Licenciatura de Matemáticas

Universidad de Granada

Análisis Funcional

Juan Carlos Cabello Píñar

Granada, 2009

Índice general

Capítulo 1

Espacios normados.

Este primer capítulo tiene un marcado carácter preparatorio. Está subdivido en cinco lecciones:

Lección 1.1: **De los espacios vectoriales a los espacios normados.**

Esta primera lección nos va a introducir en algunos de los conceptos básicos que estudiaremos en este curso. Comenzaremos estudiando, en un nivel puramente algebraico, los espacios vectoriales y comentaremos la existencia de bases de Hamel en cualquier espacio vectorial arbitrario. En la segunda parte de la lección abandonaremos el nivel puramente algebraico para introducir los espacios normados y los espacios de Banach. La motivación más sencilla para introducir el concepto de norma sobre un espacio vectorial no es otro que la generalización de los conceptos de valor absoluto y módulo en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente. Terminaremos presentando una buena variedad de ejemplos de espacios normados y de espacios de Banach.

Lección 1.2: **Aplicaciones lineales continuas**

La segunda lección está dedicada al estudio de las aplicaciones lineales entre espacios normados. Entre los resultados presentados en este tema destacan las diversas caracterizaciones de las aplicaciones lineales y continuas entre espacios normados. Estas caracterizaciones permiten dotar de su norma natural al correspondiente espacio de aplicaciones lineales continuas.

Lección 1.3: **Dual de un espacio normado. Ejemplos.**

En la tercera lección damos entrada al espacio dual. Tendremos ocasión de presentar y describir el dual de algunos de los espacios normados clásicos. Es necesario mencionar que en este momento no disponemos de ningún resultado que nos garantice la no trivialidad del dual de un espacio normado arbitrario.

Lección 1.4: **Espacios normados de dimensión finita**

La cuarta lección se dedica al estudio de los espacios normados de dimensión finita. Nos gustaría destacar el resultado de Tihonov (1.935), que nos garantiza la continuidad de toda aplicación lineal que sale de un espacio normado finito dimensional (por tanto la equivalencia de dos cualesquiera normas en tal espacio) y el teorema de Riesz (1.918) que pone en equivalencia la dimensión finita de un espacio normado y la compacidad local de dicho espacio. Este último resultado justifica la filosofía que seguirá en adelante: la buena compatibilidad entre las estructuras algebraica y topológica, así como para poner de manifiesto la "escasez" de conjuntos compactos en dimensión infinita.

Lección 1.5: **Subespacios complementados. Cociente de espacios normados**

La última lección está dedicada a los subespacios complementados y al cociente de espacios normados. Mostraremos una técnica para construir algunos ejemplos de espacios normados muy destacados.

BIBLIOGRAFÍA: Los contenidos de este primer tema pueden ser complementados con los textos [11, 12, 13, 17, 19, 22, 24, 33] y [37]. El teorema de Tihonov se puede ver, por ejemplo, en [21].

1.1. De los espacios vectoriales a los espacios normados.

Durante todo este curso los espacios vectoriales estarán definidos sobre el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o sobre el cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$, y $\mathbb{K}$ denotará a cualquiera de estos dos cuerpos indistintamente. Cuando aparezcan varios espacios vectoriales relacionados, entenderemos que todos están definidos sobre el mismo cuerpo. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ entonces $|\alpha|$ denotará el valor absoluto o el módulo de α dependiendo si $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, respectivamente.

1.1.1. Espacios vectoriales de dimensión arbitraria.

Recordemos que un **espacio vectorial** sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío X dotado con dos aplicaciones

$$\begin{aligned} + : X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} : \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (\alpha, x) &\mapsto \alpha x \end{aligned}$$

tales que para todo $x, y, z \in X$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se verifican los siguientes axiomas

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
2. $x + y = y + x$;
3. Existe un elemento $O \in X$, denominado neutro o cero, tal que $O + x = x$;
4. Para cada $x \in X$ existe un elemento $-x \in X$, llamado opuesto de x, tal que $x + (-x) = O$;
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
8. $1x = x$.

Los elementos de un espacio vectorial X se denominan vectores, mientras que los elementos del cuerpo $\mathbb{K}$ se llaman escalares.

Dado un subconjunto M de un espacio vectorial X, diremos que M es un **subespacio vectorial** de X si, y solo si, para cualesquiera $x, y \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se satisface que $\alpha x + \beta y \in M$. Es obvio que M con las operaciones inducidas de X es un espacio vectorial.

Sea A un subconjunto no vacío de un espacio vectorial X. Puedo considerar la familia de todos los subespacios vectoriales que lo contienen. Es fácil probar que la intersección de los elementos de dicha familia es el menor subespacio vectorial de X que contiene al conjunto A. Dicho subespacio es llamado **envolvente lineal de** A, se representa por $\mathrm{Lin}(A)$ y es fácil probar que

$$\mathrm{Lin}(A) = \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n : n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in A,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

Diremos que A es **algebraicamente libre** o **linealmente independiente** si en la expresión

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0,$$

con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ y $x_1, \ldots, x_n \in A$, es obligado que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.

Diremos que un subconjunto B de un espacio vectorial X es una **base algebraica** o **base de Hamel** de X si B es un subconjunto no vacío y linealmente independiente verificando que $\mathrm{Lin}(B) = X$.

Se puede probar que todo subconjunto no vacío y linealmente independiente de un espacio vectorial está contenido en una base de Hamel de dicho espacio.

1.1.2. Espacios normados y espacios de Banach

La motivación más sencilla para introducir el concepto de norma sobre un espacio vectorial no es otro que la generalización de los conceptos de valor absoluto y módulo en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente.

Definición 1.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una **norma** sobre X es una aplicación $x \mapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$, verificando:*

1. $\|x\| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$ $(\forall x \in X)$;
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$;

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}, \ \forall x \in X.$

Un ***espacio normado*** *es un par* $(X, \|\cdot\|)$ *donde* X *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y* $\|\cdot\|$ *es una norma sobre* X.

En la práctica, para simplificar la notación, escribiremos X para referirnos al espacio normado $(X, \|\cdot\|)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ se dice que el espacio normado es real, y si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se dice que es complejo.

De la condición 3) es inmediato que $\|-x\| = \|x\|$ y entonces, por las condiciones 1) y 2), es claro que $||x|| \geq 0$. En efecto,

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\,\|x\|\,.$$

Por tanto, una norma sólo toma valores no negativos.

Veamos que en todo espacio vectorial se puede definir más de una norma. En efecto, si X es un espacio vectorial no trivial sobre $\mathbb{K}$ (el caso $X = \{0\}$ no merece comentario) y $\{e_i : i \in I\}$ es una base de Hamel de X, entonces todo vector $x \in X$ se expresa de manera única en la forma

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in I$ y el conjunto $\{i \in I : \alpha_i \neq 0\}$ es finito. Podemos definir, por ejemplo,

$$\|x\|_1 = \sum_{i \in I} |\alpha_i| \quad \text{ó} \quad \|x\|_\infty = \text{máx}\,\{|\alpha_i| : i \in I\}\,.$$

Es muy sencillo comprobar que de esta manera se obtienen dos normas sobre X llamadas respectivamente la norma suma y la norma del supremo asociadas a la base de Hamel $\{e_i : i \in I\}$.

1.1.3. Distancia inducida. Espacios de Banach

Podemos preguntarnos ahora qué tipo de consecuencias se desprenden del hecho de que un espacio vectorial sea dotado de una norma. Veamos en primer lugar, que si X es un espacio normado, entonces podemos definir una distancia en dicho espacio. Concretamente podemos ver que la aplicación

$$d : X \times X \longrightarrow X$$

definida por

$$d(x, y) := \|x - y\|,$$

es, en virtud de las propiedades de la norma, una distancia en X. Esta distancia d, llamada **distancia inducida** por la norma, nos permite, a su vez,

1) definir conjuntos que hacen en cierto modo un papel similar al de los intervalos en $\mathbb{R}$:

   Dado $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}$, notaremos

   $$B_X(a, r) = \{y \in X : \|y - a\| \leq r\},$$

   al conjunto que llamaremos **bola cerrada de centro** a **y radio** r (resp. notaremos

   $$B_X^\circ(a, r) = \{y \in X : \|y - a\| < r\},$$

   al conjunto que llamaremos **bola abierta de centro** a **y radio** r ó).

   Notaremos por

   $$B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \qquad \text{y} \qquad S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\},$$

   conjuntos que llamaremos **bola unidad cerrada** y esfera unidad de X, respectivamente.

2) definir el concepto de conjunto acotado

   Dado $A \subseteq X$, se dice que está **acotado** si $\exists r > 0$ tal que $A \subseteq B_X(0, r)$

3) hablar de convergencia de sucesiones:

   Dada una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X, se dice que es **convergente** si $\exists x \in X$ tal que

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que si } n \geq n_0, \text{ entonces } \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

   Dado que este valor x es único, se dice en este caso que la sucesión $\{x_n\}$ converge a x ó que x es el **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ (y se suele notar $\{x_n\} \to x$ ó $lim_n x_n = x$).

4) definir una topología en X, topología que recibe el nombre de **topología de la norma** en X:

   Sean $A \subseteq X$ y $x \in X$. Se dice que x es un **punto interior**, $x \in A^\circ$, si existe $r > 0$, tal que $B_X(x, r) \subseteq A$. Diremos que A es un **conjunto abierto** si todos sus puntos son interiores.

   Se dice que x es un **punto adherente**, $x \in \overline{A}$, si existe una sucesión $\{x_n\}$ en X convergente a x. Es fácil probar que A es un **conjunto cerrado** (respectivamente **denso**) si $A = \overline{A}$ (resp. $\overline{A} = X$).

   Igualmente se puede probar que A es **compacto** si toda sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, admite una " sucesión parcial " $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergiendo a un punto $a \in A$.

5) hablar de completitud:

   Dada una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio normado X, se dice que es una **sucesión de Cauchy**, si

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tal que si } n \geq n_0, h \in \mathbb{N} \text{ entonces } \|x_n - x_{n+h}\| < \varepsilon.$$

   Claramente toda sucesión convergente es también de Cauchy, mientras que el recíproco no es cierto (baste considerar en $\mathbb{Q}$ la sucesión $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$).

Nota 1.1.2

1. Es importante subrayar que existe una buena avenencia entre las estructuras topológica y algebráica de un espacio normado:

   - Las aplicaciones $\sigma : X \times X \to X$ y $\tau : \mathbb{K} \times X \to X$ definidas por $\sigma(x, y) = x + y$ y $\tau(\alpha, x) = \alpha x$ son continuas cuando consideramos las topologías naturales (inducidas por la topologías de las normas de X y de $\mathbb{K}$ y la topología producto correspondiente).

   - Si M un subespacio de un espacio normado X, entonces $\overline{M}$ es también un subespacio.

2. Se dice que dos normas definidas en un mismo espacio vectorial son **equivalentes** si ambas generan la misma topología en X. Es fácil probar que

   - $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son dos normas equivalentes en un espacio vectorial X si, y sólo si, existen números reales positivos m y M tales que $m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$, $\forall x \in X$.

   - Si X es un espacio vectorial infinito dimensional , entonces la norma suma y la norma del supremo para una determinada base de Hamel de X, son dos normas no equivalentes.

Definición 1.1.3 *Se dice que un espacio normado X es un* ***espacio de Banach*** *si toda toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X. En este caso diremos que la norma de X es completa.*

El espacio normado $(\mathbb{K}, |.|)$ es el ejemplo más sencillo de espacio de Banach.

Veamos que la completitud de un espacio de Banach se transfiere a sus subespacios cerrados.

Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X. La restricción a M de la norma de X define una norma sobre M, llamada norma inducida. Dicho espacio normado M recibe el nombre de **subespacio (normado)** de X.

Proposición 1.1.4 *Sea X un espacio de Banach y M un subespacio de X.*

1. *Si M es cerrado en X, entonces M es un espacio de Banach.*
2. *Si M es un espacio de Banach, entonces M es cerrado en X.*

1.1.4. Ejemplos

Este es un buen momento para introducir algunos ejemplos de espacios normados y espacios de Banach.

Ejemplo 1.1.5 ***Normas sobre*** $\mathbb{K}^n$.

1. *Norma euclídea*

   La función $x \mapsto \|x\|_2$, de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{R}$, definida por

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$$

   es una norma sobre $\mathbb{K}^n$, llamada **norma euclídea**.

   Esta norma no es más que un elemento de la familia de normas dadas por*:*

   una función $x \mapsto \|x\|_p$ *, de* $\mathbb{K}^n$ *en* $\mathbb{R}$*, con* $p \in [1, +\infty[$ *y definida por*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

   El espacio normado $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_p)$ *se designa por* ℓ_p^n*.*

   La única propiedad cuya demostración no es trivial es la propiedad triangular. Es fácil ver que ésta es consecuencia de la siguiente cadena de desigualdades:

   a*) **Desigualdad de Young**:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad (\forall a, b \geq 0) \quad (\forall p, q > 0, \quad con \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

   b*) **desigualdad de Hölder**:*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq (\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q)^{\frac{1}{q}},$$

   donde n *es un número natural,* $a_1, ..., a_n$*,* $b_1, ..., b_n$*, son escalares cualesquiera y* p *y* q *son dos números reales positivos tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*).*

   c*) **desigualdad de Minkowski**:*

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{k=1}^{n} a_k^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k^p)^{\frac{1}{p}},$$

   donde n *es un natural y* $a_1, ..., a_n$*,* $b_1, ..., b_n$*, son números reales no negativos y* $p \geq 1$*.*

2. Norma del máximo

También se usa frecuentemente la **norma del máximo** en $\mathbb{K}^n$ *definida por:*

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|,...,|x_n|\}, \ \forall x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{K}^n.$$

El espacio normado $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *se representa por* ℓ_∞^n.

Es fácil comprobar que, para todo $x \in \mathbb{K}^n$ y $p, p' \in [1, +\infty[$ con $p \leq p'$, se cumple que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_{p'} \leq \|x\|_p \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad y \quad \lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty,$$

lo que da coherencia a las notaciones empleadas.

La completitud del módulo o valor absoluto en $\mathbb{K}$ permite demostrar que $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach (para todo $1 \leq p \leq +\infty$). De hecho veremos más adelante que toda norma sobre un espacio vectorial de dimensión finita es completa.

Las normas sobre $\mathbb{K}^n$ del ejemplo anterior se pueden extender a espacios de dimensión infinita.

Ejemplo 1.1.6 ***Espacios de sucesiones***

Dado $p \in [1, +\infty[$, *consideremos el conjunto*

$$\ell_p = \left\{ \{x(n)\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n \geq 1} |x(n)|^p \ \textit{es convergente} \right\}.$$

Es fácil probar que dicho subconjunto es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. *Usando ahora de nuevo la cadena de desigualdades, se puede probar que la aplicación*

$$x \longmapsto \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ (\forall x = \{x(n)\} \in \ell_p),$$

define una norma completa sobre ℓ_p.

También es sencillo probar que *el conjunto*

$$\ell_\infty = \big\{ \{x(n)\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \{x(n)\} \ \textit{está acotada} \big\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *y que la aplicación*

$$x \longmapsto \|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}\,,\ (\forall x = \{x(n)\} \in \ell_\infty),$$

define una norma completa sobre ℓ_∞.

Destaquemos algunos subespacios importantes de ℓ_∞ :

(a) *El conjunto* c *de las sucesiones convergentes de escalares:*

$$c = \left\{\{x(n)\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x(n) \in \mathbb{K}\right\}$$

es un subespacio cerrado de ℓ_∞ *y, por tanto, es un espacio de Banach (1.1.4).*

$b)$ *El conjunto* c_0 *de las sucesiones de escalares que convergen a cero:*

$$c_0 = \left\{\{x(n)\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to+\infty} x(n) = 0\right\},$$

es un subespacio cerrado de c*, luego también es un espacio de Banach.*

(b) *El conjunto* c_{00} *de las sucesiones casinulas de escalares:*

$$c_{00} = \big\{\{x(n)\} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}\ \text{ es finito}\big\}$$

es un subespacio de c_0*. El espacio* c_{00} *no es completo. De hecho,* c_{00} *es denso en* c_0.

Ejemplo 1.1.7 ***Productos finitos de espacios normados.***

Sea $\{X_1, ..., X_n\}$ *una familia de finita de espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$*. El producto cartesiano*

$$\prod_{i=1}^{n} X_i = \{x = (x_1, x_2, ..., x_p) : x_i \in X_i\ /\forall 1 \leq i \leq n\},$$

puede dotarse de forma canónica (mediante las operaciones puntuales) de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$*. Este espacio vectorial recibe el nombre de* ***espacio vectorial producto*** *(o* ***producto directo****) de la familia* $\{X_1, ..., X_n\}$*. Es habitual, usar la notación*

$$X^n \ \textit{si}\ X_1 = \cdots = X_n = X.$$

Supongamos ahora que $\{X_1, ..., X_n\}$ *es una familia de finita de espacios normados sobre* $\mathbb{K}$. *Para cada* $1 \leq j \leq n$, *sea* $p_j : \prod_{i=1}^{n} X_i \to X_j$ *la proyección natural dada por*

$$p_j(x) = x_j, \ \forall x \in \prod_{i=1}^{n} X_i.$$

Recuérdese que la topología producto en $\prod_{i\in I} X_i$ *se define como la menor topología sobre* $\prod_{i\in I} X_i$ *que hace continuas a las proyecciones* $\{p_j : j \in I\}$.

Las relaciones:

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad (p \in [1, +\infty[)$$

$$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \text{máx}\{\|x_1\|, ..., \|x_n\|\}, \ \forall (x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i$$

definen normas sobre el espacio vectorial producto $\prod_{i=1}^{n} X_i$ *que generan la topología producto, y que son completas si, y sólo si, lo son las normas sobre* $X_1, ..., X_n$.

