

UNIVERSIDAD DE GRANADA



DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA

**CAMPOS BIPARAMÉTRICOS  
LOGNORMALES**

Concepción Beatriz Roldán López de Hierro

**TESIS DOCTORAL**

**Granada, 2002**

# **CAMPOS BIPARAMÉTRICOS LOGNORMALES**

Memoria presentada por  
Concepción Beatriz Roldán  
López de Hierro para optar al  
Grado de Doctor por la  
Universidad de Granada

V.B.

El director de la tesis

Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa

Universidad de Granada

2002



# Índice General

<b>1 Campos de Difusión Gaussianos Biparamétricos</b>	<b>5</b>
1.1 Introducción . . . . .	5
1.2 Campos Markovianos Biparamétricos . . . . .	7
1.3 Campos de Difusión Biparamétricos . . . . .	13
1.4 Campos de Difusión Gaussianos Biparamétricos . . . . .	21
1.4.1 Difusiones Gaussianas Uniparamétricas . . . . .	24
1.4.2 Distribución del Incremento Bidimensional y Densidad de Transición del Campo . . . . .	29
1.4.3 Coeficientes de Difusión Biparamétricos . . . . .	35
1.4.4 Campo de Difusión Gaussiano Biparamétrico . . . . .	36
1.4.5 Representación de un Campo de Difusión Gaussiano por una Ecuación en Derivadas Parciales . . . . .	42
<b>2 Campos de Difusión Lognormales Biparamétricos</b>	<b>45</b>
2.1 Introducción . . . . .	45
2.2 Definición de Campo de Difusión Lognormal Biparamétrico . . . . .	47
2.2.1 Difusiones Lognormales Uniparamétricas . . . . .	48
2.2.2 Campo de Difusión Lognormal Biparamétrico . . . . .	54
2.2.3 Densidad de Transición del Campo . . . . .	58
2.3 Coeficientes de Difusión Biparamétricos . . . . .	58

---

2.3.1	Hipótesis I a IV . . . . .	59
2.3.2	Coeficientes de Difusión Biparamétricos . . . . .	70
2.4	Momentos del Campo Lognormal Biparamétrico . . . . .	71
2.4.1	Momentos Condicionados de Orden $k$ . . . . .	72
2.4.2	Momentos de Orden $k$ . . . . .	73
2.4.3	Función de Covarianza . . . . .	74
2.5	Representación de un Campo de Difusión Lognormal por una Ecuación en Derivadas Parciales . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Ecuaciones de Difusión</b>	<b>83</b>
3.1	Introducción . . . . .	83
3.2	Ecuación de Kolmogorov para el Campo de Difusión Lognormal (Método de Ricciardi) . . . . .	85
3.3	Ecuación Atrasada de Kolmogorov para el Campo de Difusión Lognormal (Método de Ricciardi) . . . . .	99
<b>4</b>	<b>Aplicación del Kriging a Campos Concretos</b>	<b>115</b>
4.1	Introducción . . . . .	115
4.2	Planteamiento del Problema . . . . .	118
4.2.1	Conceptos sobre Campos Aleatorios . . . . .	118
4.2.2	Kriging . . . . .	122
4.3	Kriging Simple . . . . .	123
4.4	Kriging Ordinario . . . . .	125
4.4.1	Kriging Ordinario en Términos de Variogramas . . . . .	126
4.4.2	Kriging Ordinario en Términos de Covarianzas . . . . .	129
4.5	Kriging para los Campos de Difusión Gaussiano y Lognormal . . . . .	132
4.5.1	Kriging Gaussiano . . . . .	132
4.5.2	Kriging Lognormal . . . . .	135
4.6	Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal . . . . .	149

4.6.1 Simulación No Restringida de Campos Aleatorios . . . . .	149
4.6.2 Simulación Condicionada cuando la Media del Campo es Conocida .	150
4.6.3 Simulación Condicionada cuando la Media del Campo es Desconocida pero Constante . . . . .	155
<b>A Simulación No Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal</b>	<b>165</b>
<b>B Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal cuando la Media es Conocida</b>	<b>169</b>
<b>C Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal cuando la Media es Desconocida pero Constante</b>	<b>173</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>177</b>



# Capítulo 1

## Campos de Difusión Gaussianos Biparamétricos

### 1.1 Introducción

Los campos de difusión constituyen actualmente un importante área de investigación por su interés en la modelización de múltiples fenómenos que intervienen en procesos físicos, biológicos, económicos y sociales. El objetivo del primer capítulo de esta memoria es el estudio de campos de difusión gaussianos biparamétricos para lo cual necesitamos introducir previamente algunos conceptos y resultados generales (básicos) sobre campos aleatorios.

En la Sección 1.2 daremos la definición de campo aleatorio espacial, esto es, un proceso estocástico cuyo espacio paramétrico es un subconjunto de un espacio euclídeo de dimensión finita. Aunque la definición de campo aleatorio espacial la estableceremos en general, nos centraremos en espacios paramétricos bidimensionales y emplearemos el término *campo aleatorio biparamétrico*. Llamaremos *procesos uniparamétricos asociados al campo* a los procesos que surgen de fijar cada una de las coordenadas del espacio paramétrico bidimensional.

La teoría de procesos estocásticos de Markov fue presentada en 1906 por A. A. Markov,



quien formuló el principio que hoy lleva su nombre. En términos muy simples, este principio afirma que el futuro es independiente del pasado cuando conocemos el presente. Fijada la notación que va a ser utilizada y considerando que el espacio paramétrico es el cuadrante positivo del plano, vamos a introducir una propiedad de Markov para campos biparamétricos. Los campos que verifican esta propiedad se conocen como *campos de Markov*. Esta propiedad introducida por R. Cairoli [3], al igual que en el caso uniparamétrico, permite caracterizar la ley de un campo de Markov por una familia de probabilidades de transición y la distribución del campo en los ejes del espacio paramétrico (distribución inicial), con lo cual el estudio de los campos de Markov biparamétricos se suele hacer utilizando la familia de probabilidades de transición en lugar de la familia de distribuciones finito dimensionales. La probabilidad de transición de un proceso de Markov verifica la conocida ecuación de Chapman-Kolmogorov, que también es posible establecer para un campo de Markov biparamétrico.

En la Sección 1.3, resumiremos los conceptos y resultados que D. Nualart [19] estableció sobre campos de difusión biparamétricos. En esta sección consideraremos que el espacio paramétrico es un subconjunto compacto del cuadrante positivo del plano. En el caso uniparamétrico (véase [1] ú [17]) una difusión es un proceso de Markov con trayectorias continuas que verifica tres condiciones. La primera asegura que grandes desplazamientos son improbables en intervalos de tiempo pequeños. La segunda define una función que da el valor medio infinitesimal del proceso en un instante cualquiera cuando conocemos el valor del proceso en un instante anterior y la tercera define una función que da una medida de la fluctuación infinitesimal del proceso en torno al valor medio infinitesimal. Estas dos funciones se conocen como *coeficientes de difusión*. En el caso biparamétrico, D. Nualart trasladó este concepto a un campo de Markov biparamétrico con trayectorias continuas y estableció una definición de campo de difusión. Esta definición sólo requiere conocer los *coeficientes de difusión* de los procesos uniparamétricos asociados al campo. Años antes, D. Nualart y M. Sanz [20] dieron una definición que exigía conocer otras funciones aleatorias conocidas como *coeficientes de difusión biparamétricos*. Sin embargo,

no seguiremos esta definición ya que D. Nualart comprobó, bajo cuatro hipótesis, que los *coeficiente de difusión biparamétricos* se pueden obtener a partir de los *coeficientes de difusión uniparamétricos*. Además comprobó, que si añadimos una quinta hipótesis, podemos obtener la ecuación en derivadas parciales estocástica que verifica un campo de difusión. En física e ingeniería estas ecuaciones surgen de manera natural en la descripción de sistemas dinámicos sometidos a perturbaciones aleatorias. Es por ello, que su estudio constituye una herramienta muy útil en la construcción de modelos probabilísticos de numerosos fenómenos.

Por otro lado, es conocido que la distribución de las variables aleatorias que intervienen en muchos procesos naturales puede aproximarse de forma muy satisfactoria por la distribución de las variables aleatorias de un campo aleatorio espacial gaussiano. En la Sección 1.4, vamos a estudiar los campos de difusión gaussianos. El resultado principal de esta sección es el que establece una caracterización de campo de difusión gaussiano. En el caso uniparamétrico es posible probar que un proceso de difusión con *coeficientes de difusión* continuos es gaussiano si, y sólo si, la distribución inicial es gaussiana o constante, los *coeficientes de difusión* sólo dependen de la posición en el espacio paramétrico y algún *momento infinitesimal* de orden superior a dos es nulo. En el caso biparamétrico daremos una caracterización similar. Para demostrar este resultado previamente necesitaremos obtener algunas distribuciones y propiedades, que también nos serán de gran utilidad en el capítulo siguiente. Finalmente representaremos el campo de difusión gaussiano por una ecuación en derivadas parciales.

## 1.2 Campos Markovianos Biparamétricos

Vamos a empezar esta sección recordando la definición de campo aleatorio espacial y dando su ley, esto es, la información necesaria para tener completamente especificado el campo. Fijada la notación para el caso que estudiaremos, esto es, cuando la dimensión del espacio paramétrico es dos, introduciremos el concepto de campo markoviano biparamétrico,

daremos su ley y las ecuaciones de Chapman-kolmogorov que verifica. Finalmente recordaremos que los procesos uniparamétricos asociados a un campo de Markov, son procesos de Markov.

En general, como hemos comentado en la introducción, un *campo aleatorio espacial* es una familia de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad común, cuyo espacio paramétrico es un subconjunto de un espacio euclídeo de dimensión finita. Los campos aleatorios espaciales que consideraremos se establecen en la siguiente definición.

**Definición 1.1** Sea  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  un espacio probabilístico y sea  $(\mathbf{R}, \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$  un espacio medible, donde  $\mathfrak{B}(\mathbf{R})$  denota la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos de Borel sobre la recta real  $\mathbf{R}$ . Un **campo aleatorio espacial**  $\{X(z); z \in D\}$ , es una familia de variables aleatorias definidas sobre  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$  con valores en  $(\mathbf{R}, \mathfrak{B}(\mathbf{R}))$ , donde el espacio paramétrico  $D$  es un subconjunto de  $\mathbf{R}^n$ .

Vamos a establecer la ley de un campo aleatorio espacial en términos de la familia de funciones de distribución finito dimensionales. Si tomamos un conjunto finito de variables aleatorias del campo  $(X(z_1), \dots, X(z_m))$ ,  $m \geq 1$ , la función de distribución finito dimensional ( $m$ -dimensional) está dada por

$$F_{z_1, \dots, z_m}(x_1, \dots, x_m) = P[X(z_1) \leq x_1, \dots, X(z_m) \leq x_m],$$

donde  $z_1, \dots, z_m \in D$ ,  $x_1, \dots, x_m \in \mathbf{R}$ . Es evidente que la familia de funciones de distribución finito dimensionales antes considerada es *consistente*, es decir, verifica las siguientes condiciones:

a) **Condición de simetría:**

$$F_{z_{i_1}, \dots, z_{i_m}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = F_{z_1, \dots, z_m}(x_1, \dots, x_m),$$

para cualquier permutación  $i_1, \dots, i_m$  de los índices  $1, \dots, m$ .

## b) Condición de consistencia:

$$F_{s_1, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_{m+k}}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{s_1, \dots, s_m}(x_1, \dots, x_m),$$

para cualquier  $m, k \geq 1$ .

Podemos afirmar que un campo aleatorio espacial  $\{X(z); z \in D\}$  determina una familia consistente de funciones de distribución finito dimensionales  $\{F_{z_1, \dots, z_m}; z_1, \dots, z_m \in D, m \in \mathbf{N}\}$ . Sin embargo, ¿es cierto el recíproco?, esto es, ¿dada una familia de funciones de distribución finito dimensional, existe un campo aleatorio que posee la familia anterior como familia de funciones de distribuciones finito dimensionales? La respuesta a esta pregunta es afirmativa siempre que la familia de funciones de distribución finito dimensionales sea consistente (véase la extensión del *Teorema fundamental de Kolmogorov*, *Teorema 2* pag. 185 de [30]). Por lo tanto, una condición suficiente y necesaria para la existencia de un campo aleatorio espacial es que la familia de distribuciones finito dimensionales verifique las condiciones de simetría y consistencia anteriores.

La definición de campo aleatorio espacial anterior es más general de lo que nosotros necesitaremos. En nuestro estudio vamos a considerar  $n = 2$ . En esta situación hablaremos de **campo aleatorio espacial biparamétrico**.

En lo sucesivo vamos a considerar que el espacio paramétrico  $D$ , es el cuadrante positivo del plano que denotamos por  $\mathbf{R}_+^2$ . Cada valor  $z \in \mathbf{R}_+^2$  puede expresarse en coordenadas como  $z = (s, t)$  donde  $s, t \in \mathbf{R}_+$ . Usaremos indistintamente la notación simplificada  $z$ , o la notación en coordenadas  $(s, t)$ , para notar a los elementos de  $\mathbf{R}_+^2$ . Consideraremos el orden usual sobre  $\mathbf{R}_+^2$ :  $(s_1, t_1) \leq (s_2, t_2)$  si, y sólo si,  $s_1 \leq s_2$  y  $t_1 \leq t_2$  y escribiremos  $(s_1, t_1) < (s_2, t_2)$  si, y sólo si,  $s_1 < s_2$  y  $t_1 < t_2$ . También notaremos

$$z_1 \wedge z_2 = (s_1 \wedge s_2, t_1 \wedge t_2) = (\min \{s_1, s_2\}, \min \{t_1, t_2\})$$

y  $E_0$  para referirnos a los ejes del espacio paramétrico, en este caso,

$$E_0 = \{(s, t) \in \mathbf{R}_+^2 : s = 0 \text{ ó } t = 0\}.$$

Sea  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$  un campo aleatorio espacial biparamétrico definido sobre el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ . Supondremos que el campo es constante en  $E_0$ , esto es

$$X(z) = X(0,0) \quad \forall z \in E_0,$$

donde  $X(0,0)$  es una variable aleatoria o una constante. Para referirnos a las variables del campo usaremos indistintamente la notación  $X(z)$ ,  $X_z$  o bien  $X_{st}$  si queremos destacar las coordenadas de  $z$ . También se usará una notación análoga en las  $\sigma$ -álgebras asociadas al campo, que definimos a continuación.

Si  $\mathfrak{A}_1$  y  $\mathfrak{A}_2$  son dos  $\sigma$ -álgebras arbitrarias, notaremos  $\bigvee_{i=1,2} \mathfrak{A}_i$  ó  $\mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2$  a la menor  $\sigma$ -álgebra generada por la unión de  $\mathfrak{A}_1$  y  $\mathfrak{A}_2$ ,

$$\bigvee_{i=1,2} \mathfrak{A}_i \equiv \mathfrak{A}_1 \vee \mathfrak{A}_2 = \sigma \{ \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 \}.$$

Consideraremos las siguientes familias de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_z; z \in \mathbf{R}_+^2\}$ ,  $\{\mathfrak{F}_z^1; z \in \mathbf{R}_+^2\}$ ,  $\{\mathfrak{F}_z^2; z \in \mathbf{R}_+^2\}$ , donde para cada  $z \in \mathbf{R}_+^2$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_z &= \sigma \{ X(z') : z' \leq z \}, \\ \mathfrak{F}_z^1 &= \sigma \{ X(s', t') : s' \leq s, t' \in \mathbf{R}_+ \} = \bigvee_{t' \geq 0} \mathfrak{F}_{st'}, \\ \mathfrak{F}_z^2 &= \sigma \{ X(s', t') : s' \in \mathbf{R}_+, t' \leq t \} = \bigvee_{s' \geq 0} \mathfrak{F}_{s't}. \end{aligned}$$

Tal y como hemos definido  $\mathfrak{F}_z^1$  y  $\mathfrak{F}_z^2$ , tenemos que

$$\mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2 = \sigma \{ X(s', t') : s' \leq s \text{ ó } t' \leq t \}.$$

En todo lo que sigue supondremos que las  $\sigma$ -álgebras generadas por el campo, verifican la siguiente propiedad

Para cada  $z = (s, t) \in \mathbf{R}_+^2$ ,

$$\mathfrak{F}_z^1 \text{ y } \mathfrak{F}_z^2 \text{ son condicionalmente independientes dada } \mathfrak{F}_z. \quad (1.1)$$

La siguiente definición fue introducida por R. Cairoli [3].

**Definición 1.2**  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$  es un **campo de Markov (biparamétrico)** si para cada  $(s_1, t_1) < (s_2, t_2)$  y cada subconjunto de Borel  $B$ , se verifica que

$$P[X(s_2, t_2) \in B / \mathfrak{F}_{s_1 t_1}^1 \vee \mathfrak{F}_{s_1 t_1}^2] = P[X(s_2, t_2) \in B / X(s_1, t_2), X(s_1, t_1), X(s_2, t_1)]. \quad (1.2)$$

Dado un campo de Markov  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$ , llamaremos **probabilidad de transición (función de transición)** a la función

$$P(B, z_2 / (x_1, x, x_2), z_1)$$

definida para todo  $\bar{x} = (x_1, x, x_2) \in \mathbf{R}^3$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbf{R}_+^2$ ,  $z_1 \leq z_2$  y  $B$  conjunto de Borel sobre la recta real, que verifica las siguientes propiedades:

- a)  $P(B, z_2 / \cdot, z_1)$  es una función Borel de  $\bar{x}$ ,
- b)  $P(\cdot, z_2 / \bar{x}, z_1)$  es una probabilidad para  $z_1, z_2$  y  $\bar{x}$  fijos, y
- c)  $P[X(z_2) \in B / X(s_1, t_2) = x_1, X(z_1) = x, X(s_2, t_1) = x_2] = P(B, z_2 / \bar{x}, z_1)$ .

Si consideramos conjuntos de Borel de la forma  $B = ]-\infty, y]$ ,  $y \in \mathbf{R}$ , la probabilidad de transición es

$$P(]-\infty, y], z_2 / \bar{x}, z_1) = P[X(z_2) \leq y / X(s_1, t_2) = x_1, X(z_1) = x, X(s_2, t_1) = x_2].$$

En el caso de que dicha función sea derivable respecto a la variable  $y$ , a la derivada la llamaremos **densidad de transición**. Generalmente, para hacer referencia a esta función usaremos la notación  $f(y, z_2 / \bar{x}, z_1)$ .

R. Cairoli [3] comprobó que la distribución del campo de Markov está determinada por las probabilidades de transición junto con la distribución inicial (distribución en los ejes), por lo que, fijada la distribución inicial, el estudio de los campos de Markov se suele hacer y así lo haremos en esta memoria, a través del estudio de las probabilidades de transición y en el caso en que dichas probabilidades sean derivables, a través de la familia de densidades de transición.

En el caso uniparamétrico es conocido que la probabilidad de transición de un proceso de Markov siempre verifica una ecuación llamada “ecuación de Chapman-Kolmogorov”. En el caso biparamétrico, la probabilidad de transición del campo de Markov verifica las siguientes **ecuaciones de Chapman-Kolmogorov**

$$P(B, z_2 / (x_1, x, x_2), z_1) = \int_{\mathbf{R}} P(B, z_2 / (\xi_1, \eta_2, x_2), (\sigma, t_1)) \cdot P(d\xi_1, (\sigma, t_2) / (x_1, x, \eta_2), z_1), \quad (1.3)$$

$$P(B, z_2 / (x_1, x, x_2), z_1) = \int_{\mathbf{R}} P(B, z_2 / (x_1, \eta_1, \xi_2), (s_1, \tau)) \cdot P(d\xi_2, (s_2, \tau) / (\eta_1, x, x_2), z_1), \quad (1.4)$$

donde  $s_1 < \sigma < s_2$  y  $t_1 < \tau < t_2$ . La primera ecuación corresponde a integrar respecto al valor de la variable en la posición  $(\sigma, t_2)$  que hemos notado  $\xi_1$ . La segunda ecuación corresponde a integrar respecto al valor de la variable en la posición  $(s_2, \tau)$  que hemos notado  $\xi_2$ . Por tanto la primera ecuación corresponde a fijar la segunda coordenada de  $z_2$  y la segunda corresponde a fijar la primera coordenada de  $z_2$ . Si no fijamos ninguna coordenada, obtenemos una sólo **ecuación de Chapman-Kolmogorov**: Dado un punto  $z = (\sigma, \tau)$  tal que  $z_1 \leq z \leq z_2$ , para  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}$  se verifica que

$$P(B, z_2 / (x_1, x, x_2), z_1) = \int_{\mathbf{R}^3} P(B, z_2 / (\xi_1, \xi, \xi_2), z) \cdot P(d\xi_1, (\sigma, t_2) / (x_1, \eta_1, \xi), (s_1, \tau)) \cdot P(d\xi_2, (s_2, \tau) / (\xi, \eta_2, x_2), (\sigma, t_1)) \cdot P(d\xi, z / (\eta_1, x, \eta_2), z_1). \quad (1.5)$$

En el caso en que la densidad de transición exista, las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se formulan de forma análoga a la anterior, utilizando la densidad de transición en lugar de la probabilidad de transición.

Por otro lado, es claro que si fijamos una de las dos coordenadas de un campo aleatorio biparamétrico, obtenemos un proceso estocástico. En general, nos referiremos a estos procesos como *procesos uniparamétricos asociados al campo*. Si  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$  es un

campo de Markov, con probabilidad de transición dada por  $P(B, z_2 / (x_1, x, x_2), z_1)$ , entonces para  $t \in \mathbf{R}_+$  fijo y para cualquier  $s \geq 0$

$$P_1^t(B, s + h/x, s) = P(B, (s + h, t) / (x, c, c), (s, 0))$$

es la probabilidad de transición del proceso uniparamétrico  $\{X_{st}; s \geq 0\}$ . Para  $s \in \mathbf{R}_+$  fijo y para cualquier  $t \geq 0$

$$P_2^s(B, t + k/x, t) = P(B, (s, t + k) / (c, c, x), (0, t))$$

es la probabilidad de transición del proceso uniparamétrico  $\{X_{st}; t \geq 0\}$ . Utilizando la condición (1.2) es fácil comprobar que los procesos uniparamétricos asociados a un campo de Markov son **procesos de Markov** con funciones de transición  $P_1^t$  y  $P_2^s$ , respectivamente. Si tomamos conjuntos de Borel de la forma  $B = ]-\infty, y]$ ,  $y \in \mathbf{R}$  y las funciones de transición

$$\begin{aligned} P_1^t(]-\infty, y], s + h/x, s), \\ P_2^s(]-\infty, y], t + k/x, t), \end{aligned}$$

son funciones derivables respecto a la variable  $y$ , entonces el estudio de los procesos  $\{X_{st}; s \geq 0\}$  y  $\{X_{st}; t \geq 0\}$  se hará con las correspondientes derivadas, es decir, con las densidades de transición, a las que notaremos  $g_t(y, s + h/x, s)$  y  $g_s(y, t + k/x, t)$ , respectivamente.

### 1.3 Campos de Difusión Biparamétricos

Los campos de Markov se utilizan en la descripción de multitud de fenómenos físicos, biológicos, económicos y sociales. No obstante, son particularmente interesantes aquellos que verifican ciertas condiciones que se observan sobre el incremento del campo en un intervalo pequeño. Por ello, es interesante estudiar los campos de Markov que verifican ciertas condiciones que establecemos a continuación.

La siguiente definición fue introducida por D. Nualart [19].



**Definición 1.3** Un campo de Markov  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$  con valores en  $\mathbf{R}$  y trayectorias continuas casi seguramente es un **campo de difusión (biparamétrico)**, si existen funciones continuas  $a_1(s, t, x)$ ,  $B_1(s, t, x)$ ,  $a_2(s, t, x)$  y  $B_2(s, t, x)$  definidas en  $\mathbf{R}_+^2 \times \mathbf{R}$  tales que para cualquier  $\varepsilon > 0$  se verifican las siguientes condiciones:

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} P_1^t(dy, s+h/x, s) = o(h), \quad (1.6)$$

$$\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x) P_1^t(dy, s+h/x, s) = a_1(s, t, x)h + o(h), \quad (1.7)$$

$$\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 P_1^t(dy, s+h/x, s) = B_1(s, t, x)h + o(h), \quad (1.8)$$

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} P_2^s(dy, t+k/x, t) = o(k), \quad (1.9)$$

$$\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x) P_2^s(dy, t+k/x, t) = a_2(s, t, x)k + o(k), \quad (1.10)$$

$$\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 P_2^s(dy, t+k/x, t) = B_2(s, t, x)k + o(k), \quad (1.11)$$

$$\int_{|y-x_1-x_2+x|>\varepsilon} P(dy, (s+h, t+k)/(x_1, x, x_2), (s, t)) \cdot P_1^t(dx_2, s+h/x, s) P_2^s(dx_1, t+k/x, t) = o(hk), \quad (1.12)$$

donde  $h, k > 0$ .

Puesto que los procesos uniparamétricos asociados a un campo de Markov son procesos de Markov, si  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$  es un campo de difusión biparamétrico, entonces fijado  $t \in \mathbf{R}_+$ ,  $\{X_{st}; s \geq 0\}$  es un proceso de difusión uniparamétrico con coeficientes de difusión  $a_1(z, x)$  y  $B_1(z, x)$  y fijado  $s \in \mathbf{R}_+$ ,  $\{X_{st}; t \geq 0\}$  es un proceso de difusión uniparamétrico con coeficientes de difusión  $a_2(z, x)$  y  $B_2(z, x)$ . En consecuencia, la definición que hemos dado de campo de difusión biparamétrico es equivalente a decir que el campo de Markov  $\{X(z); z \in \mathbf{R}_+^2\}$  con trayectorias continuas sea un proceso de difusión en cada coordenada y que verifique (1.12). Las funciones  $a_i$  y  $B_i$ ,  $i = 1, 2$ , se conocen como *coeficiente de tendencia (drift)* y *de difusión* del proceso en cada coordenada, respectivamente. Para referirnos a ellos hablaremos, en general, de **coeficientes de difusión (uniparamétricos)**.

En todo lo que sigue usaremos la siguiente notación

$$\begin{aligned} X(\Delta_h^1(z)) &= X(s+h, t) - X(s, t), \\ X(\Delta_k^2(z)) &= X(s, t+k) - X(s, t), \\ X(\Delta_{hk}(z)) &= X(s+h, t+k) - X(s+h, t) - X(s, t+k) + X(s, t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

De acuerdo con la notación anterior la referencia (1.12) se expresaría como

$$P[|X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon/\mathfrak{F}_z] = o(hk).$$

**Observación 1.1** En las condiciones (1.7) y (1.8) hemos usado momentos truncados ya que los momentos condicionados

$$E[X(s+h, t)/X(s, t) = x] \quad \text{y} \quad E[X^2(s+h, t)/X(s, t) = x]$$

puede que no existan. Sin embargo, si para  $\delta > 0$  se verifica que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E[|X(\Delta_h^1(z))|^{2+\delta}/X(z) = x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{R}} |y-x|^{2+\delta} P_1^t(dy, s+h/x, s) = 0, \quad (1.14)$$

entonces, como para  $r \leq 2 + \delta$

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} |y-x|^r P_1^t(dy, s+h/x, s) \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta-r}} \int_{\mathbf{R}} |y-x|^{2+\delta} P_1^t(dy, s+h/x, s), \quad (1.15)$$

claramente, tomando  $r = 0$  la condición (1.6) se verifica y tomando  $r = 1, 2$  podemos elegir  $\mathbf{R}$  como región de integración para las condiciones (1.7) y (1.8).

En consecuencia, un proceso de Markov  $\{X_{st}; s \geq 0\}$  con trayectorias continuas casi seguramente que verifica (1.14),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} (y-x) P_1^t(dy, s+h/x, s) &= a_1(s, t, x) h + o(h), \\ \int_{\mathbf{R}} (y-x)^2 P_1^t(dy, s+h/x, s) &= B_1(s, t, x) h + o(h), \end{aligned}$$

es un proceso de difusión.

En estas condiciones, los momentos de orden  $r \leq 2 + \delta$  existen y coinciden con los truncados. El *momento infinitesimal de orden  $i$  del proceso*  $\{X_{st}; s \geq 0\}$  para  $0 < i \leq 2 + \delta$  viene dado por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ X(\Delta_h^1(z))^i / X(z) = x \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int (y-x)^i P_1^t(dy, s + h/x, s).$$

El momento infinitesimal de orden 1 es la media infinitesimal y puesto que

$$\begin{aligned} \text{var} \left[ X(\Delta_h^1(z)) / X(z) = x \right] &= B_1(z, x) h + o(h) - (a_1(z, x) h + o(h))^2 \\ &= B_1(z, x) h + o(h) \end{aligned}$$

el momento infinitesimal de orden 2 es la varianza infinitesimal. Queda así justificado en este caso los nombres de media y varianza infinitesimal para los coeficientes de difusión (en el caso general tendría que hablarse de media y varianza infinitesimal truncadas).

Veamos que para  $2 < i \leq 2 + \delta$  el momento infinitesimal de orden  $i$  es nulo. Para ello basta comprobar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ |X(\Delta_h^1(z))|^i / X(z) = x \right] = 0, \quad \text{si } 2 < i \leq 2 + \delta. \quad (1.16)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ |X(\Delta_h^1(z))|^i / X(z) = x \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int |y-x|^i P_1^t(dy, s + h/x, s) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} |y-x|^i P_1^t(dy, s + h/x, s) \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \varepsilon} |y-x|^i P_1^t(dy, s + h/x, s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que el primer sumando se anula teniendo en cuenta que los momentos truncados de orden superior a dos de un proceso de difusión son infinitesimos de orden  $h$  (véase la demostración que R. N. Bhattacharya y E.C. Waymire hacen para un proceso de difusión homogéneo en [2] y que se extiende sin dificultad a nuestro caso) y el segundo sumando es cero en virtud de la condición (1.15).

**Observación 1.2** Un razonamiento análogo al realizado en la *Observación 1.1* nos permite afirmar que si para  $\delta > 0$  el momento infinitesimal de orden  $2 + \delta$  del proceso  $\{X_{st}; t \geq 0\}$  se anula, esto es,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} E \left[ |X(\Delta_k^2(z))|^{2+\delta} / X(z) = x \right] = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \int_{\mathbf{R}} |y - x|^{2+\delta} P_2^s(dy, t + k/x, t) = 0, \quad (1.17)$$

entonces la condición (1.9) se verifica y podemos elegir  $\mathbf{R}$  como región de integración para las condiciones (1.10) y (1.11). En consecuencia, si  $\{X_{st}; t \geq 0\}$  es un proceso de Markov con trayectorias continuas casi seguramente que verifica (1.17),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} (y - x) P_2^s(dy, t + k/x, t) &= a_2(s, t, x) k + o(k), \\ \int_{\mathbf{R}} (y - x)^2 P_2^s(dy, t + k/x, t) &= B_2(s, t, x) k + o(k), \end{aligned}$$

entonces  $\{X_{st}; t \geq 0\}$  es un proceso de difusión cuyos coeficientes  $a_2(s, t, x)$  y  $B_2(s, t, x)$  representan la media y varianza infinitesimal respectivamente y se verifica que

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} E \left[ |X(\Delta_k^2(z))|^i / X(z) = x \right] = 0, \quad \text{si } 2 < i \leq 2 + \delta.$$

En la definición que D. Nualart y M. Sanz [20] dieron de campo de difusión, intervienen además de los coeficientes de difusión uniparamétricos otros conocidos como *coeficientes de difusión biparamétricos*. El motivo de no utilizar esta definición es que para los campos que vamos a estudiar, tanto el gaussiano como el lognormal, dichos coeficientes los podremos obtener a partir de los uniparamétricos cuando se cumplan las cuatro hipótesis que establecemos a continuación.

En lo sucesivo supondremos que el espacio paramétrico es el siguiente subconjunto de  $\mathbf{R}_+^2$ :  $I = [0, S] \times [0, T]$ . Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión biparamétrico. En primer lugar vamos a introducir tres hipótesis que permiten afirmar que los operadores de difusión uniparamétricos

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial s} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} B_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial t} + a_2 \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} B_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

conmutan. Las hipótesis son las siguientes:

(I) Las funciones  $a_1(s, t, x)$ ,  $a_2(s, t, x)$ ,  $B_1(s, t, x)$  y  $B_2(s, t, x)$  tienen derivadas parciales continuas con respecto a  $s$  y  $t$ , y son cuatro veces derivables con continuidad en  $x$ .

(II) Las condiciones (1.6), (1.9) y (1.12) se verifican uniformemente respecto a  $(s, t) \in I$ .

(III) Para cada compacto  $K$ , existen constantes  $l$  y  $c$  tales que

a) para  $x \in K$ ,

$$\left| \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) P_1^t(dy, s+h/x, s) \right| + \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 P_1^t(dy, s+h/x, s) \leq lh, \quad (1.19)$$

$$\left| \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) P_2^s(dy, t+k/x, t) \right| + \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 P_2^s(dy, t+k/x, t) \leq lk, \quad (1.20)$$

b)

$$\sup_{|x| > c} P_1^t(K, s+h/x, s) \leq lh, \quad (1.21)$$

$$\sup_{|x| > c} P_2^s(K, t+k/x, t) \leq lk, \quad (1.22)$$

para todo  $(s, t) \in I$ .

Se necesita una cuarta hipótesis para obtener la siguiente proposición.

(IV) Para cada compacto  $K$ , existe una constante  $l$  tal que si  $x, \xi \in K$ , entonces

$$\left| \int_{\substack{|x_2-x| \leq \varepsilon \\ |\xi_2-\xi| \leq \varepsilon}} (x_2-x)(\xi_2-\xi) P(dx_2, (s+h, t) / (x, \xi, \xi_2), (s, \tau)) P_1^\tau(d\xi_2, s+h/\xi, s) \right| \leq lh, \quad (1.23)$$

$$\left| \int_{\substack{|x_1-x| \leq \varepsilon \\ |\eta_1-\eta| \leq \varepsilon}} (x_1-x)(\eta_1-\eta) P(dx_1, (s, t+k) / (\eta_1, \eta, x), (\sigma, t)) P_2^\sigma(d\eta_1, t+k/\eta, t) \right| \leq lk, \quad (1.24)$$

para todo  $(s, t) \in I$ ,  $\tau \in [0, t)$ ,  $\sigma \in [0, s)$ .

El siguiente resultado, que permite obtener los coeficientes de difusión biparamétricos a partir de los uniparamétricos, puede consultarse en [19].

**Proposición 1.1** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando las hipótesis **I** a **IV**. Entonces las funciones*

$$\begin{aligned} a &= D_1 a_2 = D_2 a_1, \\ B &= D_2 B_1 - 2B_1 \frac{\partial a_2}{\partial x} = D_1 B_2 - 2B_2 \frac{\partial a_1}{\partial x}, \\ c_1 &= B_1 \frac{\partial a_2}{\partial x}, \quad c_2 = B_2 \frac{\partial a_1}{\partial x}, \\ d &= \frac{1}{2} B_1 \frac{\partial B_2}{\partial x} = \frac{1}{2} B_2 \frac{\partial B_1}{\partial x}, \end{aligned}$$

donde los operadores  $D_1$  y  $D_2$  están definidos en (1.18), son los **coeficientes de difusión biparamétricos** del campo en el siguiente sentido

$$\begin{aligned} & E \left[ X(\Delta_{hk}(z))^i X(\Delta_h^1(z))^j X(\Delta_k^2(z))^l / X(z) \right] \\ &= \begin{cases} a(z, X(z)) hk + o(hk) & \text{si } i=1, j, l=0, \\ B(z, X(z)) hk + o(hk) & \text{si } i=2, j, l=0, \\ c_1(z, X(z)) hk + o(hk) & \text{si } i=j=1, l=0, \\ c_2(z, X(z)) hk + o(hk) & \text{si } i=l=1, j=0, \\ d(z, X(z)) hk + o(hk) & \text{si } i=l=j=1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.25)$$

Las funciones  $a$  y  $B$  se conocen como *coeficiente de tendencia y varianza infinitesimal* del campo, respectivamente, mientras que  $c_1$ ,  $c_2$  y  $d$  son los llamados *coeficientes de difusión mixtos*.

En ciencias experimentales, como la física o la ingeniería, una de las formas más naturales de expresar un campo de difusión es como solución de una ecuación diferencial estocástica. Sin embargo, las hipótesis **I-IV** no son suficientes para ello. Un conocido resultado que nos permite representar un campo de difusión como la solución de una ecuación en derivadas parciales, lo estableció D. Nualart en [19] para campos de difusión que verifiquen las cuatro hipótesis antes consideradas y la siguiente hipótesis adicional:

(V) Existen funciones continuas  $\widehat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi)$  y  $\widehat{B}_2(s, t, \sigma, x, \eta)$  definidas para  $(s, t) \in I$ ,  $\sigma \in [0, s)$ ,  $\tau \in [0, t)$ ,  $x, \xi, \eta$  números reales, tales que:

a)  $B_1(s, t, x)$  y  $B_2(s, t, x)$  son dos veces derivables con continuidad respecto a la variable  $x$ .

b) Para cualquier  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{|x_2-x|\leq\varepsilon \\ |\xi_2-\xi|\leq\varepsilon}} (x_2-x)(\xi_2-\xi) P(dx_2, (s+h, t) / (x, \xi, \xi_2), (s, \tau)) P_1^\tau(d\xi_2, s+h/\xi, s) \\ &= \widehat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) h + o(h), \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{|x_1-x|\leq\varepsilon \\ |\eta_1-\eta|\leq\varepsilon}} (x_1-x)(\eta_1-\eta) P(dx_1, (s, t+k) / (\eta_1, \eta, x), (\sigma, t)) P_2^\sigma(d\eta_1, t+k/\eta, t) \\ &= \widehat{B}_2(s, t, \sigma, x, \eta) k + o(k). \end{aligned} \quad (1.27)$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \searrow \tau \\ x \rightarrow \xi}} \widehat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) &= B_1(s, \tau, \xi), \\ \lim_{\substack{s \searrow \sigma \\ x \rightarrow \eta}} \widehat{B}_2(s, t, \sigma, x, \eta) &= B_2(\sigma, t, \eta). \end{aligned} \quad (1.28)$$

**Proposición 1.2** Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando las hipótesis I a V. Entonces existe un campo de Wiener biparamétrico  $\{W(z); z \in I\}$  (considerando si es necesario un nuevo espacio de probabilidad), que nos permite representar el campo  $\{X(z); z \in I\}$  por la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 X_{st}}{\partial t \partial s} - \alpha_1(s, t, X_{st}) \frac{\partial X_{st}}{\partial s} - \alpha_2(s, t, X_{st}) \frac{\partial X_{st}}{\partial t} - \beta(s, t, X_{st}) \frac{\partial X_{st}}{\partial s} \frac{\partial X_{st}}{\partial t} - \gamma(s, t, X_{st}) \\ &= B^{1/2}(s, t, X_{st}) \frac{\partial^2 W_{st}}{\partial s \partial t}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

donde

$$\beta = B_1^{-1} B_2^{-1} d, \quad \alpha_1 = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \beta a_2, \quad \alpha_2 = \frac{\partial a_1}{\partial x} - \beta a_1, \quad \gamma = a - \frac{\partial(a_1 a_2)}{\partial x} + \beta a_1 a_2.$$

## 1.4 Campos de Difusión Gaussianos Biparamétricos

A lo largo de la presente sección, vamos a demostrar que un campo de difusión gaussiano está completamente determinado por su distribución inicial, por la media y varianza infinitesimal de las difusiones uniparamétricas y por ciertos coeficientes de difusión.

Sea  $\{X(z); z \in I \equiv [0, T] \times [0, S]\}$  un campo de difusión biparamétrico definido sobre el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ . En todo lo que sigue vamos a suponer que:

1.  $X(z) = X(0, 0)$  casi seguramente ( $P$ ), para todo  $z \in E_0 = \{(s, t) \in I : s = 0 \text{ ó } t = 0\}$ , donde

$$\begin{aligned} X(0, 0) \text{ es una v.a. gaussiana o una v.a. constante con} \\ E[X(0, 0)] = m_0 \text{ y } var(X(0, 0)) = \sigma_0^2 \end{aligned} \quad (1.30)$$

2. Los coeficientes de difusión uniparamétricos

$$\begin{aligned} a_1(z, x) = a_1(z), \quad a_2(z, x) = a_2(z), \\ B_1(z, x) = B_1(z), \quad B_2(z, x) = B_2(z), \end{aligned} \quad (1.31)$$

son funciones continuas que no dependen de  $x$ ,  $B_1 > 0$  y  $B_2 > 0$ .

3. Si  $k \in (0, T]$ , entonces se verifica que

$$\begin{aligned} E[X(\Delta_{hk}(z)) / X(s+h, t), X(z), X(s, t+k)] &= (a_1(s, t+k) - a_1(z))h + o(h), \\ E[X(\Delta_{hk}(z))^2 / X(s+h, t), X(z), X(s, t+k)] &= (B_1(s, t+k) - B_1(z))h + o(h). \end{aligned} \quad (1.32)$$

4. Existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} E\left[|X(\Delta_h^1(z))|^{2+\delta} / X(z)\right] &= o(h), \\ E\left[|X(\Delta_k^2(z))|^{2+\delta} / X(z)\right] &= o(k), \\ E\left[|X(\Delta_{hk}(z))|^{2+\delta} / X(s+h, t), X(z), X(s, t+k)\right] &= o(h), \quad \text{para } k \in (0, T]. \end{aligned} \quad (1.33)$$



Bajo estas hipótesis las condiciones (1.6) y (1.9) de la definición de campo de difusión son inmediatas y queda justificado los nombres de media infinitesimal y varianza infinitesimal para los coeficientes de difusión (véase las *Observaciones 1.1 y 1.2*), de ahí el comentario que hicimos al principio de la sección.

