

PARAMETER IDENTIFICATION IN ANISOTROPIC ELASTOSTATIC PROBLEMS BASED ON THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

PHD THESIS

Author

Lucía Comino Mateos

Advisor

Rafael Gallego Sevilla

Department of Structural Mechanics

University of Granada. Spain

lcomino@ugr.es tlf: +34958249431 fax: +34958249959

Granada (Spain)

April 2005

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Lucía Comino Mateos
D.L.: Gr. 846 - 2005
ISBN: 84-338-3395-2

To my family

Acknowledgements

I would like to express my gratitude to some people who have helped me, in any sense, during the time... not short, I have been working to elaborate this PhD thesis.

First of all, to Prof. Rafael Gallego Sevilla, who trusted in me from the first time. He has transmitted to me most of the knowledge I have gained, he has helped me whenever I needed and has encouraged me to carry on when troubles arose.

Secondly to Dr. Guillermo Rus, whose thesis has been like a handbook for me. Being an expert in the subject, he has answered very patiently to all my questions.

I also want to thank to Prof. Marc Bonnet (École Polytechnique, France) and Dr. Liviu Marin (University of Leeds, UK), for their direct contribution in two of the chapters of this thesis.

I want to make a special mention to Dr. Lionel Elliot, who hosted me for a profitable research stay at Leeds University. And overall, I want to show my fondness for his kindness and hospitality, always.

And at last, but not less important, to all my friends who have supported me, in the good and bad moments..., without them I would have not been able to finish this work. I want to mention in particular some people from this department as Juan José Granados, Esther Puertas and of course... Encarna.

Contents

Acknowledgements	iii
I PRELIMINARIES	1
Chapter 1 INTRODUCTION	3
1.1 JUSTIFICATION FOR THE THESIS	3
1.2 OBJECTIVES	4
Chapter 2 STATE OF THE ART	7
2.1 CAUCHY INVERSE PROBLEM	7
2.2 INVERSE PROBLEM OF MATERIAL PROPERTIES	10
2.3 IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM FOR DEFECT DETECTION	12
2.3.1 Adjoint Variable Method	12
2.3.2 Topological derivative	13
Chapter 3 THEORETIC FUNDAMENTS	15
3.1 ANISOTROPIC ELASTICITY	15
3.1.1 Basic equations for anisotropic linear elasticity	15
3.1.2 Anisotropic elastic problem	16
3.2 BOUNDARY ELEMENT METHOD	19
3.2.1 Anisotropic Fundamental Solution	19
3.2.2 Boundary Integral Equation	20
3.2.3 Discretisation of the problem	21
3.3 INVERSE PROBLEMS	23
3.3.1 Definition	23
3.3.2 Strategies for solving Inverse Problems	23
II CONTRIBUTIONS	25
Chapter 4 CAUCHY INVERSE PROBLEM	27
4.1 MATHEMATICAL FORMULATION OF THE CAUCHY PROBLEM IN TWO- DIMENSIONAL ANISOTROPIC ELASTICITY	27
4.2 DESCRIPTION OF THE ALGORITHM	28

4.3	THE BOUNDARY ELEMENT METHOD (BEM)	30
4.4	NUMERICAL RESULTS	30
4.4.1	Examples	30
4.4.2	Initial guess	32
4.4.3	Convergence of the algorithm	32
4.4.4	Variable relaxation factor	35
4.4.5	Stopping criterion	36
4.4.6	Stability of the algorithm	40
Chapter 5	MATERIAL CONSTANTS INVERSE PROBLEM	43
5.1	DEFINITION OF THE PROBLEM	43
5.2	MINIMIZATION ALGORITHM	44
5.3	MATERIAL SENSITIVITY BOUNDARY INTEGRAL EQUATION	45
5.3.1	Kernel derivatives	46
5.3.2	Discretization of the sensitivity integral equation	47
5.3.3	Evaluation of the sensitivity equation integration constants	48
5.3.4	Material sensitivity of strains and stresses at interior and boundary points	49
5.4	SENSITIVITY NUMERICAL TESTS	50
5.4.1	Infinite plate with an elliptical cavity under internal loading	50
5.4.2	Elliptical core in an infinite plate under remote loading	50
5.5	DETERMINATION OF ELASTIC CONSTANTS: UNIQUENESS OF SOLUTION	53
5.6	INVERSE PROBLEM NUMERICAL TESTS	57
5.6.1	Tests Definition	57
5.6.2	Results	58
Chapter 6	IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM: ADJOINT VARIABLE APPROACH	63
6.1	IDENTIFICATION PROBLEM DEFINITION	63
6.2	SHAPE SENSITIVITY	64
6.2.1	Material Differentiation	65
6.2.2	Adjoint Variable Method	65
6.3	PARAMETERIZATION	67
6.4	SENSITIVITY TESTS	67
6.5	MINIMIZATION ALGORITHM: BFGS	68
6.6	NUMERICAL RESULTS	70
6.6.1	Exact Measurements	71
6.6.2	Effect of noise in measurements	73
6.6.3	Effect of error in the material elastic constants	74

Chapter 7	IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM: TOPOLOGICAL SENSITIVITY APPROACH	77
7.1	INTRODUCTION	77
7.2	TOPOLOGICAL SENSITIVITY	77
7.2.1	Topological Sensitivity Boundary Integral Equation	78
7.2.2	Topological Sensitivity BIE for Circular Cavities	79
7.2.3	Discretisation and Resolution of Topological Sensitivity BIE	80
7.3	DEFECTS IDENTIFICATION WITH THE TOPOLOGICAL SENSITIVITY	81
7.3.1	Optimum defect size estimation	81
7.3.2	Verification of optimum flaw size estimation	81
7.3.3	Location of the defect	83
7.3.4	Verification of the flaw location with topological sensitivity	83
7.4	TOPOLOGICAL SENSITIVITY ASSOCIATED TO GENETIC ALGORITHMS	86
7.4.1	Numerical Results	86
III	CONCLUSIONS	95
Chapter 8	CONCLUSIONS	97
8.1	CAUCHY INVERSE PROBLEM	97
8.2	PARAMETER INVERSE PROBLEM	98
8.3	IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM	99
8.3.1	Adjoint Variable Method approach	99
8.3.2	Topological Sensitivity	99
8.4	FORTHCOMING WORKS	102
Appendix A	COMPUTATION OF STRAINS AND STRESSES AT INNER POINTS	103
Appendix B	EVALUATION OF THE INTEGRATION CONSTANTS	105
Appendix C	EVALUATION OF NEW INTEGRATION CONSTANTS OF THE SENSITIVITY EQUATION	107
Appendix D	ANALYTICAL MATERIAL SENSITIVITY FOR CAVITIES AND INCLUSIONS IN AN INFINITE PLANE	109
Appendix E	ANALYTICAL EXPRESSIONS TO COMPUTE DISPLACEMENTS IN AN INFINITE ANISOTROPIC DOMAIN WITH UNIFORM STRESS STATE	113
	BIBLIOGRAPHY	115

List of Tables

7.1 Genetic Algorithm parameters.	86
---	----

List of Figures

3.1	Anisotropic homogeneous elastic body	17
4.1	The accuracy errors (a) E_u , and (b) E_t , as functions of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 32$ ($-\circ-$), $N_e = 48$ ($- - -$) and $N_e = 96$ ($-\times-$) isoparametric quadratic boundary elements and exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 , for the Cauchy problem considered in Example 1.	33
4.2	The accuracy errors (a) E_u , and (b) E_t , as functions of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 32$ ($-\circ-$), $N_e = 48$ ($- - -$) and $N_e = 96$ ($-+-$) isoparametric quadratic boundary elements and exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 , for the Cauchy problem considered in Example 2.	34
4.3	(a) The exact $u_1^{(an)}$ ($-$) and the numerical $u_1^{(num)}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(an)}$ ($-$) and the numerical $t_2^{(num)}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 32$ ($-\triangle-$), $N_e = 48$ ($-\square-$) and $N_e = 96$ ($-\times-$) isoparametric quadratic boundary elements, exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 and $k = 200$ iterations, for the Cauchy problem considered in Example 1.	36
4.4	(a) The exact $u_1^{(an)}$ ($-$) and the numerical $u_1^{(num)}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(an)}$ ($-$) and the numerical $t_2^{(num)}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 32$ ($-\triangle-$), $N_e = 48$ ($-\square-$) and $N_e = 96$ ($-\times-$) isoparametric quadratic boundary elements, exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 and $k = 200$ iterations, for the Cauchy problem considered in Example 2.	37
4.5	(a) The exact $u_1^{(an)}$ ($-$) and the numerical $u_1^{(num)}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(an)}$ ($-$) and the numerical $t_2^{(num)}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained without relaxation ($-\circ-$) and with the variable relaxation factor with amplitude $A = 1.5$ ($-\triangle-$), using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 , for the Cauchy problem considered in Example 2.	38
4.6	The accuracy errors (a) E_u , and (b) E_t , as functions of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($-\times-$), $p = 3\%$ ($- - -$) and $p = 5\%$ ($-\circ-$), for the Cauchy problem considered in Example 1.	39

4.7	The convergence error $E = \ \mathbf{CX} - \mathbf{F}\ _2$ as a function of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($-\times-$), $p = 3\%$ ($- - -$) and $p = 5\%$ ($-\circ-$), for the Cauchy problem considered in Example 1.	40
4.8	(a) The exact $u_1^{(\text{an})}(\text{---})$ and the numerical $u_1^{(\text{num})}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(\text{an})}(\text{---})$ and the numerical $t_2^{(\text{num})}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($-\square-$), $p = 3\%$ ($-\circ-$) and $p = 5\%$ ($-\times-$), for the Cauchy problem considered in Example 1.	41
4.9	(a) The exact $u_1^{(\text{an})}(\text{---})$ and the numerical $u_1^{(\text{num})}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(\text{an})}(\text{---})$ and the numerical $t_2^{(\text{num})}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($-\square-$), $p = 3\%$ ($-\circ-$) and $p = 5\%$ ($-\times-$), for the Cauchy problem considered in Example 2.	42
5.1	Elliptical cavity in an infinite plate under uniform interior loading.	50
5.2	Comparison between the computed numerical value (BEM) and analytical result for the sensitivity of the horizontal displacement along the cavity boundary, with respect to the compliance constants a_{11} . Loading inclination 0° , 30° and 45°	51
5.3	Comparison between the computed numerical value (BEM) and analytical result for the sensitivity of the horizontal displacement along the cavity boundary, with respect to the compliance constants a_{12} . Loading inclination 0° , 30° and 45°	51
5.4	Comparison between the computed numerical value (BEM) and analytical result for the sensitivity of the horizontal displacement along the cavity boundary, with respect to the compliance constants a_{66} . Loading inclination 0° , 30° and 45°	52
5.5	Elliptical orthotropic inclusion in an infinite orthotropic plate, under remote loading.	52
5.6	Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-elastic core interface, with respect to the elastic coefficient a_{11}	53
5.7	Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-elastic core interface, with respect to the elastic coefficient a_{12}	53

5.8	Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-elastic core interface, with respect to the elastic coefficient a_{66}	54
5.9	Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-rigid core interface, with respect to the elastic coefficient a_{11}	54
5.10	Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-rigid core interface, with respect to the elastic coefficient a_{12}	55
5.11	Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-rigid core interface, with respect to the elastic coefficient a_{66}	55
5.12	Geometry and load conditions, cases 1-2-3	57
5.13	Cost Function minimization with exact experimental data in case 1	58
5.14	Cost Function minimization with exact experimental data in case 2	59
5.15	Cost Function minimization with exact experimental data in case 3	60
5.16	Cost Function minimization with 2%(left) and 5%(right) random error in experimental data for case 1	60
5.17	Cost Function minimization with 2%(left) and 5%(right) random error in experimental data for case 2	61
5.18	Cost Function minimization with 2% random error in experimental data for case 3, four different runs	61
5.19	Cost Function minimum surface with 2% error in experimental data in case 3 for variations in a_{11} and a_{66}	62
6.1	Anisotropic elastic body	63
6.2	Case 1: orthotropic plate with a circular internal cavity, real and supposed locations	68
6.3	1 st shape parameter sensitivity in case 1: AVM vs Finite Difference	69
6.4	2 nd shape parameter sensitivity in case 1: AVM vs Finite Difference	69
6.5	4 th shape parameter sensitivity in case 1: AVM vs Finite Difference	70
6.6	Case 2: orthotropic plate with an elliptic internal cavity, real and supposed locations	70
6.7	1 st shape parameter sensitivity in case 2: AVM vs Finite Difference	71
6.8	2 nd shape parameter sensitivity in case 2: AVM vs Finite Difference	71
6.9	4 th shape parameter sensitivity in case 2: AVM vs Finite Difference	72
6.10	Case 3: orthotropic plate with square internal cavity, real and supposed locations	72
6.11	Sensitivity of several shape parameters: AVM vs Finite Difference	73
6.12	2 nd shape parameter sensitivity in case 3: AVM vs Finite Difference	73
6.13	Geometry and load tests definition	74

6.14	Identification of one cavity with exact data	74
6.15	Identification of two cavities with exact data	75
6.16	Influence of 2% and 5% error in measurements	75
6.17	Influence of 2% and 5% noise in elastic constants	76
6.18	Cost Function evolution within the minimization process	76
7.1	Geometry of benchmark problem.	82
7.2	Correlation between estimated and real radius of the cavity.	82
7.3	Cost Functional for a centered circular cavity. Experimental data: U_x on left plate side (left graph) - P_y on bottom plate side (middle graph) - $U_x + P_y$ (right graph).	83
7.4	Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 5% error in the elastic constants.	84
7.5	Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 10% error in the elastic constants.	84
7.6	Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 5% error in simulated experimental data.	85
7.7	Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 10% error in simulated experimental data.	85
7.8	Cost Functional topological expansion in the domain for a centered elliptic cavity.	85
7.9	Identification of circular cavity, considering no error in experimental data. . .	87
7.10	Identification of circular cavity, considering 2% error in experimental data. . .	87
7.11	Identification of circular cavity, considering 5% error in experimental data. . .	88
7.12	Identification of circular cavity, considering 10% error in experimental data. . .	88
7.13	Identification of elliptic cavity, considering no error in experimental data. . .	88
7.14	Identification of elliptic cavity, considering 2% error in experimental data. . .	89
7.15	Identification of elliptic cavity, considering 5% error in experimental data. . .	89
7.16	Identification of elliptic cavity, considering 10% error in experimental data. . .	89
7.17	Identification of two circular cavities, considering exact measurements of P_x on the right hand side of the plate and U_x on the left hand side of the plate. . .	90
7.18	Identification of two circular cavities, considering exact measurements of P_x on the right hand side of the plate, U_x on the left hand side of the plate, and P_y at the bottom side.	90
7.19	Identification of two circular cavities, considering exact measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate. . . .	91
7.20	Identification of two circular cavities, considering 1% error in measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate. . .	91
7.21	Identification of two circular cavities, considering 2% error in measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate. . .	92

7.22	Identification of two circular cavities, considering 5% error in measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate.	92
7.23	Identification of an elliptic cavity, starting from two circular cavities, measurements on the four sides of the plate.	92
7.24	Identification of an circular cavity, allowing the existence of two circular cavities, measurements on the four sides of the plate.	93

Part I

PRELIMINARIES

CHAPTER 1

INTRODUCTION

1.1 JUSTIFICATION FOR THE THESIS

Nowadays, industry is more and more demanding a higher level in the design of mechanics components. In particular, one of the most challenging research fields is focussed in advanced materials, whose properties can be adjusted in order to give a suitable structural answer for each application, with an appropriate weight/resistance rate. One example of this kind of materials are the *composites*. In the last fifty years, its use has been widely spread in many different fields as space, aeronautics, high speed machinery, civil engineering, etc.

Another matter to bear in mind is the new philosophy in the engineering community which defends a “damage tolerance”, i.e., a damaged mechanical component does not always implies its substitution, but it needs a cost evaluation based on the possibility of failure. In order to predict accurately the behavior and durability of mechanical and structural elements in service, it is necessary to study their performance considering that they contain defects, which presence is very likely and will change the stress distribution under specific loads. Hence, scientists have tried to extend non-destructive evaluation techniques (NDE) developed for classic materials, to these new advanced ones, which are usually non-isotropic.

Nevertheless, there are still many aspects to be studied in fracture mechanics and new 2D/3D formulations to be developed. In this context, it is also crucial the resolution of Inverse Problems. From the theoretical point of view, an Inverse Problem (IP) is seen as the problem of obtaining any parameter of a system (mechanical properties, internal flaws, non accesible boundary conditions, etc), from its response to a given excitation. Its resolution implies solving multiple direct problems, what makes necessary powerful numerical tools like Finite Element Method (FEM), Finite Differences (FDM) or Boundary Element Method (BEM). The last one has been less studied although it can be very advantageous in many IP. The literature related to BEM applied to the some IP is limited. For instance, there is a lack of references in crack, due to the hypersingular formulation. Besides, the anisotropic formulation is quite cumbersome and this has caused that just a few works for anisotropic elastic problems have been published.

All said has encouraged this research work, which is focussed in several identification inverse problems arisen when using non-destructive evaluation techniques in anisotropic medium. A robust formulation to approach these problems and the validation of new computational techniques will contribute to this new age materials.

1.2 OBJECTIVES

The main objective of this work is to study some *Inverse Problems*, which arise in the mechanical engineering field. The research will be based on the Boundary Element Method.

When a direct problem is to be solved, the unknown is the answer of a system under some load conditions, when the geometry, the boundary conditions, the mechanical properties and the model behavior have been defined. On the other hand, in an inverse problem some of this information is not available. To solve it, some experimental data of a magnitude which is propagated within the solid, must be measured. In particular, in this work we aim to develop equations and algorithms relevant to the resolution of inverse problems applied to two-dimensional elastic solids of any anisotropic material under static loads. The problems considered are:

- Cauchy Inverse Problem, in which there is a part of the boundary where we do not know neither displacements nor stresses, but as a counterpart, both are known in the rest of the boundary.
- Material constants Inverse Problem, when some, or all the material elastic properties are unknown.
- Identification Inverse Problem, which arises when we look for possible defects such as cavities, inclusions within the domain. Their existence, position and size are undetermined a priori, therefore, the unknown in this problem is part of the geometry.

In order to build the needed formulations and to provide tools for the resolution of those inverse problems, this research work involves the following contributions to the state of the art.

- Review of the current strategies for inverse problem resolution, stressing advantages and drawbacks of each of them, and studying the most suitable for each case.
- Computational aspects for inverse problems resolution will be analysed in depth. One of the main aspects to be studied is the sensitivity calculation. This means the derivation of a magnitude or functional, with respect to the unknowns of the problem. The most suitable differentiation technique must be used for each case. In particular, the following derivation methods will be used here:
 - direct differentiation, used when the unknowns are the elastic constants;
 - adjoint variable method, used in the identification inverse problem;
 - topological derivative, computed for defect detection.

The results obtained with these methods will be compared with the ones computed with other numerical differentiation techniques such as Finite Differences, or even with analytical expressions when available.

- Another key issue is the choice of the minimization technique to be used. The most efficient and common algorithms will be studied in order to fit the most appropriate for each problem. In the study we will consider a quasi-newton method, the BFGS, a pseudo-second order method such as the Levenberg-Marquardt, a Genetic Algorithm which is a global zero order method, and an iterative minimization algorithm, the one proposed by Kozlov et al. [40].
- The formulations presented here will be based on the Boundary Element Method. This entails advantages when we compare with other numerical methods, in terms of computational effort and accuracy.
- To verify the validity of all the proposed methods, they will be implemented in computer codes and numerical examples will be run. The tests must be realistic, hence, some noise is added in the experimental data and the model parameters. Several issues such as distance from the real solution, necessary amount of input experimental data, size of the defects, etc will be analysed to study their influence in the stability and convergence of the methods.

CHAPTER 2

STATE OF THE ART

In solving physical problems in solid mechanics, one usually deals with the governing system of partial differential equations, i.e. the equilibrium equations, which has to be solved provided that the geometry of the domain of interest, the material properties, the external sources acting in the solution domain and the boundary and initial conditions are completely known. These are referred to as *direct problems* and their well-posedness has been clearly established, see for example Knops and Payne [14]. When one or more of the conditions for solving the direct problem are partially or entirely unknown, then an *inverse problem* may be formulated to determine the unknowns from specified or measured system responses. It is well known that inverse problems are in general unstable, see e.g. Hadamard [15], in the sense that small measurement errors in the input data may amplify significantly the errors in the solution. Hence a suitable algorithm, which is exempt from this ill-posed phenomenon, is required in order to stably solve the inverse problem.

Over the last two decades, inverse problems have been extensively treated in several branches of science, such as heat transfer [16], electrical impedance tomography [17], acoustic and electromagnetic scattering [18], solid mechanics [19], etc. The most common approach is to determine the optimal estimates of the model parameters by minimizing a measure-to-fit between the responses of the system and the model. While there is a vast literature presenting theoretical results about the inverse problem of *impedance tomography* (see for instance citeengl96,kirsch96,engl96a,ramm05 and references in there), the corresponding elastic problem has received much less attention, most of it focussed on isotropic materials. A review of IP in elasticity has recently been done by M. Bonnet and A. Constantinescu [84]. This chapter is devoted to formulations and resolution techniques which have been applied to some particular inverse problems.

2.1 CAUCHY INVERSE PROBLEM

The Cauchy problem in elasticity, in which both the displacement and the traction vectors are known on a part of the boundary and no data are available on the remaining boundary, is a classical example of an inverse problem in solid mechanics. The mathematical mechanism which shows that Cauchy problems are ill-posed has been explained by Chen and

Chen [20] for the Laplace equation, but similarly they can be applied to elasticity.

There are important studies in the literature of the Cauchy problem for isotropic elastic materials. Maniatty *et al.* [21] have determined the traction boundary conditions by using a simple diagonal regularization in conjunction with the FEM. Spatial regularization, together with the BEM, has been used by Zabararas *et al.* [22] and with the FEM by Schnur and Zabararas [23]. Yeih *et al.* [24] have analysed the existence, uniqueness and continuous dependence on the data of the Cauchy problem in elasticity and have proposed an alternative regularization procedure, namely the fictitious boundary indirect method, based on the simple or double layer potential theory. The numerical implementation of the aforementioned method has been undertaken by Koya *et al.* [25], who have used the BEM and the Nyström method for discretising the integrals. However, this formulation has not yet removed the problem of multiple integrations. Marin *et al.* [26] have determined the approximate solutions to the Cauchy problem in linear elasticity using an alternating iterative BEM which reduced the problem to solving a sequence of well-posed boundary value problems and they have later extended this numerical method to singular Cauchy problems, see Marin *et al.* [27]. Huang and Shih [28] and Marin *et al.* [29] have both used the conjugate gradient method (CGM) combined with the BEM, in order to solve the same problem. The Tikhonov regularization method and the singular value decomposition (SVD), in conjunction with the BEM, have been employed by Marin and Lesnic [30, 31] to solve the two-dimensional Cauchy problem in isotropic linear elasticity. A comparison of the aforementioned BEM regularization methods, namely the alternating iterative algorithm, CGM, SVD and the Tikhonov regularization method, used for solving the Cauchy problem for isotropic linear elastic solids can be found in Marin *et al.* [32]. Recently, the method of fundamental solutions combined with the first-order Tikhonov functional and the Landweber method in conjunction with the BEM and a regularizing stopping criterion have been proposed by Marin and Lesnic [34, 35], respectively.

Methods of obtaining an approximate solution to ill-posed boundary value problems have been discussed extensively in the literature, see e.g. Lavrent'ev [36], Tikhonov and Arsenin [37], Bakushinsky and Goncharsky [38], Morozov [39], etc., and at present there are various approaches to the solution of the Cauchy problem for elliptic equations, which is a classical example for an ill-posed problem. On the whole, all such approaches can be divided into three large groups. The first group consists of methods based on bringing the problem into the class of well-posedness in the sense of Tikhonov, see e.g. Lavrent'ev [36]. The second group comprises methods that use universal regularizing algorithms, which can be obtained with the aid of the Tikhonov parametric functional, or related versions of it, see e.g. Tikhonov and Arsenin [37]. Unfortunately, this last group requires a parametric selection which may prove to be difficult in real circumstances. Finally, the most recently

developed group includes iterative direct solution methods, see e.g. Bakushinsky and Goncharsky [38]. These have produced the main results and are the most widely used in practical applications. Of all these groups, the latter one has two main advantages, namely (i) it allows any physical constraint, e.g. positivity, monotonicity, etc., to be easily taken into account directly in the scheme of the iterative algorithm, and (ii) it allows simplicity of the implementation of the computational schemes to be used iteratively for a sequence of well-posed problems. One possible disadvantage of using iterative algorithms is the large number of iterations that may be required in order to achieve convergence. However, relaxation procedures can be easily adopted to improve the rate of convergence.

Based on these reasons, this study uses the BEM in order to implement a convergent algorithm for anisotropic linear elastic materials based on an alternating iterative procedure which consists of obtaining successive solutions to well-posed mixed boundary value problems, originally proposed by Kozlov *et al.* [40] and implemented for isotropic linear elastic solids by Marin *et al.* [26, 27]. The strength of this iterative algorithm is that it is convergent if and only if the solution of the Cauchy problem exists, which overcomes the previous mathematical redundancy. Whilst Kozlov *et al.* [40] proved the mathematical convergence of their algorithm without actually finding the solution, the aim of this work is to show the numerical stability and convergence of the present algorithm as it determines an approximation of the solution to the Cauchy problem in anisotropic elasticity. In order to cease the iterative procedure before the effects of the accumulation of noise become dominant, and the errors in the numerical solution start increasing, a regularizing stopping criterion is also proposed.

2.2 INVERSE PROBLEM OF MATERIAL PROPERTIES

The use of anisotropic materials is more and more common in the fabrication of high-performance structural systems lately employed in the aeronautical, architectonic or aerospace fields. Hence the importance of knowing accurately the material properties in order to predict, in a precise way, the behavior of the structure. The material constants can be identified from laboratory experiments based on either static or dynamic response to external excitations. Nevertheless, sometimes, the values determined from standard laboratory tests may differ significantly from the actual ones, when the components are manufactured in the factory. The deduction of the elastic properties of a non-isotropic elastic solid from its response may be formulated as an IP.

Important theoretical results have been obtained by some researchers: Ikehata [56] has shown that the Lamé constants of an isotropic elastic body can be determined by the Dirichlet-to-Neumann data map. Lin [59] proved that the radially dependent Lamé coefficients of an isotropic spherical body can be obtained by making only two measurements of displacements and stresses on the body surface. To the author knowledge, there is no reference where similar theoretical results had been established for the determination of elastic constants in an anisotropic elastic body from boundary measurements.

There are many computational studies with the aim of determining the elastic constants of a body from boundary data, but mainly for isotropic bodies. Schnur and Zabarar [10] have determined the size and location of a circular inclusion within a finite plate matrix, together with the isotropic elastic constants of the inclusion and matrix. They make use of Finite Elements and the Levenberg-Marquardt method to minimize the difference between the response of the system and the model. Mallardo and Alessandri [11] applied boundary element techniques to a very similar problem, but in this case the gradient of the functional was computed by implicit derivation, instead of the finite differences used in [10]. Constantinescu [52] has treated the identification of material properties and defects in composites by minimizing the error of the constitutive law, within the elastic impedance tomography framework. Heyliger *et al.* [12] used a dynamic method based on the measurements of the free vibrations in 3D anisotropic bodies excited by impact resonance. Wang and Kam [63] proposed a constrained minimization method for determining the elastic constants of shear deformable composite materials. Also the material properties of composite plates have been identified by Liu *et al.* [60] where they combined a genetic algorithm with non-linear least squares techniques. Recently, Marin *et al.* [33] retrieved the isotropic material constants with minimization techniques from boundary measurements only. Finally, Lauwagie *et al.* [58] proposed a mixed numerical-experimental method to determine the in-plane elastic properties of orthotropic plates.

The method proposed in this work for identifying the elastic constants of a rectilinearly anisotropic two-dimensional material, combines a Boundary Integral Equation (BIE) formulation with a least-squares technique, the Levenberg-Marquardt. The finite-difference Jacobian matrix has been extensively used by many authors [55]. Instead, here, the use of explicit expressions of the boundary displacement/traction derivatives with respect to the elastic constants is proposed, thus the computational effort is reduced.

2.3 IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM FOR DEFECT DETECTION

One of the main types of inverse problems that arise in the context of linear elasticity, and more generally of the mechanics of deformable solid, is the defect detection. In these problems, the unknown is part of the inner geometry. They are often formulated in terms of the minimizations of a cost function featuring the experimental data. Such cost functions are non convex and exhibit local minima. Despite this fact, traditional minimization methods are usually preferred to global search techniques such as evolutionary algorithms, the later being in most cases infeasible due to the prohibitive computational cost of large number of direct elastic scattering solutions. In this work both strategies are going to be studied, trying to depict advantages of each of them.

2.3.1 *Adjoint Variable Method*

If traditional minimization methods are chosen, the sensitivity analysis of integral functionals with respect to shape parameters is needed. Shape sensitivity can be dealt with using either the direct differentiation approach or the adjoint variable approach (see Burczynski [86]). The consideration of shape changes makes more attractive the use of BIE formulations, which constitute minimal modelling as far as the geometrical support of unknown field variables is concerned.

In this context, the direct differentiation approach has been studied by many researchers, from BIE formulation in either singular form (Barone and Yang [87], Mellings and Aliabadi [88]) or regularized form (Bonnet [85], Matsumoto et al. [89], Nishimura (1995)). This approach needs the solution of as many new boundary-value problems as the number of shape parameters, although the fact that they involve the same governing operator reduces the computational effort by factorization and backsubstitution.

The adjoint variable approach is even more attractive, since it requires the solution of only one new boundary-value problem (the so-called adjoint problem) per integral functional whatever the number of shape parameters. In connection with BIE formulations alone, this approach has been successfully applied to many shape sensitivity problems, Aithal and Saigal [90], Choi and Kwak [94], Burczynski [91], Meric [95] and Bonnet [78],[79]. This relies upon the possibility of getting a final analytical expression of the shape sensitivity of an integral functional as a boundary integral that involves just values from the primary and adjoint states on the boundary.

This work deals with the formulation of the adjoint variable method applied to the sensitivity analysis, in connection with BIE formulation for cavity detection in anisotropic mediums. There is no evidence of previous formulations in such materials using this approach.

2.3.2 *Topological derivative*

As it has been said in the previous paragraphs, the computation of the functional gradient with respect to the shape parameters has been extensively studied to be used in conjunction to standard minimization procedures, mainly due to the high computational effort needed for global methods such as evolutionary algorithms. However this work proposes a different approach first presented by Gallego and Rus [65] which consists in devising a domain function, the so called *Topological Sensitivity* (TS), whose minimum pinpoints the location and size of the sought flaw. Then, zero-order methods as Genetic Algorithms (GA), are used to compute the location of the TS minimum.

The idea of *Topological Sensitivity* was first introduced by Eschenauer et al [64] (they called bubble method), for compliance minimization in two-dimensional elastostatic problems, and was latter generalized and exploited for shape inverse problem by Sokolowski and coworkers [74], [75], [92] for circular and non-circular flaws. Garreau *et al.*[93] developed the idea for a general arbitrary-shaped flaw in the context of elastostatic, as well. In those papers an adjoint state method is employed to obtain the topological derivative whereas a direct approach fully based in BIE is used here.

The use of GA or Evolutionary Algorithm for identification of flaws within the framework of Boundary Integral Equation procedures, have been explored by different authors in the past decade, Koguchi and Watabe [67], Kowalckzyk *et al.*[68], Tanaka and Nakamura [73], Stavroulakis and Antes [71] [72], or Stavroulakis [70]. In all these papers the functional to be optimized is the full residual, instead of its TS, and therefore the computation is very costly. The procedure which consists on the computation of TS in anisotropic materials combined with GA, enhances the applicability of zero order methods.

CHAPTER 3

THEORETIC FUNDAMENTALS

3.1 ANISOTROPIC ELASTICITY

In this section, a brief review of the principles and equations stated for the study of anisotropic linear elasticity in a deformable body is presented.

3.1.1 Basic equations for anisotropic linear elasticity

The equations of mechanics of deformable bodies can be grouped in five as follows.

- The *Equilibrium equations* for the static case

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (*)^1 \quad (3.1)$$

being σ_{ji} the stress tensor.