Ejemplo 1.1.8 ***Espacios de funciones continuas*** *Sea* Ω *un conjunto no vacío arbitrario. Definiendo*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(w)| : w \in \Omega\} \ \ (f \in \ell_\infty(\Omega))$$

se obtiene una norma completa sobre el espacio vectorial $\ell_\infty(\Omega)$ *de las funciones acotadas de* Ω *en* $\mathbb{K}$.

Se comprueba fácilmente que la convergencia en esta norma equivale a la convergencia uniforme en Ω, razón por la cual es conocida como **norma uniforme**.

En el caso de que Ω sea un espacio topológico, aparecen ciertos subespacios importantes del espacio normado $\ell_\infty(\Omega)$. Concretamente, tenemos:

El conjunto $C_b(\Omega)$ *de las funciones continuas y acotadas de* Ω *en* $\mathbb{K}$ *es un subespacio cerrado de* $\ell_\infty(\Omega)$ *y, por tanto, es un espacio de Banach.*

Si Ω *es un espacio topológico compacto Hausdorff, entonces toda función continua de* Ω *en* $\mathbb{K}$ *es siempre acotada y se nota simplemente por* $C(\Omega)$ *al espacio de las funciones continuas de* Ω *en* $\mathbb{K}$, *normado por*

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\{|f(w)| : w \in \Omega\}, \ \forall f \in C(\Omega).$$

Recordemos que un espacio topológico Ω es localmente compacto si todo punto de Ω tiene una base de entornos formada por conjuntos compactos. En el caso de que Ω sólo sea localmente compacto, tienen interés los dos espacios siguientes:

Definición 1.1.9 *Sea Ω un espacio topológico y $f : \Omega \to \mathbb{K}$ una función. Se dice que f* ***se anula en el infinito*** *si para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto*

$$\{w \in \Omega : |f(w)| \geq \varepsilon\}$$

es compacto. Se nota $C_0(\Omega)$ al conjunto de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{K}$ que se anulan en el infinito.

Se llama ***soporte de*** *f, y lo notamos $sop(f)$, al conjunto*

$$\overline{\{w \in \Omega : f(w) \neq 0\}}.$$

Se nota $C_{00}(\Omega)$ al conjunto de las funciones continuas de Ω en $\mathbb{K}$ cuyo soporte es compacto.

Si Ω es localmente compacto Hausdorff, puede comprobarse que $C_0(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $C_b(\Omega)$ y que $C_{00}(\Omega)$ es un subespacio denso de $C_0(\Omega)$.

En el caso particular $\Omega = \mathbb{N}$ dotado con la topología discreta, tenemos que:

$$C_b(\mathbb{N}) = \ell_\infty(\mathbb{N}) = \ell_\infty,$$

y dado que los únicos subconjuntos compactos de $\mathbb{N}$ son los finitos,

$$C_0(\mathbb{N}) = c_0 \quad \text{y} \quad C_{00}(\mathbb{N}) = c_{00}.$$

1.1.5. Relación de ejercicios

1. Sean X un espacio normado, $x, y \in X$ y $r, s > 0$ tales que $B(x, r) \subseteq B(y, s)$. Probar que $\|x - y\| \leq s - r$. Utilícese el resultado anterior para probar que, en un espacio de Banach, toda sucesión decreciente de bolas cerradas tiene un punto en común.

2. Sea X un espacio normado. Dados $x \in X$ y $r > 0$, pruébense las siguientes igualdades:

   a) $\overline{B_X^\circ(x, r)} = B_X(x, r)$.

b) $B_X^\circ(x,r) = B_X(x,r)^\circ$.

c) $\delta(B_X^\circ(x,r)) = 2r$. ($\delta$ denota el diámetro).

3. Sea X un espacio normado. Pruébese que si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy de elementos no nulos de X que no converge a cero, entonces $\{\frac{x_n}{\|x_n\|}\}$ es también una sucesión de Cauchy.

4. Sea X un espacio normado. Pruébese que son equivalentes:

   a) X es completo.

   b) B_X es completo.

   c) S_X es completo.

5. Sea X un espacio normado. Se define $f : X \longrightarrow B_X^\circ$ mediante $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$. Pruébese que f es un homeomorfismo de X sobre B_X°.

6. Sean X un espacio normado y A un subconjunto no vacío de X. Pruébese que $\overline{A + B_X} = \{x \in X : dist(x, A) \leq 1\}$. Deducir que $A + B_X$ es cerrado si, y sólo si, para cada $x \in X$ con $dist(x, A) = 1$ existe $a \in A$ tal que $\|x - a\| = 1$.

7. Pruébese que, en un espacio normado, el interior de un subespacio vectorial propio es vacío.

8. Sea X un espacio normado y A un subconjunto no vacío de X. Se llama envolvente lineal cerrada de A, y la denotaremos por $\overline{lin}(A)$, a la intersección de todos los subespacios cerrados de X que contienen a A. Pruébese que

   a) $\overline{lin}(A)$ es el menor subespacio cerrado de X que contiene a A.

   b) $\overline{lin}(A) = \overline{lin(A)}$.

9. Sea M un subespacio de un espacio normado X con la siguiente propiedad: si $\sum x_n$ es una serie de elementos de M convergente en X, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \in M$. Pruébese que M es cerrado.

10. Sea X un espacio vectorial de dimensión infinita y $\{e_i : i \in I\}$ una base algebraica de X. Para cada $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ (sólo hay un número finito de sumandos no nulos) se define
$$\|x\|_1 = \sum_{i\in I} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = Max\{|x_i| : i \in I\}.$$
    Pruébese que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son dos normas en X no equivalentes.

11. *a*) Dese un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_∞ pero no en l_1 ni en l_2.

    b) Dese un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_2 pero no en l_1.

    c) Dese un ejemplo de una sucesión que converja en c_0 pero no en l_2.

    d) Si $x \in l_p$ para algún $p \geq 1$, pruébese que $x \in l_r$, $\forall r \geq p$ y que $\|x\|_r \leq \|x\|_p$ y $\text{lím}_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

12. Estúdiese la convergencia de la sucesión

$$f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \quad (t \in [0,1])$$

en cada uno de los espacios siguientes:

i) $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$; ii) $X = (C^1([0,1]), \|\cdot\|^1)$, donde $\|f\|^1 = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$; iii) $X = (C([0,1]), \|\cdot\|_1)$, donde $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1.2. Aplicaciones lineales y continuas

Sean X e Y espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, recordemos que una aplicación $T : X \to Y$ es **lineal** si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \ \forall x, y \in X, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Nos interesa ahora saber cuando una aplicación lineal es continua. El siguiente resultado proporciona diversas caracterizaciones de la continuidad de una aplicación lineal entre espacios normados.

Proposición 1.2.1 *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe una constante $\beta > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq \beta\|x\|, \ \forall x \in X$.*
2. *T es lipschitziana, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq C\|x - y\|$ para todo $x, y \in X$.*
3. *T es continua.*
4. *T es continua en 0.*
5. *Si A es un subconjunto acotado de X, entonces $T(A)$ es un subconjunto acotado de Y.*
6. *T está acotada en B_X.*

Veamos ahora que existen aplicaciones lineales, incluso biyectivas, que no son continuas.

Ejemplo 1.2.2 *Sea X un espacio normado infinito-dimensional. Entonces existe una sucesión (e_n) de vectores linealmente independientes de X (cuyos elementos suponemos, puesto que no es restrictivo, de norma 1). Sea B una base de Hamel de X que contenga a la sucesión (e_n). La aplicación lineal $T : X \to X$ dada por*

$$T(e_n) = ne_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad T(e) = e, \ \forall e \in B \backslash \{e_n : n \in \mathbb{N}\},$$

es una biyección lineal no continua.

1.2.1. Norma de un operador.

Sean X e Y dos espacios normados. A lo largo del curso notaremos por $L(X,Y)$ al espacio vectorial formado por todas las aplicaciones lineales y continuas de X en Y, también llamado espacio de operadores de X en Y. Cuando $X = Y$ escribimos $L(X)$ en lugar de $L(X,X)$. En lo que concierne a este espacio vectorial podemos afirmar:

Proposición 1.2.3 *Sean X e Y espacios normados.*

1. *La aplicación $T \mapsto \|T\|$, de $L(X,Y)$ en $\mathbb{R}$, definida por*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in B_X\}$$

*es una norma sobre $L(X,Y)$, conocida como la **norma canónica de operadores**. La topología generada por la norma de operadores se conoce como **topología uniforme de operadores**.*

2. *Se verifica:*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in B_X^\circ\} = \sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in S_X\}$$

$$= \min\{\beta \geq 0 \ : \ \|T(x)\| \leq \beta\|x\|, \ \forall x \in X\}.$$

En particular, $\|T(x)\| \leq \|T\|\,\|x\|$ para todo $x \in X$.

3. *La convergencia en la norma canónica de operadores equivale a la convergencia uniforme en B_X, o a la convergencia uniforme en cada subconjunto acotado de X.*

4. *Si Y es un espacio de Banach, entonces el espacio $L(X,Y)$, con la norma canónica de operadores, también lo es.*

5. *Si Z es otro espacio normado, $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces la aplicación $ST : X \to Z$ definida por*

$$ST(x) = S(T(x)), \ \forall x \in X$$

pertenece a $L(X,Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$.

Nota 1.2.4 *Es necesario notar que la convergencia de una sucesión en la topología de la norma en el espacio $L(X, Y)$ implica convergencia puntual y sin embargo, el recíproco no es cierto ni siquiera en caso completo.*

Ejemplo: *Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $T_n : c_0 \to \mathbb{K}$ definida por*

$$T_n(x) = x(n), \ \forall x \in c_0.$$

Es claro que, para cada n, $T_n \in L(c_0, \mathbb{K})$ y que la sucesión $\{T_n\}$ converge puntualmente a cero. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $T_n(e_n) = 1$, donde $e_n = (0, 0, ..., 1^{n)}, 0, ...) \in c_0$, y por tanto $\|T_n\| \geq 1$. En consecuencia, $\{T_n\}$ no puede converger a cero en $L(c_0, \mathbb{K})$.

1.2.2. Isomorfismos e isometrías.

Sean X e Y espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Diremos que una aplicación $T : X \to Y$ es un **isomorfismo** si T es biyectiva, lineal y continua y su inversa T^{-1} es continua. En tal caso, también diremos que X e Y son **isomorfos**.

Como consecuencia de la proposición 1.2.3 tenemos que una aplicación lineal sobreyectiva T entre dos espacios normados X e Y es un isomorfismo si, y solo si existen dos constantes positivas m, M tales que

$$m\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M\|x\|, \ \forall x \in X.$$

Nótese que si T es un isomorfismo de $(X, \|\cdot\|)$ en $(Y, \|\cdot\|)$, entonces, en virtud de las desigualdades anteriores, la aplicación $x \mapsto \|x\|_1 = \|T(x)\|$ define una nueva norma en X que es equivalente a la norma inicial $\|\cdot\|$. Es fácil probar que todo isomorfismo entre espacios normados es una aplicación abierta (lleva abiertos en abiertos) y que todo espacio isomorfo a un espacio de Banach es también un espacio de Banach.

Si T es un isomorfismo que ***conserva las normas***:

$$\|T(x)\| = \|x\| \ (x \in X),$$

se dice que $T : X \to Y$ es un **isomorfismo isométrico** y que X e Y son **isométricamente isomorfos.**

El isomorfismo isométrico es la identificación total entre dos espacios normados. Si T es un isomorfismo de $(X, \|\cdot\|)$ en $(Y, \|\cdot\|)$, y considero de nuevo la norma en X, $\|x\|_1 = \|T(x)\|$, entonces, T es un isomorfismo isométrico de $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(Y, \|\cdot\|)$.

Evidentemente todo isomorfismo isométrico es un isomorfismo. El recíproco no es cierto. Considérese por ejemplo, la aplicación identidad de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ en $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Dicha aplicación es un isomorfismo no isométrico. De hecho, se puede probar que no existe ningún isomorfismo isométrico entre ambos espacios.

1.2.3. Relación de ejercicios

1. Dada una sucesión $\{a_n\}$ en l_1, se define $T : c_0 \longrightarrow c_0$ por $T(x) = \{\sum_{k=n}^{\infty} a_k x_k\}$. Pruébese que T está bien definida, es lineal y continua y calcúlese su norma.

2. Sea $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ la forma lineal $T(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, donde $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calcúlese la norma de T en $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, para $p = 1, 2, \infty$.

3. Pruébese que las siguientes aplicaciones lineales $T : l_p \longrightarrow l_p$ son continuas y calcúlese su norma:

   a) $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (0, x_1, x_2, x_3, \cdots)$.
   b) $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_2, x_3, \cdots)$.
   c) $T(x_1, x_2, x_3, \cdots) = (x_n, x_{n-1}, \cdots, x_2, x_1, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots)$.

4. Sea $X = C([0, 1])$. Calcuúlese la norma de $T : X \longrightarrow X$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$.
   b) $T(f)(x) = x^2 f(0)$.
   c) $T(f)(x) = f(x^2)$.

5. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión acotada de escalares. Se define $T : l_p \longrightarrow l_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ mediante $T(\{x_n\}) = \{\alpha_n x_n\}$. Pruébese que T es lineal y continua y calcúlese su norma.

6. Sean X, Y cualquiera de los espacios c_0 ó l_p $(1 \leq p < \infty)$ y $\{e_n\}$ la base canónica de X. Dada $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación, se define su matriz asociada $A = (a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ mediante $T(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots)$. Pruébese que, si T es lineal y continua, T queda

determinada por su matriz asociada mediante la fórmula $T(x)(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}x(i)$ para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$.

7. Sea $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ una matriz infinita tal que $M = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < +\infty$. Se define $T : l_2 \longrightarrow l_2$ mediante $T(x)(n) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}x(i) \quad (x \in l_2)$. Prúebese que T es lineal y continua con $\|T\| \leq \sqrt{M}$.

8. Demuéstese que c es isomorfo pero no isométricamente isomorfo a c_0, . (Indicación: considérese la aplicación $T : c \to c_0$ definida por:

$$[T(x)](1) = l(x), \qquad [T(x)](n) = x(n-1) - l(x) \quad (n > 1),$$

donde para cada $x \in c$, $l(x) = \lim_{n\to\infty} x(n)$.)

1.3. Dual de un espacio normado. Ejemplos

Centramos ahora nuestra atención en el espacio de operadores $L(X,Y)$ en el caso en que Y coincide con el cuerpo base $\mathbb{K}$. Llamaremos a las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$ **funcionales** ó **funcionales lineales** en X.

1.3.1. Espacio dual topológico

Si X es un espacio normado, llamaremos **dual** o **dual topológico** de X, y lo representaremos por X^*, al espacio de Banach $L(X,\mathbb{K})$.

El primer resultado, cuya demostración es elemental, es una generalización de la distancia de un punto a un hiperplano.

Proposición 1.3.1 *Sea X un espacio normado y sea $f \in X^* \backslash \{0\}$. Entonces para todo $x \in X$ se verifica que $dist(x, Ker(f)) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.*

Como segundo resultado, construimos los duales de los espacios lp.

Proposición 1.3.2 *Sean $p \geq 1$ y $1 \leq q \leq +\infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (entendiendo que $q = \infty$ si $p = 1$). Entonces la aplicación $\Phi : \ell_q \longrightarrow \ell_p^*$ definida por*

$$\Phi(y)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n), \ x = \{x(n)\} \in \ell_p, y = \{y(n)\} \in \ell_q,$$

es un isomorfismo isométrico.

Finalmente obtenemos los duales de c_0 y de c.

Proposición 1.3.3 *La aplicación $F : \ell_1 \longrightarrow c_0^*$ definida por:*

$$F(y)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n), \ x \in c_0, y \in \ell_1,$$

es una isometría sobreyectiva.

Proposición 1.3.4 *La aplicación $G : \ell_1 \longrightarrow c^*$ definida por:*

$$G(y)(x) = y(1) \lim_{n\to+\infty} x(n) + \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)y(n+1), \;\; x \in c, y \in \ell_1$$

es una isometría sobreyectiva.

1.3.2. Relación de ejercicios

1. Sea X un espacio normado y f un funcional lineal en X. Probar que, si el funcional $Re(f)$ está mayorado en un subconjunto de X con interior no vacío, f es continuo.

2. Sea $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ y $T : M \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal $T(x, -x) = x$. Calcúlese la norma de T con la norma inducida en M por l_2^2, l_1^2 y l_∞^2. Calcúlense todas las posibles extensiones lineales y continuas de T al espacio total con la misma norma.

3. Sea $X = C_{\mathbb{R}}([a, b])$. Pruébese que los siguientes funcionales son continuos

   a) $\phi_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\phi_1(f) = f(a)$.

   b) $\phi_2 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

   $$\phi_2(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(t_k) \;\; (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}, \;\; t_1, t_2, ..., t_n \in [a, b]).$$

   c) $\phi_3 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\phi_3(f) = \int_a^b f(t)dt$.

   d) $\phi_4 : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\phi_3(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt \;\; (g \in C_{\mathbb{R}}([a, b]))$.

4. Sea $X = C_{\mathbb{R}}([0, 1])$. Se define $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ y se escribe $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, $X_\infty = (X, \| \cdot\|_\infty)$. Para cada $\varphi \in X$, se define $T_\varphi(f) = \int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$.

   a) Pruébese que X_1 no es completo.

   b) Pruébese que $T_\varphi \in X_1^*$ y calcular su norma.

   c) Pruébese que $T_\varphi \in X_\infty^*$ y que $\|T_\varphi\| = \|\varphi\|_1$.

   d) Para cada $t \in [0, 1]$ se considera la forma lineal en X definida por $\delta_t(f) = f(t)$. Pruébese que $\delta_t \in X_\infty^*$, pero $\delta_t \notin X_1^*$.

5. Sea X un espacio normado. Se dice que un funcional $f \in X^*$ alcanza su norma si existe $x \in B_X$ tal que $\|f\| = |f(x)|$.

   a) Pruébese que si $f \in X^*$ alcanza su norma, entonces existe $y \in S_X$ tal que $\|f\| = f(y)$.

   b) Sea $f : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$. Pruébese que f es lineal y continuo y no alcanza su norma.

