \mathbf{V}(\mathbf{p}, t)) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{p}, t)$$

se denomina **ecuación de continuidad de la hidrodinámica**.

Los puntos donde $\psi > 0$ se llaman **fuentes** (son puntos donde aparece fluido) y los puntos donde $\psi < 0$ se llaman **sumideros** (en los cuales desaparece fluido). Si no hay fuentes ni sumideros, es decir, cuando la masa neta se conserva, se tiene que ψ es idénticamente nula y la ecuación de continuidad adopta la forma más usual

$$\operatorname{div}(\rho(\mathbf{p}, t) \mathbf{V}(\mathbf{p}, t)) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(\mathbf{p}, t) = 0$$

Si la densidad ρ es constante el fluido se llama **incompresible** y entonces la ecuación de continuidad se reduce a $\psi(\mathbf{p}, t) = \rho \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{p}, t)$ que nos dice que $\rho \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{p}, t)$ es igual a la cantidad de fluido que se crea alrededor de \mathbf{p} por unidad de masa y de volumen. Si además no hay fuentes ni sumideros, la ecuación de continuidad se reduce a $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$.

6.3.3. La ley de Gauss y la ecuación de Poisson en electrostática

Recuerda que el campo eléctrico creado por una carga puntual Q situada en un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{a})$$

donde ϵ es la *permisividad* del medio. Recuerda que $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ es la fuerza que experimentaría una carga positiva de 1 culombio que estuviera situada en el punto \mathbf{x} . Es fácil comprobar por cálculo directo que $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$. En consecuencia, el teorema de la divergencia nos dice que el flujo eléctrico neto a través de cualquier superficie cerrada que *no rodee al punto* \mathbf{a} es nulo. Observa que si la superficie cerrada contiene al punto \mathbf{a} entonces no podemos aplicar el teorema de la divergencia porque el campo no está definido en ningún abierto que contenga a dicha superficie *y a su interior*. Estudiemos lo que ocurre en este caso. Sea G un dominio regular que contiene al punto \mathbf{a} y tomemos una bola B centrada en \mathbf{a} y de radio $r > 0$ de manera que esté contenida en G . Consideremos el dominio $D = G \setminus B$ que se obtiene quitándole a G la bola B . Es claro que el dominio D no contiene \mathbf{a} y que $\partial D = \partial B \cup \partial G$. La orientación positiva en ∂G es la misma respecto a G y respecto a D y viene dada por la normal exterior a G , mientras que la orientación positiva en ∂B *como parte de la frontera de* $D = G \setminus B$ es la dada por el vector normal que apunta hacia dentro de B , es decir, la opuesta a su orientación positiva como frontera de B . En consecuencia tenemos que

$$0 = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \iint_{\partial D} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = \iint_{\partial G} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS - \iint_{\partial B} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS$$

de donde

$$\iint_{\partial G} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = \iint_{\partial B} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS$$

Pero la última integral es inmediata porque para $\mathbf{x} \in \partial B$ se tiene que

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^3} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^3} (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2}$$

luego

$$\iint_{\partial G} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{\partial B} \frac{Q}{r^2} \, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon}$$

Este resultado se generaliza inmediatamente para el campo eléctrico producido por un número finito, n , de cargas puntuales q_j situadas en los puntos $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$. Dicho campo viene dado por la suma vectorial de los campos creados por cada carga

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{j=1}^n \frac{q_j}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_j\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{a}_j) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{x} \neq \mathbf{a}_j)$$

Se tiene que $\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}_j$. En consecuencia, el teorema de la divergencia nos dice que el flujo neto de \mathbf{E} a través de cualquier superficie cerrada que no encierre a ninguno de los

puntos \mathbf{a}_j es nulo. Mientras que si la superficie S encierra algunos de dichos puntos y es Q la suma de las cargas que encierra se tiene que

$$\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = \frac{Q}{\epsilon}$$

Consideremos ahora que tenemos una distribución continua de cargas en un dominio regular Ω del espacio. Es decir, tenemos una función continua $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ llamada *densidad de carga* que se anula fuera de Ω tal que la carga neta contenida en un conjunto $E \subset \Omega$ viene dada por $\iiint_E \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$. En este caso, la suma que corresponde a una distribución finita de cargas se convierte en una integral y el campo viene dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

donde se entiende que la integral de una función vectorial es el vector formado por la integral de cada una de sus componentes. Fíjate en que si $\mathbf{x} \in \Omega$ el integrando no está definido en \mathbf{x} pero se demuestra que la integral tiene sentido. En este caso la ley de Gauss adopta la forma siguiente: si D es un dominio regular con frontera $S = \partial D$ se verifica que

$$\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dS = \frac{1}{\epsilon} \iiint_D \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

Usando ahora el teorema de la divergencia tenemos

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_D \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

o lo que es igual

$$\iiint_D \left(\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) - \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon} \right) d\mathbf{x} = 0$$

Como esta igualdad tiene que ser válida *para todo dominio regular* D , concluimos que

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon}$$

Es sabido que el campo eléctrico es conservativo. En el caso que nos ocupa se verifica que la función

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \, d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

es una función potencial para \mathbf{E} , es decir, se verifica la igualdad $\mathbf{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z)$. En consecuencia

$$\operatorname{div}(\nabla V)(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon}$$

que es la **ecuación de Poisson**.

Un sencillo cálculo permite comprobar que para cualquier campo escalar f de clase C^2 se verifica que

$$\operatorname{div}(\nabla f)(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$$

La expresión

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$$

se llama **laplaciana** del campo escalar f . El operador $\Delta : f \rightarrow \Delta f$ se llama **operador de Laplace**. La ecuación de Poisson para el potencial eléctrico suele escribirse en la forma condensada $\Delta V = -\rho/\epsilon$.

6.4. Funciones armónicas

Sea f un campo escalar de clase \mathbb{C}^2 definido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Se dice que f es una **función armónica** en Ω si para todo $(x, y, z) \in \Omega$ se verifica que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 0$$

Dicho en otras palabras, las funciones armónicas en Ω son las soluciones de la **ecuación de Laplace** $\Delta f(x, y, z) = 0$ en Ω .

Es fácil comprobar que la función f definida para todo $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\|(x, y, z)\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

El teorema de la divergencia para un campo conservativo $\mathbf{F}(x, y, z) = -\nabla f(x, y, z)$ adopta la forma

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} \, dS &= - \iint_{\partial D} \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{n} \, dS = - \iint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z) \, dS = \\ \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) \, d(x, y, z) &= - \iiint_D \operatorname{div} \nabla f(x, y, z) \, d(x, y, z) = - \iiint_D \Delta f(x, y, z) \, d(x, y, z) \end{aligned}$$

Esto es

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z) \, dS = \iiint_D \Delta f(x, y, z) \, d(x, y, z)$$

donde hemos tenido en cuenta que el producto escalar del gradiente de un campo escalar por un vector unitario es igual a la derivada de dicho campo escalar en la dirección dada por dicho vector, por ello $\nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z)$ es la derivada de f en el punto (x, y, z) en la dirección de la normal exterior a la superficie ∂D en dicho punto.

En particular, deducimos que para toda función f armónica en un abierto que contenga al dominio regular D y a su frontera se verifica que

$$\iint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(x, y, z) \, dS = 0$$

6.4.1. Ejercicios

Hacer los ejercicios propuestos en el libro de James Stewart, *Cálculo Multivariable 4Ed.*, en las secciones 16.8 (ejercicios 2-6, 7-10, 13-15 de la página 1109) y 16.9 (ejercicios 3-6, 7-16, 19-28 páginas 1116 y 1117).

- Sea S la parte del paraboloides $z = x^2 + y^2$ que queda bajo el plano $z = 2x$, y sea \mathbf{r} la curva intersección de ambos. Calcular la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ a lo largo de \mathbf{r} .
 - Usando el teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).
 - Directamente (considera la orientación apropiada para \mathbf{r}).

2. Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (xz, yx, zy)$ a través de la superficie cerrada formada por la parte del cilindro (con sus dos tapaderas) $x^2 + y^2 = 4$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z + y = 2$.
- Directamente (elige las orientaciones adecuadas para cada superficie).
 - Usando el teorema de la divergencia.
3. Sea S la parte del paraboloido $z = 4 - x^2 - y^2$ que queda sobre el plano $z = 4 - 2y$, y sea \mathbf{r} la curva intersección de ambos. Calcula la circulación del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, x, y)$ a lo largo de \mathbf{r} .
- Usando el teorema de Stokes (considera S orientada por la normal con componente $z > 0$).
 - Directamente (considera la orientación apropiada para \mathbf{r}).
4. Calcula el flujo saliente del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + x, x - y, z)$ a través de la superficie cerrada formada por la parte del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ que queda bajo el plano $z = 1$ y la parte de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ que queda sobre dicho plano.
- Directamente (elige las orientaciones adecuadas para cada superficie).
 - Usando el teorema de la divergencia.

Lección 7

Números complejos

7.1. Operaciones básicas con números complejos

7.1 Definición. Consideremos en el conjunto \mathbb{R}^2 las operaciones de adición y producto definidas por

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0, 0)$ y $(1, 0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a, -b)$ es el opuesto de (a, b) , y todo $(a, b) \neq (0, 0)$ tiene inverso

$$(a, b) \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (léase “el conjunto \mathbb{R}^2 con las operaciones de adición y producto”) es un *cuerpo*. Dicho cuerpo se representa simbólicamente por \mathbb{C} y sus elementos se llaman **números complejos**.

7.1.1. Forma cartesiana de un número complejo

El símbolo usual (a, b) para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo (a, b) . Para convencerte calcula $(1, -1)^4$. Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado. Para ello hacemos la identificación $(a, 0) = a$ y el número complejo $(0, 1)$ lo representaremos por i . Con ello tenemos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Ahora podemos escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi$$

Se dice que a es la **parte real** y b es la **parte imaginaria** del número complejo $z = a + ib$ y escribimos $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$. El producto ahora es muy fácil de recordar pues

$$(a + ib)(c + id) = ac + i^2bd + i(ad + bc) = ac - bd + i(ad + bc)$$

7.1.2. Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ como el vector del plano (x, y) y, en ese sentido, se habla del *plano complejo*. El eje horizontal recibe el nombre de *eje real*, y el eje vertical recibe el nombre de *eje imaginario*. Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), el **conjugado** de z

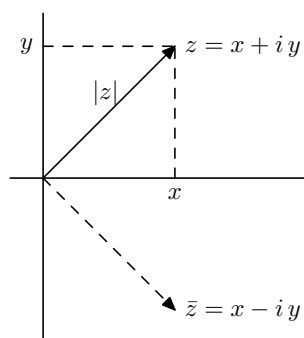


Figura 7.1: Representación de un número complejo

se define por $\bar{z} = x - iy$, y el **módulo** o **valor absoluto** de z , se define por $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geométricamente \bar{z} es la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x, y) (ver figura 7.1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 7.2) es $z + w$. Se comprueba fácilmente que

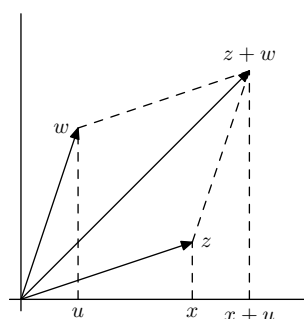


Figura 7.2: Suma de números complejos

si z y w son números complejos se verifica que $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ y $\overline{z w} = \bar{z} \bar{w}$.

La igualdad $|z|^2 = z\bar{z}$ que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite probar con facilidad que para todos $z, w \in \mathbb{C}$ es

$$\mathbf{a)} \quad |zw| = |z||w| \quad \text{y} \quad \mathbf{b)} \quad |z+w| \leq |z| + |w|$$

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\max\{|Re z|, |Im z|\} \leq |z| \leq |Re z| + |Im z| \tag{7.1}$$

7.1.3. Forma polar y argumentos de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ podemos escribir

$$z = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right)$$

Como $\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right)$ es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|} \right) = (\cos \vartheta, \text{sen } \vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$. Resulta así que

$$z = |z| (\cos \vartheta + i \text{sen } \vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de **forma polar**, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 7.3. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad

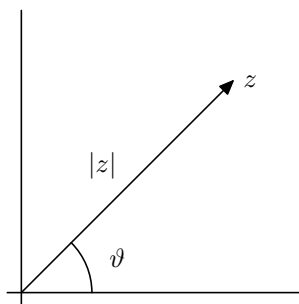


Figura 7.3: Forma polar de un número complejo

$z = |z| (\cos t, \text{sen } t)$ cualquiera de ellos recibe el nombre de **argumento** de z . El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por $\text{Arg}(z)$.

$$\text{Arg}(z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z| (\cos t + i \text{sen } t)\}$$

Observa que

$$s, t \in \text{Arg}(z) \iff \begin{cases} \cos(t) = \cos(s) \\ \sin(t) = \sin(s) \end{cases} \iff s = t + 2k\pi \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_0 \in \text{Arg}(z)$ cualquier otro es de la forma $t_0 + 2k\pi$ para algún $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $\text{Arg}(z) = t_0 + 2\pi\mathbb{Z}$.

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay uno único que se encuentra en el intervalo $] -\pi, \pi]$, se representa por $\arg(z)$ y se le llama **argumento principal** de z .

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ viene dado por:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctg(y/x) - \pi & \text{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 & \text{si } y \leq 0, x = 0 \\ \arctg(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } y > 0, x = 0 \\ \arctg(y/x) + \pi & \text{si } y \geq 0, x < 0 \end{cases}$$

7.1.4. Fórmula de De Moivre

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$z = |z|(\cos \vartheta + i \sen \vartheta)$$

$$w = |w|(\cos \varphi + i \sen \varphi)$$

Entonces

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \vartheta + i \sen \vartheta)(\cos \varphi + i \sen \varphi) = \\ &= |zw|[(\cos \vartheta \cos \varphi - \sen \vartheta \sen \varphi) + i(\sen \vartheta \cos \varphi + \cos \vartheta \sen \varphi)] = \\ &= |zw|(\cos(\vartheta + \varphi) + i \sen(\vartheta + \varphi)) \end{aligned}$$

Es decir: *para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.*

Acabamos de probar que si z, w son complejos no nulos, $\vartheta \in \text{Arg}(z)$, $\varphi \in \text{Arg}(w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in \text{Arg}(z + w)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de De Moivre.

7.2 Proposición (Fórmula de De Moivre). *Si z es un complejo no nulo, ϑ es un argumento de z y n es un número entero, se verifica que $n\vartheta \in \text{Arg}(z^n)$, es decir:*

$$z^n = (|z|(\cos \vartheta + i \sen \vartheta))^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i \sen n\vartheta)$$

7.1.5. Raíces de un número complejo

Dados un número complejo, $z \neq 0$, y un número natural, $n \geq 2$, se verifica que hay n números complejos w que verifican la igualdad $w^n = z$. Dichos números se llaman raíces n -ésimas de z y

vienen dados por

$$z_k = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Si los representamos obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

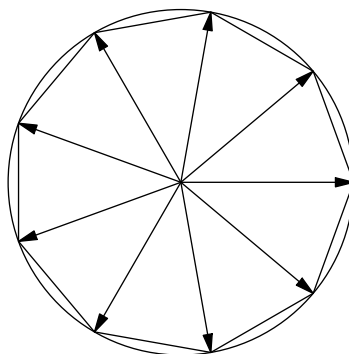


Figura 7.4: Raíces novenas de la unidad

De entre todas las raíces n -ésimas de z vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n -ésima principal**, que se define por

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg z}{n} \right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

En general no es cierto que dados dos números complejos z y w , el producto de las raíces n -ésimas principales de z y de w sea igual a la raíz n -ésima principal de zw . Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n -ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n -ésima de zw . Por tanto, $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w}$, es **una** raíz n -ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal. Es fácil probar que

$$\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw} \iff -\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq \pi \iff \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

Si $\operatorname{Re} z > 0$ $\operatorname{Re} w > 0$, entonces $-\pi < \arg(z) + \arg(w) < \pi$ por lo que, en este caso, $\sqrt[n]{z} \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

Para $n = 2$ y $z = w = -1$, tenemos que

$$\arg(-1) + \arg(-1) = 2\pi \neq 0 = \arg(1) = \arg((-1)(-1))$$

y no se cumple la condición anterior. En este caso

$$\sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)}$$

es decir $\sqrt{-1} \sqrt{-1} = -1$ es una raíz cuadrada de 1 (porque $1 = (-1)(-1)$) pero no es la raíz cuadrada principal de 1.

Ahora ya sabes dónde está el error en lo que sigue:

$$-1 = i^2 = i i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

7.1.6. Ejercicios

1. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a + ib$.

$$\begin{array}{llll} \text{i)} & (7-2i)(5+3i) & \text{ii)} & (i-1)^3 & \text{iii)} & \overline{(1+i)(2+i)}(3+i) & \text{iv)} & \frac{3+i}{2+i} \\ \text{v)} & \frac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i} & \text{vi)} & (1+i)^{-2} & \text{vii)} & \frac{1+2i}{2-i} & \text{viii)} & i^2(1+i)^3 \end{array}$$

2. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

$$\text{a)} f_1(z) = \bar{z}^2 \quad \text{b)} f_2(z) = z^3 \quad \text{c)} f_3(z) = \frac{1}{z} \quad \text{d)} f(z) = \frac{1}{1+z^2} \quad \text{e)} f_4(z) = \frac{z+i}{z-i}$$

3. Calcula las siguientes cantidades.

$$\text{a)} |(1+i)(2-i)| \quad \text{b)} \left| \frac{4-3i}{2-i\sqrt{5}} \right| \quad \text{c)} |(1+i)^{20}| \quad \text{d)} \left| \sqrt{2} + i(\sqrt{2}+1) \right|$$

4. Calcula los números complejos z tales que $\frac{1+z}{1-z}$ es:

a) Un número real; b) Un número imaginario puro.

5. Expresa en forma polar los siguientes números complejos.

$$\text{a)} -\sqrt{3}-i \quad \text{b)} -\sqrt{3}+i \quad \text{c)} \frac{3}{\sqrt{3}+i} \quad \text{d)} \frac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$$

6. Expresa los siguientes números en la forma $a + ib$:

$$\text{a)} (-1+i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b)} \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^5 \quad \text{c)} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^6 \quad \text{d)} (-\sqrt{3}+i)^{13}$$

7. Calcula $\arg(zw)$ y $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ supuestos conocidos $\arg z$ y $\arg w$. Sugerencia: hay que distinguir varias posibilidades.

8. Sea $z = x + iy$. Supuesto que $|z| = 1$, $z \neq 1$, $z \neq -i$, prueba que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+i}\right) = \begin{cases} \pi/4 & \text{si } 1-x+y > 0 \\ -3\pi/4 & \text{si } 1-x+y < 0 \end{cases}$$

9. Resuelve la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$ donde a, b, c , son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

10. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } z^3 = 1 + i \quad \text{b) } z^4 = i \quad \text{c) } z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{d) } z^8 = 1 \quad \text{e) } z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$$

11. Demuestra la llamada “igualdad del paralelogramo”:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \quad (z, w \in \mathbb{C})$$

y explica su significado geométrico.

12. Prueba que $\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$ si $|z| < 1$ y $|a| < 1$ y también si $|z| > 1$ y $|a| > 1$.

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

13. Sea x un número real que no es múltiplo entero de 2π . Prueba las igualdades

$$\begin{aligned} \text{a) } 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx &= \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \\ \text{b) } \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \cdots + \operatorname{sen} nx &= \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right) \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

Sugerencia: Si llamamos A a la primera suma y B a la segunda, calcúlese $A + iB$ haciendo uso de la fórmula de De Moivre.

14. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

$$\text{a) } \operatorname{sen} 3\varphi = 3 \operatorname{sen} \varphi - 4 \operatorname{sen}^3 \varphi, \quad \text{b) } \cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$$

15. Representar gráficamente los conjuntos de números complejos z que verifican:

$$\begin{aligned} |z-3| \leq 3; \quad 2 < |z-i| \leq 3; \quad |\arg z| < \pi/6; \quad |z-i| + |z+i| = 4 \\ |z-1| = |z-2i|; \quad \left| \frac{z-i}{z+2i} \right| = 2; \quad \operatorname{Im}(z^2) > 6; \quad |z-i| = \operatorname{Im} z + 1 \end{aligned}$$

7.2. Sucesiones y series

Esta sección tiene un propósito esencialmente teórico; voy a intentar explicarte de la forma más sencilla posible los conceptos de sucesión convergente y de serie convergente. Son conceptos fundamentales del Análisis Matemático y los encuentras en todas partes: series de Taylor, series de Fourier, series de potencias complejas, transformada z , ... Los procesos iterativos, tan frecuentes en los algoritmos de cálculo, no son sino sucesiones. Las señales discretas son sucesiones. La convolución de señales discretas viene dada por una serie. Las ecuaciones en diferencias finitas están relacionadas con un tipo especial de sucesiones que se llaman *recurrentes*. Muestreando a intervalos regulares de

tiempo una señal analógica obtienes una sucesión. Muchas funciones importantes están definidas por medio de una serie. Por todo ello creo que es imprescindible que tengas ideas claras sobre estos temas.

Dos conceptos son fundamentales: el de sucesión y el de límite de una sucesión convergente. Empezaremos con ellos.

7.2.1. Sucesiones

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto \mathbb{N} de los números naturales en A . Una sucesión de números reales (complejos) es una **aplicación** del conjunto \mathbb{N} de los números naturales en el conjunto \mathbb{R} (\mathbb{C}) de los números reales (complejos).

Dada una sucesión $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra “ x ” nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ debe interpretarse como la **aplicación** que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el elemento x_n . Cuando no hay posibilidad de confusión escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

En lo que sigue solamente consideraremos sucesiones de números complejos y, por tanto, representaremos por $\{z_n\}$ la **aplicación** de \mathbb{N} en \mathbb{C} dada por $n \mapsto z_n$. Como $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, en el caso particular de que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tenga que $z_n \in \mathbb{R}$ entonces $\{z_n\}$ es una sucesión de números reales. Es decir, las sucesiones de números complejos incluyen, como caso particular, a las sucesiones de números reales.

Naturalmente, dos sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son iguales cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $z_n = w_n$. No hay que confundir la sucesión $\{z_n\}$, que es una aplicación, con su **conjunto imagen**, que es el subconjunto de \mathbb{C} formado por todos los números z_n , el cual se representa por $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen. El número z_n se llama *término n -ésimo* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

Una forma correcta de imaginar una sucesión es como un vector con infinitas componentes. La sucesión $\{z_n\}$ puedes verla como el vector (z_1, z_2, z_3, \dots) .

Introduciremos ahora una notación muy útil en lo que sigue.