- The *kinematic equations*, which relate displacements, u_i , and strains. If we are dealing with a linear theory and no rigid-body motion is assumed, the linear strain tensor ε_{ij} is approximated by

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2)$$

- The *Compatibility strain equations*

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.3)$$

- The *boundary conditions*
- The *material constitutive equation or Hooke's law*

These equations define the particular material behavior. We are dealing with materials with a linear elastic behavior, i.e., strains are linear functions of the stresses. Regarding to the elastic properties, bodies with these characteristics can be classified into homogeneous/heterogeneous, whether the elastic properties are the same at different points of the body or not. Then, an isotropic body, with regard to its elastic properties, is one in which these properties (elastic resistance) are the same for all directions drawn through a given point; if they vary the body or material is called anisotropic. Directions for which the elastic properties are the same are said to be *elastically equivalent*. Furthermore, we can say that an homogeneous body has rectilinear anisotropy,

¹where, $\partial[*]/\partial x_j = [*,j]$.

if all segments parallel to the same direction and drawn through different points, are elastically equivalent. For the most general case of anisotropy in a homogeneous body, Hooke's law can be written as follows [1]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} \quad (3.4)$$

where C_{ijmn} is a fourth order tensor with 81 the elastic constants, but this number can be reduced since these constants are not independent. In order to simplify this expression, mono-index notation is used

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1 \dots 6 \quad (3.5)$$

being σ_i, ε_j pseudo-vector with the following change in indexes: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ C_{ij} can be inverted and an analogous expression can be written

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \quad (3.6)$$

where a_{ij} are called *compliance or strain coefficients*.

Sometimes, when the structure of the body has some kind of symmetry, the elastic properties also exhibit symmetry [1]. In those cases, some elastic constants happen to be zero. A plane of elastic symmetry is defined as a plane in a body with the following property: every two directions that are symmetrical with respect to this plane are equivalent as regards the elastic properties. A direction normal to that plane is termed *principal direction*. A special situation arises when through each point of a body there pass three mutually perpendicular planes of elastic symmetry, and the like planes of elastic symmetry are parallel at all points. Bodies with this property are called *orthotropic*. The number of independent constants is reduced to nine in 3D case, and four in the two-dimensional case. If all directions in a body are elastically equivalent and principal, the body is said to be *isotropic*, the number of independent elastic constants is two in this case.

3.1.2 Anisotropic elastic problem

The aim of the Elasticity Theory is to obtain the response of a material system under the action of some loads. The definition of this response with the stress, strain and displacement fields, is called *elastic problem*. In this particular case, when the material has anisotropic elastic properties, we are dealing with *anisotropic elastic problems*.

We consider the elastostatic equilibrium of an homogeneous solid with rectilinear anisotropy. The body is bounded by a cylindrical surface, and acted on by surface forces, \mathbf{p} , and body forces, \mathbf{b} , normal to the generators, ($p_3 = 0, b_3 = 0$), and constant along the length, $p_i =$

$p_i(x_1, x_2)$ and $b_i = b_i(x_1, x_2)$. Initial stresses are absent. The body is referred to a Cartesian system of coordinates x_1, x_2 and x_3 in which x_3 is parallel to the generators, see Figure 3.1. In the situation described above, it appears obvious that the components of stress, and

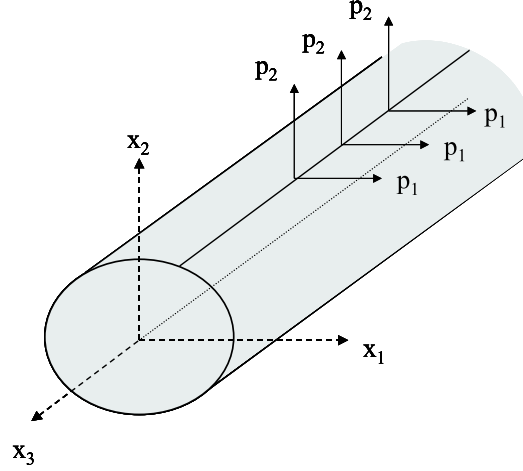


Figure 3.1: Anisotropic homogeneous elastic body

hence strains, are functions of only two coordinates (x_1, x_2) . At this stage, if at every point of the body, there is a plane of elastic symmetry which coincides with the cross section, these sections remain plane after deformation, and the state of stress and strain is known as *plane strain*, ($\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$).

Similarly, we consider the elastic equilibrium of a flat plate of uniform thickness of homogeneous anisotropic material, having at each point a plane of elastic symmetry parallel to the middle plane. Surface forces are distributed along the edge, and the body forces over the plate, symmetrical with respect to the middle plane and vary only slightly across the thickness. Under these conditions, σ_3, σ_4 and σ_5 are neglected in comparison with the rest of the stresses. This state is known as *generalized plane stress* ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$).

In both mentioned states, magnitudes of the problem (displacements, stresses and strains) can be simplified to a 2D study. Along the whole present research work, we are going to deal with anisotropic elastostatic problems, whose geometry and load conditions describe one of the plane problems described above. Therefore formulations will be developed for a two-dimensional case.

Returning to the elastic problem resolution, taking into account the equations of mechanics of deformable bodies defined in Section 1.1., and assuming that the body forces have a potential (U), problem can be expressed in terms of a *stress function* $F(x_1, x_2)$ [1]:

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + U \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + U \quad \sigma_6 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.7)$$

Then, taking into account the constitutive law and compatibility equations between displacements and strains, we obtain the differential equation satisfied by the function F :

$$L_4(F) = -(\beta_{12} + \beta_{22})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + (\beta_{16} + \beta_{26})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - (\beta_{11} + \beta_{12})\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \quad (3.8)$$

L_4 is a fourth order differential operator of the form,

$$L_4 = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (\beta_{12} + \beta_{66})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2\beta_{16}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \quad (3.9)$$

β_{ij} are termed the *reduced elastic constants*:

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}} \quad (3.10)$$

Equation (3.8) can be factorized, solving the characteristic 4th degree polynomial equation $l_4(\mu) = 0$,

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{16}\mu + \beta_{22} = 0 \quad (3.11)$$

which has always four complex roots, *complex parameters*, two conjugate pairs. The solution is then of the form:

$$F(x_1, x_2) = \Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)] + F_0(x_1, x_2) \quad (3.12)$$

being $F_i(z_i)$ two arbitrary analytical functions, of the complex variables $z_i = x_1 + \mu_i x_2$, and F_0 is a particular solution of (3.8).

New *complex potentials* are introduced, $\Phi_i(z_i) = F'_i(z_i)$, and we obtain general expressions for stresses and displacements

$$\sigma_1 = 2\Re[\mu_1^2 \Phi'_1 + \mu_2^2 \Phi'_2], \quad \sigma_2 = 2\Re[\Phi'_1 + \Phi'_2], \quad \sigma_6 = -2\Re[\mu_1 \Phi'_1 + \mu_2 \Phi'_2], \quad (3.13)$$

$$u_1 = 2\Re[p_{11} \Phi_1 + p_{12} \Phi_2] - \omega x_2 + u_0, \quad u_2 = 2\Re[p_{21} \Phi_1 + p_{22} \Phi_2] + \omega x_1 + v_0, \quad (3.14)$$

u_0, v_0 and ω represent a simultaneous rigid-body motion.

The above equations are also valid in a *generalized plane stress* state, the reduced elastic constants β_{ij} must be replaced with the strain coefficients a_{ij} .

3.2 BOUNDARY ELEMENT METHOD

The analytical formulation obtained in the previous section, is suitable for just a few problems, with a very simple geometry and boundary conditions. In most cases, a numerical method is needed for their resolution. In the present work, all the problems will be tackled using boundary element techniques. It is nowadays well known that the BEM performs better than domain discretization methods, such as the FDM and the FEM, for solving linear partial differential equations [3]. The main advantages of the BEM are its increased accuracy from the use of Green's integral identities, the simultaneous prediction of the solution function and its normal derivatives at the boundary without the need of further finite differentiating, and the fact that only the boundary of the solution domain has to be discretised. These properties are very important when dealing with inverse problems, since the resolution methods imply solving a great number of direct problems and high accuracy is required at each iteration.

The boundary element method is a numerical method for the approximative resolution of equation's integral representation. The process can be divided in two steps. The first part consists on obtaining the boundary integral equation from the Betti's Reciprocity Theorem application. The second step is the discretization of the equation in order to solve it numerically. The domain boundary is separated into elements defined by their nodes and the position of each boundary point will be defined with the aid of shape functions. Then, the magnitudes of the problem are also approximated by their value at the element nodes and shape functions. In this study quadratic isoparametric elements have been used. When the equation is evaluated at every boundary node, we obtain the linear system of equations to be solved (see more details [3][4]).

3.2.1 Anisotropic Fundamental Solution

The BEM starts establishing the Betti's Reciprocity Theorem between two equilibrated systems. If we are dealing with linear elasticity problems, the theorem is established between the actual elastostatic state in the domain Ω with boundary Γ , and an auxiliary field called the *fundamental solution*.

The fundamental solution is the response of a system at a point \mathbf{z} due to a point load applied at \mathbf{z}' in an infinite domain with the same material properties as the original problem. When a unit load is applied in the x_i -direction, the solution is given by the complex potential, see Sollero [8],

$$\Phi_{is}(z_s) = A_{is} \ln(z_s - z'_s) \quad (3.15)$$

where A_{is} are complex constants . These constants can be computed by employing the system of equations obtained from the implementation of the boundary conditions, namely

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ p_{11} & -\bar{p}_{11} & p_{12} & -\bar{p}_{12} \\ p_{21} & -\bar{p}_{21} & p_{22} & -\bar{p}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \bar{A}_{i1} \\ A_{i2} \\ \bar{A}_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{i2}}{2\pi i} \\ \frac{\delta_{i1}}{2\pi i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

where δ_{ij} is the Kronecker delta tensor and

$$\begin{aligned} p_{1k} &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k \\ p_{2k} &= \beta_{12}\mu_k + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} - \beta_{26} \end{aligned} \quad (3.17)$$

All the equations above are also valid in a *generalized plane stress* state, simply replacing the reduced elastic constants β_{ij} by the elastic constants a_{ij} .

The fundamental solution for the displacements is obtained in the following form:

$$U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = 2 \sum_{s=1}^2 \Re [p_{js} A_{is} \ln(z_s - z'_s)], \quad (3.18)$$

whilst the corresponding fundamental tractions on the boundary are given by

$$T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = 2 \sum_{s=1}^2 \Re \left[\frac{q_{js} A_{is}}{z_s - z'_s} (\mu_1 n_1 - n_2) \right], \quad (3.19)$$

where $q_{1s} = \mu_s$, $q_{2s} = -1$ and n_i are the components of outer normal \mathbf{n} at the boundary Γ .

3.2.2 Boundary Integral Equation

Once the auxiliary state is defined, we recall Betti's Reciprocity Theorem which is applied to two balanced systems of boundary and body forces (\mathbf{t}, \mathbf{b}) and $(\mathbf{t}^*, \mathbf{b}^*)$. These systems of forces are applied to the same anisotropic elastic domain characterised by the displacement fields \mathbf{u} and \mathbf{u}^* , respectively. If the $*$ state is the one given by the fundamental solution, namely

$$b_j^* = \delta_{ij} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}'), \quad t_j^* = T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \quad u_j^* = U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \quad (3.20)$$

\mathbf{z}' is a point inside the solution domain Ω . On assuming that no body forces act on the solid, i.e., $\mathbf{b} = 0$, then *Somigliana identity* is obtained as

$$u_i(\mathbf{z}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (3.21)$$

By moving \mathbf{z}' to the limit to boundary point $\mathbf{y} \in \Gamma$, i.e., $\mathbf{z}' \rightarrow \mathbf{y}$, we obtain the boundary integral equation (BIE) which governs the elastic displacement field and is given by

$$c_{ij}(\mathbf{y})u_j(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})u_j(\mathbf{z}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})t_j(\mathbf{z}) d\Gamma, \quad (3.22)$$

where the free term $c_{ij}(\mathbf{y})$ depends on the location of the collocation point \mathbf{z}' , see Brebbia and Dominguez [3].

Finally, on differentiating equation (3.21) with respect to the coordinates of the collocation point $\mathbf{z}' \in \Omega \setminus \Gamma$ then the integral equation for the strains is obtained as

$$\epsilon_{ik}(\mathbf{z}') = \int_{\Gamma} V_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}')t_j(\mathbf{z}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (3.23)$$

Further details on the computation of the new kernels V_{ijk} and S_{ijk} are detailed in Appendix A [43]. Once we have computed the strains, stresses at internal points can be obtained with the Hooke's law.

3.2.3 Discretisation of the problem

In order to solve numerically the BIE (3.22), the boundary Γ , is discretised into N_e elements. The geometry, displacements and stresses are interpolated over each element using their values at the nodes and some shape functions ϕ_m . For every collocation point l with the coordinates \mathbf{y}^l the BIE (3.22) can be written in discretised form as

$$c_{ij}u_j(l) + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 h_{ij}^m(l, k)u_j^k(m) = \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 g_{ij}^m(l, k)t_j^k(m), \quad (3.24)$$

where the integration constants $h_{ij}^m(l, k)$ and $g_{ij}^m(l, k)$, $i, j = 1, 2$, $m = 1, 2, 3$, are given by

$$h_{ij}^m(l, k) = \int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l)\phi_m(\xi)J^k(\xi) d\xi, \quad (3.25)$$

$$g_{ij}^m(l, k) = \int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l)\phi_m(\xi)J^k(\xi) d\xi. \quad (3.26)$$

In this study, isoparametric quadratic elements have been used such that if the boundary Γ is closed and is discretised into N_e elements then the total number of boundary nodes is given by $N = 2N_e$. The value of the integration constants is detailed in the Appendix 3.

On applying equation (3.24) for all the boundary nodes, we obtain the following system of linear algebraic equations:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}, \quad (3.27)$$

where \mathbf{u} and \mathbf{t} are vectors containing the nodal values of the displacements and stresses, respectively. After applying boundary conditions and with the rearrangement of the system,

the final square and non singular system of equations to be solved is

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b} \quad (3.28)$$

where \mathbf{X} encompasses the unknown displacements and tractions on the boundary.

3.3 INVERSE PROBLEMS

3.3.1 Definition

A direct problem can be stated as the calculation of the response (certain displacements u and stress vectors t for the elastic case) in a specific body defined by its geometry Ω with boundary Γ , mechanical properties (a), behavior model (operator L) and boundary conditions (some known values of u and t). As a counterpart of this, an inverse problem is one in which we do not know part of the information above.

A generic direct problem (not necessarily elastic) is defined as:

$$L(a)u = q \quad \text{in } \Omega$$

Kubo [19] classified this kind of problems, depending of the nature of the unknowns:

- Identification: a part of the geometry (Ω). This is the case when seeking for defects or flaws.
- Modelization: the mathematical equations that govern the behavior (L).
- Reconstruction: the boundary or initial conditions.
- External actions: t .
- Material properties: some parameters characterizing the material (a).

In order to find this information, supplementary data has to be provided, in form of some extra measurements values. These measurements can be any physical magnitude that propagates inside the body and that manifests on an accessible part of it, in order to obtain information about what is happening inside. The identification can be based on *propagation* phenomena of elastic properties (such as elastic deformation, wave propagation, acoustics, etc.), governed by partial differential equations; electric, thermal or other flow measurements, described by similar *potential* equations; or based on *radiation* (X-rays, reconstruction by photography, etc.). For the actual work, the additional information will be of the first type, static displacements and stresses, u and t measured on part of Γ .

3.3.2 Strategies for solving Inverse Problems

An inverse problem can be reformulated as the resolution of a system of non-linear equations or minimization of a non-linear functional. The methods for solving the IP can be classified into two main groups, concerning to their convergence: global methods or local. A *globally or locally convergent algorithms* denote a method that is designed to converge, from any starting point to a global or local minimum, respectively.

Local methods for the minimization of a cost functional are the Least squares, Gauss-Newton, Quasi-Newton secant methods. On the other hand, some global methods are the Genetic or Evolutionary algorithms, Neural networks, Random search... . In this research,

we will treat both, global and local, using the most suitable for each case. The algorithm properties to be taken into account are the accuracy, in the sense of achieving a good approximation starting from any configuration; effectiveness, talking in terms of computational costs; and convergence, meaning high probability of success in finding the real solution.

The scheme of a cost functional minimization problem consists on

$$\min_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

where the functional f depends on the difference between some measured values of a certain magnitude, and the same values computed in a supposed model. General surveys about optimization techniques applied to inverse problems are found on Menke [82], Dennis [5] [83] and Hansen [51]. These techniques can be classified into *classical mathematic programming* and *soft computing*. The first ones need to compute some function derivatives, whereas the last ones, also called *zero order methods*, avoid this computation. An overview for minimization techniques for IP together with BEM has been made by Rus [76].

As said above, most of the standard minimization methods require the computation of the cost functional gradient, ∇f , with respect the unknown parameters of the problem. The computational cost of this evaluation varies depending of the differentiation method used for that purpose. The *Finite Differences* method entails the highest computational effort. It has the advantage of simplicity for its implementation, but implies solving an additional direct problem at a finite distance from the original one (unless the use of central differences) for each term or vector of the matrix, i.e., for each parameter at each iteration. This drawback can be avoided using the *Adjoint Variable method* for the gradient computation. It only needs to compute the original and the adjoint direct problems whatever the number of variables, and then making some faster calculations to obtain each derivative. The disadvantage of this method may be the complexity of the formulation. Finally, the *direct differentiation* approach, is the one that involves less computational cost, but most cumbersome formulation. The integral equations are usually attempted through a series expansion of the kernels and weights of the integral equation.

Part II

CONTRIBUTIONS

CHAPTER 4

CAUCHY INVERSE PROBLEM

4.1 MATHEMATICAL FORMULATION OF THE CAUCHY PROBLEM IN TWO-DIMENSIONAL ANISOTROPIC ELASTICITY

Consider an anisotropic linear elastic homogeneous solid which occupies an open bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ and assume that Ω is bounded by a smooth surface Γ in the sense of Liapunov, such that $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, where $\Gamma_1, \Gamma_2 \neq \emptyset$ and $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \emptyset$. In particular, we consider the case when the geometry and the loading conditions describe a pure plane strain state. Therefore, the problem variables, i.e., displacements, stresses and strains, can be simplified to a two-dimensional study. For simplicity, we assume no body forces ($\mathbf{b} = 0$). The elastic problem is defined in Ω as in Chapter 3, (section 3.1.2) with the equilibrium, kinematic and constitutive equations ($i, j = 1, 2$):

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.2)$$

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad (4.3)$$

The traction vector \mathbf{t} at a point on the boundary Γ with the outward normal \mathbf{n} is defined by

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad \text{on } \Gamma \quad (4.4)$$

If dealing with direct problem formulation, the needed boundary conditions consist on the knowledge of the displacement and/or the traction vectors on the entire boundary Γ , obtaining the corresponding Dirichlet, Neumann, or mixed boundary conditions which enable us to determine the displacement vector \mathbf{u} in the domain Ω . Then, the strain tensor can be calculated from the kinematic relations (4.2) and the stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ is determined using the constitutive law (4.3).

When it is possible to measure both, the displacement and traction vectors on a part of the boundary Γ , say $\Gamma_2 \subset \Gamma$, and there is no information on the remaining boundary $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_2$ then this leads to the mathematical formulation of an inverse problem consisting of the equilibrium equation (4.1) and the given overspecified boundary conditions on Γ_2 ,

namely

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j} = 0 & \text{in } \Omega \\ u_i = \tilde{u}_i & \text{on } \Gamma_2 \\ t_i = \tilde{t}_i & \text{on } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Here $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{t}}$ are prescribed vector valued, displacements and tractions, respectively. In the above formulation of the boundary conditions (4.5₂) and (4.5₃), it can be seen that the boundary Γ_2 is overspecified by prescribing both the displacement $\mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \tilde{\mathbf{u}}$ and the traction $\mathbf{t}|_{\Gamma_2} = \tilde{\mathbf{t}}$ vectors, whilst the boundary Γ_1 is underspecified since both the displacement $\mathbf{u}|_{\Gamma_1}$ and the traction $\mathbf{t}|_{\Gamma_1}$ vectors are unknown and have to be determined. This *reconstruction inverse problem*, according to Kubo classification [19], is termed the *Cauchy problem*, and it is much more difficult to solve both, analytically and numerically, than the direct problem, since the solution does not satisfy the general conditions of well-posedness. Although the problem may have a unique solution, it is well known that this solution is unstable with respect to small perturbations in the data on Γ_2 [15]. Thus the problem is ill-posed and we cannot use a direct approach, such as the Gauss elimination method, in order to solve the system of linear equations which arises from the discretisation of the partial differential equation and the boundary conditions (4.5).

4.2 DESCRIPTION OF THE ALGORITHM

Therefore, knowing the exact data $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{t}}$ on the boundary Γ_2 , we use a convergent iterative algorithm, originally proposed by Kozlov *et al.* [40] and implemented for isotropic linear elastic media by Marin *et al.* [26, 27], but with a stopping regularizing criterion which is essential when the data $\tilde{\mathbf{u}}$ and/or $\tilde{\mathbf{t}}$ become noisy. This algorithm consists of the following steps:

Step 1.1. Set $k = 0$. Specify an initial approximation $\mathbf{t}^{(0)}$ for the tractions on the underspecified boundary Γ_1 .

Step 1.2. Solve the mixed boundary value problem

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(1)} = 0 & \text{in } \Omega \\ t_i^{(1)} \equiv \sigma_{ij}^{(1)} n_j = t_i^{(0)} & \text{on } \Gamma_1 \\ u_i^{(1)} = \tilde{u}_i & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

in order to determine the displacements $\mathbf{u}^{(1)}$ in Ω and on Γ_1 .

Step 2.1. Having constructed the approximation $\mathbf{u}^{(2k-1)}$, $k > 0$, the mixed boundary value problem

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(2k)} = 0 & \text{in } \Omega \\ u_i^{(2k)} = u_i^{(2k-1)} & \text{on } \Gamma_1 \\ t_i^{(2k)} \equiv \sigma_{ij}^{(2k)} n_j = \tilde{t}_i & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

is solved to determine the displacements $\mathbf{u}^{(2k)}$ in Ω and the tractions $\mathbf{t}^{(2k)} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{(2k)}) \cdot \mathbf{n}$ on Γ_1 .

Step 2.2. Having constructed the vector-valued function $\mathbf{u}^{(2k)}$, $k > 0$, the mixed boundary value problem

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(2k+1)} = 0 & \text{in } \Omega \\ t_i^{(2k+1)} \equiv \sigma_{ij}^{(2k+1)} n_j = t_i^{(2k)} & \text{on } \Gamma_1 \\ u_i^{(2k+1)} = \tilde{u}_i & \text{on } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

is solved in order to determine the displacements $\mathbf{u}^{(2k+1)}$ in Ω and on Γ_1 .

Step 3. Set $k = k + 1$ and repeat steps 2.1 and 2.2 until a prescribed stopping criterion is satisfied.

Kozlov *et al.* [40] showed that if Γ is smooth, and $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{t}}$ satisfies some continuity conditions, then the alternating algorithm based on steps 1 – 3 produces two sequences of approximate solutions $\{\mathbf{u}^{(2k)}(\mathbf{x})\}_{k>0}$ and $\{\mathbf{u}^{(2k-1)}(\mathbf{x})\}_{k>0}$ which both converge to the solution $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ of the Cauchy problem (4.5) for any initial guess. Moreover, the alternating algorithm has a regularizing character. Also the same conclusion is obtained if at the step 1.1 we specify an initial guess $\mathbf{u}^{(0)}$, instead of an initial guess for the traction vector $\mathbf{t}^{(0)}$, and we modify accordingly the steps 1 and 2 of the algorithm.

We note that if the initial guess $\mathbf{t}^{(0)}$ and the boundary data $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{t}}$, satisfy some continuity conditions, the problems (4.6) – (4.8) are well-posed and solvable, see Lions and Magenes [42]. These intermediate mixed well-posed problems are solved using the BEM described in the next section. In order to pass from one iteration to the next, the values of the displacement and traction vectors are required only on the boundary Γ and not in the domain Ω and, therefore, the BEM is a very suitable technique for solving the intermediate mixed boundary value problems (4.6) – (4.8). Furthermore, the displacements and stresses inside the solution domain Ω have to be evaluated only after the stopping criterion has been satisfied and not at every iteration, thus saving a substantial amount of computational time and storage requirements.

4.3 THE BOUNDARY ELEMENT METHOD (BEM)

In chapter 3 (section 3.2.3), when describing the Boundary element method, in order to solve numerically the BIE, the boundary was discretised. For this particular problem, the boundaries Γ , Γ_1 and Γ_2 are discretised into N_e , N_e^1 and N_e^2 elements, respectively, such that $N_e^1 + N_e^2 = N_e$. The geometry, displacements and stresses are interpolated over each element. In this study, isoparametric quadratic elements have been used such that if the boundary Γ is closed and is discretised into N_e elements, then, the total number of boundary nodes is given by $N = 2N_e$. Consequently, the number of boundary nodes corresponding to the underspecified Γ_1 and overspecified Γ_2 boundaries is given by $N_1 = 2N_e^1$ and $N_2 = 2N_e^2$, respectively, such that $N_1 + N_2 = N$.

Next, is to apply the discretised BIE (3.24) at every boundary node, giving a system of linear algebraic equations:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}, \quad (4.9)$$

where \mathbf{u} and \mathbf{t} are vectors containing the nodal values of the displacements and stresses, respectively. Next, in order to rearrange the system, boundary conditions must be applied. In this particular Cauchy problem, (4.5₂) and (4.5₃) provides the values of $4N_2$ of the unknowns and the problem reduces to solving a system of $2N$ equations with $4N_1$ unknowns which can be generically written as

$$\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (4.10)$$

where the matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2N \times 4N_1}$ depends solely on the geometry of the boundary and the material properties, the vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4N_1}$ contains the unknown values of the displacements and the tractions on the boundary Γ_1 and the vector $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2N}$ is computed using the Cauchy boundary conditions (4.5₂) and (4.5₃).

4.4 NUMERICAL RESULTS

In this section we illustrate the numerical results obtained using the alternating iterative algorithm presented in conjunction with the BEM. In addition, we investigate the convergence with respect to the mesh size discretisation and the number of iterations when the data are exact, and the stability when the data are perturbed by noise.

4.4.1 Examples

In order to present the performance of the numerical method proposed, we solve the Cauchy problem for two test examples in a two-dimensional smooth geometry, namely the annular domain $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid r_i^2 < x_1^2 + x_2^2 < r_o^2\}$, $r_i = 1$, $r_o = 4$, since the condition of a smooth domain is required by the theoretical analysis of Kozlov *et al.* [40]. We assume that the boundary Γ of the solution domain is divided into two disjointed parts, namely $\Gamma_1 = \Gamma_i \equiv \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid x_1^2 + x_2^2 = r_i^2\}$ and $\Gamma_2 = \Gamma_o \equiv \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid x_1^2 + x_2^2 = r_o^2\}$ in the case of example 1, and $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \Gamma_i \mid \alpha_1 \leq \Theta(\mathbf{x}) \leq \alpha_2\}$ and $\Gamma_2 = \Gamma_o \cup \{\mathbf{x} \in \Gamma_i \mid 0 \leq \Theta(\mathbf{x}) < \alpha_1\} \cup$

$\{\mathbf{x} \in \Gamma_i \mid \alpha_2 < \Theta(\mathbf{x}) \leq 2\pi\}$ in the case of example 2, where $\Theta(x)$ is the angular polar coordinate of x and $\alpha_i, i = 1, 2$, are specified angles in the interval $(0, 2\pi)$. In order to illustrate the typical numerical results we have taken $\alpha_1 = \pi/4$ and $\alpha_2 = 3\pi/4$.

In the following examples we consider an orthotropic linear elastic medium (birch plywood), whose material orthotropy axis coincide with the axis of the Cartesian reference system. The orthotropic solid considered in this study is characterised by the engineering elastic constants $E_1 = 11.76 \text{ GN/m}^2$, $E_2 = 5.88 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = 0.686 \text{ GN/m}^2$ and $\nu_{12} = 0.071$ and hence the compliance elastic constants are given by $a_{11} = 0.08503 \text{ m}^2/\text{GN}$, $a_{12} = -0.006037 \text{ m}^2/\text{GN}$, $a_{22} = 0.1701 \text{ m}^2/\text{GN}$, $a_{66} = 1.4577 \text{ m}^2/\text{GN}$ and $a_{16} = a_{26} = 0.0 \text{ m}^2/\text{GN}$.

Example 1. We consider a stress state corresponding to constant internal and external pressures $\sigma_i = 1.0 \text{ GN/m}^2$ and $\sigma_e = 2.0 \text{ GN/m}^2$, respectively.

Example 2. We consider a uniform hydrostatic stress state given by $\sigma_e = 1.5 \text{ GN/m}^2$.

Although analytical expressions for the stresses $\sigma^{(\text{an})}$ can be obtained and hence analytical expressions for the traction vector $\mathbf{t}^{(\text{an})}$, it should be noted that the corresponding analytical displacements $\mathbf{u}^{(\text{an})}$ are not available in this case, but they can be obtained numerically by solving the direct problem

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(\text{an})} = 0 & \text{in } \Omega \\ \sigma_{ij}^{(\text{an})} n_j = t_i^{(\text{an})} & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (4.11)$$

where the rigid body displacements are eliminated by using

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^{(\text{an})} d\Omega = 0 \quad \text{and} \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}^{(\text{an})} \times \mathbf{x} d\Omega = 0. \quad (4.12)$$

Hence the Cauchy problem considered in this work is described by equation (4.5), in which the Cauchy data are given $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^{(\text{an})}$ and $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(\text{an})}$, where the displacement vector $\mathbf{u}^{(\text{an})}$ is obtained by solving numerically the Neumann problem (4.11), together with the rigid body conditions (4.12), with a very fine BEM mesh in order to obtain its best numerical approximation. In the sequel, the analytical traction vector $\mathbf{t}^{(\text{an})}$ and the corresponding displacement vector $\mathbf{u}^{(\text{an})}$ will be referred to as “exact” traction and displacement vectors, respectively.

For the Cauchy problem corresponding to Examples 1 and 2, the values of the displacement \mathbf{u} and traction \mathbf{t} vectors on the boundary Γ_1 , as well as in the solution domain Ω , are unknown and have to be determined. The Cauchy problems given by equation (4.5) for the examples considered in this study have been solved iteratively using the BEM to provide

simultaneously the unspecified boundary displacement and traction vectors on the boundary Γ_2 . The number of isoparametric quadratic boundary elements used for discretising the boundary Γ was taken to be $N_e \in \{32, 48, 96\}$ such that both the inner and the outer boundaries, were discretised into the same number of isoparametric quadratic boundary elements, namely $N_e/2 \in \{16, 24, 48\}$.

4.4.2 Initial guess

An arbitrary vector valued function $\mathbf{t}^{(0)}$ may be specified as an initial guess for the traction vector on Γ_1 , but in order to improve the rate of convergence of the iterative procedure we have chosen a vector valued function which ensures the continuity of the traction vector at the endpoints of Γ_1 and which is also linear with respect to the angular polar coordinate Θ . For Example 2, this initial guess is given by

$$t_i^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_2 - \Theta(\mathbf{x})}{\alpha_2 - \alpha_1} t_i^{(0)}(\mathbf{x}_1) + \frac{\Theta(\mathbf{x}) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} t_i^{(0)}(\mathbf{x}_2), \quad (4.13)$$

where $\alpha_i = \Theta(\mathbf{x}_i)$ for $i = 1, 2$, \mathbf{x}_1 and \mathbf{x}_2 are the endpoints of Γ_1 , and the choice of $\alpha_1 = \pi/4$ and $\alpha_2 = 3\pi/4$ also ensures that the initial guess is not too close to the exact values $t_i^{(\text{an})}(\mathbf{x})$.

In the case of Example 1, we cannot use the procedure described above and, therefore, the initial guess has been chosen as

$$t_i^{(0)}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.14)$$

4.4.3 Convergence of the algorithm

In order to investigate the convergence of the algorithm, at every iteration we evaluate the accuracy errors defined by

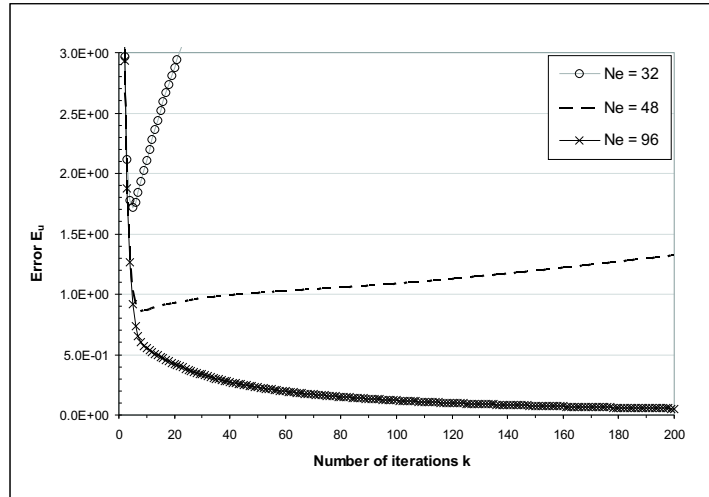
$$E_u = \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(\text{an})}\|_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)}, \quad E_t = \|\mathbf{t}^{(k)} - \mathbf{t}^{(\text{an})}\|_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)}, \quad (4.15)$$

where $\mathbf{u}^{(k)}$ and $\mathbf{t}^{(k)}$ are the displacement and the traction vectors on the boundary Γ_1 retrieved after k iterations, respectively, and each iteration consists of solving the two mixed well-posed problems mentioned in Section 4.2. The error in predicting the displacement vector inside the solution domain Ω may also be evaluated by using the expression

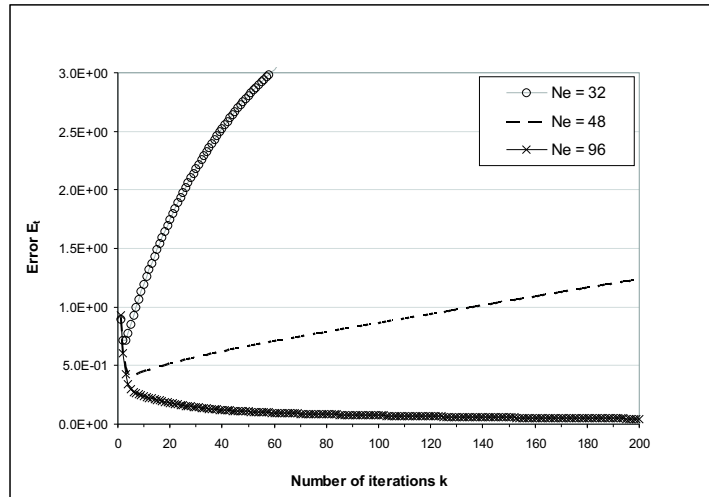
$$E_\Omega = \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(\text{an})}\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \quad (4.16)$$

but it has an evolution similar to that of the errors E_u and E_t , since at each iteration the values of the displacement vector inside the solution domain are retrieved from the values of the displacement \mathbf{u} and traction \mathbf{t} vectors on the boundary Γ .