1.4. Espacios normados de dimensión finita.

El objetivo de esta lección no es otro que el de presentar y describir todos los espacios normados de dimensión finita. Esta meta se podría resumir en intentar dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuántos espacios normados de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ existen?

En este sentido será útil recordar que todas las norma que hemos considerado hasta el momento sobre $\mathbb{K}^n$ son equivalentes y por tanto generan la misma topología en $\mathbb{K}^n$.

1.4.1. Continuidad automática.

A lo largo del curso consideraremos como topología usual en $\mathbb{K}^n$ aquella topología inducida por la norma euclídea. El siguiente resultado muestra la continuidad automática de cualquier aplicación lineal de $\mathbb{K}^n$ en cualquier espacio normado cuando en éste se considera la topología de la norma.

Lema 1.4.1 *Toda aplicación lineal de ℓ_2^n en cualquier espacio normado X es continua.*

Como consecuencia, podemos probar que $\mathbb{K}^n$ es, salvo isomorfismos, el único espacio normado n-dimensional sobre $\mathbb{K}$.

Teorema 1.4.2 ***(Teorema de Tihonov).*** *Sea X un espacio normado de dimensión n sobre $\mathbb{K}$. Entonces toda biyección lineal de ℓ_2^n en X es un isomorfismo.*

A continuación vamos a extraer algunas consecuencias interesantes del Teorema de Tihonov.

Corolario 1.4.3 *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

1. *Si X es un espacio normado de dimensión finita, toda aplicación lineal de X en otro espacio normado Y es continua.*

2. *Toda biyección lineal entre dos espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo. En consecuencia, dos espacios normados de dimensión finita son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.*

3. *Todas las normas sobre un mismo espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

4. *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

5. *Todo subespacio finito dimensional de un espacio normado es cerrado.*

6. *Un subconjunto de un espacio normado de dimensión finita es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

1.4.2. Caracterización de la finito-dimensionalidad.

Como consecuencia del apartado (6) del Corolario 1.4.3 obtenemos que la bola unidad cerrada de cualquier espacio normado finito dimensional es un conjunto compacto. Veamos a continuación que esta propiedad es característica de los espacios normados finito dimensionales.

Teorema 1.4.4 (Teorema de Riesz clásico). *Sea X un espacio normado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es finito-dimensional.*

2. *X es localmente compacto.*

3. *La bola unidad de X es compacta.*

Su demostración requiere del siguiente resultado

Lema 1.4.5 (Lema de Riesz clásico). *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado no total de X. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe un vector $x \in S_X$ tal que $d(x, M) \geq 1 - \varepsilon$.*

Es importante resaltar

1. La diferente naturaleza de las afirmaciones que aparecen en el Teorema de Riesz, la afirmación (1) es de naturaleza algebraica mientras que la (3) es puramente topológica.

2. Todo subconjunto compacto A de un espacio normado de dimensión infinita X ha de tener interior vacío. Este hecho refleja claramente que la abundancia de compactos, tal y como se entiende en el caso finito dimensional, es imposible cuando la dimensión es infinita.

1.4.3. Relación de ejercicios

1. Pruébese que si X es de dimensión finita, entonces todo funcional alcanza su norma.

2. Pruébese que todo subconjunto compacto de un espacio normado de dimensión infinita tiene interior vacío.

3. Sean X un espacio normado, M un subespacio vectorial de X. Pruébese que si M es de dimensión finita entonces, para cada $x \in X$, existe $m \in M$ tal que $\|x - m\| = dist(x, M)$.

4. Sea X un espacio normado de dimensión finita y M un subespacio cerrado no total de X. Pruébese que existe un vector $x \in S_X$ tal que $d(x, M) = 1$.

5. Sea X un espacio normado de dimensión infinita y sea $\{e_n\}$ una sucesión de vectores linealmente independientes en X. Sea B una base algebraica de X, conteniendo la sucesión $\{e_n\}$, y consideremos el funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, definido sobre los elementos de B mediante:

   $$f(e_n) = n\|e_n\|, n \in \mathbb{N} \text{ y } f(x) = 0 \text{ si } x \in B \setminus \{e_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   Pruébese que f no es continuo.

6. Pruébese que, para cada espacio vectorial infinito dimensional X, existe una biyección lineal no continua de X en X.

7. Pruébese que, para cada espacio normado infinito dimensional X, existe una norma en X que no es equivalente a la norma original.

1.5. Subespacios complementados. Cociente de espacios normados.

1.5.1. Subespacios complementados.

Nivel algebraico

Sea X un espacio vectorial y sean M, N dos subespacios vectoriales de X. Diremos que X es **suma directa** de M y N (representado por $X = M \oplus N$) si $M + N = X$ y $N \cap M = \{0\}$. En este caso diremos que N es el **complemento directo** de M.

La ley $(m, n) \mapsto \Phi(m, n) := m + n$ define una aplicación, Φ, de $M \times N$ en X y es fácil comprobar que
- $X = M \oplus N$ si, y solo si, la aplicación Φ es una biyección.
- todo subespacio propio de un espacio vectorial admite un complemento directo.

Nivel topólogico

Sea X un espacio normado, M es un subespacio normado de X cuyo complemento directo es N. Diremos que X es **suma topológico-directa** de M y N (notado por $X = M \oplus_t N$) si la aplicación $(m, n) \longmapsto m + n$ es un isomorfismo de $M \times N$ sobre X, considerando la topología producto de las inducidas por X en M y N. En tal caso diremos que N es un **complemento topológico** de M y que M es un **subespacio complementado**.

El siguiente resultado contesta la cuestión de cuando un complemento algebráico es de hecho topológico

Proposición 1.5.1 *Si X es suma directa de dos subespacios M y N y p es la proyección natural sobre M, entonces X es suma topológico-directa de los subespacios M y N si , y sólo si, p es continua.*

1.5.2. Cociente de espacios normados.

Sea M un subespacio de un espacio vectorial X. Consideremos en X la relación binaria $\mathcal{R}$ definida, para todo $x, y \in X$, por

$$x\mathcal{R}y \text{ si, y sólo si , } x - y \in M.$$

Se comprueba sin dificultad que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. El conjunto cociente de X por $\mathcal{R}$ se representa por X/M. Sus elementos (clases de equivalencia) son de la forma $x + M$ donde $x \in X$. Por tanto, si $x, y \in X$, es inmediato que $x + M = y + M$ si, y sólo si, $x - y \in M$. Si definimos la suma y el producto por escalares de la siguiente forma (totalmente natural):

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \ \alpha(x + M) = \alpha x + M, \quad \forall x, y \in X, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

habremos dotado (como puede comprobarse fácilmente) a X/M de estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, el **espacio vectorial cociente** de X por M.

La aplicación (evidentemente lineal y sobreyectiva) $\pi : X \to X/M$ dada por $\pi(x) = x + M$ para todo $x \in X$, recibe el nombre de **proyección canónica** de X sobre X/M.

Supongamos ahora que X es un espacio normado y M es un subespacio cerrado de X. Dado un elemento arbitrario $x + M$ del espacio vectorial cociente X/M definimos:

$$\|x + M\| = \text{ínf} \{\|x + m\| : m \in M\}.$$

Puesto que M es un subespacio, es claro que

$$\|x + M\| = d(x, M),$$

la distancia de x a M.

Puede comprobarse fácilmente que la definición no depende del representante elegido y que, la aplicación $x + M \mapsto \|x + M\|$, de X/M en $\mathbb{K}$, define una norma en X/M, la cual recibe el nombre de **norma cociente** en X/M.

La consideración de la norma cociente es bastante natural ya que genera la topología cociente en X/M que es, por definición, la mayor topología en X/M que hace continua a la proyección canónica $\pi : X \to X/M$. Es fácil probar que la proyección canónica es abierta y que $||\pi|| = 1$.

El concepto de norma cociente nos permite poner de manifiesto una vez más la potencia de la finitodimensionalidad: Es claro que toda aplicación lineal y continua tiene un núcleo que es un subespacio cerrado y que la afirmación recíproca que no es cierta en general, tal como vimos en el Ejemplo 1.2.2. Sin embargo, podemos probar el siguiente resultado

Proposición 1.5.2 *Sea X un espacio normado y f un funcional en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *f es continuo;*
2. *$Ker(f)$ es cerrado.*

1.5.3. Más ejemplos.

Finalmente veamos que para definir una norma cociente no es necesario tener una norma en el propio espacio.

Consideremos ahora un espacio vectorial X sobre $\mathbb{K}$. Una **seminorma** sobre X es una aplicación $\nu : X \to \mathbb{R}$ que verifica las condiciones ii) y iii) de la Definición 1.1.1:

$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad (x, y \in X)$$

$$\nu(\alpha x) = |\alpha|\, \nu(x) \quad (\alpha \in \mathbb{K},\ x \in X).$$

Estas condiciones implican que $\nu(0) = 0$, que $|\nu(x) - \nu(y)| \leq \nu(x-y)$ para todo $x, y \in X$ y que $\nu(x) \geq 0$ para todo $x \in X$. La única diferencia con respecto a una norma es la posible existencia de elementos x no nulos tales que $\nu(x) = 0$.

Sea ν una seminorma sobre un espacio vectorial X y sea

$$M = \{x \in X : \nu(x) = 0\}.$$

Claramente M es un subespacio de X. La aplicación $x + M \longmapsto \nu(x)$, de X/M en $\mathbb{R}$ define una norma en X/M.

En los siguientes ejemplos mostramos casos particulares de este último hecho.

Ejemplo 1.5.3 ***Funciones de variación acotada***

Decimos que $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función de* **variación acotada** *en* $[a,b]$ *si verifica*

$$V(g;[a,b]) = sup\{\sum_{i=1}^{n} |g(t_i) - g(t_{i-1})|\} < \infty,$$

donde el supremo anterior se toma sobre todas las particiones $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b\}$ *del intervalo* $[a,b]$*.*

Notamos por $BV[a,b]$ *al espacio vectorial de las funciones de variable acotada en* $[a,b]$*.*

La aplicación

$$g \longmapsto V(g;[a,b])$$

define una seminorma en el espacio vectorial $BV[a,b]$*. Nótese que si* g *es constante, entonces* $V(g;[a,b]) = 0$*. De hecho* $V(g;[a,b]) = 0$ *si, y sólo si,* g *es constante en sus puntos de continuidad (se puede probar que toda función de variación acotada es continua en un subconjnto denso de* $[a,b]$*).*

Podemos considerar el subespacio

$$M = \{g \in BV[a,b];\ V(g;[a,b]) = 0\}.$$

Así, tomando el cociente por M *obtenemos un espacio de Banach que notaremos por* $NBV[a,b]$*.*

Ejemplo 1.5.4 ***Espacios de Lebesgue*** $L_p[0,1]$.

Para cada $p \in \mathbb{R}$ *con* $p \geq 1$*, definimos:*

$$\mathcal{L}_p[0,1] = \{f \in [0,1] \to \mathbb{K}\ :\ f \text{ es medible Lebesgue },\ \int_0^1 |f|^p < \infty\}.$$

Dados $f, g \in \mathcal{L}_p[0,1]$ *y* $t \in [0,1]$ *se tiene:*

$$|f(t) + g(t)|^p \leq 2^p \max\{|f(t)|^p, |g(t)|^p\} \leq 2^p(|f(t)|^p + |g(t)|^p),$$

por tanto $\int_0^1 |f+g|^p < \infty$ *y* $f + g \in \mathcal{L}_p[0,1]$*. De forma similar,* $\alpha f \in \mathcal{L}_p[0,1]$ *para todo* $f \in \mathcal{L}_p[0,1]$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$*. Por tanto,* $\mathcal{L}_p[0,1]$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{K}^{[0,1]}$*. La desigualdad de Minkowski para integrales:*

$$\left(\int_0^1 |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (f, g \in \mathcal{L}_p[0,1])$$

(que se obtiene de forma similar a su anteriormente comentada versión numérica) permite deducir que la función $\nu_p : \mathcal{L}_p[0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\nu_p(f) = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f \in \mathcal{L}_p[0,1])$$

es una seminorma. Sea pues

$$N = \{ f \in \mathcal{L}_p[0,1] : f = 0 \ c.p.d. \} .$$

Es claro que N *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{L}_p[0,1]$ *y el espacio cociente* $\mathcal{L}_p[0,1]/N$*, que denotaremos por* $L_p[0,1]$*, se convierte en un espacio normado, definiendo, como se indicó en la nota precedente,*

$$\|f + N\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \forall f \in \mathcal{L}_p[0,1].$$

El Teorema de Riesz-Fisher garantiza que $L_p[0,1]$ *es un espacio de Banach.*

Una función medible Lebesgue $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ *se dice* ***esencialmente acotada*** *si existe un número real no negativo* α *tal que*

$$\lambda(\{t \in [0,1] : |f(t)| > \alpha\}) = 0 \ (\textit{esto es, } \ |f(t)| \leq \alpha \ c.p.d.).$$

También se dice que α *es una* ***cota esencial*** *de* f*. Denotaremos por*

$$\mathcal{L}_\infty[0,1] = \left\{ f \in \mathbb{K}^{[0,1]} : f \ \textit{ es esencialmente acotada } \right\} .$$

Se comprueba que, dada $f \in \mathcal{L}_\infty[0,1]$*, el conjunto de sus cotas esenciales tiene mínimo, que denotamos por* $\nu_\infty(f)$*. Sea*

$$M = \{ f \in \mathcal{L}_\infty[0,1] : f = 0 \ c.p.d. \ \} .$$

$L_\infty[0,1]$ *denotará el espacio de Banach cociente* $\mathcal{L}_\infty[0,1]/M$ *cuando en él se considera la norma*

$$\|f + M\|_\infty = \nu_\infty(f), \ \forall f \in \mathcal{L}_\infty[0,1].$$

No está de más mencionar que $L_p[0,1]$ $(1 \leq p \leq \infty)$ se considerará siempre como espacio normado mediante $\| \cdot \|_p$ y que los elementos de este espacio serán tratados habitualmente como funciones (en lugar de clases) sin olvidar, claro está, la igualdad casi por doquier.

1.5.4. Relación de ejercicios

1. Sea $X = C_{\mathbb{R}}([0,1])$. Pruébese que $H = \{f \in X : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ es cerrado en X. Calcúlese la norma en X/H de las clases de las siguientes funciones:

   i) $f(t) = sen(\pi t)$; ii) $f(t) = cos(\pi t)$; iii) $h(t) = t - 1$.

2. Pruébese que

   a) El conjunto $\mathcal{L}_\infty[0,1]$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{[0,1]}$.

   b) Pruébese que la aplicación $f \longmapsto \nu_\infty(f)$ define una seminorma sobre $\mathcal{L}_\infty[0,1]$.

   c) Pruébese que la aplicación $\overline{f} \longmapsto \nu_\infty(f)$, donde por $\overline{f}$ se indica la clase de f, define una norma completa en el espacio cociente $L_\infty[0,1]$

Capítulo 2

Teorema de Hahn-Banach

Tema 2: Teorema de Hahn-Banach

Este capítulo está dedicado al desarrollo de uno de los tres resultados conocidos como los tres principios del Análisis Funcional, nos estamos refiriendo al Teorema de Hahn-Banach.

En el capítulo anterior introducimos el concepto de dual de un espacio normado y pudimos conocer los duales de una buena cantidad de espacios de Banach clásicos. Sin embargo, para un espacio normado abstracto arbitrario, aún no podemos asegurar la existencia de funcionales lineales y continuos no nulos. Para poder asegurar la existencia de elementos no nulos en el dual de cualquier espacio normado vamos a disponer de una poderosa herramienta, nos referimos a la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Dicho Teorema fue probado por primera vez por Hahn en 1927 para un espacio normado real. Es cierto que Helly en 1912 había planteado la posibilidad de extender un funcional lineal continuo definido en un subespacio de un espacio de funciones. Prácticamente con los mismos argumentos de Hahn, Banach obtuvo en 1929 una versión más general para un espacio vectorial real, demostrando que todo funcional lineal definido en un subespacio de un espacio vectorial real y dominado por un funcional sublineal puede ser extendido al espacio total manteniendo la dominación. La versión compleja es debida a Bohnenblust y Sobczyk en 1938 e, independientemente, a Soukhomlinoff, también en 1938.

El primer tema de este capítulo esta dedicado a la presentación de esta versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Como consecuencia de este teorema obtenemos el conocido como Teorema de extensión de Hahn-Banach para espacios normados, el cual establece la posibilidad de extender todo funcional lineal y continuo definido en un subespacio de un espacio normado a la totalidad del espacio manteniendo además la misma norma. En este tema se incluyen también unas primeras aplicaciones del mencionado Teorema de extensión de Hahn-Banach que no necesitan más ingredientes. Así establecemos que la inyección lineal de un espacio en su bidual es isométrica, la descripción del dual de un subespacio de un espacio normado, y finalmente las relaciones entre las propiedades de un operador y su transpuesto.

El segundo tema presenta otras aplicaciones del Teorema de extensión de Hahn-Banach. Las aplicaciones presentadas en este tema tienen en común que requieren más ingredientes que los desarrollados hasta el momento. Así por ejemplo, vemos que propiedades se enriquecen en el ambiente de los espacios separables, se estudia el dual del espacio de las funciones continuas, el problema de los momentos y se introducen los límites de Banach.

La versión o versiones geométricas del Teorema de Hahn-Banach centran la atención del último tema de este capítulo. Las versiones geométricas del Teorema de Hahn-Banach se concretan en distintos teoremas de separación de conjuntos convexos, más perfectos conforme se fortalecen las hipótesis sobre el espacio ambiente y los conjuntos que se pretende separar. Nos limitaremos en este tema a las formulaciones correspondientes a los espacios normados. Los primeros resultados de este tipo fueron obtenidos por Minkowski para espacios finito-dimensionales y los trabajos pioneros de Helly ya ponían de manifiesto la relación entre sus resultados sobre extensión de funcionales lineales continuos y las ideas de Minkowski. Son, sin embargo, las aportaciones de Banach las que permiten establecer total equivalencia entre la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach y un teorema general de separación de conjuntos convexos en espacios vectoriales.