Dados $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, el conjunto

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

se llama **disco abierto** de centro a y radio r . Observa que un disco abierto no puede ser vacío.

Si $a = \alpha + i\beta$ tenemos que:

$$D(a, r) = \{x + iy \in \mathbb{C} : |x + iy - \alpha - i\beta| < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2\}$$

es el círculo de centro (α, β) y radio r excluida la circunferencia que lo limita.

7.3 Definición (Sucesión convergente). Se dice que una sucesión $\{z_n\}$ converge a un número $z \in \mathbb{C}$ cuando en cualquier disco abierto $D(z, \varepsilon)$ están todos los términos de la sucesión a partir de uno de ellos en adelante.

Con más detalle: una sucesión $\{z_n\}$ se dice que **converge a un número** z si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|z_n - z| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq m_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon$$

Se dice también que el número z es **límite de la sucesión** $\{z_n\}$ y se escribe $\lim_{n \rightarrow \infty} \{z_n\} = z$ o, simplemente, $\lim \{z_n\} = z$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{z_n\} \rightarrow z$.

Se comprueba fácilmente que *una sucesión convergente tiene un único límite*.

En Matemáticas se dan definiciones para introducir nuevos conceptos y saber de qué estamos hablando, pero las definiciones no suelen ser útiles para el cálculo. Por eso no debes preocuparte si la definición anterior te parece difícil de aplicar en casos concretos. Debes hacer un esfuerzo por comprenderla pero no tendrás que usarla para hacer cálculos.

Observa que, en virtud de la definición dada, se verifica que

$$\{z_n\} \rightarrow z \iff |z_n - z| \rightarrow 0$$

Recordemos que $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. Gracias a esta desigualdad tenemos que

$$\left. \begin{array}{l} |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \\ |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \end{array} \right\} \leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Deducimos que $|z_n - z| \rightarrow 0$ si, y sólo si, $|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| \rightarrow 0$ y $|\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z| \rightarrow 0$. Hemos probado así el siguiente resultado.

7.4 Proposición. *Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son convergentes. Además, en dicho caso*

$$\lim \{z_n\} = z \iff \operatorname{Re} z = \lim \{\operatorname{Re} z_n\} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \lim \{\operatorname{Im} z_n\}$$

Gracias a este resultado el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

El siguiente resultado relaciona las operaciones algebraicas con el concepto de límite. Su demostración es un sencillo ejercicio.

7.5 Proposición. *Si $\{z_n\} \rightarrow z$ y $\{w_n\} \rightarrow w$, entonces $\{z_n + w_n\} \rightarrow z + w$ y $\{z_n w_n\} \rightarrow z w$. Además, si $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \neq 0$, entonces $\{1/z_n\} \rightarrow 1/z$.*

El siguiente resultado es quizás el más útil para calcular límites de sucesiones de números reales.

7.6 Proposición. *Sea f una función real de variable real, y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Entonces para toda sucesión $\{x_n\} \rightarrow a$ se verifica que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.*

7.2.2. Series

Dada una sucesión, $\{z_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{S_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{z_n\}$, es decir:

$$S_1 = z_1, S_2 = z_1 + z_2, S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \dots, S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \dots$$

La sucesión $\{S_n\}$ así obtenida se llama *serie de término general* z_n y es costumbre representarla por $\sum_{n \geq 1} z_n$ o, más sencillamente, $\sum z_n$. El número S_n se llama *suma parcial de orden n* de la serie $\sum z_n$.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, *los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series*. En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “convergente”. Si una serie $\sum_{n \geq 1} z_n$ es con-

vergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es el número complejo definido por

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\{S_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k$$

Como caso particular de la proposición 7.4, la serie $\sum_{n \geq 1} z_n$ converge si, y sólo si, las series de números reales

$$\sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} z_n \quad \text{y} \quad \sum_{n \geq 1} \operatorname{Im} z_n$$

son convergentes. Observa que si la serie $\sum z_n$ converge entonces la sucesión $z_n = \sum_{j=1}^n z_j - \sum_{j=1}^{n-1} z_j$ es diferencia de dos sucesiones que convergen al mismo límite y por tanto converge a cero.

7.7 Proposición. *Para que la serie $\sum z_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{z_n\} = 0$.*

7.8 Ejemplo (Serie geométrica). Dado $z \in \mathbb{C}$, la sucesión $\{1 + z + z^2 + \dots + z^n\}$ se llama serie geométrica de razón z . Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, z, z^2, z^3, \dots, z^n, \dots\}$. Es costumbre representar la serie geométrica de razón z con el símbolo $\sum_{n \geq 0} z^n$. Dicha serie converge si, y sólo si, $|z| < 1$, en cuyo caso su límite es igual a $\frac{1}{1-z}$.

Todas las afirmaciones hechas se deducen de que si $z \neq 1$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^n z^k = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z} \quad (7.2)$$

si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z^{n+1}}{1-z} = 0$ y obtenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$$

Si $|z| \geq 1$ entonces la sucesión $\{z^n\}$ no converge a 0, por lo que, en virtud de la proposición anterior, deducimos que la serie $\sum_{n \geq 0} z^n$ no converge. \blacklozenge

Antes de ver el siguiente ejemplo hay que precisar lo que se entiende por *sucesión divergente* porque este término se utiliza mal con frecuencia.

7.9 Definición (Sucesiones divergentes). Una sucesión de *números reales* $\{x_n\}$ se dice que es **positivamente divergente**, y escribimos $\lim\{x_n\} = +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m_K$ se verifica que $x_n \geq K$.

Una sucesión de *números reales* $\{x_n\}$ se dice que es **negativamente divergente**, y escribimos $\lim\{x_n\} = -\infty$, si $\{-x_n\} \rightarrow +\infty$.

Una sucesión de *números complejos* $\{z_n\}$ se dice que es **divergente**, y escribimos $\lim\{z_n\} = \infty$ si $\lim\{|z_n|\} = +\infty$.

7.10 Ejemplo (Serie armónica). Se llama así la serie de término general $1/n$; es decir, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 + 1/2 + \dots + 1/n\} = +\infty$$

En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\log n = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=1}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{1}{j} dx = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$$

y por tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{1 + 1/2 + \dots + 1/n\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \log n = +\infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

◆

7.11 Ejemplo (Serie armónica alternada). Se llama así la serie de término general $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$; es decir, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2$$

En efecto, sustituyendo z por $-x$ en la igualdad (7.2), obtenemos la siguiente igualdad válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \neq -1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} \quad (7.3)$$

integrando esta igualdad entre 0 y 1 tenemos que:

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

de donde

$$\left| \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \log 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = 0 \implies \log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

◆

El siguiente ejemplo te ayudará a entender el concepto de serie convergente.

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando *consecutivamente* los términos de la sucesión

$$\left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \dots \right\} \quad (7.4)$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{ 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \dots \right\} \quad (7.5)$$

Cuya serie asociada, obtenida sumando *consecutivamente* sus términos, es la sucesión $\{S_n\}$ dada por:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= 1 - \frac{1}{2} \\ S_3 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ S_4 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\ S_5 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\ S_6 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\ \dots &= \dots \\ S_9 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \\ \dots &= \dots \\ S_{3n} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} \right) \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 S_{3n} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j}
 \end{aligned}$$

Deducimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{1}{2} \log 2$$

Es claro que $\lim \{S_{3n} - S_{3n-1}\} = \lim \{S_{3n} - S_{3n-2}\} = 0$ de donde se sigue que $\lim \{S_n\} = \frac{1}{2} \log 2$. Es decir, hemos probado que la serie obtenida reordenando los términos de la serie armónica alternada por el criterio de sumar uno positivo seguido de dos negativos, es convergente y su suma es $\frac{1}{2} \log 2$.

Este ejemplo pone claramente de manifiesto que la *suma* de una serie convergente no es una suma en el sentido usual de la palabra, es decir, no es una suma algebraica de números. Observa que los conjuntos de números (7.4) y (7.5) son los mismos pero las series correspondientes tienen *distinta* suma; la primera tiene *suma* $\log 2$ y la segunda $\frac{1}{2} \log 2$. Si la suma de una serie consistiera en sumar los infinitos términos de una sucesión, entonces el orden en que los sumáramos sería indiferente porque la suma de números tiene la propiedad conmutativa. Debes tener claro, por tanto, que cuando calculas la suma de una serie no estás haciendo una suma infinita sino que estás calculando un *límite de una sucesión* cuyos términos se obtiene sumando consecutivamente los términos de otra sucesión dada. Insisto: calcular la suma de una serie no es una operación algebraica, no consiste en sumar infinitos términos, es un proceso analítico que supone un límite.

7.2.2.1. La particularidad del estudio de las series

Ahora viene la pregunta del millón: si las series no son nada más que sucesiones, ¿por qué dedicarles una atención especial? La respuesta a esta pregunta es que en el estudio de las series hay una *hipótesis implícita* que los libros silencian. A saber: se supone que las series son sucesiones demasiado difíciles de estudiar *directamente*. La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{S_n\} = \{z_1 + z_2 + \dots + z_n\}$, a partir del comportamiento de $\{z_n\}$; es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{S_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{z_n\}$. ¿Por qué esto es así?, ¿no sería más lógico, puesto que lo que queremos es estudiar la serie $\{S_n\}$, hacer hipótesis directamente sobre ella? La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ no es posible “realizarla”

en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión $\{z_n\}$ es el dato que podemos utilizar*. Naturalmente, esto hace que el estudio de las series se preste a muchas confusiones porque, aunque su objetivo es obtener propiedades de la serie $\{S_n\}$, las hipótesis hacen siempre referencia a la sucesión $\{z_n\}$. Si bien lo pensamos, esta forma de proceder no es del todo nueva. Ya estás acostumbrado a usar la derivada de una función para estudiar propiedades de la función; pues bien, la situación aquí es parecida: para estudiar la serie $\{z_1 + z_2 + \dots + z_n\}$ (la función) estudiamos la sucesión $\{z_n\}$ (la derivada). Un buen ejemplo de esto que digo son los siguientes criterios de convergencia.

7.2.3. Algunos criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*. Observa que una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente o es positivamente divergente.

Recuerda que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = x < 1$. Esto nos lleva a considerar, en el caso general de una serie de términos positivos $\sum a_n$, el comportamiento de la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)

Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que existe

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$$

Entonces se verifica que:

- a) Si $L < 1$ la serie $\sum a_n$ es convergente;
- b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Análogamente, puesto que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\sqrt[n]{a_n} = x < 1$, esto nos lleva, en el caso general de una serie de términos positivos $\sum a_n$, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)

Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geq 0$, y que existe

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces se verifica que:

- a) Si $L < 1$ la serie $\sum a_n$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Unas series de términos positivos muy importantes son las siguientes.

Series de Riemann

Dado un número real α , la serie $\{1 + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \dots + 1/n^\alpha\}$ se llama serie de Riemann de exponente α . Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

La importancia de las series de Riemann es consecuencia del siguiente criterio de convergencia.

Criterio límite de comparación

Dadas dos series de términos positivos $\sum a_n$ y $\sum b_n$, tales que $\{a_n/b_n\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ se verifica:

- Si $L = +\infty$ y $\sum b_n$ es divergente también $\sum a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum b_n$ es convergente también $\sum a_n$ es convergente.
- Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Los criterios anteriores pueden aplicarse para estudiar la **convergencia absoluta** de una serie. Precisemos este concepto.

7.12 Definición. Se dice que una serie de números complejos $\sum z_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de términos positivos $\sum |z_n|$ es convergente.

El siguiente resultado es muy importante en el estudio de las series.

7.13 Proposición. *Si una serie de números complejos $\sum z_n$ es absolutamente convergente entonces dicha serie también es convergente.*

De hecho, el concepto de convergencia absoluta de una serie es mucho más fuerte que el de convergencia. La serie armónica alternada es un ejemplo de serie convergente que no es absolutamente convergente.

Cuando una serie no es absolutamente convergente se utilizan los siguientes criterios para estudiar su convergencia.

7.14 Teorema. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos.*

Criterio de Dirichlet. *Si $\{a_n\}$ es monótona y converge a cero y la serie $\sum z_n$ tiene sumas parciales acotadas, entonces $\sum a_n z_n$ converge.*

Criterio de Abel. *Si $\{a_n\}$ es monótona y acotada y la serie $\sum z_n$ converge, entonces $\sum a_n z_n$ es convergente.*

Para estudiar la convergencia de una serie $\sum z_n$ de números complejos lo primero que debes hacer es estudiar la convergencia absoluta, es decir la convergencia de la serie de términos positivos $\sum |z_n|$, para lo que se aplican los criterios de convergencia para series de términos positivos. Si la serie $\sum |z_n|$ converge hemos acabado. Cuando la serie $\sum |z_n|$ no converge se aplican los criterios de Dirichlet o de Abel para estudiar directamente la convergencia de la serie $\sum z_n$.

7.2.4. Ejercicios

1. Estudia la convergencia de las sucesiones:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & z_n = \sqrt[n]{n} + i n a^n \quad (a \in \mathbb{R}, |a| < 1) \\ \text{ii)} & z_n = \frac{2^n}{n} + \frac{i n}{2^n} \\ \text{iii)} & z_n = \sqrt[n]{a} + i \operatorname{sen} \frac{1}{n} \quad (a > 0) \\ \text{iv)} & z_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n} + 5 i \cos \frac{1}{n} \\ \text{v)} & z_n = \left(\frac{1+i}{2} \right)^n \\ \text{vi)} & z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \end{array}$$

2. Sea $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos no nulos y para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $\varphi_n \in \operatorname{Arg}(z_n)$. Supongamos que $\{\varphi_n\} \rightarrow \varphi$ y $\{|z_n|\} \rightarrow \rho$. Justifica que la sucesión $\{z_n\} \rightarrow \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$.

3. Calcula el límite de la sucesión $z_n = \left(1 + \frac{\sqrt{2} + i \frac{\pi}{3}}{n} \right)^n$.

Sugerencia: Expresa $z_n = |z_n|(\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n)$ y usa el ejercicio anterior.

4. Calcula el límite de la sucesión $z_n = n \left(\sqrt[n]{2} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n} \right) - 1 \right)$.

Sugerencia: Recuerda que el límite de la sucesión $n(\sqrt[n]{2} - 1)$ es bien conocido.

5. Sea $z \in \mathbb{C}$, con $|z| = 1$, $z \neq 1$. Prueba que la sucesión $\{z^n\}$ no converge (¿qué pasa si supones que converge?). Deduce que si φ es un número real que no es un múltiplo entero de π , las sucesiones $\{\cos(n\varphi)\}$ y $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ no convergen.

6. Explica lo que quiere decir la igualdad siguiente.

$$x = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k\pi x)}{k\pi} \quad \text{para todo } x \in]0, 1[$$

7. Estudia la convergencia de las series:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1+i)^n} \\ \text{ii)} & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n} \\ \text{iii)} & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n + i \operatorname{sen} n}{n^2} \\ \text{iv)} & \sum_{n \geq 1} \frac{\cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}}{n} \\ \text{v)} & \sum_{n \geq 1} \frac{(2+i)^n}{(1+2i)^n} \frac{1}{n} \\ \text{vi)} & \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n \\ \text{vii)} & \sum_{n \geq 1} \left(\cos \frac{\pi}{n^2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n^2} \right) \\ \text{viii)} & \sum_{n \geq 0} \frac{(3+4i)^n}{2i(4+3i)^n + 7} \end{array}$$

8. Sea $\rho \in \mathbb{R}$ con $|\rho| < 1$ y $\vartheta \in \mathbb{R}$. Calcula los límites $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos(n\vartheta)$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sin(n\vartheta)$.

9. Estudia la convergencia absoluta de las siguientes series.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} z^n & \text{c)} \sum_{n \geq 1} n^\alpha z^n \\ \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (3n+1)}{5 \cdot 10 \cdots 5n} z^n & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{1 + 1/2 + \cdots + 1/n} \end{array}$$

Estudia en los casos c) y f), el comportamiento de la serie en los puntos de la circunferencia unidad.

7.3. Funciones complejas

Las funciones complejas no son más que las funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^2 con valores en \mathbb{R}^2 cuando en \mathbb{R}^2 consideramos su estructura compleja. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, a toda función compleja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ se le asocian dos funciones reales: la función $u = \operatorname{Re} f$ “parte real de f ” y la función $v = \operatorname{Im} f$ “parte imaginaria de f ” definidas para todo $(x, y) = x + iy \in A$ por:

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

Naturalmente, $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)$.

7.3.1. La función exponencial

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Pues bien se puede probar con facilidad que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + iy}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$e^{x+iy} = \exp(x + iy) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x + iy}{n} \right)^n = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Observa que

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \quad \operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z)$$

En particular, obtenemos la llamada *fórmula de Euler*:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad (\text{para todo } t \in \mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas *ecuaciones de Euler*:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ para todos $z, w \in \mathbb{C}$. Se deduce que para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $k \in \mathbb{Z}$ es

$$e^z = e^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función **periódica** con período $2\pi i$. Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva. Observa que la exponencial no se anula nunca pues $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$.

7.3.2. Logaritmos complejos

Dado un número complejo $z \neq 0$, hay infinitos números complejos w que satisfacen la ecuación $e^w = z$. Cualquiera de ellos se llama **un logaritmo** de z . El conjunto de todos ellos lo representaremos por $\operatorname{Log} z$ y es el conjunto:

$$\operatorname{Log} z = \{\log |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

De entre todos ellos elegimos uno, llamado **logaritmo principal**, definido por

$$\log z = \log |z| + i \arg(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}^*$$

Observa que cualquier otro logaritmo de z es de la forma $\log(z) + i2k\pi$ para algún entero k . Es importante que observes que la igualdad

$$\log z w = \log z + \log w$$

que es válida para los logaritmos de los números reales positivos, no es siempre cierta para números complejos. Por ejemplo:

$$\log(e^{i2\pi/3}) = i\frac{2\pi}{3}, \quad \log(e^{i3\pi/4}) = i\frac{3\pi}{4}, \quad \log(e^{i2\pi/3} e^{i3\pi/4}) = \log(e^{i17\pi/12}) = \log(e^{-i7\pi/12}) = -i\frac{7\pi}{12}$$

Lo que está claro es que el número $\log z + \log w \in \operatorname{Log}(zw)$, es decir, $\log z + \log w$ es **un** logaritmo de zw pero no tiene por qué ser el logaritmo **principal** de zw .

7.3.3. Potencias complejas

Recuerda que dados dos números reales $a > 0$ y $b \in \mathbb{R}$, la potencia de base a y exponente b se define como $a^b = e^{b \log a}$. Ahora, dados $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, sabemos que hay infinitos logaritmos de a , todos ellos son de la forma $\log a + i2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por ello, cualquier número complejo de la forma $e^{b(\log a + i2k\pi)}$ donde $k \in \mathbb{Z}$, es **una** potencia de base a y exponente b . Representamos por $[a^b]$ el conjunto de todas ellas.

$$[a^b] = \{e^{b(\log a + i2k\pi)} : k \in \mathbb{Z}\}$$

Se destaca una:

$$a^b = e^{b \log a}$$

que se llama **valor principal** de la potencia de base a y exponente b . Observa que si $b = 1/n$ donde $n \in \mathbb{N}$, el número

$$a^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \log a\right) = \exp\left(\frac{\log a}{n} + i \frac{\arg a}{n}\right) = |z|^{1/n} \left(\cos \frac{\arg a}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\arg a}{n}\right)$$

es el valor principal de la raíz n -ésima de a que antes hemos notado por $\sqrt[n]{a}$.

7.3.4. Ejercicios

1. Expresa los 8 números $\pm 1 \pm i$, $\pm \sqrt{3} \pm i$ en la forma $r e^{i\varphi}$.
2. Calcula el módulo y los argumentos principales de los números $1 + e^{i\varphi}$, $1 - e^{i\varphi}$, $-a e^{i\varphi}$, donde $|\varphi| \leq \pi$ y $a > 0$.
3. Calcula $\log z$ y $\operatorname{Log} z$ cuando z es uno de los números siguientes i , $-i$, e^{-3} , e^{5i} , 4 , $-5e$, $1 + i$.
4. Calcula $\log(3i) + \log(-1 + i\sqrt{3})$ y $\log(3i(-1 + i\sqrt{3}))$. Calcula $\log(-1 - i) - \log i$ y $\log\left(\frac{-1 - i}{i}\right)$.
5. Calcula $[(-4)^i]$, i^{-3i} , $[i^{2/\pi}]$, $[i^i]$, 1^{2i} , 3^{1-i} , $((-i)^i)^i$, $(1 + i)^{1+i}$.
6. Estudia, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$, las igualdades:
 a) $\log(\exp(z)) = z$; b) $\exp(\log(z)) = z$; c) $\log(\sqrt[n]{z}) = \frac{\log(z)}{n}$; d) $\log(z^n) = n \log(z)$.
7. Explica dónde está el error en las igualdades siguientes: $i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i$.

Lección 8

Conceptos básicos de la teoría de Series de Fourier

8.1. Análisis y síntesis

Esencialmente la teoría de Series de Fourier persigue dos propósitos:

- El **análisis** o descomposición de una señal como suma o superposición (en general infinita) de sinusoides.
- La **síntesis** o recomposición de una señal a partir de sus sinusoides.

Habrás notado que estoy empleando la palabra “señal” como sinónimo de “función” y así lo seguiré haciendo a lo largo de esta lección con las precisiones que considere necesarias. En análisis armónico las señales más simples son las sinusoides a las que nos hemos referido antes. Conviene darles un repaso.

8.1.1. Sinusoides

Una senoide es una señal de la forma

$$A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

El número $A > 0$ es la *amplitud*, $\nu > 0$ es la *frecuencia* medida en ciclos por segundo o Hercios (Hz), $-\pi < \phi \leq \pi$ es la *fase* (fase inicial), $\omega = 2\pi\nu$ es la frecuencia medida en radianes por segundo (que se llama a veces frecuencia angular). El *período* es el tiempo que necesita la senoide para completar un ciclo completo, es decir, el período es $T = 1/\nu$ segundos.

$$A \operatorname{sen}(2\pi\nu(t + 1/\nu) + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + 2\pi + \phi) = A \operatorname{sen}(2\pi\nu t + \phi).$$

En general, una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es *periódica* con *período* T si $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En tal caso cualquier múltiplo entero de T es también un período de f , esto es, $f(t + kT) = f(t)$ para

todo $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$. Por convenio, una función constante se considera periódica con cualquier período. Salvo este caso, cuando se dice que una función es periódica de período T se sobreentiende que T es el número positivo más pequeño que verifica la igualdad $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

En la representación gráfica de la señal $f(t) = A \operatorname{sen}(2\pi \nu t + \phi)$ se interpreta $f(t)$ como la amplitud de la señal en el instante t . La amplitud A representa la máxima altura que alcanza dicha gráfica, esto es, el máximo absoluto de la función f (el mínimo absoluto es $-A$). La frecuencia es el número de veces (ciclos) que se repite la gráfica en un segundo. El período es el tiempo necesario para que la gráfica complete un solo ciclo.