When starting with the initial guess $\mathbf{t}^{(0)}$ given by equations (4.14) and (4.13) for Examples 1 and 2, respectively, a sequence $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k>0}$ of approximation functions for $\mathbf{u}|_{\Gamma_1}$ is obtained and, according to Kozlov *et al.* [40], this sequence converges to the exact solution.



(a)

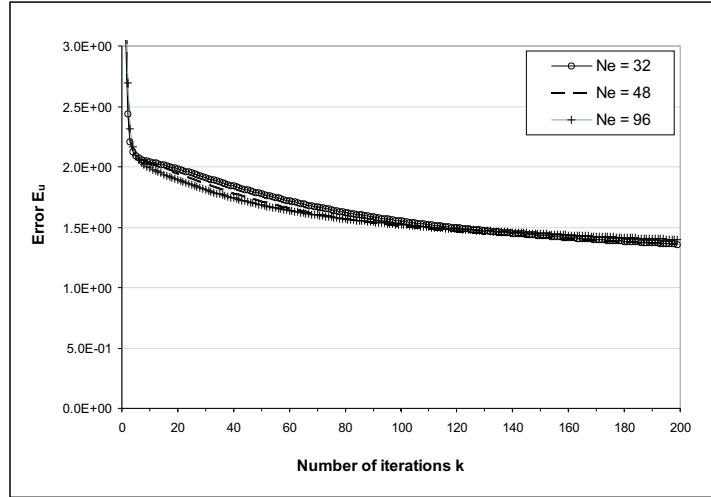


(b)

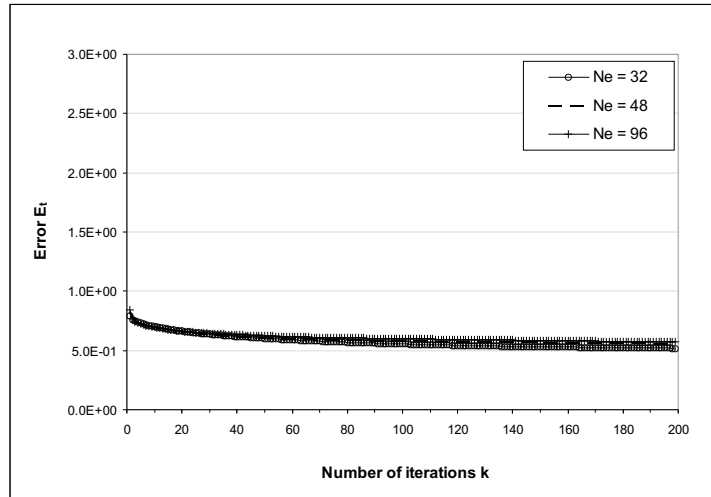
Figure 4.1: The accuracy errors (a) E_u , and (b) E_t , as functions of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 32$ ($- \circ -$), $N_e = 48$ ($- - -$) and $N_e = 96$ ($- \times -$) isoparametric quadratic boundary elements and exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 , for the Cauchy problem considered in Example 1.

If we evaluate the errors E_u and E_t at every iteration, in the case of Example 1, then we note that both these errors keep decreasing with respect to increasing the number of iterations performed only for the finest BEM mesh, i.e. $N_e = 96$, see Figure 4.1. On the contrary, if the coarser BEM discretisations are used, i.e. $N_e = 32, 48$, then the accuracy errors given by expression (4.15) attain a minimum value after a certain iteration number, k , after which they start increasing. However, the errors E_u and E_t corresponding to the Cauchy problem given by Example 2 have a decreasing tendency as k increases for all the BEM discretisations used, see Figure 4.2. A possible explanation for the different behaviors of the accuracy errors E_u and E_t for Examples 1 and 2 is represented by the type of initial guess used for each of the Cauchy problems analysed. More precisely, the initial guess corresponding to Example 2

ensures the continuity of the traction vector at the endpoints of the underspecified boundary Γ_1 , whereas the initial guess for the Example 1 is the constant vector zero which contains no information about the unknowns on Γ_1 , see equations (4.13) and (4.14), respectively.



(a)



(b)

Figure 4.2: The accuracy errors (a) E_{u_t} and (b) E_{t_t} , as functions of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 32$ ($- \circ -$), $N_e = 48$ ($- \square -$) and $N_e = 96$ ($- + -$) isoparametric quadratic boundary elements and exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 , for the Cauchy problem considered in Example 2.

We note that the algorithm proposed by Kozlov *et al.* [40] is convergent as we increase the number of boundary elements, as can be seen in Figures 4.3 and 4.4 which represent the evolution of the numerical solutions for the x_1 component of the displacement and the x_2 component of the traction for the Cauchy problems associated with Examples 1 and 2, respectively, for $N_e \in \{32, 48, 96\}$. From Figures 4.3 and 4.4 it can be seen that the numerical solutions for the displacement $u_1|_{\Gamma_1}$ and the traction $t_2|_{\Gamma_1}$ are more accurate for the Cauchy

problem given by Example 1 than for the Cauchy problem corresponding to Example 2. The reason for this is that $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$ in the case of Example 1, whilst $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 \neq \emptyset$ in the case of Example 2, i.e. there exist two points where the isoparametric quadratic BEM changes to mixed boundary conditions. It is well known, see e.g. Fichera [45] and Schiavone [46], that the gradient of the displacement \mathbf{u} possesses singularities at the points where the data changes from displacement boundary conditions to traction boundary conditions, even if the displacement and the traction data are of class C^∞ . Consequently, the classical solution for the displacement \mathbf{u} cannot be smooth, although its smoothness can be improved if the displacement and the traction data are required to satisfy an increasing number (increasing with smoothness) of additional conditions, see also Wendland *et al.* [47]. Nevertheless, in the numerical implementation one may use weighted functions at each iteration of the algorithm in order to cancel the singularity, see Johansson [48], but this is deferred to future work.

4.4.4 Variable relaxation factor

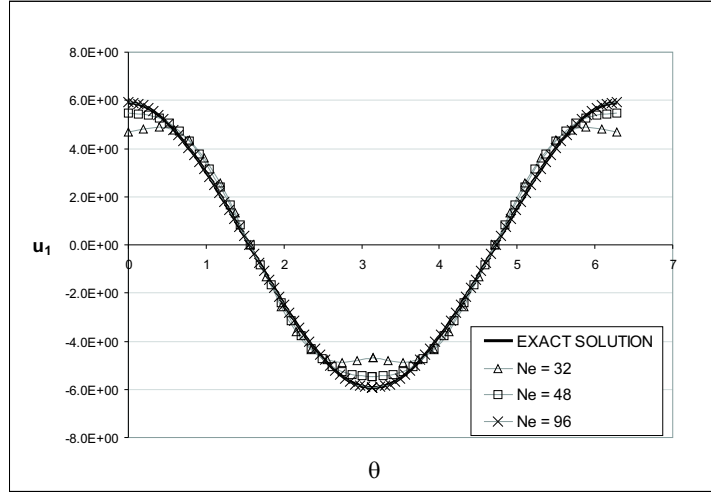
Although for both examples analysed here in the numerical results obtained for the unknown displacement and traction vectors on Γ_1 are well within the engineering accuracy, the errors in predicting the traction $t_2|_{\Gamma_1}$ in the case of Example 2 are still large, especially for the elements close to the ends of the underspecified boundary Γ_1 , see Figure 4.5(b). In order to save both on computational time and on computer storage and to improve the results for the traction vector on the underspecified part of the boundary, we relax the marching condition (4.8₂) through the use of

$$t_i^{(2k+1)} \equiv \sigma_{ij}^{(2k+1)} n_j = \rho t_i^{(2k)} + (1 - \rho) t_i^{(2k-1)} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (4.17)$$

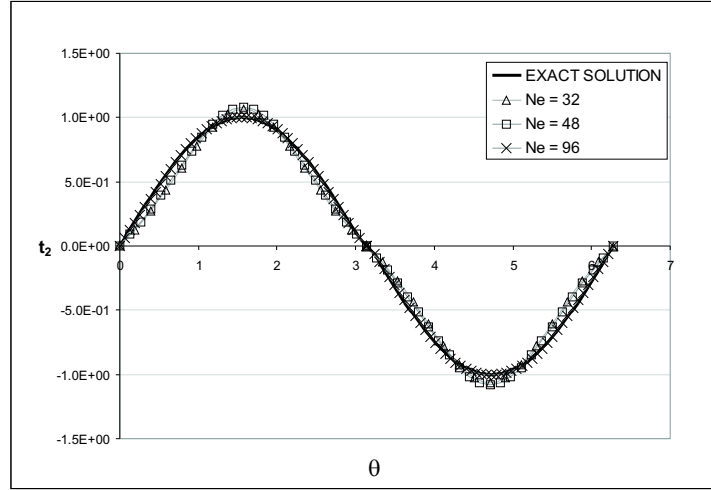
when passing from step 2.1 to step 2.2 of the algorithm described in Section 4.2, where ρ is a relaxation parameter to be prescribed.

By a thorough inspection of the numerical solution for the traction vector on Γ_1 obtained after various numbers of iterations without relaxation, we noticed that at the endpoints of the underspecified boundary the rate of convergence is higher than elsewhere on Γ_1 . After a few iterations the numerical solution for the traction vector at the endpoints of Γ_1 approaches the exact solution and after that, as we increase the number of iterations, it deviates from the exact traction whilst elsewhere on Γ_1 the numerical traction still approaches the exact value. The high rate of movement of the numerical traction at the endpoints of Γ_1 in comparison with its rate of movement elsewhere on the underspecified boundary suggests the introduction of a variable relaxation factor $\rho = \rho(\Theta(\mathbf{x}))$ which is small at the endpoints of Γ_1 and has a maximum value, say A , in the middle of Γ_1 . The variable relaxation factor was chosen as, see also Marin *et al.* [26] and Mera *et al.* [44],

$$\rho(\Theta(\mathbf{x})) = A \sin\left(\frac{\Theta(\mathbf{x}) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \pi\right), \quad (4.18)$$



(a)



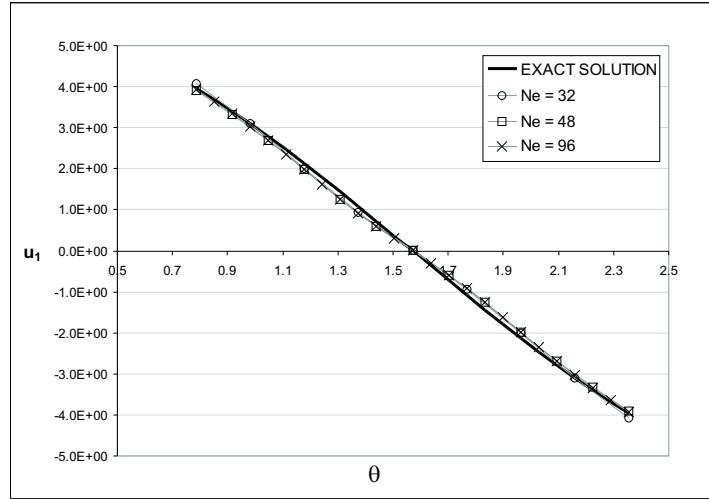
(b)

Figure 4.3: (a) The exact $u_1^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $u_1^{(\text{num})}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $t_2^{(\text{num})}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 32$ ($-\triangle-$), $N_e = 48$ ($-\square-$) and $N_e = 96$ ($-\times-$) isoparametric quadratic boundary elements, exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 and $k = 200$ iterations, for the Cauchy problem considered in Example 1.

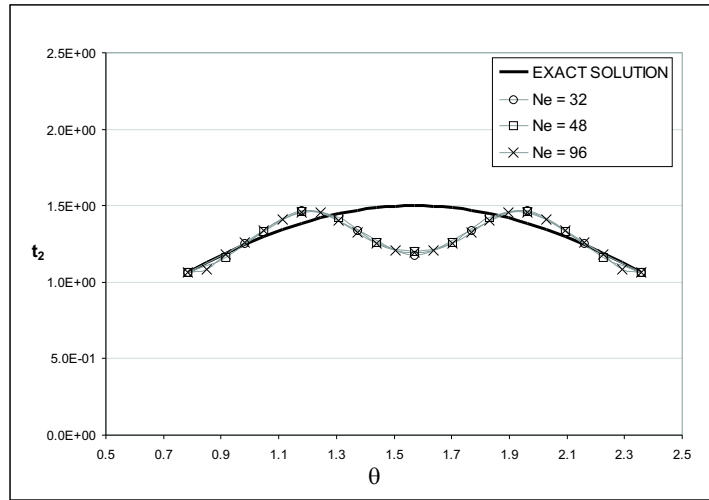
where $A \in (0, 2]$. Figures 4.5(a) and (b) illustrate more accurate estimates of the solutions for the displacement $u_1|_{\Gamma_1}$ and the traction $t_2|_{\Gamma_1}$, respectively, obtained using the variable relaxation factor (4.17) with $A = 1.5$ although similar results can be obtained with $A \in (0, 2]$.

4.4.5 Stopping criterion

Once the convergence with respect to increasing the number of boundary elements N_e of the numerical solution has been established, we fix $N_e = 48$ and investigate the stability of the numerical solution for Example 1 only. To do so, the initial displacements $\tilde{u}_i|_{\Gamma_2}$, $i = 1, 2$, have been perturbed as $\tilde{u}_i^\varepsilon|_{\Gamma_2} = \tilde{u}_i|_{\Gamma_2} + \delta\tilde{u}_i$, $i = 1, 2$, where $\delta\tilde{u}_i$, $i = 1, 2$, is a Gaussian random



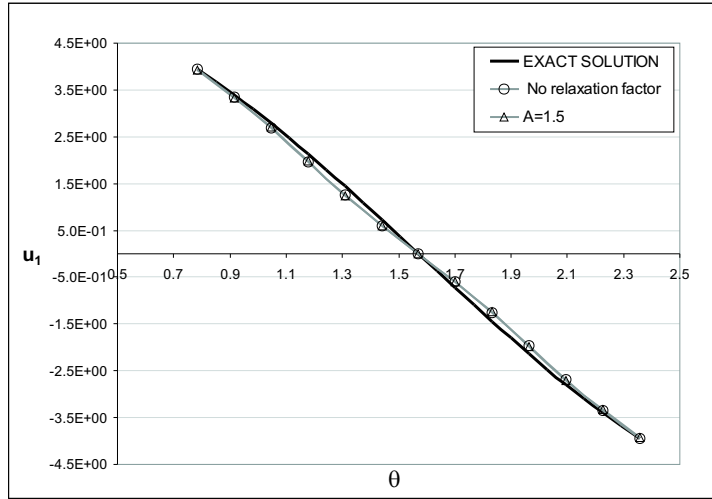
(a)



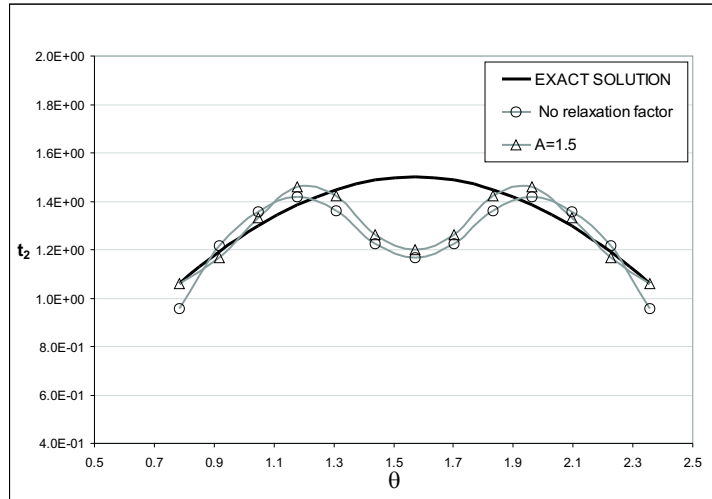
(b)

Figure 4.4: (a) The exact $u_1^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $u_1^{(\text{num})}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $t_2^{(\text{num})}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 32$ ($-\triangle-$), $N_e = 48$ ($-\square-$) and $N_e = 96$ ($-\times-$) isoparametric quadratic boundary elements, exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 and $k = 200$ iterations, for the Cauchy problem considered in Example 2.

variable with mean zero and standard deviation $\sigma_i = \max_{\Gamma_2} |\tilde{u}_i| \times (p/100)$, $i = 1, 2$, and p is the percentage of noise added into the input data $\tilde{u}_i|_{\Gamma_2}$, $i = 1, 2$. In Fig. 4.6 we present the accuracy errors E_u and E_t corresponding to Example 1 for various levels of noise, namely $p \in \{1, 3, 5\}$. It can be seen from this figure that both errors E_u and E_t decrease up to a certain number of iterations, after which they start increasing. If the process is continued beyond this point then the numerical solutions lose their smoothness and become highly oscillatory and unbounded. Therefore, a regularizing stopping criterion must be used in order to cease the iterative process at the point where the errors in the numerical solutions



(a)



(b)

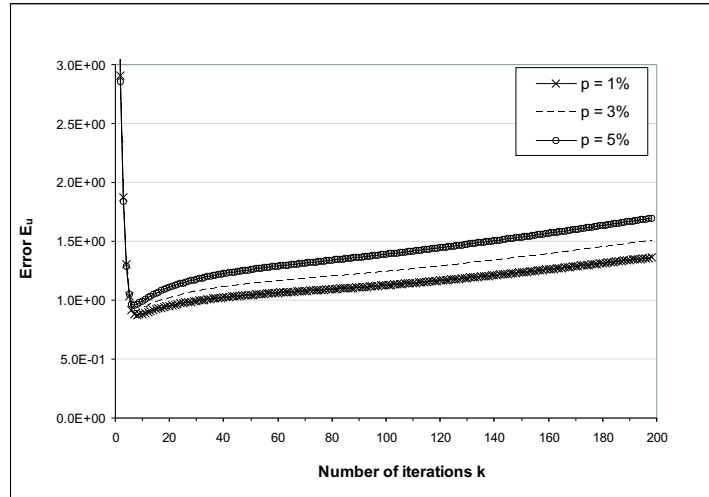
Figure 4.5: (a) The exact $u_1^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $u_1^{(\text{num})}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $t_2^{(\text{num})}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained without relaxation (—○—) and with the variable relaxation factor with amplitude $A = 1.5$ (—△—), using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and exact Cauchy input data on the boundary Γ_2 , for the Cauchy problem considered in Example 2.

start increasing.

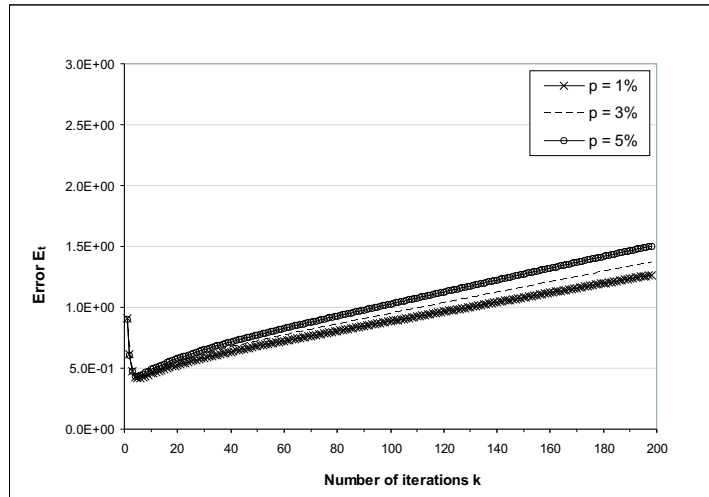
If we evaluate the Euclidean norm of the vector $\mathbf{CX} - \mathbf{F}$, then this should tend to zero as \mathbf{X} tends to the exact solution. Hence after each iteration we evaluate the error

$$E = \|\mathbf{CX}^{(k)} - \mathbf{F}\|_2, \quad (4.19)$$

where $\mathbf{X}^{(k)}$ is the vector obtained from the values of the displacement and the traction vectors on the boundary Γ_1 retrieved after k iterations. The error E includes information on both the displacement and the traction vectors and it is expected to provide an appropriate



(a)



(b)

Figure 4.6: The accuracy errors (a) E_u , and (b) E_t , as functions of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($- \times -$), $p = 3\%$ ($- - -$) and $p = 5\%$ ($- o -$), for the Cauchy problem considered in Example 1.

stopping criterion. Indeed, if we investigate the error E obtained at every iteration for the example considered for various levels of noise added into the input data $\tilde{u}_i|_{\Gamma_2}$, $i = 1, 2$, we obtain the curves graphically represented in Fig. 4.7. Although more rigorous stopping criteria, such as the discrepancy principle [49] or the generalized cross-validation [50], could have been used, an L-curve type criterion which ceases the iterative procedure at the iteration number, k_{opt} , corresponding to the corner in the curve represented in Fig. 4.7 has been chosen as the stopping criterion, see e.g. Hansen [51]. From Figures 4.6 and 4.7 it can be seen that the proposed stopping criterion is very efficient in locating the point where the errors in the numerical solution increase and the iterative process should be terminated.

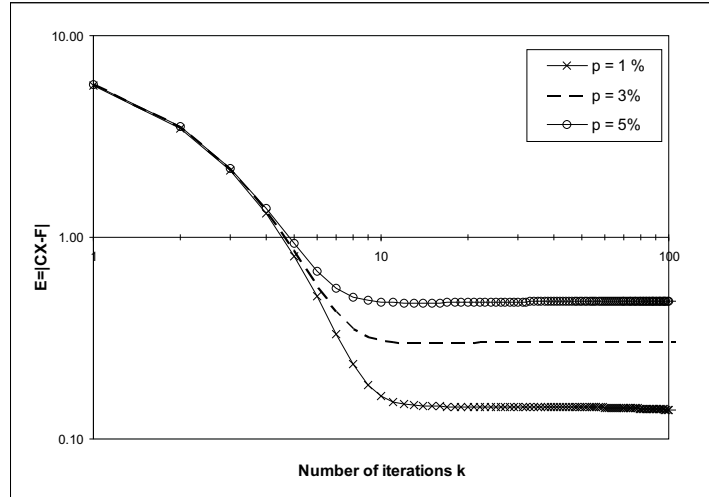
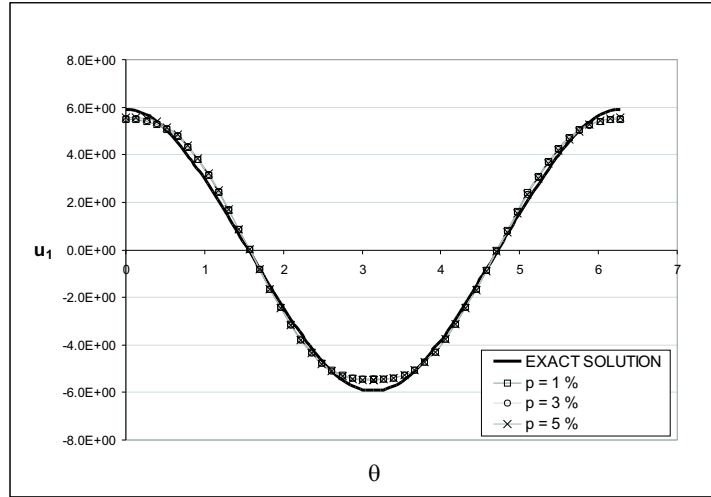


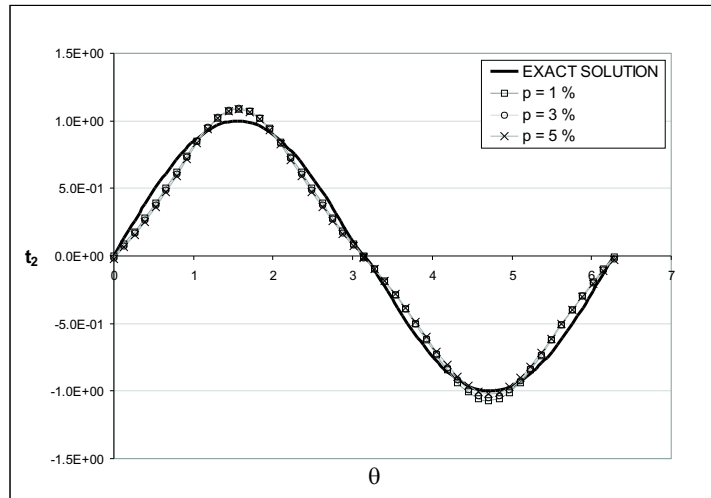
Figure 4.7: The convergence error $E = \|\mathbf{CX} - \mathbf{F}\|_2$ as a function of the number of iterations, k , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($- \times -$), $p = 3\%$ ($- - -$) and $p = 5\%$ ($- \circ -$), for the Cauchy problem considered in Example 1.

4.4.6 Stability of the algorithm

Based on the stopping criterion described in the previous section, the numerical results for the displacement u_1 and the traction t_2 on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using various levels of noise added into the displacement vector on the boundary Γ_2 , for Examples 1 and 2, are presented in Figures 4.8 and 4.9, respectively. From these figures it can be seen that the numerical solution is a stable approximation to the exact solution, free of unbounded and rapid oscillations. Moreover, from the numerical results presented in this section it can be concluded that the stopping criterion developed in Section 4.4.5 has a regularizing effect and the numerical solution obtained by the iterative BEM described in this study is convergent and stable with respect to increasing the mesh size discretisation and decreasing the level of noise, respectively.

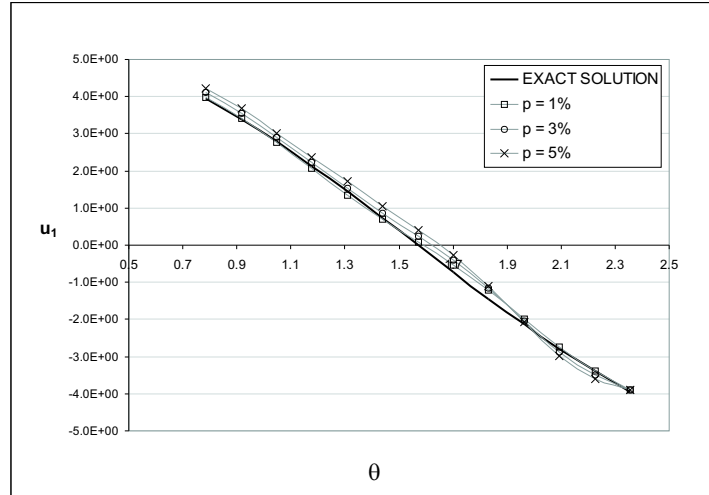


(a)

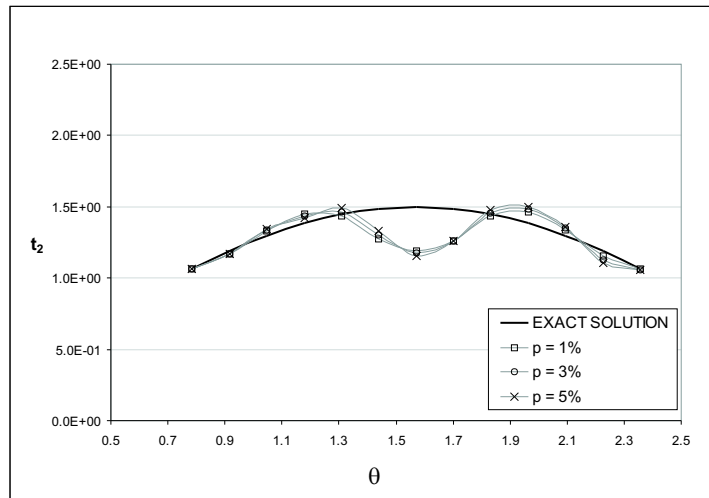


(b)

Figure 4.8: (a) The exact $u_1^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $u_1^{(\text{num})}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(\text{an})}$ (—) and the numerical $t_2^{(\text{num})}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($-\square-$), $p = 3\%$ ($-\circ-$) and $p = 5\%$ ($-\times-$), for the Cauchy problem considered in Example 1.



(a)



(b)

Figure 4.9: (a) The exact $u_1^{(an)}$ (—) and the numerical $u_1^{(num)}$ displacements, and (b) the exact $t_2^{(an)}$ (—) and the numerical $t_2^{(num)}$ tractions, on the underspecified boundary Γ_1 , obtained using $N_e = 48$ isoparametric quadratic boundary elements and several amounts of noise added into the input data $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, namely $p = 1\%$ ($-\square-$), $p = 3\%$ ($-\circ-$) and $p = 5\%$ ($-\times-$), for the Cauchy problem considered in Example 2.

CHAPTER 5

MATERIAL CONSTANTS INVERSE PROBLEM

5.1 DEFINITION OF THE PROBLEM

We start considering an elastic anisotropic body Ω , bounded by a smooth surface Γ , acted on by some static surface forces. For simplicity, we assume absent of body forces. When the problem is defined by the governing equations, the material properties are known and the boundary conditions are prescribed along the whole boundary Γ , we have a *well-posed direct problem*. In particular, we consider the case when the geometry and the loading conditions describe a pure plane strain state, therefore the study is simplified to a two-dimensional one. The problem is defined by the following equations,

$$\begin{aligned}\sigma_{ji,j} &= 0 & \text{in } \Omega \\ \varepsilon_i &= a_{ij}\sigma_j & \text{in } \Omega \\ t_i &= \sigma_{ij}n_j & \text{on } \Gamma\end{aligned}\tag{5.1}$$

For the anisotropic 2D case, if the middle plane of the body is taken as the coordinate plane 1-2, Hooke's law can be expressed as

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}\tag{5.2}$$

where the two-index notation for stresses and strains has been transformed to a one-index notation: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 12 \rightarrow 6$.

In this chapter, we deal with an anisotropic elastostatic problem where the elastic constants a_{ij} are, totally or partially, unknown. In order to obtain a solvable problem, extra information has to be provided to make up for the unknown material properties. The ensuing problem is a *parameter identification problem* or *material constant inverse problem*. In practice, this extra information will be obtained through measurements on a reachable surface of displacements, strains or stresses.

The usual approach for solving the problem is to minimize an objective function which represents the distance between the measured values and the computed ones in an assumed model.

5.2 MINIMIZATION ALGORITHM

We are attempting to fit the measured values of a physical magnitude y_i , ($i = 1 \dots m$) with their values predicted by a model, $m_i(\mathbf{x})$, which depend on some unknown parameters x_j , ($j = 1 \dots n$), the elastic constants a_{ij} in our case. The measurements can be either displacements and/or tractions, which are the system response to some given boundary conditions. If we note with f the function to be minimized, the minimization problem is defined as follows

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m R_i(\mathbf{x})^2 \quad (5.3)$$

where \mathbf{R} is the vector of residuals, computed as the difference between the experimental data and the values predicted by the model, i.e., $R_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{x}) - y_i$. Since the model is nonlinear in \mathbf{x} , a nonlinear least-squares problem arises. To solve it, we employ the Levenberg-Marquardt algorithm, which has been found advantageous in similar problems [62]. This method is quickly q-linearly convergent in problems with small residuals and not too nonlinear. It also has the advantage of being well-defined even when the Jacobian does not have full column rank, and the step is close to being the steepest-descent direction [5].