En lo sucesivo, con el propósito de simplificar la notación escribiremos

$$\bar{X}(z_1, z_2) \equiv \bar{X}((s_1, t_1), (s_2, t_2)) \equiv (X(s_1, t_2), X(s_1, t_1), X(s_2, t_1))$$

donde  $z_1, z_2 \in I$ ,  $z_1 \leq z_2$ ,  $z_1 = (s_1, t_1)$  y  $z_2 = (s_2, t_2)$ .

Bajo las hipótesis anteriores, no es necesario utilizar momentos truncados en (1.32). En efecto, si llamamos  $z = (s, t)$  y  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ , entonces para  $\delta > 0$  y  $k \in (0, T]$  se verifica que (véase (1.33))

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^{2+\delta} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\mathbf{R}} |y - x_1 - x_2 + x|^{2+\delta} P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z) = 0. \end{aligned}$$

Como para  $r \leq 2 + \delta$

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x_1-x_2+x|>\varepsilon} |y - x_1 - x_2 + x|^r P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z) \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^{2+\delta-r}} \int_{\mathbf{R}} |y - x_1 - x_2 + x|^{2+\delta} P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z), \end{aligned} \quad (1.34)$$

tomando  $r = 0$  tenemos que

$$P \left[ |X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] = o(h) \quad (1.35)$$

y tomando  $r = 1, 2$  concluimos que no es necesario utilizar momentos truncados en las condiciones de (1.32). Además, veamos que si  $k \in (0, T]$  e  $2 < i \leq 2 + \delta$ , entonces

$$E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^i / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] = o(h). \quad (1.36)$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^i / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int |y - x_1 - x_2 + x|^i P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x_1-x_2+x| \leq \varepsilon} |y - x_1 - x_2 + x|^i P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z) \\
&\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x_1-x_2+x| > \varepsilon} |y - x_1 - x_2 + x|^i P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x_1-x_2+x| \leq \varepsilon} |y - x_1 - x_2 + x|^i P(dy, (s+h, t+k) / \bar{x}, z),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (1.34) y (1.33). Por otro lado, si consideramos  $\theta > 0$  y  $\delta = (\theta/2 (B_1(s, t+k) - B_1(z)))^{1/\iota-2}$ ,

$$\begin{aligned}
& E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^i \mathbf{1}_{\{|X(\Delta_{hk}(z))| \leq \varepsilon\}} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] \\
&= E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^i \mathbf{1}_{\{|X(\Delta_{hk}(z))| \leq \delta\}} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] \\
&\quad + E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^i \mathbf{1}_{\{|X(\Delta_{hk}(z))| \leq \varepsilon, |X(\Delta_{hk}(z))| > \delta\}} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] \\
&\leq \delta^{i-2} E \left[ |X(\Delta_{hk}(z))|^2 \mathbf{1}_{\{|X(\Delta_{hk}(z))| \leq \delta\}} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] \\
&\quad + \varepsilon^i P \left[ |X(\Delta_{hk}(z))| > \delta / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) = \bar{x} \right] \\
&\leq \frac{\theta}{2(B_1(s, t+k) - B_1(z))} \{(B_1(s, t+k) - B_1(z))h + o(h)\} + \varepsilon^i o(h) \\
&= \frac{\theta h}{2} + o(h)
\end{aligned}$$

donde para obtener la última desigualdad hemos usado (1.35). Ahora bien, puesto que el término  $o(h)$  es más pequeño que  $\theta h/2$  para valores de  $h$  suficientemente pequeños, uniendo con lo anterior, podemos concluir que (1.36) es cierta.

### 1.4.1 Difusiones Gaussianas Uniparamétricas

En las condiciones establecidas, si fijamos  $t \in [0, T]$ , obtenemos que  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  es un proceso de difusión uniparamétrico verificando (1.30), la primera condición de (1.33) y con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$  y  $B_1(s, t)$ , funciones continuas que sólo dependen de la posición, con  $B_1 > 0$ . En este caso, puede afirmarse que la función característica de la variable  $X(s, t)$  que notaremos

$$\varphi(s, t, u) = E \left[ e^{iuX(s, t)} \right]$$

es la única solución de la siguiente ecuación diferencial conocida como *ecuación de Bartlett*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t, u) = \left\{ iua_1(s, t) - \frac{1}{2}u^2 B_1(s, t) \right\} \varphi(s, t, u)$$

con la condición inicial

$$\varphi(0, t, u) = e^{ium_0 - \frac{1}{2}u^2 \sigma_0^2}.$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden cuya solución, claramente, es

$$\varphi(s, t, u) = \exp \left\{ iu \left( m_0 + \int_0^s a_1(\sigma, t) d\sigma \right) - \frac{1}{2} \left( \sigma_0^2 + \int_0^s B_1(\sigma, t) d\sigma \right) \right\},$$

y en consecuencia  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  es un proceso de difusión cuyas variables tienen la siguiente distribución

$$X(s, t) \rightsquigarrow N \left( m_0 + \int_0^s a_1(\sigma, t) d\sigma, \sigma_0^2 + \int_0^s B_1(\sigma, t) d\sigma \right). \quad (1.37)$$

Fijando la coordenada  $s$  un razonamiento análogo nos llevaría a afirmar que las variables del proceso  $\{X(s, t); t \in [0, T]\}$  se distribuyen

$$X(s, t) \rightsquigarrow N \left( m_0 + \int_0^t a_2(s, \tau) d\tau, \sigma_0^2 + \int_0^t B_2(s, \tau) d\tau \right).$$

En el siguiente resultado vamos a probar que cualquier subconjunto finito de variables de las difusiones uniparamétricas tiene una distribución gaussiana y consecuentemente dichas difusiones son gaussianas. Además vamos a obtener que tienen incrementos independientes.

**Proposición 1.3** Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), las dos primeras condiciones de (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$ , dados en (1.31). Entonces las difusiones uniparamétricas que se obtienen fijando cada coordenada son gaussianas con incrementos independientes.

**Demostración.** Veamos que si fijamos  $t \in [0, T]$ , el proceso  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  es una difusión gaussiana con incrementos independientes. Es suficiente probar que la distribución conjunta de dos variables es gaussiana, ya que ello implica que las condicionadas son gaussianas y por tanto, aplicando la propiedad de Markov se concluye que cualquier distribución finito-dimensional es gaussiana.

En efecto, sean  $s_1, s_2 \in [0, S]$ , la función característica del vector  $(X(s_1, t), X(s_2, t))^t$  está dada por

$$\varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2) = E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2, t))} \right].$$

Para  $h > 0$ ,

$$\varphi_t(s_1, s_2 + h, u_1, u_2) = E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2 + h, t))} \right].$$

En lo que sigue supondremos que  $s_1 \leq s_2$  (si  $s_1 \geq s_2$  el razonamiento sería análogo cambiando los papeles entre  $s_1$  y  $s_2$ ). Utilizando las expresiones anteriores

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2)}{\partial s_2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_t(s_1, s_2 + h, u_1, u_2) - \varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2 + h, t))} \right] - E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2, t))} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E \left[ \left\{ e^{i(u_2 X(\Delta_h^1(s_2, t)))} - 1 \right\} e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2, t))} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E \left[ \left\{ E \left[ e^{i(u_2 X(\Delta_h^1(s_2, t)))} / \mathfrak{F}_{(s_2, t)} \right] - 1 \right\} e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2, t))} \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E \left[ \left\{ E \left[ e^{i(u_2 X(\Delta_h^1(s_2, t)))} / X_{(s_2, t)} \right] - 1 \right\} e^{i(u_1 X(s_1, t) + u_2 X(s_2, t))} \right]}{h} \end{aligned} \tag{1.38}$$

donde para la última igualdad hemos usado la propiedad de Markov del proceso  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$ . Utilizando el desarrollo en serie de la función característica (Loeve [18], p. 197) podemos expresar

$$\begin{aligned} E \left[ e^{iu_2 X(\Delta_h^1(s_2, t))} / X(s_2, t) \right] &= 1 + iu_2 E \left[ X(\Delta_h^1(s_2, t)) / X(s_2, t) \right] \\ &\quad - \frac{u_2^2}{2} E \left[ X(\Delta_h^1(s_2, t))^2 / X(s_2, t) \right] + R_2(u_2) \end{aligned}$$

donde para  $0 < \delta_1 \leq 1$ ,

$$|R_2(u_2)| \leq \frac{2^{1-\delta_1} |u_2|^{2+\delta_1}}{(1+\delta_1)(2+\delta_1)} E \left[ |X(\Delta_h^1(s_2, t))|^{2+\delta_1} / X(s_2, t) \right].$$

Eligiendo  $\delta_1 \leq \min\{\delta, 1\}$  y teniendo en cuenta (1.16) tendríamos que  $R_2(u_2) = o(h)$ , por lo que

$$E \left[ e^{iu_2 X(\Delta_h^1(s_2, t))} / X(s_2, t) \right] = 1 + iu_2 a_1(s_2, t) h - \frac{u_2^2}{2} B_1(s_2, t) h + o(h).$$

Sustituyendo esta expresión en (1.38) y tomando límite obtenemos que la función característica del vector  $(X(s_1, t), X(s_2, t))^t$  verifica la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\partial \varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2)}{\partial s_2} = \left\{ iu_2 a_1(s_2, t) - \frac{u_2^2}{2} B_1(s_2, t) \right\} \varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2).$$

La solución general de esta ecuación es

$$\varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2) = k(s_1, u_1, u_2) \exp \left\{ iu_2 \int_{s_1}^{s_2} a_1(\sigma, t) d\sigma - \frac{u_2^2}{2} \int_{s_1}^{s_2} B_1(\sigma, t) d\sigma \right\}$$

donde  $k(s_1, u_1, u_2)$  se obtiene haciendo  $s_1 = s_2$  en la expresión anterior y utilizando (1.37)

$$\begin{aligned} \varphi_t(s_1, s_1, u_1, u_2) &= k(s_1, u_1, u_2) = E \left[ e^{(u_1+u_2)X(s_1, t)} \right] \\ &= \exp \left\{ i(u_1+u_2) \left( m_0 + \int_0^{s_1} a_1(\sigma, t) d\sigma \right) - \frac{(u_1+u_2)^2}{2} \left( \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t) d\sigma \right) \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo  $k(s_1, u_1, u_2)$ , resulta

$$\begin{aligned} \varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2) &= \exp \left\{ i \left( (u_1+u_2) \left( m_0 + \int_0^{s_1} a_1(\sigma, t) d\sigma \right) + u_2 \int_{s_1}^{s_2} a_1(\sigma, t) d\sigma \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{(u_1+u_2)^2}{2} \left( \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t) d\sigma \right) + u_2^2 \int_{s_1}^{s_2} B_1(\sigma, t) d\sigma \right) \right\} \end{aligned}$$

y realizando algunos cálculos finalmente obtenemos que

$$\varphi_t(s_1, s_2, u_1, u_2) = \exp \left\{ i(u_1, u_2) \begin{pmatrix} m_0 + \int_0^{s_1} a_1(\sigma, t) d\sigma \\ m_0 + \int_0^{s_2} a_1(\sigma, t) d\sigma \end{pmatrix} - \frac{1}{2} (u_1, u_2) \begin{pmatrix} \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t) d\sigma & \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t) d\sigma \\ \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t) d\sigma & \sigma_0^2 + \int_0^{s_2} B_1(\sigma, t) d\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como consecuencia se tiene que si  $s, s' \in [0, S]$

$$\text{cov}(X(s, t), X(s', t)) = \text{var}(X(s \wedge s', t))$$

y esto implica que el proceso  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  tiene incrementos independientes. ■

La proposición que acabamos de establecer permite caracterizar las difusiones gaussianas uniparamétricas como sigue.

**Observación 1.3** *Las difusiones uniparamétricas asociadas a un campo de difusión  $\{X(z); z \in I\}$ , son gaussianas si se verifican las siguientes condiciones:*

- i)  $X(z) = X(0, 0)$ , casi seguramente ( $P$ ),  $\forall z \in E_0$ , donde  $X(0, 0)$  es una v.a. gaussiana o una v.a. constante con  $E[X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(X(0, 0)) = \sigma_0^2$ ;
- ii) los coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  sólo dependen de la posición en el espacio paramétrico;
- iii) para cada difusión uniparamétrica, algún momento infinitesimal de orden superior a dos es nulo, es decir, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} E \left[ |X(\Delta_h^1(z))|^{2+\delta} / X(z) \right] &= o(h), \\ E \left[ |X(\Delta_k^2(z))|^{2+\delta} / X(z) \right] &= o(k). \end{aligned}$$

A continuación vamos a enumerar algunas propiedades que ya hemos obtenido o que se deducen fácilmente a partir de la proposición anterior, por su utilidad en desarrollos posteriores.

1. Si fijamos  $t \in [0, T]$ , las variables del proceso  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  tienen la siguiente distribución

$$X(s, t) \rightsquigarrow N\left(m_0 + \int_0^s a_1(\sigma, t) d\sigma, \sigma_0^2 + \int_0^s B_1(\sigma, t) d\sigma\right)$$

y si fijamos  $s \in [0, S]$ , la distribución de las variables del proceso  $\{X(s, t); t \in [0, T]\}$  es

$$X(s, t) \rightsquigarrow N\left(m_0 + \int_0^t a_2(s, \tau) d\tau, \sigma_0^2 + \int_0^t B_2(s, \tau) d\tau\right).$$

2. Si  $s, s+h \in [0, S]$ ,  $h > 0$  y  $t, t+k \in [0, T]$ ,  $k > 0$  entonces

$$X(s+h, t) \rightsquigarrow N\left(m_0 + \int_0^{s+h} a_1(\sigma, t) d\sigma, \sigma_0^2 + \int_0^{s+h} B_1(\sigma, t) d\sigma\right),$$

$$X(s, t+k) \rightsquigarrow N\left(m_0 + \int_0^{t+k} a_2(s, \tau) d\tau, \sigma_0^2 + \int_0^{t+k} B_2(s, \tau) d\tau\right).$$

3. Si  $s, s+h \in [0, S]$ ,  $h > 0$  y  $t \in [0, T]$ , entonces

$$X(\Delta_h^1(z)) \rightsquigarrow N(m_1(z, h), \sigma_1^2(z, h))$$

donde

$$m_1(z, h) = \int_s^{s+h} a_1(\sigma, t) d\sigma, \quad \sigma_1^2(z, h) = \int_s^{s+h} B_1(\sigma, t) d\sigma$$

y si  $s \in [0, S]$  y  $t, t+k \in [0, T]$ ,  $k > 0$ , entonces

$$X(\Delta_k^2(z)) \rightsquigarrow N(m_2(z, k), \sigma_2^2(z, k))$$

donde

$$m_2(z, k) = \int_t^{t+k} a_2(s, \tau) d\tau, \quad \sigma_2^2(z, k) = \int_t^{t+k} B_2(s, \tau) d\tau.$$

4.  $X(\Delta_h^1(z))$  y  $X(z)$  son independientes.  
 5.  $X(\Delta_k^2(z))$  y  $X(z)$  son independientes.

6. El proceso  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  admite una densidad de transición gaussiana de media  $x + m_1(z, h)$  y varianza  $\sigma_1^2(z, h)$ .
7. El proceso  $\{X(s, t); t \in [0, T]\}$  admite una densidad de transición gaussiana de media  $x + m_2(z, k)$  y varianza  $\sigma_2^2(z, k)$ .

### 1.4.2 Distribución del Incremento Bidimensional y Densidad de Transición del Campo

Una vez que hemos comprobado que las difusiones uniparamétricas asociadas al campo son gaussianas, estamos en disposición de obtener la distribución del incremento  $X(\Delta_{hk}(z))$  y la densidad de transición del campo. Para ello necesitamos un resultado que probamos a continuación.

**Proposición 1.4** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), (1.32) y (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  dados en (1.31), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces si  $z_1, z_2 \in I$ ,  $z_1 \leq z_2$ ,  $z_1 = (s_1, t_1)$  y  $z_2 = (s_2, t_2)$ , la distribución del vector  $(X(s_2, t_2), X(s_1, t_2), X(s_2, t_1), X(s_1, t_1))$  es gaussiana con*

$$\begin{aligned} E[X(s_i, t_j)] &= m_0 + \int_0^{s_i} \int_0^{t_j} a(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \\ \text{cov}(X(s_i, t_j), X(s_m, t_n)) &= \sigma_0^2 + \int_0^{s_i \wedge s_m} \int_0^{t_j \wedge t_n} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

donde  $i, j, m, n = 1, 2$  y

$$a(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} a_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} a_2(s, t); \quad B(s, t) = \frac{\partial}{\partial t} B_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} B_2(s, t). \quad (1.39)$$

**Demostración.** Si  $t_1 = t_2$  el resultado se concluye de forma inmediata aplicando la *Proposición 1.3*. Supongamos entonces que  $t_2 > t_1$ . Sea  $\varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u})$  donde  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ , la función característica del vector  $(X(s_2, t_2), X(s_1, t_2), X(s_2, t_1), X(s_1, t_1))$ , esto es

$$\varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u}) = E \left[ e^{i(u_1 X(s_2, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2, t_1) + u_4 X(s_1, t_1))} \right]$$



Para  $h > 0$ ,

$$\varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2 + h, \mathbf{u}) = E \left[ e^{i(u_1 X(s_2+h, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2+h, t_1) + u_4 X(s_1, t_1))} \right].$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u})}{\partial s_2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2 + h, \mathbf{u}) - \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E \left[ e^{i(u_1 X(s_2+h, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2+h, t_1) + u_4 X(s_1, t_1))} \right] - \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u})}{h} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Haciendo algunos cálculos podemos expresar

$$\begin{aligned} &E \left[ e^{i(u_1 X(s_2+h, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2+h, t_1) + u_4 X(s_1, t_1))} \right] \\ &= E \left[ e^{i[u_1 X(\Delta_{h, t_2-t_1}(s_2, t_1)) + (u_1 + u_3)X(\Delta_h^1(s_2, t_1)) + u_1 X(s_2, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2, t_1) + u_4 X(s_1, t_1)]} \right] \\ &= E \left[ E \left[ e^{iu_1 X(\Delta_{h, t_2-t_1}(s_2, t_1))} / \bar{X}((s_2, t_1), (s_2 + h, t_2)) \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{i[(u_1 + u_3)X(\Delta_h^1(s_2, t_1)) + u_1 X(s_2, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2, t_1) + u_4 X(s_1, t_1)]} \right] \end{aligned}$$

Utilizando el desarrollo en serie de la función característica y (1.32) podemos expresar

$$\begin{aligned} &E \left[ e^{iu_1 X(\Delta_{h, t_2-t_1}(s_2, t_1))} / \bar{X}((s_2, t_1), (s_2 + h, t_2)) \right] \\ &= 1 + iu_1 (a_1(s_2, t_2) - a_1(s_2, t_1)) h - \frac{u_1^2}{2} (B_1(s_2, t_2) - B_1(s_2, t_1)) h + o(h) + R_2(u_1), \end{aligned}$$

donde para  $0 < \delta_1 \leq 1$

$$|R_2(u_1)| \leq \frac{2^{1+\delta_1} |u_1|^{2+\delta_1}}{(1+\delta_1)(2+\delta_2)} E \left[ |X(\Delta_{h, t_2-t_1}(s_2, s_1))|^{2+\delta_1} / \bar{X}((s_2, t_1), (s_2 + h, t_2)) \right].$$

Entonces, tomando  $\delta_1 \leq \min\{\delta, 1\}$  y utilizando (1.36) tenemos que  $R_2(u_1) = o(h)$  y en consecuencia

$$\begin{aligned} &E \left[ e^{iu_1 X(\Delta_{h, t_2-t_1}(s_2, s_1))} / \bar{X}((s_2, t_1), (s_2 + h, t_2)) \right] \\ &= 1 + iu_1 (a_1(s_2, t_2) - a_1(s_2, t_1)) h - \frac{u_1^2}{2} (B_1(s_2, t_2) - B_1(s_2, t_1)) h + o(h). \end{aligned}$$

Sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned}
& E \left[ e^{i(u_1 X(s_2+h, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2+h, t_1) + u_4 X(s_1, t_1))} \right] \\
&= \left\{ 1 + i u_1 (a_1(s_2, t_2) - a_1(s_2, t_1)) h - \frac{u_1^2}{2} (B_1(s_2, t_2) - B_1(s_2, t_1)) h + o(h) \right\} \\
&\quad \cdot E \left[ e^{i(u_1+u_3)X(\Delta_h^1(s_2, t_1)) + u_1 X(s_2, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2, t_1) + u_4 X(s_1, t_1)} \right] \\
&= \left\{ 1 + i u_1 (a_1(s_2, t_2) - a_1(s_2, t_1)) h - \frac{u_1^2}{2} (B_1(s_2, t_2) - B_1(s_2, t_1)) h + o(h) \right\} \\
&\quad \cdot E \left[ E \left[ e^{i(u_1+u_3)X(\Delta_h^1(s_2, t_1))} / \mathfrak{F}_{(s_2, 0)}^1 \vee \mathfrak{F}_{(s_2, 0)}^2 \right] \right. \\
&\quad \quad \left. \cdot e^{i[u_1 X(s_2, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2, t_1) + u_4 X(s_1, t_1)]} \right] \\
&= \left\{ 1 + i u_1 (a_1(s_2, t_2) - a_1(s_2, t_1)) h - \frac{u_1^2}{2} (B_1(s_2, t_2) - B_1(s_2, t_1)) h + o(h) \right\} \\
&\quad \cdot E \left[ E \left[ e^{i(u_1+u_3)X(\Delta_h^1(s_2, t_1))} / X(s_2, t_1) \right] \right. \\
&\quad \quad \left. \cdot e^{i[u_1 X(s_2, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_2, t_1) + u_4 X(s_1, t_1)]} \right] \\
&= \left\{ 1 + i u_1 (a_1(s_2, t_2) - a_1(s_2, t_1)) h - \frac{u_1^2}{2} (B_1(s_2, t_2) - B_1(s_2, t_1)) h + o(h) \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ 1 + i (u_1 + u_3) (a_1(s_2, t_1)) h - \frac{(u_1 + u_2)^2}{2} (B_1(s_2, t_1)) h + o(h) \right\} \\
&\quad \cdot \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u})
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la propiedad de Markov del campo y el desarrollo en serie de la función característica,  $E \left[ e^{i(u_1+u_3)X(\Delta_h^1(s_2, t_1))} / X(s_2, t_1) \right]$ . Por lo tanto, sustituyendo en (1.40), realizando algunos cálculos y tomando límite obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u})}{\partial s_2} &= \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u}) \{ i [u_1 a_1(s_2, t_2) + u_3 a_1(s_1, t_1)] d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2} [u_1^2 B_1(s_2, t_2) + 2u_1 u_2 B_1(s_2, t_1) + u_2^2 B_1(s_2, t_1)] \}
\end{aligned}$$

La solución general de esta ecuación es

$$\begin{aligned} \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_2, \mathbf{u}) &= K(z_1, t_2, \mathbf{u}) \exp \left\{ i \left[ u_1 \int_{s_1}^{s_2} a_1(\sigma, t_2) d\sigma + u_3 \int_{s_1}^{s_2} a_1(\sigma, t_1) d\sigma \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[ u_1^2 \int_{s_1}^{s_2} B_1(\sigma, t_2) d\sigma + 2u_1 u_2 \int_{s_1}^{s_2} B_1(\sigma, t_1) d\sigma + u_2^2 \int_{s_1}^{s_2} B_1(\sigma, t_1) d\sigma \right] \right\}. \end{aligned}$$

Tomando  $s_1 = s_2$

$$\begin{aligned} \varphi_{t_1, t_2}(s_1, s_1, \mathbf{u}) &= K(z_1, t_2, \mathbf{u}) = \\ &= E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_2) + u_2 X(s_1, t_2) + u_3 X(s_1, t_1) + u_4 X(s_1, t_1))} \right] \\ &= E \left[ e^{i[(u_1 + u_2)X(s_1, t_2) + (u_3 + u_4)X(s_1, t_1)]} \right] \\ &= \exp \left\{ i \left[ (u_1 + u_2) \left( m_0 + \int_0^{s_1} a_1(\sigma, t_2) d\sigma \right) + (u_3 + u_4) \left( m_0 + \int_0^{s_1} a_1(\sigma, t_1) d\sigma \right) \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[ (u_1 + u_2)^2 \left( \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t_2) d\sigma \right) + (u_3 + u_4)^2 \left( \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} B_1(\sigma, t_1) d\sigma \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que fijado  $s \in [0, S]$ ,  $\{X(s, t); t \in [0, T]\}$  es un proceso de difusión gaussiano. Sustituyendo  $K(z_1, t_2, \mathbf{u})$  en la expresión anterior se concluye fácilmente que la distribución del vector  $(X(s_2, t_2), X(s_1, t_2), X(s_2, t_1), X(s_1, t_1))^t$  es gaussiana con

$$\begin{aligned} E[X(s_i, t_j)] &= m_0 + \int_0^{s_i} a_1(\sigma, t_j) d\sigma, \\ cov(X(s_i, t_j), X(s_m, t_n)) &= \sigma_0^2 + \int_0^{s_i \wedge s_m} B_1(\sigma, t_j \wedge t_n) d\sigma, \end{aligned}$$

donde  $i, j, m, n = 1, 2$ . Tomando  $z_1 = z = (s, t)$  y  $z_2 = (s + h, t + k)$  en la proposición anterior y considerando la siguiente transformación

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

podemos obtener la distribución de  $(X(\Delta_{hk}(z)), X(s, t + k), X(s + h, t), X(z))$  y a partir de esta distribución obtener la de  $X(\Delta_{hk}(z))$  condicionada a  $X(s, t + k), X(s + h, t)$

y  $X(z)$  y concluir que

$$\begin{aligned} E[X(\Delta_{hk}(z)) / X(s+h, t), X(z), X(s, t+k)] &= \int_s^{s+h} (a_1(\sigma, t+k) - a_1(\sigma, t)) d\sigma, \\ E[X(\Delta_{hk}(z))^2 / X(s+h, t), X(z), X(s, t+k)] &= \int_s^{s+h} (a_1(\sigma, t+k) - a_1(\sigma, t)) d\sigma. \end{aligned}$$

Tomando  $s = 0$  y  $h = s$  en la expresión anterior podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \int_0^s (a_1(\sigma, t+k) - a_1(\sigma, t)) d\sigma &= \int_t^{t+k} a_2(s, \tau) d\tau, \\ \int_0^s (B_1(\sigma, t+k) - B_1(\sigma, t)) d\sigma &= \int_t^{t+k} B_2(s, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_1(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} a_2(s, t) \equiv a(s, t), \\ \frac{\partial}{\partial t} B_1(s, t) &= \frac{\partial}{\partial s} B_2(s, t) \equiv B(s, t). \end{aligned}$$

A las funciones resultantes las hemos notado  $a(s, t)$  y  $B(s, t)$  pues, como veremos en el siguiente apartado, son los coeficientes de tendencia y de difusión del campo. Finalmente observando que por ser  $X(z) = X(0, 0)$  casi seguramente ( $P$ ),  $\forall z \in E_0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} a_1(s, 0) = B_1(s, 0) &= 0 \quad \forall s \in [0, S], \\ a_2(0, t) = B_2(0, t) &= 0 \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned} \tag{1.41}$$

por lo que

$$\begin{aligned} a_1(s, t) &= \int_0^t a(s, \tau) d\tau, & B_1(s, t) &= \int_0^t B(s, \tau) d\tau, \\ a_2(s, t) &= \int_0^s a(\sigma, t) d\sigma, & B_2(s, t) &= \int_0^s B(\sigma, t) d\sigma. \end{aligned} \tag{1.42}$$

de donde se concluye el resultado. ■

**Corolario 1.1** Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), (1.32) y (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  dados en (1.31),

funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces  $X(\Delta_{hk}(z))$  es independiente de  $X(z)$ , de  $X(s+h, t)$  y de  $X(s, t+k)$  y tiene la siguiente distribución

$$X(\Delta_{hk}(z)) \rightsquigarrow N(m(z, h, k), \sigma^2(z, h, k)),$$

donde  $z = (s, t)$ ,  $h, k > 0$  y

$$m(z, h, k) = \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} a(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad \sigma^2(z, h, k) = \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \quad (1.43)$$

donde las funciones  $a(s, t)$  y  $B(s, t)$  las definimos en (1.39).

**Proposición 1.5** Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), (1.32) y (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  dados en (1.31), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces la densidad de transición del campo está dada por

$$\begin{aligned} & f(y, (s+h, t+k) / (x_1, x, x_2), z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(z, h, k)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{y - x_1 - x_2 + x - m(z, h, k)}{\sigma(z, h, k)} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.44)$$

donde  $m(z, h, k)$  y  $\sigma^2(z, h, k)$  están dados en (1.43).

**Demostración.** Consideremos conjuntos de Borel del tipo,  $B = ]-\infty, y[$ , donde  $y \in \mathbf{R}$ ; entonces la probabilidad de transición es

$$\begin{aligned} & P ]-\infty, y[, (s+h, t+k) / (x_1, x, x_2), z] \\ &= P [X(s+h, t+k) < y / X(s+h, t) = x_2, X(s, t) = x, X(s, t+k) = x_1]. \end{aligned}$$

Escribiendo

$$X(s+h, t+k) = X(\Delta_{hk}(z)) + X(s+h, t) + X(s, t+k) - X(z),$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & P ]-\infty, y[, (s+h, t+k) / (x_1, x, x_2), z] \\ &= P \left[ \begin{array}{l} X(\Delta_{hk}(z)) < y - x_1 - x_2 + x / X(s+h, t) = x_2, X(s, t) = x, \\ X(s, t+k) = x_1 \end{array} \right] \\ &= P [X(\Delta_{hk}(z)) < y - x_1 - x_2 + x], \end{aligned}$$

puesto que  $X(\Delta_{hk}(z))$  es independiente de  $X(z)$ , de  $X(s+h, t)$  y de  $X(s, t+k)$  por el *Corolario 1.1*. Además

$$X(\Delta_{hk}(z)) \rightsquigarrow N(m(z, h, k), \sigma^2(z, h, k)),$$

con lo que

$$\begin{aligned} & P[-\infty, y[, (s+h, t+k) / (x_1, x, x_2), z] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(z, h, k)}} \int_{-\infty}^{y-x_1-x_2+x} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{u-m(z, h, k)}{\sigma(z, h, k)}\right)^2\right\} du. \end{aligned}$$

Derivando esta última expresión respecto a la variable  $y$  se concluye la demostración. ■

### 1.4.3 Coeficientes de Difusión Biparamétricos

Los campos de difusión que verifican las propiedades **I** a **IV** son interesantes ya que como vimos en la Sección 1.3, para estos campos es posible obtener los coeficientes de difusión biparamétricos a partir de los uniparamétricos. Sin embargo, en la práctica, no suele ser sencillo comprobar que un campo de difusión satisface dichas propiedades. No obstante, para el campo de difusión que consideramos en la introducción, existe una condición suficiente que nos permite garantizarlas y que establecemos en el siguiente lema.

**Lema 1.1** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), las dos primeras condiciones de (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$ , dados en (1.31). Si  $a_1(s, t), a_2(s, t), B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces se verifican las hipótesis **I-IV**.*

(No incluimos aquí la demostración de este lema dada su extensión.)

Establecidas las condiciones bajo las cuales se verifican las hipótesis **I-IV**, la aplicación de la *Proposición 1.1* nos conduce al siguiente resultado en el se establecen los coeficientes de difusión biparamétricos del campo.

**Proposición 1.6** *Si las funciones  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces los coeficientes de difusión biparamétricos están dados por*

$$\begin{aligned} a(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} a_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} a_2(s, t), \\ B(s, t) &= \frac{\partial}{\partial t} B_1(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} B_2(s, t), \\ c_1(s, t) &= c_2(s, t) = d(s, t) = 0. \end{aligned} \tag{1.45}$$

#### 1.4.4 Campo de Difusión Gaussiano Biparamétrico

Como hemos comentado, el hecho de que los coeficientes de difusión uniparamétricos sean de clase  $C^1$  es natural para garantizar que el campo considerado al principio de la sección verifica las propiedades **I** a **IV**, y en consecuencia, para garantizar los resultados de las dos secciones anteriores. Además, bajo esta condición y utilizando estos resultados vamos a demostrar el principal resultado de esta sección en el que se establece que la distribución conjunta de cualquier subconjunto finito de variables del campo es gaussiana, y consecuentemente el campo es gaussiano. Una vez que probemos esta afirmación, probaremos, de manera sencilla, que el campo tiene incrementos independientes.

**Teorema 1.1** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), (1.32) y (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  dados en (1.31), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano con incrementos independientes.*

**Demostración. 1.-** En primer lugar veamos que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano.

Sean  $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots, (s_n, t_n) \in I$  tales que  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \in [0, S]$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, T]$ . Vamos a probar que la distribución del vector  $(X(s_1, t_1), X(s_2, t_2), \dots, X(s_n, t_n))^t$

es gaussiana  $n$ -dimensional de media

$$\begin{pmatrix} m_0 + m(s_1, t_1) \\ m_0 + m(s_2, t_2) \\ \vdots \\ m_0 + m(s_n, t_n) \end{pmatrix},$$

y matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} \sigma_0^2 + \sigma^2(s_1, t_1) & \sigma_0^2 + \sigma^2(s_1, t_1 \wedge t_2) & \cdots & \sigma_0^2 + \sigma^2(s_1, t_1 \wedge t_n) \\ \sigma_0^2 + \sigma^2(s_1, t_1 \wedge t_2) & \sigma_0^2 + \sigma^2(s_2, t_2) & \cdots & \sigma_0^2 + \sigma^2(s_2, t_2 \wedge t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_0^2 + \sigma^2(s_1, t_1 \wedge t_n) & \sigma_0^2 + \sigma^2(s_2, t_2 \wedge t_n) & \cdots & \sigma_0^2 + \sigma^2(s_n, t_n) \end{pmatrix},$$

donde por simplificar se ha notado

$$m(s_i, t_i) \equiv \int_0^{s_i} \int_0^{t_i} a(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad \sigma^2(s_i, t_i \wedge t_j) \equiv \int_0^{s_i} \int_0^{t_i \wedge t_j} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.$$

Para ello vamos a utilizar el método de inducción en  $n \equiv \text{cardinal}(\{s_1, s_2, \dots, s_n\})$ .

**i)** Si  $n = 1$ , entonces  $s_1 = s_2 = \dots = s_n \equiv s$  y el vector aleatorio es  $(X(s, t_1), X(s, t_2), \dots, X(s, t_n))^t$ , por lo que el resultado se concluye de forma inmediata aplicando el caso uniparamétrico (véase *Proposición 1.3*).

**ii)** Si  $n = 2$ , entonces el vector aleatorio es de la forma

$$(X(s_1, t_1), \dots, X(s_1, t_j), X(s_2, t_{j+1}), \dots, X(s_2, t_n))^t.$$

Consideremos que  $t_1 \leq \dots \leq t_j$  y que  $t_{j+1} \leq \dots \leq t_n$ . En lo que sigue vamos a notar

$$h_p \equiv s_p - s_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n,$$

$$k_p \equiv t_p - t_{p-1}, \quad p = 2, \dots, n.$$

En nuestro caso como  $n = 2$ , sólo necesitaremos usar  $h \equiv s_2 - s_1$ .



La función característica del vector aleatorio  $(X(s_1, t_1), \dots, X(s_1, t_j), X(s_2, t_{j+1}), \dots, X(s_2, t_n))^t$  es

$$\begin{aligned}
& E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + u_n X(s_2, t_n))} \right] \\
&= E \left[ E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + u_n X(s_2, t_n))} / \mathfrak{F}_{(s_1, t_{n-1})}^1 \vee \mathfrak{F}_{(s_1, t_{n-1})}^2 \right] \right] \\
&= E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + u_{n-1} X(s_2, t_{n-1}))} \right. \\
&\quad \left. \cdot E \left[ e^{iu_n X(s_2, t_n)} / \mathfrak{F}_{(s_1, t_{n-1})}^1 \vee \mathfrak{F}_{(s_1, t_{n-1})}^2 \right] \right] \\
&= E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + u_{n-1} X(s_2, t_{n-1}))} \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{i(u_n X(s_2, t_{n-1}) + u_n X(s_1, t_n) - u_n X(s_1, t_{n-1}))} \right. \\
&\quad \left. \cdot E \left[ e^{iu_n (X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} / \bar{X}((s_1, t_{n-1}), (s_2, t_n)) \right] \right] \\
&= E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + (u_{n-1} + u_n) X(s_2, t_{n-1}))} \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{i(u_n X(s_1, t_n) - u_n X(s_1, t_{n-1}))} \right. \\
&\quad \left. \cdot E \left[ e^{iu_n (X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} / \bar{X}((s_1, t_{n-1}), (s_2, t_n)) \right] \right] \\
&= E \left[ e^{iu_n (X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} \right] \\
&\quad \cdot E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + (u_{n-1} + u_n) X(s_2, t_{n-1}))} \right. \\
&\quad \left. \cdot e^{i(u_n X(s_1, t_n) - u_n X(s_1, t_{n-1}))} \right],
\end{aligned}$$

donde hemos usado las propiedades de esperanza condicionada, que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de Markov y que por el *Corolario 1.1*,  $X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1}))$  es independiente de  $\bar{X}((s_1, t_{n-1}), (s_2, t_n))$ . Repitiendo pasos análogos  $n - j - 2$  veces obtenemos que

$$\begin{aligned}
& E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + u_n X(s_n, t_n))} \right] \\
&= E \left[ e^{iu_n (X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} \right] E \left[ e^{i(u_n + u_{n-1}) X(\Delta_{hk_{n-1}}(s_1, t_{n-2}))} \right] \dots \\
&\quad \cdot E \left[ e^{i(u_n + \dots + u_{j+2}) X(\Delta_{hk_{j+2}}(s_1, t_{j+1}))} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + (u_{j+1} + \dots + u_n) X(s_2, t_{j+1}) - (u_{j+2} + \dots + u_n) X(s_1, t_{j+1}))} \right. \\
& \quad \left. \cdot e^{i(u_n X(s_1, t_n) + u_{n-1} X(s_1, t_{n-1}) + \dots + u_{j+2} X(s_1, t_{j+2}))} \right] \\
= & E \left[ e^{iu_n(X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} \right] E \left[ e^{i(u_n + u_{n-1})X(\Delta_{hk_{n-1}}(s_1, t_{n-2}))} \right] \dots \\
& \cdot E \left[ e^{i(u_n + \dots + u_{j+2})X(\Delta_{hk_{j+2}}(s_1, t_{j+1}))} \right] \\
& \cdot E \left[ E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + (u_{j+1} + \dots + u_n) X(s_2, t_{j+1}) - (u_{j+2} + \dots + u_n) X(s_1, t_{j+1}))} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot e^{i(u_n X(s_1, t_n) + u_{n-1} X(s_1, t_{n-1}) + \dots + u_{j+2} X(s_1, t_{j+2}))} / \mathfrak{F}_{(s_1, 0)}^1 \vee \mathfrak{F}_{(s_1, 0)}^2 \right] \right] \\
= & E \left[ e^{iu_n(X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} \right] E \left[ e^{i(u_n + u_{n-1})X(\Delta_{hk_{n-1}}(s_1, t_{n-2}))} \right] \dots \\
& \cdot E \left[ e^{i(u_n + \dots + u_{j+2})X(\Delta_{hk_{j+2}}(s_1, t_{j+1}))} \right] \\
& \cdot E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_1, t_{j+1}) + u_{j+2} X(s_1, t_{j+2}) + \dots + u_n X(s_1, t_n))} \right. \\
& \quad \left. \cdot E \left[ e^{i(u_{j+1} + \dots + u_n)(X(s_2, t_{j+1}) - X(s_1, t_{j+1}))} / X(s_1, t_{j+1}) \right] \right] \\
= & E \left[ e^{iu_n(X(\Delta_{hk_n}(s_1, t_{n-1})))} \right] E \left[ e^{i(u_n + u_{n-1})X(\Delta_{hk_{n-1}}(s_1, t_{n-2}))} \right] \dots \\
& \cdot E \left[ e^{iu(u_n + \dots + u_{j+2})X(\Delta_{hk_{j+2}}(s_1, t_{j+1}))} \right] E \left[ e^{i(u_n + \dots + u_{j+1})(X(\Delta_h^1(s_1, t_{j+1})))} \right] \\
& \cdot E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_1, t_{j+1}) + u_{j+2} X(s_1, t_{j+2}) + \dots + u_n X(s_1, t_n))} \right],
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  es un proceso de Markov y que  $X(\Delta_h^1(z))$  es independiente de  $X(z)$ . Sustituyendo las expresiones de las funciones características de los incrementos y notando para simplificar

$$\begin{aligned}
\int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} a(\sigma, \tau) d\sigma d\tau & \equiv \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} a, \\
\int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau & \equiv \int_{s_i}^{s_{i+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B,
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
& E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_2, t_{j+1}) + \dots + u_n X(s_n, t_n))} \right] \\
&= \exp \left\{ i \left( u_n \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} a + (u_n + u_{n-1}) \left( \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} a \right) + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (u_n + \dots + u_{j+2}) \left( \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} a \right) + (u_n + \dots + u_{j+1}) \left( m_0 + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_{j+1}} a \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \left( u_n^2 \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} B + (u_n + u_{n-1})^2 \left( \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_{n-2}}^{t_{n-1}} B \right) + \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (u_n + \dots + u_{j+2})^2 \left( \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_{j+1}}^{t_{j+2}} B \right) + (u_n + \dots + u_{j+1})^2 \left( \sigma_0^2 + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_{j+1}} B \right) \right) \right\} \\
&\cdot E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_j X(s_1, t_j) + u_{j+1} X(s_1, t_{j+1}) + u_{j+2} X(s_1, t_{j+2}) + \dots + u_n X(s_1, t_n))} \right].
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando el caso  $n = 1$  anterior y teniendo en cuenta que  $t_1 \leq \dots \leq t_j$  y  $t_{j+1} \leq \dots \leq t_n$  se concluye fácilmente el resultado.