8.2. Polinomios trigonométricos y coeficientes de Fourier

Un polinomio trigonométrico de orden N es una función de la forma

$$\sum_{n=0}^N A_n \operatorname{sen}(2n\pi t/T + \phi_n) \quad (8.1)$$

En una suma de este tipo el número T es el *período fundamental* y $\nu = 1/T$ es la *frecuencia fundamental* (en hercios). A cada uno de los sumandos individuales, cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia principal, se les llama *armónicos*. Esta forma de una suma trigonométrica tiene la ventaja de mostrar explícitamente la amplitud y la fase de cada uno de ellos pero es muy incómoda para los cálculos. Por ello es más frecuente escribir esta suma en la forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \operatorname{sen}(2\pi n t/T)) \quad (8.2)$$

la razón de escribir el término constante en la forma $a_0/2$ es para simplificar las fórmulas de los coeficientes que veremos en seguida.

Se trabaja con mucha más comodidad con estas sumas si usamos la exponencial compleja. Usando las ecuaciones de Euler tenemos que:

$$\cos(2\pi n t/T) = \frac{e^{2\pi i n t/T} + e^{-2\pi i n t/T}}{2}, \quad \operatorname{sen}(2\pi n t/T) = \frac{e^{2\pi i n t/T} - e^{-2\pi i n t/T}}{2i}$$

con ello la suma (8.2) puede ser escrita como:

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T} \quad (8.3)$$

La relación entre estas tres formas distintas de escribir una misma función viene dada por las siguientes igualdades válidas para todo $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \quad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2} \quad (8.4)$$

$$a_n = A_n \operatorname{sen} \phi_n \quad b_n = A_n \cos \phi_n \quad (8.5)$$

Supongamos que f es una señal que podemos representar como un polinomio trigonométrico con periodo T :

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T}$$

entonces se verifica que los coeficientes en esta expresión están determinados de forma única por f y vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} f(t) dt$$

Las consideraciones anteriores motivan a las siguientes definiciones.

8.1 Definición. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una señal de periodo T integrable en $[0, T]$. Se definen los *coeficientes de Fourier* de f por:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-2\pi i n t/T} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (8.6)$$

El polinomio trigonométrico:

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{2\pi i n t/T} \quad (8.7)$$

donde los coeficientes c_n vienen dados por (8.6), se llama *polinomio de Fourier de orden N* de f . La sucesión de los polinomios de Fourier de f se llama *serie de Fourier* de f y la representamos por $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t/T}$. Cuando dicha serie converge escribimos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/T}$$

Teniendo en cuenta 8.4 se deduce que las igualdades 8.6 y 8.7 pueden escribirse de forma equivalente:

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(2\pi n t/T) + b_n \sen(2\pi n t/T)) \quad (8.8)$$

donde:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T \cos(2\pi n t/T) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \sen(2\pi n t/T) f(t) dt \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

Los a_n se llaman *coeficientes coseno* y los b_n *coeficientes seno* de f .

8.2.1. Observaciones

- También se utilizan las notaciones $c_n(f)$ y $\hat{f}(n)$ para representar los coeficientes de Fourier c_n de f .

- Para calcular los coeficientes de Fourier de una señal de periodo T podemos integrar en cualquier intervalo de longitud T . Suele ser frecuente, por razones de simetría, elegir el intervalo $[-T/2, T/2]$.
- Observa que nada hemos dicho aún sobre la relación entre una función f y su serie de Fourier. La pregunta ¿de qué modo la serie de Fourier de f representa a f ? no tiene una respuesta fácil porque tiene muchas respuestas. Mas adelante presentaremos algunos resultados en este sentido.
- Observa que si cambias una función en un número finito de puntos esto no afecta para nada a sus coeficientes de Fourier los cuales viene dados por medio de integrales. Igualmente, tampoco debe preocuparnos que una función no esté definida en un conjunto finito de puntos porque eso no afecta para nada a su integrabilidad ni al valor de su integral.
- A diferencia de la serie de Taylor de una función, la cual solamente está definida si dicha función es indefinidamente derivable, la única condición para que la serie de Fourier de una función esté definida es que la función sea integrable en un intervalo. Te recuerdo que hay funciones integrables con infinitas discontinuidades. Es decir, el concepto de serie de Fourier es mucho menos restrictivo que el de serie de Taylor y esa es una de las grandes ventajas de la teoría de series de Fourier: puede aplicarse a funciones muy generales.
- En contra de lo que pudiera parecer a primera vista, la hipótesis de periodicidad no es restrictiva para la aplicación de la teoría de series de Fourier.

En efecto, si queremos representar una función f en un intervalo $[a, b]$ por medio de una serie de Fourier, lo único que se necesita es que dicha función esté definida y sea integrable en dicho intervalo. En tal caso la serie de Fourier $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t / (b-a)}$ cuyos coeficientes son

$$c_n = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{-2\pi i n t / (b-a)} f(t) dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

representa (cuando se dan las condiciones de convergencia apropiadas) una función periódica de periodo $b-a$ que coincide con f en el intervalo $]a, b[$.

Podemos considerar esto desde otro punto de vista. Si estamos interesados en representar por medio de una serie de Fourier una función f definida e integrable en un intervalo $[a, b]$ podemos *extender* dicha función a todo \mathbb{R} de manera que la extensión sea una función periódica de período $T = b-a$. Para ello basta repetir la gráfica de f en intervalos de longitud $T = b-a$ (si $f(b) = f(a+T) \neq f(a)$ será preciso cambiar el valor de f en uno de los extremos del intervalo $[a, b]$).

Debes tener en cuenta que en los ejercicios suele definirse una función en un intervalo $[a, b]$ y se dice que dicha función *se considera extendida por periodicidad* fuera de dicho intervalo. *Pero esto último casi nunca se hace* por lo que, para calcular los coeficientes de Fourier debes integrar la función en el intervalo $[a, b]$ donde dicha función se define y no en otro.

- La consideración de funciones complejas, si bien desde un punto de vista teórico no presenta ninguna dificultad e incluso hace que la teoría sea más elegante y fácil de desarrollar, desde un punto de vista práctico no añade nada pues en las aplicaciones siempre se consideran señales reales.

8.2.2. Ejemplos

8.2 Ejemplo. Calcular la serie de Fourier de la función 2π -periódica

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < -\pi/2 \\ 1, & \text{si } -\pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

De acuerdo con la definición de los coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} dx = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n\pi} \Big|_{x=-\pi/2}^{x=\pi} = \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n\pi} = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{-\cos(nx)}{n\pi} \Big|_{x=-\pi/2}^{x=\pi} = \frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi/2)}{n\pi} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n\pi}[-1 + (-1)^{n/2}] & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto la serie de Fourier de f es

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\cos(x) + \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(2x) - \frac{1}{3} \cos(3x) + \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3x) + \dots \right) = \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \left((-1)^{n-1} \cos((2n-1)x) + \operatorname{sen}((2n-1)x) - \operatorname{sen}((4n-2)x) \right) \end{aligned}$$



8.3 Ejemplo. Sea $f: [4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 4 < x \leq 5 \\ 2, & \text{si } 5 < x \leq 6 \end{cases}$$

Vamos a calcular sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \int_4^5 dx + \int_5^6 2 dx = 3$$

Para $n \geq 1$:

$$a_n = \int_4^5 \cos(n\pi x) dx + \int_5^6 2 \cos(n\pi x) dx = 0,$$

y

$$b_n = \int_4^5 \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_5^6 2 \operatorname{sen}(n\pi x) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{-2}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto la serie de Fourier de f es

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}((2n-1)\pi x)$$

◆

8.4 Ejemplo (Función impulso rectangular). Se llaman *impulsos rectangulares* las señales que son nulas salvo en un determinado intervalo de tiempo en el que son constantes. El ejemplo típico es la función $\Pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con más generalidad, dado un número $a > 0$ podemos considerar la función Π_a definida por $\Pi_a(x) = \Pi(x/a)$, con lo que

$$\Pi_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < a/2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado un número $T > a$ podemos considerar la extensión periódica de Π_a con periodo T cuya gráfica es de la forma

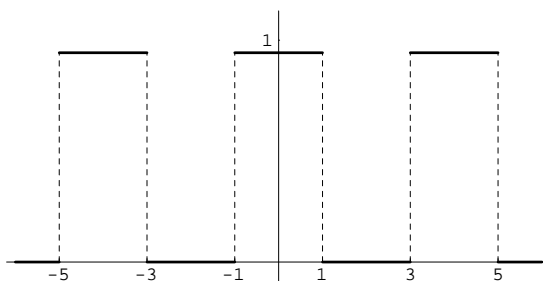


Figura 8.1: Periodización con periodo 4 de Π_2

Llamemos f a dicha función. Los coeficientes de Fourier de f son

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i n t/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-2\pi i n t/T} dt = \frac{-1}{2\pi i n} \left[e^{-2\pi i n t/T} \right]_{t=-a/2}^{t=a/2} = \\ &= \frac{-1}{\pi n} \left(\frac{e^{-\pi i n a/T} - e^{\pi i n a/T}}{2i} \right) = \frac{\operatorname{sen}(\pi n a/T)}{\pi n} \end{aligned}$$

para n distinto de cero, y

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-a/2}^{a/2} 1 dt = \frac{a}{T}.$$

◆

8.5 Ejemplo (Función triangular). La función “triangular” es la función $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{para } |x| > 1. \end{cases}$$

Con más generalidad, dado un número $a > 0$ podemos considerar la función Λ_a definida por $\Lambda_a(x) = \Lambda(x/a)$, con lo que

$$\Lambda_a(x) = \begin{cases} 1 - \left| \frac{x}{a} \right|, & \text{si } |x| \leq a \\ 0, & \text{para } |x| > a. \end{cases}$$

Dado un número $T > 0$ podemos considerar la extensión periódica de Λ_a con periodo T .

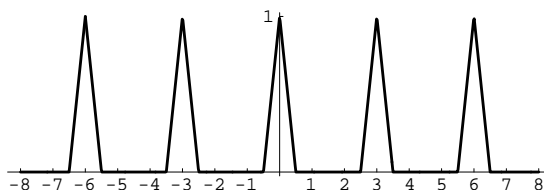


Figura 8.2: Periodización de periodo 3 de $\Lambda_{1/2}$

Calculemos sus coeficientes de Fourier.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \int_{-a}^0 \left(1 + \frac{t}{a}\right) e^{-2\pi i n t / T} dt + \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) e^{-2\pi i n t / T} dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right) \cos(2\pi n t / T) dt = \frac{2}{T} \frac{T}{2\pi n} \left(\left[\left(1 - \frac{t}{a}\right) \operatorname{sen}(2\pi n t / T) \right]_{t=0}^{t=a} + \frac{1}{a} \int_0^a \operatorname{sen}(2\pi n t / T) dt \right) = \\ &= \frac{T(1 - \cos(2\pi n a / T))}{2\pi^2 n^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2(\pi n a / T)}{\pi^2 n^2 a / T}. \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{a}{T}.$$

◆

8.2.3. Series de Fourier seno y coseno

Los coeficientes seno de una función par son nulos y los coeficientes coseno de una función impar son nulos. Esto lleva a definir las series de Fourier seno y coseno de una función como sigue.

Sea f una función definida e integrable en el intervalo $[0, L]$. Podemos extender f al intervalo $[-L, L]$ de las formas siguientes:

$$f_1(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

y

$$f_2(x) = \begin{cases} f(-x), & -L \leq x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Es claro que f_1 es impar y f_2 es par y coinciden con f en $[0, L]$. La función f_1 es llamada la *extensión impar* de f y f_2 es llamada la *extensión par* de f .

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_1 se llama la *serie de Fourier seno* de f y viene dada por:

$$\sum_{n \geq 1} b_n \text{sen}(\pi n t/L), \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{sen}(\pi n t/L) dt$$

- La serie de Fourier de la extensión de período $2L$ de f_2 se llama la *serie de Fourier coseno* de f y viene dada por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \text{cos}(\pi n t/L), \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \text{cos}(\pi n t/L) dt$$

8.2.4. Convergencia de las series de Fourier

Una función f se dice que es *continua a trozos* en un intervalo $[a, b]$ si hay una partición $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que

- f es continua en cada intervalo $]x_i, x_{i+1}[$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, y
- f tiene límites laterales en los puntos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Diremos que una función f es *derivable a trozos* en un intervalo $[a, b]$ si hay una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ del intervalo $[a, b]$ de forma que

- f es derivable en cada intervalo $]t_i, t_{i+1}[$, para $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$, y
- La función derivada f' tiene límites laterales en los puntos t_i , $i = 0, 1, \dots, m$.

Diremos que una función es *suave a trozos* en un intervalo $[a, b]$ si es derivable a trozos en dicho intervalo y su derivada es continua a trozos.

Toda función derivable a trozos en un intervalo también es continua a trozos en dicho intervalo. Las funciones continuas a trozos en un intervalo son integrables en dicho intervalo. Además, la integral la podemos calcular como suma de integrales en cada uno de los intervalos donde la función es continua.

El siguiente resultado nos dice que en condiciones razonablemente generales la serie de Fourier de una función converge puntualmente a dicha función.

8.6 Teorema (Riemann, Dirichlet). Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una señal periódica con período T derivable a trozos en $[0, T]$. Entonces se verifica que:

- En todo punto $t \in \mathbb{R}$ donde f sea continua

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/T} = f(t)$$

2. Si f no es continua en un punto t entonces se verifica que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t / T} = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

donde $f(t+)$ y $f(t-)$ son, respectivamente, los límites por la derecha y por la izquierda de f en t .

En particular, una función continua y derivable a trozos está determinada de manera única por su serie de Fourier.

8.2.5. Ejercicios

- Sea $f(t) = \sin(t/3) + \sin(t/4)$. ¿Es f periódica? En caso afirmativo, ¿cuál es su período?
 - Sea $f(t) = \sin(\lambda t) + \sin(\mu t)$. Prueba que para que f sea periódica es necesario y suficiente que λ/μ sea un número racional.
 - ¿Es periódica la función $f(t) = \sin(10t) + \sin((10 + \pi)t)$?
- Considera las distintas formas de escribir la serie de Fourier de una función real periódica de período 1:

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t) \\ & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t} \\ & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi n t + \phi_n) \end{aligned}$$

Indica con detalle cómo se pasa de una a otra, es decir, las relaciones que hay entre los distintos coeficientes.

- Sea f una señal derivable a trozos, c_n sus coeficientes de Fourier, a_n s y b_n sus coeficientes coseno y seno respectivamente. Justifica las siguientes afirmaciones:
 - f es real $\iff c_{-n} = \overline{c_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\iff a_n \in \mathbb{R}, b_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$)
 - f es par $\iff c_{-n} = c_n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\iff b_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$)
 - f es impar $\iff c_{-n} = -c_n$ ($n \in \mathbb{N}$) $\iff a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}$)
 - f real y par $\iff c_{-n} = c_n \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$)
 - f real e impar $\iff c_{-n} = -c_n \in i\mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$)

- Da una demostración aceptable de la **igualdad de Parseval**:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

- Prueba que si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función suave a trozos con periodo 2π se verifica que $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. En otros términos: la serie de Fourier de la derivada de f se obtiene derivando término a término la serie de Fourier de f .

6. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica y suave a trozos. Definamos $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $G(x) = F(x) - \hat{f}(0)x$, es periódica y expresa sus coeficientes de Fourier por medio de los de f .

7. Calcula las series de Fourier de las extensiones periódicas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ \pi, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

8. Calcula la serie de Fourier coseno de la función $f(x) = x$ para $x \in [0, \pi]$.

9. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = 1$ para $x \in [0, \pi]$.

10. Calcula la serie de Fourier seno de la función $f(x) = \cos x$ para $x \in [0, \pi]$.

11. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Si los coeficientes de Fourier de una señal f son c_n , ¿cuáles son los coeficientes de Fourier de la señal trasladada $g(t) = f(t - a)$? ¿Y los de la señal $h(t) = f(at)$?

12. Calcula las series de Fourier de las funciones $|\sin t|$ y $|\cos t|$.

13. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 1 dada por $f(t) = t$ para $0 \leq t < 1$ y $f(t+1) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

14. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2π dada por $f(t) = t^2$ para $-\pi \leq t \leq \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

15. Usando el desarrollo en serie de Fourier de la función de período 2 dada por $f(t) = |t|$ para $-1 \leq t \leq 1$ y $f(t+2) = f(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, justifica la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

16. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \notin \mathbb{Z}$, se define la función de período 2 $f(t) = e^{i\pi at}$ para $-1 \leq t < 1$ y $f(t) = f(t+2)$. Calcula la serie de Fourier de f y utiliza la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)}$$

17. Sea $f(x) = x(1-x)$, ($0 \leq x \leq 1$) y consideremos la extensión impar de f de período 2.

a) Calcula la serie de Fourier seno de f .

b) Justifica que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

c) Calcula la serie de Fourier coseno de $f'(x) = 1 - 2x$, ($0 \leq x \leq 1$); y la serie de Fourier de $f''(x) = -2$.

d) deduce que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

8.3. Geometría de las series de Fourier

La teoría de las series de Fourier está estrechamente relacionada con los aspectos algebraicos y geométricos de los espacios euclídeos. Lo característico de la geometría euclídea es el concepto de ortogonalidad o perpendicularidad y sus consecuencias.

8.7 Definición. Representaremos por $L^2(a, b)$ el espacio de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ que son periódicas con periodo $b-a$ y de cuadrado integrable en $[a, b]$. Este conjunto con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por escalares complejos es un espacio vectorial complejo.

Para todo par de funciones $f, g \in L^2(a, b)$ definimos su producto escalar por:

$$(f | g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad (8.11)$$

y definimos la norma de $f \in L^2(a, b)$ por:

$$\|f\| = \sqrt{(f | f)} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad (8.12)$$

8.8 Definición. Dos funciones $f, g \in L^2(a, b)$ se llaman ortogonales si $(f | g) = 0$ en cuyo caso escribimos $f \perp g$. Un conjunto de funciones $\mathcal{B} \subset L^2(a, b)$ se dice ortogonal si para cada par de elementos distintos $f, g \in \mathcal{B}$ se tiene que $f \perp g$. Si, además para toda función $f \in \mathcal{B}$ es $\|f\| = 1$ se dice que \mathcal{B} es un conjunto ortonormal de funciones. Un conjunto ortonormal, \mathcal{B} , con la propiedad de que la única función que es ortogonal a todas las funciones del mismo es la función nula, se llama una **base ortonormal**.

8.9 Ejemplo. En el espacio $L^2(0, T)$ un ejemplo de base ortonormal de funciones especialmente importante es la formada por las exponenciales complejas:

$$\mathcal{E} = \left\{ e^{2\pi i n t/T} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Otro ejemplo de base ortonormal es la formada por las funciones trigonométricas:

$$\mathcal{T} = \left\{ 1, \sqrt{2} \cos(2n\pi t/T), \sqrt{2} \sin(2n\pi t/T) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

De hecho, tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(2n\pi t/T) \cos(2m\pi t/T) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2n\pi t/T) \sin(2m\pi t/T) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(2n\pi t/T) \cos(2m\pi t/T) dt = 0 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$$



8.10 Proposición. Supongamos que $\mathcal{B} = \{e_k : 1 \leq k \leq n\}$ es un conjunto de n funciones ortonormales en $L^2(a, b)$ y sea \mathcal{M} el subespacio vectorial engendrado por \mathcal{B} . Dada una función $f \in L^2(a, b)$ la función:

$$P_{\mathcal{M}}(f) = \sum_{j=1}^n (f | e_j) e_j$$

se llama la **proyección ortogonal** de f sobre \mathcal{M} y tiene las propiedades siguientes:

1. $P_{\mathcal{M}}(f) \in \mathcal{M}$.
2. $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a \mathcal{M} .
3. $\min \{\|f - g\| : g \in \mathcal{M}\} = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|$

Demostración. La primera afirmación es evidente porque por su definición $P_{\mathcal{M}}(f)$ es combinación lineal de los vectores e_k que forman una base de \mathcal{M} .

Para probar la segunda afirmación basta observar que:

$$(f - P_{\mathcal{M}}(f) | e_k) = (f | e_k) - \sum_{j=1}^n (f | e_j) (e_j | e_k) = (f | e_k) - (f | e_k) = 0$$

lo que prueba que $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ es ortogonal a los vectores e_k y, por tanto, también es ortogonal a cualquier combinación lineal de ellos, es decir, a cualquier vector de \mathcal{M} .

Para probar el punto 3 basta observar que para toda $g \in \mathcal{M}$ se verifica que los vectores $f - P_{\mathcal{M}}(f)$ y $P_{\mathcal{M}}(f) - g$ son ortogonales, por lo que:

$$\|f - g\|^2 = \|(f - P_{\mathcal{M}}(f)) + (P_{\mathcal{M}}(f) - g)\|^2 = \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2 + \|P_{\mathcal{M}}(f) - g\|^2 \geq \|f - P_{\mathcal{M}}(f)\|^2$$

Deducimos que $\|f - P_{\mathcal{M}}(f)\| \leq \|f - g\|$ y que la igualdad se da si, y sólo si, $g = P_{\mathcal{M}}(f)$. □

Particularicemos el resultado anterior al espacio $L^2(0, T)$ cuando se consideran conjuntos ortonormales particulares.

Dado $N \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto ortonormal

$$\mathcal{E}_N = \left\{ e^{2\pi i n t/T} : -N \leq n \leq N \right\}$$

En este caso, representando por \mathbf{e}_n la función $t \mapsto e^{2\pi i n t/T}$, esto es $\mathbf{e}_n(t) = e^{2\pi i n t/T}$, la proyección ortogonal de f sobre \mathcal{E}_N es la función

$$\sum_{k=-N}^N (f | \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_k(t) = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t) \overline{\mathbf{e}_k(t)} dt \right) \mathbf{e}_k(t) = \sum_{k=-N}^N \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t) e^{-2\pi i k t/T} dt \right) e^{2\pi i k t/T} = \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k t/T}$$

Donde los coeficientes c_k viene dados por (8.6). Pero esta función es justamente el polinomio de Fourier (8.7) de orden N de f .