2.1. Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Con esta lección iniciamos el estudio del problema crucial de la llamada teoría de dualidad: ¿hasta qué punto el conocimiento del espacio dual permite la descripción, al menos topológica, de X? Un primer paso sería asegurarse la existencia de elementos del dual no nulos. En el estudio del espacio dual que hemos desarrollado en el capítulo anterior pudimos constatar la existencia y abundancia de funcionales lineales continuos en los espacios normados que denominamos espacios "clásicos". También hemos podido asegurar la abundancia de funcionales lineales continuos sobre un espacio normado de dimensión finita gracias al Teorema de Tihonov (recuérdese que en tal caso la continuidad de los funcionales lineales es automática). Sin embargo, no está clara la existencia y abundancia de funcionales lineales continuos en espacios normados abstractos de dimensión infinita. Intentamos ahora encontrar, al menos, un funcional lineal continuo no nulo en un espacio normado abstracto no trivial. La continuidad de un funcional lineal en un espacio normado equivale a su acotación en la bola unidad. El camino a seguir puede ser el extender un funcional lineal de forma que se mantenga una cierta condición de acotación.

Consideraremos el problema planteado sustituyendo la norma por funciones para poder contemplar la demostración original de Banach.

Definición 2.1.1 *Sea X un espacio vectorial. Un* ***funcional sublineal*** *sobre X es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ que es* ***subaditiva****:*

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad (x, y \in X)$$

y ***positivamente homogénea****:*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}_0^+,\ x \in X).$$

Se dice que un funcional lineal $f : X \to \mathbb{R}$ está ***dominado*** *por p si*

$$f(x) \leq p(x),\ \forall x \in X.$$

Nótese que toda seminorma es un funcional sublineal. Sin embargo, un funcional sublineal puede estar muy lejos de ser una seminorma. Pensemos que cualquier funcional $\mathbb{R}$-lineal es un funcional sublineal y, en consecuencia, éstos pueden tomar valores negativos.

La demostración del Teorema de Hahn-Banach requiere del Lema de Zorn.

Sea A un conjunto (parcialmente) ordenado por la relación $\leq$. Una **cadena** en A es cualquier subconjunto totalmente ordenado C de A (respecto del orden inducido por $\leq$

en C). El conjunto A se dice **inductivo** si toda cadena en A tiene un mayorante en A. Finalmente, se dice que $m \in A$ es un **elemento maximal** de A si $a \in A$ y $m \leq a$ implica $m = a$ (m no es superado estrictamente por ningún elemento de A).

Enunciamos ya el lema de Zorn:

Lema 2.1.2 ***(Lema de Zorn)*** *Sea $(A, \leq)$ un conjunto inductivo y sea $a \in A$. entonces existe m elemento maximal en A.*

Teorema 2.1.3 ***(Teorema de Hahn-Banach, versión analítica)****Sea X un espacio vectorial, p un funcional sublineal sobre X, M un subespacio de X y g un funcional lineal de M en $\mathbb{K}$ cuya parte real está dominada por p, es decir,*

$$Reg(x) \leq p(x), \ \forall x \in M.$$

Entonces existe un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ tal que

$$f(x) = g(x), \ \forall x \in M \quad y \ Ref(x) \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

Si p es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

Demostración.- Supongamos en primer lugar que X es un espacio vectorial real. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los pares ordenados (Y, h) donde Y es un subespacio de X que contiene a M y h es un funcional lineal en Y que extiende a g y está dominado por p, esto es,

$$h(x) = g(x), \ \forall x \in M \text{ y } h(x) \leq p(x), \ \forall x \in Y.$$

La familia $\mathcal{F}$ no es vacía ya que $(M, g) \in \mathcal{F}$. Dados $(Y_1, h_1), (Y_2, h_2) \in \mathcal{F}$, la relación $\leq$ definida por

$$(Y_1, h_1) \leq (Y_2, h_2) \quad \Leftrightarrow \quad Y_1 \subset Y_2, \ h_2|_{Y_1} = h_1$$

ordena parcial e inductivamente a la familia $\mathcal{F}$. En efecto, si

$$\{(Y_i, h_i) : i \in I\}$$

es una cadena no vacía en $\mathcal{F}$, el par (Y, h) donde $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ y h es el funcional en Y dado por $h(x) = h_i(x)$ si $x \in Y_i$ para algún $i \in I$, es un mayorante en $\mathcal{F}$ de dicha cadena. Entonces el Lema de Zorn afirma que $\mathcal{F}$ posee un elemento maximal (Y, f) verificando

$(Y, f) \geq (M, g)$. Si probamos que $Y = X$, esto concluirá la prueba del caso real. Supongamos, para llegar a una contradicción, que $Y \neq X$ y sea $x_0 \in X \backslash Y$. Para cualesquiera $u, v \in Y$ se tiene

$$f(u) + f(v) = f(u + v) \leq p(u + v) = p(u - x_0 + x_0 + v) \leq p(u - x_0) + p(x_0 + v),$$

esto es,

$$f(u) - p(u - x_0) \leq p(x_0 + v) - f(v).$$

La arbitrariedad de u y v permite deducir que

$$\sup \{f(u) - p(u - x_0) : u \in Y\} \leq \inf \{p(x_0 + v) - f(v) : v \in Y\}.$$

Sea α cualquier número real en la situación

$$\sup \{f(u) - p(u - x_0) : u \in Y\} \leq \alpha \leq \inf \{p(x_0 + v) - f(v) : v \in Y\}.$$

Considérese la aplicación $h : Y + \mathrm{Lin}(\{x_0\}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda\alpha, \ \forall y \in Y, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Claramente h está bien definida, es lineal y extiende a g. Además h está dominada por p. En efecto, dado $y \in Y$, si $\lambda = 0$ se tiene

$$h(y + \lambda x_0) = f(y) \leq p(y) = p(y + \lambda x_0),$$

para $\lambda > 0$ es claro que

$$h(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda\alpha \leq f(y) + \lambda \left(p(x_0 + \frac{y}{\lambda}) - f(\frac{y}{\lambda})\right) = p(y + \lambda x_0)$$

y si $\lambda < 0$ entonces

$$h(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda\alpha \leq f(y) + \lambda \left(f(\frac{-y}{\lambda}) - p(\frac{-y}{\lambda} - x_0)\right) = p(y + \lambda x_0).$$

Luego $(Y + Lin(\{x_0\}), h) \in \mathcal{F}$ y claramente $(Y, f) \leq (Y + Lin(\{x_0\}), h)$ lo que contradice la maximalidad de (Y, f).

Supongamos ahora que X es un espacio vectorial complejo. Evidentemente X es también un espacio vectorial real. Aplicando lo probado en el caso real al subespacio vectorial real M de X y al funcional $\mathbb{R}$-lineal $\Re\mathrm{e}(g) : M \to \mathbb{R}$, existe un funcional $\mathbb{R}$-lineal $f_1 : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_1|_M = \Re\mathrm{e}(g) \text{ y } f_1(x) \leq p(x), \ \forall x \in X.$$

Definimos la aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ por

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix),\ \forall x \in X.$$

Claramente f es $\mathbb{R}$-lineal y puesto que, para todo $x \in X$ se tiene $f(ix) = if(x)$, es inmediato que f es $\mathbb{C}$-lineal en X. Evidentemente f extiende a g:

$$f(x) = f_1(x) - if_1(ix) = \Re\mathrm{e}(g)(x) - i\Re\mathrm{e}(g)(ix) = g(x)\ (x \in M)$$

y por último, $\Re\mathrm{e}(f)(x) = f_1(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Esto concluye la demostración del caso complejo.

Finalmente, si p es una seminorma, dado $x \in X$ existe $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| = 1$ tal que $|f(x)| = \lambda f(x)$. En tal caso,

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \Re\mathrm{e}(f)(\lambda x) \leq p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) = p(x).$$

$\square$

Conviene dejar claro que la existencia de la extensión lineal está garantizada a nivel puramente algebraico y que la verdadera relevancia del Teorema de Hahn-Banach reside en que la extensión que proporciona permanece dominada por el funcional sublineal.

Corolario 2.1.4 ***(Teorema de extensión de Hahn-Banach).*** *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y g un funcional lineal y continuo en M. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $f|_M = g$ y $\|f\| = \|g\|$.*

2.1.1. Primeras aplicaciones

Podemos ya extraer como consecuencia del Teorema de extensión de Hahn-Banach la no trivialidad del dual de un espacio normado abstracto no trivial X. De hecho, vamos a ver que los elementos de X^* son suficientes cómo para separar los puntos de X.

Corolario 2.1.5 *Sea X un espacio normado y $\{x_1, ..., x_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de X. Dados $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, existe $f \in X^*$ tal que*

$$f(x_k) = \alpha_k,\ \forall k \in \{1, ..., n\}.$$

Como consecuencia obtenemos que

Corolario 2.1.6 *Todo espacio finito dimensional es isomorfo a su dual.*

Veremos además que la abundancia de elementos del dual sirve incluso para computar la norma de cualquier vector de X.

Corolario 2.1.7 *Sea X un espacio normado no trivial y x un elemento de X. Entonces existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. Como consecuencia obtenemos lo siguiente:*

1. *X^* separa los puntos de X, es decir, dados $x, y \in X$ con $x \neq y$ existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*
2. *$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in X^*, \ \|f\| = 1\} \quad (x \in X)$.*

El Corolario anterior pone de manifiesto cierta simetría entre las normas de X y de X^* :

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X, \ \|x\| = 1\} \quad (f \in X^*)$$

$$\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, \ \|f\| = 1\} \quad (x \in X).$$

Así pues, el conocimiento del espacio dual X^* junto con su norma, permite la descripción de la norma de X.

Nuestro siguiente resultado muestra la capacidad del dual de un espacio normado para separar un subespacio de un punto exterior al mismo.

Corolario 2.1.8 *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Si x_0 es un punto de X tal que $\delta = d(x_0, M) > 0$, entonces existe $f \in X^*$ tal que*

$$\|f\| = 1, \ f(x_0) = \delta \ y \ \ f(x) = 0, \ \forall x \in M.$$

Probamos ahora que la completitud del espacio normado Y es una condición necesaria para que el espacio normado $L(X, Y)$ sea completo. Esta afirmación se completa con la ya expuesta que en la Proposición 1.2.3, apartado (4), donde se afirmaba que que la completitud del espacio normado Y es una condición suficiente para que $L(X, Y)$ sea completo.

Proposición 2.1.9 *Sean $X \neq \{0\}$ e Y espacios normados. Si el espacio $L(X, Y)$ es completo, entonces Y es completo.*

El siguiente resultado es un primer precedente de lo que en teoría de dualidad se conoce como el Teorema del bipolar, a tal efecto introducimos la siguiente definición.

Definición 2.1.10 *Si M es un subespacio de un espacio normado X, el conjunto*

$$M^\circ = \{f \in X^* : f(x) = 0,\ \forall x \in M\}$$

recibe el nombre de ***anulador o polar de*** M ***en*** X^*.

Es claro que M° es un subespacio de X^*. El siguiente resultado nos permite decidir cuando un subespacio es denso.

Corolario 2.1.11 *Sea M un subespacio de un espacio normado X. Entonces*

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\circ} \ker(f)\ .$$

En particular, M es denso en X si, y sólo si, $M^\circ = \{0\}$.

2.1.2. Dual de un subespacio

La siguiente aplicación del Teorema de Hahn-Banach es una descripción del dual de un subespacio de un espacio normado.

Proposición 2.1.12 *Sea X un espacio normado y M un subespacio de X. Entonces la aplicación $\Phi : X^*/M^\circ \longrightarrow M^*$ dada por $\Phi(f + M^\circ) = f|_M \quad (\forall f \in X^*)$ es una biyección lineal isométrica.*

El siguiente resultado permite describir el dual de un cociente. En su demostración no es necesario el Teorema de Hahn-Banach. Se incluye aquí por el claro paralelismo que tiene con el resultado anterior.

Proposición 2.1.13 *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X y sea π la proyección canónica de X en X/M. La aplicación*

$$T : (X/M)^* \to M^\circ$$

dada por $T(f) = f \circ \pi$ es un isomorfismo isométrico.

2.1.3. Operadores transpuestos

Hasta el momento hemos obtenido una serie de consecuencias, con las que mostramos cómo el teorema de Hahn-Banach es útil para el desarrollo de la teoría de dualidad. Sin embargo, una teoría de dualidad que se precie no puede dejar de tocar el otro ingrediente básico, al margen de los espacios normados, los operadores.

Definición 2.1.14 *Sean X, Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. Llamamos operador* ***adjunto o transpuesto*** *de T, denotado por T^*, a la aplicación lineal y continua $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ dada por $T^*(g)(x) = g(T(x))$ para todo $g \in Y^*, x \in X$.*

El teorema de Hahn-Banach permite comprobar que la transposición de operadores, como aplicación de $L(X,Y)$ en $L(Y^*, X^*)$, es una isometría lineal. El siguiente enunciado, totalmente elemental recoge algunas propiedades más de los operadores transpuestos.

Proposición 2.1.15 *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.*

1. *$Ker\ T^* = T(X)^\circ$*
2. *Si Z es otro espacio normado y $S \in L(Y,Z)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*
3. *$I_X^* = I_{X^*}$, donde I_X (respectivamente, I_{X^*} denota al operador identidad en X (respectivamente, en X^*).*
4. *Si T es una biyección lineal bicontinua, entonces también lo es T^*. Además, en tal caso, $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*
5. *Si T es una biyección lineal isométrica, entonces también lo es T^*.*

Merece la pena observar que los recíprocos de los enunciados 4) y 5) de la lista anterior no son ciertos, en general. Pensemos, por ejemplo, que el dual de un espacio y el de un subespacio denso de aquél son isométricos, mientras que los espacios no tienen por qué ser ni siquiera isomorfos. En el caso anterior se encuentran c_{00} y c_0, los dos tienen duales isométricamente isomorfos pero ellos no son isomorfo ya que c_0 es completo pero c_{00} no lo es. Sin embargo, la relación entre un operador y su adjunto es mejor en ambiente completo, como muestra la siguiente consecuencia del teorema de Hanh-Banach (Corolario 2.1.11).

Corolario 2.1.16 *Sean X, Y espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$.*

1. *T es lineal, continuo sobreyectivo si, y sólo si, lo es su adjunto.*
2. *T es un isomorfismo isométrico si, y sólo si, lo es su adjunto.*

2.1.4. Bidual de un espacio normado. Espacios reflexivos.

Podemos ahora considerar el espacio dual de un espacio dual. Sea X un espacio normado, llamamos **bidual** de X y denotamos por X^{**} al espacio dual de X^*, esto es, al espacio $(X^*)^*$ dotado con la norma

$$||x^{**}|| = sup\{|x^{**}(x^*)| : \ x^* \in B_{X^*}\}.$$

Veamos algunos elementos distinguidos del bidual. Nótese que para cada $x \in X$, podemos definir la aplicación

$$J_X(x) : X^* \to \mathbb{K} \text{ dada por } J_X(x)(f) = f(x), \ \forall f \in X^*,$$

que es, claramente lineal, y puesto que,

$$|J_X(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\| \, , \ \forall f \in X^*,$$

es también continua. Así pues $J_X(x) \in X^{**}$.

Podemos ahora considerar la aplicación inyectiva $x \mapsto J_X(x)$ de X en X^{**}. Dicha aplicación, que recibe el nombre de **inyección canónica** de X en su bidual X^{**}, es claramente lineal, y por tanto continua ya que, para cada $x \in X$, se tiene que $\|J_X(x)\| \leq \|x\|$.

De hecho, por el Corolario 2.1.7, se tiene:

Proposición 2.1.17 *Si X es un espacio normado, la aplicación $x \mapsto J_X(x)$ es una isometría lineal de X en X^{**}. En consecuencia, X es isométricamente isomorfo a $J_X(X)$.*

La inyección canónica proporciona un procedimiento sencillo para obtener la **completación** de cualquier espacio normado.

Proposición 2.1.18 *Todo espacio normado es un subespacio denso de un espacio de Banach.*

Diremos que un espacio normado X es **reflexivo** si la inyección canónica $J_X : X \to X^{**}$ es sobreyectiva.

Veamos algunos ejemplos de espacios reflexivos. Antes enunciaremos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.19 *Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$. T^{**} es una extensión de T a los biduales de X e Y, es decir, $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$, donde J_X y J_Y representan a las inyecciones canónicas de X e Y en sus respectivos biduales.*

Ejemplo 2.1.20

1. *Todo espacio normado finito dimensional X es reflexivo.*

2. *El espacio ℓ_p es reflexivo, cualquiera que sea $p \in]1, +\infty[$.*

2.1.5. Relación de Ejercicios

1. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbf{K}$, y sean $p_1, p_2 : X \to \mathbf{R}$ seminormas. Probar que si $f : X \to \mathbf{K}$ es un funcional lineal verificando que $\mid f(x) \mid \leq p_1(x) + p_2(x)$ para todo $x \in X$, entonces existen $f_1, f_2 : X \to \mathbf{K}$ funcionales lineales tales que $f = f_1 + f_2$, y $\mid f_1(x) \mid \leq p_1(x)$, $\mid f_2(x) \mid \leq p_2(x)$ para todo $x \in X$. [Indicación: En el espacio vectorial $X \times X$ considérese la seminorma p definida por $p(x_1, x_2) = p_1(x_1) + p_2(x_2)$, y en el subespacio $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ considérese el funcional lineal h definido por $h(x,x) = f(x)$.]

2. Sean X un espacio normado, M un subespacio vectorial de X, y $u \in X$. Pruébese que existe $f \in X^*$ tal que $\mid f(x) \mid \leq dist(x, M)$ para todo $x \in X$ y $f(u) = dist(u, M)$.