**iii)** Hipótesis de inducción: Suponiendo que cuando el *cardinal*  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = n - 1$  el resultado es cierto, veamos que cuando *cardinal*  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = n$  el resultado también se verifica.

Si *cardinal*  $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = n$ , entonces existe un único punto con coordenada  $s_n$  en el eje  $X$ , que hemos notado  $(s_n, t_n)$ . En esta situación la función característica del vector  $(X(s_1, t_1), X(s_2, t_2), \dots, X(s_n, t_n))^t$  se puede expresar como

$$\begin{aligned}
& E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_{n-1} X(s_{n-1}, t_{n-1}) + u_n X(s_n, t_n))} \right] \\
&= E \left[ E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_{n-1} X(s_{n-1}, t_{n-1}) + u_n X(s_n, t_n))} / \mathfrak{F}_{(s_{n-1}, 0)}^1 \vee \mathfrak{F}_{(s_{n-1}, 0)}^2 \right] \right] \\
&= E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_{n-1} X(s_{n-1}, t_{n-1}) + u_n X(s_{n-1}, t_n))} \right. \\
&\quad \left. \cdot E \left[ e^{iu_n (X(s_n, t_n) - X(s_{n-1}, t_n))} / X(s_{n-1}, t_n) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ e^{iu_n X(\Delta_{h_n}^1(s_{n-1}, t_n))} \right] E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_{n-1} X(s_{n-1}, t_{n-1}) + u_n X(s_{n-1}, t_n))} \right] \\
&= \exp \left\{ iu_n \left( m_0 + \int_{s_{n-1}}^{s_n} \int_0^{t_n} a \right) - \frac{1}{2} u_n^2 \left( \sigma_0^2 + \int_{s_{n-1}}^{s_n} \int_0^{t_n} B \right) \right\} \\
&\quad \cdot E \left[ e^{i(u_1 X(s_1, t_1) + \dots + u_{n-1} X(s_{n-1}, t_{n-1}) + u_n X(s_{n-1}, t_n))} \right],
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las propiedades de esperanza condicionada, que  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  es un proceso de Markov, que  $X(\Delta_h^1(z))$  es independiente de  $X(z)$  y hemos sustituido la expresión de la función característica del incremento correspondiente. Finalmente aplicando la hipótesis de inducción podemos sustituir la expresión de la función característica del vector  $(X(s_1, t_1), X(s_2, t_2), \dots, X(s_{n-1}, t_{n-1}), X(s_{n-1}, t_n))^t$  y teniendo en cuenta que  $s_1 < s_2 < \dots < s_n$  se concluye fácilmente el resultado.

**2.-** Por el apartado anterior,  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano, por lo que aplicando la *Proposición 1.1* de Nualart y Sanz (véase[20], p. 2), para probar que el proceso tiene incrementos independientes es suficiente probar que

$$K(z_1, z_2) \equiv \text{cov}(X(z_1), X(z_2)) = K(z, z) \equiv \text{var}(X(z)),$$

donde

$$z_i = (s_i, t_i); \quad i = 1, 2 \quad y \quad z = z_1 \wedge z_2 = (s_1 \wedge s_2, t_1 \wedge t_2).$$

Sin embargo, este resultado se verifica por el apartado anterior con lo que concluimos la demostración. ■

La proposición anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 1.4** Diremos que el campo de difusión,  $\{X(z); z \in I\}$ , es **gaussiano** si se verifican las siguientes condiciones:

- i) las difusiones uniparamétricas asociadas al campo son gaussianas con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$ , funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ ;

ii) si  $k \in (0, T]$ , entonces

$$\begin{aligned} E [X (\Delta_{hk} (z)) / \bar{X} (z, (s + h, t + k))] &= (a_1 (s, t + k) - a_1 (z)) h + o (h), \\ E [X (\Delta_{hk} (z))^2 / \bar{X} (z, (s + h, t + k))] &= (B_1 (s, t + k) - B_1 (z)) h + o (h); \end{aligned}$$

iii) y existe  $\delta > 0$  tal que si  $k \in (0, T]$ ,

$$E \left[ |X (\Delta_{hk} (z))|^{2+\delta} / \bar{X} (z, (s + h, t + k)) \right] = o (h).$$

**Observación 1.4** Las condiciones ii) y iii) de la definición anterior se pueden reemplazar por las siguientes condiciones:

ii) si  $h \in (0, S]$ , entonces

$$\begin{aligned} E [X (\Delta_{hk} (z)) / \bar{X} (z, (s + h, t + k))] &= (a_2 (s + h, t) - a_2 (z)) k + o (k), \\ E [X (\Delta_{hk} (z))^2 / \bar{X} (z, (s + h, t + k))] &= (B_2 (s + h, t) - B_2 (z)) k + o (k); \end{aligned}$$

iii) y existe  $\delta > 0$  tal que si  $h \in (0, S]$ ,

$$E \left[ |X (\Delta_{hk} (z))|^{2+\delta} / \bar{X} (z, (s + h, t + k)) \right] = o (k).$$

#### 1.4.5 Representación de un Campo de Difusión Gaussiano por una Ecuación en Derivadas Parciales

Sea  $\{X (z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), (1.32) y (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1 (s, t)$ ,  $a_2 (s, t)$ ,  $B_1 (s, t)$  y  $B_2 (s, t)$  dados en (1.31). Para poder aplicar el resultado de D. Nualart, *Proposición 1.2*, que nos permite obtener la representación de un campo de difusión biparamétrico mediante una ecuación en derivadas parciales (véase ec. (1.29)), necesitamos que se verifiquen las hipótesis **I-V**. Ya hemos indicado que si los coeficientes de difusión uniparamétricos son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces las hipótesis **I-IV** se verifican. El siguiente lema, cuya demostración omitimos, establece que bajo esta misma condición sobre los coeficientes, la hipótesis **V** también es cierta.

**Lema 1.2** *Si los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dados en (1.31) son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces se verifica la hipótesis **V**.*

**Proposición 1.7** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión verificando (1.30), (1.32) y (1.33), con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  dados en (1.31), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces existe un campo de Wiener  $\{W(z); z \in I\}$  (salvo quizás, una modificación, si es necesario, del espacio de probabilidad) tal que  $\{X(z); z \in I\}$  es el único campo de difusión que verifica la siguiente ecuación diferencial estocástica*

$$\frac{\partial^2 X_{st}}{\partial s \partial t} = a(s, t) + B^{1/2}(s, t) \frac{\partial^2 W_{st}}{\partial s \partial t}.$$

**Demostración.** Puesto que las hipótesis **I-V** se verifican, podemos aplicar el *Teorema 1.2*, el cual nos conduce a la ecuación en derivadas parciales anterior sin más que tener en cuenta que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$  y  $\gamma = a$ , ya que  $a_1$  y  $a_2$  no dependen de  $x$  y  $d = 0$ . La unicidad de solución se obtienen fácilmente aplicando el *Teorema 3.9* de J. Yeh (véase [22], p. 282). ■



## Capítulo 2

# Campos de Difusión Lognormales Biparamétricos

### 2.1 Introducción

La distribución lognormal puede definirse como la distribución de una variable cuyo logaritmo tiene una distribución gaussiana. Las variables lognormales han sido ampliamente utilizadas en la descripción de fenómenos que presentan una distribución asimétrica positiva. El estudio de la distribución lognormal se inició con los trabajos de Mc. Alister y Galton en el año 1879. Desde entonces se ha avanzado mucho en el desarrollo de su teoría. Un estudio profundo sobre diversos aspectos de esta distribución y muchas de sus aplicaciones puede verse en Crow y Shimizu [9].

El proceso de difusión lognormal es importante por su uso en la modelización de fenómenos en diversas áreas como la economía (véase Tintner [28], [27], [29], [26], Chesney y Elliot [4]), o las ciencias medioambientales (véase Smith y De Veaux [24]). Destacar también el trabajo de investigación que sobre Procesos de Difusión Lognormales ha venido desarrollando el grupo de investigación dirigido por el Profesor Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez. En este capítulo pretendemos completar estos trabajos realizando un estudio



teórico de los campos de difusión lognormales biparamétricos.

Empezaremos considerando un campo de difusión biparamétrico con valores positivos, que tiene una distribución inicial lognormal o constante y unos *coeficientes de difusión* concretos. Vamos a comprobar que, al aplicar transformada logarítmica a este campo, el campo resultante tiene unos *coeficientes de difusión* que sólo dependen de la posición en el espacio paramétrico. El tratamiento que, en general, seguiremos en las demostraciones de este capítulo, será el de aplicar transformada logarítmica al campo que hemos considerado y utilizar los resultados obtenidos en la Sección 1.4 del capítulo anterior.

La estructura del capítulo será la siguiente.

En la Sección 2.2 repasaremos las propiedades que verifican los procesos uniparamétricos asociados al campo de difusión antes considerado. A continuación, la aplicación de la caracterización de campo de difusión gaussiano biparamétrico nos llevará a establecer la definición de campo de difusión lognormal biparamétrico y finalmente, obtendremos la densidad de transición de este campo.

En la Sección 2.3 comprobaremos que se verifican las cuatro hipótesis que permiten obtener los *coeficientes de difusión biparamétricos* a partir de los *uniparamétricos*.

En la Sección 2.4 vamos a obtener los momentos condicionados y no condicionados de un campo de difusión lognormal, a partir de la función generatriz de momentos del campo de difusión gaussiano asociado. Los momentos condicionados del campo nos serán muy útiles en la obtención de las ecuaciones atrasada y adelantada de Kolmogorov. Además, usando las expresiones de estos momentos, obtendremos la función de covarianza del campo.

En la Sección 2.5 comprobaremos que un campo de difusión lognormal también verifica una quinta hipótesis, lo que unida a las cuatro que se demuestran en la Sección 2.3, nos permitirán representar el campo por una ecuación en derivadas parciales estocástica.

## 2.2 Definición de Campo de Difusión Lognormal Biparamétrico

En esta sección vamos a establecer una definición de campo de difusión lognormal en la que sólo intervienen la distribución del campo en los ejes del espacio paramétrico, la media y varianza infinitesimal de las difusiones uniparamétricas y ciertos coeficientes de difusión. Antes de establecerla, estudiaremos algunas propiedades que las difusiones uniparamétricas asociadas al campo verifican.

Sea  $\{X(z); z \in I \equiv [0, T] \times [0, S]\}$  un campo de difusión definido sobre un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ,  $X(z) > 0$  para todo  $z \in I$ . En lo que sigue vamos a suponer que:

1.  $X(z) = X(0, 0)$ , casi seguramente ( $P$ ), para todo  $z \in E_0$  donde

$$\begin{aligned} X(0, 0) \text{ es una v.a. lognormal o una v.a. constante con} \\ E[\log X(0, 0)] = m_0 \text{ y } var(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

2. Los coeficientes de difusión uniparamétricos

$$\begin{aligned} a_1(z, x) = a_1(z)x, \quad B_1(z, x) = B_1(z)x^2, \\ a_2(z, x) = a_2(z)x, \quad B_2(z, x) = B_2(z)x^2, \end{aligned} \quad (2.2)$$

son funciones continuas con  $B_1 > 0$  y  $B_2 > 0$ .

3. Si  $k \in (0, T]$ , entonces se verifica que

$$\begin{aligned} E[X(\Delta_{hk}(z)) / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] &= X(s, t+k) \{a_1(s, t+k) - a_1(z)\} h + o(h), \\ E[X(\Delta_{hk}(z))^2 / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] &= X^2(s, t+k) \{B_1(s, t+k) - B_1(z)\} h + o(h). \end{aligned} \quad (2.3)$$

4. Para cualquier valor de  $n$ , los momentos  $E[|X(\Delta_h^1(z))|^n / X(z)]$ ,  $E[|X(\Delta_k^2(z))|^n / X(z)]$  y  $E[|X(\Delta_{hk}(z))|^n / \bar{X}(z, (s+h, t+k))]$  existen y para  $n_1, n_2, n_3 > 2$  pares,

se verifica que

$$\begin{aligned} E [ |X(\Delta_h^1(z))|^{n_1} / X(z) ] &= o(h), \\ E [ |X(\Delta_k^2(z))|^{n_2} / X(z) ] &= o(k), \\ E [ |X(\Delta_{hk}(z))|^{n_3} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) ] &= o(h), \quad \text{para } k \in (0, T]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bajo estas hipótesis las condiciones (1.6) y (1.9) de la definición de campo de difusión son inmediatas y queda justificado los nombres de media infinitesimal y varianza infinitesimal para los coeficientes de difusión uniparamétricos (véase las *Observaciones 1.1 y 1.2*), de ahí el comentario que hicimos al principio de la sección. Además, no es necesario utilizar momentos truncados en (2.3) (la demostración es análoga a la que hicimos en el caso gaussiano).

**Observación 2.1** La propiedad 4 anterior implica, por el resultado de Pawula (*Lema 1*, p. 35 de [21]), que si  $n > 2$  entonces

$$\begin{aligned} E [ |X(\Delta_h^1(z))|^n / X(z) ] &= o(h), \\ E [ |X(\Delta_k^2(z))|^n / X(z) ] &= o(k), \\ E [ |X(\Delta_{hk}(z))|^n / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) ] &= o(h), \quad \text{para } k \in (0, T]. \end{aligned}$$

En lo sucesivo tomaremos  $Y(z) = \log X(z)$  y consideraremos el campo de difusión biparamétrico  $\{Y(z); z \in I\}$ . Notemos por  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{B}_1$  y  $\bar{B}_2$ , sus coeficientes de difusión uniparamétricos y por  $\bar{a}, \bar{B}, \bar{c}_1, \bar{c}_2$  y  $\bar{d}$ , sus coeficientes de difusión biparamétricos.

### 2.2.1 Difusiones Lognormales Uniparamétricas

Antes de pasar a estudiar el campo que acabamos de definir, veamos que las difusiones uniparamétricas asociadas son lognormales. Este resultado nos permitirá caracterizar los procesos difusión lognormales y obtener las correspondientes densidades de transición.

**Proposición 2.1** Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo verificando (2.1), las dos primeras condiciones de (2.4) y con coeficientes de difusión  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$ , dados

en (2.2). Entonces las difusiones uniparamétricas que se obtienen fijando cada coordenada son lognormales y los procesos de difusión gaussianos asociados tienen los siguientes coeficientes difusión

$$\begin{aligned}\bar{a}_1(z, y) &= a_1(z) - \frac{1}{2}B_1(z), & \bar{B}_1(z, y) &= B_1(z), \\ \bar{a}_2(z, y) &= a_2(z) - \frac{1}{2}B_2(z), & \bar{B}_2(z, y) &= B_2(z).\end{aligned}\tag{2.5}$$

**Demostración.** Fijemos  $t \in [0, T]$  y consideremos el proceso  $\{Y(s, t) = \log X(s, t); s \in [0, S]\}$ ; veamos que este proceso es una difusión uniparamétrica con coeficientes de difusión  $\bar{a}_1$  y  $\bar{B}_1$  que sólo dependen de la posición en el espacio paramétrico, en concreto, veamos que

$$\bar{a}_1(z, y) = a_1(z) - \frac{1}{2}B_1(z), \quad \bar{B}_1(z, y) = B_1(z),$$

y que para  $\delta = 1$ ,

$$E \left[ |Y(\Delta_h^1(z))|^{2+\delta} / Y(z) \right] = o(h).$$

En efecto, utilizando el desarrollo en serie de Taylor del logaritmo expresamos

$$\begin{aligned}Y(\Delta_h^1(z)) &= Y(s+h, t) - Y(z) = \log \left[ 1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right] \\ &= \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} - \frac{X^2(\Delta_h^1(z))}{X^2(z)} + R_2 \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)\end{aligned}\tag{2.6}$$

donde el resto de Taylor viene dado por la siguiente expresión

$$R_2 \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+3} \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^{n+3}.\tag{2.7}$$

Tomando esperanza condicionada en (2.6) y utilizando la primera condición de (2.2) y (2.4)

$$\begin{aligned}
& E [Y (\Delta_h^1(z)) / Y(z) = y] \\
&= \frac{E [X (\Delta_h^1(z)) / X(z) = e^y]}{e^y} - \frac{E [X^2 (\Delta_h^1(z)) / X(z) = e^y]}{2e^{2y}} \\
&\quad + E \left[ R_2 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right] \\
&= \frac{a_1(z) e^y h}{e^y} - \frac{B_1(z) e^{2y} h}{2e^{2y}} + o(h) + E \left[ R_2 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right] \\
&= \left( a_1(z) - \frac{B_1(z)}{2} \right) h + o(h) + E \left[ R_2 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right]
\end{aligned}$$

Veamos que

$$E \left[ R_2 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right] = o(h).$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
& \left| E \left[ R_2 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right] \right| \leq E \left[ \left| R_2 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \right| / X(z) = e^y \right] \\
& \leq E \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|X (\Delta_h^1(z))|^{n+3}}{(n+3) X^{n+3}(z)} / X(z) = e^y \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E [ |X (\Delta_h^1(z))|^{n+3} / X(z) = e^y ]}{(n+3) e^{(n+3)y}} = o(h).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

donde hemos utilizado que la integral es  $\sigma$ -aditiva sobre la familia de funciones medibles no negativas (véase *Corolario 1*, p. 126 de [18]) y la *Observación 2.1*. Por lo tanto

$$\bar{a}_1(z, y) = \bar{a}_1(z) = a_1(z) - \frac{1}{2} B_1(z).$$

Por otra parte, si expresamos

$$\log \left( 1 + \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) = \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} + R_1 \left( \frac{X (\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right),$$

donde el resto de Taylor es

$$R_1 \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^{n+2}$$

y elevamos al cuadrado tenemos

$$\begin{aligned} \left( \log \left( 1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \right)^2 &= \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} + R_1 \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \right)^2 \\ &= \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^2 + 2 \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} R_1 \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) + \left( R_1 \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \right)^2 \\ &= \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^2 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^{n+3} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^n}{(k+2)(n-k+2)} \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^{n+4} \right) \\ &= \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^2 + R_1^* \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Tomando esperanza condicionada a ambos lados de la igualdad anterior

$$\begin{aligned} E [Y^2(\Delta_h^1(z)) / Y(z) = y] &= \\ &= \frac{E [X^2(\Delta_h^1(z)) / X(z) = e^y]}{e^{2y}} + E \left[ R_1^* \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right] \\ &= \frac{B_1(z) e^{2y} h}{e^{2y}} + o(h) = B_1(z) h + o(h) \end{aligned}$$

puesto que se puede comprobar (siguiendo pasos análogos a los que dimos en (2.8)) que

$$E \left[ R_1^* \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) / X(z) = e^y \right] = o(h).$$

Por lo tanto

$$\bar{B}_1(z, y) = \bar{B}_1(z) = B_1(z).$$

Finalmente, expresando

$$\log \left( 1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^{n+1},$$

y elevando al cubo obtenemos

$$\left( \log \left( 1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \right)^3 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^n}{(j+1)(k-j+1)(n-k+1)} \left( \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right)^{n+3} \quad (2.10)$$

Utilizando esta expresión y siguiendo pasos análogos a los dados en (2.8) es fácil concluir que

$$E \left[ |Y(\Delta_h^1(z))|^3 / Y(z) = y \right] = o(h).$$

Si fijamos  $s \in [0, S]$ , se puede hacer un razonamiento similar que nos llevaría a afirmar que  $\{Y(s, t); t \in [0, S]\}$  es una difusión uniparamétrica con coeficientes de difusión

$$\bar{a}_2(z, y) = a_2(z) - \frac{1}{2}B_2(z), \quad \bar{B}_2(z, y) = B_2(z),$$

verificando que para  $\delta = 1$

$$E \left[ Y | (\Delta_k^2(z))|^{2+\delta} / Y(z) \right] = o(k).$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anterior, la condición (2.1) y aplicando la *Observación 1.3* del capítulo anterior, concluimos el resultado. ■

Esta proposición permite caracterizar las difusiones lognormales uniparamétricas como sigue.

**Observación 2.2** *Las difusiones uniparamétricas asociadas a un campo de difusión positivo  $\{X(z); z \in I\}$ , son lognormales si se verifican las siguientes condiciones:*

i)  $X(z) = X(0, 0)$ , casi seguramente ( $P$ ),  $\forall z \in E_0$ , donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante con  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$ ;

ii) *los coeficientes de difusión uniparamétricos se pueden expresar como*

$$\begin{aligned} a_1(z, x) &= a_1(z)x, & B_1(z, x) &= B_1(z)x^2, \\ a_2(z, x) &= a_2(z)x, & B_2(z, x) &= B_2(z)x^2, \end{aligned}$$

donde  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  son funciones continuas, con  $B_1 > 0$  y  $B_2 > 0$ ; y

iii) los momentos  $E [|X (\Delta_h^1(z))|^n / X(z)]$  y  $E [|X (\Delta_k^2(z))|^n / X(z)]$  existen, cualquiera que sea el valor de  $n$  y alguno de orden superior a dos y par, es nulo; es decir, existen  $n_1, n_2 > 2$  pares, tales que

$$\begin{aligned} E [|X (\Delta_h^1(z))|^{n_1} / X(z)] &= o(h), \\ E [|X (\Delta_k^2(z))|^{n_2} / X(z)] &= o(k). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades 6 y 7 de la página 29, es fácil obtener las densidades de transición de cada difusión lognormal uniparamétrica. En las siguientes propiedades estableceremos las expresiones de estas densidades, que utilizaremos en desarrollos posteriores.

1. La densidad de transición del proceso  $\{X(s, t); s \in [0, S]\}$  está dada por

$$g_t(y, s + h/x, s) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma_1^2(z, h)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(\frac{y}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\},$$

donde

$$\begin{aligned} m_1(z, h) &= \int_s^{s+h} \bar{a}_1(\sigma, t) d\sigma = \int_s^{s+h} a_1(\sigma, t) d\sigma - \frac{1}{2}\sigma_1^2(z, h), \\ \sigma_1^2(z, h) &= \int_s^{s+h} \bar{B}_1(\sigma, t) d\sigma = \int_s^{s+h} B_1(\sigma, t) d\sigma, \end{aligned} \tag{2.11}$$

2. La densidad de transición del proceso  $\{X(s, t); t \in [0, T]\}$  está dada por

$$g_s(y, t + k/x, t) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma_2^2(z, k)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log(\frac{y}{x}) - m_2(z, k)}{\sigma_2(z, k)} \right)^2 \right\},$$

donde

$$\begin{aligned} m_2(z, h) &= \int_t^{t+k} \bar{a}_2(s, \tau) d\tau = \int_t^{t+k} a_2(s, \tau) d\tau - \frac{1}{2}\sigma_2^2(z, k), \\ \sigma_2^2(z, k) &= \int_t^{t+k} \bar{B}_2(s, \tau) d\tau = \int_t^{t+k} B_2(s, \tau) d\tau. \end{aligned}$$



### 2.2.2 Campo de Difusión Lognormal Biparamétrico

Una vez que sabemos que las difusiones uniparamétricas asociadas al campo considerado al principio de la sección, son lognormales, estamos en disposición de probar que el campo también es lognormal.

**Proposición 2.2** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1), (2.3) y (2.4), con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)x$ ,  $a_2(s, t)x$ ,  $B_1(s, t)x^2$  y  $B_2(s, t)x^2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión lognormal.*

**Demostración.** Veamos que  $\{Y(z) = \log X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano. Para ello vamos a probar que las condiciones de la *Definición 1.4* se verifican.

La condición **i)** es cierta teniendo en cuenta la *Proposición 2.1* y que los coeficientes de difusión son de clase  $C^1$ .

A continuación, probaremos **ii)**. Realizando algunos cálculos y utilizando el desarrollo en serie de Taylor del logaritmo tenemos

$$\begin{aligned}
Y(\Delta_{hk}(z)) &= Y(s+h, t+k) - Y(s, t+k) - Y(s+h, t) + Y(z) \\
&= \log \left( \frac{X(s+h, t+k) X(z)}{X(s, t+k) X(s+h, t)} \right) = \log \left( 1 + \frac{X(s+h, t+k) X(z)}{X(s, t+k) X(s+h, t)} - 1 \right) \\
&= \log \left( 1 + \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right) \\
&= \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right)^2 \\
&\quad + R_2 \left( \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right)
\end{aligned}$$

donde la expresión del resto,  $R_2(\cdot)$  es análoga a la que dimos en (2.7). Tomando esperanza condicionada en la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
& E \left[ Y(\Delta_{hk}(z)) / \bar{Y}(z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= E \left[ \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} E \left[ \frac{(X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z)))^2}{X^2(s+h, t) X^2(s, t+k)} / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] \\
&\quad + E \left[ R_2 \left( \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= \frac{E \left[ X(\Delta_{hk}(z)) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{E \left[ X^2(\Delta_{hk}(z)) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] X^2(z) - X^2(\Delta_h^1(z)) X^2(\Delta_k^2(z))}{X^2(s+h, t) X^2(s, t+k)} \right\} \\
&\quad + \frac{E \left[ X(\Delta_{hk}(z)) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] X(z) X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X^2(s+h, t) X^2(s, t+k)} \\
&\quad + E \left[ R_2 \left( \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= \{a_1(s, t+k) - a_1(z)\} h - \frac{1}{2} \{B_1(s, t+k) - B_1(z)\} h + o(h) \\
&\quad + E \left[ R_2 \left( \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= \{\bar{a}_1(s, t+k) - \bar{a}_1(z)\} h + o(h)
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado (2.5), hemos realizado algunas simplificaciones y por último, hemos usado que

$$E \left[ R_2 \left( \frac{X(\Delta_{hk}(z)) X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)} \right) / \bar{X}(z, (s+h, t+k)) \right] = o(h)$$

(esta igualdad se demuestra de forma análoga a (2.8)).

Por otra parte, utilizando un desarrollo en serie de Taylor análogo al que hicimos en (2.9), tenemos que

$$\begin{aligned}
& E [Y^2 (\Delta_{hk} (z)) / \bar{Y} (z, (s+h, t+k))] \\
&= E \left[ \left( \log \left( 1 + \frac{X (\Delta_{hk} (z)) X (z) - X (\Delta_h^1 (z)) X (\Delta_k^2 (z))}{X (s+h, t) X (s, t+k)} \right) \right)^2 / \bar{X} (z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= E \left[ \frac{(X (\Delta_{hk} (z)) X (z) - X (\Delta_h^1 (z)) X (\Delta_k^2 (z)))^2}{X^2 (s+h, t) X^2 (s, t+k)} / \bar{X} (z, (s+h, t+k)) \right] \\
&\quad + E \left[ R_1^* \left( \frac{X (\Delta_{hk} (z)) X (z) - X (\Delta_h^1 (z)) X (\Delta_k^2 (z))}{X (s+h, t) X (s, t+k)} \right) / \bar{X} (z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= \{B_1 (s, t+k) - B_1 (z)\} h + o(h) \\
&\quad + E \left[ R_1^* \left( \frac{X (\Delta_{hk} (z)) X (z) - X (\Delta_h^1 (z)) X (\Delta_k^2 (z))}{X (s+h, t) X (s, t+k)} \right) / \bar{X} (z, (s+h, t+k)) \right] \\
&= \{\bar{B}_1 (s, t+k) - \bar{B}_1 (z)\} h + o(h),
\end{aligned}$$

donde hemos realizado algunas simplificaciones, hemos usado que  $B_1 (z) = \bar{B}_1 (z)$  y

$$E \left[ R_1^* \left( \frac{X (\Delta_{hk} (z)) X (z) - X (\Delta_h^1 (z)) X (\Delta_k^2 (z))}{X (s+h, t) X (s, t+k)} \right) / \bar{X} (z, (s+h, t+k)) \right] = o(h)$$

(esta igualdad se demuestra de forma análoga a (2.8)).

Finalmente realizando un desarrollo en serie de Taylor análogo al que hicimos en (2.10) y siguiendo pasos análogos a los que dimos en (2.8) es fácil obtener que

$$E \left[ |Y (\Delta_{hk} (z))|^3 / \bar{Y} (z, (s+h, t+k)) \right] = o(h).$$

Por lo tanto, las condiciones **ii**) y **iii**) se verifican y podemos afirmar que  $\{Y (z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano. ■

La proposición anterior motiva la siguiente definición.

**Definición 2.1** Diremos que el campo de difusión  $\{X(z); z \in I\}$ ,  $X(z) > 0$ , es **lognormal** si verifica las siguientes condiciones:

i) las difusiones uniparamétricas asociadas al campo son lognormales con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)x$ ,  $a_2(s, t)x$ ,  $B_1(s, t)x^2$  y  $B_2(s, t)x^2$ , funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , con  $B_1 > 0$  y  $B_2 > 0$ ;

ii) si  $k \in (0, T]$ , entonces

$$\begin{aligned} E [X(\Delta_{hk}(z)) / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] &= X(s, t+k) (a_1(s, t+k) - a_1(z)) h + o(h), \\ E [X(\Delta_{hk}(z))^2 / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] &= X^2(s, t+k) (B_1(s, t+k) - B_1(z)) h + o(h); \end{aligned}$$

iii) los momentos  $E [|X(\Delta_{hk}(z))|^n / \bar{X}(z, (s+h, t+k))]$  existen para cualquier valor de  $n$  y para algún  $n > 2$  par

$$E [|X(\Delta_{hk}(z))|^n / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] = o(h), \quad \text{donde } k \in (0, T]$$

**Observación 2.3** Las condiciones ii) y iii) de la definición anterior se pueden reemplazar por las siguientes condiciones:

ii) si  $h \in (0, S]$ , entonces

$$\begin{aligned} E [X(\Delta_{hk}(z)) / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] &= X(s+h, t) (a_2(s+h, t) - a_2(z)) k + o(k), \\ E [X(\Delta_{hk}(z))^2 / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] &= X^2(s+h, t) (B_2(s+h, t) - B_2(z)) k + o(k); \end{aligned}$$

iii) los momentos  $E [|X(\Delta_{hk}(z))|^n / \bar{X}(z, (s+h, t+k))]$  existen para cualquier valor de  $n$  y para algún  $n > 2$  par

$$E [|X(\Delta_{hk}(z))|^n / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] = o(k), \quad \text{donde } h \in (0, S].$$

### 2.2.3 Densidad de Transición del Campo

Denotemos por  $g(y, (s+h, t+k)/\bar{x}, z)$ , donde  $\bar{x} = (x_1, x, x_2)$ , la densidad de probabilidad de transición del campo de difusión lognormal biparamétrico.

**Proposición 2.3** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4) con coeficientes  $a_1(s, t)x$ ,  $a_2(s, t)x$ ,  $B_1(s, t)x^2$  y  $B_2(s, t)x^2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces la densidad de transición del campo está dada por*

$$g(y, (s+h, t+k)/\bar{x}, z) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(z, h, k)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log\left(\frac{yx}{x_1x_2}\right) - m(z, h, k)}{\sigma(z, h, k)} \right)^2 \right\}, \quad (2.12)$$

donde

$$m(z, h, k) = \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad \sigma^2(z, h, k) = \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau,$$

$\bar{a}$  y  $\bar{B}$  son los coeficientes de tendencia y de difusión del campo gaussiano asociado al lognormal (las expresiones de  $\bar{a}$  y  $\bar{B}$  las daremos en (2.21)).

La demostración de esta proposición es inmediata por cambio de variable, teniendo en cuenta la densidad de probabilidad de transición del campo  $\{Y(z) = \log X(z), z \in I\}$  que dimos en la (1.44).

## 2.3 Coeficientes de Difusión Biparamétricos

En esta sección vamos a obtener los coeficientes de difusión biparamétricos del campo a partir de los coeficientes de difusión uniparamétricos aplicando la *Proposición 1.1*. Para ello, primero necesitamos comprobar que las hipótesis **I-IV** que dimos en la Sección 1.3 se verifican.

### 2.3.1 Hipótesis I a IV

Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4) y con coeficientes de difusión  $a_1(s, t)x$ ,  $a_2(s, t)x$ ,  $B_1(s, t)x^2$  y  $B_2(s, t)x^2$ , dados en (2.2). Bajo estas condiciones, vamos a comprobar que las hipótesis **II-IV** son ciertas. Además, si añadimos la hipótesis adicional de que los coeficientes de difusión sean de clase  $C^1$  respecto a cada coordenada, la hipótesis **I** también se verifica. Vamos a probar que se verifican las hipótesis en los siguientes lemas. Usaremos

$$\Phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du, \quad \forall x \in \mathbf{R},$$

para denotar la función de distribución de la ley  $N(0, 1)$ .

**Lema 2.1** *Si los coeficientes de difusión  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2) son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces se verifica la hipótesis **I**.*

**Demostración.** Sabemos que  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  tienen derivadas parciales continuas respecto a  $s$  y  $t$  ya que son de clase  $C^1$  y tal como están definidas (véase (2.2)) son cuatro veces derivables con continuidad en  $x$ . ■

**Lema 2.2** *Si los coeficientes de difusión  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2) son funciones continuas respecto a  $s$  y  $t$ , entonces la hipótesis **II** se verifica.*

**Demostración. 1.-** Veamos que la condición (1.6)

$$\int_{|y-x|>\varepsilon} g_t(y, s + h/x, s) dy = o(h)$$

es uniforme respecto a las variables  $s$  y  $t$ . Para ello notamos

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon, h}(z) &= \int_{|y-x|>\varepsilon} g_t(y, s + h/x, s) dy = P[|X(\Delta_h^1(z))| > \varepsilon / X(z) = x] \\ &= P[X(\Delta_h^1(z)) \leq -\varepsilon / X(z) = x] + P[X(\Delta_h^1(z)) \geq \varepsilon / X(z) = x] \\ &= P\left[1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{x} / X(z) = x\right] \\ &\quad + P\left[1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \geq 1 + \frac{\varepsilon}{x} / X(z) = x\right]. \end{aligned}$$

Usando que  $|y - x| > \varepsilon$ , se puede comprobar que  $1 - \frac{\varepsilon}{x} \geq 0$ ; por lo que podemos aplicar logaritmos a ambos miembros de las desigualdades anteriores obteniendo que

$$f_{\varepsilon,h}(z) = P \left[ \log \left( 1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \leq \log \left( 1 - \frac{\varepsilon}{x} \right) / \log X(z) = \log x \right] \\ + P \left[ \log \left( 1 + \frac{X(\Delta_h^1(z))}{X(z)} \right) \geq \log \left( 1 + \frac{\varepsilon}{x} \right) / \log X(z) = \log x \right],$$

y entonces

$$f_{\varepsilon,h}(z) = P \left[ Y(\Delta_h^1(z)) \leq \log \left( 1 - \frac{\varepsilon}{x} \right) / Y(z) = \log x \right] \\ + P \left[ Y(\Delta_h^1(z)) \geq \log \left( 1 + \frac{\varepsilon}{x} \right) / Y(z) = \log x \right].$$

Por la propiedad 4 de la página 28 sabemos que  $Y(\Delta_h^1(z))$  es independiente de  $Y(z)$  por lo que

$$f_{\varepsilon,h}(z) = P \left[ Y(\Delta_h^1(z)) \leq \log \left( 1 - \frac{\varepsilon}{x} \right) \right] + P \left[ Y(\Delta_h^1(z)) \geq \log \left( 1 + \frac{\varepsilon}{x} \right) \right].$$

Además

$$Y(\Delta_h^1(z)) \rightsquigarrow N(m_1(z, h), \sigma_1^2(z, h)),$$

donde las expresiones de  $m_1(z, h)$  y  $\sigma_1^2(z, h)$  las dimos en (2.11), por lo que

$$f_{\varepsilon,h}(z) = \Phi \left( \frac{\log \left( 1 - \frac{\varepsilon}{x} \right) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) + 1 - \Phi \left( \frac{\log \left( 1 + \frac{\varepsilon}{x} \right) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right).$$

Finalmente puesto que  $m_1, \sigma_1$  y  $\Phi$  son funciones continuas sobre un compacto  $I$ , existe  $z_1 \in I$  tal que

$$\max_{z \in I} f_{\varepsilon,h}(z) = f_{\varepsilon,h}(z_1) = o(h),$$

por lo que concluimos que (1.6) se verifica uniformemente en  $s$  y  $t$ .

**2.-** De forma análoga se demuestra que (1.9) se verifica uniformemente en  $s$  y  $t$ .

**3.-** Veamos que la condición (1.12) se verifica uniformemente en  $s$  y  $t$ .

Empezamos notando

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,h,k}(z) &= \int_{|y-x_1-x_2+x|>\varepsilon} g(y, (s+h, t+k) / (x_1, x, x_2), (s, t)) \\ &\quad \cdot g_t(x_2, s+h/x, s) g_s(x_1, t+k/x, t) dx_1 dx_2 dy \\ &= P[|X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / X(z) = x]. \end{aligned}$$

Puesto que  $\mathfrak{F}_z \subset \mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2$ , usando las propiedades del condicionamiento

$$\begin{aligned} P[|X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / X(z)] &= P[|X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / \mathfrak{F}_z] \\ &= E[P[|X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / \mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2] / \mathfrak{F}_z]. \end{aligned}$$

Primero observamos que

$$\begin{aligned} &P[|X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / \mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2] \\ &= P[X(\Delta_{hk}(z)) \leq -\varepsilon / \mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2] + P[X(\Delta_{hk}(z)) \geq \varepsilon / \mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2] \\ &= P[X(\Delta_{hk}(z)) \leq -\varepsilon / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] \\ &\quad + P[X(\Delta_{hk}(z)) \geq \varepsilon / \bar{X}(z, (s+h, t+k))] \\ &= P\left[Y(\Delta_{hk}(z)) \leq \log\left(1 + \frac{-\varepsilon X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)}\right) / \bar{Y}(z, (s+h, t+k))\right] \\ &\quad + P\left[Y(\Delta_{hk}(z)) \geq \log\left(1 + \frac{\varepsilon X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)}\right) / \bar{Y}(z, (s+h, t+k))\right] \\ &= P\left[Y(\Delta_{hk}(z)) \leq \log\left(1 + \frac{-\varepsilon X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)}\right)\right] \\ &\quad + P\left[Y(\Delta_{hk}(z)) \geq \log\left(1 + \frac{\varepsilon X(z) - X(\Delta_h^1(z)) X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h, t) X(s, t+k)}\right)\right] \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que  $Y(\Delta_{hk}(z))$  es independiente de  $\bar{Y}(z, (s+h, t+k))$ . Además sabemos que

$$X(\Delta_{hk}(z)) \rightsquigarrow N(m(z, h, k), \sigma^2(z, h, k)),$$



por lo que

$$\begin{aligned}
& P \left[ |X(\Delta_{hk}(z))| > \varepsilon / \mathfrak{F}_z^1 \vee \mathfrak{F}_z^2 \right] \\
&= \Phi \left( \frac{\log \left( 1 + \frac{-\varepsilon X(z) - X(\Delta_h^1(z))X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h,t)X(s,t+k)} \right) - m(z, h, k)}{\sigma^2(z, h, k)} \right) \\
& \quad 1 - \Phi \left( \frac{\log \left( 1 + \frac{\varepsilon X(z) - X(\Delta_h^1(z))X(\Delta_k^2(z))}{X(s+h,t)X(s,t+k)} \right) - m(z, h, k)}{\sigma^2(z, h, k)} \right)
\end{aligned}$$

Volviendo a  $f_{\varepsilon, h, k}$ , sustituyendo la expresión anterior, tomando esperanza condicionada, utilizando que

$$Y(\Delta_h^1(z)) \rightsquigarrow N(m_1(z, h), \sigma_1^2(z, h))$$

$$Y(\Delta_k^2(z)) \rightsquigarrow N(m_2(z, k), \sigma_2^2(z, k))$$

y haciendo algunas simplificaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon, h, k} &= 1 + \int_{\mathbf{R}^2} \left[ \Phi \left( \frac{\log \left( \frac{-\varepsilon + e^{\sigma_1(z, h)u + m_1(z, h)x + \sigma_2(z, k)u + m_2(z, k)x}}{e^{\sigma_1(z, h)u + m_1(z, h)x} e^{\sigma_2(z, k)u + m_2(z, k)x}} \right) - m(z, h, k)}{\sigma^2(z, h, k)} \right) \right. \\
& \quad \left. - \Phi \left( \frac{\log \left( \frac{\varepsilon + e^{\sigma_1(z, h)u + m_1(z, h)x + \sigma_2(z, k)u + m_2(z, k)x}}{e^{\sigma_1(z, h)u + m_1(z, h)x} e^{\sigma_2(z, k)u + m_2(z, k)x}} \right) - m(z, h, k)}{\sigma^2(z, h, k)} \right) \right] e^{-\frac{u^2 + v^2}{2}} dudv.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que  $f_{\varepsilon, h, k}(z)$  es continua (al ser composición de funciones continuas) sobre un compacto  $I$  lo que nos garantiza que dicha función alcanza sus valores extremos en  $I$ , esto es, existe  $z_1 \in I$  tal que

$$\max_{z \in I} f_{\varepsilon, h, k}(z) = f_{\varepsilon, h, k}(z_1) = o(hk),$$

por lo que concluimos que (1.12) se verifica uniformemente en  $s$  y  $t$  y por lo tanto la hipótesis **II** es cierta. ■

**Lema 2.3** *Si los coeficientes de difusión  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2) son funciones continuas respecto a  $s$  y  $t$ , entonces la hipótesis **III** se verifica.*

**Demostración.** (a) En primer lugar veamos que (1.19) se verifica (la demostración de (1.20) es análoga). El primer sumando de la desigualdad (1.19) lo acotaremos en **1** y el segundo en **2**.