Dado $N \in \mathbb{N}$, consideremos el conjunto ortonormal

$$\mathcal{T}_N = \left\{ 1, \sqrt{2} \cos(2\pi n t/T), \sqrt{2} \sin(2\pi n t/T) : -N \leq n \leq N \right\}$$

En este caso, poniendo por $\mathbf{u}_n(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi n t/T)$ y $\mathbf{v}_n(t) = \sqrt{2} \sin(2\pi n t/T)$, tenemos que la proyección ortogonal de f sobre \mathcal{T}_N es la función

$$\begin{aligned} & (f | 1) + \sum_{n=1}^N (f | \mathbf{u}_n) \mathbf{u}_n(t) + \sum_{n=1}^N (f | \mathbf{v}_n) \mathbf{v}_n(t) = \\ & = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt + \sum_{n=1}^N \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t) \sqrt{2} \cos(2\pi n t/T) dt \right) \sqrt{2} \cos(2\pi n t/T) + \\ & + \sum_{n=1}^N \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t) \sqrt{2} \sin(2\pi n t/T) dt \right) \sqrt{2} \sin(2\pi n t/T) = \\ & = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi n t/T) + \sum_{n=1}^N b_n \sin(2\pi n t/T) \end{aligned}$$

Donde los coeficientes a_n, b_n viene dados por (8.9) y (8.10). Pero esta función es justamente el polinomio de Fourier (8.8) de orden N de f .

El siguiente resultado es uno de los más notables de la teoría de series de Fourier.

8.11 Teorema (Teorema de Riesz-Fisher). Para toda función $f \in L^2(a, b)$ se verifica que su serie de Fourier converge a f en la norma de $L^2(a, b)$:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k t/(b-a)} \right\| = 0 \iff \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=-N}^N c_k e^{2\pi i k t/(b-a)} \right|^2 dt = 0.$$

La convergencia en la norma de $L^2(a, b)$ se llama *convergencia en media cuadrática*. Terminaremos esta sección con un resultado muy útil conocido con el nombre de "igualdad de Parseval".

8.12 Proposición (Igualdad de Parseval). Para toda función $f \in L^2(a, b)$ se verifica que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{8.13}$$

La igualdad de Parseval 8.13 tiene una interpretación interesante. El número $|c_n|^2$ se interpreta como la energía del armónico $c_n e^{i n t}$, mientras que la integral $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$ se interpreta como la energía de la señal (en este sentido se dice que las funciones de $L^2(-\pi, \pi)$ tienen energía finita). La igualdad de Parseval expresa, pues, que la energía de la señal es igual a la suma de las energías de sus armónicos componentes.

8.3.1. Suavidad de una señal y convergencia de su serie de Fourier

La primera afirmación del siguiente resultado es consecuencia directa de la igualdad de Parseval.

8.13 Proposición. Sean $\{c_n\}$ los coeficientes de Fourier de una función f .

1. Si f es una función de cuadrado integrable, en particular si es continua a trozos, se verifica que $\lim\{c_n\} = 0$.
2. Si f tiene $k - 1$ derivadas continuas y tiene derivada de orden k continua a trozos entonces se verifica que $\lim n^k c_n = 0$.

8.3.2. Espectro, dominio del tiempo y dominio de la frecuencia

Una señal analógica dada por medio de una función $f(t)$ se dice que está dada en *el dominio del tiempo*. Supongamos que dicha señal es T -periódica y derivable a trozos, entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t/T}$$

en todo punto de continuidad de f . Las frecuencias de los armónicos complejos que forman esta serie son n/T . El *espectro* de f se define como el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. El conocimiento del espectro de la señal determina a dicha señal. Podemos considerar una función \hat{f} definida en el conjunto de las frecuencias $\{n/T : n \in \mathbb{Z}\}$ por $\hat{f}(n/T) = c_n$. Se suele decir que dicha función representa a la señal f en el *dominio de la frecuencia*. La “gráfica” de la función $|\hat{f}|$ se llama el *espectro de amplitudes*, y la “gráfica” de la función $\arg \hat{f}$ se llama el *espectro de fases*.

Recuerda que si la serie de Fourier la escribimos en la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(2n\pi v t + \phi_n)$$

donde $A_n \geq 0$ es la amplitud del armónico n -ésimo y ϕ_n es su fase, entonces, en virtud de las igualdades 8.4 y 8.5, se verifica que $c_n = \frac{-j}{2} A_n e^{i\phi_n} = \frac{1}{2} A_n e^{i(\phi_n - \pi/2)}$; y eligiendo $\phi_n \in]-\pi/2, 3\pi/2]$ resulta que $\phi_n - \pi/2 = \arg(c_n)$, lo que justifica la terminología empleada. Ten en cuenta que para una señal real se verifica siempre que $c_n = \overline{c_{-n}}$ lo que explica el aspecto de las siguientes “gráficas”. El espectro

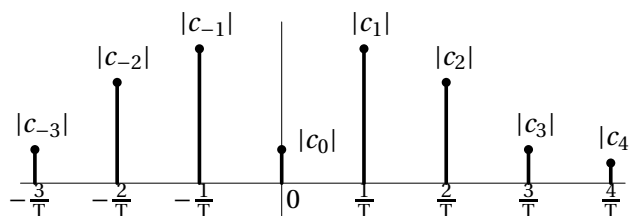


Figura 8.3: Espectro de amplitudes

de amplitudes consiste en líneas espectrales regularmente espaciadas en las frecuencias n/T . Para

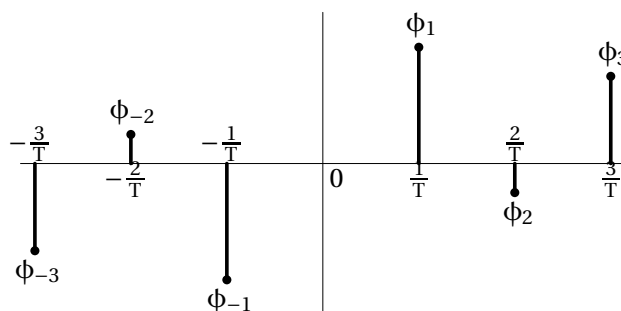


Figura 8.4: Espectro de fases

$n = 1$ y $n = -1$ las líneas corresponden a la *frecuencia fundamental*. Las demás líneas son llamadas *armónicos* de la señal.

Lo interesante de estas representaciones es que para manipular una señal analógica es más fácil hacerlo en el dominio de la frecuencia. Por ejemplo, si la señal es un sonido las frecuencias bajas corresponden a los tonos graves y las altas a los agudos, mientras que las amplitudes representan la intensidad del sonido del armónico correspondiente.

8.3.3. Ejercicios

- Usando las propiedades algebraicas del producto escalar en $L^2(0, T)$, prueba las siguientes igualdades:

$$a) \|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\operatorname{Re}(f | g)$$

$$b) \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2$$

$$c) \|f - ig\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2\operatorname{Im}(f | g)$$

$$d) 4(f | g) = (\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) + i(\|f + ig\|^2 - \|f - ig\|^2)$$

- Comprueba que el conjunto formado por las funciones trigonométricas:

$$\{1, \cos(2\pi n t/T), \operatorname{sen}(2\pi n t/T) : n \in \mathbb{N}\}$$

es ortogonal en $L^2(0, T)$.

8.4. Introducción a la Transformada de Fourier Discreta

Usualmente lo que conocemos de una señal es una muestra, esto es, una señal podemos verla como un vector cuyas componentes son valores de la señal en determinados instantes. Si el tamaño de la muestra es N , este vector está en el espacio vectorial N -dimensional \mathbb{C}^N . En términos muy generales puede afirmarse que el análisis de esta señal consiste en representarla en diferentes bases de \mathbb{C}^N . Estas bases se eligen de forma que la correspondiente representación pueda ser fácilmente

interpretada y proporcione información útil sobre la señal. Un ejemplo de esto es la Transformada de Fourier Discreta que vamos a ver a continuación.

Supongamos que conocemos N muestras de una señal periódica f de período T las cuales se han tomado en instantes t_k igualmente espaciados a lo largo de un período, es decir, $t_k = kT/N$, donde $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Conocemos, pues, los N números¹:

$$f(kT/N) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

y sabemos que f tiene período T . Usando esta información *queremos calcular una buena aproximación de los coeficientes de Fourier de f* .

Como tenemos N datos parece lógico calcular N coeficientes c_n . Sabemos que bajo hipótesis muy generales se verifica que $\lim\{c_n\} = 0$, esto es, la sucesión de los coeficientes de Fourier converge a cero. Por ello los coeficientes más significativos vienen al principio. Teniendo esto en cuenta, vamos a tratar de calcular los coeficientes c_n para $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ (o un intervalo centrado si N es impar). Este cálculo podemos hacerlo de dos formas.

Calculando de forma aproximada el valor de la integral

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2i\pi n t/T} dt$$

Para ello podemos proceder como sigue:

$$c_n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{T} \int_{kT/N}^{(k+1)T/N} f(t) e^{-2i\pi n t/T} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f(kT/N) e^{-2i\pi n k/N}$$

lo que nos lleva a tomar como una aproximación de los coeficientes c_n los números

$$c'_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \quad \text{donde } \omega = e^{2i\pi/N}, \quad -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \quad (8.14)$$

Otra forma de proceder es calcular coeficientes \hat{c}_n por la condición de que el polinomio trigonométrico

$$P(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \hat{c}_n e^{2i\pi n t/T}$$

interpole a f en los puntos t_k , es decir, verifique que $P(kT/N) = y_k$ para $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Pues bien, se comprueba que $\hat{c}_n = c'_n$ para $-\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} - 1$. Definiendo

$$Y_n = \begin{cases} c'_n & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1 \\ c'_{n-N} & \frac{N}{2} \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

Podemos escribir (8.14) en la forma

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k \omega^{-nk} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, \quad \omega = e^{2i\pi/N} \quad (8.15)$$

¹Es usual en este contexto trabajar con índices que empiezan en 0. La gran mayoría de los textos lo hacen así.

Definamos

$$\omega_{\mathbf{k}} = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad \mathbf{k} = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

Recuerda que en \mathbb{C}^N el producto escalar euclídeo está dado por:

$$(\mathbf{z} | \mathbf{w}) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j \overline{w_j} \quad \mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1}), \quad \mathbf{w} = (w_0, w_1, \dots, w_{N-1})$$

Teniendo en cuenta que $\omega^N = 1$, es fácil comprobar que los vectores $\omega_{\mathbf{k}}$ ($0 \leq k \leq N-1$) son ortogonales y tienen norma igual a \sqrt{N} . Dichos vectores forman una base ortogonal de \mathbb{C}^N .

Observa que podemos escribir las igualdades (8.15) en la forma

$$Y_n = \frac{1}{N} (\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}), \quad \omega_{\mathbf{n}} = (1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{(N-1)n}), \quad \omega = e^{2i\pi/N} \quad (8.16)$$

de donde se deduce fácilmente que $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1})$ son las coordenadas del vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ en la base $\omega_{\mathbf{k}}$ ($0 \leq k \leq N-1$)

8.14 Definición. La transformación $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ que a un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hace corresponder el vector $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ dado por las igualdades (8.15) se llama la Transformada de Fourier Discreta (DFT) en \mathbb{C}^N .

La DFT es una biyección lineal de \mathbb{C}^N en \mathbb{C}^N cuya inversa viene dada por

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k \omega^{nk} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

8.4.1. Observaciones

- La definición que hemos dado de la DFT es la más usual aunque adolece de cierta falta de simetría debido al factor de escala $1/N$ que figura en la transformada directa pero no en su inversa. De hecho, la definición de la DFT puede variar de unos textos a otros. Es frecuente ortonormalizar la base formada por los vectores $\omega_{\mathbf{k}}$, esto es, considerar la base ortonormal formada por los vectores $\frac{1}{\sqrt{N}} \omega_{\mathbf{k}}$. Con ello se consigue que en las fórmulas anteriores figure como factor de escala en ambas $1/\sqrt{N}$.
- Aunque hemos supuesto al principio que el vector \mathbf{y} se obtenía tomando N valores igualmente espaciados de una función periódica a lo largo de un período, es claro que se trataba nada más que de una motivación inicial. La TFD (transformada de Fourier discreta) no tiene ninguna limitación: el vector \mathbf{y} puede ser cualquier elemento de \mathbb{C}^N . De hecho, la TFD se utiliza para intentar averiguar las frecuencias presentes en series de datos de cualquier naturaleza. Pero hay un convenio que se sigue siempre cuando se trabaja con la TFD y que consiste en considerar que el vector $\mathbf{y} = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}\}$ es una muestra de una sucesión infinita periódica de período N . Es decir, dado un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leq q \leq N-1$

es el resto de la división de k por N . Con este convenio es inmediato comprobar que el vector $\mathbf{Y} = \mathcal{F}(\mathbf{y})$ verifica que $Y_{k+N} = Y_k$, es decir, es periódico con período N . *Esta propiedad se expresa diciendo que la TFD transforma señales periódicas discretas en el dominio del tiempo en señales periódicas discretas en el dominio de la frecuencia.*

- El espectro de la señal \mathbf{y} es el conjunto $\{(n/N, Y_n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Los espectros de amplitudes y de fases son, respectivamente, los conjuntos $\{(n/N, |Y_n|) : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\{(n/N, \text{Arg}(Y_n)) : n \in \mathbb{Z}\}$. Dichos conjuntos suelen representarse por segmentos de línea que unen los puntos $(n/N, 0)$ con los puntos del espectro correspondiente. Debido a la periodicidad de los Y_n es suficiente representar dichos espectros para N valores consecutivos de n .
- Para señales \mathbf{y} reales se verifica que $Y_{-n} = \overline{Y_n}$ donde la barra indica complejo conjugado. Como $Y_{-n} = Y_{N-n}$ haciendo $n = N/2 - k$ obtenemos que $Y_{N/2+k} = \overline{Y_{N/2-k}}$ de donde se deduce que

$$|Y_{N/2+k}| = |Y_{N/2-k}| \quad \text{y} \quad \text{Arg}(Y_{N/2+k}) = \text{Arg}(\overline{Y_{N/2-k}}) = -\text{Arg}(Y_{N/2-k})$$

esto es el espectro de amplitudes es simétrico respecto a $N/2$ y el espectro de fases es antisimétrico respecto a $N/2$. Por esta razón, como en la práctica siempre se trabaja con señales reales, es costumbre representar solamente la mitad más uno de los puntos de dichos espectros correspondientes a los valores $0, 1, 2, \dots, N/2$. Los cuales son suficientes para recuperar la señal original combinándolos con sus conjugados que representan frecuencias negativas.

- Hay una estrecha analogía entre la DFT y las series de Fourier.
 - Series de Fourier.
 - Se considera una señal *continua* en el dominio del tiempo, f , con período T y, por tanto, con frecuencia $1/T$ expresada en Hercios (ciclos por segundo).
 - Se trata de descomponer dicha señal como una serie de señales con frecuencias n/T (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental). La señal modelo con frecuencia n/T (ciclos por segundo) es $\sin(2\pi n t/T)$. La forma compleja de dicha señal es la función $\mathbf{e}_n(t) = e^{2\pi i n t/T}$.
 - El *peso* que la componente de frecuencia n/T tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(f | \mathbf{e}_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t/T} dt$$

- La serie que representa a la señal f es $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (f | \mathbf{e}_n) e^{2\pi i k t/T}$. Dicha serie proporciona el espectro de la señal y constituye la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- En el contexto de las series de Fourier las igualdades:

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2\pi i n t/T} dt \quad (8.17)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t/T} \quad (8.18)$$

se llaman, respectivamente, las ecuaciones de análisis y de síntesis.

- Transformada de Fourier Discreta.
 - Se considera una señal discreta $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ formada por N valores que se interpretan como un período de una señal discreta periódica de período N .
 - Se trata de descomponer dicha señal como una suma de señales con frecuencias n/N (múltiplos enteros de la frecuencia fundamental $1/N$). La señal *continua* modelo con frecuencia n/N (ciclos por segundo) es $\sin(2\pi n t/N)$. La forma compleja de dicha señal es $e^{2\pi i n t/N}$. Puesto que de la señal original solamente conocemos un período formado por N valores consecutivos, lo que hacemos es discretizar la señal $e^{2\pi i n t/N}$ evaluándola en $t = 0, 1, 2, \dots, N-1$ y obtenemos así el vector

$$\omega_{\mathbf{n}} = (1, e^{2\pi i n/N}, e^{2\pi i n 2/N}, \dots, e^{2\pi i n(N-1)/N})$$

- El *peso* que la componente de frecuencia n/N tiene en nuestra señal viene dado por el producto escalar:

$$(\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n k/N}$$

- La suma que representa a la señal discreta \mathbf{y} es $\sum_{n=0}^{N-1} (\mathbf{y} | \omega_{\mathbf{n}}) \omega_{\mathbf{n}}$. Dicha suma se interpreta como la representación de la señal en el dominio de la frecuencia.
- Los coeficientes Y_n se llaman *coeficientes espectrales* de la señal \mathbf{y} . Las igualdades:

$$Y_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k e^{-2i\pi n k/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (8.19)$$

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k e^{2i\pi n k/N}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (8.20)$$

se llaman, respectivamente, la *ecuación de análisis* y la *ecuación de síntesis*. La frecuencia fundamental en (8.20) es $\omega = 1/N$.

8.4.2. Convolución y DFT

Como acabamos de explicar, interpretamos los elementos de \mathbb{C}^N como sucesiones periódicas con período N . Esto justifica la siguiente definición.

Dado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leq q \leq N-1$ es el resto de la división de k por N .

Se define la convolución² (llamada a veces convolución circular o periódica o cíclica) de dos elementos de \mathbb{C}^N , $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ e $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ como el elemento $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ de \mathbb{C}^N definido por:

$$z_k = \sum_{q=0}^{N-1} x_q y_{k-q} \quad k \in \mathbb{Z}$$

²Este es uno de los distintos tipos de convolución más frecuentes. Las operaciones de convolución son muy usadas en el procesamiento de señales digitales. Los tipos de filtros más frecuentes actúan sobre la señal de entrada "input" haciendo una convolución con la función "respuesta impulsiva" del filtro.

Es inmediato que z_k es una sucesión periódica con período N . Escribiremos simbólicamente $\mathbf{z} = \mathbf{x} \odot \mathbf{y}$.

Fijado un vector $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$, la aplicación que a un vector $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ hace corresponder el producto de convolución $\mathbf{z} = \mathbf{y} \odot \mathbf{x}$ es una aplicación lineal de \mathbb{C}^N en \mathbb{C}^N que podemos escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & y_{N-1} & y_{N-2} & \cdots & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_{N-1} & \cdots & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 & \cdots & y_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-1} & y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

Las propiedades del producto de convolución se deducen fácilmente de la siguiente importante propiedad.

Dados dos vectores $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ y $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{N-1})$ en \mathbb{C}^N notaremos por $\mathbf{ab} \in \mathbb{C}^N$ su **producto puntual**:

$$\mathbf{ab} = (a_0 b_0, a_1 b_1, \dots, a_{N-1} b_{N-1})$$

8.15 Proposición. Sean $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$, $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ vectores en \mathbb{C}^N . Entonces se verifica que:

$$\mathcal{F}(\mathbf{x} \odot \mathbf{y}) = N\mathcal{F}(\mathbf{x})\mathcal{F}(\mathbf{y}), \quad \mathcal{F}(\mathbf{xy}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) \odot \mathcal{F}(\mathbf{y}) \quad (8.22)$$

8.4.3. Ejercicios

1. Comprueba que los vectores

$$\omega_{\mathbf{k}} = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{k(N-1)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad \omega = e^{2i\pi/N}$$

forman una base ortogonal de \mathbb{C}^N .

2. Recuerda que consideramos los elementos de \mathbb{C}^N como sucesiones periódicas con período N . Explícitamente: dado $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ y un entero arbitrario $k \in \mathbb{Z}$, definimos $y_k = y_q$ donde $0 \leq q \leq N-1$ es el resto de la división de k por N . Por ejemplo, $y_{-1} = y_{N-1}$, $y_{-2} = y_{N-2}$, $y_N = y_0$, $y_{N+1} = y_1$.

Se dice que la sucesión (y_n) es par si $y_{-n} = y_n$ y se dice que es impar si $y_{-n} = -y_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Supongamos que $(y_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Y_n)$. Prueba que:

- a) $(y_{-n}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (Y_{-n})$
- b) $(\overline{y}_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\overline{Y}_{-n})$
- c) $(\overline{y}_{-n}) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\overline{Y}_n)$
- d) (y_n) es par (impar) $\iff (Y_n)$ es par (impar).
- e) (y_n) es real $\iff Y_{-n} = \overline{Y}_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

f) (y_n) es real y par $\iff (Y_n)$ es real y par.

g) (y_n) es real e impar $\iff (Y_n)$ es imaginario puro e impar.

3. Calcula la transformada de Fourier discreta de las siguientes sucesiones:

a) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

b) $(1, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$

c) $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$

d) $(1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)$

e) $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)$

4. Justifica que $\sum_{n=0}^{N-1} |Y_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2$.

5. Sea $\mathbf{Z} = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbf{y}))$. Calcula las componentes Z_k de \mathbf{Z} en función de las componentes y_n de \mathbf{y} .

8.5. Transformada de Fourier

8.16 Definición. La transformada de Fourier de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $\hat{f} = \mathcal{F}f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\hat{f}(s) = \mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt \quad (s \in \mathbb{R}) \quad (8.23)$$

8.5.1. Comentarios

- Usaremos las notaciones \hat{f} y $\mathcal{F}f$ para representar la transformada de Fourier de la señal f . A veces conviene escribir $\mathcal{F}f$ en la forma $\mathcal{F}(f)$ para indicar claramente que \mathcal{F} es la transformada de Fourier de la función f .
- El parámetro “ s ” en la definición 8.23 se interpreta como frecuencias. La función \hat{f} se interpreta como la representación de la señal f en el dominio de la frecuencia.
- La transformada de Fourier convierte una señal, $f(t)$, dada en el dominio del tiempo en otra señal, $\hat{f}(s)$, en el dominio de la frecuencia.
- Representaremos por $L^1(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Para que la definición 8.23 tenga sentido es condición suficiente que $f \in L^1(\mathbb{R})$.
- Para calcular la transformada de Fourier de una función tenemos libertad para modificar como queramos dicha función en un conjunto siempre que ello no afecte al valor de la integral. Por ejemplo, podemos cambiar el valor de la función en cualquier conjunto finito de puntos. Por eso, para calcular la transformada de Fourier de una función no es imprescindible que la función esté definida en todo \mathbb{R} , es suficiente, por ejemplo, que esté definida en todo \mathbb{R} excepto en un conjunto finito de puntos.

- No hay acuerdo unánime sobre la definición de la transformada de Fourier. Algunos detalles sobre los que los distintos autores no se ponen de acuerdo son: el signo en la exponencial, multiplicar la integral por $1/2\pi$ o por $1/\sqrt{2\pi}$, incluir o no incluir 2π en el exponente de la exponencial.