3. Sean X un espacio normado real y M un subespacio vectorial de X. Pruébese que si $f, g \in M^*$ verifican que $\mid f(m) \mid + \mid g(m) \mid \leq \| m \|$ para todo $m \in M$, entonces existen $h, k \in X^*$ que extienden a f y g respectivamente y verifican

$$\mid h(x) \mid + \mid k(x) \mid \leq \| x \|$$

para todo $x \in X$. [Indicación: Considérense $f + g$ y $f - g$.]

4. Sea X un espacio de Banach. Pruébese que si X^* contiene un subespacio cerrado propio que separa los puntos de X, entonces X no es reflexivo.

5. Pruébese que ℓ_2 es un espacio reflexivo.

6. Pruébese que si un espacio normado es reflexivo, entonces su dual es reflexivo. Pruébese igualmente que el recíproco es cierto siempre que el espacio sea completo.

7. Fijado $n \in \mathbf{N}$, pruébese que existe un funcional lineal y continuo f en $\mathcal{C}[0,1]$ tal que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p de grado menor o igual que n. ¿Existe un funcional lineal y continuo f en $\mathcal{C}[0,1]$ tal que $f(p) = p'(0)$ para todo polinomio p ?

8. Pruébese que todo subespacio finito dimensional de un espacio normado está complementado.

2.2. Otras aplicaciones.

Ya hemos comentado la importancia del Teorema de Hahn-Banach en el Análisis Funcional. Este Teorema va a aparecer en una gran parte de los resultados que veremos a partir de ahora. Si el primer tema de este capítulo ha permitido mostrar algunas aplicaciones del Teorema de Hahn-Banach, en esta segunda lección pretendemos seguir exhibiendo la utilidad y variedad de otras aplicaciones de dicho teorema.

2.2.1. Espacios normados separables

Recuérdese que si X es finito-dimensional, entonces X puede verse como la envolvente lineal de un compacto, a saber, su bola unidad. Presentaremos ahora los espacios normados que son el cierre de la envolvente lineal de un subconjunto compacto. En buena lógica, estos espacios de hecho suponen la siguiente talla en espacios normados.

Definición 2.2.1 *Un espacio normado X se dice* **separable** *si existe un subconjunto A de X numerable tal que $X = \overline{A}$.*

Veamos que los espacios separables son los que buscamos.

Teorema 2.2.2 *Sea X un espacio normado. Equivalen*

1. *X es separable.*
2. *Existe un subconjunto numerable B de X tal que $X = \overline{Lin}(B)$.*
3. *Existe un subconjunto compacto K de X tal que $X = \overline{Lin}(K)$.*
4. *Existe un subconjunto C de X que contiene un subconjunto denso y numerable, y es tal que $X = \overline{Lin}(C)$.*

En caso afirmativo, se puede conseguir $B \subseteq S_X$ y C numerable tal que $B_X = \overline{C}$.

Es fácil ver que c_{00}, c_0, c y ℓ_p $(p \geq 1)$ son espacios normados separables y sin embargo, ℓ_∞ no es separable.

Cuando estamos trabajando con espacios normados separables, el Teorema de Hahn-Banach nos permite establecer importantes resultados.

Proposición 2.2.3 *Sea X un espacio normado separable. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Para cada subespacio M de X, puede encontrarse una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de X^* verificando que*

$$d(x, M) = \sup \{|f_n(x)| : n \in \mathbb{N}\}, \ \forall x \in X.$$

   Como consecuencia, $\overline{M} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \ker(f_n)$.

2. *Existe un conjunto numerable en X^* que separa los puntos de X.*

3. *X es isométricamente isomorfo a un subespacio de ℓ_∞.*

El espacio ℓ_1 muestra claramente que la separabilidad de un espacio no es heredada necesariamente por su espacio dual. Sin embargo, en el sentido contrario las cosas van mucho mejor:

Proposición 2.2.4 *Sea X un espacio normado cuyo dual X^* es separable. Entonces X es separable.*

Proposición 2.2.5 *Sea X un espacio normado reflexivo. Entonces X es separable si, y sólo si, su dual X^* lo es.*

Como consecuencia, obtenemos que ℓ_1 no es reflexivo. Si ℓ_1 fuese reflexivo, dado que es separable, también sería separable su dual ℓ_∞, el cual sabemos que no lo es.

2.2.2. Dual de $C([a, b])$

Comencemos definiendo el concepto de integral Riemann-Stieljes.

Seann f y g dos funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{K}$. Para cada partición del intervalo $[a, b]$

$$P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1}, t_n = b\},$$

definimos su diámetro como $\Delta(P) = max_{1\leq i\leq n} max(t_i - t_{i-1})$ y tomando puntos $z_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para $i = 1, 2, ..., n$ formamos la suma (de Riemann-Stieljes)

$$S(dg, P) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}).$$

Definimos

$$\int_a^b f(t)dg(t) = lim_{\Delta(P)\to 0} S(f, dg, P)$$

y decimos que f es **Riemann-Stieljes integrable con respecto a** g, cuando dicho límite exista. Las propiedades de esta integral son análogas a las de la integral de Riemann: aditividad respecto del intervalo, linealidad... e incluso una fórmula-tipo de integración por partes (si f es Riemann-Stieljes integrable con respecto a g, entonces g es Riemann-Stieljes integrable con respecto a f y

$$\int_a^b f(t)dg(t) + \int_a^b g(t)df(t) = f(b)g(b) - f(a)g(a).)$$

Si $g \in C^1([a, b])$ entonces la integral se reduce a una integral de Riemann de la forma

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

Supongamos ahora que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$. Nos preguntamos qué condiciones ha de tener $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ para que f sea Riemann-Stieljes integrable con respecto a g.

Pues bien, si g es una función de variación acotada, entonces cualquier función continua es Riemann-Stieljes integrable con respecto a g y además

$$|\int_a^b f(t)dg(t)| \leq V(g; [a, b])||f||_\infty \quad (f \in C([a, b]).$$

El teorema de Hahn-Banach nos permite identificar el dual de $C([a, b])$ con $NBV[a, b]$ al espacio cociente de las funciones de variación acotadas normalizado.

Teorema 2.2.6 *(de representación de Riesz para $C([a, b])^*$*
La aplicación $\phi : NBV[a, b] \longrightarrow C([a, b])^*$ definida por

$$\phi(g)(f) = \int_a^b f(t)dg(t),$$

para cada $f \in C([a, b])$ y $g \in NBV[a, b]$ define una biyección lineal isométrica.

2.2.3. El problema de los momentos

Históricamente, los teoremas de extensión Hahn-Banach tienen su raíz en el estudio de los sitemas de infinitas ecuaciones lineales. Para ver la conexión, consideremos un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = c_i, \quad i = 1, 2, ..., m,$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $c = (c_1, c_2, ..., c_m)^t \in \mathbb{K}^m$ es una matriz column Resolver un tal sistema es encontrar la matriz columna $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^t$, esto es, si identificamos el dual algebráico de $\mathbb{K}^n$ con el propio $\mathbb{K}^n$, encontrar un funcional lineal f, tal que

$$f(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) = c_i, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

El problema de resolver un sistema lineal de infinitas ecuaciones e infinitas incógnitas puede entenderse como encontrar un funcional lineal y continuo f tal que $f(z_i) = c_i \ \forall i$, donde $\{z_i; i \in I\}$ es una familia no vacía de elementos de un espacio normado X y $\{c_i; i \in I\}$ una familia de escalares. En general, aún cuando el conjunto $\{z_i; i \in I\}$ sea linealmente independiente, no existe un tal funcional.

Un ejemplo clásico del problema anterior es el llamado **problema de los momentos**, que puede estar asociado a funciones de densidad de carga de partículas, o a un problema de distribuciones de probabilidad: Dada una sucesión de números reales $\{c_n\}$, bajo qué condiciones se puede asegurar la existencia de un funcional lineal continuo definido en el espacio $\mathcal{C}[0, 1]$, esto es, asegurar la existencia de una función de variación acotada φ, de forma que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 t^n d\varphi(t) = c_n.$$

En el teorema que sigue, debido a Hahn, se dan condiciones necesarias y suficientes para que un sistema de infinitas ecuaciones lineales en un espacio normado tenga solución.

Teorema 2.2.7 *Sea X un espacio normado, $A = \{z_i; i \in I\}$ una familia de elementos de X y $\{c_i; i \in I\}$ una familia de escalares. Equivalen:*

1. *Existe $f \in X^*$ tal que $f(z_i) = c_i \ \forall i$.*

2. Existe $M > 0$ verificando

$$|\alpha_1 c_{i_1} + \alpha_2 c_{i_2} + ... + \alpha_n c_{i_n}| \leq M||\alpha_1 z_{i_1} + \alpha_2 z_{i_2} + ... + \alpha_n z_{i_n}||,$$

para cualquier combinación lineal $\alpha_1 z_{i_1} + \alpha_2 z_{i_2} + ... + \alpha_n z_{i_n}$ de elementos de A.

Además, si se verifica (ii), se puede elegir f en (i) de forma que $||f|| \leq M$.

2.2.4. Límites de Banach

Queremos ahora hacer uso del Teorema de Hahn-Banach para extender el concepto de límite de una sucesición convergente a cualquier sucesión acotada.

Este resultado ya aparece en el libro de Banach [1], en una sección titulada generalizaciones de las nociones de integral, medida y límite. Probablemente, los primeros ejemplos de funcionales lineales y continuos en un espacio normado de dimensión infinita que podemos imaginar son las evaluaciones en un espacio de sucesiones, esto es, si X es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^N$, los funcionales de la forma $x \longrightarrow x(n) \in \mathbb{K}$ para $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Dejando aparte las evaluaciones, el siguiente ejemplo natural de funcional lineal continuo en un espacio de Banach de dimensión infinita puede ser el que a cada sucesión convergente de escalares le hace corresponder su límite

$$g(x) = lim_n x(n) \quad (x \in c).$$

Es claro que $g \in c^*$ y que $||g|| = 1$. Viendo a c como subespacio de ℓ_∞ (considerando, por ahora, sólo el caso real), es natural considerar una extensión Hahn-Banach de g, esto es, un funcional f tal que $f \in \ell_\infty^*$ con $||f|| = 1$ y tal que

$$f(x) = lim_n x(n) \quad (x \in c).$$

Suele decirse que f es un límite generalizado y cabe preguntarse hasta qué punto está justificada esta denominación. Las condiciones sobre f equivalen a: $f \in \ell_\infty^\sharp$ y que

$$lim\ inf_n x(n) \leq f(x) \leq lim\ sup_n x(n) \quad (x \in \ell_\infty).$$

así que el funcional f lo único que hace es asignar, de manera lineal (que no es poco), a cada sucesión acotada de números reales, un número comprendido entre su límite inferior y su límite superior.

Teorema 2.2.8 *(Teorema de Existencia de límites de Banach).*

Consideremos el espacio de Banach ℓ_∞ de las sucesiones acotadas de números reales. Existe una aplicación $L : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones:

1. *L es lineal.*
2. *$inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leq L(x) \leq sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\}(x \in \ell_\infty)$*
3. *$L(x^{(k)}) = L(x) \quad (x \in \ell_\infty, k \in \mathbb{N})$, donde*
$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \ (n \in \mathbb{N}).$$

Como consecuencia se tiene que $L \in \ell_\infty^*$ y
$$lim\ inf_n x(n) \leq f(x) \leq lim\ sup_n x(n) \quad (x \in \ell_\infty).$$

Un funcional en ℓ_∞ verificando las condiciones anteriores se llama límite de Banach.

La extensión del resultado anterior al caso complejo es algo más complicada.

2.2.5. Relación de Ejercicios

1. Sean X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X. Pruébese que para cada $T \in L(M, l_\infty)$, existe $S \in L(X, l_\infty)$ tal que $S\ |_M = T$ y $\| S \| = \| T \|$.

2. Pruébese que los espacios c, c_0 y ℓ_∞ no son reflexivos.

3. Para cada $n \in \mathbf{N}$ sea $T_n : l_\infty \longrightarrow \mathbf{K}$ definido por $T_n(x) = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$, $(x \in l_\infty)$. Sea $M = \{x \in l_\infty : \{T_n(x)\}\ converge\}$ y definamos $T(x) = lim\{T_n(x)\}$ $(x \in M)$.

   a) Probar que $T_n \in (l_\infty)^*$ y que $\| T_n \| = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

   b) Probar que M es un subespacio vectorial de l_∞ que contiene al espacio c de las sucesiones convergentes.

   c) Probar que $T \in M^*$ con $\|T\| = 1$ y que $T(x) = lim\{x_n\}$ para todo $x \in c$.

   d) Sea $\tau(x) = (x_2, x_3, \cdots)$ para todo $x \in l_\infty$. Probar que $x - \tau(x) \in Ker(T) \subseteq M$ para todo $x \in l_\infty$.

   e) Deducir que existe $S \in (l_\infty)^*$, extensión de T tal que $\|S\| = 1$ y $S(x) = S(\tau^n(x))$ para todo $x \in l_\infty$ y para todo $n \in \mathbf{N}$.

   f) Probar que $S(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \cdots) = \frac{1}{4}$.(Indicación: comparar con $S(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \cdots)$). ¿ Cuánto vale $S(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \cdots)$?

2.3. Versión Geométrica

Vamos a dedicar esta sección a la presentación de la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach en el ambiente de los espacios normados. La cuestión puede ser resumida en la siguiente forma: ¿Podemos separar dos subconjuntos distintos A y B de un espacio vectorial real X mediante un funcional en X? más precisamente, ¿es posible encontrar un funcional no nulo f en X y un número real α tales que $f(a) \leq \alpha \leq f(b)$, $\forall a \in A, b \in B$? Para abarcar también el caso en que X es un espacio normado complejo podemos simplemente, sustituir las desigualdades anteriores por

$$\Re e f(a) \leq \alpha \leq \Re e f(b), \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B.$$

Notemos también que esta noción básica de separación puede fortalecerse exigiendo que alguna de las dos desigualdades anteriores sea siempre estricta, o ambas, o incluso que $\sup \Re e f(A) < \inf \Re e f(B)$, situaciones para las que no usaremos una terminología específica.

El siguiente ejemplo muestra que el problema de separar cualesquiera dos subconjuntos convexos y disjuntos de un espacio normado no tiene, en general, una respuesta afirmativa.

Ejemplo 2.3.1 *Sea c_{00} el espacio vectorial de las sucesiones casi nulas de números reales y sea A el subconjunto de c_{00} formado por las sucesiones no idénticamente nulas de c_{00} cuya última coordenada distinta de cero es estrictamente positiva. Entonces A es convexo y $0 \notin A$, pero tomando $B = \{0\}$ es imposible separar, incluso en la forma más suave posible, A y B. En efecto, veamos que todo funcional lineal no nulo f en c_{00} toma en A valores estrictamente positivos y estrictamente negativos.*

En una primera fase vamos a presentar un teorema de separación en espacios vectoriales. Para poder abordar este primer resultado necesitamos algunos conceptos previos que nos prepararán para usar la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach.

En 1927 Hahn demostró una primera versión del teorema de Hahn-Banach, en la misma aparecía una norma en vez de un funcional sublineal. La construcción de un cierto funcional sublineal realizada por Banach (1929) fue la clave para obtener los teoremas de separación.

Veamos cómo construir funcionales sublineales. A modo de motivación, si uno intenta escribir la norma de un espacio normado X, conociendo sólo la bola unidad del mismo, se llega sin dificultad a la igualdad

$$\|x\| = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B_X\}.$$

Si en vez de una norma se tiene una seminorma, la igualdad es la misma.

La pregunta que nos planteamos es: ¿Qué propiedades debe reunir un subconjunto $A \subset X$ para que la expresión de la derecha, sustituyendo B_X por A, nos proporcione un funcional sublineal en X?

Recordemos para ello que un subconjunto A de un espacio vectorial X es **convexo** si dados $x, y \in A$ y $t \in [0,1]$ se verifica que $(1-t)x + ty \in A$.

Definición 2.3.2 *Diremos que A es **absorbente** si $\mathbb{R}^+ A = X$.*

Usando la terminología proporcionada por las definiciones anteriores, obtenemos el siguiente resultado.

Lema 2.3.3 *Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto absorbente y convexo de X. Entonces, la aplicación ϱ_A de X en $\mathbb{R}$ dada por*

$$\varrho_A(x) = inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \ x \in X,$$

*es un funcional sublineal en X, llamado funcional de **Minkowski** de A.*

Además se verifica la siguiente cadena

$$\{x \in X;\ \varrho_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X;\ \varrho_A(x) \leq 1\}.$$

Podemos ofrecer ya un teorema de separación para espacios vectoriales.

Teorema 2.3.4 *(Separación en espacios vectoriales) Sea X un espacio vectorial y $A, B \subset X$ subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos. Si existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente, entonces existe $f \in X^\sharp \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\Re e f(a) \leq \alpha \leq \Re e f(b), \ (\forall a \in A, b \in B).$$

Recordamos que un subconjunto no vacío V de un espacio vectorial X es una **variedad afín** si $V = x_0 + M$, donde x_0 es un vector de X y M es un subespacio de X. Si M es un subespacio maximal, se dice que V es un **hiperplano afín**. Donde un subespacio maximal X no es otra cosa que un subespacio M satisfaciendo que si $M \neq X$ y que si N es un subespacio de X tal que $M \subset N$, entonces $N = M$ ó $N = X$. De acuerdo con esta terminología, el teorema anterior nos dice que los conjuntos A y B se separan mediante el hiperplano afín de ecuación $\Re e f(x) = \alpha$, en el sentido de que dicho hiperplano deja a un lado al conjunto A y al otro a B.

El siguiente corolario nos va a demostrar que el Teorema 2.3.4 es en realidad una versión equivalente de la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Sea X un espacio vectorial, diremos que una función $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es **convexa** si y solo si

$$\Phi(tx + (1-t)y) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$$

para cualesquiera $x, y \in X, t \in [0,1]$.