1.- Por la propiedad 1 de la página 53, podemos expresar

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) g_t(y, s+h/x, s) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} \frac{(y-x)}{y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log\left(\frac{y}{x}\right) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} dx_2. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \log\left(\frac{y}{x}\right)$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) g_t(y, s+h/x, s) dy \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} (e^u - 1) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ u - \frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &\quad - \frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &= x(A - B). \end{aligned}$$

Por un lado, expresando

$$\begin{aligned} u - \frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{u - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \\ &\quad + \left( \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \left\{ \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right\} \\
&\quad \cdot \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\
&= \exp \left\{ \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right\} \\
&\quad \cdot \left[ \Phi \left( \frac{\log(1 + \frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \Phi \left( \frac{\log(1 - \frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right]. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\
&= \Phi \left( \frac{\log(1 + \frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) - \Phi \left( \frac{\log(1 - \frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right). \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y - x) P_1^t(dy, s + h/x, s) = x(A - B) \\
&= x \left[ \exp \left\{ \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right\} \right. \\
&\quad \cdot \left\{ \Phi \left( \frac{\log(1 + \frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \Phi \left( \frac{\log(1 - \frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left[ \Phi \left( \frac{\log(1 + \frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) - \Phi \left( \frac{\log(1 - \frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) \right] \right].
\end{aligned}$$

Usando que

$$\Phi\left(\frac{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)-(m_1(z,h)+\sigma_1^2(z,h))}{\sigma_1(z,h)}\right) - \Phi\left(\frac{\log\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right)-(m_1(z,h)+\sigma_1^2(z,h))}{\sigma_1(z,h)}\right) \leq 1,$$

y recordando que

$$-\left\{\Phi\left(\frac{\log\left(1+\frac{\varepsilon}{x}\right)-m_1(z,h)}{\sigma_1(z,h)}\right) - \Phi\left(\frac{\log\left(1-\frac{\varepsilon}{x}\right)-m_1(z,h)}{\sigma_1(z,h)}\right)\right\} = f_{z,\varepsilon}(h) - 1,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x) g_t(y, s+h/x, s) dy\right| &\leq x \left[\exp\left\{\frac{\sigma_1^2(z,h)}{2} + m_1(z,h)\right\} + f_{z,\varepsilon}(h) - 1\right] \\ &\leq x \left[\exp\left\{\frac{\sigma_1^2(z,h)}{2} + m_1(z,h)\right\} - 1\right] + |f_{z,\varepsilon}(h)|. \end{aligned}$$

Para acotar la expresión anterior consideramos el *Teorema del Valor Medio*: Sea  $\rho > 0$  y sea  $0 \leq h \leq \rho$ . Sea  $g(h)$  una función que toma valores de  $[0, \rho]$  en  $\mathbf{R}$ , continua y derivable con continuidad. Entonces

$$|g(h) - g(0)| \leq l_1 h \tag{2.15}$$

donde  $g(0) = \lim_{h \rightarrow 0} g(h)$ .

Para  $z \in I$  fijo y  $0 \leq h \leq S$  (cierto por ser  $I = [0, S] \times [0, T]$ ) aplicando este resultado a las funciones

$$\exp\left\{\frac{\sigma_1^2(z,h)}{2} + m_1(z,h)\right\} \quad \text{y} \quad f_{z,\varepsilon}(h)$$

y usando que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \exp\left\{\frac{\sigma_1^2(z,h)}{2} + m_1(z,h)\right\} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0} f_{z,\varepsilon}(h) = 0,$$

tenemos que existen constantes  $l_1^*$  y  $l_1^{**}$  tales que

$$\left|\exp\left\{\frac{\sigma_1^2(z,h)}{2} + m_1(z,h)\right\} - 1\right| \leq l_1^* h$$

y

$$|f_{z,\varepsilon}(h)| \leq l_1^{**}h.$$

Uniendo estas dos expresiones, tenemos que

$$\left| \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) g_t(y, s+h/x, s) dy \right| \leq x [l_1^*h + l_1^{**}h] = l_2h. \quad (2.16)$$

2.- Utilizando de nuevo la expresión de la densidad de transición tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 g_t(y, s+h/x, s) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{|y-x| \leq \varepsilon} \frac{(y-x)^2}{y} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log\left(\frac{y}{x}\right) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} dx_2. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $u = \log\left(\frac{y}{x}\right)$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 g_t(y, s+h/x, s) dy \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} (e^u - 1)^2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &= \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ 2u - \frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &\quad - \frac{2x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ u - \frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &\quad + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} du \\ &= x^2 (C - 2A + B). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando que

$$\begin{aligned} 2u - \frac{1}{2} \left( \frac{u - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 &= -\frac{1}{2} \left( \frac{u - (m_1(z, h) + 2\sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \\ &\quad + \sigma_1^2(z, h) + 2m_1(z, h), \end{aligned}$$

podemos expresar

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp \{ \sigma_1^2(z, h) + 2m_1(z, h) \} \\
&\cdot \int_{\log(1-\frac{\varepsilon}{x})}^{\log(1+\frac{\varepsilon}{x})} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{u - (m_1(z, h) + 2\sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right)^2 \right\} \\
&= \exp \{ \sigma_1^2(z, h) + 2m_1(z, h) \} \\
&\cdot \left[ \Phi \left( \frac{\log(1+\frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + 2\sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \Phi \left( \frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + 2\sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right]. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.13), (2.14) y (2.18) en (2.17) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{|y-x|\leq\varepsilon} (y-x)^2 g_t(y, s+h/x, s) dy \\
&= x^2 \left[ \exp \{ \sigma_1^2(z, h) + 2m_1(z, h) \} \cdot \left[ \Phi \left( \frac{\log(1+\frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + 2\sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \Phi \left( \frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + 2\sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \exp \left\{ \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right\} \cdot \left[ \Phi \left( \frac{\log(1+\frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \Phi \left( \frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{x}) - (m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h))}{\sigma_1(z, h)} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \Phi \left( \frac{\log(1+\frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) - \Phi \left( \frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) \right] \\
&\leq x^2 \left[ \exp \{ \sigma_1^2(z, h) + 2m_1(z, h) \} - 2 \exp \left\{ \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right\} - 1 \right] \\
&\cdot \left[ \Phi \left( \frac{\log(1+\frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) - \Phi \left( \frac{\log(1-\frac{\varepsilon}{x}) - m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) \right] \\
&\leq l_3 h, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene aplicando el resultado (2.15) a la función

$$\exp \{ \sigma_1^2(z, h) + 2m_1(z, h) \} - 1$$

y a la función

$$\exp \left\{ \frac{\sigma_1^2(z, h)}{2} + m_1(z, h) \right\} \left[ \Phi \left( \frac{\log \left( 1 + \frac{\varepsilon}{x} \right) - m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) - \Phi \left( \frac{\log \left( 1 - \frac{\varepsilon}{x} \right) - m_1(z, h) + \sigma_1^2(z, h)}{\sigma_1(z, h)} \right) \right] - 1.$$

Finalmente uniendo las acotaciones obtenidas en (2.16) y en (2.19) obtenemos que para cada compacto  $K \subset \mathbf{R}_+$ ,  $x \in K$ , existe una constante  $l' = l_2 + l_3$  tal que

$$\left| \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) g_t(y, s + h/x, s) dy \right| + \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 g_t(y, s + h/x, s) dy \leq l'h.$$

Análogamente se demostraría que existe una constante  $l''$

$$\left| \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) g_s(y, t + k/x, t) dy \right| + \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 g_s(y, t + k/x, t) dy \leq l''k.$$

(b) Veamos que (1.21) se verifica (la demostración de (1.22) es análoga). En efecto:  $K$  es un compacto de  $\mathbf{R}$ , por lo tanto existe  $\eta$  tal que  $K \subset ]-\eta, \eta[$ . Tomemos  $c = \varepsilon + \eta$  y sea  $x$  tal que  $|x| > c$ . Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} P_1^t(K, s + h/x, s) &= P[X(s+h, t) \in K / X(z) = x] \\ &= P[X(\Delta_h^1(z)) \in K - x / X(z) = x] \\ &\leq P[|X(\Delta_h^1(z))| > \varepsilon / X(z) = x]. \end{aligned}$$

Entonces existe una constante  $l^*$  (véase la demostración de la hipótesis **II**, **1**) tal que

$$\sup_{|x| > c} P_1^t(K, s + h/x, s) \leq l^*h, \quad \forall (s, t) \in I.$$

Análogamente existe otra constante  $l^{**}$  tal que

$$\sup_{|x| > c} P_2^s(K, t + k/x, t) \leq l^{**}k, \quad \forall (s, t) \in I.$$

Finalmente tomando  $c = \varepsilon + \eta$  y  $l = \max \{l', l'', l^*, l^{**}\}$  se concluye el lema. ■

**Lema 2.4** Si los coeficientes de difusión  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), son funciones continuas respecto a  $s$  y  $t$ , entonces la hipótesis **IV** se verifica.

**Demostración.** Veamos que (1.23) se verifica (análogamente se comprueba (1.24)).

En efecto, si notamos

$$X(\Delta_h^1(z))_\varepsilon \equiv X(\Delta_h^1(z)) \mathbf{1}_{\{|X(\Delta_h^1(z))| \leq \varepsilon\}}$$

y llamamos

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(z, h, x, \xi, \tau) &= \\ &= \left| \int_{\substack{|x_2-x| \leq \varepsilon \\ |\xi_2-\xi| \leq \varepsilon}} (x_2-x)(\xi_2-\xi) g(x_2, (s+h, t) / (x, \xi, \xi_2), (s, \tau)) g_\tau(\xi_2, s+h/\xi, s) dx_2 d\xi_2 \right| \\ &= |E[X(\Delta_h^1(s, \tau))_\varepsilon X(\Delta_h^1(s, t))_\varepsilon / X(s, t) = x, X(s, \tau) = \xi]| \\ &\leq E[|X(\Delta_h^1(s, \tau))_\varepsilon X(\Delta_h^1(s, t))_\varepsilon| / X(s, t) = x, X(s, \tau) = \xi], \end{aligned}$$

donde para la última desigualdad hemos utilizado la desigualdad de Jensen. Usando a continuación la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(z, h, x, \xi, \tau) &\leq (E[X^2(\Delta_h^1(s, \tau))_\varepsilon / X(s, t) = x, X(s, \tau) = \xi])^{1/2} \\ &\quad \cdot (E[X^2(\Delta_h^1(s, t))_\varepsilon / X(s, t) = x, X(s, \tau) = \xi])^{1/2} \\ &= (E[X^2(\Delta_h^1(s, \tau))_\varepsilon / X(s, \tau) = \xi])^{1/2} \\ &\quad \cdot (E[X^2(\Delta_h^1(s, t))_\varepsilon / X(s, t) = x])^{1/2} \\ &= \left( \int_{|\xi_2-\xi| \leq \varepsilon} (\xi_2-\xi)^2 g_\tau(\xi_2, s+h/\xi, s) d\xi_2 \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left( \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 g_t(y, s+h/x, s) dy \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{\mu} \sigma_1^2(s, \tau, h) f_\varepsilon(s, \tau, h) \right)^{1/2} \left( \frac{1}{\mu} \sigma_1^2(z, h) f_\varepsilon(z, h) \right)^{1/2} \\ &\leq l'h, \quad \text{para } \rho \leq h, \end{aligned}$$



donde para la última expresión hemos usado la demostración de la hipótesis **III, a)** con  $z = (s, t)$  y  $z = (s, \tau)$ . Entonces existe una constante  $l'$  tal que

$$\left| \int_{\substack{|x_2-x| \leq \varepsilon \\ |\xi_2-\xi| \leq \varepsilon}} (x_2 - x) (\xi_2 - \xi) g(x_2, (s+h, t) / (x, \xi, \xi_2), (s, \tau)) \cdot g_\tau(\xi_2, s+h/\xi, s) dx_2 d\xi_2 \right| \leq l' h \quad \forall (s, t) \in I, \quad \forall \tau \in [0, t].$$

De la misma forma existe una constante  $l''$  tal que

$$\left| \int_{\substack{|x_1-x| \leq \varepsilon \\ |\eta_1-\eta| \leq \varepsilon}} (x_1 - x) (\eta_1 - \eta) g(x_1, (s, t+k) / (\eta_1, \eta, x), (\sigma, t)) \cdot g_\sigma(\eta_1, t+k/\eta, t) dx_1 d\eta_1 \right| \leq l'' k \quad \forall (s, t) \in I, \quad \forall \sigma \in [0, s].$$

Por tanto, es suficiente tomar  $l = \max\{l', l''\}$  para concluir que la hipótesis **IV** se verifica.

■

### 2.3.2 Coeficientes de Difusión Biparamétricos

Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4), con coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Bajo estas condiciones vamos a obtener los coeficientes de difusión biparamétricos del campo lognormal y los coeficientes de difusión biparamétricos del campo gaussiano asociado al lognormal.

#### Coeficientes de Difusión Biparamétricos del campo $\{X(z); z \in I\}$

Siempre que hayamos encontrado condiciones suficientes para garantizar que las hipótesis **I-IV** se verifican, la aplicación de la *Proposición 1.1* nos conducirá a un resultado que permite establecer los coeficientes de difusión biparamétricos del campo a partir de los uniparamétricos.

**Proposición 2.4** *Si los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces los coeficientes de difusión biparamétricos del campo  $\{X(z); z \in I\}$ ,  $a$ ,  $B$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  y  $d$  están dados por:*

$$\begin{aligned}
a(z, x) &= a(z) x & \text{con} & \quad a(z) = \frac{\partial a_1(z)}{\partial t} + a_1(z) a_2(z) = \frac{\partial a_2(z)}{\partial s} + a_1(z) a_2(z), \\
B(z, x) &= B(z) x^2 & \text{con} & \quad B(z) = \frac{\partial B_1(z)}{\partial t} + B_1(z) B_2(z) = \frac{\partial B_2(z)}{\partial s} + B_1(z) B_2(z), \\
c_1(z, x) &= c_1(z) x^2 & \text{con} & \quad c_1(z) = a_2(z) B_1(z), \\
c_2(z, x) &= c_2(z) x^2 & \text{con} & \quad c_2(z) = a_1(z) B_2(z), \\
d(z, x) &= d(z) x^3 & \text{con} & \quad d(z) = B_1(z) B_2(z).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

De forma evidente se tiene que

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = \frac{\partial a_2}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial B_1}{\partial t} = \frac{\partial B_2}{\partial s}.$$

**Coefficientes de Difusión Biparamétricos del Campo  $\{Y(z) = \log X(z), z \in I\}$**

Si tenemos en cuenta la expresión que obtuvimos para los coeficientes de difusión uniparamétricos del campo  $\{Y(z) = \log X(z), z \in I\}$  dados en (2.5), (1.45) y la proposición anterior se obtiene de forma inmediata el siguiente resultado.

**Proposición 2.5** *Si los coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces los coeficientes de difusión biparamétricos del campo  $\{Y(z), z \in I\}$  están dados por*

$$\begin{aligned}
\bar{a}(z, y) &= \bar{a}(z) = a(z) - a_1(z) a_2(z) - \frac{1}{2} [B(z) - B_1(z) B_2(z)], \\
\bar{B}(z, y) &= \bar{B}(z) = B(z) - B_1(z) B_2(z), \\
\bar{c}_1 &= \bar{c}_2 = \bar{d} = 0.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

## 2.4 Momentos del Campo Lognormal Biparamétrico

En esta sección, vamos a calcular los momentos condicionados de orden  $k$  del campo de difusión lognormal, momentos que nos serán muy útiles en la obtención de la ecuación

atrasada y adelantada de esta campo y los momentos de orden  $k$  sin condicionar, a partir de la función generatriz de momentos del campo gaussiano asociado al lognormal. Finalmente obtendremos la función de covarianza utilizando las expresiones de estos momentos.

### 2.4.1 Momentos Condicionados de Orden $k$

Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4), con coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  con respecto a  $s$  y  $t$ . Sabemos que  $Y(z) = \log X(z)$  tiene una distribución condicionada a  $\bar{y} = (y_1, y, y_2)$  que es gaussiana  $N(m_{z_0 z}(\bar{y}), \sigma^2(z_0, z))$ , donde, si notamos

$$\begin{aligned} z_0 &= (s_0, t_0) < z = (s, t), \\ y_1 &= Y(s_0, t) = \log x_1, & y &= Y(z_0) = \log x, \\ y_2 &= Y(s, t_0) = \log x_2, \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} m_{z_0 z}(\bar{y}) &= y_1 + y_2 - y + \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \\ &= \log\left(\frac{x_1 x_2}{x}\right) + \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \\ \sigma^2(z_0, z) &= \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \bar{a}(z) &= a(z) - a_1(z) a_2(z) - \frac{1}{2} [B(z) - B_1(z) B_2(z)], \\ \bar{B}(z) &= B(z) - B_1(z) B_2(z). \end{aligned}$$

Entonces la función generatriz de momentos de  $Y(z)$  condicionada a  $\bar{Y} = \bar{y}$

$$E \left[ e^{kY(z)} / \bar{Y} = \bar{y} \right] = \exp \left\{ km_{z_0 z}(\bar{y}) + \frac{1}{2} k^2 \sigma^2(z_0, z) \right\}.$$

Si notamos  $\bar{X}(z_0, z) = (X(s_0, t), X(z_0), X(s, t_0))$ , como

$$\begin{aligned} E \left[ X^k(z) / \bar{X}(z_0, z) \right] &= E \left[ e^{k \log X(z)} / \bar{X}(z_0, z) \right] \\ &= \exp \left\{ km_{z_0 z}(\bar{Y}(z_0, z)) + \frac{1}{2} k^2 \sigma^2(z_0, z) \right\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} E \left[ X^k(z) / \bar{X}(z_0, z) \right] &= \left[ \frac{X(s_0, t) X(s, t_0)}{X(z_0)} \right]^k \\ &\cdot \exp \left\{ k \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau + \frac{k^2}{2} \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

### 2.4.2 Momentos de Orden $k$

Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4), con coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  con respecto a  $s$  y  $t$ . Sabemos que  $Y(z) = \log X(z)$  tiene la siguiente distribución (véase la propiedad 1 de la página 28 y 1.42)

$$Y(z) \rightsquigarrow N(m(z), \sigma^2(z))$$

donde

$$m(z) = m_0 + \int_0^s \int_0^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad \sigma^2(z) = \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.$$

Entonces la función generatriz de momentos de  $Y(z) = \log X(z)$  está dada por

$$E \left[ e^{kY(z)} \right] = \exp \left\{ km(z) + \frac{1}{2} k^2 \sigma^2(z) \right\}.$$

Por tanto, el momento de orden  $k$  de  $X(z)$  es

$$\begin{aligned} E \left[ X^k(z) \right] &= E \left[ e^{kY(z)} \right] \\ &= \exp \left\{ k \left[ m_0 + \int_0^s \int_0^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right] + \frac{1}{2} k^2 \left[ \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En particular

$$\begin{aligned} E[X(z)] &= \exp \left\{ \left[ m_0 + \int_0^s \int_0^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right] + \frac{1}{2} \left[ \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right] \right\}, \\ \text{Var} X(z) &= \exp \left\{ 2 \left[ m_0 + \int_0^s \int_0^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right] + \left[ \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right] \right\} \\ &\quad \cdot \left( \exp \left\{ \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right\} - 1 \right). \end{aligned}$$

### 2.4.3 Función de Covarianza

Una vez que hemos obtenido los momentos tanto condicionados como sin condicionar para el campo lognormal, vamos a utilizar estas expresiones para obtener la función de covarianza del campo.

**Proposición 2.6** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4), con coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  con respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces la función de covarianza del campo está dada por*

$$\begin{aligned} K(z_1, z_2) &= \text{cov}(X(z_1), X(z_2)) \\ &= \exp \left\{ 2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \sigma_0^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right) \right\} \\ &\quad \cdot \left( \exp \left\{ \sigma_0^2 + \int_0^{s_1 \wedge s_2} \int_0^{t_1 \wedge t_2} \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \right\} - 1 \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$\forall z_1, z_2 \in I$ , con  $z_1 = (s_1, t_1)$ ,  $z_2 = (s_2, t_2)$ , y donde  $\bar{a}$  y  $\bar{B}$  se dieron en (2.21).

**Demostración.** Distinguiamos dos casos.

**1.-** Sean  $z_1, z_2 \in I$ , con  $z_1 = (s_1, t_1)$ ,  $z_2 = (s_2, t_2)$  tales que  $z_0 = (s_0, t_0) = z_1 \wedge z_2 = (s_1, t_2)$ . Por definición

$$K(z_1, z_2) = \text{cov}(X(z_1), X(z_2)) = E[X(z_1)X(z_2)] - E[X(z_1)]E[X(z_2)].$$

Calculemos en primer lugar  $E[X(z_1)X(z_2)]$ . Puesto que  $\mathfrak{F}_{z_0}^1$  y  $\mathfrak{F}_{z_0}^2$  son independientes condicionalmente respecto a  $\mathfrak{F}_{z_0}$ , tenemos que

$$E[X(z_1)X(z_2)] = E[E[X(z_1)X(z_2)/\mathfrak{F}_{z_0}]] = E[E[X(z_1)/\mathfrak{F}_{z_0}]E[X(z_2)/\mathfrak{F}_{z_0}]].$$

Usando que  $\mathfrak{F}_{z_0} \subset \mathfrak{F}_{(0,t_0)}^1 \vee \mathfrak{F}_{(0,t_0)}^2$  y usando la propiedad de Markov

$$\begin{aligned} E[X(z_1)/\mathfrak{F}_{z_0}] &= E\left[E\left[X(z_1)/\mathfrak{F}_{(0,t_0)}^1 \vee \mathfrak{F}_{(0,t_0)}^2\right]/\mathfrak{F}_{z_0}\right] \\ &= E[E[X(z_1)/X(0,0), X(0,0), X(z_0)]/\mathfrak{F}_{z_0}] \\ &= X(z_0) \exp\left\{\int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau\right\}, \end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos tenido en cuenta la expresión que dimos para calcular los momentos condicionados, (2.22). De la misma forma

$$E[X(z_2)/\mathfrak{F}_{z_0}] = X(z_0) \exp\left\{\int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau\right\},$$

donde se ha notado  $\bar{a} = \bar{a}(\sigma, \tau)$  y  $\bar{B} = \bar{B}(\sigma, \tau)$  para aligerar la escritura.

Por tanto

$$\begin{aligned} E[X(z_1)X(z_2)] &= E[X^2(z_0)] \exp\left\{\int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{\int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau\right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado usando la expresión (2.23)

$$E[X^2(z_0)] = \exp\left\{2\left[m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau + \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau\right]\right\}.$$

Sustituyendo tenemos

$$\begin{aligned} E[X(z_1)X(z_2)] &= \exp\left\{2m_0 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{2\sigma_0^2 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau\right\} \\ &= \exp\left\{2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{\sigma_0^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau\right)\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{\sigma_0^2 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau\right\}. \end{aligned}$$

Usando de nuevo la expresión (2.23) tenemos

$$\begin{aligned}
E[X(z_1)]E[X(z_2)] &= \\
&= \exp \left\{ 2m_0 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \exp \left\{ \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_0^{s_1} \int_{t_2}^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau \right\} \\
&= \exp \left\{ 2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \exp \left\{ \sigma_0^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau \right) \right\}.
\end{aligned}$$

En conclusión

$$\begin{aligned}
K(z_1, z_2) &= E[X(z_1)X(z_2)] - E[X(z_1)]E[X(z_2)] \\
&= \exp \left\{ 2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a} d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \exp \left\{ \sigma_0^2 + \frac{1}{2} \left( \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B} d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau \right) \right\} \\
&\cdot \left\{ \exp \left\{ \sigma_0^2 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau \right\} - 1 \right\}.
\end{aligned}$$

**2.-** Sean  $z_1, z_2 \in I$ , con  $z_1 = (s_1, t_1)$ ,  $z_2 = (s_2, t_2)$  tales que  $z_0 = (s_0, t_0) = z_1 \wedge z_2 = (s_1, t_1)$ . Por definición

$$K(z_1, z_2) = \text{cov}(X(z_1), X(z_2)) = E[X(z_1)X(z_2)] - E[X(z_1)]E[X(z_2)].$$

Calculemos en primer lugar la  $E[X(z_1)X(z_2)]$ . Puesto que  $z_1 = z_0$

$$E[X(z_1)X(z_2)] = E[E[X(z_1)X(z_2) | \mathfrak{F}_{z_0}]] = E[X(z_0)E[X(z_2) | \mathfrak{F}_{z_0}]].$$

Usando que  $\mathfrak{F}_{z_0} \subset \mathfrak{F}_{z_0}^1 \vee \mathfrak{F}_{z_0}^2$  y la propiedad de Markov

$$\begin{aligned}
E[X(z_2) | \mathfrak{F}_{z_0}] &= E[E[X(z_2) | \mathfrak{F}_{z_0}^1 \vee \mathfrak{F}_{z_0}^2] | \mathfrak{F}_{z_0}] \\
&= E[E[X(z_2) | X(s_1, t_2), X(z_0), X(s_2, t_1)] | \mathfrak{F}_{z_0}] \\
&= \frac{E[X(s_1, t_2)X(s_2, t_1) | \mathfrak{F}_{z_0}]}{X(z_0)} \exp \left\{ \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{a} d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{B} d\sigma d\tau \right\},
\end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos usado la expresión (2.22). Sustituyendo esta expresión en la anterior y aplicando el caso **1**, tenemos que

$$\begin{aligned}
E[X(z_1)X(z_2)] &= \\
&= E[E[X(s_1, t_2)X(s_2, t_1)/\mathfrak{F}_{z_0}]] \exp\left\{\int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau\right\} \\
&= E[X(s_1, t_2)X(s_2, t_1)] \exp\left\{\int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{2m_0 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_0^{s_1} \int_{t_1}^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{2\sigma_0^2 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \left(\int_0^{s_1} \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau\right)\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \int_{s_1}^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau\right\} \\
&= \exp\left\{2m_0 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{2\sigma_0^2 + 2 \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau + \frac{1}{2} \left(\int_0^{s_2} \int_{t_1}^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau + \int_{s_1}^{s_2} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau\right)\right\} \\
&= \exp\left\{2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\sigma_0^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau\right)\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\sigma_0^2 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau\right\}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando (2.23), tenemos que

$$\begin{aligned}
E[X(z_1)]E[X(z_2)] &= \exp\left\{2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\sigma_0^2 + \frac{1}{2} \left(\int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau\right)\right\}.
\end{aligned}$$



Por lo que

$$\begin{aligned}
K(z_1, z_2) &= E[X(z_1)X(z_2)] - E[X(z_1)]E[X(z_2)] \\
&= \exp\left\{2m_0 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{a}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{a}d\sigma d\tau\right\} \\
&\quad \cdot \exp\left\{\sigma_0^2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} \bar{B}d\sigma d\tau\right)\right\} \\
&\quad \cdot \left(\exp\left\{\sigma_0^2 + \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} \bar{B}d\sigma d\tau\right\} - 1\right).
\end{aligned}$$

Finalmente, reuniendo los resultados obtenidos en **1** y **2**, concluimos la demostración. ■

## 2.5 Representación de un Campo de Difusión Lognormal por una Ecuación en Derivadas Parciales

Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) y (2.4), con coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  con respecto a  $s$  y  $t$ . Para poder aplicar el resultado de D. Nualart, *Proposición 1.2*, que nos permite obtener la representación de un proceso de difusión biparamétrico mediante una ecuación en derivadas parciales (véase ec. (1.29)), necesitamos que se verifiquen las hipótesis **I-V**. Ya hemos visto que imponiendo la condición de que los coeficientes de difusión uniparamétricos sean de clase  $C^1$ , las hipótesis **I-IV**, se verifican. Veamos que, imponiendo esta misma condición, también se verifica la hipótesis **V**.

**Lema 2.5** *Si las funciones  $a_1(s, t)$ ,  $a_2(s, t)$ ,  $B_1(s, t)$  y  $B_2(s, t)$  son de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ , entonces la hipótesis **V** se verifica.*

### **Demostración.**

(a) El que  $B_1$  y  $B_2$  sean funciones derivables con continuidad con respecto a  $x$  y que tengan derivadas continuas con respecto a  $s$  y  $t$  se verifica de forma evidente.

(b) Veamos que (1.26) se verifica ((1.27) se demostraría de forma análoga). Para ello veamos que basta tomar

$$\hat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) = \frac{x}{\xi} B_1(s, \tau, \xi).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \hat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\substack{|x_2 - x| \leq \varepsilon \\ |\xi_2 - \xi| \leq \varepsilon}} (x_2 - x) \\ &\quad \cdot (\xi_2 - \xi) g(x_2, (s + h, t) / (x, \xi, \xi_2), (s, \tau)) g_\tau(\xi_2, s + h/\xi, s) dx_2 d\xi_2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando (2.12) donde, para simplificar la notación hemos notado

$$\begin{aligned} m &\equiv m(z, h, k), \\ \sigma &\equiv \sigma(z, h, k), \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\substack{|x_2 - x| \leq \varepsilon \\ |\xi_2 - \xi| \leq \varepsilon}} (x_2 - x) (\xi_2 - \xi) g(x_2, (s + h, t) / (x, \xi, \xi_2), (s, \tau)) g_\tau(\xi_2, s + h/\xi, s) dx_2 d\xi_2 \\ &= \int_{|\xi_2 - \xi| \leq \varepsilon} (\xi_2 - \xi) g_\tau(\xi_2, s + h/\xi, s) d\xi_2 \\ &\quad \cdot \left( \int_{|x_2 - x| \leq \varepsilon} (x_2 - x) \frac{1}{x_2 \sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log \left( \frac{x_2 \xi}{x \xi_2} \right) - m}{\sigma} \right)^2 \right\} dx_2 \right). \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable

$$u = \frac{\log \left( \frac{x_2 \xi}{x \xi_2} \right) - m}{\sigma},$$

y llamando

$$u_1 = \frac{\log \left( \left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right) \frac{\xi}{\xi_2} \right) - m}{\sigma}, \quad u_2 = \frac{\log \left( \left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right) \frac{\xi}{\xi_2} \right) - m}{\sigma},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
& \int_{|x_2-x|\leq\varepsilon} (x_2-x) \frac{1}{x_2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{x_2\xi}{x\xi_2}\right)-m}{\sigma}\right)^2\right\} dx_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_1}^{u_2} x \left(\frac{\xi_2 e^{u\sigma+m}}{\xi} - 1\right) e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\
&= x \left[ \left(\frac{\xi_2}{\xi} \frac{e^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_1}^{u_2} e^{u\sigma-\frac{1}{2}u^2} du\right) - (\Phi(u_2) - \Phi(u_1)) \right].
\end{aligned}$$

Expresando

$$\sigma u - \frac{1}{2}u^2 = -\frac{1}{2}(u-\sigma)^2 + \frac{\sigma^2}{2},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
& \int_{|x_2-x|\leq\varepsilon} (x_2-x) \frac{1}{x_2\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{x_2\xi}{x\xi_2}\right)-m}{\sigma}\right)^2\right\} dx_2 \\
&= x \left[ \left(\frac{\xi_2}{\xi} e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \{\Phi(u_2-\sigma) - \Phi(u_1-\sigma)\}\right) - (\Phi(u_2) - \Phi(u_1)) \right].
\end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo en (2.25) tenemos

$$\begin{aligned}
\hat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|\xi_2-\xi|\leq\varepsilon} x \left[ \left(\frac{\xi_2}{\xi} e^{m+\frac{\sigma^2}{2}} \{\Phi(u_2-\sigma) - \Phi(u_1-\sigma)\}\right) \right. \\
&\quad \left. - (\Phi(u_2) - \Phi(u_1)) \right] (\xi_2 - \xi) g_\tau(\xi_2, s + h/\xi, s) d\xi_2. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Usando que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} u_1 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right) \frac{\xi}{\xi_2}\right) - m}{\sigma} = -\infty, \\
\lim_{h \rightarrow 0} u_2 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\left(1 + \frac{\varepsilon}{x}\right) \frac{\xi}{\xi_2}\right) - m}{\sigma} = +\infty,
\end{aligned}$$

se comprueba que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(u_1) &= 0, & \lim_{h \rightarrow 0} \Phi(u_1 - \sigma) &= 0, \\
\lim_{h \rightarrow 0} \Phi(u_2) &= 1, & \lim_{h \rightarrow 0} \Phi(u_2 - \sigma) &= 1,
\end{aligned}$$

por lo que tomando límite en (2.26)

$$\begin{aligned}
 \hat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|\xi_2 - \xi| \leq \varepsilon} x \left[ \frac{\xi_2}{\xi} - 1 \right] (\xi_2 - \xi) g_\tau(\xi_2, s + h/\xi, s, ) d\xi_2 \\
 &= \frac{x}{\xi} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|\xi_2 - \xi| \leq \varepsilon} (\xi_2 - \xi)^2 g_\tau(\xi_2, s + h/\xi, s, ) d\xi_2 \\
 &= \frac{x}{\xi} B_1(s, \tau, \xi).
 \end{aligned}$$

De forma análoga se probaría que

$$\hat{B}_2(s, t, \sigma, x, \eta) = \frac{x}{\xi} B_2(\sigma, t, \eta).$$

(c) Finalmente es evidente que (1.28) se verifica:

$$\lim_{\substack{t \searrow \tau \\ x \rightarrow \xi}} \hat{B}_1(s, t, \tau, x, \xi) = B_1(s, \tau, \xi), \quad \lim_{\substack{s \searrow \sigma \\ x \rightarrow \eta}} \hat{B}_2(s, t, \sigma, x, \eta) = B_2(\sigma, t, \eta),$$

con lo que concluimos la demostración del lema. ■

Teniendo en cuenta el lema anterior, se verifican las hipótesis **I-V**, por lo que aplicando (1.29) y usando las expresiones de los coeficientes de difusión biparamétricos (véase (2.20)), se obtiene de forma inmediata la ecuación diferencial estocástica para un campo de difusión lognormal. La unicidad es consecuencia directa de que nuestro campo  $\{X(z); z \in I\}$ , sea una transformación biyectiva ( $X(z) = \exp Y(z)$ ) de un campo  $\{Y(z); z \in I\}$  gaussiano) que verifica una ecuación diferencial estocástica que tiene solución única (véase la demostración del *Teorema 4.3* de [14]).

**Proposición 2.7** *Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de difusión positivo, verificando (2.1) con coeficientes de difusión uniparamétricos  $a_1, a_2, B_1$  y  $B_2$  dados en (2.2), funciones de clase  $C^1$  respecto a  $s$  y  $t$ . Entonces existe un campo de Wiener  $\{W(z); z \in I\}$  (salvo quizás, una modificación, si es necesario, del espacio de probabilidad) tal que  $\{X(z); z \in I\}$  el*

único campo de difusión que verifica la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$\frac{\partial^2 X_{st}}{\partial s \partial t} - X^{-1}(z) \frac{\partial X_{st}}{\partial s} \frac{\partial X_{st}}{\partial t} - \frac{\partial a_2(s, t)}{\partial s} X_{st} = \left( \frac{\partial B_2(s, t)}{\partial s} + B_1(s, t) B_2(s, t) \right)^{1/2} X_{st} \frac{\partial^2 W_{st}}{\partial s \partial t}.$$

## Capítulo 3

# Ecuaciones de Difusión

### 3.1 Introducción

La ecuación de Chapman-Kolmogorov puede verse como una ecuación de compatibilidad que verifica la densidad de transición de cualquier proceso de Markov, aunque no es suficiente para determinar la densidad de transición del proceso. Necesitamos otras hipótesis, además de que el proceso sea de Markov para obtener una versión diferencial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, que junto con una condición inicial, nos permita obtener la densidad de transición del proceso. En concreto, necesitamos tener un proceso de difusión para obtener unas ecuaciones diferenciales conocidas como *ecuaciones de difusión* o *ecuaciones de Kolmogorov*. La obtención de estas ecuaciones, en el caso uniparamétrico, puede consultarse en la gran mayoría de textos que incluyan un capítulo dedicado al estudio de los procesos de difusión (Karlin [17], Wong [31], Bhattacharya [2], Gikhman y Skorokhod [12],...). Destacamos el desarrollo que Ricciardi [23] siguió para obtenerlas, puesto que esta metodología es la que nos permitirá a lo largo de este capítulo obtener estas ecuaciones para un campo de difusión lognormal biparamétrico.

De acuerdo con la metodología de Ricciardi, las ecuaciones de difusión se obtienen como casos particulares de unas ecuaciones diferenciales conocidas como *ecuaciones cinéticas*, ecuaciones que se obtienen bajo la hipótesis de que el proceso es de Markov y en las

que aparecen ciertos momentos infinitesimales de cualquier orden. Esto último hace que el orden de la ecuación diferencial sea arbitrariamente grande y que, por tanto, estas ecuaciones tengan poca utilidad. Sin embargo, en el caso uniparamétrico, el resultado de Pawula permite afirmar que si todos los momentos infinitesimales existen y alguno de orden superior a dos y par es nulo, entonces las ecuaciones cinéticas a lo sumo son de orden dos. Estas ecuaciones que a lo sumo son de orden dos se conocen como ecuaciones de difusión del proceso. Los procesos de difusión lognormales que surgen al fijar cada coordenada de un campo de difusión lognormal biparamétrico, verifican esta propiedad y aplicando el resultado de Pawula y la metodología de Ricciardi, se pueden obtener fácilmente las ecuaciones de difusión de tales procesos.

La densidad de transición de un proceso de difusión verifica dos *ecuaciones de Kolmogorov*. La primera se conoce como *ecuación adelantada* ya que las variables iniciales son fijas y la segunda como *ecuación atrasada* ya que las variables finales son las que se fijan. La ecuación adelantada también se conoce como *ecuación de Fokker-Planck*. Estas ecuaciones se utilizan en circunstancias adecuadas. Si estamos interesados en obtener la densidad de transición del proceso, entonces la forma adecuada es usando la ecuación adelantada. Pero si estamos interesados en estudiar tiempos de primer paso por un estado, entonces la ecuación atrasada da el método apropiado. Para resolverlas, es necesario conocer los coeficientes de difusión, por lo que parece que hace falta la densidad de transición del proceso. Sin embargo, este no es el caso ya que para conocerlos sólo necesitamos tener la media y la fluctuación del campo en torno a esa media en un intervalo suficientemente pequeño. En otros casos, estas ecuaciones surgen directamente como límite de ecuaciones en diferencias. Comentar también, que la solución de estas ecuaciones depende de las condiciones iniciales y de frontera. Estas condiciones dependerán de si estamos considerando un proceso no restringido o un proceso restringido por fronteras tales como barreras absorbentes o reflejantes.

En este capítulo, vamos a obtener las ecuaciones de difusión para un campo lognormal como aplicación directa de la metodología de Ricciardi. En primer lugar obtendremos una

---

ecuación en la cual nos aparecieran unos coeficientes que hacen que el orden de la ecuación diferencial sea arbitrariamente grande. Sin embargo, es posible probar que la mayoría de estos coeficientes se anulan y que tanto la ecuación adelantada como la atrasada a lo sumo serán de orden cuatro. Estas ecuaciones que a lo sumo son de orden cuatro, son las ecuaciones de difusión del campo lognormal biparamétrico, las cuales podrían utilizarse en investigaciones futuras para realizar estudios similares a los que hacen en el caso uniparamétrico.

El desarrollo de este capítulo será el siguiente. En la segunda sección obtendremos la ecuación adelantada y en la tercera la ecuación atrasada, aplicando en ambos casos la metodología de Ricciardi.

Finalmente, comentar que con el programa *Mathematica* se ha comprobado que efectivamente, la densidad de transición del campo lognormal verifica las ecuaciones de difusión obtenidas.

## 3.2 Ecuación de Kolmogorov para el Campo de Difusión Lognormal (Método de Ricciardi)

Ricciardi obtuvo directamente las ecuaciones adelantada y atrasada de Kolmogorov que la densidad de transición de un proceso de difusión uniparamétrico verifica (véase [23]). Siguiendo esta metodología, en esta sección vamos a obtener la ecuación adelantada de Kolmogorov que la densidad de transición de un campo de difusión lognormal biparamétrico verifica. Comentar que la expresión a la que llegaremos es la misma que se obtendría por el resultado de Nualart y Sanz (véase el *Teorema 2.1* [20]).