8.5.2. La transformada inversa de Fourier

La transformada de Fourier permite analizar una señal f por sus componentes de frecuencia. El conjunto $\Omega(f) = \{s \in \mathbb{R} : \hat{f}(s) \neq 0\}$ se llama espectro continuo de la señal f . Cada frecuencia $s \in \Omega(f)$ tiene como amplitud $|\hat{f}(s)|$ y su fase es $\arg \hat{f}(s)$. La señal f queda caracterizada completamente por \hat{f} en el sentido de que el conocimiento de \hat{f} permite recuperar f .

8.17 Definición. La transformada inversa de Fourier de una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es la función $\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por:

$$\check{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} g(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (8.24)$$

Es usual usar la notación $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}g$ para representar la transformada de Fourier inversa de g . Se verifica el siguiente importante resultado.

8.18 Teorema (de inversión de Fourier). Si f es una señal suave a trozos tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y también $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, se verifica que:

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} \hat{f}(s) ds \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (8.25)$$

En particular, en todo punto $t \in \mathbb{R}$ en el que f sea continua es

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} \hat{f}(s) ds \quad (8.26)$$

La igualdad (8.23) se llama la *ecuación de análisis* y la igualdad (8.26) se llama *ecuación de síntesis*. Observa que la ecuación de síntesis permite reconstruir una señal no periódica a través de sus componentes de frecuencia y puede verse como una “versión continua” de la representación de una señal periódica por su serie de Fourier.

Explícitamente, la igualdad (8.26) afirma que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s u} f(u) du \right] e^{2\pi i s t} ds \quad (8.27)$$

Evidentemente, es más cómodo escribir esta igualdad en la forma:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f) \quad (8.28)$$

Es notable la simetría que hay entre la transformada de Fourier y su inversa: solamente se diferencian por un cambio de signo en la exponencial. De hecho, se verifica también la igualdad:

$$g = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}g) \quad (8.29)$$

La transformada de Fourier es una operación que regulariza y suaviza las funciones. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

8.19 Teorema. *La transformada de Fourier de una señal integrable, $f \in L^1(\mathbb{R})$, es una función continua, acotada y $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}f(s) = 0$.*

8.5.3. Propiedades de la transformada de Fourier

Algunas de las propiedades que siguen son generales, es decir, se satisfacen solamente con la hipótesis de que las funciones que en ellas intervienen estén en $L^1(\mathbb{R})$ para que sus correspondientes transformadas estén definidas. Otras propiedades requieren hipótesis adicionales en las que no vamos a entrar. Te aconsejo que aprendas estas propiedades como un formalismo útil para calcular transformadas de Fourier. Para ello tendrás que memorizar las transformadas de Fourier de unas pocas funciones básicas y a partir de ellas aplicando las propiedades que siguen, *sin necesidad de calcular integrales*, podrás deducir las transformadas de Fourier de muchísimas funciones más.

Linealidad. La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto quiere decir que si α y β son números y f, g señales, se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}f + \beta \mathcal{F}g$$

Propiedades de simetría

De las definiciones dadas para la transformada de Fourier y su inversa:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t) dt \\ \mathcal{F}^{-1}f(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t) dt\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el coseno es par y el seno impar, se deducen las siguientes propiedades de simetría.

1. $\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(-s)$.
2. **Regla de inversión.** $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(s) = f(-s)$.
3. Si la función f es par entonces se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t) dt = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t) dt = 0$$

por lo que

$$\mathcal{F}f(s) = \mathcal{F}^{-1}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt = 2 \int_0^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t) dt$$

y la transformada de Fourier de f coincide con su transformada inversa y es una función par.

4. Análogamente, si f es impar su transformada de Fourier también es impar y:

$$\mathcal{F}f(s) = -\mathcal{F}^{-1}f(s) = i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t) dt = 2i \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t) dt$$

5. Si f es real entonces $\mathcal{F}f(-s) = \overline{\mathcal{F}f(s)}$.

6. Si f es real y par su transformada de Fourier también es real y par.

7. Si f es real e impar su transformada de Fourier es impar y toma valores imaginarios puros.

Las siguientes dos propiedades se obtienen fácilmente con un sencillo cambio de variable.

Traslación en el tiempo. Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y una señal f , definimos la señal $\tau_a f$ por:

$$\tau_a f(t) = f(t - a)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\tau_a f}(s) = e^{-2\pi i a s} \widehat{f}(s)$$

Es decir, una traslación en el tiempo produce un cambio de fase en la transformada.

Cambio de escala o dilatación. Dado un número $a \in \mathbb{R}^*$ y una señal f , definimos la señal $\sigma_a f$ por:

$$\sigma_a f(t) = f(at)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\sigma_a f}(s) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Es decir una dilatación ($a > 1$) o una compresión ($a < 1$) en el dominio del tiempo se corresponde con una compresión o dilatación en el dominio de la frecuencia más un cambio de escala.

Propiedad de modulación. Dado $a \in \mathbb{R}$, y una señal f , se verifica que la transformada de Fourier de la función $g(t) = e^{2\pi i a t} f(t)$ es la función $\tau_a \widehat{f}$.

Esta propiedad es inmediata pues:

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) e^{2\pi i a t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (s-a)t} f(t) dt = \widehat{f}(s-a)$$

La aplicación de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la siguiente propiedad.

Propiedad de derivación

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi i s \mathcal{F}f(s) \quad \mathcal{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

Igualdad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(s) \overline{\mathcal{F}g(s)} ds$$

En particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}f(s)|^2 ds$$

8.5.4. Ejemplos

8.20 Ejemplo (La función pulso rectangular). Es la función dada por

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Para calcular su transformada de Fourier no es preciso definir dicha función en los puntos $\pm \frac{1}{2}$ pero, para recuperar esta función por medio de una transformada de Fourier es necesario definir su valor en dichos puntos igual a $1/2$. Como se trata de una función par su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\Pi}(s) = 2 \int_0^{\infty} \Pi(t) \cos(2\pi s t) dt = 2 \int_0^{1/2} \cos(2\pi s t) dt = 2 \left[\frac{\text{sen}(2\pi s t)}{2\pi s} \right]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{\text{sen}(\pi s)}{\pi s}$$



8.21 Ejemplo (La función “cardinal seno” o “función de muestreo”). Es la función dada para todo $t \in \mathbb{R}$ por

$$\text{senc}(t) = \frac{\text{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

por supuesto, $\text{senc}(0) = 1$.

La transformada de Fourier de esta función se deduce fácilmente de que, según acabamos de ver, $\widehat{\Pi} = \text{senc}$ y, como la función Π es par, obtenemos

$$\mathcal{F}\text{senc} = \mathcal{F}(\mathcal{F}\Pi) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\Pi) = \Pi.$$



8.22 Ejemplo (Decaimiento exponencial truncado). Es la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$

Podemos calcular su transformada de Fourier directamente:

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{(-2\pi i s - 1)t} dt = \left[-\frac{e^{-t} e^{-2\pi i s t}}{1 + 2\pi i s} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi i s}$$



8.23 Ejemplo (La función de Laplace). Es la función dada por

$$g(t) = e^{-|t|}$$

Para calcular su transformada de Fourier observamos que $g(t) = f(t) + f(-t)$ donde f es el decaimiento exponencial truncado. Deducimos que:

$$\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = \frac{1}{1 + 2\pi i s} + \frac{1}{1 - 2\pi i s} = \frac{2}{1 + 4\pi^2 s^2}$$



8.24 Ejemplo (La función gaussiana unidad). Es la función definida por:

$$f(t) = e^{-\pi t^2}$$

Esta función tiene la notable propiedad de ser invariante para la transformada de Fourier: su transformada de Fourier es ella misma. Para calcularla podemos usar el hecho de que $f'(t) = -2\pi t f(t)$ y tomar transformadas de Fourier en ambos lados de esta igualdad con lo que, en virtud de la propiedad de derivación, resulta:

$$2\pi i s \widehat{f}(s) = \frac{1}{i} \widehat{f}'(s)$$

Es decir

$$\widehat{f}'(s) + 2\pi s \widehat{f}(s) = 0$$

Deducimos de aquí que la función $\widehat{f}(s) e^{\pi s^2}$ tiene derivada nula por lo que

$$\widehat{f}(s) = \widehat{f}(0) e^{-\pi s^2} = e^{-\pi s^2} = f(s)$$

Donde hemos usado el resultado bien conocido $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} dt = 1$.



8.5.5. Ejercicios

- Supongamos que reproduces en un magnetofón una cinta a velocidad doble de la velocidad a que se ha grabado. Interpreta lo que ocurre mediante la propiedad de cambio de escala o dilatación de la transformada de Fourier.
- Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcula, sin hacer integrales, la transformada de Fourier de las siguientes funciones:

$$a) \Pi_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geq a/2 \end{cases}$$

$$b) f(t) = \Pi((t-b)/c) \text{ donde } \Pi \text{ es la función "pulso rectangular".}$$

$$c) f(t) \text{ es una función escalonada } f(t) = \sum_{k=1}^m a_k \Pi\left(\frac{x-b_n}{c_n}\right).$$

$$d) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 2, & 1 < x < 2 \\ 0, & x < 0 \text{ o } x > 2 \end{cases}$$

$$e) f(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & |t| < a/2 \\ 0, & |t| \geq a/2 \end{cases}$$

$$f) f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$g) f(t) = \cos(2\pi\beta t) e^{-\pi(x/\alpha)^2}$$

$$h) f(t) = \frac{1}{1+2\pi i t}$$

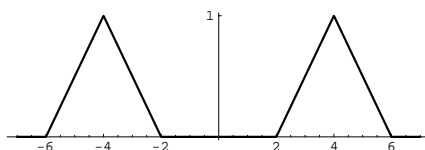
i) $f(t) = 2t e^{-\pi t^2}$

3. Calcula mediante integración la transformada de Fourier de la “función triángulo” definida por:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

4. a) Supuesto conocida la transformada de Fourier de una señal f , calcula la transformada de Fourier de la señal $g(t) = f(t) \cos(2\pi at)$.

b) Calcula la señal (en el dominio del tiempo) cuya transformada de Fourier tiene la gráfica siguiente.



8.6. Convolución y transformada de Fourier

Procesar una señal consiste en modificar sus componentes de frecuencia. Si la señal es analógica y su transformada de Fourier es

$$\hat{f}(s) = |\hat{f}(s)| e^{i\vartheta(s)}$$

donde $\vartheta(s) = \arg \hat{f}(s)$, podemos estar interesados en modificar las amplitud $|\hat{f}(s)|$, o las fases $\arg \hat{f}(s)$ correspondientes a cada frecuencia s , para obtener una nueva señal que podemos representar en la forma:

$$\rho(s) |\hat{f}(s)| e^{i\varphi(s)} e^{i\vartheta(s)}$$

donde la función $\rho(s) \geq 0$ da cuenta del cambio producido en la amplitud, y la función $e^{i\varphi(s)}$ da cuenta del cambio producido en la fase. Esto nos lleva a considerar la función $\rho(s) e^{i\varphi(s)}$ y a concluir que $\hat{g}(s) = \rho(s) e^{i\varphi(s)} \hat{f}(s)$ es la transformación más general que podemos hacer sobre nuestra señal modificando amplitudes y fases. Es natural interpretar la función $\rho(s) e^{i\varphi(s)}$ como la transformada de Fourier de una señal analógica $g(t)$, por tanto $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(\rho(s) e^{i\varphi(s)})(t)$, y a preguntarnos qué operación debemos hacer con las señales $f(t)$ y $g(t)$ para obtener una nueva señal cuya transformada de Fourier sea precisamente $\hat{g}(s) \hat{f}(s)$. Está claro que dicha operación será el modelo más general del procesamiento de señales. Calculemos $\hat{g}(s) \hat{f}(s)$.

$$\begin{aligned} \hat{g}(s) \hat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s t} e^{-2\pi i s x} dt \right] f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi i s(t+x)} dt \right] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(u-x) f(x) e^{-2\pi i s u} du \right] dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) e^{-2\pi i s u} dx \right] du = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) dx \right] e^{-2\pi i s u} du \end{aligned}$$

Pero esto que hemos obtenido es justamente la transformada de Fourier de la función

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(u-x) dx$$

8.25 Definición. La convolución de dos señales f y g es la función

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x) dx \quad t \in \mathbb{R}$$

dicha función se representará por $f * g$ y se llama la convolución de f y g .

Deducimos de lo anterior el siguiente resultado que expresa que la convolución en el dominio del tiempo se corresponde con la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

8.26 Teorema (de convolución). $\mathcal{F}(f * g)(s) = \mathcal{F}f(s)\mathcal{F}g(s)$.

Teniendo en cuenta la simetría entre la transformada de Fourier y su inversa, también se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}^{-1}(f * g) = (\mathcal{F}^{-1}f)(\mathcal{F}^{-1}g)$$

y, lo que es más interesante:

$$\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}f * \mathcal{F}g$$

es decir, la multiplicación en el dominio del tiempo se corresponde con la convolución en el dominio de la frecuencia.

8.6.1. ¿Qué es la convolución?

Es la segunda vez que aparece en este curso la operación de convolución. En la lección anterior vimos la convolución cíclica de dos señales periódicas discretas y ahora surge la convolución de dos señales continuas no periódicas. Entre ambas hay ciertas analogías y ambas se comportan igual respecto a las respectivas transformadas de Fourier discreta o continua. No son estos los únicos tipos de convolución que se consideran. La convolución de funciones es una herramienta muy versátil que tiene distintos significados en distintos campos y no admite una interpretación única. Se trata de una operación que no es fácilmente visualizable y que tiene cierta complicación: para calcular el valor de la convolución de dos funciones en un solo punto hay que usar todos los valores de ambas funciones y realizar una integración. En la figura 8.5 tienes un intento de visualización del cálculo de la convolución de la función pulso rectangular, Π , consigo misma en el punto $x = 0.75$.

Observa que aunque la función pulso rectangular es discontinua en los puntos $\pm 1/2$ su convolución es la función triángulo que es continua. Esta es una propiedad importante de la convolución: *la convolución de dos funciones es una función al menos tan buena como la mejor de ambas*.

Podemos ver la convolución como una operación para promediar y suavizar una función por medio de otra. Consideremos que g es una función positiva, concentrada cerca de 0, con área total igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$$

Por ejemplo, g podría ser una campana de Gauss alta y estrecha centrada en 0. En tal caso, la función $x \mapsto g(t-x)$ está concentrada cerca de t y sigue teniendo área total 1. La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t-x)f(x) dx$$

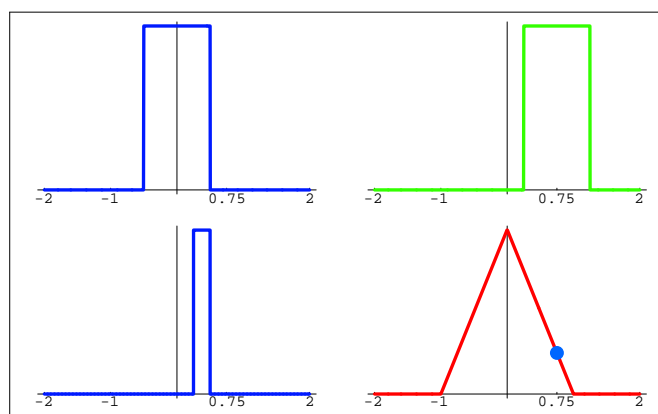


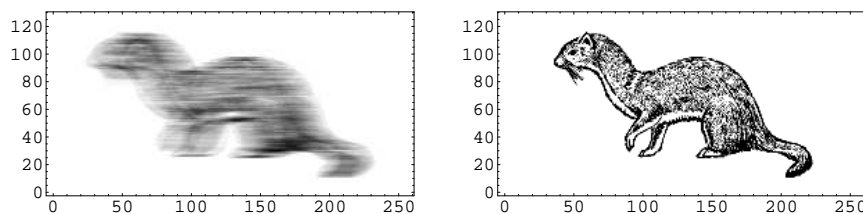
Figura 8.5: Gráficas de $\Pi(x)$ (azul), $\Pi(0.75 - x)$ (verde), $\Pi(x)\Pi(0.75 - x)$ (azul), $\Pi * \Pi(x)$ (rojo). El punto azul es el valor $\Pi * \Pi(0.55)$

puede interpretarse como un *promedio* de los valores de $f(x)$ cerca de $x = t$ *ponderado* por los valores de $x \mapsto g(t - x)$. Si nos movemos a otro punto t' cercano a t y calculamos el valor, $f * g(t')$, de la convolución en t' , repetiremos la operación anterior, es decir, calcularemos una media ponderada de los valores de f cerca de t' y dicha media incluirá, si t' está cerca de t , valores de f que ya se usaron en el anterior promedio. Por ello, cabe esperar que los valores de la convolución $f * g(t)$ y $f * g(t')$ estén más próximos que $f(t)$ y $f(t')$. Es decir, $f * g(t)$ *suaviza* f .

Por otra parte, este proceso de *promediar* y *regularizar* es lo que hacen los instrumentos de medida. Por ejemplo, cuando usamos un termómetro para medir la temperatura en un punto del espacio lo que estamos midiendo realmente es un promedio. Eso se debe a que el termómetro no mide la temperatura solamente en un punto, sino que la información que proporciona es realmente un promedio de las temperaturas en una pequeña región del espacio. La manera de realizar este promedio depende de las características físicas del instrumento y dicho promedio se realiza de igual forma en cualquier punto donde situemos el termómetro. De esta forma se entiende que los datos que proporciona el termómetro son el resultado de una convolución de la función temperatura con otra función, que podemos interpretar como una función de densidad de probabilidad - una gaussiana -, que es característica del instrumento concreto que usemos. Cuanto más preciso sea el termómetro más alta y estrecha será esta gaussiana y más *“concentrada”* será la lectura que se realice.

Las razones anteriores explican por qué la convolución aparece en contextos tan diversos. En algunas aplicaciones como, por ejemplo, en restauración de imágenes, lo que se quiere es invertir el proceso antes descrito, es decir, se dispone de una señal f que está *“contaminada”* por su convolución con otra señal g de manera que lo que nosotros recibimos es la señal $h = f * g$. La señal g se interpreta como un *“ruido”* y pueden hacerse hipótesis sobre su naturaleza para intentar separar la señal f del ruido g que la *“contamina”*. En estos casos lo que se quiere es invertir un proceso de convolución.

Aquí puedes ver dos fotografías de una comadreja. La primera de ellas está *“corrida”* debido a un pequeño movimiento de la cámara que tomó la foto. Esto es una convolución. La segunda es el resultado de someter los datos de la foto a una de-convolución.



8.6.2. Propiedades de la convolución

La operación de convolución se comporta de forma parecida a la multiplicación. Concretamente, se verifican las siguientes propiedades:

- **Conmutativa.** $f * g = g * f$.
- **Asociativa.** $(f * g) * h = f * (g * h)$.
- **Distributiva.** $(f + g) * h = f * h + g * h$.

La última propiedad es inmediata y las otras dos son consecuencia fácil del teorema de convolución.

8.6.3. Convolución y Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI)

Un **sistema** es cualquier proceso que transforma señales de entrada en señales de salida. En términos matemáticos, podemos representar un sistema por un operador L que al actuar sobre una señal x produce una señal y , lo que se escribe $y = Lx$.

Como puedes ver el concepto de “sistema” es muy general. Ejemplos de sistema son:

- Los instrumentos que usamos para comunicarnos: teléfonos, radios, televisores, cámaras fotográficas,... Todos ellos aceptan cierto tipo de señales de entrada y producen nuevas señales de salida.
- Todo proceso matemático en el que una función se transforme en otra. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales, la convolución con una función dada.

Se distinguen distintos tipos de sistemas según el tipo de señal de entrada y de salida. Los más interesantes para nosotros son:

- *Sistemas analógicos* los que transforman señales analógicas en señales analógicas.
- *Sistemas discretos* los que transforman señales discretas en señales discretas.

Para que un concepto tan general sea realmente útil hay que suponer que se cumplen ciertas propiedades.

8.6.3.1. Propiedades de los sistemas

- Linealidad.** Se dice que un sistema L es lineal cuando es aditivo y homogéneo, es decir, cualesquiera sean las señales de entrada x e y y los números α, β se verifica que:

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$$

Esta propiedad suele llamarse *principio de superposición*.

- Invariancia en el tiempo.** Se dice que un sistema L es invariante en el tiempo si un adelanto o retraso de la señal de entrada produce el mismo efecto en la señal de salida.

Representando por $\tau_a x$ la señal $(\tau_a x)(t) = x(t - a)$, la invariancia en el tiempo se expresa por la igualdad:

$$L(\tau_a x) = \tau_a Lx$$

De manera más explícita, si es $y(t) = (Lx)(t)$ la señal transformada de x y es $z(t) = (L(\tau_a x))(t)$ la señal transformada de $\tau_a x$, se verifica que $z(t) = y(t - a)$.

- Estabilidad.** Se dice que un sistema L es estable cuando es lineal y *continuo*. Matemáticamente esto se expresa por la igualdad (que en cada caso concreto debe dotarse de significado matemático preciso):

$$L\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Lx_n$$

También suele expresarse la estabilidad por la condición de que el sistema transforme señales acotadas (Bounded Inputs) en salidas acotadas (Bounded Outputs). A estos sistemas les llaman BIBO en los textos de procesamiento de señales.

- Causalidad.** Se dice que un sistema L es causal cuando se verifica que

$$u(t) = v(t) \quad \forall t < t_0 \implies (Lu)(t) = (Lv)(t) \quad \forall t < t_0$$

Dicho en términos familiares, un sistema es causal cuando su respuesta depende solamente del pasado.

Un sistema LTI es un sistema lineal invariante en el tiempo.

Un **filtro** es un sistema LTI que además es estable.

Nuestro propósito es ver que los filtros lo que hacen es una convolución de la señal de entrada con una función que se llama la *respuesta impulsiva* del filtro. Consideremos primero filtros discretos y después filtros analógicos.

8.6.3.2. Respuesta impulsiva de un filtro discreto

Representaremos las señales discretas por funciones definidas en \mathbb{Z} con valores en \mathbb{C} . Dadas dos señales $u, v: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ se define su convolución como la señal z dada por

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k)v(n-k) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

supuesto, claro está, que dicha serie converge para todo $n \in \mathbb{Z}$. La señal z se llama la *convolución* de las señales u y v y se representa por $u * v$. Esta convolución de sucesiones tiene análogas propiedades a la convolución de funciones por medio de una integral.