Corolario 2.3.5 *Sea X un espacio vectorial real, $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Si M es un subespacio de X y $g \in M^\sharp$ son tales que*

$$g(m) \leq \Phi(m), \ \forall m \in M,$$

entonces existe $f \in X^\sharp$ tal que $f(m) = g(m)$ $\forall m \in M$ y $f(x) \leq \Phi(x), \ \forall x \in X$.

Por supuesto, cualquier funcional sublineal es una función convexa, con lo que a partir del corolario anterior, se obtiene la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Mostramos de esta forma que el Teorema 2.3.4 es una lectura equivalente de la versión analítica del Teorema de Hahn-Banach. Ambas versiones son puramente algebraicas. Sin embargo, podríamos pensar que el concepto absorbencia es una especie de reformulación del concepto de interior en términos "algebraicos", ya que si el origen es un punto interior a un subconjunto de un espacio normado, entonces dicho subconjunto es absorbente. En vista de esta observación podemos obtener un teorema de separación para espacios normados. Antes necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.3.6 *Sea X un espacio normado. Si A es un subconjunto convexo, entonces A^{int} es un subconjunto convexo y $\overline{A} = \overline{A^{int}}$.*

Corolario 2.3.7 *Sea X un espacio normado y A y B dos subconjuntos no vacíos y convexos de X. Si $int(A) \neq \emptyset$ y $B \cap int(A) = \emptyset$, entonces existe $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\Re ef(a) \leq \alpha \leq \Re ef(b), \ \forall a \in A, b \in B.$$

Además $\Re ef(x) < \alpha$ $\forall x \in int(A)$. $\square$

Si ahora, en el resultado anterior, tomamos A cerrado y $B = \{x_0\}$ un punto de la frontera de A llegamos a:

Corolario 2.3.8 ***(Existencia de funcionales soporte).*** *Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que*

$$\Re e f(x_0) = max\{\Re e f(x) : x \in A\}.$$

Observemos que el hiperplano de ecuación $\Re e f(x) = \alpha$, donde $\alpha = \Re e f(x_0)$, pasa por x_0 y deja a un lado al conjunto A. Esta situación de claro contenido geométrico suele describirse diciendo que el funcional f_0 (respectivamente, el hiperplano H_0) **soporta** al conjunto A en el punto x_0 o también que x_0 es un **punto de soporte** de A, o que f_0 un **funcional de soporte** de A o que H_0 un **hiperplano de soporte** de A.

Por último, si pretendemos separar dos conjuntos convexos no sólo disjuntos, sino que además su distancia sea estrictamente positiva, se puede añadir alguna perfección adicional.

Corolario 2.3.9 *Sea X un espacio normado y A y B dos subconjuntos convexos y no vacíos de X. Si $dist(A, B) = \delta > 0$, entonces existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que*

$$\Re e f(a) + \delta \leq \Re e f(b) \qquad (\forall a \in A, b \in B).$$

□

Es usual referirse a cualquiera de los tres últimos resultados utilizando la expresión de teorema de separación de tipo Hahn-Banach. Si en el último de ellos el conjunto B se reduce a un punto obtenemos:

Corolario 2.3.10 *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X no vacío y convexo. Dado $x_0 \in X$ con $d(x_0, A) > 0$, existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que*

$$\Re e f(x_0) = \sup \Re e f(A) + d(x_0, A).$$

□

Cuando intentamos separar dos subconjuntos no vacíos, cerrados y disjuntos de un espacio normado donde además uno de ellos es compacto podemos conseguir el siguiente teorema de separación, el cual es un poco más fuerte que los anteriores.

Corolario 2.3.11 ***(Milman).*** *Sea X un espacio normado y sean A y B subconjuntos disjuntos, convexos y no vacíos de X. Supongamos que A es cerrado y B es compacto. Entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ tal que*

$$\sup \Re e f(A) + d(A, B) = \text{ínf} \Re e f(B).$$

2.3.1. Relación de Ejercicios

1. Sea X un espacio normado y A un entorno de cero convexo que verifica la siguiente propiedad : si $x \in A$ y $\lambda \in \mathbf{K}$ con $|\lambda| \leq 1$, entonces $\lambda x \in A$. Pruébese que el funcional de Minkowski de A es una seminorma en X.

2. Sean X un espacio vectorial y M un subespacio vectorial de X. Supóngase que p es una seminorma en X y que q es una seminorma en M tales que $q(m) \leq p(m)$ para todo $m \in M$. Pruébese que existe una seminorma r en X tal que $r(m) = q(m)$ para todo $m \in M$ y $r(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. [Indicación: Considérese el funcional de Minkowski de $U := co(B_{(X,p)} \cup B_{(M,q)})$.]

3. Sean X un espacio normado y M un subespacio vectorial de X. Supóngase que $|||\ .\ |||$ es una norma equivalente en M. Pruébese que $|||\ .\ |||$ puede extenderse a una norma equivalente sobre X.

4. Sean A y B subconjuntos no vacíos, abiertos, convexos y disjuntos de un espacio normado X. Probar que existen $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $\alpha \in \mathbf{R}$ tales que $Ref(a) < \alpha < Ref(b)$ para todo $a \in A$ y $b \in B$. ¿Es posible encontrar f tal que $SupRef(A) < InfRef(B)$?

BIBLIOGRAFÍA: La mayor parte de los resultados contenidos en este capítulo pueden ser encontrados en los textos [8], [21], [26], [5], [22], [32], [13] y [31]. La demostración del teorema de Markov-Kakutani la hemos tomado de [38]. Los trabajos [2] y [23] contienen más aplicaciones del teorema de Hahn-Banach. Proponemos además la monografía [9] como texto de consulta.

Capítulo 3

Teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhaus

Tema III: Teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhaus Dentro del ámbito del Análisis Funcional existen tres resultados conocidos como los tres principios fundamentales del Análisis Funcional. El primero de ellos es el Teorema de Hahn-Banach, el cual ya ha sido presentado en el capítulo anterior. Los otros dos principios fundamentales a los que nos referimos son el Teorema de la aplicación abierta y el Teorema de Banach-Steinhaus (o Principio de acotación uniforme). Vamos a dedicar este capítulo al desarrollo de estos dos principios.

El primer autor en notar que cualquier biyección lineal y continua entre espacios de Banach siempre es abierta fue Banach. Posteriormente, Schauder obtuvo una demostración del mismo resultado utilizando el Teorema de Baire.

En la primera lección de este capítulo presentamos y desarrollamos el Teorema de Baire para poder obtener a partir de él el Teorema de la aplicación abierta.

La segunda lección de este capítulo presenta diferentes reformulaciones del Teorema de la aplicación abierta, nos referimos al Teorema de los isomorfismos de Banach y al Teorema de la gráfica cerrada. Asímismo presentamos algunas aplicaciones de este principio en sus diferentes formas.

Dejamos para la tercera lección de este capítulo el último de los principios fundamentales del Análisis Funcional: el Teorema de Banach-Steinhaus. Después, aplicando de nuevo el Teorema de Baire, obtenemos algunas consecuencias, como por ejemplo las diversas caracterizaciones de la acotación en espacios de operadores.

3.1. Teorema de Baire

En 1897 Osgood demostró que la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos de $\mathbb{R}$ es de nuevo un subconjunto denso de $\mathbb{R}$. Dos años más tarde Baire estableció que el mismo resultado continua siendo cierto cuando reemplazamos $\mathbb{R}$ por $\mathbb{R}^n$. Tenemos que esperar casi treinta años para obtener la versión definitiva del resultado conocido como Teorema de Baire. Concretamente, en 1927 Banach y Steinhaus observaron que la prueba de Baire es perfectamente válida cuando $\mathbb{R}^n$ se sustituye, bien por un espacio métrico completo o bien por un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Estos dos últimos autores pusieron de manifiesto la utilidad del Teorema de Baire para simplificar ciertas pruebas que necesitaban de complicadas construcciones. Para ser más precisos, el resultado de Banach y Steinhaus, es el inicio de una herramienta imprescindible en el desarrollo del Análisis Funcional denominada método de la categoría de Baire, cuya base son los conceptos de “grandeza” y “pequeñez” de un subconjunto de un espacio topológico que definimos a continuación.

Definición 3.1.1 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que A es de **primera categoría** en X, (o pequeño), si A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados y con interior vacío en X. Diremos que A es de **segunda categoría** en X, (o grande), si no es de primera categoría en X. Diremos, por último, que X es un **espacio de Baire** si todo abierto no vacío en X es de segunda categoría en X.*

Como consecuencia de la definición, un subconjunto de otro de primera categoría es también de primera categoría, así como todo subconjunto que contiene a uno de segunda categoría vuelve a ser de segunda categoría.

La siguiente equivalencia, de obtención inmediata, pone de manifiesto la naturalidad de los espacios de Baire.

Proposición 3.1.2 *Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes:*

1. *X es un espacio de Baire.*
2. *La intersección numerable de abiertos densos en X es densa en X.*
3. *La unión numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío en X tiene interior vacío en X.*

Veamos que los espacios de Banach son espacios de Baire, e incluso que

Teorema 3.1.3 ***(Baire)*** *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Veamos una primera aplicación del Teorema de Baire.

Corolario 3.1.4 *La dimensión (algebraica) de un espacio de Banach es finita o no numerable.*

En el resultado anterior la completitud de X es esencial. Sirva como prueba de ello el espacio c_{00} que tiene dimensión infinita numerable y no es completo. Llegados a este punto, conviene advertir que los conceptos de categoría dependen del espacio ambiente, puesto que $\mathbb{R}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}^2$, mientras que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo, como consecuencia del teorema de Baire.

3.2. Teorema de la aplicación abierta

Este tema contiene una presentación del Teorema de la aplicación abierta. En 1929, Banach probó el primer teorema de la aplicación abierta, demostrando que una aplicación biyectiva, lineal y continua entre espacios de Banach debe ser abierta. En 1930, Schauder obtuvo una versión más general del teorema. Por esta razón, el Teorema de la aplicación abierta se denomina con frecuencia Teorema de Banach-Schauder. La demostración que presentamos en este tema es la que se realiza aplicando el Teorema de Baire y sigue las ideas de Schauder. El tema también contiene diversas reformulaciones equivalentes del Teorema de la aplicación abierta como son el Teorema de los isomorfismos de Banach, y el Teorema de la gráfica cerrada.

Comenzamos la sección con una caracterización de las aplicaciones lineales que son abiertas:

Proposición 3.2.1 *Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Demuéstrese que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *T es abierta.*
2. *Existe $r > 0$ tal que $rB_Y \subseteq T(B_X)$.*
3. *Existe $M > 0$ tal que para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ con $T(x) = y$ y $||x|| \leq M||y||$.*
4. *Para cada sucesión nula $\{y_n\}$ en Y, existe una sucesión nula $\{x_n\}$ en X verificando que, para cada n, $T(x_n) = y_n$.*
5. *La aplicación $\widetilde{T} : x + KerT \longmapsto T(x)$ es una biyección lineal de $X/KerT$ sobre Y cuya inversa es continua.*

La actuación combinada del Teorema de Baire y del siguiente lema nos permitirá obtener el Teorema de la aplicación abierta.

Lema 3.2.2 *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X, Y)$. Supongamos que $\overline{T(B_X)}$ es un entorno de cero en Y. Entonces T es abierta.*

Teorema 3.2.3 ***(Teorema de la aplicación abierta de Banach)*** *Toda aplicación lineal, continua y sobreyectiva entre dos espacios de Banach es abierta.*

El Teorema de la aplicación abierta admite la siguiente reformulación equivalente.

Corolario 3.2.4 ***(Teorema de los isomorfismos de Banach)*** *Toda biyección lineal y continua continua entre dos espacios de Banach es bicontinua y, por tanto, un isomorfismo.*

No es difícil obtener el Teorema de la aplicación abierta a partir del Teorema de los isomorfismos de Banach, corroborando así que ambos resultados son equivalentes.

La complitud es esencial en el teorema de los isomorfismos, tal como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.2.5 *Puesto que evidentemente $c_{00} \subset \ell_1 \subset c_0 \subset \ell_\infty$ podemos considerar en ℓ_1 la norma que hereda de ℓ_∞ (la norma del supremo). Respecto de dicha norma sabemos que $\overline{c_{00}} = c_0$, luego también $\overline{\ell_1} = c_0$. De esta forma ℓ_1 no es un subespacio cerrado de ℓ_∞ y, en consecuencia, $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach. Sin embargo, ℓ_1 con su norma habitual $\|\cdot\|_1$, es un espacio de Banach y es claro que*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \,, \ \forall x \in \ell_1.$$

La identidad es pues una biyección lineal continua de $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ **en** $(\ell_1, \|\cdot\|_\infty)$ **pero no es un isomorfismo (luego no es abierta)** *puesto que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes.*

Sean $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ dos normas sobre un espacio vectorial X. Ya sabemos que $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son equivalentes si y solo si generan la misma topología en X o equivalentemente, si existen dos constantes positivas $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x_2\| \leq \beta\|x\|_1 \quad (\forall x \in X). \tag{3.1}$$

Con objeto de generalizar este concepto diremos que las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son **comparables** si y solo si la topología generada por una de ellas contiene a la topología generada por la otra norma, equivalentemente, si existe alguna de las constantes α o β verificando alguna de las desigualdades en (3.1).

El siguiente ejemplo nos muestra que en cualquier espacio normado de dimensión infinita podemos encontrar otra norma no comparable a la norma de partida, además si la norma de partida es completa podemos conseguir que la norma no equivalente también lo sea.

Ejemplo 3.2.6 *Sea X un espacio normado de dimensión infinita y sea $B = \{e_i : i \in I\}$ una base de Hamel de X, cuyos elementos suponemos, puesto que no es restrictivo, de norma 1. Como I es infinito, I contiene una sucesión $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La aplicación lineal $T : X \to X$ definida mediante*

$$T(e_{i_{2n-1}}) = ne_{i_{2n-1}},\ T(e_{i_{2n}}) = \frac{1}{n}e_{i_{2n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$T(e_i) = e_i, \quad \forall i \in I \backslash \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$$

es biyectiva pero ni ella ni su inversa son continuas por no estar acotadas en la bola unidad. Si definimos:

$$|||x||| = ||T(x)||,\ \forall x \in X$$

obtenemos una norma sobre X **no comparable a la norma de partida**. *Además, T es un isomorfismo isométrico de X con la norma $|||\cdot|||$ en X con la norma $||\cdot||$ y, por tanto, $|||\cdot|||$ es completa si, y sólo si, lo es $||\cdot||$.*

Es claro que dos normas equivalentes son comparables. Cuando las dos normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son completas, el Teorema de los isomorfismos de Banach nos permite asegurar que $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ son equivalentes si y solo si son comparables.

Corolario 3.2.7 *Sea X un espacio vectorial y supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas sobre X. Entonces dichas normas son equivalentes si, y sólo si, son comparables, esto es, existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq \alpha\,\|x\|_2$ para todo $x \in X$.*

La siguiente reformulación del teorema de la aplicación abierta, e conocida como el Teorema de la gráfica cerrada tiene un enunciado totalmente distinto. La autoría de este resultado debe ser adjudicada si duda a Banach (ver [2]). Consideremos, a modo de introducción, dos espacios topológicos X e Y con Y Haussdorff y una aplicación $F : X \to Y$. Si F es continua, entonces la gráfica de F:

$$G(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y = F(x)\}$$

es un subconjunto cerrado de $X \times Y$. No obstante, no toda aplicación $F : X \to Y$ cuya gráfica sea cerrada es continua, por ejemplo, la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) := x^{-1}$ si $x \neq 0$ y $F(0) := 0$ es claramente no continua en cero y sin embargo, su gráfica es cerrada.

Cuando trabajamos con aplicaciones lineales entre espacios de Banach no se van a poder producir situaciones como las del ejemplo anterior.

Corolario 3.2.8 ***(Teorema de la gráfica cerrada).*** *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces T es continua si, y sólo si, su gráfica es cerrada.*

Como la gráfica de una aplicación biyectiva entre dos espacios topológicos es cerrada si, y sólo si, lo es la gráfica de su inversa, el Teorema de la gráfica cerrada permite deducir el Teorema de los isomorfismos de Banach.

Entonces podemos afirmar que los Teoremas de la aplicación abierta, de los isomorfismos de Banach y de la gráfica cerrada son diferentes formulaciones de un mismo principio.

En muchos casos, el Teorema de la gráfica cerrada facilita enormemente el estudio de la continuidad de una aplicación lineal entre espacios de Banach. El siguiente resultado nos proporcionará una visión clara de este hecho.

Proposición 3.2.9 *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ una aplicación lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La gráfica de T es cerrada.*

2. *Si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de X convergente a cero tal que la sucesión $\{T(x_n)\}$ es convergente, entonces $\{T(x_n)\} \to 0$.*

Así pues, si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal entre dos espacios de Banach X e Y, para estudiar su continuidad no necesitamos probar que dada una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X convergente a cero, entonces $\{T(x_n)\}$ converge y su límite es cero. Basta suponer que $\{T(x_n)\}$ converge y entonces probar que su límite es cero pues, en tal caso, la gráfica de T es cerrada y T es continua.

Una de las aplicaciones más directas del teorema de la gráfica cerrada es caracterizar los subespacios complementados de un espacio de Banach. Como sabemos un tal subespacio y su complemento han de ser cerrados. De hecho el recíproco es también cierto.

Corolario 3.2.10 *Sea X un espacio de Banach y supongamos que X es suma directa de dos subespacios M y N. Entonces la suma es topológico directa si, y sólo si, M y N son cerrados en X.* $\square$

3.2.1. Relación de ejercicios

1. Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Se define una nueva norma en X mediante la expresión $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$ para todo $x \in X$. Pruébese que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) T es continua.

   b) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son normas equivalentes.

   c) $\|\cdot\|_1$ es una norma completa en X.

2. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal y continua. Probar que T es inyectiva y $T(X)$ es cerrado en Y si, y sólo si, existe $m > 0$ tal $\|T(x)\| \geq m\|x\|$ para todo $x \in X$.

3. Sea M un subespacio cerrado de l_p y de l_q. Pruébese que las normas inducidas en M por l_p y l_q son equivalentes.

4. Probar que no existe ninguna sucesión $u = \{u_n\}$ en $\mathbf{K}$ tal que, para toda sucesión $x = \{x_n\}$ en $\mathbf{K}$, se verifica que:

   $$x \in l_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{x_n u_n\} \text{ está acotada.}$$

   [Sugerencia: Supuesta la existencia de una tal sucesión $u = \{u_n\}$ ésta está acotada, nótese además que se puede suponer que todos sus términos son no nulos, y considérese para cada sucesión $x = \{x_n\}$, la sucesión $x' = \{\frac{x_n}{u_n}\}$, y demuéstrese que la aplicación $x \mapsto x'$ es un isomorfismo topológico de l_∞ sobre l_1].

5. Pruébese que todo funcional lineal de un espacio normado con gráfica cerrada es continuo.

6. Sean X, Y espacios de Banach, y $A \subseteq Y^*$ tal que A separa los puntos de Y. Pruébese que si $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal tal que $f \circ T \in X^*$ para todo $f \in A$, entonces T es continua.

3.3. Teorema de Banach-Steinhaus

El objetivo de este tema es presentar la consecuencia más importante del Teorema de la Gráfica cerrada, nos referimos al Teorema de Banach-Steinhaus o Principio de acotación uniforme. Este Teorema es conocido como el último de los tres principios fundamentales del Análisis Funcional.

El Teorema de Banach-Steinhaus no requiere más motivación que la que exponemos a continuación. Sean X e Y espacios normados y $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(X, Y)$ que converge puntualmente a una aplicación, necesariamente lineal, $T : X \to Y$. Es natural cuestionarse la posible continuidad de T. el siguiente ejemplo prueba que en general la continuidad no se puede asegurar

Ejemplo 3.3.1 *Para cada natural n, sea T_n el funcional sobre c_{00} definido por*

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k), \ \forall x \in c_{00}.$$

Evidentemente T_n es lineal y como

$$|T_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x(k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \leq n \|x\|_\infty , \ \forall x \in c_{00},$$

se tiene que T_n es continuo y $\|T_n\| \leq n, \forall n$. Considérese, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $u_n : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ dada por

$$u_n(k) = 1 \quad si\ 1 \leq k \leq n, \quad u_n(k) = 0 \quad si\ k > n.$$

Claramente $u_n \in c_{00}$ con $\|u_n\|_\infty = 1$ y $T_n(u_n) = n$. Entonces $\|T_n\| = n$.

Es inmediato comprobar que la sucesión $\{T_n\}$ converge puntualmente en c_{00} al funcional lineal T dado por

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \quad (x \in c_{00}),$$

y T no es continua, porque T no está acotada en la bola unidad de c_{00} ya que $T(u_n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

¿Cómo pues podemos asegurarnos esta convergencia? Obsérvese que, para cada $x \in X$, tenemos:

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \|x\| , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la sucesión $\{\|T_n\|\}$ está acotada por α, es claro que

$$\|T_n(x)\| \leq \alpha \|x\|, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

y, haciendo $n \to \infty$, obtenemos $\|T(x)\| \leq \alpha \|x\|$, luego $T \in L(X,Y)$. Necesitamos, por tanto, la acotación de $\{\|T_n\|\}$ o, lo que es lo mismo, la acotación uniforme de $\{T_n\}$ en B_X.

Este hecho justifica el interés de un resultado que nos permita pasar de la acotación puntual a la uniforme en la bola (aunque precise de la completitud de X). Dicho resultado es consecuencia del Teorema de la gráfica cerrada.

Corolario 3.3.2 ***(Teorema de Banach-Steinhauss)*** *Sea X un espacio de Banach y sea $\{Y_i : i \in I\}$ una familia arbitraria de espacios normados. Supongamos que para cada $i \in I$ tenemos una aplicación lineal y continua T_i de X en Y_i. Si la familia $\{T_i : i \in I\}$ está puntualmente acotada, entonces también lo está uniformemente en B_X, esto es,*

$$\exists M > 0 : \|T_i(x)\| \leq M\|x\| \; \forall x \in X, i \in I.$$

La situación más interesante para aplicar el resultado anterior es la que se produce cuando todos los espacios Y_i coinciden con un espacio normado Y. En este caso la familia de operadores $\{T_i\}$ es un subconjunto del espacio $L(X,Y)$. Cuando X es completo el Principio de acotación uniforme garantiza que dicho subconjunto está acotado en norma siempre que este acotado puntualmente. Se puede afinar un poco más suponiendo la familia $\{T_i : i \in I\}$ coincide con el conjunto formado por los términos de una sucesión de elementos de $L(X,Y)$.

Corolario 3.3.3 ***(Teorema de cierre de Steinhaus).*** *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(X,Y)$ puntualmente convergente a un operador (necesariamente lineal) T de X en Y. Entonces T es continuo y por tanto $T \in L(X,Y)$.*

Las primeras aplicaciones del Teorema de Banach-Steinhaus nos permiten obtener caracterizaciones de la acotación en espacios normados y en espacios de operadores.

Corolario 3.3.4 *Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Entonces son equivalentes:*

1. *A está acotado.*

2. *El conjunto de escalares $\{f(a) : a \in A\}$ está acotado para cada $f \in X^*$.*

Corolario 3.3.5 *Sean X un espacio de Banach y B un subconjunto no vacío de X^*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *B está acotado.*

2. *Para cada $x \in X$, el conjunto $[J_X(x)](B) = \{f(x) : f \in B\}$ está acotado.*

Corolario 3.3.6 *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y F un subconjunto de $L(X,Y)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *F está acotado.*

2. *Para cada $x \in X$ y cada $g \in Y^*$, el conjunto $\{g(T(x)) : T \in F\}$ está acotado.*

Otra aplicación directa del Teorema de Banach-Steinhaus nos permite obtener la siguiente equivalencia entre acotación puntual y uniforme para series de escalares.

Corolario 3.3.7 *Sea $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$y \in \ell_1$.*

2. *Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ es absolutamente convergente.*

3. *Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ es convergente.*

4. *Para cada $x \in c_0$ la serie $\sum_n x(n)y(n)$ tiene sumas parciales acotadas.* $\square$

El Teorema de Banach-Steinhaus puede ser también aplicado para obtener la siguiente caracterización de la continuidad de aplicaciones bilineales entre espacios de Banach.

Corolario 3.3.8 *Sean X un espacio de Banach, Y, Z espacios normados y $T : X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Entonces son equivalentes:*

1. *T es continua.*

2. *T es separadamente continua.*

3. *Existe $M > 0$ tal que $\|T(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ $\forall x \in X, y \in Y$.* $\square$

3.3.1. Relación de ejercicios

1. Sean X un espacio de Banach sobre $\mathbf{K}$ e I un conjunto no vacío. Dada una aplicación lineal $T : X \to l_\infty(I)$ se considera, para cada $i \in I$, el funcional lineal $T_i : X \to \mathbf{K}$ definido por
$$T_i(x) = T(x)(i).$$
Pruébese que si $T_i \in X^*$ para todo $i \in I$, entonces T es continua.

2. Sean X un espacio de Banach, $A \subseteq X$ tal que $X = \overline{Lin(A)}$, y $\{f_n\}$ una sucesión de elementos de X^*. Pruébese que equivalen:
   a) $\{f_n(x)\} \to 0$ para todo $x \in X$.
   b) $Sup\ \{\| f_n \| : n \in \mathbf{N}\} < \infty$ y $\{f_n(a)\} \to 0$ para todo $a \in A$.

3. Sean (E, d) un espacio métrico y X un espacio normado. Probar que una aplicación $T : E \to X$ es lipschitziana si, y sólo si, $f \circ T$ lo es, para todo $f \in X^*$.

4. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de escalares tal que la serie $\sum x_n y_n$ es convergente para toda sucesión $\{y_n\} \in l_1$. Probar que $\{x_n\} \in l_\infty$.

5. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de escalares tal que la serie $\sum x_n y_n$ es convergente para toda sucesión $\{y_n\} \in l_p$ $(1 < p < +\infty)$. Probar que $\{x_n\} \in l_q$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

BIBLIOGRAFÍA: Las demostraciones de los resultados más importantes de este capítulo está muy cerca de las ideas originales de Banach [2]. Sin embargo, la adaptación de las mismas a una notación actual se ha llevado a cabo tomando ideas de los textos [5, 7, 8, 13, 22, 29, 32, 41, 42]. La mayoría de las aplicaciones que hemos expuesto aparecen en [31] y [42]. La idea de probar el teorema de Banach-Steinhauss a partir del teorema de la gráfica cerrada ha sido tomada de [26].

Capítulo 4

Espacios de Hilbert.

El origen de los espacios de Hilbert se encuentra, sin lugar a dudas, en un trabajo de David Hilbert sobre teoría espectral publicado en (1906) . La finalidad del mismo no era otra que profundizar en un trabajo anterior de Fredholm sobre las ecuaciones integrales que llevan su nombre. De esta forma Hilbert llega de forma natural a la consideración del espacio ℓ_2 de las sucesiones de números reales de cuadrado sumable. Dos años después de la aparición del trabajo de Hilbert aparecen los resultados del propio Fréchet y de uno de los más destacados discípulos de Hilbert, E. Schmidt. Estos últimos trabajos presentan ya métodos geométricos para el estudio del espacio de Hilbert separable, explotando la similitud con la geometría euclídea en dimensión finita (el trabajo de Schmidt contiene las nociones de producto escalar, norma, ortogonalidad y el Teorema de la Proyección ortogonal).

En 1906-1907, F. Riesz y E. Fisher, aprovechando la preciosa herramienta que Lebesgue les había proporcionado, establecen el teorema que lleva su nombre sobre la completitud del espacio $L_2(I)$ de las (clases de) funciones de cuadrado integrable en un intervalo compacto I y el total isomorfismo de dicho espacio con ℓ_2, vía coeficientes de Fourier, ligando de por vida los espacios de Hilbert con la teoría de la integración y la de las series de Fourier y abriendo el camino para la consideración de los espacios $L_p(I)$ y de los espacios de Banach en general. Históricamente estos resultados son claramente anteriores a los desarrollados en los anteriores capítulos, los cuales se centran más en los espacios de Banach. Así pues, nos permitimos un pequeño salto hacia atrás en el tiempo para poder presentar la teoría de Hilbert.

Este capítulo presenta los conceptos y resultados básicos en la teoría de los espacios de Hilbert y está subdivido en tres lecciones:

Lección 2.1: **Identidad del paralelogramo.**

En esta lección introducimos el concepto de espacio prehilbertiano y de espacio de Hilbert. Una vez visto que todo espacio de Hilbert es un espacio normado presentamos una caracterización de los espacios normados cuya norma proviene de un producto escalar. Nos referimos a la caracterización, obtenida por Jordan y von Neumann, que afirma que una norma en un espacio vectorial proviene de un producto escalar si y solo si dicha norma verifica la identidad del paralelogramo.

Lección 2.2: **Teorema de la proyección ortogonal. Teorema de Riesz.**

La identidad del paralelogramo nos permitirá obtener diversas propiedades geométricas de los espacios de Hilbert entre las que destacan claramente el Teorema de aproximación óptima y el Teorema de la proyección ortogonal. La principal consecuencia del Teorema de la proyección ortogonal es, si duda alguna, el Teorema de Riesz-Fréchet, el cual describe perfectamente el dual de un espacio de Hilbert y nos afirma que estos espacios son de hecho autoduales.

Lección 2.3: **Bases ortogonales. Espacios de Hilbert "tipo".**

Esta lección nos permite, gracias al concepto de base ortonormal, la representación de un espacio de Hilbert separable en la forma ℓ_2.

4.1. Identidad del paralelogramo

4.1.1. Espacio prehilbertiano

Definición 4.1.1 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Diremos que una aplicación $(.|.) : X \times X \to \mathbb{K}$ es un **producto escalar** en X si verifica las siguientes afirmaciones:*

i) $(\lambda x_1 + x_2|y) = \lambda(x_1|y) + (x_2|y) \quad (x_1, x_2, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$.

ii) $(y|x) = \overline{(x|y)} \quad (x, y \in X)$.

iii) $x \in X,\ x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0$.

*Un **espacio prehilbertiano** es un espacio vectorial en el que se tiene definido un producto escalar.*

4.1.2. Norma natural en un espacio prehilbertiano. Espacios de Hilbert.

Nuestro primer resultado, de obtención inmediata, nos permite dotar de estructura de espacio normado a cualquier espacio prehilbertiano.

Proposición 4.1.2 *Sea X un espacio prehilbertiano. Se verifican entonces:*

1. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz:***

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y) \qquad (x, y \in X).$$

2. ***Desigualdad de Minkowski:***

$$(x+y|x+y)^{1/2} \leq (x|x)^{1/2} + (y|y)^{1/2} \qquad (x, y \in X).$$

Por tanto, la aplicación $x \to (x|x)^{1/2}$ es una norma en X (la desigualdad de Minkowski se convierte en la desigualdad triangular para la norma.)

Consideraremos cualquier espacio prehilbertiano X canónicamente como espacio normado con la **norma** dada por:

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X).$$

Más adelante veremos que la aplicación $\widehat{x} : y \longmapsto (x|y)$ (resp. $\widetilde{x} : y \longmapsto (y|x)$) juega un papel muy importante en lo relativo a estos espacios. Obsérvese que la desigualdad de Cauchy-Schwarz toma la forma:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\| \qquad (x, y \in X)$$

y en consecuencia, dicha aplicaión es lineal (resp. conjugado -lineal) y continua de norma uno.

Si la norma canónica de un espacio prehilbertiano X es completa, decimos que X es un **espacio de Hilbert**.

Nos podemos preguntar ahora si toda norma proviene de un cierto producto escalar. Para ello, veamos primeramente que tal producto escalar, si existe, vendría determinado como sigue:

Lema 4.1.3 ***(Identidad de polarización)*** *Sea X un espacio prehilbertiano, entonces, para cualesquiera $x, y \in X$, se verifica:*

$$4\mathrm{Re}(x|y) = (x+y|x+y) - (x-y|x-y)$$

y en consecuencia, ya que

$$\mathrm{Im}\,(x|y) = \Re\mathrm{e}(x|iy) \qquad (x, y \in X),$$

se tiene,

$$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2).$$

Antes de continuar observemos, que como consecuencia inmediata de lo anterior, si X e Y son espacios prehilbertianos y $T : X \to Y$ es lineal e isométrica, entonces T conserva el producto escalar. Dicho de otra forma, dos espacios prehilbertianos son idénticos si lo son como espacios normados, es decir, si son isométricamente isomorfos.

El siguiente resultado proporciona la caracterización más utilizada de cuando una norma proviene de un producto escalar.

Teorema 4.1.4 ***(Jordan-von Neumann)*** *Sea* $\|\cdot\|$ *una norma en un espacio vectorial* X*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *Existe un producto escalar* $(\cdot|\cdot)$ *en* X *tal que*

$$\|x\|^2 = (x|x) \qquad (x \in X).$$

2. *Se verifica la* ***igualdad del paralelogramo****, es decir,*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad (x, y \in X).$$

Si recorremos la historia en sentido contrario a su desarrollo, ahora podemos contrastar fácilmente cuando algunos espacios de Banach clásicos son espacios de Hilbert.

Ejemplo 4.1.5 *De la familia de espacios de Banach*

$$\{\ell_p : 1 \leq p \leq +\infty\} \cup \{L_p[0,1] : 1 \leq p \leq +\infty\}$$

son espacios de Hilbert sólo ℓ_2 *y* $L_2[0,1]$.

De hecho, dados $x, y \in \ell_2$ *(resp.* $f, g \in L_2[0,1]$*), la aplicación*

$$(x,y) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} x(n)\overline{y(n)},$$

(respectivamente

$$(f,g) \longmapsto \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt),$$

define el correspondiente producto escalar.

4.1.3. Relación de ejercicios

1. Pruébense la desigualdad de Cauchy-Schwarz y su consecuencia: la desigualdad de Minkowski.
2. Demuéstrese que la elipse $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ de semiejes $a, b \in \mathbf{R}^+$ es la esfera unidad para una norma de espacio de Hilbert en $\mathbf{R}^2$.

3. Pruébese que si $p \neq 2$ entonces l_p y $L_p([0,1])$ no son espacios de Hilbert.

4. Pruébese que ni c_{00} ni $\mathcal{C}([0,1])$ son espacios prehilbertianos. En consecuencia, ninguno de los espacios c_0 , c , l_∞ son espacios de Hilbert.

5. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en un espacio prehilbertiano X y $x \in X$ tal que $\{(x_n \mid x)\} \longrightarrow \|x\|^2$ y $\{\|x_n\|\} \longrightarrow \|x\|$. Pruébese que $\{x_n\} \longrightarrow x$.

4.2. Teorema de la proyección ortogonal

Podemos abordar ahora la consecuencia más importante de la identidad del paralelogramo, nos referimos al Teorema de aproximación óptima.

Definición 4.2.1 *Sea X un espacio métrico, M un subconjunto no vacío de X y $a \in X$. Se dice que un punto $x_0 \in M$ es una* ***aproximación óptima*** *(o* ***mejor aproximación****) de a en M si*

$$d(a, x_0) = d(a, M) := \text{ínf}\, \{d(a, x) : x \in M\}\,.$$

Teorema 4.2.2 ***(Teorema de aproximación óptima)*** *Sea H un espacio de Hilbert y M un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de H. Entonces, para cada $a \in H$, existe un único punto $x_0 \in M$ tal que*

$$\|a - x_0\| = d(a, M).$$

Es decir, a tiene una única aproximación óptima en M.

Antes de continuar veamos la siguiente caracterización de la aproximación óptima.