**Teorema 3.1** *Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de Markov biparamétrico positivo donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$ . Supongamos que la densidad de transición del campo  $g(y, z/\bar{x}, z_0)$ , donde  $\bar{x} = (x_1, x, x_2)$ , está dada por (2.12) donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son funciones continuas en  $I$  y conocidas. Entonces,  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión*



lognormal biparamétrico donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son los coeficientes de difusión del campo gaussiano asociado, los coeficientes de difusión uniparamétricos del campo lognormal son:

$$\begin{aligned} a_1(z, x) &\equiv a_1(z) x = \left( \bar{a}_1(z) + \frac{1}{2} \bar{B}_1(z) \right) x, & B_1(z, x) &\equiv B_1(z) x^2 = \bar{B}_1(z) x^2, \\ a_2(z, x) &\equiv a_2(z) x = \left( \bar{a}_2(z) + \frac{1}{2} \bar{B}_2(z) \right) x, & B_2(z, x) &\equiv B_2(z) x^2 = \bar{B}_2(z) x^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(s, t) &= \int_0^t \bar{a}(s, \tau) d\tau, & \bar{B}_1(s, t) &= \int_0^t \bar{B}(s, \tau) d\tau, \\ \bar{a}_2(s, t) &= \int_0^s \bar{a}(\sigma, t) d\sigma, & \bar{B}_2(s, t) &= \int_0^s \bar{B}(\sigma, t) d\sigma, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $z = (s, t) \in I$ ,  $x \in \mathbf{R}_+$  y la densidad de transición del campo verifica la siguiente ecuación adelantada de Kolmogorov:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} = \mu_1(z) \frac{\partial (yg)}{\partial y} + \mu_2(z) \frac{\partial^2 (y^2 g)}{\partial y^2} + \mu_3(z) \frac{\partial^3 (y^3 g)}{\partial y^3} + \mu_4(z) \frac{\partial^4 (y^4 g)}{\partial y^4}, \quad (3.1)$$

donde hemos notado

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= -\frac{\partial a_1(z)}{\partial t} - a_1(z) a_2(z), \\ \mu_2(z) &= a_1(z) a_2(z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_1(z)}{\partial t} + B_1(z) B_2(z) \right) + a_1(z) B_2(z) + B_1(z) a_2(z), \\ \mu_3(z) &= -\frac{1}{2} a_1(z) B_2(z) - \frac{1}{2} B_1(z) a_2(z) - B_1(z) B_2(z), \\ \mu_4(z) &= \frac{1}{4} B_1(z) B_2(z). \end{aligned}$$

**Demostración.** La obtención de la ecuación adelantada la vamos a desarrollar en cinco partes para facilitar su comprensión. El resto de las afirmaciones son inmediatas a partir de las caracterizaciones que hicimos para los campos de difusión lognormal y gaussiano.

Si tomamos  $z_0 = (s, t)$  y  $z = (s+h, t+k)$ , y notamos  $\bar{x} = (x_1, x, x_2)$ , la densidad de transición del campo está dada por:

$$g(y, z/\bar{x}, z_0) = \frac{1}{y \sqrt{2\pi \sigma^2(z, z_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log \left( \frac{yx}{x_1 x_2} \right) - m(z, z_0)}{\sigma(z, z_0)} \right)^2 \right\}$$

(véase (2.12)), donde

$$m(z, z_0) = \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad \sigma^2(z, z_0) = \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.$$

1.- Empezamos considerando la definición de  $\frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t}$ .

Tal y como está definida  $g(y, z/\bar{x}, z_0)$ , claramente  $\frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t}$  existe y por definición

$$\frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{hk}(g(y, z/\bar{x}, z_0))}{hk} \quad (3.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{hk}(g(y, z/\bar{x}, z_0)) &= g(y, z'/\bar{x}, z_0) - g(y, (s+h, t)/\bar{x}, z_0) \\ &\quad - g(y, (s, t+k)/\bar{x}, z_0) + g(y, z/\bar{x}, z_0). \end{aligned} \quad (3.3)$$

2.- Sea  $R(\cdot)$  una función  $C^\infty$  con soporte compacto. Multiplicando a ambos lados de la igualdad (3.2) por  $R(y)$  e integrando con respecto a la variable  $y$  tenemos que

$$\int_{\mathbf{R}_+} R(y) \frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t} dy = \lim_{h, k \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}_+} R(y) \frac{\Delta_{hk}(g(y, z/\bar{x}, z_0))}{hk} dy. \quad (3.4)$$

3.- Definimos la función

$$\varphi(z) = E [R(X(z)) / \bar{X}(z_0, z) = \bar{x}] = \int_{\mathbf{R}_+} R(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy.$$

Entonces, sustituyendo en (3.4)

$$\int_{\mathbf{R}_+} R(y) \frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t} dy = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} [\varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z)]. \quad (3.5)$$

A continuación, vamos a calcular  $\varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z)$  utilizando en primer lugar la definición de  $\varphi(\cdot)$  y después las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov.

Tal y como hemos definido  $\varphi(\cdot)$

$$\begin{aligned} \varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z) &= E [R(X(z')) / \bar{X}(z_0, z') = \bar{x}] \\ &\quad - E [R(X(s+h, t)) / \bar{X}(z_0, (s+h, t)) = \bar{x}] \\ &\quad - E [R(X(s, t+k)) / \bar{X}(z_0, (s, t+k)) = \bar{x}] \\ &\quad + E [R(X(s, t)) / \bar{X}(z_0, z) = \bar{x}], \end{aligned}$$

donde hemos notado

$$\begin{aligned}\bar{X}(z_0, z') &\equiv (X(s_0, t+k), X(s_0, t_0), X(s+h, t_0)), \\ \bar{X}(z_0, (s+h, t)) &\equiv (X(s_0, t), X(s_0, t_0), X(s+h, t_0)), \\ \bar{X}(z_0, (s, t+k)) &\equiv (X(s_0, t+k), X(s_0, t_0), X(s, t_0)), \\ \bar{X}(z_0, (s, t)) &\equiv (X(s_0, t), X(s_0, t_0), X(s, t_0)), \\ \bar{x} &\equiv (x_1, x, x_2).\end{aligned}$$

Equivalentemente, podemos expresar

$$\begin{aligned}\varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z) &= \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} R(y') g(y', z'/\bar{x}, z_0) dy' - \int_{\mathbf{R}_+} R(y_2) g(y_2, (s+h, t)/\bar{x}, z_0) dy_2 \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}_+} R(y_1) g(y_1, (s, t+k)/\bar{x}, z_0) dy_1 + \int_{\mathbf{R}_+} R(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy\end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov (1.3), (1.4) y (1.5) tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z) &= \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} R(y') \left[ \iiint_{\mathbf{R}_+^3} g(y', z'/(y_1, y, y_2), z) g(y_2, (s+h, t)/(y, x_2, x_2), (s, t_0)) \right. \\ &\quad \left. \cdot g(y_1, (s, t+k)/(x_1, x_1, y), (s_0, t)) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy_2 dy_1 dy \right] dy' \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}_+} R(y_2) \left[ \int_{\mathbf{R}_+} g(y_2, (s+h, t)/(y, x_2, x_2), (s, t_0)) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy \right] dy_2 \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}_+} R(y_1) \left[ \int_{\mathbf{R}_+} g(y_1, (s, t+k)/(x_1, x_1, y), (s_0, t)) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy \right] dy_1 \\ &\quad + \int_{\mathbf{R}_+} R(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy.\end{aligned}\tag{3.6}$$

**4.-** En este apartado usando la expresión anterior del incremento  $\varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z)$ , el desarrollo en serie de Taylor de la función  $R(\cdot)$  y el desarrollo de Newton de un binomio, junto con algunos cálculos que a continuación se detallan, vamos a obtener una expresión general de la ecuación adelantada (*ecuación cinética adelantada*) en la cual sólo quedan por calcular los coeficientes de dicha ecuación. Estos coeficientes los calcularemos en **5.-**.

$R(\cdot)$  es una función  $C^\infty$ . Su desarrollo en serie de Taylor es

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} R^{(n)}(y) \frac{(x-y)^n}{n!} = R(y) + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(y) \frac{(x-y)^n}{n!}.$$

Aplicando este desarrollo a las situaciones concretas que necesitamos y sustituyendo en (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} & \varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z) = \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} \left[ \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left( R(y) + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(y) \frac{(y'-y)^n}{n!} \right) g(y', z' / (y_1, y, y_2), z) \right. \\ & \quad \cdot g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) \\ & \quad \cdot g(y, z/\bar{x}, z_0) dy_2 dy_1 dy' \\ & \quad - \iint_{\mathbf{R}_+^2} \left( R(y) + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(y) \frac{(y_2-y)^n}{n!} \right) \\ & \quad \cdot g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy dy_2 \\ & \quad - \iint_{\mathbf{R}_+^2} \left( R(y) + \sum_{n=1}^{\infty} R^{(n)}(y) \frac{(y_1-y)^n}{n!} \right) \\ & \quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy dy_1 \\ & \quad \left. + \int_{\mathbf{R}_+} R(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_+} \left[ \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \frac{(y'-y)^n}{n!} g(y', z' / (y_1, y, y_2), z) \right. \\ & \quad \cdot g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\ & \quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 dy' \\ & \quad - \int_{\mathbf{R}_+} \frac{(y_2-y)^n}{n!} g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) dy_2 \\ & \quad \left. - \int_{\mathbf{R}_+} \frac{(y_1-y)^n}{n!} g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_1 \right] R^{(n)}(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy, \end{aligned} \tag{3.7}$$

donde para simplificar el término  $\int_{\mathbf{R}_+} R(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy$  hemos utilizado que tanto  $g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0))$  como  $g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t))$  son funciones

de densidad. Por otro lado, el desarrollo de Newton de un binomio es

$$\frac{(x-y)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (-y)^{n-i} = (-y)^n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left(\frac{x}{y}\right)^i,$$

que aplicado a las tres situaciones que tenemos en (3.7) nos permite afirmar que

$$\begin{aligned} & \varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_+} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[ \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left(\frac{y'}{y}\right)^i g(y', z' / (y_1, y, y_2), z) \right. \\ & \quad \cdot g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\ & \quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 dy' \\ & \quad - \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_2}{y}\right)^i g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) dy_2 \\ & \quad \left. - \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_1}{y}\right)^i g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_1 \right] \\ & \cdot (-y)^n R^{(n)}(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy. \end{aligned}$$

Si notamos

$$\begin{aligned} \mu_n^{h,k}(z) & = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[ \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left(\frac{y'}{y}\right)^i g(y', z' / (y_1, y, y_2), z) \right. \\ & \quad \cdot g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\ & \quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 dy' \\ & \quad - \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_2}{y}\right)^i g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) dy_2 \\ & \quad \left. - \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_1}{y}\right)^i g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_1 \right], \quad (3.8) \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} & \varphi(z') - \varphi(s+h, t) - \varphi(s, t+k) + \varphi(z) \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}_+} \mu_n^{h,k}(z) (-y)^n R^{(n)}(y) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy, \quad (3.9) \end{aligned}$$

y por tanto, sustituyendo (3.9) en (3.5) obtenemos que

$$\int_{\mathbf{R}_+} R(y) \frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t} dy = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{\mathbf{R}_+} R^{(n)}(y) y^n \mu_n(z) g(y, z/\bar{x}, z_0) dy, \quad (3.10)$$

donde hemos notado

$$\mu_n(z) = \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{\mu_n^{h,k}(z)}{hk}. \quad (3.11)$$

Integrando por partes en el lado derecho de la igualdad (3.10) y utilizando que  $R^{(k)}(\pm\infty) = 0$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}_+} R(y) \frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t} dy &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( (-1)^n \int_{\mathbf{R}_+} R(y) \mu_n(z) \frac{\partial^n (y^n g(y, z/\bar{x}, z_0))}{\partial y^n} \right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} R(y) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z) \frac{\partial^n (y^n g(y, z/\bar{x}, z_0))}{\partial y^n} \right) dy. \end{aligned}$$

Como  $R(\cdot)$  es una función arbitraria, finalmente obtenemos

$$\frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s \partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z) \frac{\partial^n (y^n g(y, z/\bar{x}, z_0))}{\partial y^n}. \quad (3.12)$$

5.- En este apartado vamos calcular los valores de  $\mu_n(z)$  utilizando la expresión (2.22), que dimos para el cálculo de los momentos condicionados.

Empezamos sustituyendo (3.8) en (3.11)

$$\begin{aligned} \mu_n(z) &= \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[ \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left( \frac{y'}{y} \right)^i g(y', z'/(y_1, y, y_2), z) \right. \\ &\quad \cdot g(y_2, (s+h, t)/(y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\ &\quad \cdot g(y_1, (s, t+k)/(x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 dy' \\ &\quad - \int_{\mathbf{R}_+} \left( \frac{y_2}{y} \right)^i g(y_2, (s+h, t)/(y, x_2, x_2), (s, t_0)) dy_2 \\ &\quad \left. - \int_{\mathbf{R}_+} \left( \frac{y_1}{y} \right)^i g(y_1, (s, t+k)/(x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_1 \right] \\ &= \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} [A - B - C]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para calcular  $A$ , primero usaremos la definición de esperanza condicionada y después (2.22)

$$\begin{aligned}
A &= \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left(\frac{y'}{y}\right)^i g(y', z' / (y_1, y, y_2), z) g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\
&\quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 dy' \\
&= \iint_{\mathbf{R}_+^2} \frac{1}{y^i} E \left[ (X(z'))^i / X(s, t+k) = y_1, X(s, t) = y, X(s+h, t) = y_2 \right] \\
&\quad \cdot g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\
&\quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 \\
&= \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&\quad \cdot \iint_{\mathbf{R}_+^2} \left(\frac{y_1}{y}\right)^i \left(\frac{y_2}{y}\right)^i g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) \\
&\quad \cdot g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_2 dy_1 \\
&= \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&\quad \cdot \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_2}{y}\right)^i g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) dy_2 \\
&\quad \cdot \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_1}{y}\right)^i g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_1 \\
&= \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \cdot B \cdot C, \tag{3.14}
\end{aligned}$$

por lo que, para calcular  $A$  es preciso calcular previamente  $B$  y  $C$ . Usando en primer lugar la definición de esperanza condicionada y después (2.22)

$$\begin{aligned}
B &= \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{y_2}{y}\right)^i g(y_2, (s+h, t) / (y, x_2, x_2), (s, t_0)) dy_2 \\
&= \frac{1}{y^i} E \left[ (X(s+h, t))^i / X(s, t) = y, X(s, t_0) = x_2, X(s+h, t_0) = x_2 \right] \\
&= \frac{1}{y^i} \cdot \frac{y^i x_2^i}{x_2^i} \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_{t_0}^t \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&= \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_{t_0}^t \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Calculando  $C$  de forma análoga a  $B$ ,

$$\begin{aligned}
 C &= \int_{\mathbf{R}_+} \left( \frac{y_1}{y} \right)^i g(y_1, (s, t+k) / (x_1, x_1, y), (s_0, t)) dy_1 \\
 &= \frac{1}{y^i} E \left[ (X(s, t+k))^i / X(s_0, t+k) = x_1, X(s_0, t) = x_1, X(s, t) = y \right] \\
 &= \frac{1}{y^i} \cdot \frac{x_1^i y^i}{x_1^i} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
 &= \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.14), (3.15), y (3.16) en (3.13) obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mu_n(z) &= \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[ \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \right. \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_{t_0}^t \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
 &\quad \cdot \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
 &\quad - \exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_{t_0}^t \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
 &\quad \left. - \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \right]. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, podemos expresar

$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\tau &= \bar{a}_1(\sigma, t) - \bar{a}_1(\sigma, t_0), \\
 \int_{t_0}^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\tau &= \bar{B}_1(\sigma, t) - \bar{B}_1(\sigma, t_0), \\
 \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma &= \bar{a}_2(s, \tau) - \bar{a}_2(s_0, \tau), \\
 \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma &= \bar{B}_2(s, \tau) - \bar{B}_2(s_0, \tau).
 \end{aligned}$$



Puesto que  $X(s, \tau)$  es constantemente igual a  $x_1$  cuando  $\tau \in [t, t+k]$  y  $X(\sigma, t)$  es constantemente igual a  $x_2$  cuando  $\sigma \in [s, s+h]$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1(\sigma, t_0) = 0 \\ \bar{B}_1(\sigma, t_0) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ cuando } \sigma \in [s, s+h],$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_2(s_0, \tau) = 0 \\ \bar{B}_2(s_0, \tau) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ cuando } \tau \in [t, t+k],$$

y entonces

$$\int_s^{s+h} \int_{t_0}^t \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau = \int_s^{s+h} \left( i\bar{a}_1(\sigma, t) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(\sigma, t) \right) d\sigma,$$

$$\int_{s_0}^s \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau = \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}_2(s, \tau) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(s, \tau) \right) d\tau.$$

Por el desarrollo en serie de Taylor,

$$\exp \left\{ \int_s^{s+h} \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} = 1 + \left( i\bar{a}(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(z) \right) hk + o(hk),$$

$$\exp \left\{ \int_s^{s+h} \left( i\bar{a}_1(\sigma, t) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(\sigma, t) \right) d\sigma \right\} = 1 + \left( i\bar{a}_1(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(z) \right) h + o(h),$$

$$\exp \left\{ \int_t^{t+k} \left( i\bar{a}_2(s, \tau) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(s, \tau) \right) d\tau \right\} = 1 + \left( i\bar{a}_2(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(z) \right) k + o(k)$$

y sustituyendo estas tres expresiones en (3.17)

$$\begin{aligned} \mu_n(z) &= \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left\{ \left[ 1 + \left( i\bar{a}(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(z) \right) hk + o(hk) \right] \right. \\ &\quad \cdot \left[ 1 + \left( i\bar{a}_1(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(z) \right) h + o(h) \right] \left[ 1 + \left( i\bar{a}_2(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(z) \right) k + o(k) \right] \\ &\quad \left. - \left[ 1 + \left( i\bar{a}_1(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(z) \right) h + o(h) \right] - \left[ 1 + \left( i\bar{a}_2(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(z) \right) k + o(k) \right] \right\} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \lim_{h,k \rightarrow 0} \frac{1}{hk} \left\{ -1 + \left[ \left( i\bar{a}(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(z) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left( i\bar{a}_1(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(z) \right) \left( i\bar{a}_2(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(z) \right) \right] hk + o(hk) \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Utilizando que

$$-\sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} = \frac{-1}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i 1^{n-i} = \frac{-1}{n!} (-1+1)^n = 0$$

y tomando límite en (3.18),

$$\begin{aligned}\mu_n(z) &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!(n-i)!} \left[ i\bar{a}(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}(z) + \left( i\bar{a}_1(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_1(z) \right) \left( i\bar{a}_2(z) + \frac{i^2}{2}\bar{B}_2(z) \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{(i-1)!(n-i)!} \left[ a(z) - a_1(z)a_2(z) + \frac{i-1}{2} (B(z) - B_1(z)B_2(z)) \right. \\ &\quad \left. + i \left( a_1(z) + \frac{i-1}{2}B_1(z) \right) \left( a_2(z) + \frac{i-1}{2}B_2(z) \right) \right],\end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos simplificado un  $i$  y sustituido el valor de  $\bar{a}_1(s, t)$ ,  $\bar{a}_2(s, t)$ ,  $\bar{B}_1(s, t)$  y  $\bar{B}_2(s, t)$ , que dimos en (2.5) y el valor de  $\bar{a}(s, t)$  y  $\bar{B}(s, t)$ , que dimos en (2.21). Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}\mu_1(z) &= \sum_{i=1}^1 \frac{(-1)^i}{(i-1)!(1-i)!} \left[ a(z) - a_1(z)a_2(z) + \frac{i-1}{2} (B(z) - B_1(z)B_2(z)) \right. \\ &\quad \left. + i \left( a_1(z) + \frac{i-1}{2}B_1(z) \right) \left( a_2(z) + \frac{i-1}{2}B_2(z) \right) \right] \\ &= -a(z) = -\frac{\partial a_1(z)}{\partial t} - a_1(z)a_2(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2(z) &= \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{(i-1)!(2-i)!} \left[ a(z) - a_1(z)a_2(z) + \frac{i-1}{2} (B(z) - B_1(z)B_2(z)) \right. \\ &\quad \left. + i \left( a_1(z) + \frac{i-1}{2}B_1(z) \right) \left( a_2(z) + \frac{i-1}{2}B_2(z) \right) \right] \\ &= a_1(z)a_2(z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_1(z)}{\partial t} + B_1(z)B_2(z) \right) + a_1(z)B_2(z) \\ &\quad + B_1(z)a_2(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_3(z) &= \sum_{i=1}^3 \frac{(-1)^i}{(i-1)!(3-i)!} \left[ a(z) - a_1(z)a_2(z) + \frac{i-1}{2} (B(z) - B_1(z)B_2(z)) \right. \\ &\quad \left. + i \left( a_1(z) + \frac{i-1}{2}B_1(z) \right) \left( a_2(z) + \frac{i-1}{2}B_2(z) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2}a_1(z)B_2(z) - \frac{1}{2}B_1(z)a_2(z) - B_1(z)B_2(z),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4(z) &= \sum_{i=1}^4 \frac{(-1)^i}{(i-1)!(4-i)!} \left[ a(z) - a_1(z)a_2(z) + \frac{i-1}{2} (B(z) - B_1(z)B_2(z)) \right. \\
&\quad \left. + i \left( a_1(z) + \frac{i-1}{2} B_1(z) \right) \left( a_2(z) + \frac{i-1}{2} B_2(z) \right) \right] \\
&= \frac{1}{4} B_1(z) B_2(z).
\end{aligned}$$

Por último veamos que para  $n \geq 5$  entonces  $\mu_n(z) = 0$ . Para ello basta ver que si  $n \geq 5$

$$\begin{aligned}
\text{i)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{(i-1)!(n-i)!} &= 0, & \text{ii)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i i}{(i-1)!(n-i)!} &= 0, \\
\text{iii)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i i(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} &= 0, & \text{vi)} \quad \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i i(i-1)(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} &= 0.
\end{aligned}$$

i) Hacemos el cambio de índice  $j = i - 1 : 0, \dots, n - 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{(i-1)!(n-i)!} &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j!(n-(j+1))!} = (-1) \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!((n-1)-j)!} \\
&= \frac{(-1)}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j 1^{n-1-j} \\
&= \frac{(-1)}{(n-1)!} (-1+1)^{n-1} = 0, \quad \text{si } n \geq 2,
\end{aligned}$$

condición que se verifica pues nuestra hipótesis es que  $n \geq 5$ .

ii) Usando el apartado anterior y haciendo el cambio de índice  $j = i - 2 : 0, \dots, n - 2$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i i}{(i-1)!(n-i)!} &= \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i (i-1+1)}{(i-1)!(n-i)!} = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i (i-1)}{(i-1)!(n-i)!} + 0 \\
&= 0 + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i (i-1)}{(i-1)!(n-i)!} = \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{(i-2)!(n-i)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^{j+2}}{j!(n-(j+2))!} = \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^j}{j!((n-2)-j)!} \\
&= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (-1)^j 1^{n-2-j} \\
&= \frac{1}{(n-2)!} (-1+1)^{n-2} = 0, \quad \text{si } n \geq 3,
\end{aligned}$$

condición que se verifica pues  $n \geq 5$ .

iii) Usando los apartados anteriores y haciendo los cambios de índice que a continuación aparecen

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i i(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} &= 0 + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} \\
 &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i}{(i-2)!(n-i)!} = \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i (i-2+2)}{(i-2)!(n-i)!} \\
 &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i (i-2)}{(i-2)!(n-i)!} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{(i-2)!(n-i)!} \\
 &= \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{(i-3)!(n-i)!} + 2 \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i}{(i-2)!(n-i)!} \\
 &= \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(-1)^{j+3}}{j!(n-(j+3))!} + 2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(-1)^{j+2}}{j!(n-(j+2))!} \\
 &= \frac{-1}{(n-3)!} \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-3}{j} (-1)^j 1^{n-3-j} \\
 &\quad + \frac{2}{(n-2)!} \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (-1)^j 1^{n-2-j} \\
 &= \frac{-1}{(n-3)!} (-1+1)^{n-3} + \frac{2}{(n-2)!} (-1+1)^{n-2} = 0, \quad \text{si } n \geq 4,
 \end{aligned}$$

condición que se verifica puesto que  $n \geq 5$ .

vi) Utilizando los apartados anteriores y haciendo los cambios de índice que a continuación aparecen

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i i(i-1)(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} &= 0 + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i(i-1)(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} \\
 &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i(i-1)}{(i-2)!(n-i)!} = \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i(i-2+1)}{(i-2)!(n-i)!} \\
 &= \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i(i-2)}{(i-2)!(n-i)!} + \sum_{i=2}^n \frac{(-1)^i i}{(i-2)!(n-i)!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i i (i-2)}{(i-2)! (n-i)!} + 0 = \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i i}{(i-3)! (n-i)!} \\
&= \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i (i-3+3)}{(i-3)! (n-i)!} \\
&= \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i (i-3)}{(i-3)! (n-i)!} + 3 \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{(i-3)! (n-i)!} \\
&= \sum_{i=4}^n \frac{(-1)^i}{(i-4)! (n-i)!} + 3 \sum_{i=3}^n \frac{(-1)^i}{(i-3)! (n-i)!} \\
&= \sum_{j=0}^{n-4} \frac{(-1)^{j+4}}{j! (n-(j+4))!} + 3 \sum_{j=0}^{n-3} \frac{(-1)^{j+3}}{j! (n-(j+3))!} \\
&= \frac{1}{(n-4)!} \sum_{j=0}^{n-4} \binom{n-4}{j} (-1)^j 1^{n-4-j} \\
&\quad - 3 \frac{1}{(n-3)!} \sum_{j=0}^{n-3} \binom{n-3}{j} (-1)^j 1^{n-3-j} \\
&= \frac{1}{(n-4)!} (-1+1)^{n-4} - 3 \frac{1}{(n-3)!} (-1+1)^{n-3} = 0, \quad \text{si } n \geq 5,
\end{aligned}$$

condición que se verifica puesto que es nuestra hipótesis.

Por tanto, la ecuación (3.12), queda

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} = \mu_1(z) \frac{\partial (yg)}{\partial y} + \mu_2(z) \frac{\partial^2 (y^2 g)}{\partial y^2} + \mu_3(z) \frac{\partial^3 (y^3 g)}{\partial y^3} + \mu_4(z) \frac{\partial^4 (y^4 g)}{\partial y^4},$$

donde

$$\begin{aligned}
\mu_1(z) &= -\frac{\partial a_1(z)}{\partial t} - a_1(z) a_2(z), \\
\mu_2(z) &= a_1(z) a_2(z) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial B_1(z)}{\partial t} + B_1(z) B_2(z) \right) + a_1(z) B_2(z) + B_1(z) a_2(z), \\
\mu_3(z) &= -\frac{1}{2} a_1(z) B_2(z) - \frac{1}{2} B_1(z) a_2(z) - B_1(z) B_2(z), \\
\mu_4(z) &= \frac{1}{4} B_1(z) B_2(z),
\end{aligned}$$

con lo que concluimos la demostración del teorema. ■

### 3.3 Ecuación Atrasada de Kolmogorov para el Campo de Difusión Lognormal (Método de Ricciardi)

Siguiendo la metodología de Ricciardi, también podemos obtener la ecuación atrasada de Kolmogorov que la densidad de transición de un campo de difusión lognormal bi-paramétrico verifica, como sigue.

**Teorema 3.2** *Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de Markov biparamétrico positivo donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$ . Supongamos que la densidad de transición del campo  $g(y, z/\bar{x}, z_0)$ , donde  $\bar{x} = (x_1, x_2)$  y  $z_0 = (s_0, t_0)$ , está dada por (2.12) donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son funciones continuas en  $I$  y conocidas. Entonces,  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión lognormal biparamétrico cuya la densidad de transición verifica la siguiente ecuación atrasada de Kolmogorov:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial s_0 \partial t_0} = & \lambda_1 \left\{ x \frac{\partial g}{\partial x} + x_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\} \\ & + \lambda_2 \left\{ x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + x_1^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} + 2xx_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x_1} + 2xx_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial x_2} \right\} \\ & + \lambda_3 x_1 x_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} + \lambda_4 x_1^2 x_2 \frac{\partial^3 g}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \lambda_5 x_1 x_2^2 \frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \lambda_6 x_1^2 x_2^2 \frac{\partial^4 g}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \end{aligned}$$

donde hemos notado

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \bar{a}(z_0) + \frac{1}{2} \bar{B}(z_0), & \lambda_2 &= \frac{1}{2} \bar{B}(z_0), \\ \lambda_3 &= \bar{B}(z_0) + \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) \\ &\quad \cdot \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right), \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right), \\ \lambda_5 &= \frac{1}{2} \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right), \\ \lambda_6 &= \frac{1}{4} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right), \end{aligned}$$

siendo  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  los coeficientes de difusión del campo de difusión gaussiano asociado.

**Demostración.** Vamos a dividir la demostración de la ecuación atrasada en varias partes para facilitar su comprensión. El resto de las afirmaciones son inmediatas a partir de las caracterizaciones que estudiamos en temas anteriores para los campos de difusión lognormal y gaussiano.

En las condiciones del teorema, los coeficientes de difusión uniparamétricos son:

$$\begin{aligned} a_1(z, x) &\equiv a_1(z) x = \left( \bar{a}_1(z) + \frac{1}{2} \bar{B}_1(z) \right) x, & B_1(z, x) &\equiv B_1(z) x^2 = \bar{B}_1(z) x^2, \\ a_2(z, x) &\equiv a_2(z) x = \left( \bar{a}_2(z) + \frac{1}{2} \bar{B}_2(z) \right) x, & B_2(z, x) &\equiv B_2(z) x^2 = \bar{B}_2(z) x^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(s, t) &= \int_0^t \bar{a}(s, \tau) d\tau, & \bar{B}_1(s, t) &= \int_0^t \bar{B}(s, \tau) d\tau, \\ \bar{a}_2(s, t) &= \int_0^s \bar{a}(\sigma, t) d\sigma, & \bar{B}_2(s, t) &= \int_0^s \bar{B}(\sigma, t) d\sigma, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $z = (s, t) \in I$ ,  $x \in \mathbf{R}_+$ . Si tomamos  $z = (s, t)$ ,  $z_0 = (s_0, t_0)$  ( $z \geq z_0$ ),  $\bar{x} = (x_1, x, x_2)$ , la densidad de transición del campo lognormal viene dada por:

$$g(y, z/\bar{x}, z_0) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi\sigma^2(z, z_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\log \left( \frac{yx}{x_1 x_2} \right) - m(z, z_0)}{\sigma(z, z_0)} \right)^2 \right\}$$

(véase (2.12)), donde

$$m(z, z_0) = \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad \sigma^2(z, z_0) = \int_{s_0}^s \int_{t_0}^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.$$

1.- Tal y como está definida  $g(y, z/\bar{x}, z_0)$ , claramente la  $\frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s_0 \partial t_0}$  existe y por definición

$$\frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s_0 \partial t_0} = \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{hk}(g(y, z/\bar{x}, z_0))}{hk}, \quad (3.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta_{hk}(g(y, z/\bar{x}, z_0)) &= g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0 - k)) - g(y, z/\bar{x}, (s_0, t_0 - k)) \\ &\quad - g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0)) + g(y, z/\bar{x}, z_0). \end{aligned} \quad (3.20)$$

**2.-** Vamos a aplicar las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov que dimos en el primer capítulo a las tres primeras densidades de transición que aparecen en el lado derecho de la expresión (3.20).

Aplicando (1.5) a  $g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0 - k))$  se tiene que, para cualesquiera valores  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0 - k)) &= \\ &= \iiint_{\mathbf{R}_+^3} g(y, z/(\xi_1, \xi, \xi_2), z_0) g(\xi_2, (s, t_0)/(\xi, \eta_2, x_2), (s_0, t_0 - k)) \\ &\quad \cdot g(\xi_2, (s_0, t)/(\eta_1, \eta_1, \xi), (s_0 - h, t_0)) \\ &\quad \cdot g(\xi, z_0/(\eta_1, x, \eta_2), (s_0 - h, t_0 - k)) d\xi_2 d\xi_1 d\xi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando (1.4) a  $g(y, z/\bar{x}, (s_0, t_0 - k))$  se tiene que, para cualquier valor  $u \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, (s_0, t_0 - k)) &= \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} g(y, z/(x_1, u, \xi_2), z_0) g(\xi_2, (s, t_0)/(u, x, x_2), (s_0, t_0 - k)) d\xi_2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Y finalmente aplicando (1.3) a  $g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0))$  se tiene que, para cualquier  $v \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0)) &= \\ &= \int_{\mathbf{R}_+} g(y, z/(\xi_1, v, x_2), z_0) g(\xi_1, (s_0, t)/(x_1, x, v), (s_0 - h, t_0)) d\xi_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

**3.-** En este apartado vamos a expresar en forma de sumatoria las densidades de transición que aparecen en el lado derecho de (3.20), utilizando el desarrollo en serie de Taylor y los resultados del apartado anterior. Una vez que calculemos estos cuatro términos, sustituiremos su valor en la expresión del incremento (3.20) y lo que resulte, en (4.1). Cada una de las densidades de transición las estudiaremos en un apartado distinto:

**i)** La densidad de transición  $g(y, z/(\xi_1, \xi, \xi_2), z_0)$  es de clase  $C^\infty$  respecto a  $\xi_1, \xi$  y  $\xi_2$  en el punto  $\bar{x} = (x_1, x, x_2)$ . Haciendo el desarrollo en serie de Taylor de dicha función en este punto, tenemos que

$$g(y, z/(\xi_1, \xi, \xi_2), z_0) = \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(\xi - x)^n (\xi_1 - x_1)^{n_1} (\xi_2 - x_2)^{n_2}}{n!n_1!n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \\
&\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \left(\frac{\xi}{x}\right)^l \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} \left(\frac{\xi_2}{x_2}\right)^{l_2} \quad (3.24)
\end{aligned}$$

donde para esta última expresión hemos tenido en cuenta el desarrollo de Newton de un binomio

$$(x-y)^n = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^l (-y)^{n-l} = (-y)^n \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left(\frac{x}{y}\right)^l, \quad (3.25)$$

aplicado a los tres casos anteriores.

A continuación multiplicamos ambos lados de la igualdad (3.24) por las densidades de transición  $g(\xi_2, (s, t_0) / (\xi, \eta_2, x_2), (s_0, t_0 - k))$ ,  $g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, \eta_1, \xi), (s_0 - h, t_0))$  y  $g(\xi, z_0 / (\eta_1, x, \eta_2), (s_0 - h, t_0 - k))$ , integramos en  $\mathbf{R}_+^3$  y aplicamos en el lado izquierdo de la igualdad que queda la ec. (3.21), obteniendo así que

$$\begin{aligned}
&g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0 - k)) = \\
&= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \\
&\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \\
&\cdot \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left(\frac{\xi}{x}\right)^l \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} \left(\frac{\xi_2}{x_2}\right)^{l_2} g(\xi_2, (s, t_0) / (\xi, \eta_2, x_2), (s_0, t_0 - k)) \\
&\quad \cdot g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, \eta_1, \xi), (s_0 - h, t_0)) \\
&\quad \cdot g(\xi, z_0 / (\eta_1, x, \eta_2), (s_0 - h, t_0 - k)) d\xi_2 d\xi_1 d\xi \\
&= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \\
&\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \cdot A, \quad (3.26)
\end{aligned}$$

para cualesquiera  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}_+$ .

Calculemos  $A$  como sigue

$$\begin{aligned}
 A &= \iiint_{\mathbf{R}_+^3} \left(\frac{\xi}{x}\right)^l \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} \left(\frac{\xi_2}{x_2}\right)^{l_2} g(\xi_2, (s, t_0) / (\xi, \eta_2, x_2), (s_0, t_0 - k)) \\
 &\quad \cdot g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, \eta_1, \xi), (s_0 - h, t_0)) \\
 &\quad \cdot g(\xi, z_0 / (\eta_1, x, \eta_2), (s_0 - h, t_0 - k)) d\xi_2 d\xi_1 d\xi \\
 &= \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi}{x}\right)^l g(\xi, z_0 / (\eta_1, x, \eta_2), (s_0 - h, t_0 - k)) \\
 &\quad \cdot \left\{ \left( \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi_2}{x_2}\right)^{l_2} g(\xi_2, (s, t_0) / (\xi, \eta_2, x_2), (s_0, t_0 - k)) d\xi_2 \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left( \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, \eta_1, \xi), (s_0 - h, t_0)) d\xi_1 \right) \right\} d\xi. \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

Por un lado,

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi_2}{x_2}\right)^{l_2} g(\xi_2, (s, t_0) / (\xi, \eta_2, x_2), (s_0, t_0 - k)) d\xi_2 = \\
 &= E \left[ \left( \frac{X(s, t_0)}{x_2} \right)^{l_2} / X(s_0, t_0) = \xi, X(s_0, t_0 - k) = \eta_2, X(s, t_0 - k) = x_2 \right] \\
 &= \left( \frac{\xi}{\eta_2} \right)^{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0 - k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\},
 \end{aligned}$$

donde para la última igualdad se ha usado la expresión de momentos condicionados que dimos en (2.22).

Por otro lado, de forma análoga

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, \eta_1, \xi), (s_0 - h, t_0)) d\xi_1 = \\
 &= E \left[ \left( \frac{X(s_0, t)}{x_1} \right)^{l_1} / X(s_0 - h, t) = x_1, X(s_0 - h, t_0) = \eta_1, X(s_0, t_0) = \xi \right] \\
 &= \left( \frac{\xi}{\eta_1} \right)^{l_1} \exp \left\{ \int_{s_0 - h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

Reemplazando estas dos expresiones en (3.27), se tiene

$$\begin{aligned}
A &= \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \exp \left\{ \int_{s_0-h}^s \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \int_{\mathbf{R}_+} \frac{\xi^{l+l_1+l_2}}{x^l \eta_1^{l_1} \eta_2^{l_2}} g(\xi, z_0/(\eta_1, x, \eta_2), (s_0-h, t_0-k)) d\xi.
\end{aligned}$$

Usando de nuevo (2.22) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}_+} \frac{\xi^{l+l_1+l_2}}{x^l \eta_1^{l_1} \eta_2^{l_2}} g(\xi, z_0/(\eta_1, x, \eta_2), (s_0-h, t_0-k)) d\xi = \\
&= E \left[ \frac{X^{l+l_1+l_2}(s_0, t_0)}{x^l \eta_1^{l_1} \eta_2^{l_2}} / X(s_0-h, t_0) = \eta_1, X(s_0-h, t_0-k) = x, X(s_0, t_0-k) = \eta_2 \right] \\
&= \frac{(\eta_1 \eta_2)^{l+l_1+l_2}}{x^{2l+l_1+l_2} \eta_1^{l_1} \eta_2^{l_2}} \\
&\cdot \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0-k}^{t_0} \left( (l+l_1+l_2) \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{(l+l_1+l_2)^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\},
\end{aligned}$$

cualesquiera que sean  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbf{R}_+$ ; en particular si  $\eta_1 = \eta_2 = x$ , en cuyo caso haciendo algunas simplificaciones, resulta que

$$\begin{aligned}
A &= \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0-k}^{t_0} \left( (l+l_1+l_2) \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{(l+l_1+l_2)^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
&\cdot \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en (3.26) obtenemos que

$$\begin{aligned}
 g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0 - k)) &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2}}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} g(y, z/\bar{x}, z_0) \\
 &\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \\
 &\cdot \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0-k}^t \left( (l+l_1+l_2) \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{(l+l_1+l_2)^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
 &\cdot \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\
 &\cdot \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

ii) La densidad de transición  $g(y, z/(x_1, u, \xi_2), z_0)$  es de clase  $C^\infty$  respecto a  $\xi_2$  en el punto  $x_2$ . Haciendo el desarrollo en serie de Taylor de dicha función en este punto, obtenemos

$$\begin{aligned}
 g(y, z/(x_1, u, \xi_2), z_0) &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(\xi_2 - x_2)^{n_2}}{n_2!} \frac{\partial^{n_2} g(y, z/(x_1, u, x_2), z_0)}{\partial x_2^{n_2}} \\
 &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-x_2)^{n_2}}{n_2!} \frac{\partial^{n_2} g(y, z/(x_1, u, x_2), z_0)}{\partial x_2^{n_2}} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l_2} \binom{n_2}{l_2} \left( \frac{\xi_2}{x_2} \right)^{l_2} \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos usado (3.25).

A continuación multiplicamos ambos lados de la igualdad (3.29) por la densidad de transición  $g(\xi_2, (s, t_0)/(u, x, x_2), (s_0, t_0 - k))$ , integramos en  $\mathbf{R}_+$  y aplicando en el lado izquierdo de la igualdad que queda, la ec. (3.22), obtenemos que

$$\begin{aligned}
 g(y, z/\bar{x}, (s_0, t_0 - k)) &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-x_2)^{n_2}}{n_2!} \frac{\partial^{n_2} g(y, z/(x_1, u, x_2), z_0)}{\partial x_2^{n_2}} \\
 &\cdot \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l_2} \binom{n_2}{l_2} \int_{\mathbf{R}_+} \left( \frac{\xi_2}{x_2} \right)^{l_2} g(\xi_2, (s, t_0)/(u, x, x_2), (s_0, t_0 - k)) d\xi_2, \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

cualquiera que sea  $u \in \mathbf{R}_+$ . Utilizando (2.22)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}_+} \left( \frac{\xi_2}{x_2} \right)^{l_2} g(\xi_2, (s, t_0) / (u, x, x_2), (s_0, t_0 - k)) d\xi_2 \\ &= E \left[ \left( \frac{X(s, t_0)}{x_2} \right)^{l_2} / X(s_0, t_0) = u, X(s_0, t_0 - k) = x, X(s, t_0 - k) = x_2 \right] \\ &= \left( \frac{u}{x} \right)^{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}, \end{aligned}$$

para todo  $u \in \mathbf{R}_+$ , en particular para  $u = x$  en cuyo caso la expresión anterior es

$$= \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}.$$

Sustituyendo esta expresión en (3.30) obtenemos

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, (s_0, t_0 - k)) &= \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{(-x_2)^{n_2}}{n_2!} \frac{\partial^{n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x_2^{n_2}} \\ &\cdot \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l_2} \binom{n_2}{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente observando que

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\ &= \begin{cases} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l_2} \binom{n_2}{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}, & \text{si } n = n_1 = 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

se obtiene que,

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, (s_0, t_0 - k)) &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2}}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} g(y, z/\bar{x}, z_0) \\ &\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

iii) La densidad de transición  $g(y, z / (\xi_1, v, x_2), z_0)$  es de clase  $C^\infty$  respecto a  $\xi_1$  en el punto  $x_1$ . Haciendo el desarrollo en serie de Taylor de dicha función en este punto, obtenemos

$$\begin{aligned} g(y, z / (\xi_1, v, x_2), z_0) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(\xi_1 - x_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{\partial^{n_1} g(y, z / (x_1, v, x_2), z_0)}{\partial x_1^{n_1}} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-x_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{\partial^{n_1} g(y, z / (x_1, v, x_2), z_0)}{\partial x_1^{n_1}} \sum_{l_1=0}^{n_1} (-1)^{l_1} \binom{n_1}{l_1} \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde para la última igualdad hemos usado la expresión (3.25).