The algorithm proceeds as follows: given an estimate \mathbf{x}^k , an affine model \mathbf{M}^k of $\mathbf{R}^k(\mathbf{x})$ is computed,

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{R}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (5.4)$$

where \mathbf{J}^k is the Jacobian matrix given by the derivatives,

$$\mathbf{J}_{ij}^k = \left. \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} = \left. \frac{\partial m_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} \quad (5.5)$$

Then, the original minimization problem is reduced to,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{M}^k{}^T \mathbf{M}^k \\ \text{subject to} \quad & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_2 \leq \delta^k \end{aligned} \quad (5.6)$$

where the restriction is established to avoid steps out of the region where the affine model is valid. The solution of the problem above provides an updated estimate of the parameters,

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (\mathbf{J}^k{}^T \mathbf{J}^k + \alpha^k \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^k{}^T \mathbf{R}(\mathbf{x}^k) \quad (5.7)$$

where α^k is a parameter which depends on δ^k .

Note that no constraint has been considered in the original minimization problem (5.3). However, for real materials the characteristic polynomial equation (3.11) cannot have real roots [1]. Therefore after each update of the material constants, the complex parameters μ_i are computed and the inequalities $\mathbf{Im}(\mu_i) \neq 0$ are checked. Actually the algorithm has never reached an estimate of the material constants, such that these inequalities were violated, so they have not been enforced explicitly.

Several stopping criteria have been implemented for the Levenberg-Marquardt algorithm, such as a minimum (normalized) objective function ($f(\mathbf{x}) \leq \epsilon_1$), minimum step values ($\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \epsilon_2 \|\mathbf{x}^k\|$) and (normalized) gradient convergence ($\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \leq \epsilon_3$), where $\epsilon_i = 10^{-5}$ for all criteria. A maximum number of 100 iterations is accepted.

5.3 MATERIAL SENSITIVITY BOUNDARY INTEGRAL EQUATION

The minimization algorithm described in the previous section, entails the Jacobian \mathbf{J}^k evaluation at each iteration. \mathbf{J}^k is the gradient of the cost functional with respect the unknowns of this particular problem, the elastic constants. Therefore we need to obtain sensitivity expressions for displacements, tractions, strains and stresses with respect to variations in these parameters. For that purpose a direct differentiation approach has been chosen, hence the computational effort will be minimized.

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial a_{ij}} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial a_{ij}} \quad \text{or} \quad \frac{\partial t_i}{\partial a_{ij}} \quad (5.8)$$

The process starts with the differentiation of the boundary integral equation (3.22) with respect to an arbitrary compliance coefficient a_{pq} , leading to

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta u_i(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} u_j(\mathbf{z}) + T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta u_j(\mathbf{z}) \right) d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} t_j(\mathbf{z}) + U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta t_j(\mathbf{z}) \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (5.9)$$

where,

$$\delta u_i = \frac{\partial u_j}{\partial a_{pq}}; \quad \delta t_i = \frac{\partial t_i}{\partial a_{pq}} \quad (5.10)$$

are the boundary displacement and traction sensitivities with respect to the arbitrary compliance constant, respectively.

In this equation, besides the standard nuclei U_{ij} and T_{ij} , two new kernels arise. The computation of the derivatives of the fundamental solution is simple though cumbersome.

5.3.1 Kernel derivatives

The derivative of the kernels $U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ and $T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ is obtained by differentiation of equations (3.18) and (3.19)

$$\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} = \sum_{s=1}^2 2\mathbb{R} \left[\left(\frac{\partial p_{js}}{\partial a_{pq}} A_{is} + p_{js} \frac{\partial A_{is}}{\partial a_{pq}} \right) \ln(z_s - y_s) + p_{js} A_{is} \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \ln(z_s - y_s) \right] \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} = \sum_{s=1}^2 2\mathbb{R} \left[\left(\frac{\partial q_{js}}{\partial a_{pq}} A_{is} + q_{js} \frac{\partial A_{is}}{\partial a_{pq}} \right) \frac{\mu_s n_1 - n_2}{z_s - y_s} \right. \quad (5.12)$$

$$\left. + q_{js} A_{is} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \left(\frac{1}{z_s - y_s} \right) (\mu_s n_1 - n_2) + \frac{1}{z_s - y_s} \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} n_1 - n_2 \right) \right\} \right] \quad (5.13)$$

After differentiation with respect to the compliance coefficients, the new terms which appear in (5.12) can be calculated applying the chain rule,

$$\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \left(\frac{1}{z_s - y_s} \right) = -\frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} \left[\frac{x_2 - x_2^l}{(z_s - y_s)^2} \right] \quad \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \ln(z_s - y_s) = \frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} \frac{x_2 - x_2^l}{z_s - y_s} \quad (5.14)$$

Taking into account the definition of p_{jk} and q_{jk} (3.17), their derivatives are

$$\frac{\partial q_{1s}}{\partial a_{pq}} = \frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} \quad \frac{\partial q_{2s}}{\partial a_{pq}} = 0 \quad \frac{\partial p_{jk}}{\partial a_{pq}} = \frac{\partial p_{jk}}{\partial \beta_{mn}} \frac{\partial \beta_{mn}}{\partial a_{pq}} \quad (5.15)$$

where

$$\left[\frac{\partial p_{js}}{\partial \beta_{mn}} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{mn}} \mu_s^2 + 2\beta_{11} \mu_s \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \beta_{mn}} - \frac{\partial \beta_{16}}{\partial \beta_{mn}} \mu_s - \beta_{16} \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \beta_{mn}} \mu_s + \beta_{12} \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} + \frac{1}{\mu_s} \frac{\partial \beta_{22}}{\partial \beta_{mn}} - \frac{\beta_{22}}{\mu_s^2} \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} - \frac{\partial \beta_{26}}{\partial \beta_{mn}} \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

and $\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \beta_{mn}} = \delta_{im} \delta_{jn}$

The derivatives of the constants A_{is} are computed solving a new system of equations that arises from differentiation of the original one given in equation (3.16)

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{pq}} = -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_{pq}} \mathbf{A} \quad (5.17)$$

where

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{pq}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{i1}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i1}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i2}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i2}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i2}}{\partial a_{pq}} \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_{pq}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial \mu_2}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial p_{11}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{11}}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial p_{12}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{12}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{21}}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial p_{22}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{22}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{21}}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial p_{22}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{22}}{\partial a_{pq}} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

To obtain the derivatives of the characteristic roots, the polynomial (3.11) is differentiated, leading to,

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \beta_{mn}} = -\frac{\frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{mn}} \mu_k^4 - 2 \frac{\partial \beta_{16}}{\partial \beta_{mn}} \mu_k^3 + \left(2 \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \beta_{mn}} + \frac{\partial \beta_{66}}{\partial \beta_{mn}} \right) \mu_k^2 - 2 \frac{\partial \beta_{26}}{\partial \beta_{mn}} \mu_k + \frac{\partial \beta_{22}}{\partial \beta_{mn}}}{4 \beta_{11} \mu_k^3 - 6 \beta_{16} \mu_k^2 + 2(2 \beta_{12} + \beta_{66}) \mu_k - 2 \beta_{26}} \quad (5.19)$$

Finally, for plane strain must be borne in mind that,

$$\frac{\partial \beta_{mn}}{\partial a_{pq}} = \delta_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} \delta_{3q} \frac{a_{n3}}{a_{33}} - \delta_{np} \delta_{3q} \frac{a_{m3}}{a_{33}} + \delta_{3p} \delta_{3q} \frac{a_{m3}}{a_{33}} \frac{a_{n3}}{a_{33}} \quad (5.20)$$

while for plane stress,

$$\frac{\partial \beta_{mn}}{\partial a_{pq}} = \delta_{mp} \delta_{nq} \quad (5.21)$$

It is important to point out that the singularity order of the new kernels are equal than in the standard ones. Thus, $\frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}}$ is singular, while $\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}}$ is weakly (logarithmic) singular, as shown in section 5.3.3.

5.3.2 Discretization of the sensitivity integral equation

After the discretization process of equation (5.9), the sensitivity equation can be written in a simple way

$$\frac{1}{2} \delta u_i(l) + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 h_{ij}^m(l, k) \delta u_j^k(m) = \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 g_{ij}^m(l, k) \delta t_j^k(m) + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 \left[\delta g_{ij}^m(l, k) t_j^k(m) - \delta h_{ij}^m(l, k) u_j^k(m) \right] \quad (5.22)$$

where

$$\delta h_{ij}^m(l, k) = \int_{-1}^1 \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l)}{\partial a_{pq}} \phi_m(\xi) J^k(\xi) d\xi \quad (5.23)$$

$$\delta g_{ij}^m(l, k) = \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l)}{\partial a_{pq}} \phi_m(\xi) J^k(\xi) d\xi \quad (5.24)$$

Computation of the new integration constants $\delta h_{ij}^m(l, k)$ and $\delta g_{ij}^m(l, k)$ is detailed in next section 5.3.3.

Applying equation (5.22) at every boundary node, a new system of equations is obtained,

$$\mathbf{H}\delta\mathbf{u} = \mathbf{G}\delta\mathbf{t} + (\delta\mathbf{G}\mathbf{t} - \delta\mathbf{H}\mathbf{u}) \quad (5.25)$$

and after rearranging columns, according to the boundary conditions, we have

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{G}\mathbf{t} - \delta\mathbf{H}\mathbf{u} \quad (5.26)$$

whose solution provides the displacement and traction sensitivities at all boundary points.

Note that $\delta u_i(\mathbf{y}) = 0$ at boundary points where $u_i(\mathbf{y})$ is given and, likewise $\delta t_i(\mathbf{y}) = 0$ at boundary points where $t_i(\mathbf{y})$ is known. Therefore, the system matrix \mathbf{A} is the same as for the actual problem.

5.3.3 Evaluation of the sensitivity equation integration constants

As usual, two distinct cases appear for evaluating the constant $\delta h_{ij}^m(l, k)$, $\delta g_{ij}^m(l, k)$. The simpler one arises when the collocation point does not belong to the integration element. In this case, standard Gaussian quadrature is employed, although the number of abscisas will depend on the distance between the node and the element.

In the second case, the node belongs to the element, the new expressions which appear when computing $\delta h_{ij}^m(l, k)$ (5.23) involve two kinds of integrals. Firstly, a singular integral as that given in equation A2.2, whose integration is shown in Appendix C. Secondly, an integral in the form

$$I_s = \int_{-1}^1 \left[\frac{x_2(\xi) - x_2^l}{(z_s(\xi) - y_s^l)^2} (\mu_s n_1 - n_2) - \frac{n_1}{z_s(\xi) - y_s^l} \right] \phi_m J^k d\xi \quad (5.27)$$

which seems to be singular or even hypersingular. However, if the integrand in I_s is expanded, it is easily proved that all singular terms cancel out. Therefore, $\delta h_{ij}^m(l, k)$ is decomposed in a singular part, analytically computed (see Appendix C), plus the remaining regular part which is integrated using a regular Gaussian quadrature.

When computing the constant $\delta g_{ij}^m(l, k)$ (5.24), two kinds of integrals appear. First, a logarithmic one, which is numerically computed as in Appendix C, and secondly, integrals in the form:

$$I_s = \int_{-1}^1 \frac{x_2(\xi) - x_2^l}{z_s(\xi) - y_s^l} \phi_m J^k d\xi \quad (5.28)$$

which are computed using a standard Gaussian quadrature, since they are regular.

5.3.4 Material sensitivity of strains and stresses at interior and boundary points

To compute the sensitivity of strains at an interior point, with respect to an arbitrary compliance constant a_{pq} , equation (3.23) is differentiated with respect to this constant, leading to,

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{ik}(\mathbf{z}') &= \int_{\Gamma} [V_{ijk}\delta t_j(\mathbf{z}) - S_{ijk}\delta u_j(\mathbf{z})] d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_{ijk}}{\partial a_{pq}} t_j(\mathbf{z}) - \frac{\partial S_{ijk}}{\partial a_{pq}} u_j(\mathbf{z}) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (5.29)$$

Two new kernels arise,

$$\frac{\partial V_{ijk}}{\partial a_{pq}} = - \sum_{s=1}^2 \mathbb{R} \left[\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \{ p_{js} D_{iks} \} \frac{1}{(z_s - z'_s)^2} + p_{js} D_{iks} \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \frac{1}{(z_s - z'_s)^2} \right] \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{ijk}}{\partial a_{pq}} &= \sum_{s=1}^2 \mathbb{R} \left[\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \{ q_{js} D_{iks} \} \frac{\mu_s n_1 - n_2}{(z_s - z'_s)^2} + \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \{ \mu_s n_1 - n_2 \} \frac{q_{js} D_{iks}}{(z_s - z'_s)^2} + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \left\{ \frac{1}{(z_s - z'_s)^2} \right\} q_{js} D_{iks} (\mu_s n_1 - n_2) \right] \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$(5.32)$$

By further application of differentiation rules, and taking into account the derivatives computed in section 5.3.1, the new kernels are fully derived.

To obtain the stress tensor, Hooke's law is differentiated with respect to the compliance constant,

$$\delta\sigma_i = C_{ij}\delta\varepsilon_j + \frac{\partial C_{ij}}{\partial a_{pq}}\varepsilon_j \quad (5.33)$$

where C_{ij} are the elasticity constant tensor, such that,

$$C_{ij}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (5.34)$$

Elasticity constant derivatives with respect to the compliance constant are easily computed differentiating the equation above,

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial a_{pq}} = -C_{il} \frac{\partial a_{lk}}{\partial a_{pq}} C_{kj} = -C_{ip} C_{qj} \quad (5.35)$$

and therefore,

$$\delta\sigma_i = C_{ij}\delta\varepsilon_j - C_{ip}\sigma_q \quad (5.36)$$

Finally, the sensitivity of strains and stresses on the boundary are computed by combination of the sensitivities of the longitudinal strain along the boundary and the traction vector components.

5.4 SENSITIVITY NUMERICAL TESTS

In order to show the accuracy of the proposed approach for computing the material sensitivities, the solutions computed by the numerical BIE-based procedure has been compared to analytical expressions.

Several problems have been solved analytically using the complex potential technique [1]. Afterwards, using a symbolic manipulation software, the derivatives of the analytical solution with respect to the material properties have been derived. The analytical solutions are summarized in Appendix D.

5.4.1 *Infinite plate with an elliptical cavity under internal loading*

In Fig. 5.1 the geometry and loading of the problem are displayed. The half-axis are such that $a/b = 2$. The engineering elastic constant of the plate are: $E_1 = 11.270 \text{ GN/m}^2$, $E_2 = 5.880 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = 0.686 \text{ GN/m}^2$, $\nu_{12} = 0.076$, therefore the compliance elastic constants are: $a_{11} = 0.8503 \cdot 10^{-1}$, $a_{16} = 0.0$, $a_{12} = 0.6463 \cdot 10^{-2}$, $a_{66} = 1.4580$, $a_{26} = 0.0$, $a_{22} = 0.1701$ where the units are m^2/GN . The axes of the ellipse coincide with the orthotropy axes and the cartesian ones. Three loading conditions are considered for the traction angle $\alpha = 0^\circ, 30^\circ$ y 45° . Twelve quadratic isoparametric elements model the boundary for the solution by the Boundary Element Method . Note that the numerical and analytical results are indistinguishable.

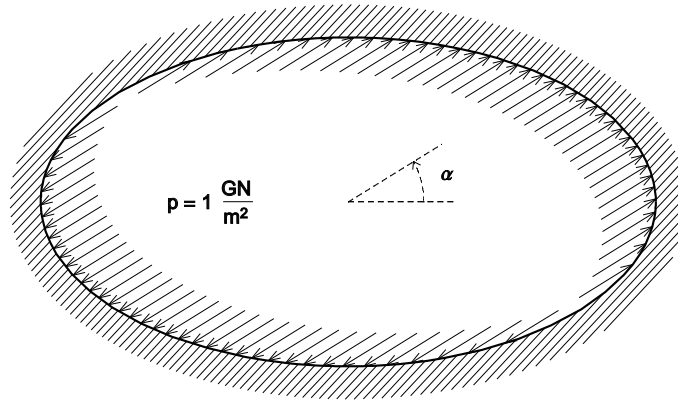


Figure 5.1: Elliptical cavity in an infinite plate under uniform interior loading.

In Fig. 5.2, Fig. 5.3 and Fig. 5.4 some of the results are shown. The present approach allows to compute sensitivities of displacements, stresses and strains, on the boundary and in the domain, although only partial results are shown here.

5.4.2 *Elliptical core in an infinite plate under remote loading*

In the second application, an elliptical inclusion in an infinite orthotropic plate is considered, as shown in Fig. 5.5. Again the half-axes are such that $a/b = 2$. The matrix has the same elastic constant as in the previous case, while two cases for the core has been tested. In the first one, the core is orthotropic as well and its compliance constants are twice those

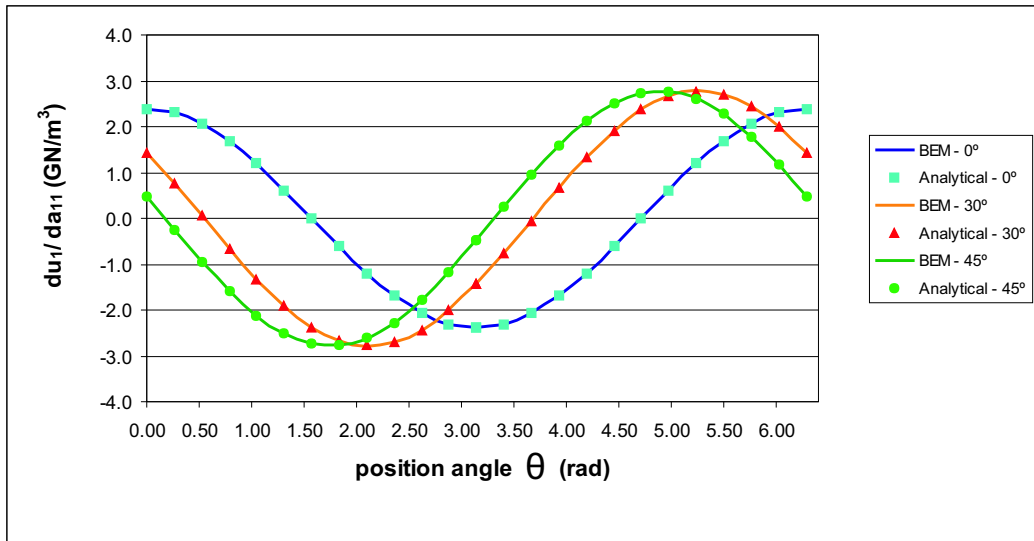


Figure 5.2: Comparison between the computed numerical value (BEM) and analytical result for the sensitivity of the horizontal displacement along the cavity boundary, with respect to the compliance constants a_{11} . Loading inclination 0° , 30° and 45° .

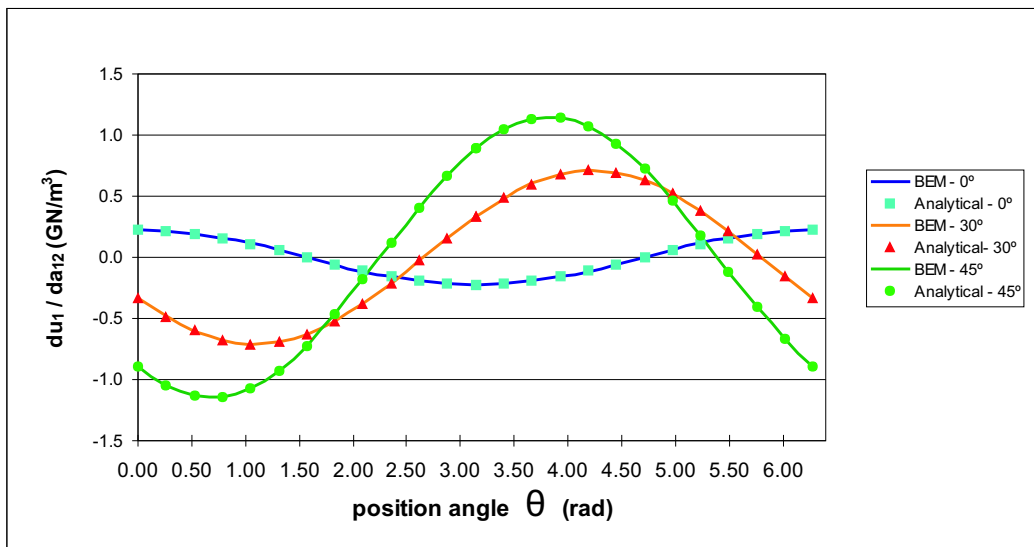


Figure 5.3: Comparison between the computed numerical value (BEM) and analytical result for the sensitivity of the horizontal displacement along the cavity boundary, with respect to the compliance constants a_{12} . Loading inclination 0° , 30° and 45° .

of the matrix. The second one is an absolutely rigid inclusion. Again, twelve elements are employed for the BE discretization.

In Fig. 5.6 to 5.11 the sensitivity of the normal tension on the matrix-core interface, with respect to the matrix elastic coefficients a_{11} , a_{12} and a_{66} is shown. In this case, there is again a perfect match between both solutions for the sensitivities with respect to the constant a_{11} and a_{66} , but some discrepancies appear in the sensitivity with respect to a_{12} . Actually this

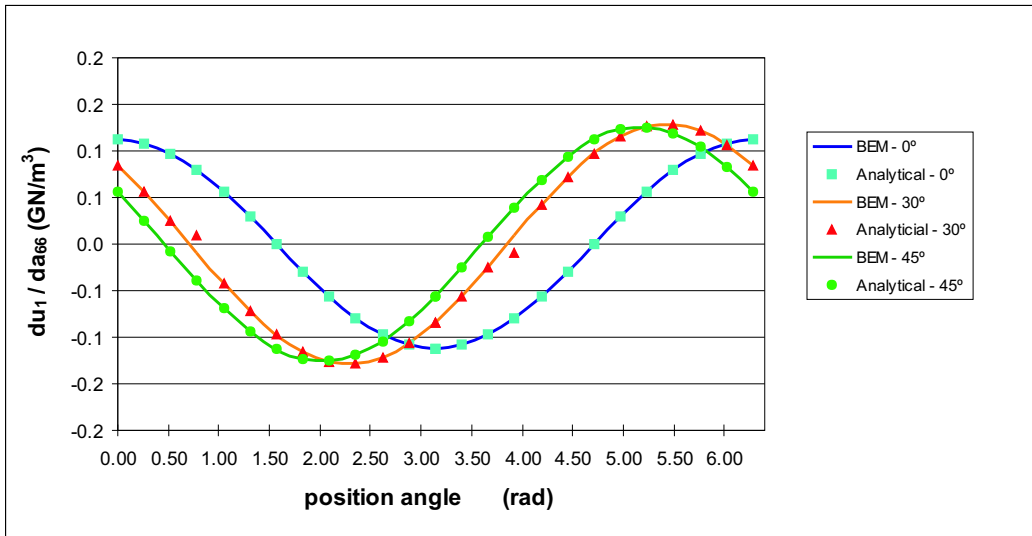


Figure 5.4: Comparison between the computed numerical value (BEM) and analytical result for the sensitivity of the horizontal displacement along the cavity boundary, with respect to the compliance constants a_{66} . Loading inclination 0° , 30° and 45° .

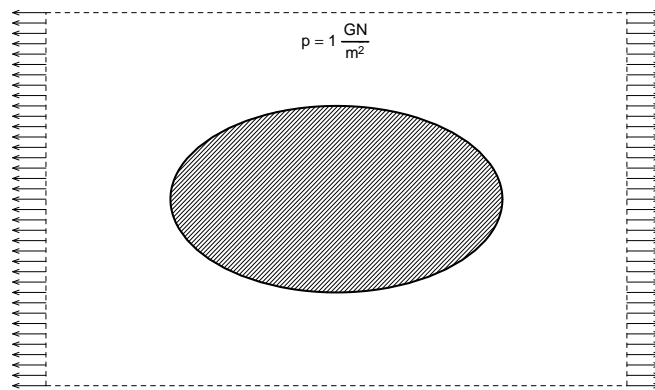


Figure 5.5: Elliptical orthotropic inclusion in an infinite orthotropic plate, under remote loading.

is the only case where appreciable differences with respect to the analytical solution have been found. In fact, it might be that the discrepancy is not completely imputable to the BE solution, since the analytical one involves the evaluation of a huge number of terms and some fine-tuning was necessary in getting the analytical solution for these sensitivities.

Note that to solve these cases a subregioning approach have been implemented, and when computing the sensitivities, the compliance constants of both regions can be independent variables.

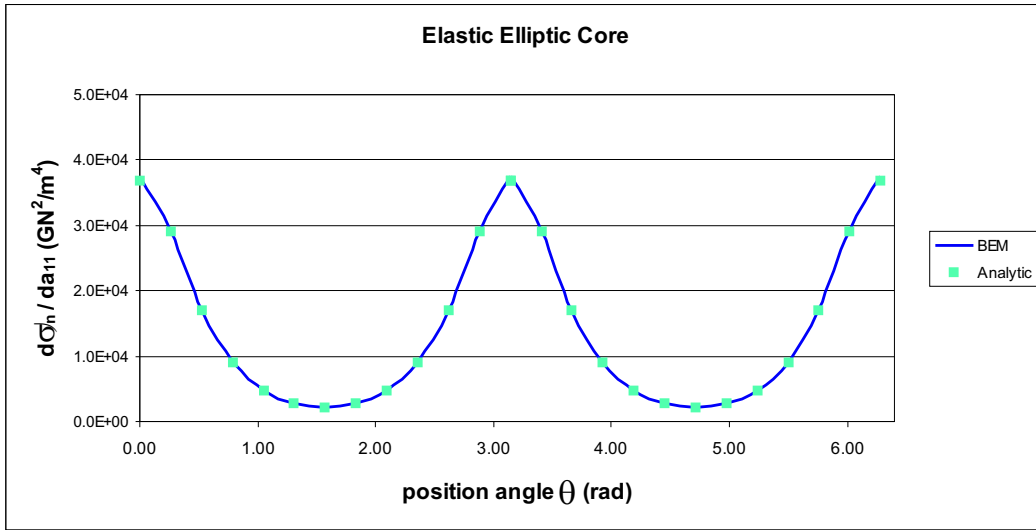


Figure 5.6: Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-elastic core interface, with respect to the elastic coefficient a_{11} .

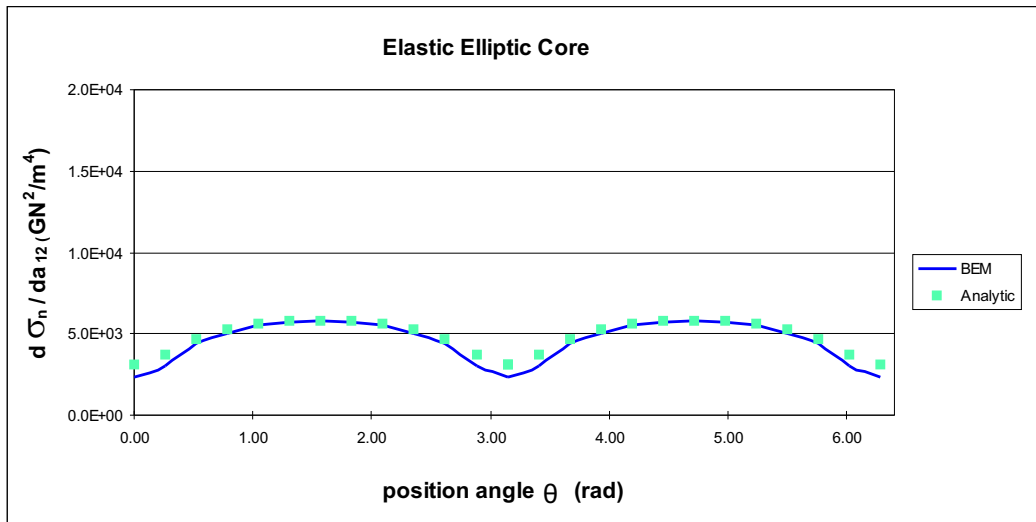


Figure 5.7: Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-elastic core interface, with respect to the elastic coefficient a_{12} .

5.5 DETERMINATION OF ELASTIC CONSTANTS: UNIQUENESS OF SOLUTION

We have already obtained the functional derivative, whose computation is based on the sensitivity boundary integral equation and the following numerical resolution with boundary element techniques. Next step is its implementation into the minimization algorithm described in Section 5.2, to solve the parameter identification problem. Regarding to the determination of the material properties from boundary data, there is one aspect which must

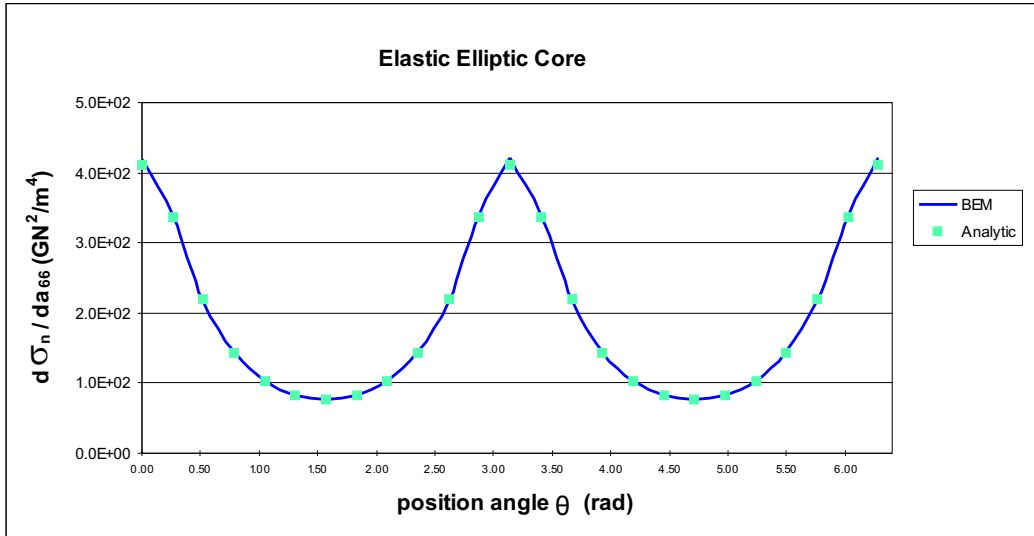


Figure 5.8: Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-elastic core interface, with respect to the elastic coefficient a_{66} .

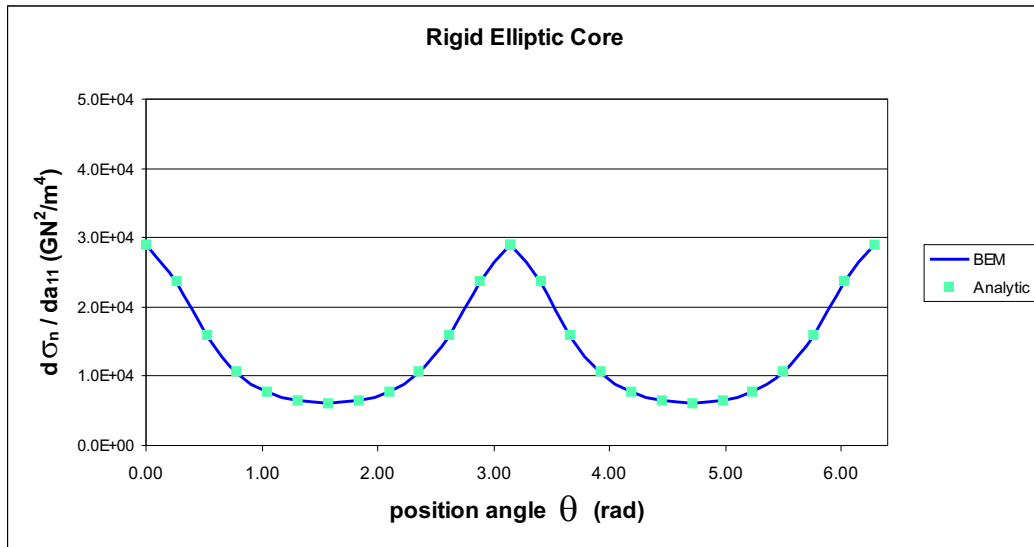


Figure 5.9: Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-rigid core interface, with respect to the elastic coefficient a_{11} .

be analysed, the *uniqueness of solution*.

The elastic constants of an anisotropic body, or a subregion within it, are not uniquely determined for any loading conditions and support. First of all, it is obvious that in regions of the domain where the stresses were zero, any distribution of elastic constants would produce the same distribution of displacements and tractions on the boundary. Moreover, if one component of the stress tensor is zero, say σ_{12} , the corresponding elastic constant in the

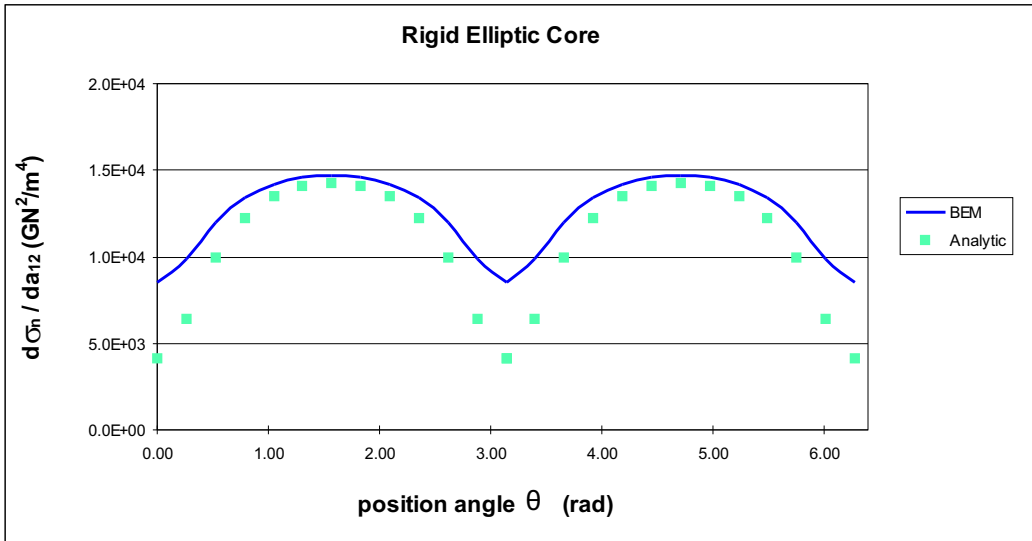


Figure 5.10: Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-rigid core interface, with respect to the elastic coefficient a_{12} .