Proposición 4.2.3 *Sea M un subespacio de un espacio de Hilbert H y sea $a \in H \backslash M$. Entonces $x_0 \in M$ es la mejor aproximación de a en M si, y sólo si, $(a - x_0|y) = 0$ para todo $y \in M$.*

Dicha caracterización motiva la siguiente definición.

4.2.1. Ortogonalidad

Definición 4.2.4 *Decimos que dos vectores x e y de un espacio de Hilbert H son* ***ortogonales****, y lo notaremos por $x \perp y$, si, y solo si, $(x|y) = 0$. Dado un subconjunto no vacío M de H, se denomina* ***complemento ortogonal*** *de M en H al conjunto definido por*

$$M^{\perp} = \{y \in H : (y|x) = 0,\ \forall x \in M\}.$$

Es evidente que $(x|y) = 0$ si, y sólo si, $(y|x) = 0$. Además, notemos que si x e y son ortogonales, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \ \text{(expresión abstracta del Teorema de Pitágoras).}$$

El siguiente resultado recoge algunas propiedades del complemento ortogonal de comprobación inmediata.

Proposición 4.2.5 *Sea M un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert H.*

1. *$M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H.*

2. *$M \subset M^{\perp\perp} := (M^{\perp})^{\perp}$.*

3. *$M \cap M^{\perp} \subset \{0\}$, y si M es un subespacio, entonces $M \cap M^{\perp} = \{0\}$.*

4. *$M^{\perp} = (\overline{Lin}(M))^{\perp}$.*

Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H. De acuerdo con el Teorema de aproximación óptima, para cada $a \in M$ existe una única aproximación óptima de a en M que notaremos por $P_M(a) \in M$. Sabemos además que $a - P_M(a) \in M^{\perp}$ y que $P_M(a)$ es el único punto de M que materializa la distancia de a a M. Podemos enunciar ahora el Teorema de la proyección ortogonal.

Teorema 4.2.6 ***(Teorema de la proyección ortogonal)*** *Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H. Entonces:*

1. *Todo punto $a \in H$ se expresa, de manera única, en la forma*

$$a = P_M(a) + (a - P_M(a))$$

   con $P_M(a) \in M$ y $a - P_M(a) \in M^{\perp}$, esto es

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

2. *La aplicación P_M es una proyección lineal continua (esto es, la suma directa es topoógica) con $\|P_M\| = 1$ si $M \neq \{0\}$ y cuyo núcleo es $M^{\perp}$. P_M recibe el nombre de* ***proyección ortogonal*** *de H sobre M.*

Como consecuencia inmediata del Teorema de la proyección ortogonal podemos obtener el siguiente resultado:

Corolario 4.2.7 *Sea A un subconjunto arbitrario y no vacío de un espacio de Hilbert H. Entonces $A^{\perp\perp}$ es el mínimo subespacio cerrado de H que contiene al conjunto A. En particular, si Y es un subespacio de H se tiene $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en H si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.* $\square$

4.2.2. Autodualidad de los espacios de Hilbert

Una vez que hemos obtenido el Teorema de la proyección ortogonal vamos a poder obtener la autodualidad de los mencionados espacios.

Comenzamos por una observación elemental que podía haberse hecho inmediatamente después de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Si H es un espacio prehilbertiano y $x \in H$ podemos considerar la aplicación $\widetilde{x} : H \to \mathbb{K}$ definida por

$$\widetilde{x}(y) = (y|x) \qquad (y \in H);$$

tenemos claramente que $\widetilde{x}$ es un funcional lineal continuo en H, esto es $\widetilde{x} \in H^*$, y $\|\widetilde{x}\| = \|x\|$. La aplicación $x \to \widetilde{x}$ es conjugado-lineal (lineal en caso real) e isométrica. Para que sea sobreyectiva H debería ser completo, puesto que H^* siempre lo es. Bajo la hipótesis de completitud el Teorema de la Proyección ortogonal nos permite probar fácilmente:

Teorema 4.2.8 ***(Teorema de Riesz-Fréchet)*** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $f \in H^*$. Entonces existe un único vector $x \in H$ tal que $f(y) = (y|x)$ para todo $y \in H$. Como consecuencia la aplicación $x \to \widetilde{x}$, donde*

$$\widetilde{x}(y) = (y|x) \qquad (x, y \in H)$$

es una biyección conjugado-lineal isométrica de H sobre H^*.

Como caso particular del teorema anterior obtenemos la descripción del dual de $L_2[0,1]$. Notemos que, en el caso complejo, la identificación de $L_2[0,1]$ con su dual que ahora obtenemos es conjugado-lineal. Ello no es ningún problema, puesto que la aplicación $g \to \overline{g}$ $(g \in L_2[0,1])$ es a su vez una biyección conjugado-lineal e isométrica de $L_2[0,1]$ en sí mismo, y basta componerla con la que da el teorema anterior.

4.2.3. Relación de ejercicios

1. Sea X un espacio prehilbertiano real. Demuéstres que para $x, y \in X$ equivalen:

   a) $x \perp y$.

   b) $\| x + ty \| = \| x - ty \|$ para todo $t \in \mathbf{R}$.

   c) $\| x + ty \| \geq \| x \|$ para todo $t \in \mathbf{R}$.

2. Pruébese que si X es un espacio de Hilbert y $P : X \longrightarrow X$ es una proyección lineal continua de norma uno, entonces P es una proyección ortogonal.

3. Sean X un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de X. Si $Q : X \to X/M$ es la aplicación cociente, compruébese que

$$Q\,|_{M^\perp} : M^\perp \to X/M$$

   es un isomorfismo isométrico.

4. Calcúlese la proyección ortogonal en l_2 sobre el subespacio M generado por los vectores $v_1 = (1, 1, 0, 0, \ldots)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ y $v_3 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$.

5. Sea $M = \{x \in l_2 : x(1) = x(2) = x(3)\}$. Pruébese que M es el complemento ortogonal del subespacio de l_2 generado por los vectores $u = (1, -1, 0, 0, \ldots)$ y $v = (0, 1, -1, 0, \ldots)$. Obténgase la descomposición de cualquier vector de l_2 como suma de un elemento de M y otro de $M^\perp$.

6. Sea M el subespacio de l_2 generado por el conjunto $\{v_n : n \in \mathbf{N}\}$, con $v_1 = (1, -5, 6, 0, 0, \ldots)$, $v_2 = (0, 1, -5, 6, 0, 0, \ldots)$, $v_3 = (0, 0, 1, -5, 6, 0, \ldots)$, etc. Dado $x \in l_2$, pruébese que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   a) $x \in M^\perp$.
   b) $6x(n+2) - 5x(n+1) + x(n) = 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$.
   c) x es combinación lineal de $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$ y $v = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots)$.

7. Calcúlese el mínimo valor de $\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$, siendo a, b, c números reales.

4.3. Bases ortonormales

La idea de esta lección no es otra que la descripción, salvo isometrías sobreyectivas, de los espacios de Hilbert separables abstractos. Concretamente, veremos que cualquier espacio de Hilbert separable es isométricamente isomorfo a ℓ_2.

4.3.1. Bases ortonormales.

La clave para la demostración de la descripción, salvo isometrías sobreyectivas, de los espacios de Hilbert separables será la existencia de bases ortonormales.

Comenzamos observando el espacio ℓ_2 más detenidamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $e_n \in \ell_2$ mediante $e_n(m) := \delta_{n,m}$. Cada elemento $x \in \ell_2$ puede ser reconstruido a partir de los e_n. Para ser más precisos cada $x \in \ell_2$ se puede expresar en la forma

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (x|e_n)\ e_n.$$

Esto nos permite aproximar x mediante elementos del subespacio generado por el conjunto $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Queremos destacar que estos e_n también verifican:

$$\|e_n\| = 1, \quad (e_n|e_m) = 0 \qquad (n, m \in \mathbb{N}, n \neq m).$$

Tenemos de este forma justificada la siguiente definición.

Definición 4.3.1 *Un* ***sistema ortonormal*** *en un espacio de Hilbert H es un subconjunto no vacío $E = \{x_i : \ i \in I\}$ de vectores de la esfera unidad de H, tal que*

$$(x_i|x_j) = 0 \text{ para cada } i, j \in I, \ i \neq j.$$

Para cada $x \in H$, la familia de escalares $\{(x|x_i) : \ i \in I\}$ es, por definición, la familia de los ***coeficientes de Fourier*** *del vector x con respecto al sistema ortonormal E.*

Es claro que el conjunto formado por todos los sistemas ortonormales de H está ordenado parcialmente con respecto a la relación de inclusión. Una ***base ortonormal*** *de H es un sistema ortonormal maximal en H.*

Teorema 4.3.2 *Todo espacio de Hilbert separable (no trivial) H posee una base ortonormal numerable. De hecho, todo conjunto ortonormal en H está contenido en una base ortonormal de H.*

El siguiente lema recoge una serie de resultados de fácil demostración pero de una gran utilidad.

Lema 4.3.3 *Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert H.*

1. *Si, para cada n, M_n denota el subespacio de H engendrado por la familia $\{x_j : j = 1, 2, ..., n\}$ y P_n la proyección ortogonal de H sobre M_n, se tiene:*

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^{n}(x|x_j)x_j, \ \forall x \in H. \tag{4.1}$$

En particular,

$$\|x\|^2 = \left\| x - \sum_{j=1}^{n}(x|x_j)x_j \right\|^2 + \sum_{j=1}^{n} |(x|x_j)|^2, \ \forall x \in H. \tag{4.2}$$

2. *Para cada $x \in H$, la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}}\{|(x|x_n)|^2 : n \in \mathbb{N}\}$ es convergente y se verifica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_n)|^2 = \|x\|^2 - d(x, M)^2 \tag{4.3}$$

*donde M es el subespacio de H engendrado por $\{x_n : i \in \mathbb{N}\}$. En particular, se verifica la **desigualdad de Bessel:***

$$\sum_{i\in I} |(x|x_i)|^2 \leq \|x\|^2 .$$

El siguiente teorema se sigue de manera directa del lema anterior.

Teorema 4.3.4 *Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert H y M el subespacio vectorial de H engendrado por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortonormal de H.*
2. *M es denso en H.*
3. *$x = \sum_{n=1}^{\infty}(x|x_n)x_n, \ \forall x \in H.$*
4. *$(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x|x_n)(x_n|y), \ \forall x, y \in H.$*
5. *$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(x|x_i)|^2, \ \forall x \in H.$*

6. Si $x \in H$ *y* $(x|x_n) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, entonces* $x = 0$.

Definición 4.3.5 *Sea* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una base ortonormal de un espacio de Hilbert* H*. Dado* $x \in H$*, la igualdad*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (x|x_n)x_n$$

recibe el nombre de ***desarrollo de Fourier*** *del vector* x *con respecto a la base ortonormal* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*. También se dice que la familia de escalares* $\{(x|x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ *es la familia de los* ***coeficientes de Fourier*** *del vector* x *con respecto a la base ortonormal* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*. Cualquiera de las relaciones*

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |(x|x_i)|^2, \quad (x|y) = \sum_{i \in I} (x|x_i)(x_i|y) \quad (x, y \in H)$$

se conoce como ***igualdad de Parseval****.*

Podemos ahora obtener la descripción de cualquier espacio de Hilbert con una base ortonormal numerable.

Corolario 4.3.6 *Sea* H *un espacio de Hilbert y sea* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una base ortonormal de* H*. Entonces* H *es isométricamente isomorfo a* ℓ_2*. En concreto la aplicación* $x \mapsto \widehat{x}$*, de* H *en* ℓ_2*, donde*

$$\widehat{x}(n) = (x|x_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

es un isomorfismo isométrico de H *en* ℓ_2*.*

Los resultados del corolario anterior nos permiten mejorar los obtenidos en el Lema 4.3.3.

Corolario 4.3.7 *Sea* H *un espacio de Hilbert y* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *un conjunto ortonormal en* H*. Si* M *es el subespacio cerrado de* H *engendrado por la familia* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *y* P_M *es la proyección ortogonal de* H *sobre* M*, se tiene*

$$P_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|x_n)x_n, \ \forall x \in H.$$

Con las herramientas que disponemos en este momento es sencillo demostrar que todo conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert siempre es un conjunto linealmente independiente. Si por el contrario pretendemos encontrar un conjunto ortonormal a partir de un conjunto linealmente independiente obtenemos la siguiente respuesta afirmativa para el caso en que el conjunto de vectores es numerable.

Proposición 4.3.8 ***(Método de Gram-Schmidt)*** *Si* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio de Hilbert* H, *entonces existe un conjunto ortonormal* $\{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ *en* H *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *el subespacio engendrado por* $\{y_i : 1 \leq i \leq n\}$ *coincide con el subespacio engendrado por* $\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Un proceso similar al anterior permite ortonormalizar un conjunto finito de vectores linealmente independientes. Exactamente se tiene:

Corolario 4.3.9 *Si* $\{x_1, ..., x_n\}$ *es un conjunto finito de vectores linealmente independientes de un espacio de Hilbert* H, *entonces el conjunto* $\{y_1, ..., y_n\}$ *de vectores de* H *definido por:*

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \ , \quad y_k = \frac{x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|y_i)y_i}{\left\| x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|y_i)y_i \right\|} \ , \ k = 2, ..., n$$

es un conjunto ortonormal en H *tal que*

$$Lin(\{y_1, ..., y_n\}) = Lin(\{x_1, ..., x_n\}).$$

Con las herramientas desarrolladas hasta este momento podemos describir, salvo isometrías sobreyectivas, todos los espacios de Hilbert abstractos finito-dimensionales o separables.

Ya podemos enunciar la descripción de una manera más precisa,

Teorema 4.3.10 *Se verifica:*

1. *Todo espacio de Hilbert de dimensión finita* n *es isométricamente isomorfo a* ℓ_2^n.
2. *Un espacio de Hilbert es separable si, y sólo si, posee una base ortonormal numerable.*
3. *Todo espacio de Hilbert separable infinito-dimensional es isométricamente isomorfo a* ℓ_2.

Bibliografía

[1] Bachman, G. and Narici, L., *Functional Analysis*, Academic Press. New York 1.966.

[2] Banach, S., *Theory of Linear Operations.* North Holland. Amsterdam 1.987.

[3] Beauzamy, B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, North Holland, Amsterdam, 1982.

[4] Berberian, S.K., *Introducción al espacio de Hilbert,* Teide, Barcelona, 1970.

[5] Berberian, S.K., *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[6] Bombal, F., Los orígenes del análisis Funcional, *Historia de la Matemática en el siglo XIX*, Real Academia de Ciencias de Madrid (1994), pp. 35–56.

[7] Brézis, H., *Análisis Funcional*, Alianza, Madrid, 1984.

[8] Brown, A. L. y Page, A., *Elements of Functional Analysis*, Van Nostrand, London, 1970.

[9] Buskes, G., *The Hahn-Banach Theorem surveyed.* Dissertationes Mathematicae 327. Warszawa 1.993.

[10] Choquet, G., *Course D'Analyse. Tome II: Topologie.* Masson. Paris 1.964.

[11] Choquet, G., *Topología*, Toray-Masson, Barcelona, 1971.

[12] Cohn, D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[13] Conway, J., *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.

[14] Diestel, J., *Geometry of Banach Spaces: Selected Topics*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[15] Dieudonné, J., *History of Functional Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1981.

[16] Dunford, N. y Schwartz, J., *Linear Operators. Part I: General Theory*, Interscience, New York, 1957.

[17] Field, M. J., *Differential Calculus and its applications*, Van Nostrand. New York 1.976.

[18] Gaughan, E., *Introducción al análisis*, Alhambra. Madrid 1.972.

[19] Habala, P., Hájek, P. and Zizler, V., *Introduction to Banach Spaces [I]*, Matfyzpress, Praha 1.996.

[20] Hewitt, E. y Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[21] Holmes, R., *Geometric Functional Analysis and its Applications*. Springer-Verlag. New York 1.975.

[22] Jameson, G. J. O., *Topology and Normed Spaces*. Chapmam and Hall. London 1.974.

[23] Jarchow, H., *Locally Convex Spaces*. Teubner Stuttgart 1.981.

[24] Köthe, G., *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[25] Kremp, S., *An elementary proof of the Eberlein-Smulian Theorem and the double limit criterion*, Arch. der Math., 47 (1986), 66-69.

[26] Larsen, R., *Functional Analysis an introduction*. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker. New York 1.973.

[27] Margalef Roig, J., Outerelo Domínguez, E. y Pinilla Ferrando, J.L., *Topología*, Alhambra, Madrid, 1979.

[28] Megginson, R. E., An introduction to Banach space Theory, Springer-Verlag, New York, 1998.

[29] Mukherjea, A. y Photoven, K., *Real and Functional Analysis. Part B: Functional Analysis*, Plenum Press, New York, 1986.

[30] Pedersen, G. K., *Analysis Now*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[31] Rudin, W., *Functional Analysis*. Mc Graw-Hill. New York 1.973.

[32] Rudin, W., *Análisis Funcional*, Reverté, Barcelona, 1979.

[33] Rudin, W., *Análisis Real y Complejo*, Alhambra, Madrid, 1985.

[34] Saxe, K., *Beginning Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[35] Taylor, A. E., *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley and Sons. New York 1.958.

[36] Taylor, A. E., *A study of Maurice Fréchet:I. His early work on point set theory and the theory of functionals*, Arch. Hist. Exact. Sci. 27 (1982), 233-295

[37] Valdivia, M., *Análisis Matemático V*, U.N.E.D., Madrid, 1979.

[38] Werner, D., *A Proof of the Markov-Kakutani Fixed Point Theorem Via the Hahn-Banach Theorem*, Extracta Mathematicae 8. 1.993, (37-38).

[39] Whitley, R. J., *An elementary proof of the Eberlein-Smulian Theorem*, Math. Ann., 172 (1967), 116-118.

[40] Wilanski, A., *Functional Analysis*, Blaisdell, New York, 1964.

[41] Wilanski, A., *Topology for Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1970.

[42] Wilanski, A., *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, Mc Graw-Hill, New York, 1978.