A continuación multiplicamos ambos lados de la igualdad (3.32) por la densidad de transición  $g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, x, v), (s_0 - h, t_0))$ , integramos en  $\mathbf{R}_+$  y aplicando en el lado izquierdo de la igualdad que queda, la ec. (3.23), obtenemos que

$$\begin{aligned} g(y, z / \bar{x}, (s_0 - h, t_0)) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-x_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{\partial^{n_1} g(y, z / (x_1, v, x_2), z_0)}{\partial x_1^{n_1}} \\ &\cdot \sum_{l_1=0}^{n_1} (-1)^{l_1} \binom{n_1}{l_1} \int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, x, v), (s_0 - h, t_0)) d\xi_1, \end{aligned} \quad (3.33)$$

cualquiera que sea  $u \in \mathbf{R}_+$ . Utilizando (2.22)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbf{R}_+} \left(\frac{\xi_1}{x_1}\right)^{l_1} g(\xi_1, (s_0, t) / (x_1, x, v), (s_0 - h, t_0)) d\xi_1 = \\ &= E \left[ \left(\frac{X(s_0, t)}{x_1}\right)^{l_1} / X(s_0 - h, t) = x_1, X(s_0 - h, t_0) = x, X(s_0, t_0) = v \right] \\ &= \left(\frac{v}{x}\right)^{l_1} \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}, \end{aligned}$$

para todo  $u \in \mathbf{R}_+$ , en particular para  $v = x$  en cuyo caso la expresión anterior es

$$= \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\},$$

Sustituyendo esta expresión en (3.33) obtenemos

$$\begin{aligned} g(y, z / \bar{x}, (s_0 - h, t_0)) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{(-x_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{\partial^{n_1} g(y, z / \bar{x}, z_0)}{\partial x_1^{n_1}} \\ &\cdot \sum_{l_1=0}^{n_1} (-1)^{l_1} \binom{n_1}{l_1} \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente observando que

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\ &= \begin{cases} \sum_{l_1=0}^{n_1} (-1)^{l_1} \binom{n_1}{l_1} \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}, & \text{si } n = n_2 = 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, (s_0 - h, t_0)) &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2}}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} g(y, z/\bar{x}, z_0) \\ &\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

iv) Como consecuencia inmediata de la siguiente observación

$$\sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = n_1 = n_2 = 0, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

podemos expresar

$$\begin{aligned} g(y, z/\bar{x}, z_0) &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2}}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} g(y, z/\bar{x}, z_0) \\ &\cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si notamos

$$\begin{aligned} \Gamma(l, l_1, l_2, h, k) &= \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0-k}^{t_0} \left( (l + l_1 + l_2) \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\ &\cdot \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \exp \left\{ \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} \\ & - \exp \left\{ \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \right\} + 1, \end{aligned}$$

y sustituimos las ec. (3.28), (3.31), (3.34) y (3.35) en la expresión (4.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s_0 \partial t_0} &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \\ & \cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\Gamma(l, l_1, l_2, h, k)}{hk}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

4.- Vamos a calcular el

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \frac{\Gamma(l, l_1, l_2, h, k)}{hk}$$

y sustituir dicho valor en la expresión (3.36).

Si llamamos

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0-k}^{t_0} \left( (l + l_1 + l_2) \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \\ A_2 &= \int_{s_0-h}^{s_0} \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau \\ A_3 &= \int_{s_0}^s \int_{t_0-k}^{t_0} \left( l_2 \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right) d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

entonces podemos expresar

$$\begin{aligned} \Gamma(l, l_1, l_2, h, k) &= e^{A_1} e^{A_2} e^{A_3} - e^{A_2} - e^{A_3} + 1 \\ &= (e^{A_2} - 1)(e^{A_3} - 1) + (e^{A_1} - 1)(e^{A_2} e^{A_3}). \end{aligned}$$

Además, por el desarrollo en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} e^{A_1} - 1 &= \left\{ (l + l_1 + l_2) \bar{a}(z_0) + \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{2} \bar{B}(z_0) \right\} hk + o(hk) \\ e^{A_2} - 1 &= \left\{ \int_{t_0}^t \left( l_1 \bar{a}(s_0, \tau) + \frac{l_1^2}{2} \bar{B}(s_0, \tau) \right) d\tau \right\} h + o(h) \\ &= \left\{ \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1 + \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1^2 \right\} h + o(h) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
e^{A_3} - 1 &= \left\{ \int_{s_0}^s \left( l_2 \bar{a}(\sigma, t_0) + \frac{l_2^2}{2} \bar{B}(\sigma, t_0) \right) d\sigma \right\} k + o(k) \\
&= \left\{ \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2 + \frac{1}{2} \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2^2 \right\} k + o(k).
\end{aligned}$$

Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}
(e^{A_2} - 1)(e^{A_3} - 1) &= \left\{ \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1 + \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1^2 \right\} \\
&\cdot \left\{ \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2 + \frac{1}{2} \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2^2 \right\} hk + o(hk)
\end{aligned}$$

y que

$$(e^{A_1} - 1)(e^{A_2} e^{A_3}) = \left\{ (l + l_1 + l_2) \bar{a}(z_0) + \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{2} \bar{B}(z_0) \right\} hk + o(hk),$$

con lo cual nos queda que

$$\begin{aligned}
\Gamma(l, l_1, l_2, h, k) &= \\
&= \left[ \left\{ \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1 + \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1^2 \right\} \right. \\
&\quad \cdot \left\{ \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2 + \frac{1}{2} \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2^2 \right\} \\
&\quad \left. + \left\{ (l + l_1 + l_2) \bar{a}(\sigma, \tau) + \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{2} \bar{B}(\sigma, \tau) \right\} \right] hk + o(hk) \\
&= \left[ \left\{ \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) l_1 (l_1 - 1) \right\} \right. \\
&\quad \cdot \left\{ \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2 \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) l_2 (l_2 - 1) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ (l + l_1 + l_2) \bar{a}(z_0) + \frac{(l + l_1 + l_2)^2}{2} \bar{B}(z_0) \right\} \right] hk + o(hk).
\end{aligned}$$

Finalmente, observando que

$$(l + l_1 + l_2)^2 = l(l - 1) + l_1 + l_1(l_1 - 1) + l_2 + l_2(l_2 - 1) + 2(ll_1 + ll_2 + l_1l_2)$$

y realizando algunos cálculos sencillos, se obtiene que para cualesquiera  $h > 0$ ,  $k > 0$ , suficientemente pequeños

$$\Gamma(l, l_1, l_2, h, k) = \Pi(l, l_1, l_2) hk + o(hk), \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \Pi(l, l_1, l_2) = & \lambda_1(l + l_1 + l_2) + \lambda_2[l(l-1) + l_1(l_1-1) + l_2(l_2-1)] \\ & + 2\lambda_2[l l_1 + l l_2] + \lambda_3 l_1 l_2 + \lambda_4 l_1(l_1-1) l_2 + \lambda_5 l_1 l_2(l_2-1) \\ & + \lambda_6 l_1(l_1-1) l_2(l_2-1) \end{aligned} \quad (3.38)$$

y

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \bar{a}(z_0) + \frac{1}{2} \bar{B}(z_0), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \bar{B}(z_0), \\ \lambda_3 &= \bar{B}(z_0) + \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) \\ &\quad \cdot \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right), \\ \lambda_4 &= \frac{1}{2} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) \left( \int_{s_0}^s \bar{a}(\sigma, t_0) d\sigma + \frac{1}{2} \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right), \\ \lambda_5 &= \frac{1}{2} \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right) \left( \int_{t_0}^t \bar{a}(s_0, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right), \\ \lambda_6 &= \frac{1}{4} \left( \int_{t_0}^t \bar{B}(s_0, \tau) d\tau \right) \left( \int_{s_0}^s \bar{B}(\sigma, t_0) d\sigma \right), \end{aligned}$$

Sustituyendo la ec. (3.37) en la expresión (3.36), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial s_0 \partial t_0} &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}} \\ &\quad \cdot \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \Pi(l, l_1, l_2) \\ &= \sum_{n, n_1, n_2=0}^{\infty} \alpha(n, n_1, n_2) \frac{(-x)^n (-x_1)^{n_1} (-x_2)^{n_2}}{n! n_1! n_2!} \frac{\partial^{n+n_1+n_2} g(y, z/\bar{x}, z_0)}{\partial x^n \partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2}}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde hemos notado

$$\alpha(n, n_1, n_2) = \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \Pi(l, l_1, l_2).$$

5.- Calculemos los valores de  $\alpha(n, n_1, n_2)$ .

Por (3.38), sabemos que

$$\begin{aligned} \Pi(l, l_1, l_2) &= \lambda_1 (l + l_1 + l_2) + \lambda_2 [l(l-1) + l_1(l_1-1) + l_2(l_2-1)] \\ &\quad + 2\lambda_2 [ll_1 + ll_2] + \lambda_3 l_1 l_2 + \lambda_4 l_1 (l_1 - 1) l_2 + \lambda_5 l_1 l_2 (l_2 - 1) \\ &\quad + \lambda_6 l_1 (l_1 - 1) l_2 (l_2 - 1). \end{aligned}$$

Reemplazando esta expresión en la de  $\alpha(n, n_1, n_2)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha(n, n_1, n_2) &= \tag{3.40} \\ &= \lambda_1 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} (l + l_1 + l_2) \\ &\quad + \lambda_2 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \\ &\quad \quad \cdot [l(l-1) + l_1(l_1-1) + l_2(l_2-1)] \\ &\quad + 2\lambda_2 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} [ll_1 + ll_2] \\ &\quad + \lambda_3 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} l_1 l_2 \\ &\quad + \lambda_4 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} l_1 (l_1 - 1) l_2 \\ &\quad + \lambda_5 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} l_1 l_2 (l_2 - 1) \\ &\quad + \lambda_6 \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} l_1 (l_1 - 1) l_2 (l_2 - 1). \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
 & \sum_{l=0}^n \sum_{l_1=0}^{n_1} \sum_{l_2=0}^{n_2} (-1)^{l+l_1+l_2} \binom{n}{l} \binom{n_1}{l_1} \binom{n_2}{l_2} \\
 & \quad l(l-1) \dots (l-i+1) l_1(l_1-1) \dots (l_1-i_1+1) l_2(l_2-1) \dots (l_2-i_2+1) \\
 & = (-1)^{i+i_1+i_2} n(n-1) \dots (n-i+1) n_1(n_1-1) \dots (n_1-i_1+1) \\
 & \quad \cdot n_2(n_2-1) \dots (n_2-i_2+1) (1-1)^{(n-i)+(n_1-i_1)+(n_2-i_2)} \\
 & = \begin{cases} (-1)^{n+n_1+n_2} n!n_1!n_2!, & \text{si } i = n, \quad i_1 = n_1, \quad i_2 = n_2, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

se obtienen los siguientes valores de  $\alpha(n, n_1, n_2)$  :

$$\begin{aligned}
 \alpha(1, 0, 0) &= \alpha(0, 1, 0) = \alpha(0, 0, 1) = -\lambda_1, \\
 \alpha(2, 0, 0) &= \alpha(0, 2, 0) = \alpha(0, 0, 2) = \alpha(1, 0, 1) = \alpha(1, 1, 0) = 2\lambda_2, \\
 \alpha(0, 1, 1) &= \lambda_3, \\
 \alpha(0, 2, 1) &= -2\lambda_4, \\
 \alpha(0, 1, 2) &= -2\lambda_5, \\
 \alpha(0, 2, 2) &= 4\lambda_6,
 \end{aligned}$$

y  $\alpha(n, n_1, n_2) = 0$ , en el resto de los casos.

Sustituyendo estos valores en la ec. (3.39) se concluye el teorema. ■



## Capítulo 4

# Aplicación del Kriging a Campos Concretos

### 4.1 Introducción

La necesidad de obtener predicciones precisas a partir de un conjunto de datos observados es algo presente en todas las disciplinas científicas.

“Kriging” es un término que viene a ser sinónimo de *predicción espacial óptima*. La teoría que lo estudia se dedica al análisis y resolución de los problemas derivados de la predicción espacial de variables que dependen de la localización donde son observadas. Sus orígenes (véase [7]) se sitúan en torno a los años cuarenta en los campos de oro del Sur de Africa, cuando se empieza a usar la media muestral de un conjunto de datos próximos para estimar la cantidad media de oro en un bloque de terreno. Estos estimadores los utilizaban para buscar oro de forma selectiva.

Durante los años cincuenta, D. G. Krige ofreció una buena discusión sobre cómo mejorar las primeras predicciones, dentro de un contexto minero. Destacar que la formulación del método predicción espacial lineal óptima no proviene de los trabajos de Krige. Las contribuciones dentro del campo de la estadística de Wold (1938), Kolmogorov (1941)

y Wiener (1949) contienen ecuaciones de predicción lineal óptima que reflejan la noción de cómo utilizar observaciones próximas para dar una predicción puntual. Dentro de la física, en teoría de turbulencias, Kolmogorov (1941) supuso la existencia de un variograma (en dimensión cuatro, espacial y temporal) para caracterizar la estructura local de una turbulencia. Durante la Segunda Guerra Mundial, Wiener desarrolló unas ecuaciones del kriging (simple) similares a las de Kolmogorov dentro de un contexto temporal, cuya teoría sería publicada más tarde (1949). El propósito era predecir los movimientos de los aviones a partir de medidas tomadas con el radar. Thomson (1956) hizo una extensión de la aproximación de Wiener a una situación espacial.

Lo que hoy conocemos como el método de kriging no apareció hasta las contribuciones de Matheron en los años 60. En un tratado de dos volúmenes de 504 páginas en francés, Matheron (1962, 1963) publicó su *Treatise of Applied Geostatistics*, dando a la teoría de kriging una forma más comprensible y centrándose en los aspectos espaciales de los problemas de minería. En particular, el Volumen II (1963) trata enteramente la técnica de kriging, aunque hay algo de esta discusión en el Volumen I (1962, Cap. VIII). En 1963 apareció una versión muy abreviada en inglés, en la que llama la atención el tratamiento del kriging para el caso particular en que la dimensión es dos. Fue aquí donde Matheron dio el honor a D. G. Krige por sus contribuciones en el campo de la minería usando el término *kriging* para describir la predicción espacial óptima.

Mientras Matheron desarrollaba la teoría de kriging en Francia aplicada a la minería, el meteorólogo L. S. Gandin (1963) estuvo haciendo un trabajo extraordinariamente similar en la Unión Soviética. Su libro de 238 páginas, traducido al inglés en 1965, es notable por sus desarrollos en el tratamiento de predicción y diseño espacial, por su claridad de exposición y por la atractiva combinación de teoría y aplicaciones. La original y simultánea contribución de estos autores fue la de poner las predicciones lineales óptimas, en términos del variograma, en un contexto espacial. Gandin usó una terminología diferente; así, por ejemplo, al método de kriging simple lo llama *interpolación óptima* (Cap. 3, Sec. 2) y al kriging ordinario lo llama *interpolación óptima con factores peso normalizados* (Cap. 3,

Sec 5).

Originariamente la teoría del kriging fue desarrollada para ser aplicada en las Ciencias de la Tierra, en particular en el campo de la minería, dando lugar al nacimiento de una nueva rama de la ciencia denominada Geoestadística. Posteriormente, debido al carácter general de esta metodología, el ámbito de aplicación se ha extendido considerablemente a otros campos de la ciencia: análisis de imágenes, agricultura, ecología, astronomía, climatología, geografía, economía, etc.

Cuando, por ejemplo, se procede a planificar la explotación de una nueva mina o de una nueva sección de la mina, los predictores tipo kriging suelen ser insuficientes. Además de estos predictores, suele ser esencial conocer la dispersión espacial de la característica en estudio. En este sentido vamos a completar el estudio de predicción tipo kriging con el de simulación condicionada. Las realizaciones simuladas toman los mismos valores en las localizaciones experimentales y tienen las mismas características (al menos hasta segundo orden) que la realización real. ¿En qué difieren las simulaciones condicionadas de la predicción? Las diferencias están en sus objetivos.

El objetivo de la predicción es dar, en cada punto  $z$ , un predictor  $\hat{X}(z)$  que esté lo más cerca posible del verdadero valor  $X(z)$ . Los criterios a la hora de elegir un predictor son la insesgadez y que la varianza del error de predicción,  $E \left[ (X(z) - \hat{X}(z))^2 \right]$ , sea mínima. En el caso de kriging, la minimización de esta varianza implica la suavidad de las dispersiones. Por otro lado, la simulación condicional tiene los dos primeros momentos iguales experimentalmente a los del campo real, pero, al contrario que en kriging, el valor simulado en cada punto no es el mejor predictor posible. La varianza del error de predicción para simulación condicionada es siempre superior al que se obtiene por kriging. Con ello, los objetivos de predicción y simulación condicionada no son compatibles, aunque ambos estudio son necesarios y se complementan.

El contenido de este capítulo se ha dividido en las siguientes secciones: en la segunda vamos a plantear el problema de kriging; en la tercera trataremos la metodología general del kriging simple; en la cuarta sección estudiaremos el kriging ordinario distinguiendo



el tipo de hipótesis de partida; en la quinta sección, en primer lugar, vamos a aplicar el kriging simple y ordinario a un campo de difusión gaussiano y, después, vamos a utilizar estos resultados con la idea de obtener buenos predictores para un campo de difusión lognormal; en la sexta sección, vamos a dar una técnica que permite obtener simulaciones condicionadas para un campo de difusión lognormal.

El enfoque que se presenta de la metodología kriging es para campos aleatorios espaciales bidimensionales, esto es, cuando el espacio paramétrico  $I$  está incluido en  $\mathbf{R}^2$ .

## 4.2 Planteamiento del Problema

En esta sección, vamos a presentar los principales conceptos y las hipótesis básicas que sobre las variables del campo es necesario considerar para aplicar el kriging y, después, plantearemos el problema de predicción espacial lineal óptima.

### 4.2.1 Conceptos sobre Campos Aleatorios

Sea  $\{X(z); z = (s, t) \in I \subset \mathbf{R}^2\}$  un campo aleatorio espacial biparamétrico definido sobre el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ .

Las variables del campo aleatorio espacial presentan un doble aspecto. Por un lado, *aleatoriedad*, es decir, los valores numéricos van a variar irregular e imprevisiblemente de una localización a otra y, por otro lado, *estructuración*, es decir, los valores numéricos no son enteramente independientes de su localización; se dice entonces que los valores próximos presentan autocorrelación. A estas variables, en algunos textos (especialmente en textos de Economía), se las llama *Variables Regionalizadas*. A la teoría que se dedica al análisis y resolución de los problemas derivados de la predicción espacial de estas variables se la llama entonces *Teoría de Variables Regionalizadas*. A lo largo este capítulo utilizaremos una terminología más general y hablaremos de variable del campo y teoría de kriging en lugar de usar los anteriores, que suelen hacer referencia a un contexto de tipo económico.

Para cada conjunto finito de variables del campo,  $X(z_1), X(z_2), \dots, X(z_m)$ ,  $m \geq 1$ , en el primer capítulo definimos la función de distribución finito dimensional ( $m$ -dimensional) como la función de distribución conjunta de dicho vector, esto es,

$$F_{z_1, z_2, \dots, z_m}(x_1, x_2, \dots, x_m) = P[X(z_1) \leq x_1, X(z_2) \leq x_2, \dots, X(z_m) \leq x_m].$$

Kriging es un método que permite predecir el valor del campo en la localización  $z_0$  a partir de un vector de observaciones  $(X(z_1), \dots, X(z_n))^t$ . Para aplicar esta técnica necesitaríamos conocer la distribución finito dimensional de las variables  $X(z_0), X(z_1), \dots, X(z_n)$  (o parte de ésta). En la práctica, estimar esta distribución a partir de los  $n$ -datos  $X(z_1), \dots, X(z_n)$  no es posible en general, lo que requiere introducir algunas hipótesis que recogemos en las siguientes definiciones.

### Campos de segundo orden; funciones media y covarianza.

Esta primera definición será la hipótesis de la que siempre partiremos: los dos primeros momentos del campo tienen que ser finitos. En general, para la mayoría de definiciones que vamos a establecer a continuación (véase, por ejemplo, la definición de *variograma*) no es necesario exigir que el campo sea de segundo orden. Sin embargo, puesto que los campos a los que le vamos a aplicar la teoría kriging tienen los dos primeros momentos finitos, siempre partiremos de esta hipótesis.

**Definición 4.1** *Un campo aleatorio espacial  $\{X(z); z \in I\}$  se dice que es de **segundo orden** si verifica que*

$$E[X(z)^2] < \infty, \quad \forall z \in I.$$

Si  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de segundo orden podemos definir la función media del campo, como

$$m_X(z) = E[X(z)], \quad \forall z \in I,$$

y la función covarianza del campo, como

$$c_X(z, z') = E[(X(z) - m_X(z))(X(z') - m_X(z'))], \quad \forall z, z' \in I.$$

En particular, cuando  $z = z'$

$$\sigma_X^2(z) = E[(X(z) - m_X(z))^2] = \text{var}(X(z)).$$

Cuando no haya lugar a equivocación simplificaremos la notación utilizando  $m(z)$ ,  $c(z, z')$  y  $\sigma^2(z)$ .

### Campos estacionarios en sentido estricto y estacionarios de segundo orden

Una de las hipótesis de partida para aplicar kriging será que el campo sea estacionario de segundo orden. Antes, definiremos campo estacionario en sentido estricto.

**Definición 4.2** *Un campo  $\{X(z); z \in I\}$  de segundo orden, se dice que es **estacionario en sentido estricto**, si las distribuciones finito dimensionales son invariantes por desplazamientos, esto es, si para  $z_1, \dots, z_n \in I$  los vectores*

$$(X(z_1), \dots, X(z_n)), \quad (X(z_1 + (h, k)), \dots, X(z_n + (h, k))),$$

*tienen la misma distribución, para cualquier valor de  $h, k \in \mathbf{R}$ .*

Sin embargo, no vamos a exigir estacionariedad en sentido estricto para aplicar kriging. Nos vamos a limitar a la hipótesis de estacionariedad de segundo orden siguiente.

**Definición 4.3** *Un campo  $\{X(z); z \in I\}$  de segundo orden, se dice que es **estacionario de segundo orden (o en sentido débil)** si verifica*

$$\begin{aligned} E[X(z)] &= \mu, \quad \forall z \in I, \\ \text{cov}(X(s+h, t+k), X(s, t)) &= c(h, k), \quad \forall (s, t) \in I, h, k \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

*La función  $c(\cdot, \cdot)$  se llama **covariograma** o función de covarianza estacionaria.*

Es claro que el que un campo de segundo orden sea estacionario en sentido estricto implica que sea estacionario de segundo orden, aunque el recíproco no tiene por qué ser cierto salvo en el caso gaussiano en el cual las dos definiciones son equivalentes.

### Variograma y campos estacionarios intrínsecos e isotrópicos

La hipótesis de estacionariedad de segundo orden supone que la covarianza existe y por tanto la varianza es finita *a priori*. Sin embargo, hay muchos fenómenos físicos que tienen una capacidad infinita de dispersión, es decir, que no tienen covarianza finita, para los cuales puede definirse el variograma. En estos casos habrá que sustituir la hipótesis de estacionariedad de segundo orden por otra menos restrictiva.

**Definición 4.4** Sea  $\{X(z); z \in I\}$  un campo de segundo orden. Se define el **variograma** de dicho campo como

$$2\gamma(z_1, z_2) = \text{var}(X(z_1) - X(z_2)), \quad \forall z_1, z_2 \in I.$$

$\gamma(z_1, z_2)$  recibe el nombre de **semivariograma**.

La terminología anterior fue utilizada por primera vez por Matheron (1962), aunque pueden encontrarse apariciones anteriores en la literatura. Por ejemplo, Yaglom (1957) usó este término bajo el nombre de *función de estructura*, Jowett (1952) lo usó en series temporales con el nombre de *diferencia cuadrática media*, etc. De todas ellas, ha sido la terminología empleada en el campo de la minería por Matheron la que se ha mantenido.

Cuando la hipótesis de estacionariedad de segundo orden se debilita a la existencia y estacionariedad del variograma surge el concepto de campo estacionario intrínseco.

**Definición 4.5** Un campo  $\{X(z); z \in I\}$  de segundo orden, se dice que es **estacionario intrínseco** si verifica que

$$\begin{aligned} E[X(z)] &= \mu, \quad \forall z \in I, \\ \text{var}(X(s+h, t+k) - X(s, t)) &= 2\gamma(h, k), \quad \forall (s, t) \in I, h, k \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

donde  $2\gamma(h, k)$  es el variograma, como función de  $h$  y  $k$ . Si además se verifica que

$$\text{var}(X(s+h, t+k) - X(s, t)) = 2\gamma(|(h, k)|), \quad \forall (s, t) \in I, h, k \in \mathbf{R},$$

entonces diremos que el campo es **isotrópico**.

El variograma nos da una medida de la correlación espacial describiendo cómo se relacionan los valores del campo con la distancia y la dirección. En el caso *isotrópico*, el variograma nos da una medida de cómo los datos se relacionan con la distancia (el variograma no varía con la dirección). Cuando la correlación espacial del campo cambia con la dirección se dice entonces que el campo es **anisotrópico**.

### Relación entre campo estacionario de segundo orden y campo estacionario intrínseco

Cuando el campo es estacionario de segundo orden, se verifican de forma inmediata las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{var}(X(z)) &= c(0,0), \quad \forall z \in I, \\ \gamma(h,k) &= c(0,0) - c(h,k), \quad \forall h, k \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

y, por tanto, el campo es estacionario intrínseco. El recíproco no es cierto. Tenemos el ejemplo del campo Browniano-Lévy, que es estacionario intrínseco aunque no es estacionario de segundo orden.

La última relación indica que cuando el campo es estacionario de segundo orden la covarianza y el variograma son dos herramientas equivalentes para caracterizar las autocorrelaciones entre  $X(s+h, t+k)$  y  $X(s, t)$ .

#### 4.2.2 Kriging

Sea  $\{X(z); z \in I \subset \mathbf{R}^2\}$  un campo de segundo orden. Supongamos que observamos el campo en localizaciones  $z_1, \dots, z_n$  y sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  el vector de observaciones. El problema que se plantea es el de predecir el valor del campo en una localización conocida  $z_0$ , esto es,  $X(z_0)$ , a partir del vector de observaciones  $\mathbf{X}$ .

Kriging es un método de predicción espacial óptima que consiste en obtener un predictor  $p(\mathbf{X}; z_0)$  que sea lineal, insesgado y óptimo. Dicho predictor, en general, lo definiremos

como una combinación lineal de los valores  $X(z_i)$ , donde  $i = 1, \dots, n$ . Notando

$$p(\mathbf{X}; z_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X(z_i) + k,$$

el problema consiste en hallar los valores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  y  $k$  de forma que dicho estimador sea insesgado y la varianza del error de predicción, esto es,

$$E \left[ (X(z_0) - p(\mathbf{X}; z_0))^2 \right], \quad (4.1)$$

sea mínima.

En las siguientes secciones vamos a obtener un predictor como el que acabamos de describir partiendo de distintas hipótesis, para después aplicar estos resultados a un campo de difusión gaussiano.

### 4.3 Kriging Simple

#### Hipótesis

Sea  $\{X(z); z \in I \subset \mathbf{R}^2\}$  campo aleatorio espacial. Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

1.  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de segundo orden.
2. La media  $m(z)$  y la función de covarianza  $c(z, z')$  del campo son funciones conocidas para cualesquiera valores  $z, z' \in I$ .

#### Planteamiento

Observamos el campo en las localizaciones  $z_1, \dots, z_n$ , obteniendo el vector de observaciones  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$ . Como hemos comentado anteriormente, el problema que se plantea es el de predecir el valor de  $X(z_0)$ , a partir de  $\mathbf{X}$  y bajo las hipótesis anteriores. Para ello queremos obtener los valores de  $l_1, \dots, l_n$  y  $k$  que hacen que el predictor lineal

$$p(\mathbf{X}; z_0) = \sum_{i=1}^n l_i X(z_i) + k \quad (4.2)$$

sea insesgado y óptimo en el sentido de que minimice (4.1).

Matheron (1971) llamó a este tipo de predicción espacial *kriging simple*, ya que supone que la función media  $m(\cdot)$  es conocida.

### Obtención del predictor óptimo

Comenzamos expresando la varianza del error de predicción (4.1). Como

$$E \left[ X(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i X(z_i) - k \right]^2 = \text{var} \left( X(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i X(z_i) \right) + \left( m(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i m(z_i) - k \right)^2.$$

Tomando  $k = m(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i m(z_i)$ , minimizar la varianza del error de predicción es minimizar respecto a  $l_1, \dots, l_n$

$$\begin{aligned} \text{var} \left( X(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i X(z_i) \right) &= E \left[ X(z_0) - m(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i (X(z_i) - m(z_i)) \right]^2 \\ &= c(z_0, z_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_i l_j c(z_i, z_j) - 2 \sum_{i=1}^n l_i c(z_0, z_i). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Derivando esta expresión respecto a  $l_1, l_2, \dots, l_n$  e igualando a cero, se obtiene que

$$\sum_{j=1}^n l_j c(z_i, z_j) - c(z_0, z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Podemos expresar matricialmente este sistema de ecuaciones como

$$\mathbf{L}^t \Sigma = \mathbf{c}^t,$$

donde  $\mathbf{L} = (l_1, \dots, l_n)^t$ ,  $\mathbf{c} = (c(z_0, z_1), \dots, c(z_0, z_n))^t$  y  $\Sigma$  es una matriz  $n \times n$  cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $c(z_i, z_j)$ . Despejando obtenemos que

$$\mathbf{L}^t = \mathbf{c}^t \Sigma^{-1}$$

y, por tanto, el predictor lineal óptimo  $p^*(\mathbf{X}; z_0) \left( \equiv \hat{X}(z_0) \right)$ , sustituyendo  $\mathbf{L}^t$  y el valor de  $k$  en (4.2), es

$$p^*(\mathbf{X}; z_0) = \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{m}) + m(z_0), \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{m} = (m(z_1), \dots, m(z_n))^t$ .

### Varianza del error de predicción mínima

Expresando matricialmente la expresión (4.3) y sustituyendo los  $l_i$  óptimos tenemos que la varianza del error de predicción mínima es

$$\begin{aligned} \text{var} \left( X(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i X(z_i) \right) &= c(z_0, z_0) + \mathbf{L}^t \Sigma \mathbf{L} - 2\mathbf{L}^t \mathbf{c} \\ &= c(z_0, z_0) - \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Para esta varianza, usaremos la notación

$$\sigma_{sk}^2(z_0) = \sigma^2(z_0) - \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}. \quad (4.5)$$

### Caso particular: La función media es constante

Si la media es conocida y constante  $m$ , el predictor óptimo se expresa como

$$p^*(\mathbf{X}; z_0) = \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{X} + (1 - \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}) m, \quad (4.6)$$

donde hemos utilizado que  $\mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}$  (cierto, por ser un número) y hemos notado  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^t$ . La varianza del error de predicción es la misma expresión, (4.5).

## 4.4 Kriging Ordinario

### Hipótesis

Sea  $\{X(z); z \in I \subset \mathbf{R}^2\}$  un campo aleatorio espacial verificando las siguientes hipótesis:

1.  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de segundo orden.
2. La media del campo es desconocida pero constante, esto es,  $m(z) = m$  para cualquier valor  $z \in I$ .



### Planteamiento

Observamos el campo que acabamos de describir en las localizaciones  $z_1, \dots, z_n$ , obteniendo el vector de observaciones  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$ . El problema que se plantea es el de predecir el valor de  $X(z_0)$ , a partir de  $\mathbf{X}$ . Para ello queremos obtener los valores de  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  que hacen que el predictor lineal

$$p(\mathbf{X}; z_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i X(z_i)$$

sea insesgado y óptimo. La condición de insesgadez del predictor, en este caso, queda garantizada imponiendo que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Observar que en la versión del kriging simple  $m$  es conocida y los coeficientes no suman necesariamente 1.

En estas condiciones, vamos a obtener el predictor óptimo por el método de los multiplicadores de Lagrange, esto es, minimizando

$$E \left[ X(z_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i X(z_i) \right]^2 - 2M \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right) \quad (4.7)$$

con respecto a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  y  $M$  (el multiplicador de Lagrange que asegura que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ).

Distinguimos varias situaciones para obtener los  $\lambda_i$  óptimos.

#### 4.4.1 Kriging Ordinario en Términos de Variogramas

##### Hipótesis adicional

Supongamos que añadimos la siguiente hipótesis adicional:

##### 3. El variograma del campo

$$2\gamma(z_1, z_2) = \text{var}(X(z_1) - X(z_2)),$$

es conocido  $\forall z_1, z_2 \in I$ .

### Obtención del predictor óptimo

La condición  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  implica que

$$\begin{aligned} \left( X(z_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i X(z_i) \right)^2 &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j (X(z_i) - X(z_j))^2 / 2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i (X(z_0) - X(z_i))^2 / 2, \end{aligned}$$

por lo que (4.7) se expresa como

$$- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(z_i, z_j) + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(z_0, z_i) - 2M \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right).$$

Derivando esta expresión con respecto a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  y  $M$  e igualando a cero, tenemos que

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^n \lambda_j \gamma(z_i, z_j) + \gamma(z_0, z_i) - M &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1, \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se expresa matricialmente como

$$\Gamma_O \lambda_O = \gamma_O,$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_O &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n, M)^t, \\ \gamma_O &= (\gamma(z_0, z_1), \dots, \gamma(z_0, z_n), 1)^t, \\ \Gamma_O &= \begin{cases} \gamma(z_i, z_j), & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ 1, & i = 1, \dots, n, \quad j = n + 1 \\ 1, & i = n + 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0, & i = n + 1, \quad j = n + 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$\Gamma_O$  es una matriz  $(n + 1) \times (n + 1)$  simétrica y  $M$  es el multiplicador de Lagrange. Despejando en la ecuación matricial anterior tenemos que

$$\lambda_O = \Gamma_O^{-1} \gamma_O$$

y, a partir de esta ecuación, el coeficiente  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$  está dado por

$$\lambda^t = \left( \gamma + \mathbf{1} \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma)}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}} \right)^t \Gamma^{-1} \quad (4.8)$$

y el multiplicador de Lagrange por

$$M = - \frac{1 - \mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}}, \quad (4.9)$$

donde  $\gamma = (\gamma(z_0, z_1), \dots, \gamma(z_0, z_n))^t$  y  $\Gamma$  es la matriz  $n \times n$  cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $\gamma(z_i, z_j)$ .

Si notamos  $\hat{p}(\mathbf{X}; z_0)$  o  $\hat{X}(z_0)$ , al predictor lineal del kriging ordinario, óptimo, entonces

$$\begin{aligned} \hat{p}(\mathbf{X}; z_0) &= \hat{X}(z_0) = \lambda^t \mathbf{X} \\ &= \gamma^t \Gamma^{-1} \mathbf{X} + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma) (\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{X})}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

### Varianza del error de predicción

La varianza del error de predicción mínima, llamada algunas veces *varianza del kriging (o de la predicción)*, es (utilizando el sistema de ecuaciones del kriging)

$$\begin{aligned} \sigma_k^2(z_0) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(z_i, z_j) + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(z_0, z_i) \\ &= - \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(z_0, z_i) + M + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(z_0, z_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(z_0, z_i) + M = \lambda^t \gamma + M \\ &= \gamma^t \Gamma^{-1} \gamma - \frac{(\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \gamma - 1)^2}{\mathbf{1}^t \Gamma^{-1} \mathbf{1}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde para obtener la última igualdad hemos sustituido el valor de  $\lambda^t$  y  $M$  que dimos en (4.8) y (4.9), respectivamente.

### Casos particulares: Kriging ordinario para campos estacionarios intrínsecos e isotrópicos

Si añadimos la hipótesis de que el campo sea estacionario intrínseco, esto es, en el caso en que  $\{X(z); z = (s, t) \in I\}$  sea un campo de segundo orden con media  $m$  desconocida pero constante y que el variograma sea una función de  $h$  y  $k$  exclusivamente,

$$2\gamma(h, k) = \text{var}(X(s+h, t+k) - X(s, t)), \quad \forall (s, t) \in I, h, k \in \mathbf{R},$$

entonces los desarrollos y, por tanto, los resultados anteriores son válidos con la diferencia de que  $\gamma(z, z')$  se reemplazaría por  $\gamma(z - z')$ ,  $\forall z, z' \in I$ . Si además el campo es isotrópico, es decir, el variograma no varía con la dirección, los resultados anteriores son válidos con la diferencia de que  $\gamma(z, z')$  se reemplazaría por  $\gamma(|z - z'|)$ ,  $\forall z, z' \in I$ .

#### 4.4.2 Kriging Ordinario en Términos de Covarianzas

##### Hipótesis adicional

Supongamos que a las dos hipótesis que impusimos al campo  $\{X(z); z \in I\}$  al principio de la sección añadimos la siguiente:

3. La función de covarianza del campo,  $c(z_1, z_2)$ , es conocida y finita  $\forall z_1, z_2 \in I$ .

##### Obtención del predictor óptimo

En este caso, la varianza del error de predicción puede escribirse como

$$\text{var} \left( X(z_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i X(z_i) \right) = E \left[ \left( X(z_0) - m \right) - \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i X(z_i) - m \right) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
&= c(z_0, z_0) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i E [(X(z_0) - m)(X(z_i) - m)] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j E [(X(z_i) - m)(X(z_j) - m)] \\
&= c(z_0, z_0) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j c(z_i, z_j),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

por lo que (4.7) se expresa como

$$c(z_0, z_0) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j c(z_i, z_j) - 2M \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i - 1 \right).$$

Derivando esta expresión respecto a  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  y  $M$  se obtiene que

$$\begin{aligned}
-c(z_0, z_i) + \sum_{j=1}^n \lambda_j c(z_i, z_j) - M &= 0, \quad i = 1, \dots, n \\
\sum_{i=1}^n \lambda_i &= 1.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Este sistema de ecuaciones se expresa matricialmente como

$$\Sigma_O \lambda_O = \gamma_O,$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda_O &= (\lambda_1, \dots, \lambda_n, -M)^t, \\
\mathbf{c}_O &= (c(z_0, z_1), \dots, c(z_0, z_n), 1)^t, \\
\Sigma_O &= \begin{cases} c(z_i, z_j), & i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n, \\ 1, & i = 1, \dots, n, \quad j = n + 1 \\ 1, & i = n + 1, \quad j = 1, \dots, n, \\ 0, & i = n + 1, \quad j = n + 1; \end{cases}
\end{aligned}$$

$\Sigma_O$  es una matriz  $(n + 1) \times (n + 1)$  simétrica y  $M$  es el multiplicador de Lagrange. Despejando en la ecuación matricial anterior tenemos que

$$\lambda_O = \Sigma_O^{-1} \gamma_O.$$

Entonces, el coeficiente  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$  y el multiplicador de Lagrange están dados por

$$\lambda^t = \left( \mathbf{c} + \mathbf{1} \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c})}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right)^t \Sigma^{-1}, \quad M = \frac{1 - \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}}. \quad (4.14)$$

El predictor óptimo es

$$\hat{p}(\mathbf{X}; z_0) = \hat{X}(z_0) = \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{X} + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}) (\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{X})}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}}. \quad (4.15)$$

Observar que la media del campo,  $m$ , se ha estimado por

$$\hat{m} = \frac{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{X}}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (4.16)$$

(comparar (4.6) y (4.15)), que es el estimador por mínimos cuadrados generalizados de  $m$ .

### La varianza del error de predicción

Por (4.12), la varianza del error de predicción se expresa como

$$\begin{aligned} \sigma_k^2(z_0) &= c(z_0, z_0) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j c(z_i, z_j) \\ &= \sigma^2(z_0) - 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) + M \\ &= \sigma^2(z_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) + M, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el sistema de ecuaciones (4.13). Expresando esta igualdad matricialmente,

$$\begin{aligned} \sigma_k^2(z_0) &= \sigma^2(z_0) - \lambda^t \mathbf{c} + M \\ &= \sigma^2(z_0) - \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c} - \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c}) (\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c})}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} + M \\ &= \sigma^2(z_0) - \mathbf{c}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c} + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{c})^2}{\mathbf{1}^t \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

(sustituyendo las expresiones de  $\lambda^t$  y  $M$  que dimos en (4.14)).