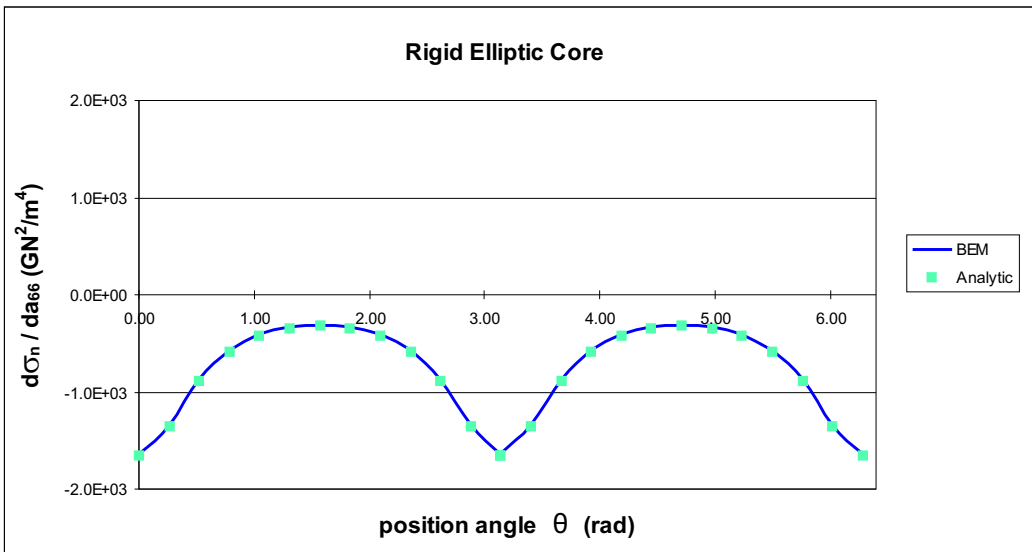


Figure 5.11: Comparison between the computed numerical value (BEM) and the analytical result for the sensitivity of the normal tension along the matrix-rigid core interface, with respect to the elastic coefficient a_{66} .

diagonal of matrix \mathbf{a} , (a_{66} in this case) will be undetermined. This problem will not appear as far as the region whose elastic constant we are trying to obtain is under a general state of stresses, which is not zero nor very small throughout the region of interest.

Secondly, a given uniform distribution of stresses may lead to the same distribution of strains, and therefore, same displacements on the boundary, for different elastic constants.

To show this fact, consider an uniform stress field σ_j and the corresponding strain field ε_i such that (5.2),

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \quad i = 1, 2, 6 \quad (5.37)$$

for a given set of elastic constant. A perturbed set of elastic constants $a_{ij} + a_{ij}^*$ will yield the strains,

$$\varepsilon_i^* = (a_{ij} + a_{ij}^*)\sigma_j \quad i = 1, 2, 6 \quad (5.38)$$

for the same stress field. The strain fields will fulfill the equation $\varepsilon_i = \varepsilon_i^*$ provided that,

$$a_{ij}^*\sigma_j = 0 \quad i = 1, 2, 6 \quad (5.39)$$

Then, any perturbation a_{ij}^* of the elastic constant matrix, such that the given tensor σ_j belongs to its kernel will not change the strain field. Therefore, if the cost functional involves only displacement measurements, and the stress field is approximately constant, then there will be multiple solutions for the material property inverse problem, since for any stress field vector σ_j exists a symmetric matrix a_{ij}^* such that $\sigma_j \in \text{kern}(a_{ij}^*)$. For instance, an arbitrary stress field tensor $\sigma_{11} = \alpha, \sigma_{22} = \beta, \sigma_{12} = \gamma$, belongs to the kernel of the matrix,

$$\mathbf{a}^* = \begin{pmatrix} \beta^2 + \gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & \alpha^2 + \gamma^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Thirdly, in cases where the loading and boundary conditions are such that the direct problem is isostatic (statically determined), the stress field, by definition, will be insensitive to changes in the elastic constants. Obviously, in this case, an inverse problem based on a cost functional which involves only tractions on the boundary will have multiple solutions.

In order to avoid the above mentioned situations, the loading and boundary conditions, and the boundary measurements should be properly designed. Firstly, the stress field should be general, that is, all components should have non-zero value. Secondly, the cost functional should involve both displacements and tractions on the boundary, if necessary. Thirdly, the stress field should be variable and as sensitive to changes in the elastic constants as possible, i.e, as statically undetermined as possible. Finally, the number of material constants to determine can be reduced, in order to preclude the existence of perturbations a_{ij}^* such that $a_{ij}^*\sigma_j = 0$.

Nevertheless, designing an IP such that all six elastic constants can be obtained from a unique experiment is not easy, even if the conditions stated in the paragraph above are fulfilled, since the cost functional will be much more dependent on some elastic constants than on others, as shown in the applications below.

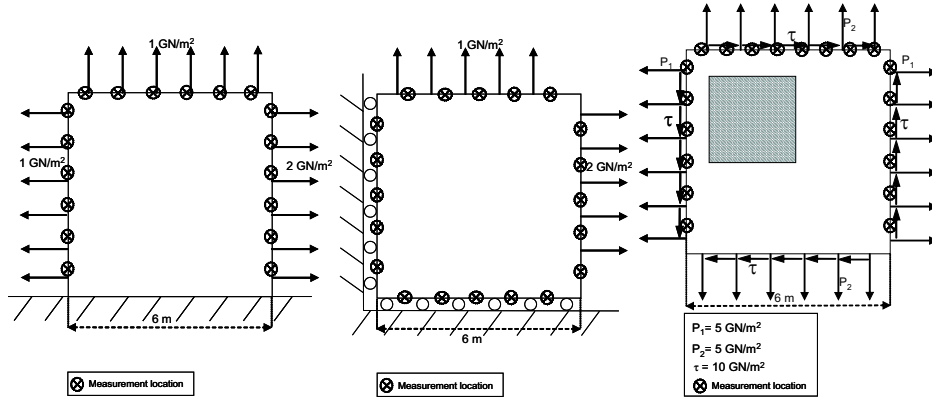


Figure 5.12: Geometry and load conditions, cases 1-2-3

5.6 INVERSE PROBLEM NUMERICAL TESTS

5.6.1 Tests Definition

To prove the effectiveness of the proposed approach for the identification of the material properties, three cases have been studied. The first and second are homogeneous square plates composed of just one material with anisotropic elastic properties. Both cases differ in the load conditions acting on the plates. The values of the six elastic constants, where the index 1 denotes the horizontal axis while the index 2 denotes the vertical direction, are detailed below (in $\frac{m^2}{GN}$),

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.41666 \cdot 10^{-2}; & a_{16} &= 0.41666 \cdot 10^{-3}; & a_{12} &= -0.12500 \cdot 10^{-2} \\ a_{66} &= 0.76920 \cdot 10^{-2}; & a_{26} &= 0.26320 \cdot 10^{-3}; & a_{22} &= 0.26320 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

The third case consists of a square plate with an internal inclusion made of a different material. The material properties of the inclusion will be the ones to be identified, and their exact values are the same as (5.41). The elastic constants of the material outside the inclusion are considered known and their values are given by (in $\frac{m^2}{GN}$),

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.83332 \cdot 10^{-2}; & a_{16} &= 0.83332 \cdot 10^{-3}; & a_{12} &= -0.2500 \cdot 10^{-2} \\ a_{66} &= 0.1538 \cdot 10^{-1}; & a_{26} &= 0.5555 \cdot 10^{-3}; & a_{22} &= 0.5555 \cdot 10^{-2} \end{aligned} \quad (5.42)$$

The outer boundary of the plate in the three cases has been modelled with 24 isoparametric quadratic elements. In the third case, the inclusion is meshed by 24 elements. Displacements on the boundary are measured at several locations; eighteen in case 1 and twenty in cases 2 and 3. Actually, these measurements are simulated computing with the BE code the displacements at the chosen locations using the exact elastic constants we are looking for. To avoid the so-called *inverse crime*, Gaussian noise has been added to these simulated data. The geometry, boundary conditions and measurement locations are shown in Figure 5.12 for each case.

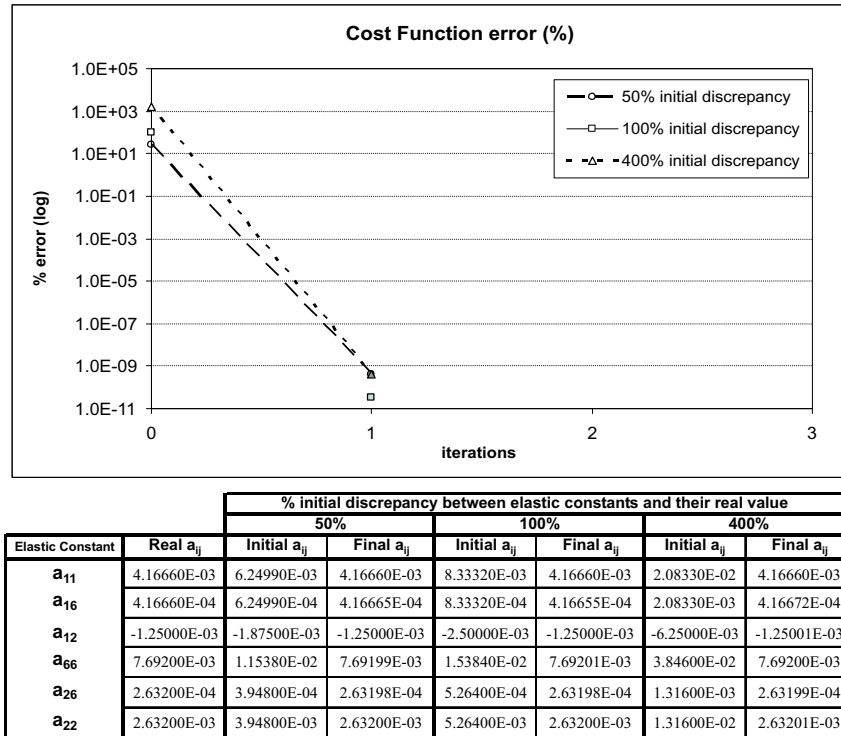


Figure 5.13: Cost Function minimization with exact experimental data in case 1

5.6.2 Results

Two different types of tests have been run. In the first one, we have considered no error in the simulated experimental data. Then, to check the stability of the proposed method, the data is perturbed with small errors. Therefore, in the second group of tests, a specific percentage of Gaussian noise is added into the simulated measurements.

Exact Data Tests

The six elastic constants are considered unknown and must be identified. Three initial guesses have been tested, each of them differs in a certain percentage from the real values, 50%, 100% and 400% respectively. Figures 5.13 to 5.15 show the evolution of the cost function versus the iteration number. Below each graph, there is a table with the initial elastic constants and their values achieved at the last iteration.

It can be seen that in all cases, the convergence of the elastic constants to their exact values is very good. These are cases in which stresses are not sensitive to small variations in elastic constants, therefore the relationship between the cost function and the material properties is nearly quadratic. This implies that the minimum is reached in one or just a few iterations. In the third example, see Figure 5.15, the convergence is attained when the initial estimate is not very far from the exact values (50%). In other cases, the existence of local

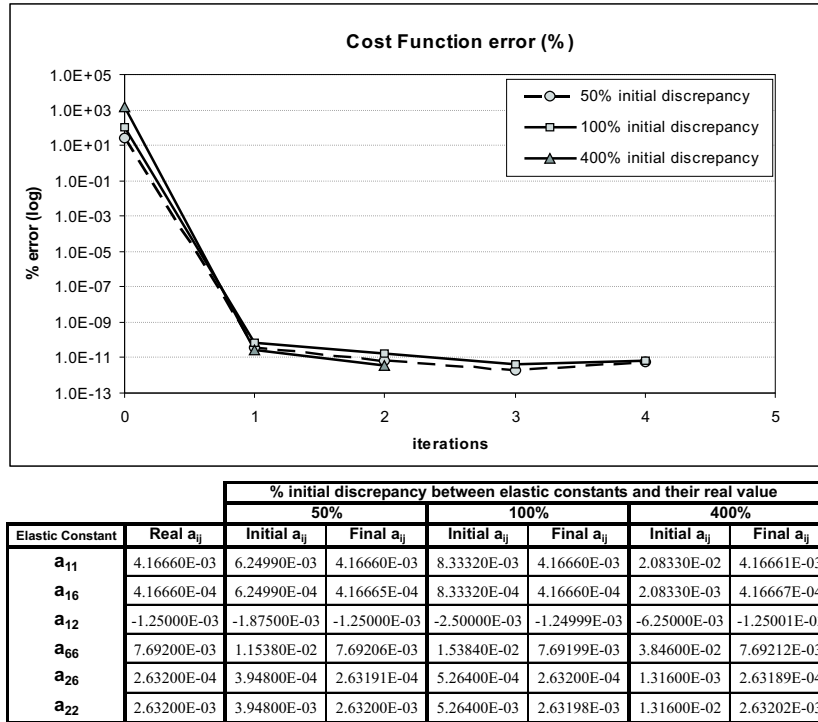


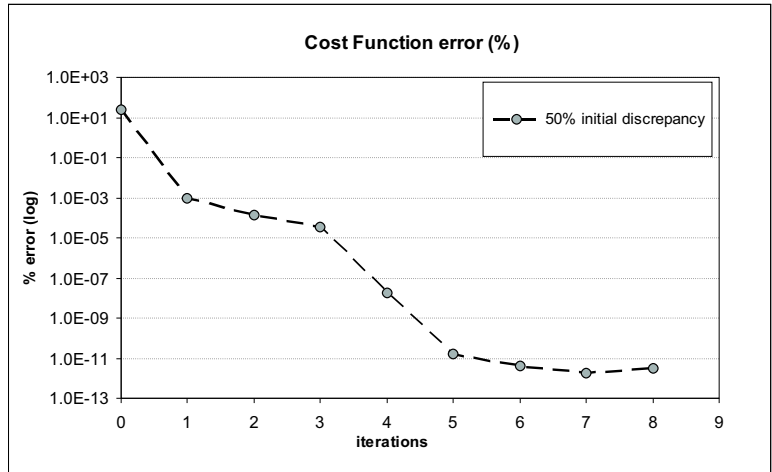
Figure 5.14: Cost Function minimization with exact experimental data in case 2

minima precludes the convergence to the exact values.

Noisy Data Tests

In practical situations, it is impossible to get exact experimental data when measuring physical quantities. Besides, the numerical model never represents exactly the behavior of the real specimen. Therefore, when solving inverse problems, one very important aspect to be studied is the effect which errors introduced in the measurements can cause in the resolution process. The next figures show some examples where the simulated measurements, computed with the exact material constants, have been modified introducing several percentages of error, 2% and 5% (following a Gaussian distribution).

The identification of four parameters for case 1 and two for case 2 is plotted in Figures 5.16 and 5.17, with 2% and 5% error in measurements. Figure 5.18 shows four different runs in which 2% random error is introduced in case 3. In all four cases, three elastic constants have been successfully predicted. The minimization process with noisy data becomes much more complicated since the cost function has local minima. The non-linearity of this objective function produces situations in which specimens with different material properties may have very similar stress/strain distributions. Figure 5.19 illustrates the cost function surface when the values of a_{11} and a_{66} vary ($\pm 50\%$ of their true value), for case 3. A 2%



% initial discrepancy between elastic constants and their real value			
50%			
Elastic Constant	Real a_{ij}	Initial a_{ij}	Final a_{ij}
a_{11}	4.16660E-03	6.24990E-03	4.16672E-03
a_{16}	4.16660E-04	6.24990E-04	4.16558E-04
a_{12}	-1.25000E-03	-1.87500E-03	-1.24995E-03
a_{66}	7.69200E-03	1.15380E-02	7.69209E-03
a_{26}	2.63200E-04	3.94800E-04	2.63140E-04
a_{22}	2.63200E-03	3.94800E-03	2.63206E-03

Figure 5.15: Cost Function minimization with exact experimental data in case 3

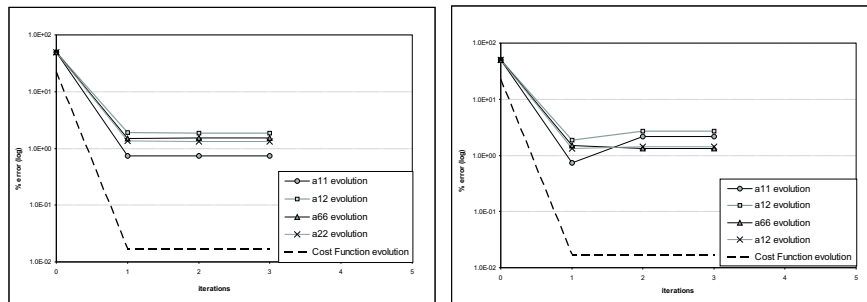


Figure 5.16: Cost Function minimization with 2%(left) and 5%(right) random error in experimental data for case 1

of error has been introduced in the experimental data. Note that the cost function is much more sensitive to changes in a_{66} than in a_{11} , and therefore the minimum is difficult to attain.

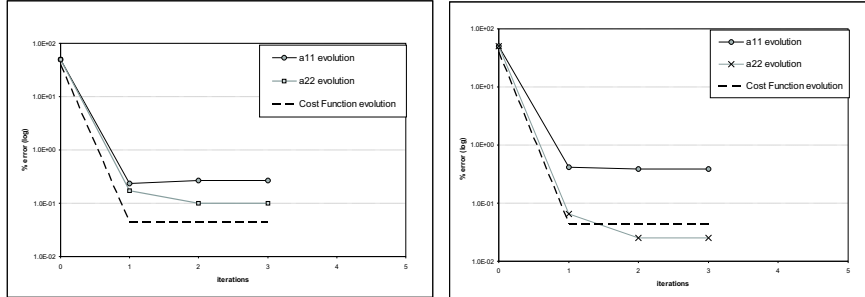


Figure 5.17: Cost Function minimization with 2%(left) and 5%(right) random error in experimental data for case 2

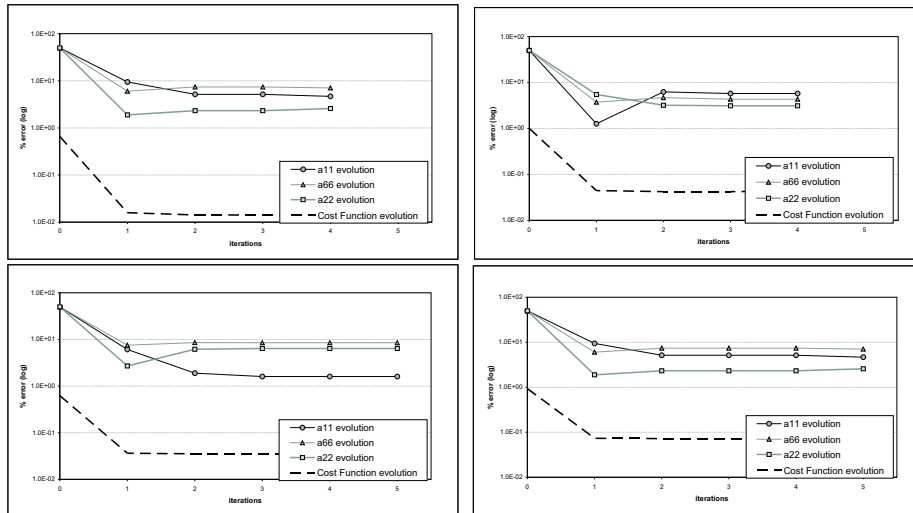


Figure 5.18: Cost Function minimization with 2% random error in experimental data for case 3, four different runs

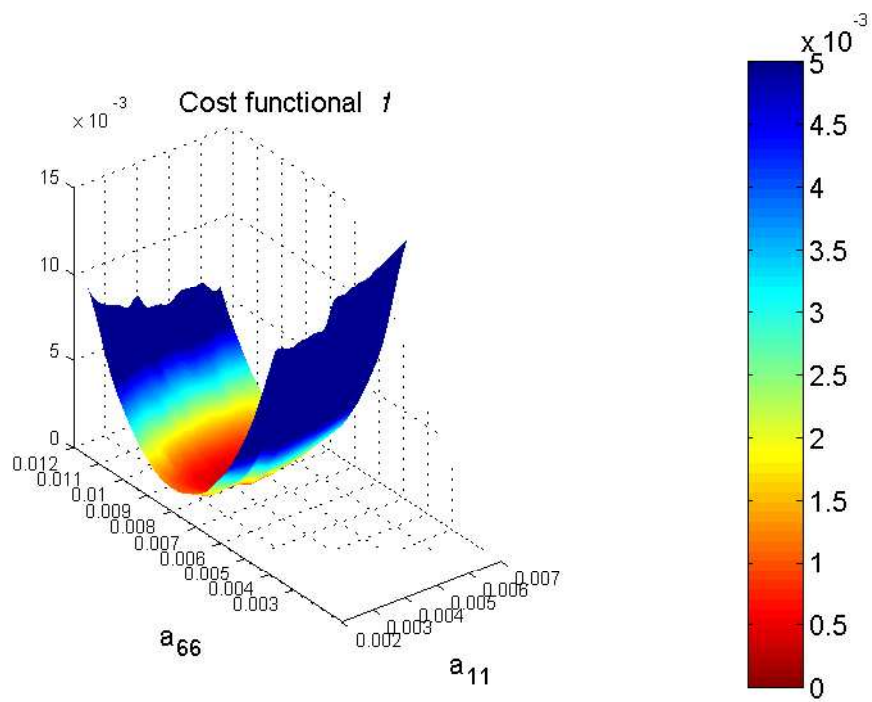


Figure 5.19: Cost Function minimum surface with 2% error in experimental data in case 3 for variations in a_{11} and a_{66}

CHAPTER 6

IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM: ADJOINT VARIABLE APPROACH

6.1 IDENTIFICATION PROBLEM DEFINITION

In the present chapter we treat another kind of inverse problem, which arises when seeking for defects using non-destructive experimental techniques. This situation is referred in the Kubo classification [19] as *Identification inverse problem*. The unknowns are the location and shape of cavities embedded in a body. Therefore, the unknown is part of the geometry.

Here, the inverse problem is defined in an bidimensional body of an anisotropic homogeneous elastic material. The domain Ω , whose outer boundary is denoted with Γ , has some inner voids of any shape Ω^- , with boundary Γ_v , see Figure 6.1. Their location and shape are undetermined a priori. Although the formulation is going to be developed for traction-free voids, the procedure is extensible to other kinds of defects such as cracks or inclusions.

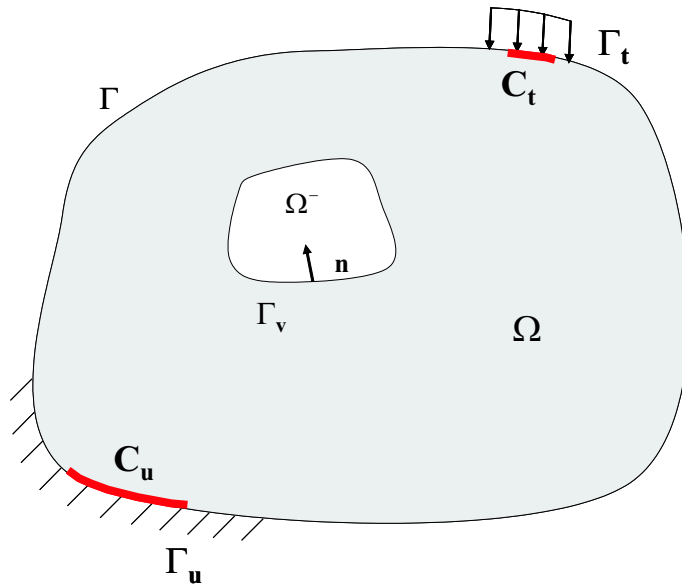


Figure 6.1: Anisotropic elastic body

The variables of the problem: \mathbf{u} displacements, $\boldsymbol{\varepsilon}$ strains, $\boldsymbol{\sigma}$ stresses and \mathbf{n} outer normal vector to Γ_v , are related with the equations of linear elasticity (Section 2.1.1.). When no body forces are assumed, we have,

$$\begin{aligned}
\sigma_{j,i,j} &= 0 & \text{in } \Omega \\
u_i &= \tilde{u}_i & \text{on } \Gamma_u \\
t_i &= \tilde{t}_i & \text{on } \Gamma_t \\
t_i &= \sigma_{ij}n_j = 0 & \text{on } \Gamma_v \\
\sigma_i &= C_{ij}\varepsilon_j & \text{in } \Omega \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{in } \Omega
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Γ_u and Γ_t denote the parts of the boundary where displacements and tractions are specified respectively. The elastic response of the system, displacements \mathbf{u} and tractions \mathbf{t} , depends on the unknown boundary Γ_v . From now, we note them with \mathbf{u}_{Γ_v} and \mathbf{t}_{Γ_v} .

For the *Identification IP* resolution, some extra information is needed. In this case, we assume that experimental traction or displacement measurements, $\hat{\mathbf{u}}$ and/or $\hat{\mathbf{t}}$, are available on exterior boundary surfaces C_u and C_t respectively. As in previous IP, the solution of the problem is attempted by minimizing the residual between the measurements and the values computed in a supposed configuration \mathbf{u}_{Γ_v} and \mathbf{t}_{Γ_v} . If J is the cost function which represents the residual calculated with least squares distance, the functional to be minimize will be \mathfrak{J} ,

$$\mathfrak{J}(\Gamma_v) = J(\mathbf{u}_{\Gamma_v}, \mathbf{t}_{\Gamma_v}) = \int_{C_u} j_u(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})d\Gamma + \int_{C_t} j_t(\mathbf{t}, \hat{\mathbf{t}})d\Gamma \tag{6.2}$$

being $j_u = \frac{1}{2}|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}|^2$ and $j_t = \frac{1}{2}|\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}|^2$. The minimization of \mathfrak{J} depends on Γ_v only through \mathbf{u}_{Γ_v} and \mathbf{t}_{Γ_v} .

The most efficient algorithms to minimize \mathfrak{J} as BFGS, Conjugate gradients... [5] involve the computation of derivatives of \mathfrak{J} with respect to the unknowns of the problem. These are the design parameters of the boundary Γ_v which determine the position and shape of the cavity. These derivatives are called the *shape sensitivities*. Since the functional to be differentiate only has boundary values, this fact suggests us the use of BIE techniques. Moreover, in problems where the domain is a primary unknown, using BEM offers the minimal modelling, saving much computational effort. Therefore, in this chapter we present a complete strategy based on BEM for the detection of cavities in plane anisotropic problems.

6.2 SHAPE SENSITIVITY

The simplest way to tackle the shape sensitivity computation could be using numerical differentiation techniques. This, apart from being computationally expensive, it constitutes an

ill-posed mathematical problem and then are prone to accuracy problems. Analytical differentiation is proposed here, using the *Adjoint Variable Method AVM*. A boundary-only formula is obtained for the shape sensitivity. This approach seems to be the most efficient since just one adjoint problem has to be solved for each functional to be minimized [78]. Nevertheless, in order to check the accuracy of the gradient obtained with the AVM approach, we will compare results with Finite-Difference evaluations.

6.2.1 Material Differentiation

We want to compute the shape sensitivity of a shape dependent integral functional $\mathfrak{J}(\Gamma_v)$, i.e., we want to investigate the variations of \mathfrak{J} when there are small perturbations in the geometry, Γ_v . The *material differentiation* notion has been introduced. These perturbations can be described by means of a normal transformation velocity Θ on Γ_v , and using a small design time-like parameter vector $\tau \geq 0$, [79]

$$\mathbf{x} \in \Gamma_v \Rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \mathbf{x} + \Theta(\mathbf{x})\tau \quad (6.3)$$

We will note with $*(\mathbf{x}, \tau)$ the material derivative of a field produced by the geometrical transformation.

In literature we can find expressions for material derivatives of volume or surface integrals [81], being the function $a(\mathbf{x}, \tau)$ regular enough and Ω a closed domain with smooth boundary Γ .

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, \tau) d\Omega = \int_{\Omega} [a_{,\tau}(\mathbf{x}, \tau) + a(\mathbf{x}, \tau)\Theta_{i,i}(\mathbf{x})] d\Omega \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Gamma} a(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma = \int_{\Gamma} [a_{,\tau}(\mathbf{x}, \tau) + a(\mathbf{x}, \tau)\Theta_{i,i}^S(\mathbf{x})] d\Gamma \quad (6.5)$$

where $\Theta_{i,i}^S$ is the surface divergence of the vector Θ given by $\Theta_{i,i}^S = \Theta_{i,i} - \Theta_{i,n}n_i$.

6.2.2 Adjoint Variable Method

We start from an augmented functional \mathfrak{L} of J :

$$\mathfrak{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) = J(\mathbf{u}, \mathbf{t}) + \mathfrak{A}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) \quad (6.6)$$

being \mathfrak{A} is the weak formulation of the forward problem,

$$\mathfrak{A}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) = \int_{\Omega} [\sigma_{ij}w_{i,j}] d\Omega + \int_{\Gamma} [\sigma_{ij}n_j w_i] d\Gamma = 0 \quad (6.7)$$

using the space of test functions $\mathfrak{V} = \{\mathbf{w} \in \{H_{loc}^1(\Omega)\}^3\}$, \mathbf{w} acts as Lagrange multiplier. If the *material differentiation* is applied to \mathfrak{L} [81], we obtain:

$$\mathfrak{L}^*(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) = \mathfrak{L}_{,\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{,\tau} + \mathfrak{L}_{,\Gamma_v} \cdot \Theta \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{,\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{,\tau} &= \int_{C_u} [j_{u,u} \cdot \mathbf{u}_{,\tau}] d\Gamma + \int_{C_t} [j_{t,t} \cdot \mathbf{t}_{,\tau}] d\Gamma + \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^{\tau} w_{i,j}] d\Omega \\ \mathfrak{L}_{,\Gamma_v} \cdot \Theta &= \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} w_{i,j}) \Theta_{i,i}] d\Omega - \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} w_{i,j} + \sigma_{ij}^w u_{i,j}) \Theta_{i,j}] d\Omega \end{aligned} \quad (6.9)$$

where σ^{τ} and σ^w are the stress tensors corresponding to a displacement field $\mathbf{u}_{,\tau}$ and \mathbf{w} respectively.

Actual variations of \mathfrak{L} can be expected only when $\Theta \neq 0$, so the Lagrange multiplier \mathbf{w} can be chosen from

$$\mathfrak{L}_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{\Gamma_v}, \mathbf{w}_{\Gamma_v}; \Gamma_v) \cdot \mathbf{u}_{,\tau} = 0 \quad \forall \mathbf{u}_{,\tau} \in \mathfrak{V} \quad (6.10)$$

This equation represents the weak formulation of an elastostatic well posed problem that will be called “*adjoint state*” and whose strong formulation is given by

$$\begin{aligned} \sigma_{ji,j}^w &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ w_i = \widetilde{w}_i &= +j_{,t} \quad \text{on } C_t \quad w_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_u/C_t \\ t_i = \widetilde{t}_i &= -j_{,u} \quad \text{on } C_u \quad t_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_t/C_u \end{aligned}$$

Then, the material derivative of \mathfrak{J} can be computed by:

$$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}_{,\Gamma_v}(\mathbf{u}_{\Gamma_v}, \mathbf{w}_{\Gamma_v}; \Gamma_v) \cdot \Theta \quad (6.11)$$

This equation can be manipulated to get a boundary expression. First, we split the tensor $w_{i,j}$ into the symmetric and anti-symmetric parts, and then if we apply the Divergence Theorem, we obtain a boundary integral

$$\mathfrak{L}^* = \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij} w_{i,j}) \Theta_n] d\Gamma - \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij} n_j w_{i,j} + (\sigma_{ij}^w n_j) u_{i,j}) \Theta_i] d\Gamma \quad (6.12)$$

where Θ_n is the normal transformation velocity component. Now, taking into account that cavities have traction-free boundaries and that $\Theta = 0$ in Γ/Γ_v

$$\mathfrak{J}^* = \frac{d\mathfrak{J}}{d\tau} = \int_{\Gamma_v} [(\sigma_{ij} w_{i,j}) \Theta_n] d\Gamma \quad (6.13)$$

Then, we make use of the tangential gradients decomposition [77], and we obtain the following boundary formula for the shape sensitivity,

$$\mathfrak{J}^* = \frac{d\mathfrak{J}}{d\tau} = \int_{\Gamma_v} [(\sigma_{ij} w_{i,j}^S) \Theta_n] d\Gamma \quad (6.14)$$

where $w_{i,j}^S$ is the surface gradient of the displacement field \mathbf{w} given by $w_{i,j}^S = w_{i,j} - w_{i,n} n_j$.