La señal $\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\delta(n) = 0$ para $n \neq 0$ y $\delta(0) = 1$ se llama señal *impulso unidad* o señal *delta de Dirac discreta*. Dada una señal discreta $x : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica la igualdad:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

pues dicha suma consta realmente de un único sumando no nulo que se obtiene para $k = n$. Representaremos por δ_k la función $\delta_k(n) = \delta(n-k)$, es decir, con la notación ya usada varias veces, $\delta_k = \tau_k \delta$. La igualdad anterior nos dice que la sucesión de funciones $x_N = \sum_{k=-N}^N x(k)\delta_k$ converge *puntualmente* a la función x .

Supongamos ahora que $L : X \rightarrow Y$ un filtro donde X e Y son espacios vectoriales normados de sucesiones y que se verifica que x_N converge a x en la norma de X (es decir, $\|x_N - x\| \rightarrow 0$). Entonces, la linealidad y continuidad de L permite escribir:

$$Lx = L\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x(k)\delta_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N x(k)L\delta_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)L\delta_k$$

Como L es invariante en el tiempo se verifica que $L\delta_k = L(\tau_k \delta) = \tau_k(L\delta)$. Poniendo $y = Lx$, y llamando $h = L\delta$, la igualdad anterior nos dice que para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)(\tau_k h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Es decir, $y = x * h$. En consecuencia, la función h , que es la respuesta del filtro a la función impulso unidad, caracteriza al filtro. Dicha función se llama la función *respuesta impulsiva* del filtro.

8.6.3.3. Respuesta impulsiva de un filtro analógico

Para un filtro analógico se demuestra que hay una función h llamada la *respuesta impulsiva* del filtro con la propiedad de que la respuesta, $y(t)$, del filtro a una entrada $x(t)$, viene dada por la convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)h(t-s) ds = (x * h)(t)$$

Resulta así que todo filtro actúa por convolución.

Lección 9

Funciones holomorfas. Integración en el campo complejo

9.1. Derivada de una función de variable compleja

En lo que sigue, representaremos por Ω un conjunto abierto en \mathbb{C} . Se dice que una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en un punto $a \in \Omega$ si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \in \mathbb{C}.$$

El valor de dicho límite se representa por $f'(a)$ y se llama derivada de f en el punto a .

La única novedad de la definición es que se está utilizando el producto complejo y eso, como veremos, hace que la condición de derivabilidad en sentido complejo sea mucho más fuerte que la derivabilidad para funciones reales.

Observa que hay una completa analogía formal entre el concepto de función derivable para funciones de variable compleja y para funciones reales de una variable real. Por ello, las reglas de derivación conocidas para funciones de una variable real son también válidas, con las mismas demostraciones, para funciones de variable compleja.

9.1 Proposición (Reglas de derivación). *Sean dos funciones $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces:*

- *En todo punto $z \in \Omega$ donde f y g sean derivables se verifica que las funciones $f + g$ y $f \cdot g$ son derivables y*

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z), \quad (f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

- *Si $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ entonces en todo punto $z \in \Omega$ donde f y g sean derivables se verifica que la función f/g es derivable y*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$$

- **Regla de la cadena.** Sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(\Omega) \subseteq B$, y consideremos la función compuesta $h = g \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que f es derivable en $z \in \Omega$ y g es derivable en $w = f(z) \in B$. entonces h es derivable en z y

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z) = g'(w)f'(z)$$

9.1.1. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivabilidad compleja es mucho más restrictiva de lo que puede parecer a primera vista.

9.2 Teorema (Relación ente la derivabilidad compleja y la diferenciabilidad real). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, a un punto de Ω y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de Ω en \mathbb{C} . Notemos $a = \alpha + i\beta$, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- f es derivable (en sentido complejo) en $a = \alpha + i\beta$.
- Las funciones $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ son diferenciables en (α, β) y además

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) &= \frac{\partial v}{\partial y}(\alpha, \beta) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\alpha, \beta) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann}$$

En caso de que se cumplan i) y ii) se tiene

$$f'(a) = f'(\alpha + i\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}(\alpha, \beta) + i \frac{\partial v}{\partial x}(\alpha, \beta)$$

Este resultado explica porqué si defines, sin pensarlo mucho, una función compleja en la forma $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ lo más probable es que, a pesar de lo buenas que puedan ser las funciones u y v , la función así definida no sea derivable. Pues las funciones u y v no tienen por qué verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto indica (aunque esta es una idea difícil de precisar) que las funciones complejas derivables son “auténticas funciones complejas” en el sentido de que si la función $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ es derivable entonces la expresión $u(x, y) + iv(x, y)$ debe depender únicamente de la variable z . Los siguientes ejemplos son ilustrativos.

9.3 Ejemplos.

- $f(x + iy) = x$ no es derivable en ningún punto.
- $f(z) = z|z|^2$ sólo es derivable en cero.
- $f(x + iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$ es derivable en todo \mathbb{C} y $f'(z) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

9.1.2. Propiedades de las funciones holomorfas

9.4 Definición. Sea Ω un abierto de \mathbb{C} . Una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es **holomorfa** en Ω si f es derivable en todo punto de Ω . En tal caso la función definida para $z \in \Omega$ por $z \mapsto f'(z)$ se llama **función derivada** de f . Notaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ el conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω . Las funciones holomorfas en todo el plano complejo se llaman **funciones enteras**.

9.5 Ejemplos.

- Las **funciones polinómicas**, es decir, las funciones de la forma

$$p(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_nz^n$$

donde $c_k \in \mathbb{C}$ para $0 \leq k \leq n$, son funciones enteras. La función derivada de p viene dada por

$$p'(z) = c_1 + 2c_2z + 3c_3z^2 + \cdots + nc_nz^{n-1} \quad (z \in \mathbb{C})$$

- Las **funciones racionales**, es decir, las funciones de la forma $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ donde $p(z)$ y $q(z)$ son funciones polinómicas, son holomorfas en su dominio natural de definición $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : q(z) \neq 0\}$. La función derivada de R viene dada por

$$R'(z) = \frac{p'(z)q(z) - p(z)q'(z)}{q(z)^2} \quad (z \in \Omega)$$

- La **función exponencial compleja**, $\exp(z) = e^z$, es una función entera y $\exp'(z) = \exp(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
- La **función logaritmo principal**, $\log z$, es una función holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ y su derivada viene dada por

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$

La función $\log z$ es *discontinua en los puntos del eje real negativo* porque en ellos el argumento principal salta de $-\pi$ a π .

9.6 Proposición. Una función holomorfa en un dominio cuya derivada es nula en todo punto es constante.

9.7 Corolario. Si dos funciones holomorfas tienen la misma derivada sobre un dominio y coinciden en un punto son iguales.

La siguiente proposición vuelve a poner de manifiesto que la condición de que una función sea holomorfa es mucho más restrictiva que la derivabilidad real.

9.8 Proposición. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Equivalen las siguientes afirmaciones:

- (1) $\operatorname{Re} f$ es constante en Ω

(II) $\operatorname{Im} f$ es constante en Ω

(III) La función compleja conjugada de f , \bar{f} , es holomorfa en Ω

(IV) f es constante en Ω

(V) $|f|$ es constante en Ω

Observa que estas propiedades de las funciones holomorfas están muy lejos de ser ciertas para funciones reales diferenciables. Por ejemplo, dada una función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 diferenciable que no se anule nunca, dividiéndola por su norma obtenemos una función diferenciable cuyo módulo (norma euclídea) es constante.

9.2. Series de potencias complejas

Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ y un número $a \in \mathbb{C}$, la sucesión

$$\{c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n\}$$

se representa por $\sum_{n \geq 0} c_n(z-a)^n$ y se llama **serie de potencias centrada en a** . La sucesión $\{c_n\}$ recibe el nombre de sucesión de coeficientes de la serie.

9.9 Lema. Supongamos un número positivo $\rho > 0$ tal que la serie $\sum_{n \geq 0} |c_n| \rho^n$ sea convergente. Entonces se verifica que la serie $\sum_{n \geq 0} c_n(z-a)^n$ converge absolutamente en el disco $D(a, \rho)$.

Dada una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} c_n(z-a)^n$ puede ocurrir:

- 1) La serie solamente converge para $z = a$. En este caso se dice que la serie de potencias es trivial.
- 2) La serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$.
- 3) Hay un número $0 < R < +\infty$ tal que la serie converge absolutamente en $D(a, R)$ y no converge para $|z-a| > R$. El disco $D(a, R)$ se llama disco de convergencia de la serie.

Al número R se le llama **radio de convergencia** de la serie. En el caso 1) convenimos en que $R = 0$ y en el caso 2) $R = +\infty$.

Dada una serie de potencias no trivial, llamaremos **dominio de convergencia de la serie** al conjunto

- $\Omega = \mathbb{C}$ si $R = +\infty$
- $\Omega = D(a, R)$ si $R \in \mathbb{R}^+$

Para obtener el radio de convergencia de una serie de potencias de forma práctica podemos aplicar alguno de los criterios siguientes.

9.10 Teorema (Criterio del cociente o de D'Alembert). *Dada una sucesión de números complejos $\{c_n\}$ supuesto que*

- $c_n \neq 0$ para todo n a partir de un índice en adelante, y que
- $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$

entonces $R = 1/L$ con los convenios: $R = 0$ si $L = +\infty$ y $R = +\infty$ si $L = 0$.

Demostración. Para obtener este resultado basta aplicar el criterio del cociente a la serie $\sum_{n \geq 0} |c_n(z-a)^n|$.

Tenemos

$$\frac{|c_{n+1}(z-a)^{n+1}|}{|c_n(z-a)^n|} = \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} |z-a| \rightarrow L |z-a|$$

Deducimos que:

- Si $L |z-a| < 1$ la serie converge.
- Si $L |z-a| > 1$ la serie no converge.

y concluimos que $R = 1/L$ con los convenios anteriores. □

De forma análoga se obtiene el siguiente resultado.

9.11 Teorema (Criterio de la raíz o de Cauchy). *Si $\{\sqrt[n]{|c_n|}\} \rightarrow L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ entonces $R = 1/L$ con los mismos convenios anteriores.*

El siguiente lema es muy útil para calcular la suma de algunas series.

9.12 Lema (de Abel). *Supongamos que la serie $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ converge en un punto z_0 de la frontera de su disco de convergencia. Entonces se verifica que:*

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ 0 < r < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (r z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$$

9.13 Teorema (de derivación de una serie de potencias). *Sea a un número complejo, $\sum_{n \geq 0} c_n (z-a)^n$ una serie de potencias no trivial y Ω su dominio de convergencia. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ la función suma de la serie, esto es,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad z \in \Omega$$

Entonces f es indefinidamente derivable en Ω y para cada $k \in \mathbb{N}$ su derivada k -ésima se obtiene derivando k veces la serie término a término, esto es:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z-a)^{n-k} \quad z \in \Omega$$

En particular $f^{(k)}(a) = k! c_k$ o, lo que es lo mismo

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

9.14 Definición. Sea f una función indefinidamente derivable en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$. La serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en el punto a .

9.15 Corolario. Las únicas series de potencias no triviales son series de Taylor (de su función suma).

El siguiente resultado es uno de los resultados más sorprendentes de la teoría de funciones holomorfas. Para que comprendas bien su alcance conviene que tengas en cuenta los siguientes ejemplos.

- Una función real derivable una vez pero no dos veces derivable.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2/2 & \text{si } x < 0 \\ x^2/2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función f es derivable y su derivada viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Es decir, $f'(x) = |x|$, que no es derivable en $x = 0$.

- Una función real indefinidamente derivable cuya serie de Taylor en un punto no converge a la función.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La función f es indefinidamente derivable y sus derivadas en $x = 0$ son todas nulas, $f^{(n)}(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto la serie de Taylor de f en $x = 0$ es la serie nula. Sin embargo f no es nula en ningún intervalo abierto que contenga a 0.

El siguiente resultado nos dice que para funciones complejas derivables estas situaciones no se pueden dar.

9.16 Teorema (Teorema de Taylor). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función derivable (holomorfa) en Ω . Entonces se verifica que:

a) f es indefinidamente derivable en Ω ;

b) Para cada punto $a \in \Omega$ la serie de Taylor de f en a converge por lo menos en el disco más grande centrado en a y contenido en Ω y su suma en dicho disco es igual a f . Es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \quad \text{para todo } z \in D(a, r) \subset \Omega$$

Este resultado pone de manifiesto la gran diferencia que hay entre la derivabilidad en el campo real y en el campo complejo.

Del teorema de Taylor puede deducirse el siguiente útil resultado.

9.17 Lema (Lema de Riemann). Si una función compleja es continua en un abierto y sabemos que es derivable en todos los puntos de dicho abierto excepto en un conjunto finito de puntos (en los que sólo sabemos que es continua) entonces se verifica que dicha función es derivable en todos los puntos del abierto.

9.2.1. Ejercicios

1. Estudia la convergencia de las siguientes series de potencias.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!} & \text{b)} \sum_{n \geq 1} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} z^n & \text{c)} \sum_{n \geq 1} n^\alpha z^n \\ \text{d)} \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n & \text{e)} \sum_{n \geq 1} \frac{3 \cdot 5 \cdots (3n+1)}{5 \cdot 10 \cdots 5n} z^n & \text{f)} \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{1 + 1/2 + \cdots + 1/n} \end{array}$$

Estudia en los casos c) y f), el comportamiento de la serie en los puntos de la circunferencia unidad.

2. Expresa $\frac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en un punto $a \neq 0$ e indica en dónde es válida dicha igualdad.

3. Expresa $\frac{1}{(1-z)^3}$ como suma de una serie de potencias.

4. Sea la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n} - \frac{n}{3^n} \right) z^n$. Calcula su dominio de convergencia y su suma.

5. Prueba que

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \forall z \in D(0, 1)$$

a) Deduce que para todo $\theta \in]-\pi, \pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cos(n\theta) = \log\left(2 \cos \frac{\theta}{2}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}(n\theta) = \frac{\theta}{2}.$$

b) Cambiando z por $-z$, deduce que para todo $\theta \in]0, 2\pi[$ se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log\left(2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}\right); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

6. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 1} \left(n^2 + \frac{1}{n} \right) (z-1)^n$$

Calcula su radio de convergencia y su suma.

7. Calcula el desarrollo de Taylor en $a = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{z^2 - 3z + 1}{z^2 - 5z + 6}$$

e indica su dominio de convergencia.

Sugerencia. Usa la descomposición en fracciones simples.

8. Sea la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} (2^{n+1} - n)z^n$. Calcula su dominio de convergencia y su suma.

9.3. Integración en el campo complejo

Una curva en \mathbb{C} no es más que una curva en \mathbb{R}^2 cuando los vectores de \mathbb{R}^2 los vemos como números complejos. Concretamente, una curva en \mathbb{C} es una aplicación continua $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Dicha función será de la forma $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Hay que distinguir entre la curva y su imagen (también llamada traza o soporte), que notaremos por $\gamma^{mb*} = \gamma([a, b])$. Al punto $\gamma(a)$ se le llama *punto inicial* de la curva γ y a $\gamma(b)$ *punto final*. Ambos reciben el nombre de *extremos de la curva*.

Se dice que γ es una curva **cerrada** cuando sus extremos coinciden, esto es, $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Diremos que una curva es **regular** si la aplicación que la define es derivable con derivada continua, esto es, es de clase \mathcal{C}^1 .

9.18 Definición (Curvas regulares a trozos o caminos). Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es **regular a trozos**, y la llamaremos un **camino**, si hay una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ de manera que $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ es regular para $1 \leq k \leq n$.

9.19 Definición. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ una aplicación continua. Definimos la **integral de f a lo largo del camino γ** como el número complejo

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Pongamos $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ donde $a \leq t \leq b$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)) \right) (x'(t) + iy'(t)) dt = \\ &= \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt + i \int_a^b \left(u(x(t), y(t)) y'(t) + v(x(t), y(t)) x'(t) \right) dt = \\ &= \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + i \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (9.1)$$

Donde las dos últimas integrales son las integrales de línea (en el sentido real que ya conocemos) de los campos vectoriales de dos variables $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$, $\mathbf{G}(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$ a lo largo del camino $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Por tanto, calcular una integral de línea compleja equivale a calcular dos integrales de línea reales. En consecuencia, las integrales de línea complejas se comportan como las integrales de línea de campos vectoriales en \mathbb{R}^2 .

La siguiente acotación básica es muy útil.

9.20 Proposición (Acotación básica).

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} \ell(\gamma)$$

Donde hemos representado por $\ell(\gamma)$ la longitud de γ .

9.3.1. Existencia de primitivas

9.21 Definición. Dada una función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que F es una primitiva de f en Ω , si F es holomorfa en Ω , y $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Observaciones

- Recuerda que, como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, toda función real continua en un intervalo tiene primitivas. La cosa es completamente diferente para funciones complejas. Una *condición necesaria que tiene que cumplir una función compleja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ para tener primitivas es que sea holomorfa*. Pues si F es una primitiva de f en Ω , entonces $F' = f$ en Ω , y sabemos, por el teorema de Taylor, que toda función holomorfa es indefinidamente derivable, luego $F' = f$ es derivable, esto es, f es holomorfa en Ω . Pero *esta condición necesaria no es suficiente* como enseguida veremos.

Un caso fácil en el que puede asegurarse la existencia de primitivas es el siguiente.

9.22 Proposición. *La función suma de una serie de potencias no trivial tiene primitivas en el dominio de convergencia de la serie.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n$ es una serie de potencias no trivial. Sea Ω su dominio de convergencia y para $z \in \Omega$ sea $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ la función suma. El teorema de derivación de series de potencias nos dice que la función $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - a)^{n+1}$ es una primitiva de φ en Ω . □

Como consecuencia de este resultado y del teorema de Taylor deducimos el siguiente resultado.

9.23 Corolario. *Toda función holomorfa en un abierto Ω tiene primitivas en cualquier disco contenido en Ω .*

El cálculo de una integral curvilínea es inmediato si se conoce una primitiva de la función que integramos.

9.24 Teorema (Regla de Barrow para integrales curvilíneas). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, f una función continua en Ω y supongamos que hay una función $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino en Ω (esto es, $\gamma^* \subset \Omega$), entonces*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Demostración. No es restrictivo suponer que γ tiene derivada continua en $[a, b]$. Por la regla de la cadena tenemos que para todo $t \in [a, b]$ se verifica

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

Luego, por la regla de Barrow para funciones de variable real, tenemos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

como pretendíamos demostrar. □

Deducimos de aquí otra condición necesaria para la existencia de primitivas.

9.25 Corolario (Condición necesaria para la existencia de primitivas). *Si una función continua f en un abierto Ω admite una primitiva en Ω , entonces la integral curvilínea de f es la misma para todos los caminos en Ω que tienen los mismos puntos inicial y final. En particular, para todo camino cerrado γ en Ω se verifica que $\int_{\gamma} f(w) dw = 0$.*

9.26 Ejemplo. Sea $f(z) = \frac{1}{z}$ para $z \in \mathbb{C}^*$. Tenemos que

$$\int_{C(0,1)} f(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i \neq 0$$

luego f no tiene primitiva en \mathbb{C}^* .

Observa que f es una función holomorfa en el dominio \mathbb{C}^* . ◆

El anterior corolario nos dio una condición necesaria para la existencia de primitiva de una función. Esta condición es también suficiente.

9.27 Teorema (Caracterización de existencia de primitivas). *Sea f una función continua en un abierto Ω . Equivalen las siguientes afirmaciones:*

- a) f tiene primitivas en Ω .*
- b) La integral de f sobre todo camino cerrado en Ω es nula.*

Este resultado recuerda a la caracterización de los campos vectoriales conservativos. Acabamos de ver que el hecho de que una función sea holomorfa en un dominio no garantiza que dicha función tenga primitivas en dicho dominio. La situación aquí es muy parecida a lo que ocurría con los campos vectoriales localmente conservativos. De hecho, tenemos el siguiente resultado.

9.28 Proposición. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en Ω . Pongamos $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, y sean $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$, $\mathbf{G}(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$. Entonces se verifica que los campos vectoriales \mathbf{F} y \mathbf{G} son localmente conservativos en Ω .

Demostración. Basta tener en cuenta las ecuaciones de Cauchy–Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad - \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad (x, y) \in \Omega \quad (9.2)$$

La primera de ellas nos dice que \mathbf{G} es localmente conservativo, y la segunda nos dice que \mathbf{F} es localmente conservativo en Ω . □

El siguiente resultado deja ya claras las cosas.

9.29 Teorema. Toda función holomorfa en un dominio simplemente conexo tiene primitivas en dicho dominio.

Demostración. Sea Ω un dominio simplemente conexo en \mathbb{C} . Intuitivamente, Ω es un dominio “sin agujeros”. Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, y sea γ un camino de Jordan cerrado contenido en Ω . Por ser Ω simplemente conexo, la región *interior* del camino γ queda dentro de Ω . Llamemos D a dicha región. En esta situación, podemos aplicar el teorema de Green a los campos vectoriales $\mathbf{F}(x, y) = (u(x, y), -v(x, y))$, $\mathbf{G}(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$ (pues tiene derivadas parciales continuas en un abierto que contiene a $D \cup \gamma^*$) y, teniendo en cuenta las condiciones de Cauchy–Riemann (9.2), obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) = 0 \\ \int_{\gamma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de integral de línea compleja (9.1), se sigue que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$. Podemos ahora aplicar el teorema (9.27) que nos dice que f tiene primitivas en Ω . □

Este resultado nos dice que si Ω es un **dominio simplemente conexo**, entonces se verifica que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo camino cerrado γ en Ω .

9.3.2. Índice de un punto respecto a un camino cerrado

Vamos a cambiar ahora el punto de vista y, en vez de fijarnos en el dominio Ω , vamos a fijarnos en el camino γ .

Problema. Sea Ω un abierto cualquiera en \mathbb{C} . ¿Qué condiciones debe verificar un camino cerrado γ en Ω para que la integral de toda función holomorfa en Ω sobre dicho camino γ sea nula?

Por ejemplo si $\Omega = \mathbb{C}^*$, y $\gamma = C(0,1)$ (la circunferencia unidad), entonces γ es un camino en Ω , la función $f(z) = 1/z$ es holomorfa en Ω , y $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \neq 0$. Por tanto este camino *no* satisface lo que queremos. Observa que este camino rodea un punto (el origen) que está *fuera* de Ω .