### Caso particular: Kriging ordinario para campos estacionarios de segundo orden

Si añadimos la hipótesis de que el campo sea estacionario de segundo orden, esto es, en el caso en que  $\{X(z); z = (s, t) \in I\}$  sea un campo de segundo orden con media  $m$  desconocida pero constante y que la función de covarianza sea sólo función de  $h$  y  $k$ ,

$$c(h, k) = \text{cov}(X(s+h, t+k) - X(s, t)), \quad \forall (s, t) \in I, h, k \in \mathbf{R},$$

entonces los desarrollos y, por tanto, los resultados anteriores son válidos con la diferencia de que  $c(z, z')$  se reemplazaría por  $c(z - z')$ ,  $\forall z, z' \in I$ .

## 4.5 Kriging para los Campos de Difusión Gaussiano y Log-normal

El campo aleatorio lognormal ha sido considerado ampliamente en Geoestadística, en relación con problemas de kriging por Journel y Huijbregts [15], Cressie [6], Christakos [5]. En esta sección vamos a aplicar la teoría de kriging que hemos desarrollado en las secciones anteriores al caso de un campo de difusión gaussiano y, después, aplicaremos estos resultados en la obtención de predictores para un campo de difusión lognormal. Empecemos estudiando el caso gaussiano.

### 4.5.1 Kriging Gaussiano

Sea  $\{X(z); z \in I = [0, T] \times [0, S]\}$  un campo de Markov biparamétrico donde  $X(0, 0)$  es una v.a. gaussiana o una v.a. constante con  $E[X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(X(0, 0)) = \sigma_0^2$ . Supongamos que la densidad de transición del campo está dada por (1.44), donde  $a(z)$  y  $B(z)$  son funciones continuas en  $I$ . En estas condiciones, sabemos que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano biparamétrico, donde  $a(z)$  y  $B(z)$  son los coeficientes de

difusión del campo, y que los coeficientes de difusión uniparamétricos se obtienen como

$$\begin{aligned} a_1(s, t) &= \int_0^t a(s, \tau) d\tau, & B_1(s, t) &= \int_0^t B(s, \tau) d\tau, \\ a_2(s, t) &= \int_0^s a(\sigma, t) d\sigma, & B_2(s, t) &= \int_0^s B(\sigma, t) d\sigma, \end{aligned}$$

para cualquier  $z = (s, t) \in I$ .

Por la *Proposición 1.4*, sabemos que

$$X(z) \rightsquigarrow N(m(z), \sigma^2(z)), \quad z = (s, t),$$

con

$$m(z) = m_0 + \int_0^s \int_0^t a(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (4.18)$$

$$\sigma^2(z) = \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (4.19)$$

Además, si  $c(z_1, z_2)$  es la  $cov(X(z_1), X(z_2))$ , sabemos que

$$c(z_1, z_2) = \sigma^2(z) \quad \text{con } z = z_1 \wedge z_2.$$

Sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), X(z_2), \dots, X(z_n))^t$  una muestra de  $n$  datos extraídos del campo gaussiano que acabamos de considerar. Nuestro objetivo será el de predecir el valor del campo en la posición  $z_0$ , esto es,  $X(z_0)$ , bajo las distintas hipótesis consideradas en las secciones anteriores.

### Kriging Gaussiano Simple

Supongamos que  $m_0$  y  $\sigma_0^2$  son constantes conocidas y que los coeficientes de difusión  $a(z)$  y  $B(z)$  son funciones conocidas cualquiera que sea  $z \in I$ . En esta situación, la media y la covarianza del campo (4.18 y 4.19) son funciones conocidas y, entonces, el predictor lineal y la varianza del error de predicción corresponden a las expresiones (4.4) y (4.5), respectivamente, donde  $\mathbf{c} = (\sigma^2(z_0 \wedge z_1), \dots, \sigma^2(z_0 \wedge z_n))^t$  y  $\Sigma$  es una matriz  $n \times n$  cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $\sigma^2(z_i \wedge z_j)$ .

**Observación 4.1** Es conocido que para el caso gaussiano el predictor lineal óptimo y el predictor óptimo coinciden.



**Kriging Gaussiano Ordinario**

Supongamos que  $m_0$  es desconocida, que  $\sigma_0^2$  es conocida, que  $a(z) = 0$  cualquiera que sea  $z \in I$  y que  $B(z)$  es una función conocida para cualquier  $z \in I$ . En esta situación, la media del campo  $m(z) = m_0$  es desconocida y la covarianza del campo (4.19) es una función conocida.

**Kriging ordinario gaussiano en términos de variogramas** Calculemos en primer lugar la expresión del variograma para el campo de difusión gaussiano:

$$\begin{aligned}
 2\gamma(z_1, z_2) &= \text{var}(X(z_1) - X(z_2)) \\
 &= \text{var}(X(z_1)) + \text{var}(X(z_2)) - 2\text{cov}(X(z_1), X(z_2)) \\
 &= \sigma^2(z_1) + \sigma^2(z_2) - 2\sigma^2(z_1 \wedge z_2) \\
 &= \int_0^{s_1} \int_0^{t_1} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau + \int_0^{s_2} \int_0^{t_2} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \\
 &\quad - 2 \int_0^{s_1 \wedge s_2} \int_0^{t_1 \wedge t_2} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau
 \end{aligned}$$

(la última igualdad la hemos obtenido usando (4.19)). Entonces, el predictor lineal y la varianza del error de predicción corresponden a las expresiones (4.10) y (4.11), respectivamente, donde los valores del semivariograma se obtendrían usando la expresión anterior.

**Observación 4.2** No existen campos de difusión gaussianos estacionarios intrínsecos. En efecto,

$$\begin{aligned}
 2\gamma(X(s+h, t+k), X(s, t)) &= \\
 &= \text{var}(X(s+h, t+k) - X(s, t)) \\
 &= \text{var}(X(s+h, t+k)) + \text{var}(X(s, t)) - 2\text{cov}(X(s+h, t+k), X(s, t)) \\
 &= \sigma^2(s+h, t+k) - \sigma^2(s, t) \\
 &= \int_0^{s+h} \int_0^{t+k} B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau - \int_0^s \int_0^t B(\sigma, \tau) d\sigma d\tau.
 \end{aligned}$$

Para que esta expresión sea función de  $h$  y  $k$  exclusivamente se tiene que verificar que su derivada con respecto a  $s$  sea cero, esto es,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (2\gamma(X(s+h, t+k), X(s, t)))}{\partial s} &= \int_0^{t+k} B(s+h, \tau) d\tau - \int_0^t B(s, \tau) d\sigma d\tau \\ &= B_1(s+h, t+k) - B_1(s, t) = 0, \end{aligned}$$

lo que implicaría que

$$B_1(s, t) = cte, \quad \forall s, t.$$

Como  $B_1$  se anula sobre  $E_0$  (véase (3.21)),

$$B_1(s, t) = 0, \quad \forall s, t,$$

y esto es una contradicción con el hecho de que  $B_1 > 0$ .

**Observación 4.3** Puesto que todo campo estacionario de segundo orden es estacionario intrínseco, al no existir campos de difusión gaussianos estacionarios intrínsecos, tampoco existen campos de difusión gaussianos estacionarios de segundo orden. Por el mismo razonamiento todos los campos de difusión gaussianos son anisotrópicos.

**Kriging ordinario gaussiano en términos de covarianzas** En este caso, el predictor lineal y la varianza del error de predicción corresponden a las expresiones (4.15) y (4.17), respectivamente, donde ahora  $\mathbf{c} = (\sigma^2(z_0 \wedge z_1), \dots, \sigma^2(z_0 \wedge z_n))^t$  y  $\Sigma$  es una matriz  $n \times n$  cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $\sigma^2(z_i \wedge z_j)$ , valores que se obtienen utilizando (4.19). El valor de  $m$  se estima por (4.16).

## 4.5.2 Kriging Lognormal

### Hipótesis y notación

Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de Markov biparamétrico positivo donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y

$var(\log X(0,0)) = \sigma_0^2$ . Supongamos que la densidad de transición del campo está dada por (2.12), donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son funciones continuas en  $I$ . En estas condiciones, sabemos que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión lognormal biparamétrico cuyos coeficientes de difusión uniparamétricos se obtienen como

$$\begin{aligned} a_1(z, x) &\equiv a_1(z) x = \left( \bar{a}_1(z) + \frac{1}{2} \bar{B}_1(z) \right) x, & B_1(z, x) &\equiv B_1(z) x^2 = \bar{B}_1(z) x^2, \\ a_2(z, x) &\equiv a_2(z) x = \left( \bar{a}_2(z) + \frac{1}{2} \bar{B}_2(z) \right) x, & B_2(z, x) &\equiv B_2(z) x^2 = \bar{B}_2(z) x^2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(s, t) &= \int_0^t \bar{a}(s, \tau) d\tau, & \bar{B}_1(s, t) &= \int_0^t \bar{B}(s, \tau) d\tau, \\ \bar{a}_2(s, t) &= \int_0^s \bar{a}(\sigma, t) d\sigma, & \bar{B}_2(s, t) &= \int_0^s \bar{B}(\sigma, t) d\sigma, \end{aligned}$$

para cualesquiera  $z = (s, t) \in I$ ,  $x \in \mathbf{R}_+$ .

Además, si consideramos  $Y(z) = \log X(z)$ ,  $\{Y(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano, donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son los coeficientes de difusión del campo y  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$ ,  $\bar{B}_1$  y  $\bar{B}_2$  son los coeficientes de difusión uniparamétricos.

A lo largo de esta sección notaremos

$$\begin{aligned} E[Y(z)] &= m_Y(z), & var(Y(z)) &= \sigma_Y^2(z), \\ cov(Y(z), Y(z')) &= c_Y(z, z') = \sigma_Y^2(z \wedge z'), \end{aligned}$$

donde

$$m_Y(z) = m_0 + \int_0^s \int_0^t \bar{a}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau, \quad (4.20)$$

$$\sigma_Y^2(z) = \sigma_0^2 + \int_0^s \int_0^t \bar{B}(\sigma, \tau) d\sigma d\tau. \quad (4.21)$$

También usaremos la notación

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_Y &= (\sigma_Y^2(z_0 \wedge z_1), \dots, \sigma_Y^2(z_0 \wedge z_n))^t, \\ \Sigma_Y &= (\sigma_Y^2(z_i \wedge z_j))_{i,j=1,\dots,n}, \\ \mathbf{m}_Y &= (m_Y(z_1), \dots, m_Y(z_n))^t. \end{aligned}$$

### Planteamiento y tratamiento del problema

Sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  una muestra de  $n$  datos tomados del campo de difusión lognormal que acabamos de considerar,  $\{X(z); z \in I\}$ . Nuestro objetivo es estimar  $X(z_0)$ . Para ello transformamos los datos de la escala  $X$  a la escala  $Y$  obteniendo la muestra

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= (Y(z_1), \dots, Y(z_n))^t \\ &= (\log X(z_1), \dots, \log X(z_n))^t.\end{aligned}$$

A partir de estos datos obtendremos el predictor kriging que corresponda (según las hipótesis de partida) para  $Y(z_0)$ , que notaremos  $\hat{Y}(z_0)$ . Obtendremos el predictor para  $X(z_0)$  a partir de una transformación del predictor  $\hat{Y}(z_0)$  que sea insesgada de  $X(z_0)$ . De esta forma aprovecharemos la optimalidad del predictor gaussiano (*Observación 4.1*) para obtener un buen predictor en el caso lognormal.

### Kriging Lognormal Simple

- Sea  $\{X(z); z \in I\}$  el campo de difusión lognormal que hemos definido al principio del apartado. Supongamos que  $m_0$  y  $\sigma_0^2$  son constantes conocidas y que los coeficientes de difusión  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son funciones conocidas cualquiera que sea  $z \in I$ . Estas condiciones implican claramente que la media,  $m_Y(z)$ , y la covarianza,  $\sigma_Y^2(z \wedge z')$ , del campo gaussiano asociado son funciones conocidas para cualesquiera valores de  $z, z' \in I$ .

Sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  una muestra de  $n$  datos tomados del campo de difusión lognormal  $\{X(z); z \in I\}$  y sea  $\mathbf{Y} = (Y(z_1), \dots, Y(z_n))^t$  la muestra de datos transformada.

Estamos, pues, en condiciones de aplicar el kriging gaussiano simple a los datos transformados  $\mathbf{Y}$ . El predictor para  $Y(z_0)$  aplicando (4.4) es

$$\hat{Y}(z_0) = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y) + m_Y(z_0).$$

- Consideremos el predictor que resulta al hacer transformada inversa a este valor,

$$\exp \left\{ \hat{Y}(z_0) \right\} = \exp \left\{ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y) + m_Y(z_0) \right\}.$$

Veamos que este valor no es un predictor insesgado de  $X(z_0)$ , esto es, veamos que

$$E \left[ \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) \right\} \right] \neq E[X(z_0)] = \exp \left\{ m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} \right\}.$$

En efecto, sabemos que

$$\mathbf{Y} = (Y(z_1), \dots, Y(z_n))^t \rightsquigarrow N_n(\mathbf{m}_Y, \Sigma_Y)$$

por lo que, aplicando la *Proposición 1.10* de [13],

$$\hat{Y}(z_0) = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y) + m_Y(z_0) \rightsquigarrow N(m_Y(z_0), \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y) \quad (4.22)$$

y, por tanto,

$$\exp \left\{ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y) + m_Y(z_0) \right\}$$

tiene una distribución lognormal cuya media, aplicando (4.28), es

$$E \left[ \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) \right\} \right] = \exp \left\{ m_Y(z_0) + \frac{\mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\},$$

por lo que concluimos que  $\exp \left\{ \hat{Y}(z_0) \right\}$  no es un predictor insesgado para  $X(z_0)$ .

- Sin embargo, podemos expresar

$$E \left[ \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) \right\} \right] = \exp \left\{ m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} - \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\}.$$

En consecuencia, corrigiendo la sesgidez, un predictor insesgado de  $X(z_0)$  es

$$\begin{aligned} \hat{X}(z_0) &= \exp \left\{ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y) + m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\} = \exp \left[ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Y_{sk}}^2(z_0)}{2} \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

donde hemos utilizado las expresiones (4.4) y (4.5) ( $\sigma_{Y_{sk}}^2(z_0)$  denota la varianza del kriging simple del campo gaussiano).

- Calculemos la varianza del error de predicción

$$E \left[ \left( X(z_0) - \hat{X}(z_0) \right)^2 \right].$$

Desarrollando el cuadrado,

$$E \left[ \left( X(z_0) - \hat{X}(z_0) \right)^2 \right] = E \left[ X(z_0)^2 \right] + E \left[ \hat{X}(z_0)^2 \right] - 2E \left[ X(z_0) \hat{X}(z_0) \right].$$

Calculemos cada uno de estos valores separadamente:

1. Puesto que  $Y(z_0) \sim N(m_Y(z_0), \sigma_Y^2(z_0))$ , aplicando (2.23) tenemos que

$$\begin{aligned} E \left[ X(z_0)^2 \right] &= \exp \{ 2m_Y(z_0) + 2\sigma_Y^2(z_0) \} \\ &= \exp \{ 2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0) \} \exp \{ \sigma_Y^2(z_0) \}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

2. Para calcular  $E \left[ \hat{X}(z_0)^2 \right]$ , calculemos la distribución de

$$\hat{X}(z_0) = \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\}.$$

Del punto anterior, sabemos que

$$\hat{Y}(z_0) \sim N(m_Y(z_0), \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y),$$

por lo que

$$\hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2}$$

tiene una distribución

$$N \left( m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2}, \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y \right).$$

En consecuencia,  $\hat{X}(z_0)$  tiene una distribución lognormal cuyo momento de segundo orden, aplicando (2.23), es

$$\begin{aligned} E \left[ \hat{X}(z_0)^2 \right] &= \exp \{ 2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y + 2\mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y \} \\ &= \exp \{ 2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0) + \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y \} \\ &= \exp \{ 2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0) \} \exp \left\{ \text{var} \left( \hat{Y}(z_0) \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

ya que  $\text{var} \left( \hat{Y}(z_0) \right) = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y$  (véase 4.22).

3. Finalmente, calculemos

$$\begin{aligned}
E \left[ X(z_0) \hat{X}(z_0) \right] &= \\
&= E \left[ \exp \{ Y(z_0) \} \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\} \right] \\
&= E \left[ \exp \{ Y(z_0) + \hat{Y}(z_0) \} \right] \exp \left\{ \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \right\}. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$Y(z_0) \rightsquigarrow N(m_Y(z_0), \sigma_Y^2(z_0)) \quad (4.27)$$

$$\hat{Y}(z_0) = \sum_{i=1}^n l_i Y(z_i) + k \rightsquigarrow N(m_Y(z_0), \text{var}(\hat{Y}(z_0))) \quad (4.28)$$

y que  $\{Y(z); z \in I\}$  es un campo gaussiano. Por tanto,

$$Y(z_0) + \hat{Y}(z_0)$$

tiene una distribución

$$N\left(2m_Y(z_0), \sigma_Y^2(z_0) + \text{var}(\hat{Y}(z_0)) + 2\text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0))\right)$$

y, por tanto,  $\exp \{ Y(z_0) + \hat{Y}(z_0) \}$  tiene una distribución lognormal de media

$$\begin{aligned}
E \left[ \exp \{ Y(z_0) + \hat{Y}(z_0) \} \right] &= \\
&= \exp \left\{ 2m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + \frac{\text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} + \text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0)) \right\}.
\end{aligned}$$

Calculemos  $\text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0))$ ; utilizando (4.27) y (4.28) tenemos que

$$\text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0)) = E \left[ (Y(z_0) - m_Y(z_0)) \left( \sum_{i=1}^n l_i (Y(z_i) - m_Y(z_i)) \right) \right]$$

(ya que en el desarrollo del kriging simple tomamos  $k = m_Y(z_0) - \sum_{i=1}^n l_i m_Y(z_i)$ )

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n l_i E[(Y(z_0) - m_Y(z_0))(Y(z_i) - m_Y(z_i))] \\
&= \sum_{i=1}^n l_i c(z_0, z_i) = \mathbf{L}^t \mathbf{c}_Y = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y,
\end{aligned}$$

donde para la última igualdad hemos usado el valor de  $\mathbf{L}^t$  óptimo. Por lo tanto,

$$\text{cov}\left(Y(z_0), \hat{Y}(z_0)\right) = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y = \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left\{Y(z_0) + \hat{Y}(z_0)\right\}\right] &= \\ &= \exp\left\{2m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + \frac{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)}{2} + \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo en (4.26) obtenemos que

$$\begin{aligned} E\left[X(z_0) \hat{X}(z_0)\right] &= \\ &= \exp\left\{2m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + \frac{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)}{2} + \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\} \\ &\quad \cdot \exp\left\{\frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0) + \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\} \\ &= \exp\left\{2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0)\right\} \exp\left\{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Entonces la varianza del error de predicción (utilizando (4.24), (4.25) y (4.29)) es

$$\begin{aligned} E\left[\left(X(z_0) - \hat{X}(z_0)\right)^2\right] &= \\ &= \exp\left\{2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0)\right\} \\ &\quad \cdot \left[\exp\left\{\sigma_Y^2(z_0)\right\} + \exp\left\{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\} - 2 \exp\left\{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\}\right] \\ &= \exp\left\{2m_Y(z_0) + \sigma_Y^2(z_0)\right\} \\ &\quad \cdot \left[\exp\left\{\sigma_Y^2(z_0)\right\} - \exp\left\{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right\}\right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde  $m_Y(z_0)$  y  $\sigma_Y^2(z_0)$  se calculan usando las expresiones (4.20) y (4.21), respectivamente, y donde  $\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right) = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y$ .

Resumimos estos resultados en la siguiente proposición.



**Proposición 4.1** Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de Markov biparamétrico positivo donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$ ,  $m_0$  y  $\sigma_0^2$  constantes conocidas. Supongamos que la densidad de transición del campo está dada por (2.12), donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son funciones continuas en  $I$  y conocidas. Sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  una muestra de dicho campo e  $\mathbf{Y} = (Y(z_1), \dots, Y(z_n))^t$  la muestra de datos transformada. Sea  $z_0 \in I$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \hat{X}(z_0) &= \exp \left\{ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{m}_Y) + m_Y(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Ysk}^2(z_0)}{2} \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{c}_Y = (\sigma_Y^2(z_0 \wedge z_1), \dots, \sigma_Y^2(z_0 \wedge z_n))^t$ ,  $\Sigma_Y$  es una matriz  $n \times n$  cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $\sigma_Y^2(z_i \wedge z_j)$  y  $\mathbf{m}_Y = (m_Y(z_1), \dots, m_Y(z_n))^t$  (véase (4.20) y (4.21)) es un predictor de  $X(z_0)$  insesgado con varianza de error de predicción dada por (4.30).

### Kriging Lognormal Ordinario en término de covarianzas

- Sea  $\{X(z); z \in I\}$  el campo de difusión lognormal que hemos definido al principio del apartado. Supongamos que  $m_0$  es desconocida, que  $\sigma_0^2$  es conocida, que  $\bar{a}(z) = 0$  cualquiera que sea  $z \in I$  y que  $\bar{B}(z)$  es una función continua en  $I$  y conocida. En estas condiciones, el campo gaussiano asociado  $\{Y(z) = \log X(z); z \in I\}$  es un campo con media desconocida pero constante  $m_Y = m_0$ . Notaremos

$$\mathbf{m}_Y = (m_Y, \dots, m_Y)^t.$$

Sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  una muestra de  $n$  datos tomados del campo de difusión lognormal  $\{X(z); z \in I\}$  y sea  $\mathbf{Y} = (Y(z_1), \dots, Y(z_n))^t$  la muestra de datos transformada.

Estamos, pues, en condiciones de aplicar el kriging gaussiano ordinario en términos de covarianzas a los datos transformados  $\mathbf{Y}$ . El predictor para  $Y(z_0)$ , aplicando (4.15), es

$$\hat{Y}(z_0) = \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y} + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y) (\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y})}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}}. \quad (4.31)$$

• En esta situación, si denotamos  $\sigma_{Y_k}^2(z_0)$  la varianza del kriging ordinario, un predictor para  $X(z_0)$  del tipo que hemos propuesto para el caso de kriging simple, (4.23), sería

$$\exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Y_k}^2(z_0)}{2} \right\},$$

donde la expresión de  $\hat{Y}(z_0)$  está dada por (4.31) y recordamos que (véase 4.17)

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_k}^2(z_0) &= \sigma_Y^2(z_0) - \lambda^t \mathbf{c}_Y + M \\ &= \sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y)^2}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}}. \end{aligned}$$

Sin embargo, el estimador propuesto resulta ser sesgado.

En efecto, puesto que

$$\mathbf{Y} = (Y(z_1), \dots, Y(z_n)) \rightsquigarrow N(\mathbf{m}_Y, \Sigma_Y),$$

aplicando la *Proposición 1.10* de [13] tenemos que

$$\hat{Y}(z_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(z_i) = \lambda^t \mathbf{Y} = \left[ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y) (\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1})}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}} \right] \mathbf{Y}$$

tiene una distribución gaussiana de media

$$E \left[ \hat{Y}(z_0) \right] = \left[ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y) (\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1})}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}} \right] \mathbf{m}_Y = \lambda^t \mathbf{m}_Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_Y = m_Y$$

y varianza

$$\text{var} \left( \hat{Y}(z_0) \right) = \lambda^t \Sigma_Y^{-1} \lambda = \left[ \mathbf{c}_Y^t + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y)}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1}^t \right] \Sigma_Y^{-1} \left[ \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y)}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}} \mathbf{1} + \mathbf{c}_Y \right]. \quad (4.32)$$

Esto es,

$$\hat{Y}(z_0) \rightsquigarrow N \left( m_Y, \text{var} \left( \hat{Y}(z_0) \right) \right).$$

Entonces,

$$\hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Yk}^2(z_0)}{2} \rightsquigarrow N\left(m_Y + \frac{\sigma_{Yk}^2(z_0)}{2}, \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right).$$

Se puede comprobar fácilmente, a partir de las ecuaciones del kriging ordinario, ecuaciones (4.13), que

$$\lambda^t \Sigma_Y^{-1} \lambda = \lambda^t \mathbf{c}_Y + M,$$

por lo que, teniendo en cuenta que  $\lambda^t \Sigma_Y^{-1} \lambda = \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \sigma_{Yk}^2(z_0) &= \sigma_Y^2(z_0) - \lambda^t \mathbf{c}_Y + M \\ &= \sigma_Y^2(z_0) - \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right) + M + M \\ &= \sigma_Y^2(z_0) - \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right) + 2M. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Yk}^2(z_0)}{2} \rightsquigarrow N\left(m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right) + 2M}{2}, \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)\right).$$

Y, entonces,

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left\{\hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Yk}^2(z_0)}{2}\right\}\right] &= \\ &= \exp\left\{m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right) + 2M}{2} + \frac{\text{var}\left(\hat{Y}(z_0)\right)}{2}\right\} \\ &= \exp\left\{m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + M\right\}, \end{aligned}$$

por lo que el predictor propuesto no es insesgado.

- Corrigiendo la sesgidez, un estimador insesgado de  $X(z_0)$  para el caso en el que la

media  $m_Y$  es desconocida sería

$$\begin{aligned}
 \hat{X}(z_0) &= \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Yk}^2(z_0)}{2} - M \right\} \\
 &= \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0)) + 2M}{2} - M \right\} \\
 &= \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

- La varianza del error de predicción es

$$E \left[ \left( X(z_0) - \hat{X}(z_0) \right)^2 \right] = E \left[ X(z_0)^2 \right] + E \left[ \hat{X}(z_0)^2 \right] - 2E \left[ X(z_0) \hat{X}(z_0) \right].$$

Calculemos cada uno de estos términos separadamente:

1. Claramente

$$E \left[ X(z_0)^2 \right] = \exp \{ 2m_Y + \sigma_Y^2(z_0) \} \exp \{ \sigma_Y^2(z_0) \}.$$

2. Por otro lado, puesto que

$$\hat{Y}(z_0) \rightsquigarrow N \left( m_Y, \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right),$$

tenemos que

$$\hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \rightsquigarrow N \left( m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2}, \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right).$$

Por tanto,  $\hat{X}(z_0) = \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \left( \sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right) / 2 \right\}$  tendrá una distribución lognormal cuyo momento de segundo orden, aplicando (2.23), es

$$\begin{aligned}
 E \left[ \hat{X}(z_0)^2 \right] &= \exp \left\{ 2 \left( m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \right) + \frac{4}{2} \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right\} \\
 &= \exp \left\{ 2m_Y + \sigma_Y^2(z_0) + \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right\} \\
 &= \exp \{ 2m_Y + \sigma_Y^2(z_0) \} \exp \{ \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \}.
 \end{aligned}$$

3. Finalmente, calculemos

$$\begin{aligned}
E \left[ X(z_0) \hat{X}(z_0) \right] &= \\
&= E \left[ \exp \{ Y(z_0) \} \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \right\} \right] \\
&= E \left[ \exp \{ Y(z_0) + \hat{Y}(z_0) \} \right] \exp \left\{ \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \right\}. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
Y(z_0) &\sim N(m_Y, \sigma_Y^2(z_0)), \\
\hat{Y}(z_0) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(z_i) \sim N(m_Y, \text{var}(\hat{Y}(z_0))),
\end{aligned}$$

y que  $\{Y(z); z \in I\}$  es un campo gaussiano. Por tanto,

$$Y(z_0) + \hat{Y}(z_0)$$

tiene una distribución

$$N\left(2m_Y, \sigma_Y^2(z_0) + \text{var}(\hat{Y}(z_0)) + 2\text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0))\right),$$

y  $\exp\{Y(z_0) + \hat{Y}(z_0)\}$  tiene una distribución lognormal de media

$$\begin{aligned}
E \left[ \exp \{ Y(z_0) + \hat{Y}(z_0) \} \right] &= \\
&= \exp \left\{ 2m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + \frac{\text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} + \text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0)) \right\}.
\end{aligned}$$

Calculemos  $\text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0))$ ; tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Y(z_0), \hat{Y}(z_0)) &= E \left[ (Y(z_0) - m_Y(z_0)) \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i (Y(z_i) - m_Y(z_i)) \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i E[(Y(z_0) - m_Y(z_0))(Y(z_i) - m_Y(z_i))] \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i c(z_0, z_i) = \lambda^t \mathbf{c}_Y = \text{var}(\hat{Y}(z_0)) - M.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E \left[ \exp \left\{ Y(z_0) + \hat{Y}(z_0) \right\} \right] &= \\ &= \exp \left\{ 2m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + \frac{\text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} + \text{var}(\hat{Y}(z_0)) - M \right\}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (4.34) tenemos que

$$\begin{aligned} E \left[ X(z_0) \hat{X}(z_0) \right] &= \\ &= \exp \left\{ 2m_Y + \frac{\sigma_Y^2(z_0)}{2} + \frac{\text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} + \text{var}(\hat{Y}(z_0)) - M \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \frac{\sigma_Y^2(z_0) - \text{var}(\hat{Y}(z_0))}{2} \right\} \\ &= \exp \left\{ 2m_Y + \sigma_Y^2(z_0) + \text{var}(\hat{Y}(z_0)) - M \right\} \\ &= \exp \left\{ 2m_Y + \sigma^2(z_0) \right\} \exp \left\{ \text{var}(\hat{Y}(z_0)) - M \right\}. \end{aligned}$$

Reuniendo los resultados anteriores, tenemos que la varianza del error de predicción mínima para el predictor (4.33) es

$$\begin{aligned} E \left[ \left( X(z_0) - \hat{X}(z_0) \right)^2 \right] &= \exp \left\{ 2m_Y + \sigma_Y^2(z_0) \right\} \\ &\quad \cdot \left[ \exp \left\{ \sigma_Y^2(z_0) \right\} + \exp \left\{ \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right\} - 2 \exp \left\{ \text{var}(\hat{Y}(z_0)) - M \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ 2m_Y + \sigma_Y^2(z_0) \right\} \cdot \left[ \exp \left\{ \sigma_Y^2(z_0) \right\} + \exp \left\{ \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right\} (1 - 2e^{-M}) \right], \end{aligned}$$

donde  $\text{var}(\hat{Y}(z_0))$  corresponde a la expresión (4.32) y  $M$  es el multiplicador de Lagrange, que recordamos que se calcula como

$$M = \frac{1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}}.$$

Al ser la media desconocida, la varianza del error de predicción mínima también será desconocida. La estimamos por

$$\begin{aligned} \hat{E} \left[ \left( X(z_0) - \hat{X}(z_0) \right)^2 \right] &= \exp \left\{ 2\hat{m}_Y + \sigma_Y^2(z_0) \right\} \\ &\quad \cdot \left[ \exp \left\{ \sigma_Y^2(z_0) \right\} + \exp \left\{ \text{var}(\hat{Y}(z_0)) \right\} (1 - 2e^{-M}) \right], \end{aligned} \tag{4.35}$$

donde

$$\hat{m}_Y = \hat{m}_0 = \frac{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y}}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}}$$

(véase 4.16).

Resumimos estos resultados en la siguiente proposición.

**Proposición 4.2** Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de Markov biparamétrico positivo donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y  $\text{var}(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$ ,  $m_0$  desconocida y  $\sigma_0^2$  conocida. Supongamos que la densidad de transición del campo está dada por (2.12), donde  $\bar{a}(z) = 0$  cualquiera que sea  $z \in I$  y  $\bar{B}(z)$  es una función continua en  $I$  y conocida. Sea  $\mathbf{X} = (X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  una muestra de dicho campo e  $\mathbf{Y} = (Y(z_1), \dots, Y(z_n))^t$  la muestra de datos transformada. Sea  $z_0 \in I$ . Entonces,

$$\hat{m}_0 = \frac{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y}}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}},$$

y

$$\begin{aligned} \hat{X}(z_0) &= \exp \left\{ \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{Y} + (1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y) \hat{m}_0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \sigma_Y^2(z_0) - \mathbf{c}_Y^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y + \frac{(1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y)^2}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}} \right) - \frac{1 - \mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{c}_Y}{\mathbf{1}^t \Sigma_Y^{-1} \mathbf{1}} \right\} \\ &= \exp \left\{ \hat{Y}(z_0) + \frac{\sigma_{Yk}^2(z_0)}{2} - M \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{c}_Y = (\sigma_Y^2(z_0 \wedge z_1), \dots, \sigma_Y^2(z_0 \wedge z_n))^t$  y  $\Sigma_Y$  es una matriz  $n \times n$  cuyo  $(i, j)$ -ésimo elemento es  $\sigma_Y^2(z_i \wedge z_j)$  (véase (4.21)), es un predictor de  $X(z_0)$  insesgado con varianza de error de predicción dada por (4.35).

**Observación 4.4** El predictor para  $X(z_0)$  dado por (4.33) es el que minimiza

$$E \left[ \left( \log X(z_0) - \hat{Y}(z_0) \right)^2 \right] = E \left[ \left( Y(z_0) - \hat{Y}(z_0) \right)^2 \right],$$

supuesto que  $\hat{Y}(z_0) = \exp[\sum_{i=1}^n \lambda_i \log X(z_i)]$ ,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  y  $E[X(z_0)] = E[\hat{X}(z_0)]$ . Por tanto, observar que  $\hat{X}(z_0)$  no es el mejor predictor insesgado ni es predictor óptimo cuando la media  $m_Y$  es desconocida.

## 4.6 Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal

En esta sección vamos a aplicar un método que, combinando simulación no condicionada y kriging, permite generar simulaciones condicionadas. En primer lugar vamos a describir el método que utilizaremos para obtener simulaciones no condicionadas.

### 4.6.1 Simulación No Restringida de Campos Aleatorios

La técnica que vamos a aplicar para simular una realización no condicionada del campo, se conoce como simulación no restringida de campos aleatorios y consiste en lo siguiente. Supongamos que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo aleatorio biparamétrico. Sea  $(X(z_1), \dots, X(z_n))^t$  un vector del campo con densidad de probabilidad  $f(x_1, \dots, x_n)$ . A partir de esta función de densidad, podemos calcular las densidades de probabilidad  $f(x_1)$ ,  $f(x_2/x_1)$ , ...,  $f(x_n/x_1, \dots, x_{n-1})$ . Las correspondientes distribuciones de probabilidad se obtienen como

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx, \\ F(x_2/x_1) &= \int_{-\infty}^{x_2} f(x/x_1) dx, \\ &\vdots \\ F(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}) &= \int_{-\infty}^{x_n} f(x/x_1, \dots, x_{n-1}) dx. \end{aligned}$$

Finalmente, si  $u_1, \dots, u_n$  son números aleatorios independientes entre 0 y 1, las realizaciones del campo se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones respecto a  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} F(x_1) &= u_1, \\ F(x_2/x_1) &= u_2, \\ &\vdots \\ F(x_n/x_1, \dots, x_{n-1}) &= u_n \quad . \end{aligned}$$



### 4.6.2 Simulación Condicionada cuando la Media del Campo es Conocida

Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de Markov positivo donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  y  $var(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$ , ambas constantes conocidas. Supongamos que la densidad de transición del campo está dada por (2.12), donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son funciones continuas en  $I$  y conocidas. En estas condiciones, sabemos que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión lognormal biparamétrico. Además, si consideramos  $Y(z) = \log X(z)$ ,  $\{Y(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano, donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son los coeficientes de difusión del campo.

Llamaremos  $G$  al conjunto de posiciones del espacio paramétrico  $I$  donde se sitúan los valores del campo a los que vamos a condicionar,  $x_g^d = \{x^d(z_i) : z_i \in G\}$ , y, si llamamos  $y^d(z_i) = \log(x^d(z_i))$ , notaremos  $y_g^d = \{y^d(z_i) : z_i \in G\}$  al conjunto de valores transformados.

El procedimiento de simulación condicionada que vamos a aplicar consta de los siguientes pasos.

**Primer Paso** Predecir el conjunto de valores  $\{\widehat{y}(z_i) : z_i \in U\}$  a partir de los datos  $\{y^d(z_i) : z_i \in G\}$  utilizando el predictor de kriging gaussiano simple (véase la Sección 4.5.1 anterior).

**Segundo Paso** Simular una realización no condicionada  $\{y^u(z_i) : z_i \in S\}$ .

**Tercer Paso** Obtener el conjunto de predicciones  $\{\widehat{y}^u(z_i) : z_i \in U\}$  a partir de los datos  $\{y^u(z_i) : z_i \in G\}$ , utilizando el predictor de kriging gaussiano simple.

**Cuarto Paso** Obtener la realización de simulación condicionada para el campo gaussiano como:

$$y^c(z_i) = y^u(z_i) + [\widehat{y}(z_i) - \widehat{y}^u(z_i)], \quad \forall z_i \in S.$$

**Quinto Paso** Obtener la realización de simulación condicionada para el campo lognormal

como

$$x^c(z_i) = \frac{\exp\{y^u(z_i)\} \exp\{\widehat{y}(z_i)\}}{\exp\{\widehat{y}^u(z_i)\}} \equiv \frac{x^u(z_i) \widehat{x}(z_i)}{\widehat{x}^u(z_i)}, \quad \forall z_i \in S.$$

A continuación vamos a analizar los dos primeros momentos que produce esta aproximación. La variable aleatoria  $X^u(z_i)$  (donde  $x^u(z_i)$  es una realización de  $X^u(z_i)$ ) tiene una distribución lognormal,  $X^u(z_i) \rightsquigarrow \Lambda(m_Y(z_i), \sigma_Y^2(z_i))$ . La variable aleatoria  $\widehat{X}^u(z_i)$  también es una variable aleatoria con distribución lognormal,  $\widehat{X}^u(z_i) \rightsquigarrow \Lambda(m_Y(z_i), \sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Y^{sk,i}}^2)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} E[\widehat{Y}^u(z_i)] &= E\left[m_Y(z_i) + \sum_{j=1}^n l_j^i (Y_j^u(z_i) - m_Y(z_j))\right] \\ &= m_Y(z_i) + \sum_{j=1}^n l_j^i (E[Y_j^u(z_i)] - m_Y(z_j)) = m_Y(z_i), \end{aligned}$$

ya que  $E[Y_j^u(z_i)] - m_Y(z_j) = 0$  y

$$\begin{aligned} \text{var}(\widehat{Y}^u(z_i)) &= E\left[\widehat{Y}^u(z_i) - m_Y(z_i)\right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n l_j^i l_k^i E\left[(Y_j^u(z_i) - m_Y(z_j))(Y_k^u(z_i) - m_Y(z_k))\right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n l_j^i l_k^i c(z_j, z_k) = \sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Y^{sk,i}}^2. \end{aligned}$$

En consecuencia, el cociente  $X^u(z_i)/\widehat{X}^u(z_i)$  tiene una distribución  $\Lambda(0, \sigma_{Y^{sk,i}}^2)$ . En efecto,  $X^u(z_i)/\widehat{X}^u(z_i)$  tiene una distribución lognormal de media

$$E[Y^u(z_i)] - E[\widehat{Y}^u(z_i)] = m_Y(z_i) - m_Y(z_i) = 0$$

y varianza

$$\begin{aligned} \text{var}(Y^u(z_i)) - 2\text{cov}(Y^u(z_i), \widehat{Y}^u(z_i)) + \text{var}(\widehat{Y}^u(z_i)) &= \sigma_Y^2(z_i) - 2(\sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Y^{sk,i}}^2) \\ &\quad + (\sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Y^{sk,i}}^2) \\ &= \sigma_{Y^{sk,i}}^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 E \left[ \frac{X^u(z_i) \widehat{x}(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i)} \right] &= \widehat{x}(z_i) E \left[ \frac{X^u(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i)} \right] \\
 &= \exp \{ \widehat{y}(z_i) \} \exp \left\{ 0 + \frac{1}{2} \sigma_{Y_{sk,i}}^2 \right\} \\
 &= \widehat{X}(z_i) = E [X(z_i) / G],
 \end{aligned}$$

lo cual implica que la aproximación considerada produce una simulación condicionada insesgada (con respecto a los datos de la muestra). Además, esta aproximación también reproduce la varianza condicional:

$$\begin{aligned}
 var \left( \frac{X^u(z_i) \widehat{x}(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i)} \right) &= (\widehat{x}(z_i))^2 var \left( \frac{X^u(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i)} \right) \\
 &= \exp \{ 2\widehat{y}(z_i) \} e^{\sigma_{Y_{sk,i}}^2} (e^{\sigma_{Y_{sk,i}}^2} - 1) \\
 &= (\widehat{X}(z_i))^2 (e^{\sigma_{Y_{sk,i}}^2} - 1) \\
 &= var (X(z_i) / G).
 \end{aligned}$$

### Ejemplo de simulación condicionada

Supongamos que  $X(0,0)$  es una v.a. lognormal verificando

$$E[\log X(0,0)] = 0.25 \text{ y } var(\log X(0,0)) = 1.$$

Sea  $\{Y(z) = \log X(z); z \in I\}$  el campo de difusión gaussiano asociado al campo lognormal. En lo que sigue, vamos a suponer que los coeficientes de difusión y tendencia del campo gaussiano son los siguientes:

$$\bar{a}(z) \equiv 0,$$

$$\bar{B}(z) \equiv 1.$$

En primer lugar, vamos a describir cómo simular la realización no condicionada  $\{y^u(z_i) : z_i \in S\}$ . Los valores de dicha realización los vamos a obtener sobre una malla de tamaño  $n_s \times n_t$ , donde  $n_s$  es el número de valores que tomamos dentro del intervalo  $(0, S]$  y  $n_t$

el número de valores dentro del intervalo  $(0, T]$ . Al cruzar los valores que hemos tomado sobre uno y otro eje obtenemos las localizaciones de la malla. Los elementos de la malla los vamos a notar  $z_{ij}$ , donde  $i = 1, \dots, n_s$  y  $j = 1, \dots, n_t$ , y cada valor simulado en la localización  $z_{ij}$ ,  $Y(z_{ij}) \equiv y_{ij}^u$ . Esto es,  $S = \{z_{ij} : i = 1, \dots, n_s, j = 1, \dots, n_t\}$  y  $\{y^u(z_i) : z_i \in S\} \equiv \{y_{ij}^u : z_{ij} \in S\}$ .