Finally, we can simplify even more this expression using a local reference axis ($x'_1 = \mathbf{n}$, $x'_2 = \text{tangent vector}$), since the local stress tensor in Γ_v is

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} \end{bmatrix}$$

and a compact formula is obtained:

$$\tilde{\mathcal{J}}^* = \frac{d\tilde{\mathcal{J}}}{d\boldsymbol{\tau}} = \int_{\Gamma_v} [(\sigma'_{22} w'_{2,2}) \Theta_n] d\Gamma \quad (6.15)$$

Moreover, the primary and the adjoint problems are associated with the same integral governing operator and boundary conditions of the same type. Thus, the operator matrix to be built and factored, in order to apply BIE techniques is used for both problems.

6.3 PARAMETERIZATION

The variation of the geometry is always represented by a parameterization. Here, a concept developed by Gallego and Suárez [80] has been used, instead of determining the geometry, the modification field is directly defined. This means applying a deformation field to some initial geometry, which is able to move it until any possible solution. The parameterization is defined as follows:

$$\delta x_i(\mathbf{x}) = \Theta_{ip} \delta \tau_p \quad (6.16)$$

Θ_{ip} is the parameterization matrix and $\delta \tau_p$ is the vector with the design parameters τ .

A linear deformation field in 2D has been chosen, then 6 parameters are needed ($p = 1, 2, \dots, 6$). The parameterization matrix and the parameters vector are expressed in the following way [76] (with $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^{real} - \mathbf{x}_i^{cg}$):

$$\Theta_{ip} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 & x_1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 & x_2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\delta \tau_p = \begin{bmatrix} \delta x_1^{cg} \\ \delta x_2^{cg} \\ \delta \omega \\ \delta \epsilon_m \\ \delta \epsilon_l \\ \delta \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{first coordinate of the centroid of the flaw} \\ \text{second coordinate of the centroid of the flaw} \\ \text{rotation angle} \\ \text{spherical strain} \\ \text{horizontal elongation} \\ \text{distortion} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

6.4 SENSITIVITY TESTS

To prove the efficiency of the proposed AVM approach, several numerical tests have been done, and the results have been compared with the sensitivities obtained with Finite-Differences. An orthotropic (birch plywood) square plane plate (side=12m) has been studied. Three cases

have been considered with cavities of different shape, *Case 1* has a circular cavity (diameter=2m), see Figure 6.2, *Case 2* an elliptic cavity (ellipse half axes $a=1m$, $b=0.5m$), see Figure 6.6, and *Case 3* an square one (side=2m), see Figure 6.10. The discretization of the model has been made with an increasing number of isoparametric quadratic elements. In the following figures, the results obtained for shape sensitivity of different design parameters are plotted. Each graph shows both values, the ones obtained with the AV approach in blue, and the sensitivities computed with Finite-Differences in pink. It must be pointed, that for *Case 3* we need a finer discretization since the boundary of the defect, square shape, is not smooth, which was one of the hypothesis used when formulation was developed in Section 6.2.1 in Equations (6.4,6.5). Measurements of u_2 have been taken in the left-hand side of the square plate.

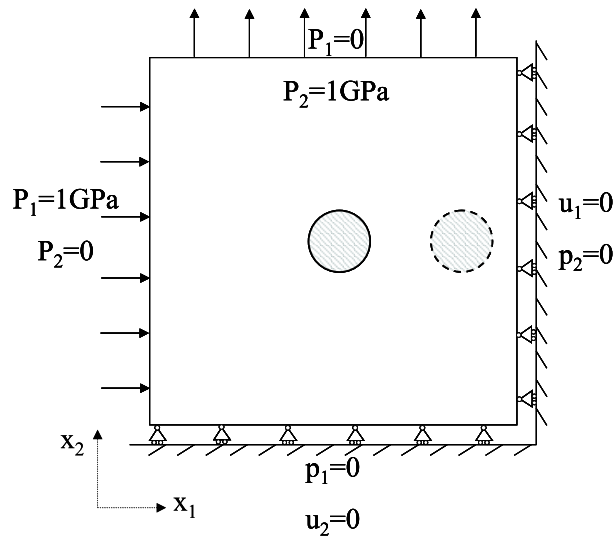


Figure 6.2: Case 1: orthotropic plate with a circular internal cavity, real and supposed locations

6.5 MINIMIZATION ALGORITHM: BFGS

Once the accuracy of the sensitivity is proved, next step is its implementation in the minimization algorithm. A quasi-newton algorithm has been used, the *BFGS*. It is a quasi-newton method of pseudo-second order, which uses, at each iteration, the Hessian update proposed by Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno (1970) [5]. The value of the variables of the problem, parameters in Equation (6.18), which define the deformation field, are bounded in order to avoid impossible configurations. They are grouped in a vector \mathbf{X} , and they are updated at each iteration with the following scheme,

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \lambda_k \mathbf{H}_k^{-1} \nabla f_k \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1 \quad (6.19)$$

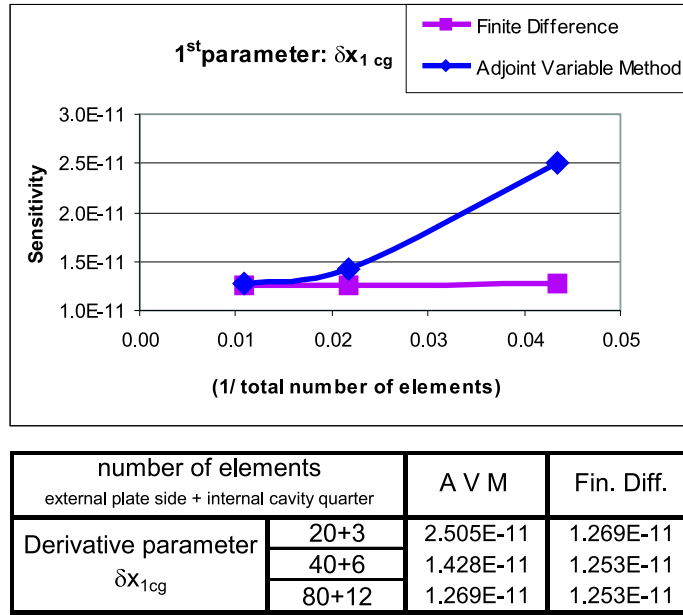


Figure 6.3: 1st shape parameter sensitivity in case 1: AVM vs Finite Difference

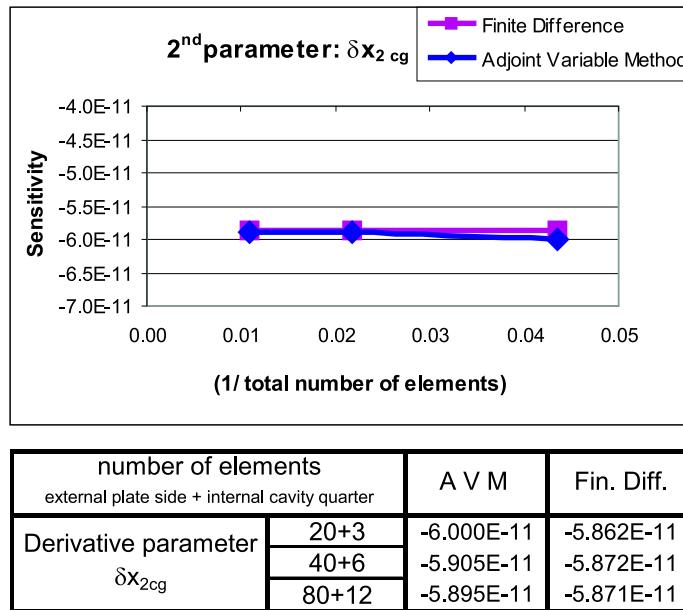


Figure 6.4: 2nd shape parameter sensitivity in case 1: AVM vs Finite Difference

being ∇f_k the cost function gradient and \mathbf{H}_k Hessian. The Hessian will be updated at each step with the Broyden et al. (1970) approach [5], as defined below

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_k &= \mathbf{H}_{k-1} + \frac{\mathbf{y}_{k-1}\mathbf{y}_{k-1}^T}{\mathbf{y}_{k-1}\mathbf{S}_{k-1}} - \frac{\mathbf{H}_{k-1}\mathbf{S}_{k-1}\mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{H}_{k-1}}{\mathbf{S}_{k-1}^T\mathbf{H}_{k-1}\mathbf{S}_{k-1}} \\
 \mathbf{y}_{k-1} &= \nabla f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_{k-1}) \\
 \mathbf{S}_{k-1} &= \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

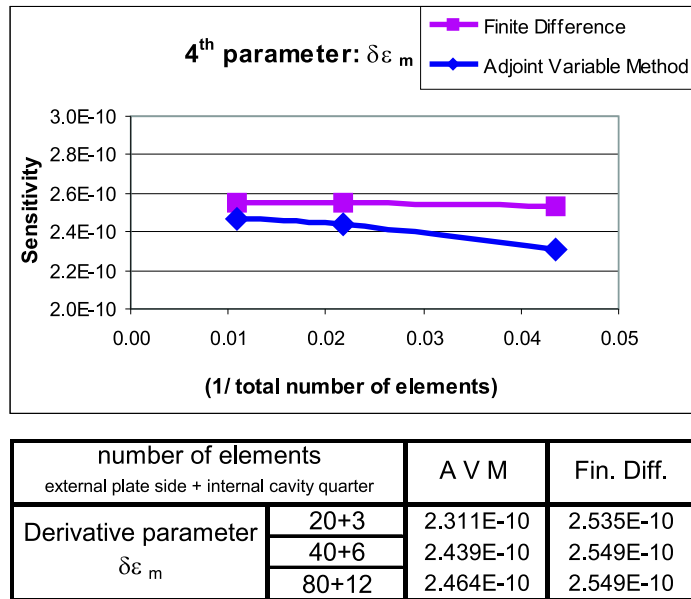


Figure 6.5: 4th shape parameter sensitivity in case 1: AVM vs Finite Difference

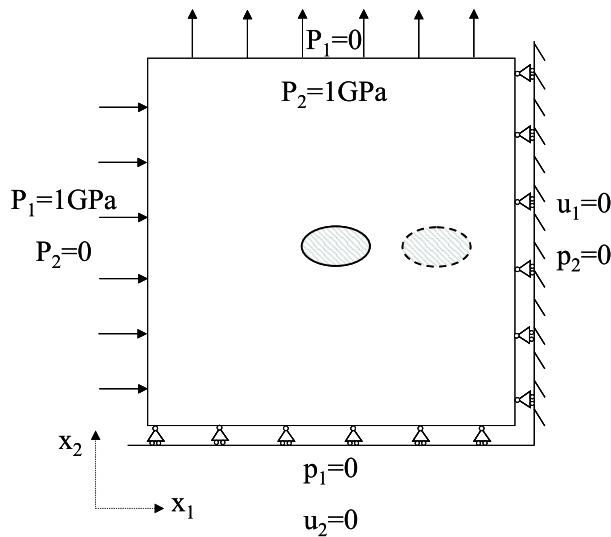


Figure 6.6: Case 2: orthotropic plate with an elliptic internal cavity, real and supposed locations

Several stopping criterion, such as maximum number of iterations, a very small step and a functional gradient below a certain tolerance, have been implemented.

6.6 NUMERICAL RESULTS

Many tests have been done to demonstrate the effectiveness of the proposed method. The specimen of the example is a square plate of an orthotropic material (birch plywood). The 1m side plate, in a plane stress load state (Figure 6.13), has been modelled with 160 isoparametric quadratic elements. It has an elliptic cavity discretized into 24 elements (half-axes

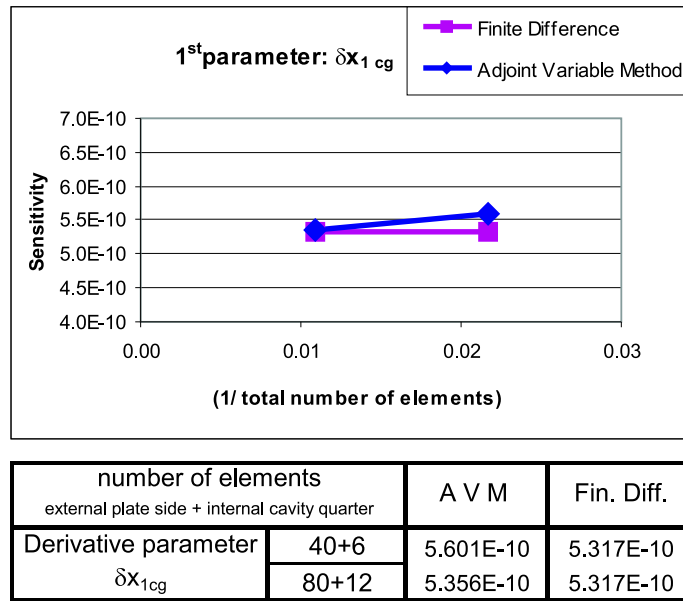


Figure 6.7: 1st shape parameter sensitivity in case 2: AVM vs Finite Difference

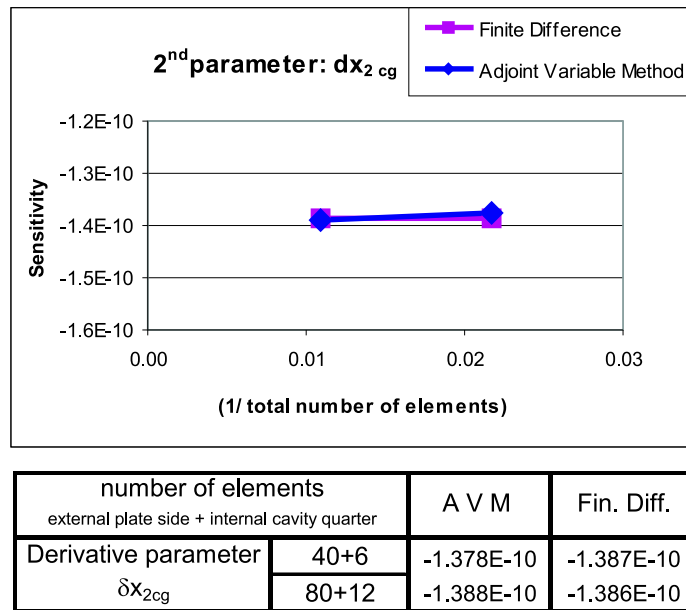


Figure 6.8: 2nd shape parameter sensitivity in case 2: AVM vs Finite Difference

$a=0.0916\text{m}$, $b=0.15\text{m}$) and the initial guess to start the algorithm is a circular cavity (radius= 0.08333 m) far from the real position. Experimental data has been measured on the left hand side of the plate, in particular, displacements \mathbf{u}_2 .

6.6.1 Exact Measurements

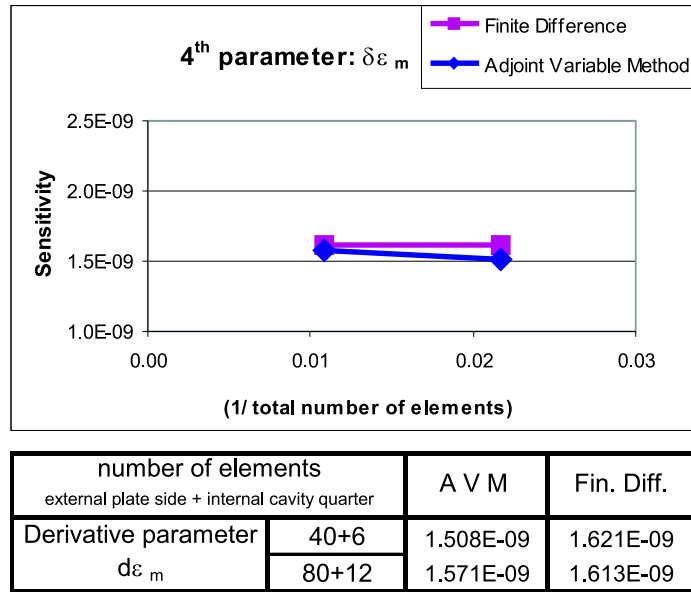


Figure 6.9: 4th shape parameter sensitivity in case 2: AVM vs Finite Difference

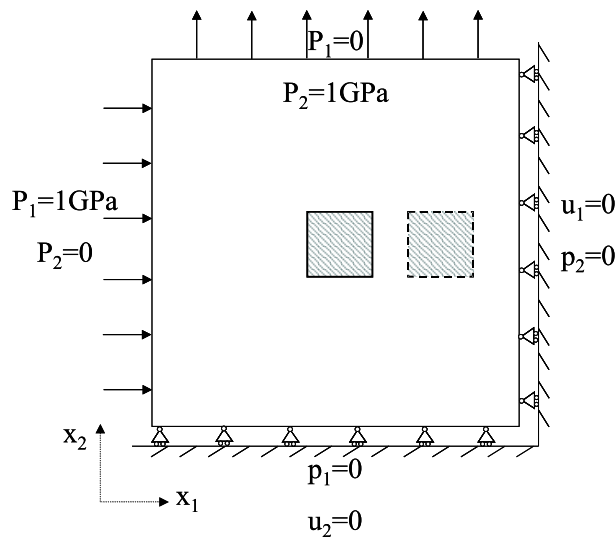
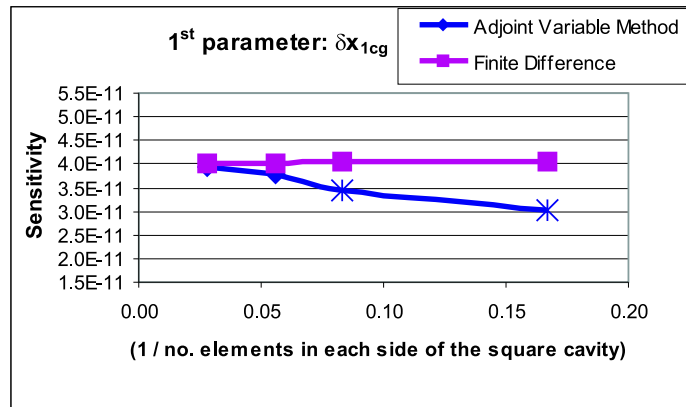


Figure 6.10: Case 3: orthotropic plate with square internal cavity, real and supposed locations

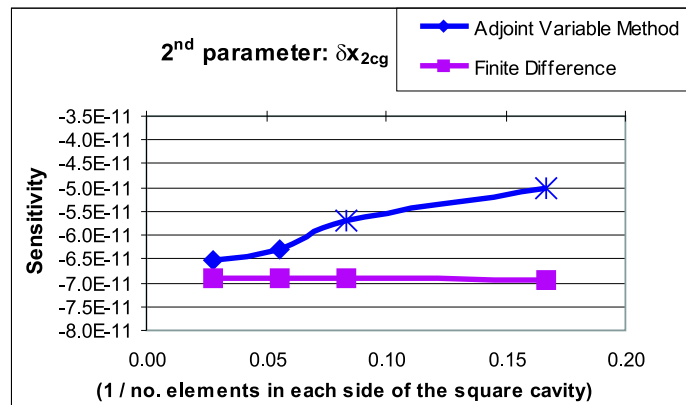
Firstly, convergence of the algorithm to the solution of the problem has been tested supposing exact data, i.e., there is no error in the displacement measurements. After 26 BFGS iterations, the cost functional has decreased from $J_0 = 0.101206$ to $J_{26} = 9.343 \cdot 10^{-8}$ (fig.6.14).

Another example has been designed trying to find two cavities in the plate. The program is capable of finding just one. For this purpose, the program have been run several times. In eacho of them, the parameters considered as variables are different. We have tried combinations with four and five independent variables. in groups of 4 or 5. Although the



number of elements external plate side + internal cavity side		A V M	Fin. Diff.
Derivative parameter δx_{1cg}	40+6	3.227E-11	4.051E-11
	80+12	3.437E-11	4.039E-11
	40+18	3.785E-11	4.026E-11
	80+36	3.933E-11	4.026E-11

Figure 6.11: Sensitivity of several shape parameters: AVM vs Finite Difference



number of elements external plate side + internal cavity side		A V M	Fin. Diff.
Derivative parameter δx_{2cg}	40+6	-5.346E-11	-6.934E-11
	80+12	-5.706E-11	-6.915E-11
	40+18	-6.281E-11	-6.902E-11
	80+36	-6.533E-11	-6.902E-11

Figure 6.12: 2nd shape parameter sensitivity in case 3: AVM vs Finite Difference

solution is less accurate than in the previous case, the algorithm provides a good prediction of the defect location and size (fig.6.15).

6.6.2 Effect of noise in measurements

Secondly, several tests have been done introducing different noise percentages in the measurements. This error has been generated following a gaussian distribution. Results

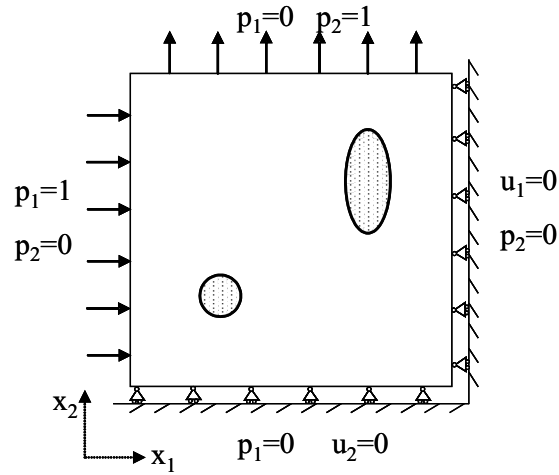


Figure 6.13: Geometry and load tests definition

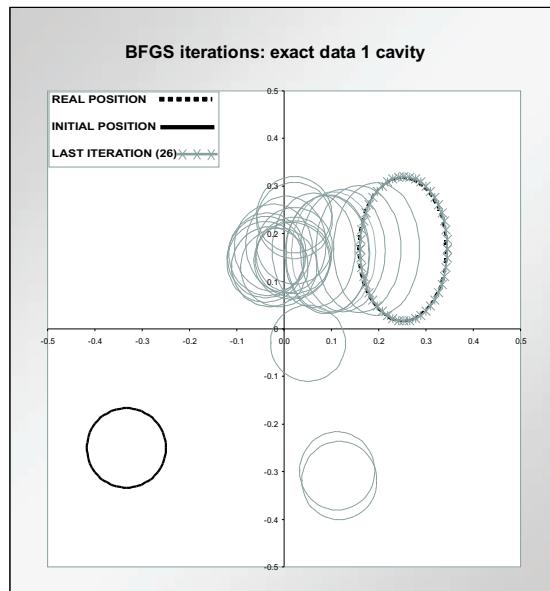


Figure 6.14: Identification of one cavity with exact data

show a very good convergence to the real solution even with 5% error in the experimental data (fig.6.16).

6.6.3 Effect of error in the material elastic constants

Very often, accurate values of elastic constants are not available. To study its influence, several percentages of error are introduced in the model parameters. The following graphs show how a 5% error in the material properties, slightly increase the number of iterations needed (28 iterations) but still a good agreement is achieved. (fig.6.17).

Finally, the decrease of the cost function along the minimization process, for the noisy tests, is displayed in the next graphs (fig.6.18).

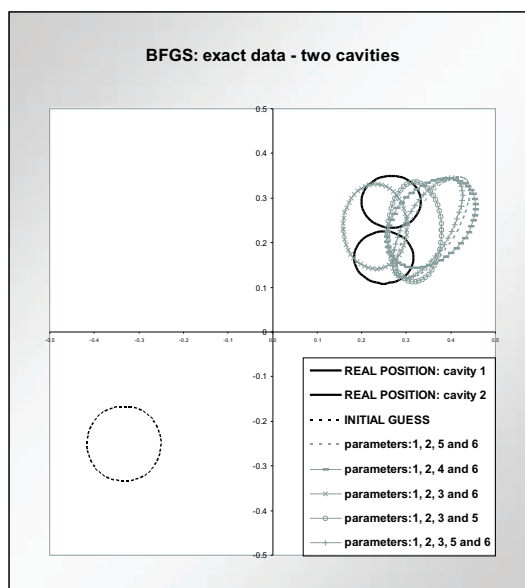


Figure 6.15: Identification of two cavities with exact data

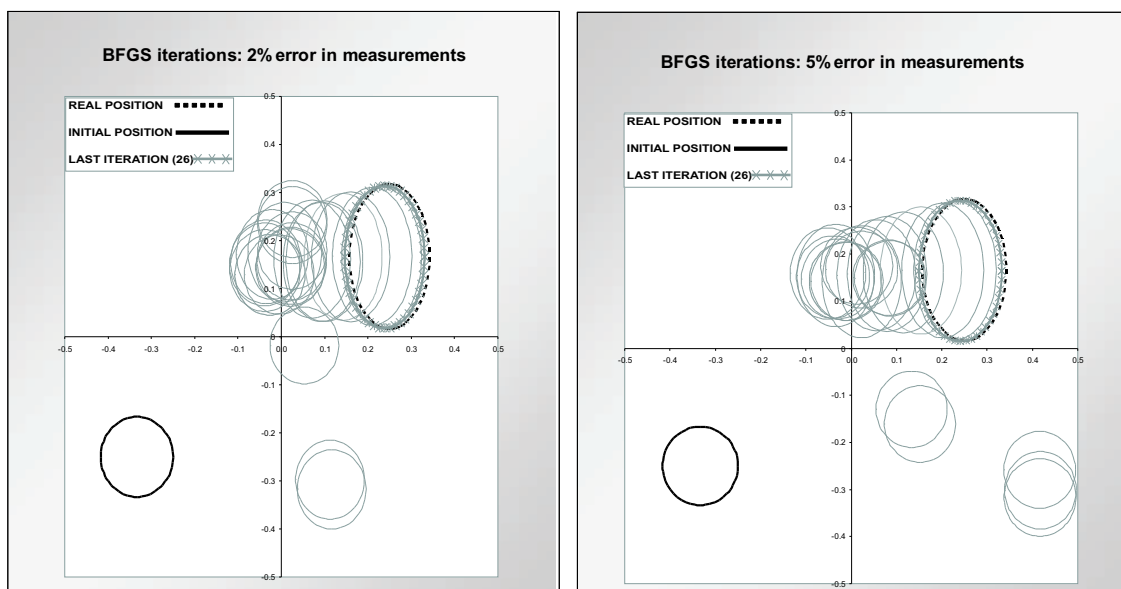


Figure 6.16: Influence of 2% and 5% error in measurements

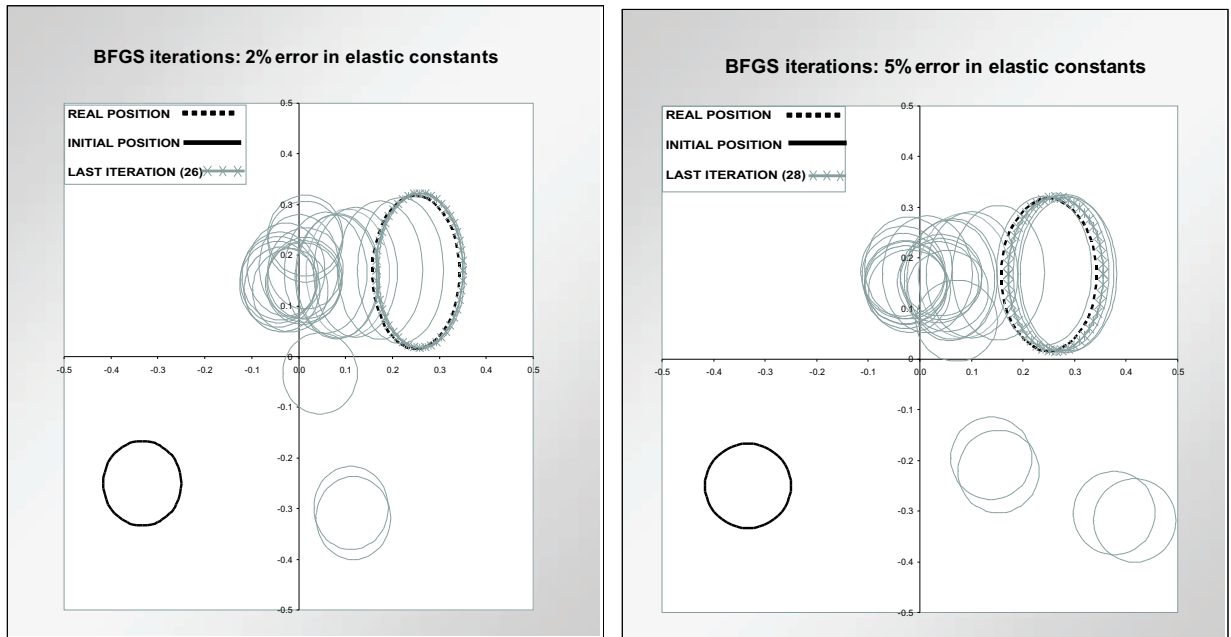


Figure 6.17: Influence of 2% and 5% noise in elastic constants

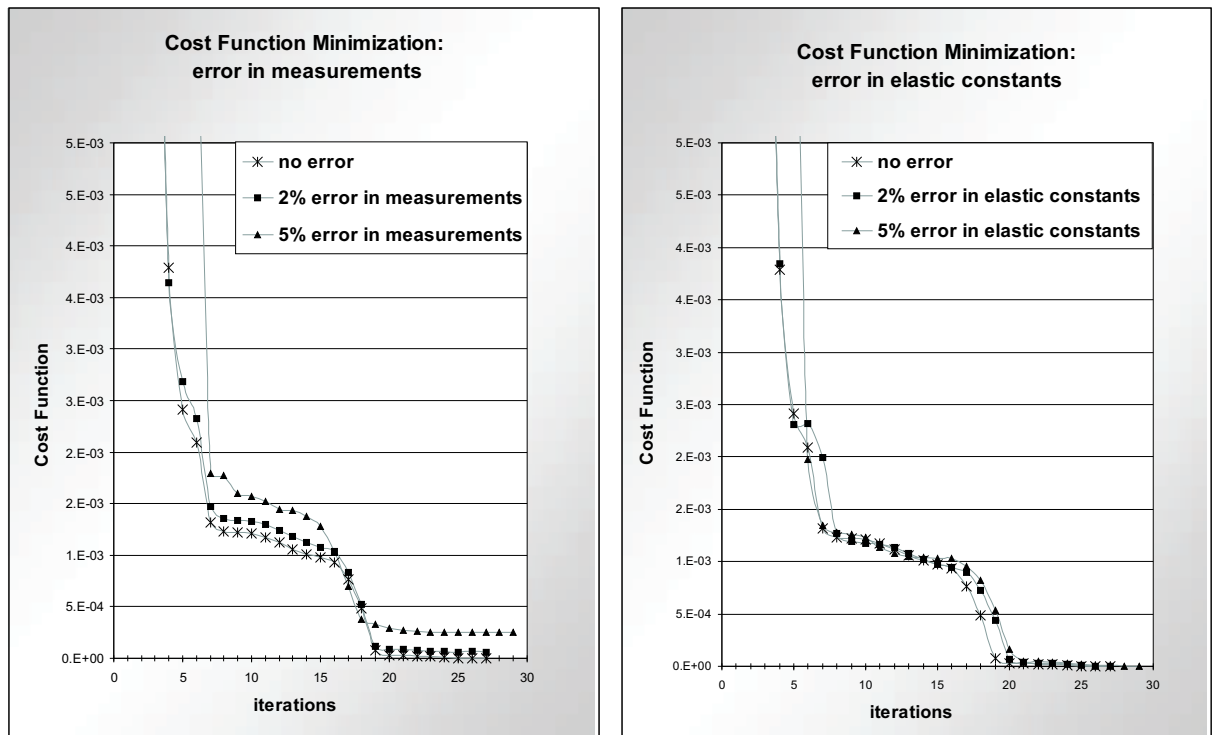


Figure 6.18: Cost Function evolution within the minimization process

CHAPTER 7

IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM: TOPOLOGICAL SENSITIVITY APPROACH

7.1 INTRODUCTION

The previous chapter solved the identification inverse problem. It was tackled using the most common strategy, i.e., considering the problem as the minimization of a residual functional. Here, we employ a different and novel approach making use of the *Topological Sensitivity* (TS). The TS is a domain function whose minimum pinpoints the location and size of the sought flaw. This concept was first introduced by Eschenauer et al. [64] for compliance minimization problems, and then it was generalized and exploited for shape inverse problem by Sokolowski and coworkers [74], [75]. However we develop the strategy proposed by Gallego and Rus [65], different from the initial one, whose TS computation is based on a linearized topological expansion using Boundary Integral Equation techniques. It involves solely information of the non-damaged state (NS), which represents the main advantage. In this chapter, we build the formulation for linearly anisotropic elastic media with circular flaws although the procedure is extensible to other kinds of defects like arbitrarily shaped cavities or cracks. The TS provides a very accurate tool for estimating the location and defect sizes. If we associate TS with Evolutionary Algorithms, the applicability is enhanced since the computational effort is reduced dramatically, main drawback of this type of minimization methods.