Veamos que el problema que hemos planteado tiene mucho interés. Supongamos que γ es un camino cerrado en un abierto Ω y se verifica que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para cualquier función f holomorfa en Ω . Sea f una función holomorfa en Ω y elijamos un punto $z \in \Omega$ por el que no pasa el camino γ , esto es $z \notin \gamma^*$. Dicho punto estará fijo en lo que sigue. La aplicación $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h(w) = \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

es holomorfa en Ω (pues es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ por lo que el lema de Riemann (9.17) nos asegura que es holomorfa en todo Ω) y deberá ser $\int_{\gamma} h(w) dw = 0$. Tenemos así que

$$0 = \int_{\gamma} h(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

de donde

$$f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw \quad (z \in \Omega \setminus \gamma^*) \quad (9.3)$$

Observa que esta es una *fórmula de representación* pues permite calcular los valores de f en puntos $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ conocidos los valores de f sobre el camino γ^* . Dicha fórmula nos dice que los valores de una función holomorfa en un dominio están determinados de manera única en cuanto que los conozcamos sobre los puntos de una curva. Claro está, que para que esta fórmula sea eficaz debemos saber lo que significa la integral

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

De hecho, nuestro próximo objetivo es calcular esta integral.

9.30 Proposición. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino cerrado en \mathbb{C} , para cada punto $z \in \mathbb{C}$ por el que no pasa el camino γ , esto es $z \notin \gamma^*$, definimos

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*) \quad (9.4)$$

Entonces se verifica que $F(z)$ es un número entero.

Demostración. Llamemos $\sigma(t) = \gamma(t) - z$ al camino trasladado de γ . Tenemos que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt$$

Observa que $\sigma(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$. No es restrictivo suponer que γ , y por tanto también σ , tiene derivada continua en $[a, b]$. Haciendo el cociente indicado, podremos escribir

$$\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} = \alpha(t) + i\beta(t)$$

donde α y β serán funciones continuas reales en $[a, b]$. Sabemos que una función real continua e un intervalo tiene primitivas. Sean $A(t)$, $B(t)$ primitivas de α y β en $[a, b]$. Definamos $h(t) = A(t) + iB(t)$. Tenemos que

$$h'(t) = A'(t) + iB'(t) = \alpha(t) + i\beta(t) = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

Es decir, $h(t)$ es una primitiva de la función que integramos, por lo que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt = \frac{h(b) - h(a)}{2\pi i} \quad (9.5)$$

Calculemos $h(b) - h(a)$. Tenemos que

$$\frac{d}{dt} (e^{-h(t)} \sigma(t)) = e^{-h(t)} (-h'(t)\sigma(t) + \sigma'(t)) = e^{-h(t)} \left(-\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} \sigma(t) + \sigma'(t) \right) = 0$$

Deducimos que $e^{-h(t)} \sigma(t) = e^{-h(a)} \sigma(a)$ para todo $t \in [a, b]$. Como h está determinada salvo una constante aditiva, podemos suponer que $e^{-h(a)} \sigma(a) = 1$. Hemos obtenido que

$$\sigma(t) = e^{-h(t)} \quad t \in [a, b]$$

Esto nos dice que $h(t)$ es un logaritmo de $\sigma(t)$ y, por tanto, tiene que ser de la forma $h(t) = \log(|\sigma(t)|) + i\theta(t)$, donde $\theta(t)$ es un argumento de $\sigma(t)$, $\theta(t) \in \text{Arg}(\sigma(t))$. Además como h es derivable, las funciones $\log(|\sigma(t)|)$ y $\theta(t)$ han de ser derivables y, por tanto, continuas. Resulta así que

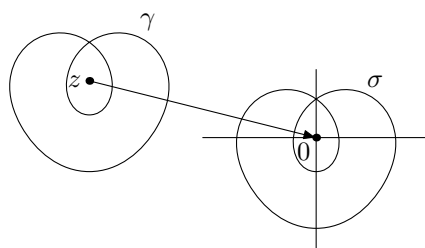
$$h(b) - h(a) = \log(|\sigma(b)|) + i\theta(b) - \log(|\sigma(a)|) + i\theta(a) = i(\theta(b) - \theta(a))$$

Donde hemos tenido en cuenta que, al ser la curva γ cerrada, $\sigma(a) = \gamma(a) - z = \gamma(b) - z = \sigma(b)$. Como $\theta(a)$ y $\theta(b)$ son dos argumentos de un mismo número complejo ($\sigma(a) = \sigma(b)$), deben diferenciarse en un múltiplo entero de 2π , luego tiene que haber un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta(b) - \theta(a) = 2k\pi$. Con ello tenemos que $h(b) - h(a) = 2k\pi i$. Finalmente, de (9.5), obtenemos que $F(z) = k \in \mathbb{Z}$. \square

¿Qué representa el valor del entero dado por (9.4)? Observa que en la demostración anterior hemos obtenido que

$$F(z) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

La función $\theta(t) \in \text{Arg}(\sigma(t))$ es un argumento *que varía de forma continua cuando recorremos los puntos de la curva $\sigma(t)$* . Cada vez que damos una vuelta completa el argumento aumenta 2π , por tanto $\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$ es igual al número de veces que la curva σ rodea al origen y, como, $\sigma(t) = \gamma(t) - z$, es igual



también al número de veces que la curva γ rodea al punto z . Dicho número se llama **índice de z respecto a γ** y se representa por $\text{Ind}_\gamma(z)$. En resumen, la integral

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z} dw \quad (9.6)$$

es un número entero que es igual al número de veces que la curva γ rodea al punto z .

Ya puedes adivinar que la integral que figura en (9.6) no hace falta calcularla porque, en la práctica, siempre integramos sobre curvas sencillas y sabemos cuántas veces rodean a cada punto del plano.

9.3.3. Cadenas

En lo que sigue nos va a interesar integrar en varios caminos al mismo tiempo por lo que es conveniente introducir la terminología de “cadenas”. Una **cadena** es una suma formal finita de caminos, $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$. El símbolo “+” que hemos escrito en la expresión anterior no representa a la suma de funciones ni a la yuxtaposición de caminos, es una manera de decir que la cadena Γ está formada por varios caminos. Por ejemplo podemos considerar la cadena

$$\Gamma = C(0, 1) + C(i, 2) - 2C(1 + i, 1/2)$$

que está formada por tres circunferencias, la última de ellas considerada dos veces y recorrida en sentido contrario.

Por definición, para integrar una función sobre una cadena se integra la función sobre cada uno de los caminos que forman la cadena y se suman dichas integrales.

$$\int_\Gamma f(z) dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z) dz$$

Dadas dos cadenas Γ y $\Sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_m$ entonces su suma es otra cadena compuesta por todos los caminos que forman Γ y todos los que forman Σ ,

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \dots + \gamma_n + \sigma_1 + \dots + \sigma_m$$

Evidentemente se cumple

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z) dz = \int_\Gamma f(z) dz + \int_\Sigma f(z) dz$$

Como caso particular de cadenas tenemos los **ciclos**. Un ciclo es una cadena formada por caminos cerrados. En el ejemplo anterior Γ era un ciclo pues estaba formado por circunferencias.

Si Γ es un ciclo se define el índice de un punto $z \notin \Gamma^*$ respecto a Γ como la suma de los índices del punto z respecto a cada uno de los caminos cerrados que forman el ciclo.

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \sum_{j=1}^n \text{Ind}_{\gamma_j}(z)$$

9.31 Definición. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y un ciclo Γ en Ω , diremos que Γ es **nulhomólogo** respecto de Ω si el índice de Γ con respecto a todo punto que no esté en Ω es cero:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0 \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

9.4. Teorema de Cauchy y fórmula de Cauchy

Pero volvamos a nuestro problema. Supongamos que γ es un camino cerrado en un abierto Ω y se verifica que $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ para cualquier función f holomorfa en Ω . Entonces si z es un punto que no está en Ω , como la función $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ es holomorfa en Ω , deberá cumplirse que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w-z} dw = 0$$

Es decir, $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$ para todo $z \notin \Omega$. En otros términos, el camino cerrado γ no puede rodear a ningún punto fuera de Ω . Dicho de otra forma γ debe ser nulhomólogo respecto a Ω . Esta condición necesaria resulta ser también suficiente.

9.32 Teorema (Teorema de Cauchy y Fórmula Integral de Cauchy). *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , Γ un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω . Entonces para toda función holomorfa, f , en Ω se verifica:*

$$\text{I) } \int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

$$\text{II) } f(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw, \text{ para todo } z \in \Omega \setminus \Gamma^* \text{ (fórmula de Cauchy)}$$

$$\text{III) } f^{(k)}(z) \text{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw, \text{ para todo } z \in \Omega \setminus \Gamma^* \text{ y para todo } k \in \mathbb{N} \text{ (fórmula de Cauchy para las derivadas)}$$

9.33 Corolario. *Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y supongamos que $\bar{D}(a, R) \subset \Omega$. Entonces para todo $z \in D(a, R)$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$\text{I) } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{f(w)}{w-z} dw \text{ (Fórmula de Cauchy para una circunferencia)}$$

$$\text{II) } f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C(a, R)} \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw$$

El siguiente resultado establece una relación entre dominios simplemente conexos y caminos cerrados.

9.34 Teorema. *Un dominio Ω es simplemente conexo si y sólo si todo camino cerrado en Ω es nulhomólogo respecto de Ω .*

Es cómodo introducir la siguiente terminología.

9.35 Definición. Dos ciclos Γ, Σ en un abierto Ω se dicen **homológicamente equivalentes** respecto de Ω si se verifica que

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = \text{Ind}_{\Sigma}(z) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

El teorema de Cauchy afirma que si Γ, Σ son ciclos en un abierto Ω homológicamente equivalentes respecto de Ω , entonces $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Sigma} f(z) dz$ para toda función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Este teorema permite reducir el cálculo de integrales de funciones holomorfas sobre caminos cerrados al cálculo de integrales sobre circunferencias.

El siguiente ejemplo es ilustrativo de esto. Sea el abierto Ω el plano complejo \mathbb{C} al que le hemos quitado tres puntos a, b y c . Pretendemos calcular la integral de una función holomorfa en Ω a lo largo del camino Γ que se presenta en la figura 9.1

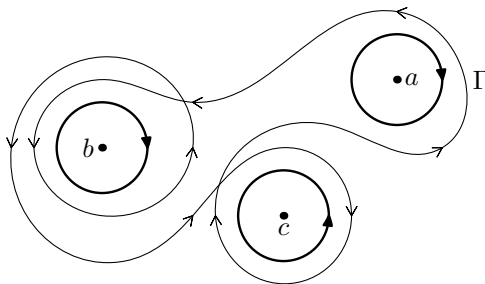


Figura 9.1: Un camino complicado

Teniendo en cuenta que el índice de los puntos a, b y c respecto de Γ es el número de veces que Γ los rodea (teniendo en cuenta que el sentido es positivo si los rodea en sentido contrario al de las agujas del reloj), a la vista de la figura tenemos:

$$\text{Ind}_{\Gamma}(a) = 1, \quad \text{Ind}_{\Gamma}(b) = 2, \quad \text{Ind}_{\Gamma}(c) = -1$$

Consideremos las circunferencias $C(a, \rho)$, $C(b, \rho)$ y $C(c, \rho)$ que se presentan en la figura y formemos el ciclo

$$\Sigma = C(a, \rho) + 2C(b, \rho) - C(c, \rho)$$

El ciclo Σ es homológicamente equivalente al ciclo Γ respecto de Ω . El teorema de Cauchy nos dice que en estas condiciones para cualquier función holomorfa en Ω , f , se cumple que

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Sigma} f(z) dz = \int_{C(a, \rho)} f(z) dz + 2 \int_{C(b, \rho)} f(z) dz - \int_{C(c, \rho)} f(z) dz$$

De esta forma hemos reducido el cálculo de la integral de cualquier función holomorfa sobre el camino Γ a tres integrales sobre circunferencias. Observa que podemos tomar los radios de estas circunferencias arbitrariamente pequeños. Esto nos dice que la integral $\int_{\Gamma} f(z) dz$ va a depender solamente del comportamiento de f en los puntos a , b , y c .

9.4.1. Singularidades aisladas. Teorema de los residuos

9.4.1.1. Singularidades aisladas

Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ (el abierto Ω puede muy bien ser un disco abierto centrado en a). En esta situación se dice que el punto a es una **singularidad aislada** de f . Pueden ocurrir los siguientes casos:

- Existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w \in \mathbb{C}$. En tal caso, definiendo $f(a) = w$ tenemos, en virtud del lema de Riemann, que f es holomorfa en Ω . Se dice que a es un **punto regular** de f o que a es una **singularidad evitable** de f .
- Existe $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$. En tal caso se dice que a es un **polo** de f .
- No existe el límite de f en a . Se dice entonces que a es una **singularidad esencial** de f .

9.36 Definición. Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$. Supongamos que $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$. Se define el residuo de f en a como

$$\text{Res}(f(z), a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} f(z) dz$$

Observa que la integral en esta definición no depende de r pues si consideras otro disco $\bar{D}(a, s) \subset \Omega$, el ciclo $\Gamma = C(a, r) - C(a, s)$ es nulhomólogo respecto de $\Omega \setminus \{a\}$ y, como f es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$, el teorema de Cauchy nos dice que $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, es decir, $\int_{C(a, r)} f(z) dz = \int_{C(a, s)} f(z) dz$.

9.37 Teorema (de los residuos). Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_q\}$ un conjunto finito de puntos en Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus S$. Si Γ es un ciclo en Ω nulhomólogo respecto de Ω entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z); a_j) \text{Ind}_{\Gamma}(a_j)$$

Idea de la demostración. Tomamos $\rho > 0$ de forma que $\bar{D}(a_k, \rho) \subseteq \Omega$ y $\bar{D}(a_k, \rho) \cap A = \{a_k\}$ para $k = 1, \dots, q$. Para cada k llamamos $m_k = \text{Ind}_{\Gamma}(a_k)$ y $\gamma_k = m_k C(a_k, \rho)$. Construimos el ciclo

$$\Sigma = \sum_{j=1}^q \gamma_j$$

Es fácil probar que el ciclo $\Gamma - \Sigma$ es nulhomólogo respecto del abierto $\Omega \setminus S$. En consecuencia, podemos aplicar el teorema general de Cauchy a dicho abierto para el ciclo $\Gamma - \Sigma$ y la función f obteniendo que

$$0 = \int_{\Gamma - \Sigma} f(z) dz = \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Sigma} f(z) dz$$

despejando obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Sigma} f(z) dz = \sum_{j=1}^q \int_{\gamma_j} f(z) dz = \\ &= \sum_{j=1}^q m_j \int_{C(a_j, \rho)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Ind}_{\Gamma}(a_j) \text{Res}(f(z); a_j) \end{aligned}$$

que es la fórmula que queríamos probar.

La utilidad del teorema de los residuos depende de que seamos capaces de calcular los residuos de una función holomorfa en sus singularidades aisladas.

9.4.2. Cálculo de residuos

Sea Ω un abierto en \mathbb{C} , a un punto de Ω y sea f una función holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$.

- Supongamos que a es un punto regular de f . Entonces $\text{Res}(f(z), a) = 0$. Pues podemos definir $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ con lo que f es holomorfa en Ω y si $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$, como consecuencia del teorema de Cauchy tenemos que $\int_{C(a, r)} f(z) dz = 0$.
- Supongamos que a es un polo de f . Entonces se verifica que hay un número natural $k \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = w \neq 0$. Se dice que a es un **polo de orden** k de la función f . Sea $g(z) = (z-a)^k f(z)$ para $z \in \Omega$, $z \neq a$, y sea $g(a) = w$. Entonces, por el lema de Riemann, g es holomorfa en Ω . Sea $\bar{D}(a, r) \subset \Omega$. Por el teorema de Taylor sabemos que

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n \quad z \in D(a, r)$$

donde $d_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$. Deducimos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{d_n}{(z-a)^{k-n}} + \sum_{n=k}^{\infty} d_n (z-a)^{n-k} \quad z \in D(a, r) \setminus \{a\} \quad (9.7)$$

Es usual emplear la siguiente notación para la serie 9.7. Dicha serie se escribe en la forma

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad z \in D(a, r) \setminus \{a\} \quad (9.8)$$

Observa que con ello tenemos que $c_{-1} = d_{k-1}$.

Si ahora integramos $f(z)$ en la circunferencia $C(a, r)$ y tenemos en cuenta que $(z-a)^n$ tiene primitiva $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq -1$ por lo que $\int_{C(a, r)} (z-a)^n dz = 0$ para todo entero $n \neq -1$, obtenemos que las integrales de todos los términos de la serie 9.8 son nulas excepto la que corresponde al sumando para $n = -1$. Por tanto

$$\int_{C(a, r)} f(z) dz = \sum_{n=-k}^{\infty} \int_{C(a, r)} c_n (z-a)^n dz = \int_{C(a, r)} \frac{c_{-1}}{z-a} dz = 2\pi i c_{-1}$$

Deducimos que

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} f(z) dz = \text{Res}(f(z), a)$$

Lo interesante es que podemos calcular $c_{-1} = d_{k-1}$ derivando. Pues

$$c_{-1} = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]$$

Hay que calcular el límite indicado porque al evaluar la derivada $\frac{d}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)]$ en el punto a suele aparecer una indeterminación.

- Supongamos, finalmente, que a es una singularidad esencial de f . Entonces se prueba que es posible representar a la función f por medio de una serie del tipo siguiente.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad z \in D(a, r) \setminus \{a\} \quad (9.9)$$

donde hay infinitos coeficientes c_{-n} distintos de cero. Razonando igual que antes también se obtiene en este caso que $c_{-1} = \text{Res}(f(z), a)$. Aunque ahora no disponemos de una forma para calcular c_{-1} que no sea obtener el desarrollo 9.9.

9.38 Definición. Una serie del tipo $\{\sum_{k=-n}^{k=n} c_k (z-a)^k\}$ se dice que es una **serie de Laurent** centrada en a . Dichas series son una generalización de las series de potencias. Cuando dicha serie converge el límite se nota por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k (z-a)^k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n$$

Usaremos la notación $A(a; r, R)$ para indicar el anillo abierto de centro a radio interior r y radio exterior R donde $0 \leq r < R \leq +\infty$.

$$A(a; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < R\}$$

El siguiente resultado es una generalización del teorema de Taylor.

9.39 Teorema (Desarrollo en serie de Laurent). Sean $0 \leq r < R \leq +\infty$, $a \in \mathbb{C}$ y f una función holomorfa en el anillo $A(a; r, R)$. Entonces hay una única serie de Laurent centrada en a verificando que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \quad \text{para todo } z \in A(a; r, R)$$

Además los coeficientes de la serie vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \quad n \in \mathbb{Z}$$

siendo $r < \rho < R$.

9.4.2.1. Polos de cocientes de funciones holomorfas

- En muchas ocasiones la función que integramos viene dada como cociente de dos funciones holomorfas $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ donde suponemos que g, h son funciones holomorfas en un abierto Ω . En tal caso las únicas posibles singularidades de f son los ceros de h . Supongamos que $a \in \Omega$ y que la función h y sus derivadas hasta la de orden $k - 1$ se anulan en el punto a y la derivada de orden k de h es distinta de cero en a (se dice entonces que h tiene un **cero de orden k** en a). Supongamos también que $g(a) \neq 0$. Entonces, en virtud del teorema de Taylor, podemos escribir para $z \in D(a, r) \subset \Omega$:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-k}$$

Poniendo para $z \in D(a, r)$ $\varphi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{h^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-k}$, la función φ es holomorfa en $D(a, r)$ y $\varphi(a) \neq 0$. Deducimos que

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{\varphi(z)} = \frac{g(a)}{\varphi(a)} \neq 0$$

por lo que f tiene en a un polo de orden k .

- Supongamos que $\lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z) = w$, entonces se verifica que $\text{Res}(f(z), a) = w$. En particular, supongamos que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ donde g, h son funciones holomorfas en un abierto Ω , y suponemos que $g(a) \neq 0$ y h tiene un cero simple, es decir, de orden 1 en a . Entonces, según acabamos de ver, f tiene un polo simple, es decir, de orden 1 en a . Entonces tenemos que

$$\text{Res}(f(z), a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{g(z)}{h(z)} = g(a) \lim_{z \rightarrow a} \frac{z-a}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

9.5. Aplicaciones del teorema de los residuos para calcular integrales reales

9.5.1. Integrales del tipo $\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t) dt$

Suponemos que R es una función racional de dos variables continua en la circunferencia unidad. La idea para calcular esta integral por el método de residuos es convertirla en una integral sobre $C(0, 1)$ de una función compleja que también va a ser racional. Para ello recordemos que

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{e^{2it} - 1}{2ie^{it}} \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{2it} + 1}{2e^{it}}$$

Por tanto, se verifica que

$$\int_{C(0,1)} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz} dz = \int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t) dt.$$

En consecuencia, si notamos $f(z) = R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right) \frac{1}{iz}$. Tenemos que $f(z)$ es una función racional por lo que sus únicas posibles singularidades son polos. Para calcular la integral sólo nos interesan

los polos que están dentro del disco unidad. Supongamos que estos son $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$. El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{-\pi}^{\pi} R(\cos t, \sin t) dt = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j)$$

9.40 Ejemplo. Se trata de calcular la integral $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5 + 4 \cos t} dt$. Según acabamos de ver

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{1}{5 + 2 \frac{z^2 + 1}{z}} \frac{1}{iz} dz = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{2z^2 + 5z + 2} dz = \frac{1}{i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{(2z+1)(z+2)} dz$$

Por tanto

$$I = \frac{1}{i} 2\pi i \text{Res}\left(\frac{1}{(2z+1)(z+2)}, \frac{-1}{2}\right) = 2\pi \lim_{z \rightarrow -1/2} (z+1/2) \frac{1}{(2z+1)(z+2)} = \pi \lim_{z \rightarrow -1/2} \frac{1}{(z+2)} = \frac{2}{3}\pi$$



9.5.2. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 2$.
3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

Para ello vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea Γ la poligonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α, β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\text{Ind}_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)}(z_j) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j\right)$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de α, β y ρ . Por tanto, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando α, β y ρ tienden hacia $+\infty$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

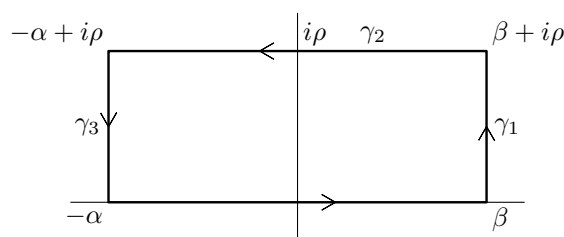


Figura 9.2: $\Gamma(\alpha, \beta, \rho)$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K > 0$ y $M > 0$ tales que

$$|z| \geq K \Rightarrow |f(z)| = \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad (9.10)$$

En lo que sigue, suponemos que α, β y ρ son mayores que K .