Utilizando el método de simulación no restringida, y teniendo en cuenta que un campo de difusión es un campo de Markov, que para el campo considerado  $m_0 = 0.25$ ,  $\sigma_0^2 = 1$  y

$$Y(s, t) \rightsquigarrow N(0.25, 1 + st),$$

$$Y(s + h, t) / Y(s, t) = y \rightsquigarrow N(y, ht),$$

$$Y(s, t + k) / Y(s, t) = y \rightsquigarrow N(y, sk),$$

$$Y(s + h, t + k) / Y(s + h, t) = y_2, Y(s, t) = y, Y(s, t + k) = y_1 \rightsquigarrow N(y_1 + y_2 - y, hk),$$

se puede comprobar que si  $a_{ij}$ , para  $i = 1, \dots, n_s$  y  $j = 1, \dots, n_t$ , son  $n_s \times n_t$  valores aleatorios independientes de una distribución  $N(0, 1)$ , entonces los valores de la realización se obtienen como sigue:

$$y_{11}^u = 0.25 + a_{11} (\sqrt{1 + s_1 t_1});$$

para  $i = 2, \dots, n_s$  y  $j = 1$ ,

$$y_{i1}^u = y_{i-1,1} + a_{i1} \sqrt{(s_i - s_{i-1}) t_1};$$

para  $i = 1$ , y  $j = 2, \dots, n_t$ ,

$$y_{1j}^u = y_{1,j-1} + a_{1j} \sqrt{s_1 (t_j - t_{j-1})};$$

y para el resto de valores con  $i = 2, \dots, n_s$  y  $j = 2, \dots, n_t$ ,

$$y_{ij}^u = y_{i-1,j} + y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1} + a_{ij} \sqrt{(s_i - s_{i-1}) (t_j - t_{j-1})}.$$

(En la malla simulada con S-Plus, los incrementos  $s_i - s_{i-1}$  y  $t_j - t_{j-1}$  se toman constantes.)

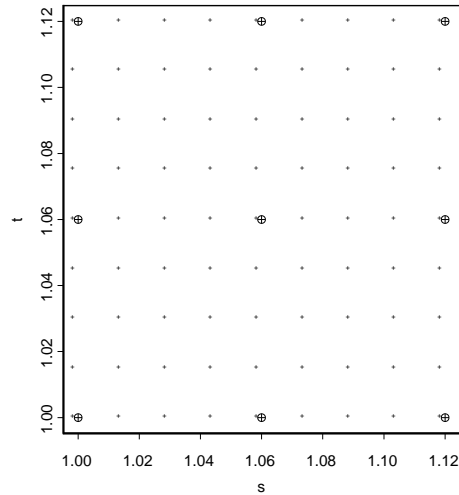


Figura 4.1: *Mallas con las 9 y 81 posiciones sobre las que vamos a simular los valores del campo a los que vamos a condicionar.*

Los ejemplos de simulaciones condicionadas que vamos a dar corresponden a dos situaciones. La primera cuando condicionamos a 9 valores del campo y la segunda cuando condicionamos a 81 valores (entre los cuales se encuentran los 9 anteriores). Puesto que no disponemos de datos reales del campo, los 9 y 81 valores a los que vamos a condicionar los obtendremos por el método de simulación no restringida descrita al principio de esta sección, utilizando el programa de S-PLUS descrito en el *Apéndice A* (para la comprensión de estos programas, consúltense [16] y [25]). La Figura 4.1 muestra las mallas sobre las que vamos a simular los 9 y 81 valores del campo y las Figuras 4.2 y 4.3, los gráficos de curvas de nivel correspondientes a dichos valores una vez simulados.

Para simular una realización condicionada del campo se ha utilizado el programa de S-PLUS descrito en el *Apéndice B*. Al ejecutarlo se obtienen los objetos `datosSCR` y `datosSC`. Las dos primeras columnas de estos objetos describen los valores de la malla y la tercera da el valor simulado en la posición que dan las dos primeras columnas; en el primer objeto,

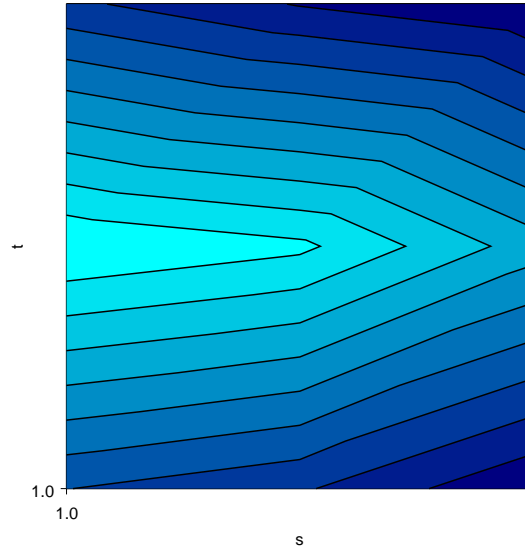


Figura 4.2: Gráfico de curvas de nivel para los 9 valores del campo de difusión lognormal obtenidos por simulación no condicionada.

cuando se condiciona a los 9 valores del campo, y en el segundo, cuando se condiciona a los 81 valores que obtuvimos aplicando el programa descrito en el *Apéndice A*. La Figura 4.4 muestra la malla sobre la que hemos realizado la simulación. El gráfico de curvas de nivel correspondiente a datosSCR puede observarse en la Figura 4.5 y el correspondiente a datosSC, en la Figura 4.6.

### 4.6.3 Simulación Condicionada cuando la Media del Campo es Desconocida pero Constante

Sea  $\{X(z); z \in I = [0, S] \times [0, T]\}$  un campo de difusión lognormal donde  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal o una v.a. constante verificando que  $E[\log X(0, 0)] = m_0$  es desconocida y  $\text{var}(\log X(0, 0)) = \sigma_0^2$  es conocida. Supongamos que la densidad de transición del campo está dada por (2.12), donde  $\bar{a}(z) = 0$  cualquiera que sea  $z \in I$  y  $\bar{B}(z)$  es una

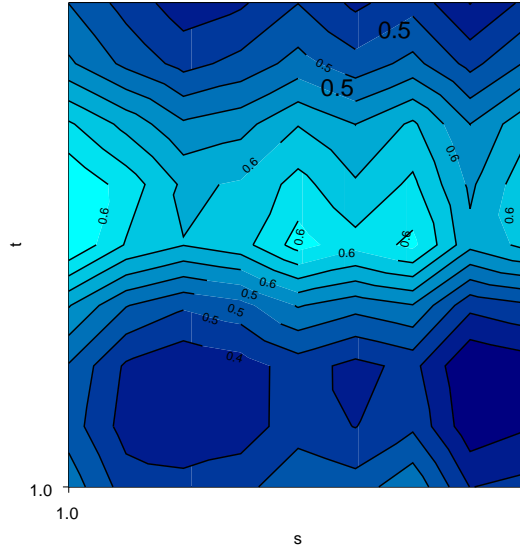


Figura 4.3: Gráfico de curvas de nivel para los 81 valores del campo de difusión lognormal obtenidos por simulación no condicionada.

función continua en  $I$  y conocida. En estas condiciones, sabemos que  $\{X(z); z \in I\}$  es un campo de difusión lognormal biparamétrico. Además, si consideramos  $Y(z) = \log X(z)$ ,  $\{Y(z); z \in I\}$  es un campo de difusión gaussiano, donde  $\bar{a}(z)$  y  $\bar{B}(z)$  son los coeficientes de difusión del campo.

Llamaremos  $G$  al conjunto de posiciones del espacio paramétrico  $I$  donde se sitúan los valores del campo a los que vamos a condicionar,  $x_g^d = \{x^d(z_i) : z_i \in G\}$  y si llamamos  $y^d(z_i) = \log(x^d(z_i))$ , notaremos  $y_g^d = \{y^d(z_i) : z_i \in G\}$  al conjunto de valores transformados.

El procedimiento de simulación condicionada consta de los siguientes pasos.

**Primer Paso** Predecir el conjunto de valores  $\{\hat{y}(z_i) : z_i \in U\}$  a partir de los datos  $\{y^d(z_i) : z_i \in G\}$  utilizando el predictor de kriging gaussiano ordinario en términos de covarianzas (véase la Sección 4.5.1). Notemos  $M$  al multiplicador de Lagrange

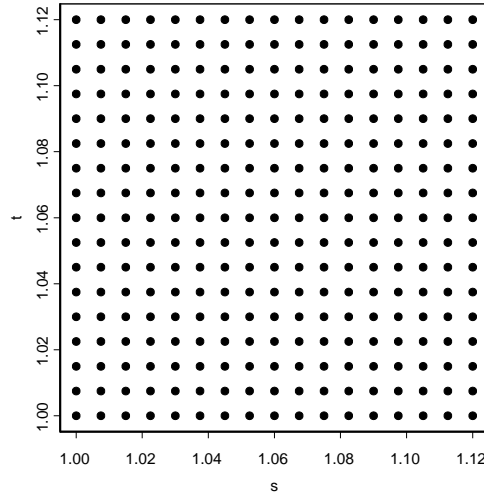


Figura 4.4: Malla con las 289 posiciones sobre las que vamos a realizar todas las simulaciones condicionadas.

correspondiente. Observemos que dicho multiplicador cambia de valor al cambiar el valor de  $z_i \in U$ , aunque no lo vamos a indicar en la notación, y que sobre las posiciones a las que condicionamos,  $z_i \in G$ , se anula.

**Segundo Paso** Simular una realización no condicionada  $\{y^u(z_i) : z_i \in S\}$ .

**Tercer Paso** Obtener el conjunto de predicciones  $\{\widehat{y^u}(z_i) : z_i \in U\}$  a partir de los datos  $\{y^u(z_i) : z_i \in G\}$ , utilizando el predictor de kriging gaussiano ordinario en términos de covarianzas.

**Cuarto Paso** Obtener la realización de simulación condicionada para el campo gaussiano como

$$y^c(z_i) = y^u(z_i) + \left[ \widehat{y}(z_i) - \widehat{y^u}(z_i) \right] - M, \quad \forall z_i \in S.$$

**Quinto Paso** Obtener la realización de simulación condicionada para el campo lognormal



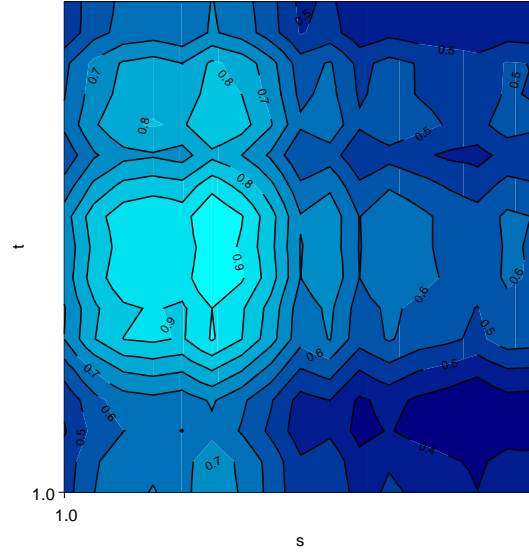


Figura 4.5: Gráfico de curvas de nivel para los valores de datos SCR obtenidos por simulación cuando condicionamos a 9 valores de un campo de difusión lognormal con media conocida.

como

$$x^c(z_i) = \frac{\exp\{y^u(z_i)\} \exp\{\widehat{y}(z_i)\}}{\exp\{\widehat{y}^u(z_i)\} \exp\{M\}} \equiv \frac{x^u(z_i) \widehat{x}(z_i)}{\widehat{x}^u(z_i) \exp\{M\}}, \quad \forall z_i \in S.$$

A continuación vamos a analizar los dos primeros momentos que producen esta aproximación. La variable aleatoria  $X^u(z_i)$  (donde  $x^u(z_i)$  es una realización de  $X^u(z_i)$ ) tiene una distribución lognormal,  $X^u(z_i) \rightsquigarrow \Lambda(m_0, \sigma_Y^2(z_i))$ . La variable aleatoria  $\widehat{X}^u(z_i)$  también es una variable aleatoria con distribución lognormal,  $\widehat{X}^u(z_i) \rightsquigarrow \Lambda(m_0, \sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Y_{k,i}}^2 + 2M)$ . En efecto,

$$E[\widehat{Y}^u(z_i)] = E\left[\sum_{j=1}^n \lambda_j^i Y_j^u(z_i)\right] = \sum_{j=1}^n \lambda_j^i E[Y_j^u(z_i)] = m_0,$$

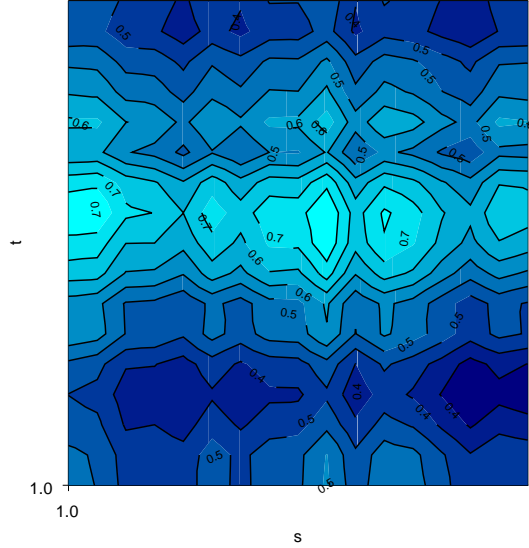


Figura 4.6: Gráfico de curvas de nivel para los valores de datosSC obtenidos por simulación cuando condicionamos a 81 valores del campo de un difusión lognormal con media conocida.

ya que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j^i = 1$ , y

$$\begin{aligned}
 \text{var} \left( \widehat{Y}^u(z_i) \right) &= E \left[ \widehat{Y}^u(z_i) - m_0 \right]^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j^i \lambda_k^i E \left[ (Y_j^u(z_i) - m_0) (Y_k^u(z_i) - m_0) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j^i \lambda_k^i c(z_j, z_k) = \sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Y_{k,i}}^2 + 2M.
 \end{aligned}$$

En consecuencia, el cociente  $X^u(z_i) / \widehat{X}^u(z_i)$  tiene una distribución  $\Lambda \left( 0, \sigma_{Y_{k,i}}^2 \right)$ . En efecto,  $X^u(z_i) / \widehat{X}^u(z_i)$  tiene una distribución lognormal de media

$$E[Y^u(z_i)] - E[\widehat{Y}^u(z_i)] = m_0 - m_0 = 0$$

y varianza

$$\begin{aligned}
 \text{var}(Y^u(z_i)) - 2\text{cov}(Y^u(z_i), \widehat{Y}^u(z_i)) + \text{var}(\widehat{Y}^u(z_i)) &= \sigma_Y^2(z_i) \\
 &\quad - 2(\sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Yk,i}^2 + M) \\
 &\quad + (\sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Yk,i}^2 + 2M) \\
 &= \sigma_{Yk,i}^2.
 \end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(Y^u(z_i), \widehat{Y}^u(z_i)) &= E \left[ (Y^u(z_i) - m_0) \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j^i Y_j^u(z_i) - m_0 \right) \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n \lambda_j^i c(z_i, z_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_j^i \lambda_k^i c(z_j, z_k) - M \\
 &= \sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Yk,i}^2 + 2M - M = \sigma_Y^2(z_i) - \sigma_{Yk,i}^2 + M.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 E \left[ \frac{X^u(z_i) \widehat{x}(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i) \exp\{M\}} \right] &= \widehat{x}(z_i) \exp\{-M\} E \left[ \frac{X^u(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i)} \right] \\
 &= \exp\{\widehat{y}(z_i)\} \exp\left\{0 + \frac{1}{2}\sigma_{Yk,i}^2 - M\right\} \\
 &= \widehat{X}(z_i) = E[X(z_i)/G],
 \end{aligned}$$

lo cual implica que la aproximación considerada produce una simulación condicionada insesgada (con respecto a los datos de la muestra). Además, esta aproximación también reproduce la varianza condicional:

$$\begin{aligned}
 \text{var} \left( \frac{X^u(z_i) \widehat{x}(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i) \exp\{M\}} \right) &= \frac{(\widehat{x}(z_i))^2}{\exp\{2M\}} \text{var} \left( \frac{X^u(z_i)}{\widehat{X}^u(z_i)} \right) \\
 &= \exp\{2\widehat{y}(z_i) - 2M\} e^{\sigma_{Yk,i}^2} (e^{\sigma_{Yk,i}^2} - 1) \\
 &= (\widehat{X}(z_i))^2 (e^{\sigma_{Yk,i}^2} - 1) \\
 &= \text{var}(X(z_i)/G).
 \end{aligned}$$

**Ejemplo de simulación condicionada**

Supongamos que  $X(0, 0)$  es una v.a. lognormal verificando

$$E[\log X(0, 0)] = m_0 \text{ (desconocida) y } \text{var}(\log X(0, 0)) = 1.$$

De acuerdo con los resultados anteriores estimaremos  $m_0$  por la expresión que dimos en la *Proposición 4.2*.

Sea  $\{Y(z) = \log X(z); z \in I\}$  el campo de difusión gaussiano asociado al campo lognormal. En lo que sigue, vamos a suponer que los coeficientes de difusión y tendencia del campo gaussiano son los siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{a}(z) &\equiv 0, \\ \bar{B}(z) &\equiv 1. \end{aligned}$$

Como antes, en principio, vamos a describir cómo simular la realización no condicionada  $\{y^u(z_i) : z_i \in S\}$ . Los valores de esta realización los vamos a obtener sobre una malla de tamaño  $n_s \times n_t$ , donde  $n_s$  es el número de valores que tomamos dentro del intervalo  $(0, S]$  y  $n_t$  el número de valores dentro del intervalo  $(0, T]$ . Al cruzar los valores que hemos tomado sobre uno y otro eje obtenemos las localizaciones de la malla. Los elementos de la malla los vamos a notar  $z_{ij}$ , donde  $i = 1, \dots, n_s$  y  $j = 1, \dots, n_t$ , y cada valor simulado en la localización  $z_{ij}$ ,  $Y(z_{ij}) \equiv y_{ij}^u$ . Esto es,  $S = \{z_{ij} : i = 1, \dots, n_s, j = 1, \dots, n_t\}$  y  $\{y^u(z_i) : z_i \in S\} \equiv \{y_{ij}^u : z_{ij} \in S\}$ .

Utilizando el método de simulación no restringida, y teniendo en cuenta que un campo de difusión es un campo de Markov, que para el campo considerado estimaremos  $m_0$  por  $\hat{m}_0$ , que  $\sigma_0^2 = 1$  y

$$\begin{aligned} Y(s, t) &\rightsquigarrow N(\hat{m}_0, 1 + st), \\ Y(s + h, t) / Y(s, t) &= y \rightsquigarrow N(y, ht), \\ Y(s, t + k) / Y(s, t) &= y \rightsquigarrow N(y, sk), \\ Y(s + h, t + k) / Y(s + h, t) &= y_2, Y(s, t) = y, Y(s, t + k) = y_1 \rightsquigarrow N(y_1 + y_2 - y, hk), \end{aligned}$$

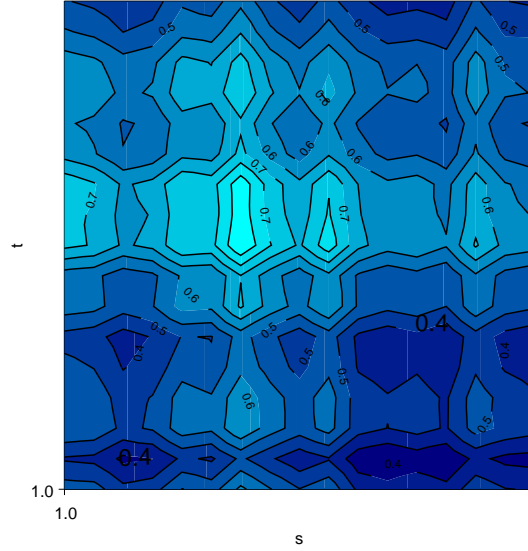


Figura 4.7: Gráfico de curvas de nivel para los valores de datosSCR.md obtenidos por simulación cuando condicionamos a 9 valores de un campo de difusión lognormal con media desconocida pero constante.

se puede comprobar que si  $a_{ij}$ , donde  $i = 1, \dots, n_s$  y  $j = 1, \dots, n_t$  son  $n_s \times n_t$  valores aleatorios independientes de una distribución  $N(0, 1)$ , entonces, los valores de la realización se obtienen como sigue:

$$y_{11}^u = \hat{m}_0 + a_{11} (\sqrt{1 + s_1 t_1});$$

para  $i = 2, \dots, n_s$  y  $j = 1$ ,

$$y_{i1}^u = y_{i-1,1} + a_{i1} \sqrt{(s_i - s_{i-1}) t_1};$$

para  $i = 1$ , y  $j = 2, \dots, n_t$ ,

$$y_{1j}^u = y_{1,j-1} + a_{1j} \sqrt{s_1 (t_j - t_{j-1})},$$

y para el resto de valores con  $i = 2, \dots, n_s$  y  $j = 2, \dots, n_t$ ,

$$y_{ij}^u = y_{i-1,j} + y_{i,j-1} - y_{i-1,j-1} + a_{ij} \sqrt{(s_i - s_{i-1})(t_j - t_{j-1})}.$$

(En la malla simulada con S-Plus, los incrementos  $s_i - s_{i-1}$  y  $t_j - t_{j-1}$  se toman constantes.)

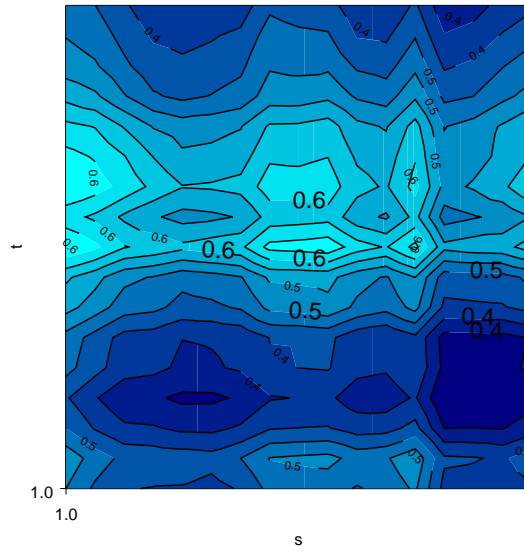


Figura 4.8: Gráfico de curvas de nivel para los valores de `datosSC.md` obtenidos por simulación cuando condicionamos a 81 valores de un campo de difusión lognormal con media desconocida pero constante.

Para simular una realización condicionada se ha utilizado el programa de S-PLUS descrito en el *Apéndice C*. Al ejecutarlo se obtienen los objetos `datosSCR.md` y `datosSC.md`. Las dos primeras columnas de estos objetos describen los valores de la malla y la tercera da el valor simulado en la posición que dan las dos primeras columnas; en el primer objeto, cuando se condiciona a 9 valores del campo, y, en el segundo, cuando se condiciona a los 81 valores que obtuvimos aplicando el programa descrito en el *Apéndice A*. La Figura 4.4 anterior muestra la malla sobre la que hemos realizado la simulación. El gráfico de curvas de nivel correspondiente a `datosSCR.md` puede observarse en la Figura 4.7 y el

correspondiente a datosSC.md, en la Figura 4.8.

## Apéndice A

# Simulación No Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal

El siguiente programa genera una realización no condicionada del campo de difusión lognormal considerado en el ejemplo del apartado 4.6.2 y las mallas de localizaciones necesarias en dicho ejemplo.

```
rm(st,previo,valor,st.valor,stR,previoR,valorR,st.valorR,stS)
s1<-1
s2<-1.12
ns<-9
t1<-1
t2<-1.12
nt<-9
nsR<-3
ntR<-3
h<-(s2-s1)/(ns-1)
k<-(t2-t1)/(nt-1)
tend<-0.25
```



```
st<-expand.grid(s=seq(s1,s2,len=ns), t=seq(t1,t2,len=nt))
stR<-expand.grid(s=seq(s1,s2,len=nsR),t=seq(t1,t2,len=ntR))
previo<-c(rep(2,ns*nt))
for(i in 1:(ns*nt)) for(j in 1:(nt-1)) for (r in 2:ns)
{if(i==1)
  {previo[i]<-tend+(rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(1+st$s[i]*st$t[i]))}
  else if ( i>1 && i<=ns )
    {previo[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(h*st$t[i])+previo[i-1]}
  else if ( i==(1+ns*j) )
    {previo[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(k*st$s[i])+previo[i-ns]}
  else if ( i==(r+ns*j) )
    {previo[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(h*k)+
      previo[i-1]+previo[i-ns]-previo[i-ns-1]}
  }
valor<-exp(previo)
previoR<-c(rep(1,nsR*ntR))
for(i in 1:nsR) for(j in 1:ntR)
  {previoR[i+(j-1)*nsR]<-previo[1+((i-1)*(ns-1)/(nsR-1))+((j-1)*ns*(nt-1)/(ntR-1))]}
valorR<-exp(previoR)
nsS<-17
ntS<-17
hS<-(s2-s1)/(nsS-1)
kS<-(t2-t1)/(ntS-1)
stS<-expand.grid(s=seq(s1,s2,len=nsS), t=seq(t1,t2,len=ntS))
plot(stR$s,stR$t,xlab="s",ylab="t",pch=10)
st.valorR<-cbind(stR,valorR)
points(stS,previoR,pch="+")
st.valor<-cbind(st,valor)
```

```
par(mfrow=c(1,2))  
guiPlot(" Filled Contour", DataSet="st.valorR")  
guiPlot(" Filled Contour", DataSet="st.valor")
```



## Apéndice B

# Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal cuando la Media es Conocida

El siguiente programa genera una realización condicionada a los valores del campo obtenidos en el *Apéndice A* del campo de difusión lognormal considerado en el ejemplo del apartado 4.6.2. El programa se ejecuta una vez que se ha ejecutado el programa del *Apéndice A*.

```
rm(previoS,valorS,previoSR,previoSS,sigmaR,sigma,prediccR,prediccSR,predicc,prediccS)
rm(valorSCR,valorSC,datosSCR,datosSC)
previoS<-c(rep(2,nsS*ntS))
for(i in 1:(nsS*ntS)) for(j in 1:(ntS-1)) for (r in 2:nsS)
{if(i==1)
  {previoS[i]<-tend+rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(1+stS$s[i]*stS$t[i])}
else if ( i>1 && i<=nsS )
  {previoS[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(hS*stS$t[i])+previoS[i-1]}
else if ( i==(1+nsS*j) )
```

```

    {previoS[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(kS*stS$s[i])+previoS[i-nsS]}
  else if ( i==(r+nsS*j) )
    {previoS[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(hS*kS)+
      previoS[i-1]+previoS[i-nsS]-previoS[i-nsS-1]}
  }
valorS<-exp(previoS)
previoSR<-c(rep(1,nsR*ntR))
for(i in 1:nsR) for(j in 1:ntR)
  {previoSR[i+(j-1)*nsR]<-previoS[1+((i-1)*(nsS-1)/(nsR-1))
    +((j-1)*nsS*(ntS-1)/(ntR-1))]}
previoSS<-c(rep(1,ns*nt))
for(i in 1:ns) for(j in 1:nt)
  {previoSS[i+(j-1)*ns]<-previoS[1+((i-1)*(nsS-1)/(ns-1))
    +((j-1)*nsS*(ntS-1)/(nt-1))]}
vari<-function(s,t){1+s*t}
unoR<-c(rep(1,nsR*ntR))
sigmaR<-c(rep(1,nsR*ntR*nsR*ntR))
for(i in 1:(nsR*ntR)) for(j in 1:(nsR*ntR)) {
  sigmaR[(i-1)*(nsR*ntR)+j]<-c(vari(min(stR$s[i],stR$s[j]),min(stR$t[i],stR$t[j]))))}
m.sigmaR<-matrix(sigmaR, nrow=nsR*ntR, byrow=T)
inv.sigmaR<-solve(m.sigmaR)
prediccR<-c(rep(1,nsS*ntS))
prediccSR<-c(rep(1,nsS*ntS))
ceR<-c(rep(1,nsR*ntR))
for(i in 1:(nsS*ntS)){
  rm(ceR)
  ceR<-c(rep(1,nsR*ntR))
  for(j in 1:(nsR*ntR))

```

---

```

{ceR[j]<-vari(min(stR$s[j],stS$s[i]),min(stR$t[j],stS$t[i]))}
prediccR[i]<-exp(ceR%%(inv.sigmaR)%%previoR
                +tend*(1-unoR%%(inv.sigmaR)%%ceR))
prediccSR[i]<-exp(ceR%%(inv.sigmaR)%%previoSR
                 +tend*(1-unoR%%(inv.sigmaR)%%ceR))
}
valorSCR<-(valorS*prediccR)/prediccSR
datosSCR<-cbind(stS,valorSCR)
guiPlot("Filled Contour", DataSet="datosSCR")
uno<-c(rep(1,ns*nt))
sigma<-c(rep(1,ns*nt*ns*nt))
for(i in 1:(ns*nt)) for(j in 1:(ns*nt)) {
  sigma[(i-1)*(ns*nt)+j]<-c(vari(min(st$s[i],st$s[j]),min(st$t[i],st$t[j])))}
m.sigma<-matrix(sigma, nrow=ns*nt, byrow=T)
inv.sigma<-solve(m.sigma)
predicc<-c(rep(1,nsS*ntS))
prediccS<-c(rep(1,nsS*ntS))
ce<-c(rep(1,ns*nt))
for(i in 1:(nsS*ntS)){
  rm(ce)
  ce<-c(rep(1,ns*nt))
  for(j in 1:(ns*nt))
    {ce[j]<-vari(min(st$s[j],stS$s[i]),min(st$t[j],stS$t[i]))}
  predicc[i]<-exp(ce%%(inv.sigma)%%previo
                +tend*(1-uno%%(inv.sigma)%%ce))
  prediccS[i]<-exp(ce%%(inv.sigma)%%previoSS
                 +tend*(1-uno%%(inv.sigma)%%ce))
}

```

**Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal cuando la  
172 Media es Conocida**

---

```
valorSC<-(valorS*predicc)/prediccS  
datosSC<-cbind(stS,valorSC)  
guiPlot("Filled Contour", DataSet="datosSC")
```

## Apéndice C

# Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal cuando la Media es Desconocida pero Constante

El siguiente programa genera una realización condicionada a los valores del campo obtenidos en el *Apéndice A* del campo de difusión lognormal considerado en el ejemplo del apartado 4.6.3. El programa se ejecuta después de haber ejecutado los programas de los *Apéndices A y B*.

```
rm(previoSR.md,previoSSR.md,sigma.md,sigmaR.md,previoS.md)
rm(previoSS.md,valorS.md,valorSS.md,previoSSR.md,prediccR.md,prediccSR.md)
rm(valorSCR.md,datosSCR.md,datosSC.md,predicc.md,prediccS.md,valorSC.md)
sigmaR.md<-c(rep(1,nsR*ntR*nsR*ntR))
for(i in 1:(nsR*ntR)) for(j in 1:(nsR*ntR)) {
  sigmaR.md[(i-1)*(nsR*ntR)+j]<-c(vari(min(stR$s[i],stR$s[j]),min(stR$t[i],stR$t[j]))))}
m.sigmaRmd<-matrix(sigmaR.md, nrow=nsR*ntR, byrow=T)
```



```

inv.sigmaRmd<-solve(m.sigmaRmd)
tend.estR<-c(1)
tend.estR<-(unoR%%(inv.sigmaRmd)%*%previoR)
              /(unoR%%(inv.sigmaRmd)%*%unoR)
sigma.md<-c(rep(1,ns*nt*ns*nt))
for(i in 1:(ns*nt)) for(j in 1:(ns*nt)) {
  sigma.md[(i-1)*(ns*nt)+j]<-c(vari(min(st$s[i],st$s[j]),min(st$t[i],st$t[j]))))}
m.sigmamd<-matrix(sigma.md, nrow=ns*nt, byrow=T)
inv.sigmamd<-solve(m.sigmamd)
tend.est<-c(1)
tend.est<-(uno%%(inv.sigmamd)%*%previo)/(uno%%(inv.sigmamd)%*%uno)
previoS.md<-c(rep(2,nsS*ntS))
for(i in 1:(nsS*ntS)) for(j in 1:(ntS-1)) for (r in 2:nsS)
  {if(i==1)
    {previoS.md[i]<-tend.estR+rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(1+stS$s[i]*stS$t[i])}
    else if ( i>1 && i<=nsS )
      {previoS.md[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(hS*stS$t[i])+previoS.md[i-1]}
    else if ( i==(1+nsS*j) )
      {previoS.md[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(kS*stS$s[i])+previoS.md[i-nsS]}
    else if ( i==(r+nsS*j) )
      {previoS.md[i]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(hS*kS)+
        previoS.md[i-1]+previoS.md[i-nsS]-previoS.md[i-nsS-1]}
  }
valorS.md<-exp(previoS.md)
previoSR.md<-c(rep(1,nsR*ntR))
for(i in 1:nsR) for(j in 1:ntR)
  {previoSR.md[i+(j-1)*nsR]<-previoS.md[1+((i-1)*(nsS-1)/(nsR-1))
    +((j-1)*nsS*(ntS-1)/(ntR-1))]}

```

```

previoSS.md<-c(rep(2,nsS*ntS))
for(i in 1:(nsS*ntS)) for(j in 1:(ntS-1)) for (r in 2:nsS)
  {if(i==1)
    {previoSS.md[j]<-tend.est+rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(1+stS$s[i]*stS$t[i])}
    else if ( i>1 && i<=nsS )
    {previoSS.md[j]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(hS*stS$t[i])+previoSS.md[i-1]}
    else if ( i==(1+nsS*j) )
    {previoSS.md[j]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(kS*stS$s[i])+previoSS.md[i-nsS]}
    else if ( i==(r+nsS*j) )
    {previoSS.md[j]<-rnorm(1,mean=0,sd=1)*sqrt(hS*kS)+
      previoSS.md[i-1]+previoSS.md[i-nsS]-previoSS.md[i-nsS-1]}
  }
valorSS.md<-exp(previoSS.md)
previoSSR.md<-c(rep(1,ns*nt))
for(i in 1:ns) for(j in 1:nt)
  {previoSSR.md[i+(j-1)*ns]<-previoSS.md[1+((i-1)*(nsS-1)/(ns-1))
    +((j-1)*nsS*(ntS-1)/(nt-1))]}
prediccR.md<-c(rep(1,nsS*ntS))
prediccSR.md<-c(rep(1,nsS*ntS))
valorSCR.md<-c(rep(1,nsS*ntS))
ceR<-c(rep(1,nsR*ntR))
for(i in 1:(nsS*ntS)){
  rm(ceR)
  ceR<-c(rep(1,nsR*ntR))
  for(j in 1:(nsR*ntR))
    {ceR[j]<-vari(min(stR$s[j],stS$s[i]),min(stR$t[j],stS$t[i]))}
  M<-exp((1-unoR%%(inv.sigmaRmd))%%ceR
    /(unoR%%(inv.sigmaRmd))%%unoR))

```

176 **Simulación Condicionada de un Campo de Difusión Lognormal cuando la Media es Desconocida pero Constante**

---

```

prediccR.md[i]<-exp(ceR%%(inv.sigmaRmd)%%previoR
                +tend.estR*(1-unoR%%(inv.sigmaRmd)%%ceR))
prediccSR.md[i]<-exp(ceR%%(inv.sigmaRmd)%%previoSR.md
                    +tend.estR*(1-unoR%%(inv.sigmaRmd)%%ceR))
valorSCR.md[i]<-(valorS.md[i]*prediccR.md[i])/(prediccSR.md[i]*M)
}
datosSCR.md<-cbind(stS,valorSCR.md)
guiPlot("Filled Contour", DataSet="datosSCR.md")
predicc.md<-c(rep(1,ns*ntS))
prediccS.md<-c(rep(1,ns*ntS))
valorSC.md<-c(rep(1,ns*ntS))
ce<-c(rep(1,ns*nt))
for(i in 1:(ns*ntS)){
  rm(ce)
  ce<-c(rep(1,ns*nt))
  for(j in 1:(ns*nt))
    {ce[j]<-vari(min(st$s[j],st$s[i]),min(st$t[j],st$t[i]))}
  M<-exp((1-uno%%(inv.sigmamd)%%ce)/(uno%%(inv.sigmamd)%%uno))
  predicc.md[i]<-exp(ce%%(inv.sigmamd)%%previo
                  +tend.est*(1-uno%%(inv.sigmamd)%%ce))
  prediccS.md[i]<-exp(ce%%(inv.sigmamd)%%previoSSR.md
                  +tend.est*(1-uno%%(inv.sigmamd)%%ce))
  valorSC.md[i]<-(valorSS.md[i]*predicc.md[i])/(prediccS.md[i]*M)
}
datosSC.md<-cbind(stS,valorSC.md)
guiPlot("Filled Contour", DataSet="datosSC.md")

```

# Bibliografía

- [1] Arnold, L. (1974). *Stochastic Differential Ecuations: Theory and Applications*. John Wiley, New York.
- [2] Bhattacharya, R. (1990). *Stochastic Processes with Aplications*. John Wiley, New York.
- [3] Cairoli, R. (1971). *Une Classe de Processus de Markov*. C. R. Acad. Sc. Paris, **243**, A1071-A1074.
- [4] Chesney, M. y Elliott, R.J. (1993). *Estimating the Volatility of an Exchange Rate*. Applied Stochastic Models and Data Analysis.
- [5] Christakos, G. (1992). *Random Field Models in Earth Sciences*. Academic Press, San Diego.
- [6] Cressie, N. (1993). *Statistics for Spatial Data*. John Wiley, New York.
- [7] Cressie, N. (1990). *The Origins of Kriging*. Mathematical Geology, **22**, no. 3, 239-252.
- [8] Cressie, N. y Hawkins D.M. (1980). *Robust Estimation of de Variogram: I*. Mathematical Geology, **12**, 115-125.
- [9] Crow, E.L. y Shimizu, K. (1988). *Lognormal Distribution Theory and Aplications*. Ed. Marcel Dekker.
- [10] Friedman, A. (1975). *Stochastics Differential Equations and Applications*. Academic Press.

- [11] Gikhman, I.I. y Skorohod, A.V. (1979). *The Theory of Stochastic Processes III*. Springer Verlag, Berlin-Heildeberg-New York.
- [12] Gikhman, I.I. y Skorohod, A.V. (1996). *Introduction to the Theory of Random Processes*. Dover Publications, New York.
- [13] Gutiérrez, R. y González A. (1991). *Estadística Multivariable. Volumen I. Introducción al Análisis Multivariante*. Universidad de Granada.
- [14] Hajek, B. (1982). *Stochastic Equations of Hiperbolic Type and a Two-parameter Stratonovich Calculus*. The Annals of Probability, **10**, no. 2, 451-463.
- [15] Journel, A.G. y Huijbregts, Ch.J. (1978). *Mining Geostatistics*. Academic Press, London.
- [16] Kaluzny, S.P. y otros (1996). *S+SPATIALSTATS. User's Manual*. MathSoft, Washington.
- [17] Karlin, S. y Taylor, H.M. (1988). *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, San Diego.
- [18] Loève, M. (1976). *Teoría de la Probabilidad*. Editorial Tecnos.
- [19] Nualart, D. (1983). *Two-Parameter Diffusion Processes and Martingales*. Stochastic Processes and Their Applications, **15**, 31-57.
- [20] Nualart, D. y Sanz, M. (1979). *A Markov Property for Two-Parameter Gaussian Processes*. Stochastica, **III**, n 1, 1-16.
- [21] Pawula, R.F. (1967). *Generalizations and Extensions of the Fokker-Planck-kolmogorov Equations*. IEEE Transactions on Information Theory, **IT-13 (1)**, 33-41.
- [22] Rao, M.M. (1986). *Real and Stochastic Analysis*. John Wiley, New York.

- 
- [23] Ricciardi, L.M. (1977). *Lecture Notes in Biomathematics*. Springer-Verlag, Berlin-Heideberg-New York.
- [24] Smith, J.A. y Veaux, R.D. (1992). *The Temporal and Spatial Variability of Rainfall Power*. *Environmetrics.*, **3** (1), 29-53.
- [25] *S-PLUS 2000. Programmer's Guide*. Data Analysis Products Division, MathSoft, Washington.
- [26] Tintner, G. y Gomez, G.L. (1979). *Aplicación de los Procesos de Difusión a la Planificación del Desarrollo Económico.. Un Ejemplo Ilustrativo (Colombia)* Trabajos de Estadística, **30** (2), 33-55.
- [27] Tintner, G. y Narayanan, R. (1966). *A Multidimensional Stochastic for the Explanation of Economic Development*. *Metrika*, **11**, 85-90.
- [28] Tintner, G. y Patel, R.C. (1965). *A Lognormal Diffusion Process Applied to Economic Development of India*. *Indian Econ. J.*, **13**, 465-474.
- [29] Tintner, G. y Sengupta, J.K. (1972). *Stochastic Economic*. Academic Press.
- [30] Vélez Ibarrola, R. (1996). *Procesos Estocásticos*. UNED.
- [31] Wong, E. y Hajek, B. (1985). *Stochastic Processes in Engineering Systems*. Springer-Verlag, Berlin-Heideberg-New York.