7.2 TOPOLOGICAL SENSITIVITY

The topological derivative of a shape functional can be defined as the variation of the functional due to creation of a small hole centered at a given location x_0 . Formally, given a shape functional

$$\mathcal{J} : \Omega \rightarrow \mathcal{R} \tag{7.1}$$

for a given domain Ω , and denoting by $B_r(x_0)$ a closed ball of radius $r > 0$ centered at x_0 , the topological derivative is defined as

$$\mathcal{J}^*(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega \setminus B_r(x_0)) - \mathcal{J}(\Omega)}{\|B_r(x_0)\|} \tag{7.2}$$

For plane problems such as the one of the study, another definition comes from the linearized expansion of the functional \mathcal{J} in the non-damaged state, around $r = 0^+$

$$J(r) = J(0^+) + \frac{r^2}{2} J''(0^+) + o(r^2) \quad (7.3)$$

where, if higher order terms are neglected, $J''(0^+)$ is equivalent to the topological sensitivity of the cost functional, $\mathcal{J}^*(x_0)$.

7.2.1 Topological Sensitivity Boundary Integral Equation

The objective is to solve an identification inverse problem using the topological sensitivity of a cost functional. This functional depends on the variables of the elastostatic problem: displacements and/or tractions. The formulation used for its computation starts from the Boundary Integral Equation (BIE) of the displacements, Equation (3.22), and once the TS of the boundary variables is calculated, the TS of the functional can be obtained straightforward.

Formally, the problem is defined first in a non-isotropic homogeneous domain Ω , with boundary Γ , where there is no defect, i.e., the *non-damaged state*, subject to some boundary conditions. We can write the displacements BIE as follows [3]:

$$c_k^i(\mathbf{y})u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})q_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \quad (7.4)$$

where

- $u_k(\mathbf{x})$ is the k -th component of the displacement vector in the *non-damaged state* at the *observation point* \mathbf{x} .
- $q_k(\mathbf{x}) = \sigma_{jk}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x})$ traction vector in the *non-damaged state*, at *observation point* \mathbf{x} . $\sigma_{jk}(\mathbf{x})$ is the stress tensor and n_j the outward normal.
- $u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ is the k -th component of the displacement vector at the *observation point* \mathbf{x} due to a point load applied in direction i at the *collocation point* \mathbf{y} (*fundamental solution*).
- $q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sigma_{lk}^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})n_l(\mathbf{x})$ is the traction vector of the *fundamental solution*.
- $c_k^i(\mathbf{y})$ is the free term whose value depends on the position of the *collocation point* \mathbf{y} .

The displacements and tractions *fundamental solutions* for the anisotropic medium were defined in Chapter 2, (Section 3.2.1, Equations (3.18) and (3.19)). Equation (7.4) is discretized and can be solved with boundary element techniques, as we saw in Chapter 2, Section 3.2.1. Then, with the kinematic equations and the Hooke's law in an anisotropic medium, we obtain the rest of the variables of the problem on the boundary Γ and in the domain Ω .

Next step in order to compute the Topological Sensitivity Boundary Integral Equation (TSBIE) is considering a modified state that contains an infinitesimal flaw, the *damaged state*. In the same homogeneous domain Ω , whose exterior boundary is Γ , and subject to the same

boundary conditions, consider the appearance of a traction-free cavity centered at point \mathbf{z} whose boundary is Γ_z , which surrounds the domain Ω_z [65]. The BIE for displacements in the new state is written as follow, where the boundary has been split into Γ and Γ_z ,

$$\begin{aligned} c_k^i(\mathbf{y})\tilde{u}_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{q}_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma_z} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{q}_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

where the tilde over the variables means that their values are modified due to the appearance of the infinitesimal flaw. The Equation (7.5) can be simplified due to several issues. First, $\tilde{q}_k = 0$ along Γ_z , since the cavity boundary is traction-free. Displacements along the defect boundary Γ_z can be expressed as the sum of a rigid body motion plus a movement relative to the center.

$$\tilde{u}_k(\mathbf{x}) = u_k^0 + \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) \quad (7.6)$$

Moreover, stresses in a point \mathbf{y} interior to the domain $\Omega \setminus \Omega_z$, far from the defect, are similar to the ones in the non-damaged state $\sigma_{ij}(\mathbf{z})$ (to first order considerations). Therefore, displacements $\delta\tilde{u}_k(\mathbf{x})$ along the defect Γ_z are equal to the ones in an infinite domain subject to a uniform remote stress field $\sigma_{ij}(\mathbf{z})$, $\delta u_k^\infty(\mathbf{x})$, i.e.,

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) = \sigma_{ij}(\mathbf{z}) + h.o.t. \quad (7.7)$$

$$\delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) = \delta u_k^\infty(\mathbf{x}) + h.o.t. \quad (7.8)$$

where *h.o.t.* are the *higher order terms*. Taking into account all said so far, together with

$$q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})n_j(\mathbf{x}) = \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y})n_j(\mathbf{x}) + h.o.t. \quad (7.9)$$

and subtracting the BIE for the non-damaged state, Equation (7.4), to the BIE for the damaged state, Equation (7.5), the so-called TSBIE is obtained (see [65] for a more detailed description of the process)

$$\begin{aligned} c_k^i(\mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta q_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = -\sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y}) \int_{\Gamma_z} n_j(\mathbf{x})\delta u_k^\infty(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7.10)$$

where $\delta u_k(\mathbf{y})$ and $\delta q_k(\mathbf{y})$ are the topological sensitivities of displacements and tractions on the boundary, due to the appearance of an infinitesimal arbitrarily shaped flaw at \mathbf{z} .

7.2.2 Topological Sensitivity BIE for Circular Cavities

For the case of cavities with circular shape and radius R , with traction-free boundary, the displacements $\delta u_k^\infty(\mathbf{x})$ have analytical expressions that can be written in the form

$$\delta u_k^\infty = -\delta R \Sigma_{kl} n_l \quad (7.11)$$

for $k, l = 1, 2$, where n_l is the outward normal to the boundary Γ_z and Σ_{kl} is a constant matrix which depends on the value of $\sigma_{ij}(\mathbf{z})$, the elastic constants a_{ij} and the complex roots μ_i of the characteristic equation (3.11). In particular, the component Σ_{11} is computed as follows

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} = & \frac{a_{11}(\Im(\mu_1+\mu_2)(\Im^2(\mu_1)-2\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)+\Im^2(\mu_2)+\Re^2(\mu_1-\mu_2))\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(\sigma_{11}+\Re(\mu_2)\sigma_{12}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{\Im(\mu_1)\Re(\mu_2)\sigma_{12}-\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)\sigma_{22}+\Re(\mu_1)(\sigma_{12}+\Im(\mu_2)\sigma_{12}+\Re(\mu_2)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Similar expressions can be obtained for the rest of the components, see Appendix 5.

Finally, if Equation (7.11) is replaced in the TSBIE (7.10),

$$\begin{aligned} c_k^i(\mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta q_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = -\pi\delta R^2 \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y})\Sigma_{kl}(\mathbf{z})\delta_{jl} = -\delta A \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y})\Sigma_{kj}(\mathbf{z}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

where $\delta A = \pi\delta R^2$ is the area of the circular cavity.

When the TSBIE (7.10) is generalized for m circular cavities centered at some points \mathbf{z}^j , the right hand side of the Equation (7.13) becomes $\sum_{j=1}^m {}^tU^i(\mathbf{z}^j; \mathbf{y})\delta A_j$, being δA_j a vector with the areas of the flaws centered at \mathbf{z}^j and ${}^tU^i(\mathbf{z}^j; \mathbf{y}) = \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}^j; \mathbf{y})\Sigma_{kj}(\mathbf{z}^j)$.

7.2.3 Discretisation and Resolution of Topological Sensitivity BIE

In order to solve the TSBIE, we use standard discretization techniques based on the Boundary Element Method, obtaining an algebraic system of equations:

$$\mathbf{M}\delta\mathbf{v} = {}^t\Delta\delta\mathbf{A} \quad (7.14)$$

where $\delta\mathbf{v}$ is a vector with the sensitivities of the corresponding unknowns variables on the boundary (displacements and/or tractions); $\delta\mathbf{A}$ is a vector with the areas of the defects and ${}^t\Delta$ is a matrix $n \times m$ being n the number of collocations points and m the number of defects. If we look at the Equation (7.10), we can see that the integral operator for δu_k and δq_k is the same as in the non-damaged state. Then, the coefficients matrix \mathbf{M} is the same, and there is no need to discretize the boundary of the flaw, i.e., in Equation (7.14) there is just information related to the non-damaged state. Solving \mathbf{M} for each column of ${}^t\Delta$, we get the *Topological Jacobian* defined as shown below,

$$\mathbf{M}^t\mathbf{J} = {}^t\Delta \quad (7.15)$$

then, the topological sensitivities of the boundary variables can be computed with,

$$\delta \mathbf{v} = \mathbf{h} \delta \mathbf{A} \quad (7.16)$$

7.3 DEFECTS IDENTIFICATION WITH THE TOPOLOGICAL SENSITIVITY

In order to search for unknown flaws inside a domain, a standard procedure is the minimization of a cost functional which represents the difference between the measured values of a physical magnitude (displacements, tractions, strains, ...) and the computed ones in a supposed configuration. The topological sensitivity provides a mean to dramatically reduce the computational effort since, for a given location of the flaws, the problem can be solved using only the solution of the non-damaged state. Hence we avoid the flaw discretization.

7.3.1 Optimum defect size estimation

The first step of the proposed strategy is the defect size calculation. The cost functional is defined as $f = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R}$, where \mathbf{R} is the residual between a certain magnitude (displacements and/or tractions) experimentally measured \mathbf{v}^{exp} , and its value computed with the supposed model with m flaws centered at \mathbf{z}^j , $\mathbf{R} = \mathbf{v}^{\text{exp}} - \mathbf{v}(\mathbf{A}(\mathbf{z}_j))$. Doing the topological expansion for the residual \mathbf{R} in a non-damaged state and taking into account Equation (7.16), we have

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}(\mathbf{z}_j)) \cong \mathbf{v}^{\text{exp}} - (\mathbf{v}(0) + \delta \mathbf{v}) = \Delta \mathbf{v} - \mathbf{h}(\mathbf{z}_j) \delta \mathbf{A} \quad (7.17)$$

where $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\text{exp}} - \mathbf{v}(0)$ can be computed once the non-damaged state is solved. Applying the topological expansion of \mathbf{R} to the functional definition, f is approximated by

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \cong f(0) + \delta f = f(0) + \frac{1}{2} \delta \mathbf{A}^T \mathbf{h}^T \mathbf{h} \delta \mathbf{A} - \delta \mathbf{A}^T \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{v} \quad (7.18)$$

where $f(0) = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v}^T \Delta \mathbf{v}$, and δf is the *topological sensitivity of the cost functional*. The optimum size of the possible flaws will be the one which minimizes the cost functional, i.e.,

$$\delta \mathbf{A} = (\mathbf{h}^T \mathbf{h})^{-1} \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{v} \quad (7.19)$$

7.3.2 Verification of optimum flaw size estimation

To verify the validity of the first order topological approximation of the residual for optimum flaw size estimation, a simple benchmark problem is presented, Figure 7.1. The example designed for the tests is a square plate, $2m \times 2m$, of an orthotropic material (birch plywood), under the boundary conditions of the figure. The plate has a centered circular cavity. The discretization of the model have been made with 80 quadratic isoparametric elements.

The experimental data needed to compute the residual \mathbf{R} have been simulated solving the direct problem with a Fortran code in a damaged plate with a circular cavity modelled

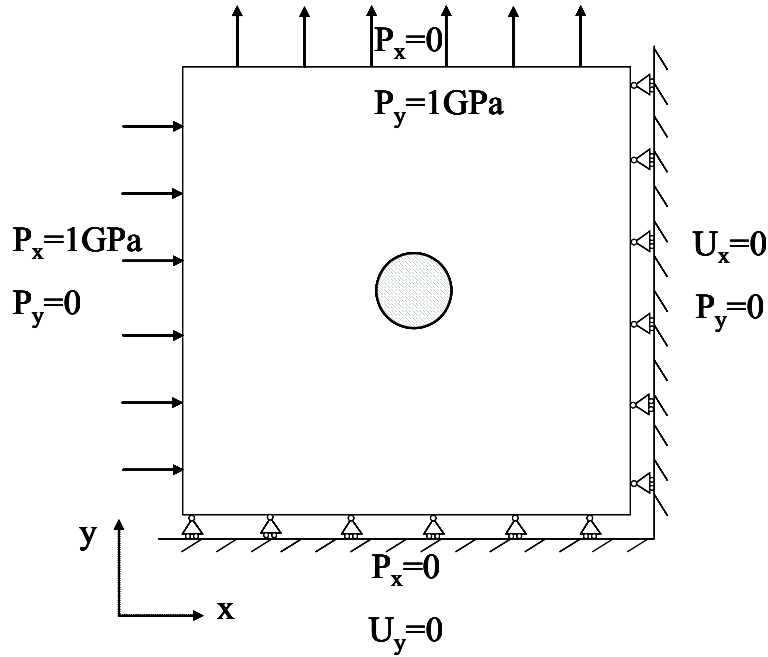


Figure 7.1: Geometry of benchmark problem.

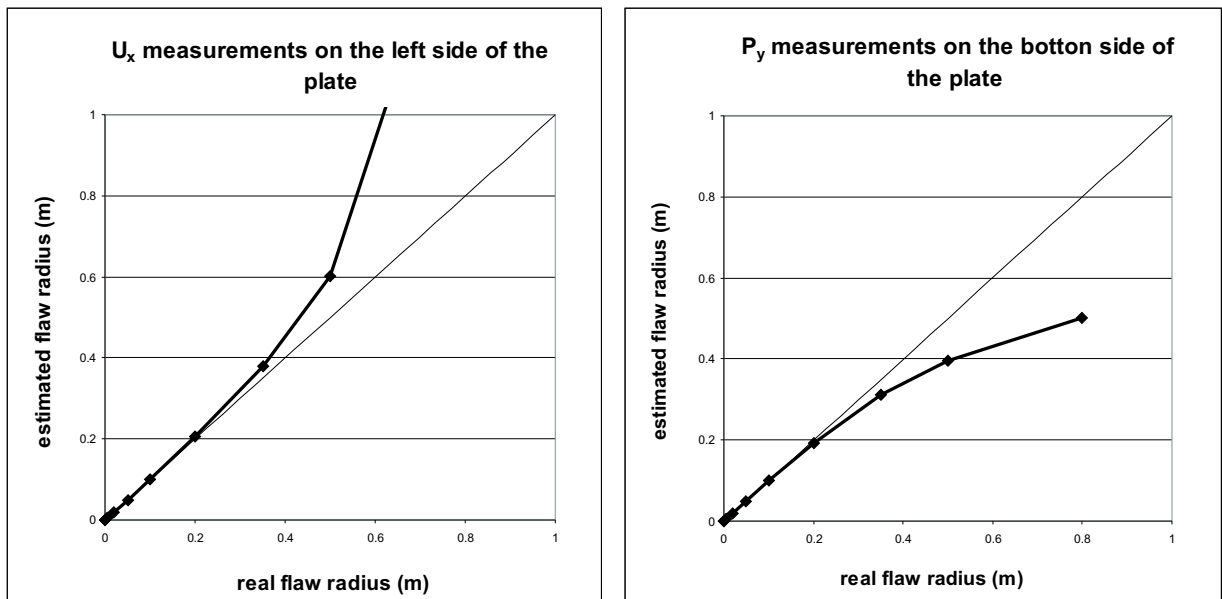


Figure 7.2: Correlation between estimated and real radius of the cavity.

with 48 elements. The problems have been solved for different radius r of the flaw, from a very small one, $r \approx 10^{-6}m$, to a very large one $r \approx 0.8m$. Note that in the last case the cavity occupies almost the whole domain.

The graphs in Figure 7.2 show the real radius of the cavity versus the one obtained using the topological sensitivity, Equation (7.19). The correlation is very good, the discrepancies appear only when the size of the flaw is too big, almost occupying the whole plate. These errors are due to the influence of the neglected higher order terms.

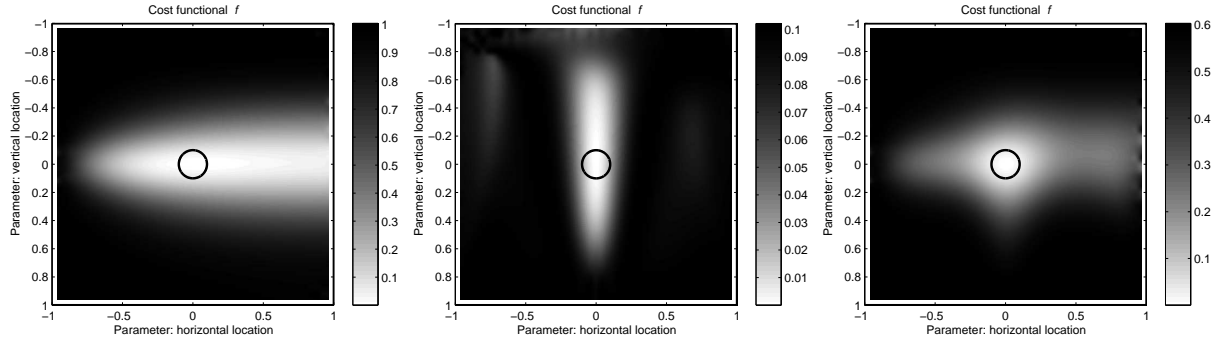


Figure 7.3: Cost Functional for a centered circular cavity. Experimental data: U_x on left plate side (left graph) - P_y on bottom plate side (middle graph) - $U_x + P_y$ (right graph).

7.3.3 Location of the defect

Once we have estimated the defect size with Equation (7.19), the linearized approximation of the functional is obtained applying Equation (7.18),

$$f = f(0) + \delta f(\mathbf{z}_j) = (\Delta \mathbf{v} - \mathbf{J}(\mathbf{z}_j) \delta \mathbf{A})^T (\Delta \mathbf{v} - \mathbf{J}(\mathbf{z}_j) \delta \mathbf{A}) \quad (7.20)$$

and the center of the defects will be located at the points \mathbf{z}_j which minimize the value of f , that is to say that the minimum of δf pinpoints the flaw location.

7.3.4 Verification of the flaw location with topological sensitivity

The idea exposed in the previous section is proved with some tests. The example used is the same as in Figure 7.1, where the real cavity has a radius $r = 0.1m$. In next figures the cost functional, computed with the linearized expansion and the topological sensitivity in Equation (7.18), is plotted superimposed to the real geometry of the domain and location of the flaws (thick line). In the minimum, we have centered a circular cavity with the optimum size estimated for the defect (thin line). The minimum of the Topological Sensitivity exactly pinpoints the presence, location and size of the cavity. Figure 7.3 shows three cases, they differ in the experimental data used to compute the functional. It can be seen that with more data, the location of the cavity is more clear. It has to be pointed out that the minimum value is attained at the center, and what is more, is three orders of magnitude smaller than its value elsewhere, indicating the location of the flaw.

To check the stability of the method, some errors have been introduced. In a first group of tests, there are several percentages of error in the elastic constants of the material. Results are displayed in Figures 7.4 and 7.5. We can observe that even with 10 % of gaussian error, the minimum of the cost functional, 100 times smaller than elsewhere, pinpoints very accurately the center of the flaw. The radius is also very well estimated. Secondly, the error is introduced in the experimental data. Figures 7.6 and 7.7 show the results. Although not as

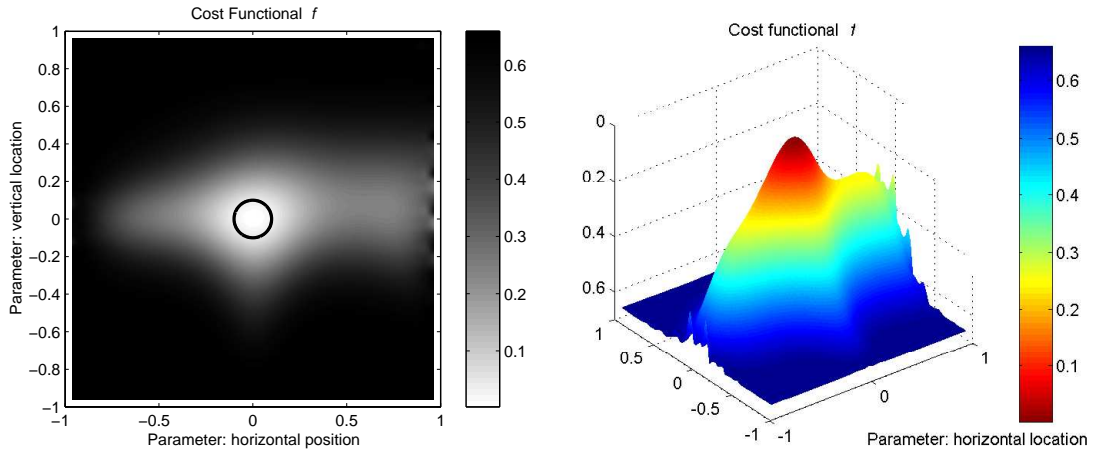


Figure 7.4: Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 5% error in the elastic constants.

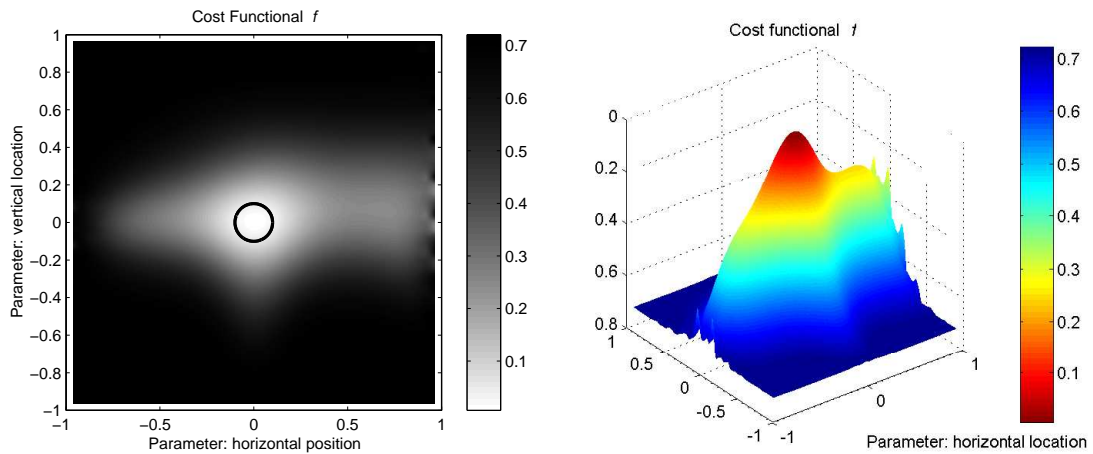


Figure 7.5: Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 10% error in the elastic constants.

accurate as in previous cases, even with large amount of noise in the data (10%) the minimum of the cost functional is close to the exact position of the center, and the size of the cavity is very well predicted.

Finally, a problem with a modelling error is presented. In this case the real flaw is a centered ellipse whose half-axes are $a = 0.15m$ and $b = 0.1m$. The boundary conditions are the same as in previous applications. The topological sensitivity is computed considering that the sought flaw is a circular cavity. The location of the defect is still quite well predicted, see Figure 7.8. The value of the minimum of the cost functional is half of the value elsewhere.

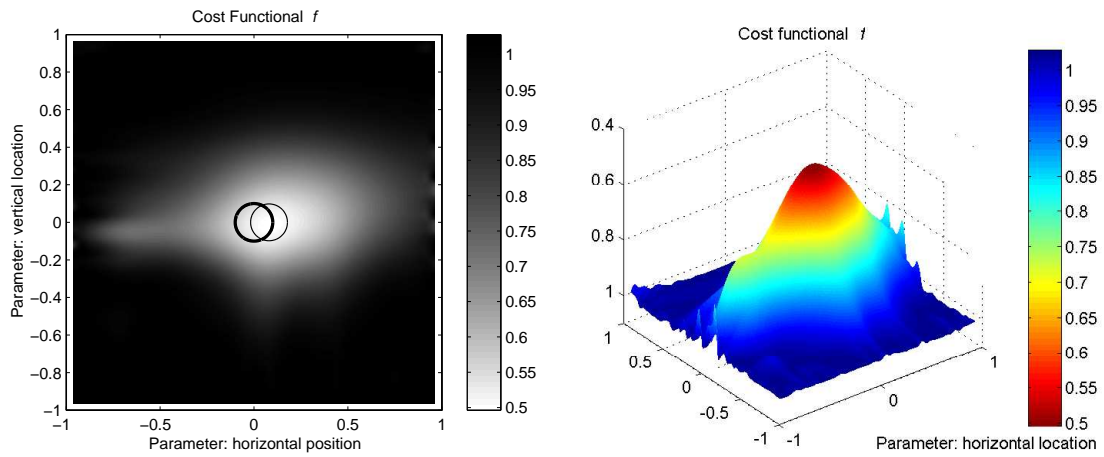


Figure 7.6: Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 5% error in simulated experimental data.

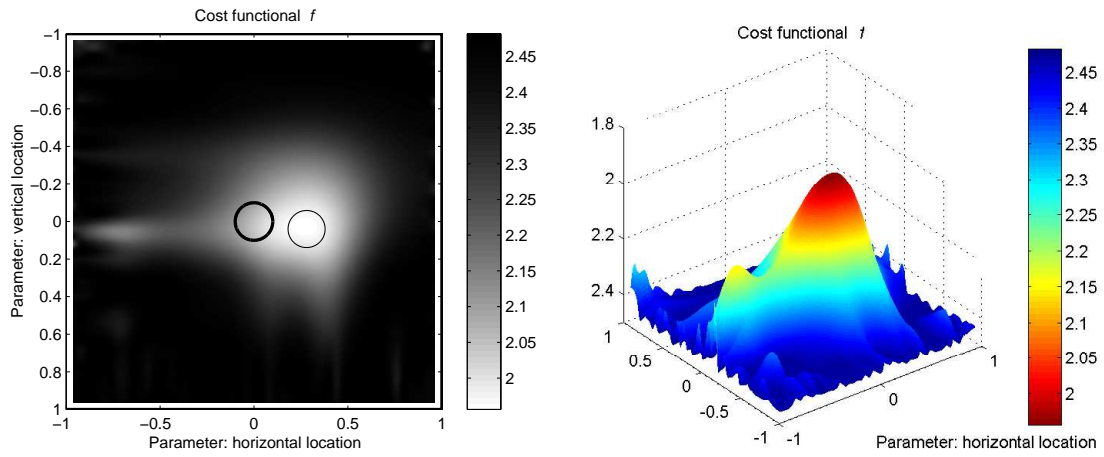


Figure 7.7: Cost Functional topological expansion in the domain for a centered circular cavity with 10% error in simulated experimental data.

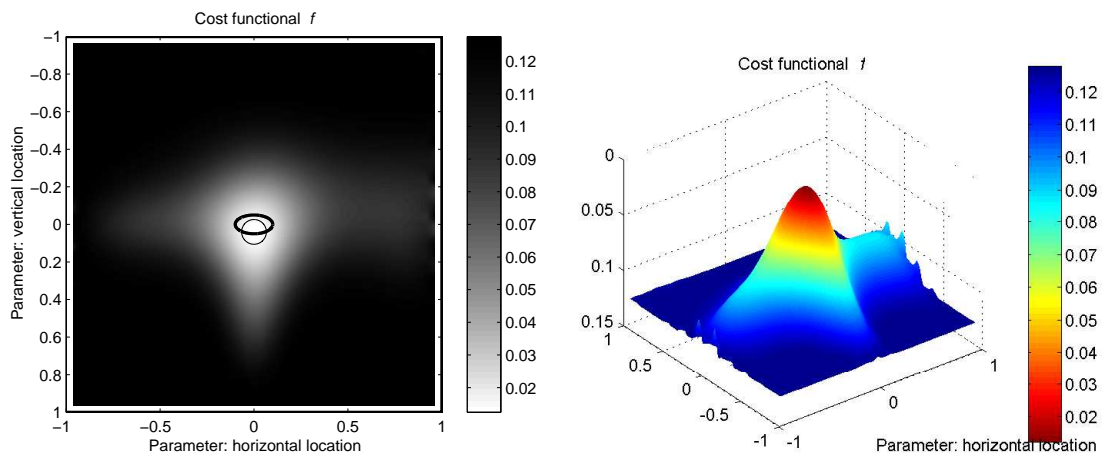


Figure 7.8: Cost Functional topological expansion in the domain for a centered elliptic cavity.

7.4 TOPOLOGICAL SENSITIVITY ASSOCIATED TO GENETIC ALGORITHMS

The use of Evolutionary or Genetic Algorithms (GA) for searching defects is widespread. Some authors as Koguchi et al [67], Solokowski and Kowalczyk [68], Tanaka et al [73], Antes [72], Stravoulakis [70],[71], employed this type of algorithms to minimize the cost functional. Instead, in this work we use them to minimize the topological sensitivity of the cost functional. They are global zero order methods, therefore when using them, there is no need to compute the gradient of the functional with respect the unknowns of the problem. This is a very important advantage, but as a counterpart the computational effort is very high, since a very large number of direct problems has to be solved. This drawback can be avoided if we associate the use of genetic algorithms with the topological sensitivity, for two reasons. First, the number of design parameter is reduced since the size of the defect is estimated in a previous step, and secondly because the cost functional is computed only with information of the non-damaged state.

For the present study, the “individuals” of the population designed for the genetic algorithm, consist of $2 \times m$ design parameters or “phenotypes”, which are the coordinates of the center of the defect. A chain of phenotypes is known as “chromosome”. For each individual we compute a “fitness function” defined as $e(x) = -\log f$, where f is the cost functional. The genetic algorithm implemented for the examples is a simple one, with the basic steps: selection, crossover and mutation.

7.4.1 Numerical Results

The effectiveness of the strategy developed for solving the identification inverse problem has been proved with numerical applications. A simple genetic algorithm has been coded and plugged into the topological sensitivity. The code has been adapted from the one developed by Haataja [66]. The parameters used are the ones shown in the following table,

Number of individuals in population	50
Number of generations	200
Probability of mutation	0.02
Probability of crossover	0.8
Probability de "tournament"	0.7
Scale of mutation	0.1

Table 7.1: Genetic Algorithm parameters.

With these parameters, using the algorithm for seeking defects by itself, would imply solving $200 \times 50 = 10000$ different direct problems with cavities. On the other hand, if we associate it to the topological sensitivity, just one problem has to be solved, the non-damaged state, and the 10000 analysis involves just a forward and back substitution with the already factorized system matrix \mathbf{M} .

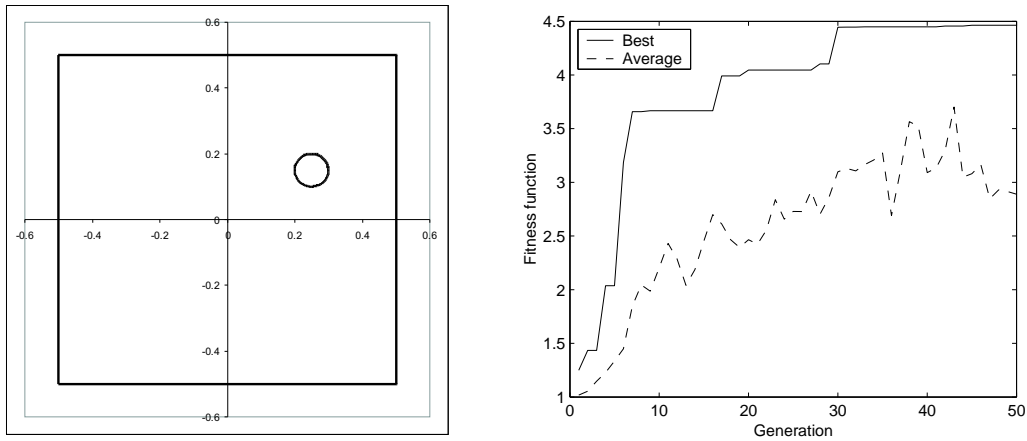


Figure 7.9: Identification of circular cavity, considering no error in experimental data.