Pongamos ahora $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$ y $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$ (ver figura 9.2) y notamos $I_k = \int_{\gamma_k} f(z) dz$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) = \int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Así,

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \quad (9.11)$$

Acotamos ahora I_1 . Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 9.10, se tiene que

$$|f(z)| = |f(\beta + it)| \leq \frac{M}{\beta^2 + t^2}$$

Por tanto,

$$|I_1| = \left| \int_0^{\rho} f(\beta + it) i dt \right| \leq \int_0^{\rho} |f(\beta + it)| dt \leq \int_0^{\rho} \frac{M}{\beta^2 + t^2} dt = \frac{M}{\beta} \left[\arctan \frac{t}{\beta} \right]_{t=0}^{t=\rho} \leq \frac{M}{\beta} \frac{\pi}{2}$$

La integral I_3 se acota de la misma forma, resultando $|I_3| \leq \frac{M}{\alpha} \frac{\pi}{2}$.

Por último, para acotar I_2 se usa que para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > K$, que $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 9.10, se tiene que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2}$. Por tanto

$$|I_2| = \left| \int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z) dz \right| \leq \int_{-\alpha}^{\beta} |f(t + i\rho)| dt \leq \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{M}{t^2 + \rho^2} dt \leq (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho^2}$$

En vista de 9.11 y de las acotaciones anteriores se tiene que

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{M}{\beta} \frac{\pi}{2} + \frac{M}{\alpha} \frac{\pi}{2} + (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho^2}$$

Como en esta desigualdad la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite cuando $\rho \rightarrow +\infty$ con lo que obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right) \quad (9.12)$$

Tomando ahora límite para $\alpha \rightarrow +\infty$ y $\beta \rightarrow +\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene que la función $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es impropriamente integrable en \mathbb{R} y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \operatorname{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

Observa que la acotación 9.12 proporciona una cota del error que se comete al aproximar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ por una “integral parcial” $\int_{-\alpha}^{\beta} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

9.41 Ejemplo. Queremos calcular la integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx$$

donde suponemos que $a > 0$ y $b > 0$ son distintos. La función que integramos tiene dos polos simples en el semiplano superior en los puntos $i a, i b$. Según acabamos de ver

$$I = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}, i a \right) + 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}, i b \right)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}, i a \right) &= \lim_{z \rightarrow i a} (z - i a) \frac{1}{(z - i a)(z + i a)(z^2 + b^2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow i a} \frac{1}{(z + i a)(z^2 + b^2)} = \frac{1}{2i a(b^2 - a^2)} \end{aligned}$$

Análogamente

$$\operatorname{Res} \left(\frac{1}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)}, i b \right) = \frac{1}{2i b(a^2 - b^2)}$$

Luego

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{2i a(b^2 - a^2)} + \frac{1}{2i b(a^2 - b^2)} \right) = \frac{\pi}{a b(a + b)}$$



9.5.3. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes y $\lambda > 0$.
2. $\operatorname{grado}(Q) \geq \operatorname{grado}(P) + 1$.

3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

Para ello vamos a aplicar el teorema de los residuos a la función $f(z) = \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C}$. Sea Γ la polygonal $\Gamma(\alpha, \beta, \rho) = [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$ donde α, β y ρ son números positivos que tomamos suficientemente grandes para que todos los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior queden en el interior del rectángulo Γ de modo que $\text{Ind}_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)}(z_j) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

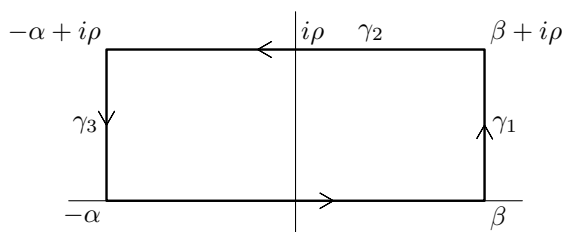


Figura 9.3: $\Gamma(\alpha, \beta, \rho)$

El teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

Observa que en esta igualdad el lado de la derecha es independiente de α, β y ρ . Por tanto, será suficiente para nuestros propósitos probar que cuando α, β y ρ tienden hacia $+\infty$ se verifica que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$$

Por la hipótesis sobre los grados de los polinomios P y Q se tiene que existen números $K > 0$ y $M > 0$ tales que

$$|z| \geq K \Rightarrow \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|} \tag{9.13}$$

En lo que sigue, suponemos que α, β y ρ son mayores que K .

Pongamos ahora $\gamma_1 = [\beta, \beta + i\rho]$, $\gamma_2 = [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]$ y $\gamma_3 = [-\alpha + i\rho, -\alpha]$ (ver figura 9.3) y notamos $I_k = \int_{\gamma_k} f(z) dz$. Tenemos

$$2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) = \int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)} dz = \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx + I_1 + I_2 + I_3$$

Así,

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^{\beta} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \tag{9.14}$$

Acotamos ahora I_1 . Para $z \in [\beta, \beta + i\rho]^*$ tenemos que $z = \beta + it$ para $t \in [0, \rho]$. Además, como es $\beta > K$ será $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 9.13, se tiene que

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| = \left| \frac{P(\beta + it)}{Q(\beta + it)} \right| \leq \frac{M}{|\beta + it|} \leq \frac{M}{\beta}$$

Además $|e^{i\lambda(\beta + it)}| = e^{-\lambda t}$. Por tanto,

$$|I_1| = \left| \int_0^\rho f(\beta + it) i dt \right| \leq \int_0^\rho |f(\beta + it)| dt \leq \int_0^\rho \frac{M e^{-\lambda t}}{\beta} dt = \frac{M}{\beta} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} \right]_{t=0}^{\rho} = \frac{M}{\beta} \frac{1 - e^{-\lambda \rho}}{\lambda} \leq \frac{M}{\beta \lambda}$$

La integral I_3 se acota de la misma forma, resultando $|I_3| \leq \frac{M}{\alpha \lambda}$.

Por último, para acotar I_2 se usa que para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ tenemos, por ser $\rho > K$, que $|z| \geq K$ por lo que, en virtud de la desigualdad 9.13, se tiene que $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|} \leq \frac{M}{\rho}$. Además, para $z \in [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]^*$ es $\text{Im } z = \rho$. Por tanto $|e^{i\lambda z}| = e^{-\lambda \rho}$. Deducimos que

$$|I_2| = \left| \int_{[\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]} f(z) dz \right| \leq \int_{-\alpha}^\beta |f(t + i\rho)| dt \leq \int_{-\alpha}^\beta \frac{M e^{-\lambda \rho}}{\rho} dt = (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho} e^{-\lambda \rho}$$

En vista de 9.14 y de las acotaciones anteriores se tiene que

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^\beta \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{M}{\beta \lambda} + \frac{M}{\alpha \lambda} + (\alpha + \beta) \frac{M}{\rho} e^{-\lambda \rho}$$

Como en esta desigualdad la parte de la izquierda no depende para nada de ρ podemos fijar α y β y tomar límite cuando $\rho \rightarrow +\infty$ con lo que, teniendo en cuenta que $\lambda > 0$, obtenemos

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right) - \int_{-\alpha}^\beta \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right) \quad (9.15)$$

Tomando ahora límite para $\alpha \rightarrow +\infty$ y $\beta \rightarrow +\infty$ en la expresión de la derecha, se obtiene que la función $\frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)}$ es impropriamente integrable en \mathbb{R} y además

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

Observa que la acotación 9.15 proporciona una cota del error que se comete al aproximar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$ por una "integral parcial" $\int_{-\alpha}^\beta \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{Q(x)} dx$.

9.42 Ejemplo. Queremos calcular la integral $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{a^2 + x^2} dx$. Suponemos que $a > 0$ y $\lambda > 0$. Como

$$I = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2 + x^2} dx \right)$$

Calcularemos $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{a^2 + x^2} dx$. Según acabamos de ver, teniendo en cuenta que la función $\frac{1}{a^2 + z^2}$ solamente tiene un polo simple en el semiplano superior en el punto ai , se sigue que

$$J = 2\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2}, i \right) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow ai} (z - ai) \frac{e^{i\lambda z}}{(z - ai)(z + ai)} = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}$$

Luego $I = \pi \frac{e^{-\lambda a}}{a}$.



9.5.4. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)P(x)}{xQ(x)} dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas con coeficientes reales sin factores comunes, $P(0) \neq 0$, y $\lambda > 0$.
2. $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P)$.
3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q que están en el semiplano superior se verifica que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x)P(x)}{xQ(x)} dx = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{zQ(z)}, z_j \right) + \pi i \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{zQ(z)}, 0 \right) \right)$$

La forma de proceder es muy parecida a la anterior con una pequeña diferencia y es que ahora consideraremos el camino de integración $\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \epsilon)$ que puedes ver en la siguiente figura.

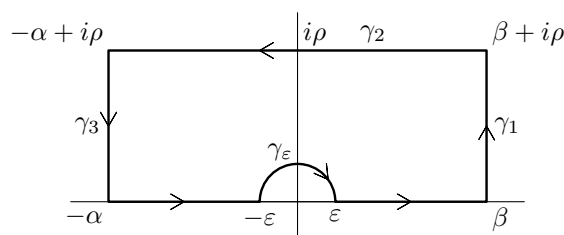


Figura 9.4: $\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \epsilon)$

Procediendo como en el caso anterior, considerando ahora la función $f(z) = \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{zQ(z)}$ teniendo en cuenta que $\text{Ind}_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \epsilon)}(0) = 0$, el teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{\Gamma(\alpha, \beta, \rho, \epsilon)} \frac{e^{i\lambda z} P(z)}{zQ(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\frac{e^{i\lambda z} P(z)}{zQ(z)}, z_j \right)$$

Las acotaciones que hemos obtenido antes en los segmentos γ_1, γ_2 y γ_3 siguen siendo válidas (observa que $\text{grado}(zQ(z)) \geq \text{grado}(P(z)) + 1$) por lo que obtenemos fácilmente la siguiente acotación análoga a la acotación 9.15 del caso anterior:

$$\left| 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) - \int_{-\alpha}^{\epsilon} f(x) dx - \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz - \int_{\epsilon}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(\frac{M}{\beta} + \frac{M}{\alpha} \right)$$

Tomando en esta desigualdad límites para $\alpha \rightarrow +\infty$ y $\beta \rightarrow +\infty$ se deduce que

$$2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) - \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x) dx \tag{9.16}$$

Sea $w = \text{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \frac{P(0)}{Q(0)}$. Teniendo en cuenta el sentido de recorrido de γ_ϵ tenemos que

$$\int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz + \pi i w = - \int_0^\pi \left(f(\epsilon e^{it}) - \frac{w}{\epsilon e^{it}} \right) i \epsilon e^{it} dt$$

Como

$$\left| f(\epsilon e^{it}) - \frac{w}{\epsilon e^{it}} \right| = \frac{1}{\epsilon} \left| \epsilon e^{it} f(\epsilon e^{it}) - w \right|$$

deducimos que

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz + \pi i w \right| \leq \int_0^\pi \left| \epsilon e^{it} f(\epsilon e^{it}) - w \right| dt \leq \pi \max \{ |z f(z) - w| : |z| = \epsilon \}$$

y como $\lim_{z \rightarrow 0} (z f(z) - w) = 0$, se sigue que $\max \{ |z f(z) - w| : |z| = \epsilon \} \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Hemos probado así que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} f(z) dz = -\pi i w = -\pi i \text{Res}(f(z), 0)$. Teniendo en cuenta la igualdad 9.16 deducimos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) + \pi i \text{Res}(f(z), 0) \quad (9.17)$$

Tomando ahora partes imaginarias y teniendo en cuenta que P y Q tienen coeficientes reales

$$\text{Im} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx$$

y teniendo en cuenta también que la función $x \mapsto \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)}$ es continua en $x = 0$ sin más que definirla en 0 igual a $\lambda \frac{P(0)}{Q(0)}$ por lo que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx$$

concluimos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\lambda x) P(x)}{x Q(x)} dx = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) + \pi i \text{Res}(f(z), 0) \right)$$

9.43 Ejemplo.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx = \text{Im} \left(\pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \right) = \text{Im} \left(\pi i \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iz}}{z} \right) = \pi$$



9.5.5. Integrales del tipo $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{xQ(x)} dx$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes, $P(0) \neq 0$, y $\lambda > 0$.

2. $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P)$.
3. $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para este tipo de integrales el método anterior se aplica exactamente igual hasta llegar a la igualdad 9.17. La dificultad ahora es que la función $\frac{e^{i\lambda x} P(x)}{xQ(x)}$ no es continua en 0 (de hecho dicha función se comporta en 0 como la función $1/x$) y la integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{xQ(x)} dx$ no existe. Todo lo que podemos obtener en este caso es lo que afirma la igualdad 9.17:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x) dx \right) = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) + \pi i \text{Res}(f(z), 0)$$

El lado de la izquierda de esta igualdad se llama valor principal de Cauchy de la integral impropia y se representa por V.P. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{xQ(x)} dx$. En consecuencia, podemos afirmar que

$$\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x} P(x)}{xQ(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) + \pi i \text{Res}(f(z), 0)$$

9.6. Aplicación del teorema de los residuos para sumar series

9.6.1. Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 2$.
3. $Q(k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

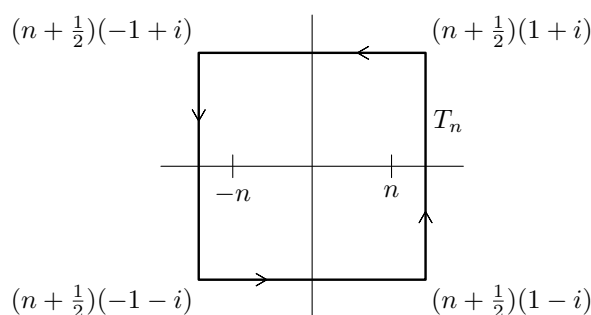
En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = - \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\pi \cotg(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

Para probarlo consideremos la función $\pi \cotg(\pi z)$. Dicha función tiene un polo simple en cada entero $k \in \mathbb{Z}$ y $\lim_{z \rightarrow k} (z - k\pi) \pi \cotg(\pi z) = 1$.

Aplicamos el teorema de los residuos a la función $f(z) = \pi \cotg(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}$ y al camino cerrado (es un cuadrado)

$$\Gamma_n = \left[\left(n + \frac{1}{2}\right)(-1 - i), \left(n + \frac{1}{2}\right)(1 - i), \left(n + \frac{1}{2}\right)(1 + i), \left(n + \frac{1}{2}\right)(-1 + i), \left(n + \frac{1}{2}\right)(-1 - i) \right].$$

Figura 9.5: Camino Γ_n

y obtenemos para n suficientemente grande que

$$\int_{\Gamma_n} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{k=-n}^n \text{Res}(f(z), k) + \sum_{j=1}^q \text{Res}(f(z), z_j) \right) \quad (9.18)$$

Como para $k \in \mathbb{Z}$ es

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), k) &= \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \cotg(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(k)}{Q(k)} \lim_{z \rightarrow k} (z - k) \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = \\ &= \frac{P(k)}{Q(k)} \pi \cos(k\pi) \lim_{z \rightarrow k} \frac{z - k}{\sin(\pi z)} = \frac{P(k)}{Q(k)} \pi \cos(k\pi) \frac{1}{\pi \cos(k\pi)} = \frac{P(k)}{Q(k)} \end{aligned}$$

y, en las hipótesis hechas, se comprueba que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_n} f(z) dz = 0$, deducimos de la igualdad 9.18 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \text{Res}(f(z), k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n \frac{P(k)}{Q(k)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = - \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\pi \cotg(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

9.44 Ejemplo. Sea $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} &= - \text{Res} \left(\pi \cotg \pi z \frac{1}{z^2 + \alpha^2}, i\alpha \right) - \text{Res} \left(\pi \cotg \pi z \frac{1}{z^2 + \alpha^2}, -i\alpha \right) = \\ &= \frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} \end{aligned}$$

De donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

Ahora deducimos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \alpha^2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \frac{e^{\alpha\pi} + e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} - \frac{1}{\alpha^2} \right) = \frac{\pi^2}{6}$$

donde el último límite puede calcularse por la regla de L'Hôpital. ◆

9.6.2. Series del tipo $\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$

Suponemos que

1. P y Q son funciones polinómicas sin factores comunes.
2. $\text{grado}(Q) \geq \text{grado}(P) + 1$.
3. $Q(k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

En estas condiciones si $\{z_1, z_2, \dots, z_q\}$ es el conjunto de los ceros del polinomio Q se verifica que

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)} = - \sum_{j=1}^q \text{Res} \left(\pi \operatorname{cosec}(\pi z) \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j \right)$$

9.6.3. Ejercicios

1. Calcula la integral $\int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ para $\gamma = C(1/4, 1/2)$, $\gamma = C(1, 1/2)$, $\gamma = C(2, 3)$.
2. Calcula la integral $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-1)}$ para $\gamma = C(0, 1/3)$, $\gamma = C(1, 1/3)$, $\gamma = C(0, 2)$.
3. Calcula $\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen}(2z)}{(z - \pi/4)^2(z^2 + 9)} dz$.
4. Calcula $\int_{C(0,r)} \frac{dw}{(w-a)(w-b)^m}$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $|b| < r < |a|$.
5. Dado $n \in \mathbb{N}$, calcula las siguientes integrales:

$$\int_{C(0,1)} \frac{\operatorname{sen} z}{z^n} dz; \int_{C(0,1)} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz; \int_{C(1, \frac{1}{2})} \frac{\log z}{z^n} dz$$

6. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|a| < |b|$. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\})$$

en cada uno de los anillos: $A(0; |a|, |b|)$, $A(0; |b|, +\infty)$, $A(a; 0, |b-a|)$ y $A(a; |b-a|, +\infty)$.

7. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\})$$

en cada uno de los anillos siguientes: $A(1; 0, 2)$ y $A(1; 2, +\infty)$.

8. Clasificar las singularidades de las funciones $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ siguientes:

a) $f(z) = \frac{1 - \cos(z)}{z^n} \quad \Omega = \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N}),$

b) $f(z) = z^n \operatorname{sen} \frac{1}{z} \quad \Omega = \mathbb{C}^* \quad (n \in \mathbb{N}),$

c) $f(z) = \frac{\log(1+z)}{z^2} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\},$

d) $f(z) = \frac{1}{z(1 - e^{2\pi iz})} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z},$

e) $f(z) = \frac{z}{\operatorname{tg} \pi z} \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$

9. Prueba, usando el teorema de los residuos, que para $0 < b < a$ se tiene:

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 t}{a + b \cos t} dt = \frac{\pi}{b^2} \left(a - \sqrt{a^2 - b^2} \right).$$

10. Prueba que, para $0 < a < 1$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{1 + a^2 - 2a \cos 2t} dt = \pi \frac{a^2 - a + 1}{1 - a}.$$

11. Prueba que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2 \cos t)^n \cos nt}{3 + 2 \cos t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} (3 - \sqrt{5})^n.$$

12. Prueba que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nt - \operatorname{sen} t) \exp(\cos t) dt = \frac{2\pi}{n!}.$$

13. Prueba que, para cualesquiera $a, b > 0$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}.$$

14. Prueba que, para $a > 0$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6}{(x^4 + a^4)^2} dx = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a}.$$

15. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera del sector circular

$$\left\{ z \in \mathbb{C}^* : |z| < R, 0 < \arg(z) < \frac{2\pi}{n} \right\}$$

con $R > 0$ suficientemente grande, calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^n} dx \quad (q, n \in \mathbb{N}, n - q \geq 2).$$

16. Integrando la función $f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$ a lo largo de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$ deducir que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}$$

17. Calcula la integral $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{x(x^2 + a^2)} dx$ donde $\lambda > 0$ y $a > 0$.

18. Prueba que, para $a, t > 0$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a^3} (1 + at) e^{-at}.$$

19. Prueba que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} \pi x}{x^2 - 5x + 6} dx = -5\pi.$$

20. Sea $a > 1$. Integrando a lo largo de la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$ ($n \in \mathbb{N}$) la función $z \rightarrow \frac{z}{a - e^{-iz}}$, Prueba que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + a^2 - 2a \cos x} dx = \frac{2\pi}{a} \log \left(\frac{1+a}{a} \right).$$

21. Integrando la función $z \rightarrow \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0, \varepsilon, R)$, Prueba que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

22. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0, \varepsilon, R)$, Prueba que, para $-1 < \alpha < 3$, $\alpha \neq 1$, se verifica:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4} (1-\alpha) \sec \frac{\pi\alpha}{2}.$$

23. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a, b) = [-a, b, b + 2\pi i, -a + 2\pi i, -a]$ ($a > 0, b > 0$), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}$$

donde α es un parámetro real y $0 < \alpha < 1$.

24. Prueba que, para $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$, se verifica:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t+t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^x+e^{2x}} dx = \frac{2\pi \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} (1-\alpha)}{\sqrt{3} \operatorname{sen} \pi\alpha}.$$

25. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$ ($0 < \varepsilon < R$), que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\frac{\alpha\pi}{2})}$$

donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

26. Integrando la función $f(z) = \frac{\log(i+z)}{1+z^2}$ a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$, $0 < \varepsilon < 1 < R$, Prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2.$$

27. Integrando una conveniente función a lo largo de la poligonal $[a, b, b+\pi i, a+\pi i, a]$, donde $a < 0 < b$, prueba que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x} + e^{-2x}} \operatorname{sen} 2x dx = \pi \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi} + e^{-\pi}}$$

28. Integrando la función

$$f(z) = \frac{z + i e^{iz} - i}{z^3}$$

a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$, Prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} dx = \frac{\pi}{4}$$

29. Pruébese, integrando una conveniente función compleja a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a, b) = [a, b, b + \pi i, a + \pi i, a]$ ($a < 0 < b$), que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2 \cos(\frac{\pi}{2} \alpha)}$$

donde α es un parámetro real y $-1 < \alpha < 1$.

30. Definamos, para cada $z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = \log(-iz) + i \frac{\pi}{2}$. Dado $\alpha \in]-1, 1[$, intégrese la función

$$f(z) = \frac{\exp(\alpha h(z)) h(z)}{1+z^2}$$

a lo largo de la frontera de la mitad del anillo $A(0; \varepsilon, R)$, $0 < \varepsilon < 1 < R$, que está contenida en el semiplano superior para obtener el valor de las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log(x)}{1+x^2} dx \text{ y } \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} dx$$

31. Justifíquese que, excepto para ciertos valores de a (que se precisarán en cada caso), se verifican las siguientes igualdades:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \coth \pi a - \frac{1}{a^2} \right);$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} (\cotg \pi a + \coth \pi a);$
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-a)^2} = \frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a};$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \operatorname{senh} \pi a};$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \pi a} + \frac{1}{\operatorname{senh} \pi a} \right).$