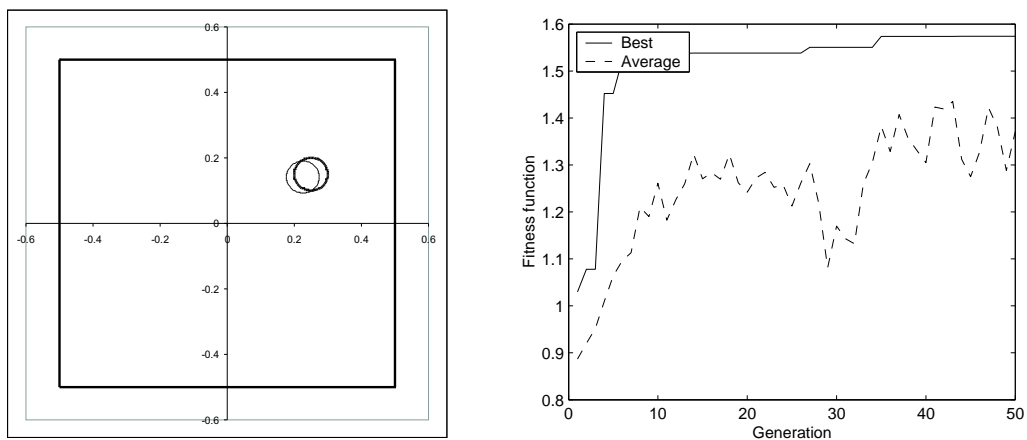


Figure 7.10: Identification of circular cavity, considering 2% error in experimental data.

Multiple tests have been run. For all of them, the specimen studied is a square plate with dimensions, material properties and boundary conditions as the ones of the benchmark example in 7.1. Each of the following figures have two graphs, on the left hand side, the best individual obtained (thin line) is represented superimposed to the real flaws (thick line). The graph on the right hand side, shows the evolution of the fitness function along the generations.

The first group of tests done consist of a plate with a circular cavity, several percentages of gaussian error have been introduced in the measurements, from 0% to 10%. The number of generations is 50. The results can be seen in Figures 7.9 to 7.12. They show a very good estimation of the size of the defect in all of them. The location is still well predicted even with 5% of error.

Secondly, we study how to find an elliptic cavity when the program can predict just circular cavities. As in the previous cases, tests with exact and noisy experimental data have been run. Looking at Figures 7.13 to 7.16, we see that in all cases the location and size of the

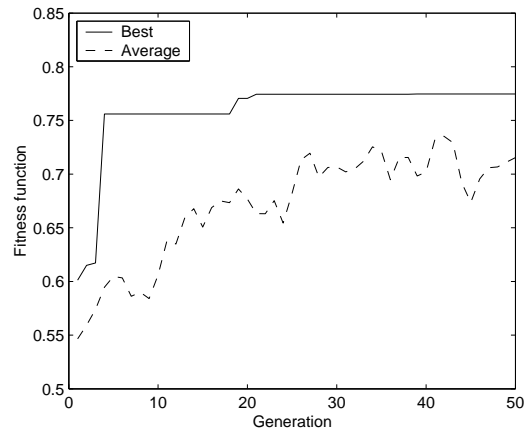
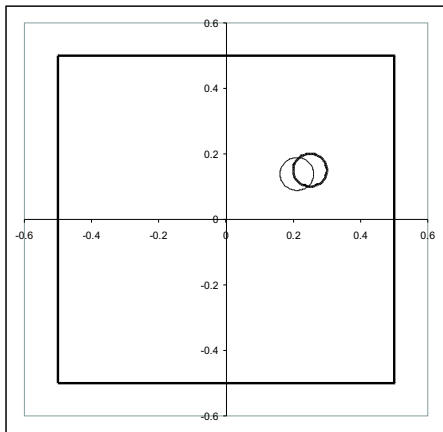


Figure 7.11: Identification of circular cavity, considering 5% error in experimental data.

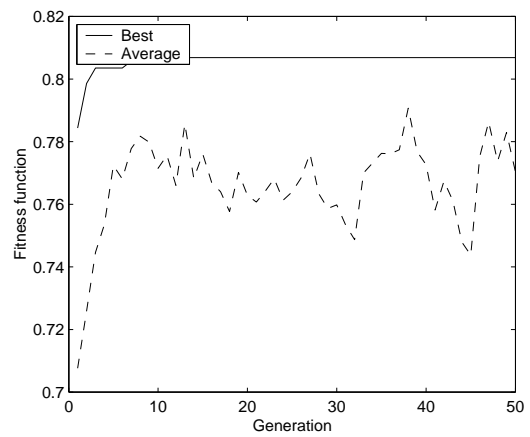
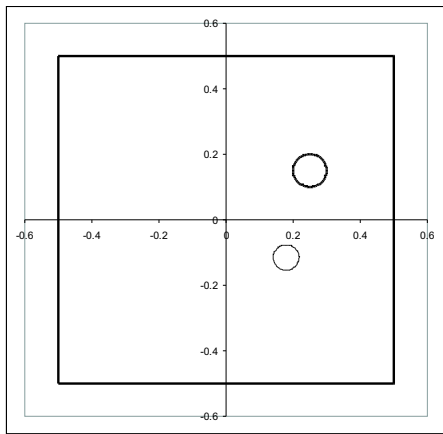


Figure 7.12: Identification of circular cavity, considering 10% error in experimental data.

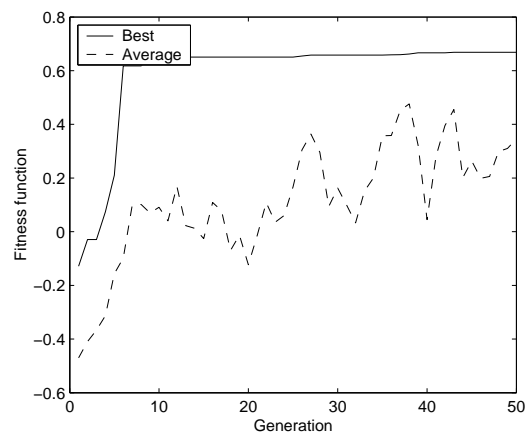
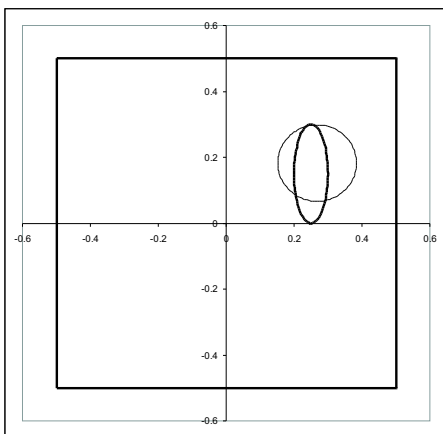


Figure 7.13: Identification of elliptical cavity, considering no error in experimental data.

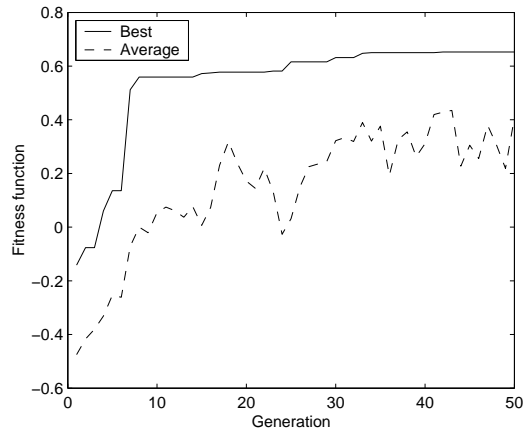
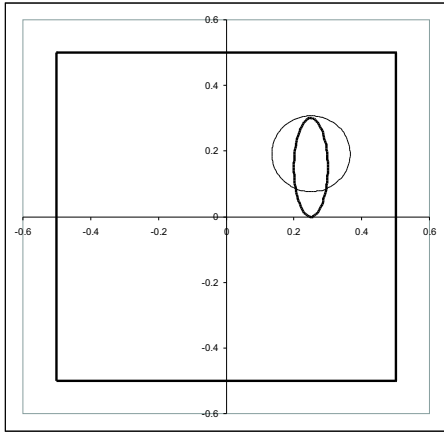


Figure 7.14: Identification of elliptic cavity, considering 2% error in experimental data.

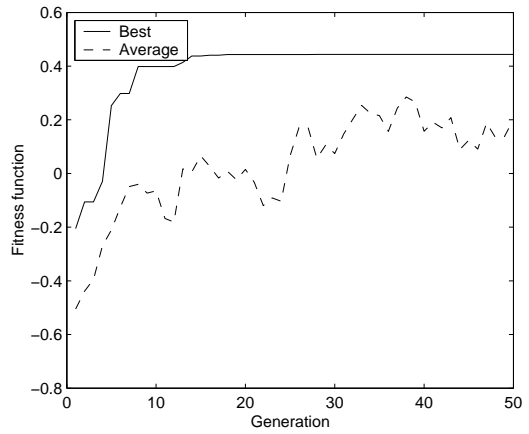
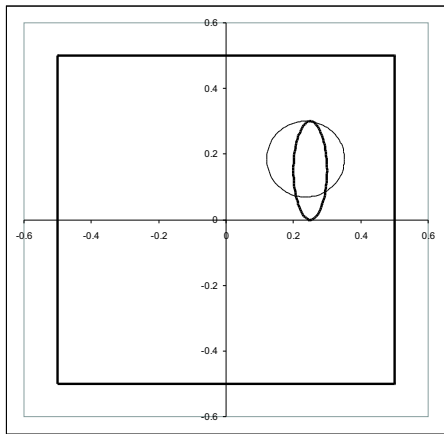


Figure 7.15: Identification of elliptic cavity, considering 5% error in experimental data.

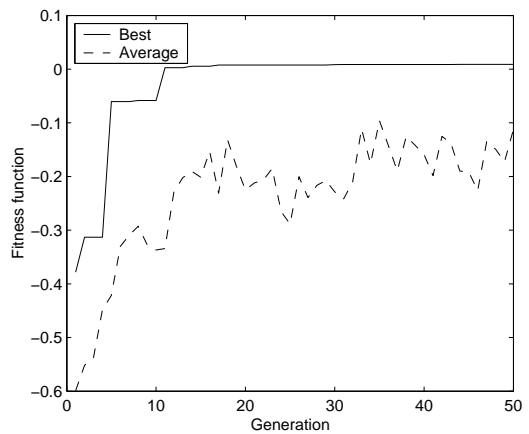
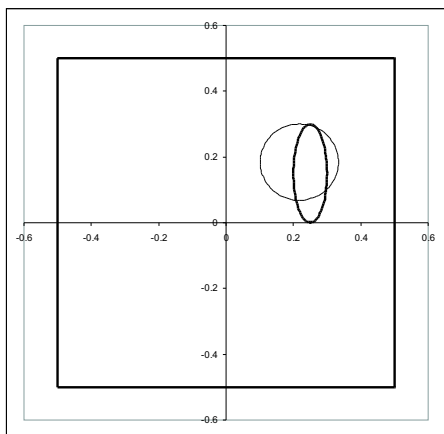


Figure 7.16: Identification of elliptic cavity, considering 10% error in experimental data.

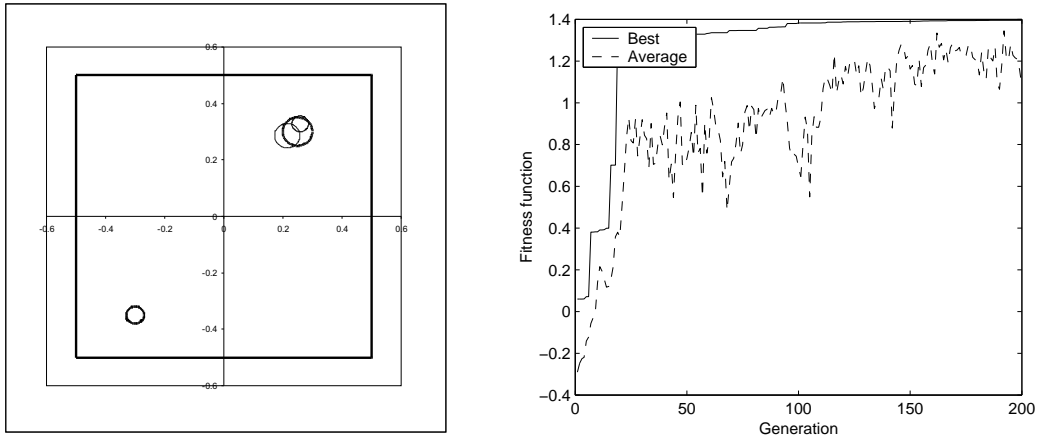


Figure 7.17: Identification of two circular cavities, considering exact measurements of P_x on the right hand side of the plate and U_x on the left hand side of the plate.

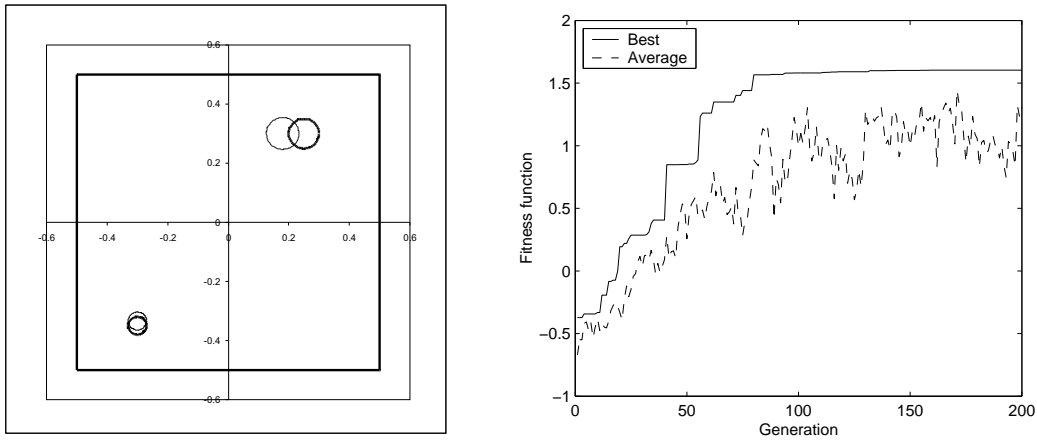


Figure 7.18: Identification of two circular cavities, considering exact measurements of P_x on the right hand side of the plate, U_x on the left hand side of the plate, and P_y at the bottom side.

defect is well approximated, although shapes are different.

A third kind of tests is done to predict two cavities, allowing to the program to find the two of them. Hence, the chromosome has four parameters, the four coordinates of the two centers. 200 generations are permitted from now. In Figures 7.17 to 7.19 three cases are plotted. They differ in the number and type of measurements taken on the boundary of the plate to compute the residual \mathbf{R} . No error in data has been considered here. More experimental data gives better results, but also what to measure is important. The case displayed in Figure 7.17, just predict one of the cavities. Figure 7.19 shows the best fit between predicted and real cavities, the measurements taken are displacements U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate. Instead, in 7.18 tractions are measured on two sides of the plate, plus displacements in just one, and the best individuals are worse than in Figure 7.19. With these examples, we want to emphasize the importance of a previous study

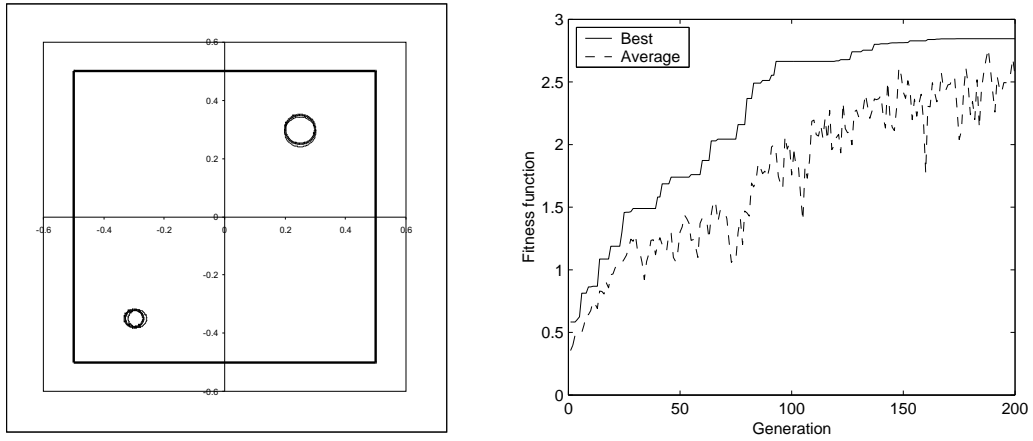


Figure 7.19: Identification of two circular cavities, considering exact measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate.

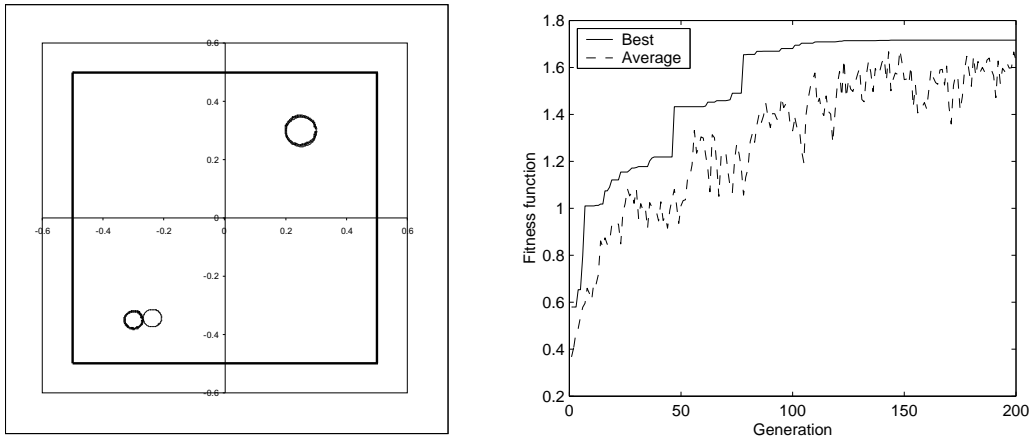


Figure 7.20: Identification of two circular cavities, considering 1% error in measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate.

for the experiment design, in which how and where to measure must be analysed in order to optimize the reliability of the results.

Then, Figures 7.20 to 7.22 show the results when seeking for two cavities and several percentages of noise have been introduced in the measurements.

In Figure 7.23, we show the case when the program is allowed to find two circular cavities, but the real defect is an elliptic cavity. Exact measurements on the four sides of the plates have been considered. The location and size are well estimated.

And the last test shown in Figure 7.24, is the case of one single cavity to be found with the possibility of being two.

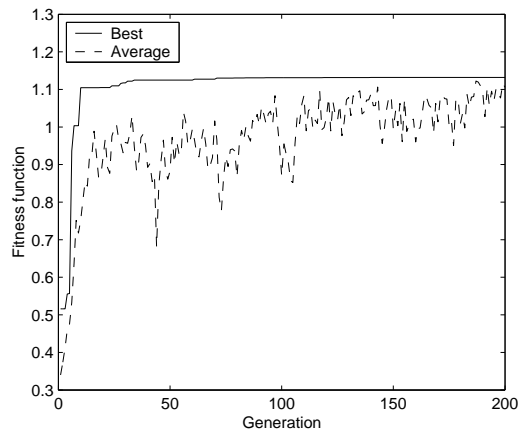
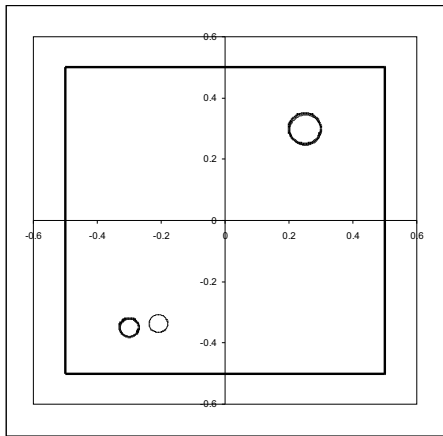


Figure 7.21: Identification of two circular cavities, considering 2% error in measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate.

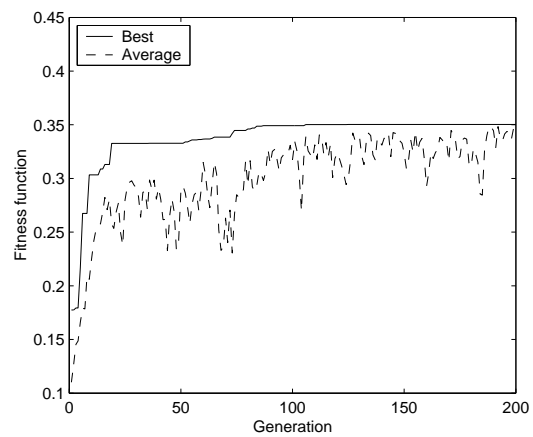
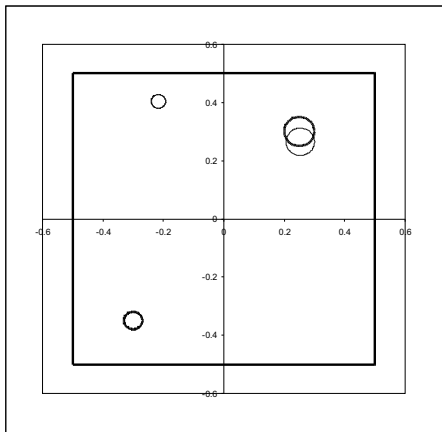


Figure 7.22: Identification of two circular cavities, considering 5% error in measurements of U_y at the top side side of the plate and U_x on the left hand side of the plate.

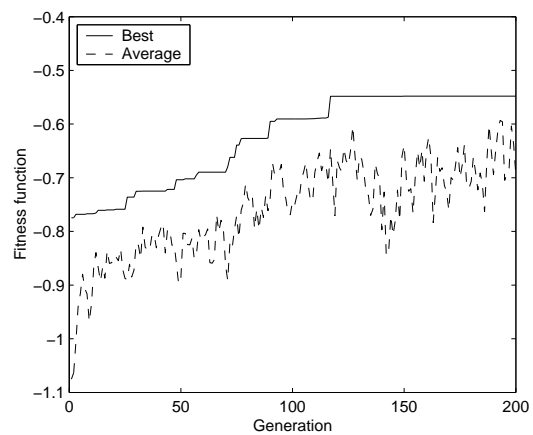
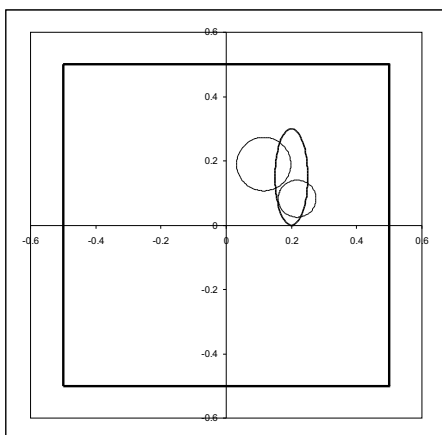


Figure 7.23: Identification of an elliptic cavity, starting from two circular cavities, measurements on the four sides of the plate.

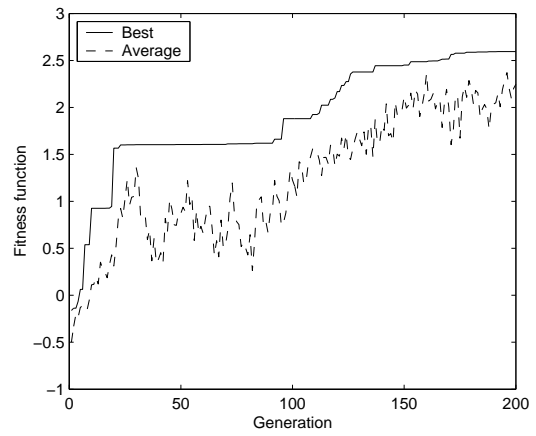
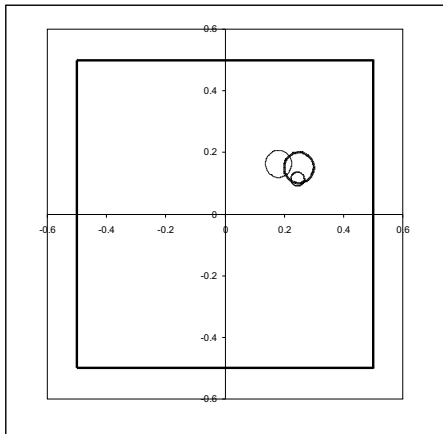


Figure 7.24: Identification of an circular cavity, allowing the existence of two circular cavities, measurements on the four sides of the plate.

Part III

CONCLUSIONS

CHAPTER 8

CONCLUSIONS

In this thesis, we have investigated the resolution of several inverse problems in 2D anisotropic elastostatic domains. A complete formulation for each problem is developed, all of them based on Boundary Element techniques. Several minimization algorithms have been employed, using the most appropriate one for each case. Each problem has a particular sensitivity analysis approach. Techniques based on direct differentiation, adjoint variable method and topological sensitivity are studied. One of the inverse problems, the Cauchy problem, has been tackled with a different strategy, using an alternating iterative method.

8.1 CAUCHY INVERSE PROBLEM

The *Cauchy reconstruction inverse problem* in elasticity is solved with an iterative BEM algorithm, in order to deal with the instabilities of the solution of this ill-posed problem. The inverse problem is reduced to a sequence of well-posed mixed boundary value problems. Based on the L-curve method of Hansen [51], a regularizing stopping criterion, necessary for ceasing the iterations at the point where the accumulation of noise becomes dominant and the errors in predicting the exact solution increase, has also been presented. Furthermore, it was shown that the use of a variable relaxation factor with respect to the angular polar coordinate increases the accuracy of the numerical solution.

The numerical results obtained for various numbers of isoparametric quadratic boundary elements and various levels of noise added into the input data (even with 5% error) were found to be in very good agreement with the exact solution. From the examples investigated in this study it can be concluded that the alternating iterative BEM produces a convergent, stable and consistent numerical solution with respect to increasing the number of boundary elements and decreasing the amount of noise.

The work presented in here, it is an extension to the previous one associated with isotropic linear elastic materials, see e.g. Marin *et al.* [26].

8.2 PARAMETER INVERSE PROBLEM

Another common inverse problem in elasticity, which arises when using Non-Destructive Evaluation techniques, is the *Parameter inverse problem*. The unknowns are the material properties corresponding to a two-dimensional anisotropic linear elastic medium. Hence, the maximum number of independent elastic constants, which define the material, is six. Many studies have been done for the isotropic case, but so far the anisotropic case have never been solved numerically.

The problem is tackled as a minimization problem, in particular, the Levenberg-Marquardt minimization algorithm has been employed. When using this technique, derivatives of displacements and tractions on the boundary with respect to the material constants must be computed. A direct differentiation approach is used for this purpose. The derivatives are obtained from the *material constant derivative Boundary Integral Equation* which is computed analytically and discretized following standard boundary element techniques. It is shown that the new kernels that arise in the sensitivity BIE are as singular as the standard kernels from BEM, or weakly singular. Their integration has been performed by an analytical-numerical decomposition, which yields very accurate results.

The sensitivity accuracy of this numerical approach is contrasted to solutions obtained analytically by the complex potential theory, and the results prove that the proposed approach is highly reliable, even using coarse meshes. The implementation allows the computation of sensitivities for heterogeneous bodies, with respect to the material properties of any subdomain.

Once we have computed sensitivities, they are used in the inverse procedure for computing the material constants of a body or part of it (inclusions) minimizing a suitable functional. Likewise, they can be employed in estimating the reliability of a given solution, computing its statistical parameters from those of material constant distributions.

Several tests have been performed to investigate the convergence of the Levenberg-Marquardt minimization algorithm. Different aspects, such as number of measurements, noise in data, initial guess values and number of iterations have been taken into account. Overall, it is concluded that the proposed iterative approach produces an accurate, convergent and stable numerical solution to this particular inverse problem.

8.3 IDENTIFICATION INVERSE PROBLEM

The third inverse problem studied in the thesis is the *Identification inverse problem* for defect detection. We have used two different approaches. First, the problem is tackled with the most common strategy, the minimization a cost functional using gradient methods. Secondly, a novel approach based on the topological sensitivity concept is used. A complete formulation for each strategy has been developed for the 2D anisotropic elastostatic case, circumstances never studied before.

8.3.1 Adjoint Variable Method approach

The problem is solved by minimizing a cost functional with a quasi-newton algorithm, the *BFGS*. This implies the previous computation of the derivatives of the functional with respect to the variables of the problem. In this case, the unknowns are the design parameters which define de location and shape of the defect. This gradient, called *shape sensitivity*, has been calculated with an analytical derivation procedure, the *Adjoint Variable* approach, which introduces the concept of material differentiation. This technique provides a very compact boundary integral formula for the shape sensitivity of the functional, which allows us to use Boundary Element techniques. This is very useful in problems like the one treated, where the domain is variable, because supposes saving computational effort. The sensitivities computed with the AVM has been compared to the ones obtained with numerical differentiation, Finite-Differences, and there is very good agreement in the three cases studied: a circular cavity, an elliptic cavity and a square one. The number of elements used for the discretizations, has been shown to have important effects in the accuracy of the solution.

Next, the sensitivity has been implemented into the BFGS algorithm, and the convergence and stability of the method has been checked with many tests. First, we have studied cases with one or two cavities, exact experimental data is considered. The examples have been run with several combinations of design parameters. Very accurate solution is obtained. Then, some errors have been introduced, first in the experimental data and afterward in the elastic constants. In both cases, even with 5% of error, the shape, size and location of the flaw is predicted with high precision. Moreover, the number of iterations needed to converge is not very large.

8.3.2 Topological Sensitivity

The second approach used for solving the *identification inverse problem* is a novel strategy which combines the computation of the topological sensitivity (TS) of the cost functional with a zero order minimization algorithm. The TS by itself is a very promising tool for identification of defects since it has been shown that provides a very accurate estimate of the flaw size and its location, using only information of the flawless problem or non-damaged

State.

Many tests have proved this idea. First the correlation between the predicted and real radius of the cavity is almost perfect with cavities of different sizes, from very big to very small ones. Then, it is shown how the minimum of the topological sensitivity of the cost functional pinpoints the center of the defect, even when errors in the material properties of the model are considered, and when noise is introduced in the experimental data measured on the boundary. Still with a 10% of error in elastic constants, the location and size of the flaw are predicted very accurately. For a 10% of noise in boundary data, the size is still very well estimated and the flaw location is very close to the real one. Also, an elliptical cavity has been tested. Although the shape can not be predicted with the actual formulation, the size and location estimated are suitable.

Moreover, in conjunction with genetic algorithms (GA), the use of the TS can greatly enhanced their range of applicability, since the GA-TS approach cuts to a fraction the computational time required. The combined GA-TS method has the following characteristics:

- The solution of a direct problem must be carried out just once for the whole search (regardless of the number and location of the flaws). Only the Non-damaged problem has to be discretized, and hence, only one system matrix \mathbf{M} has to be computed and factored. This implies that the computational time of each iteration is dramatically reduced in comparison with the solution of multiple direct problem. First, because obtaining the topological Jacobian \mathbf{J} in equation (7.14) basically entails the computation of the stresses at internal points \mathbf{z}_j in the NS. And then, the matrix \mathbf{M} of the system to be solved in (7.15) is already factorized and ready for forward and back substitution, once for each flaw.

- Another advantage is the reduction in the number of design parameters since the optimum size is computed in an inner step, and only the center of each flaw is included within the design variable vector.

- It is also important the ability to easily consider several simultaneous flaws. This gives the possibility of searching an undefined number of defects by allowing a number of flaws in excess, and letting the non existing flaws vanish by themselves.

There are many numerical applications which confirm the validity of this GA-TS approach. First, some tests are done seeking for one single cavity, circular and elliptical. Several percentages of noise have been introduced in the experimental boundary data, from 2% to 10%. The results have shown good agreement between the real flaws and the best individuals of the algorithm. There are some important issues to be considered in order to get a good solution. These topics, which have a high influence in the final solution are such the amount of experimental data, type of data, where to measure them, size of the flaw... Next, in a second serie of tests we search for two cavities. Results are very accurate with a 2% of

error in experimental data. Finally, in the two last examples presented, we have tried to find a single elliptical cavity and a single circular cavity, when the algorithm allows the existence of two cavities at the beginning. The location of the single flaw is well predicted.

8.4 FORTHCOMING WORKS

The most immediate research studies suggested after the work presented in this thesis are the extension of the developed formulations for other cases such as:

- the three-dimensional case
- the steady state dynamics case
- other anisotropic elastic materials such as piezoelectric ones.

The Identification inverse problem has been solved for the detection of circular cavities, although the two procedures used are extensible to other kinds of defects like arbitrarily shaped cavities or cracks. This is expected to be done in the next future.

Four different resolution methods have been proposed in the present work. All of them have been proved numerically with numerous examples and they demonstrate to be efficient and accurate. Next step would be the experimental validation with tests designed in laboratory.

APPENDIX A

COMPUTATION OF STRAINS AND STRESSES AT INNER POINTS

Somigliana Identity was defined as

$$u_i(\mathbf{z}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (\text{A1.1})$$

If we differentiate it with respect to the coordinates of a collocation point $\mathbf{z}' \in \Omega \setminus \Gamma$, and we apply the kinematics equations, one attains the integral equation for the strains,

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{z}') = \int_{\Gamma} [V_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) - S_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z})] d\Gamma \quad (\text{A1.2})$$

where the kernels are,

$$V_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_{ij}}{\partial z'_k} + \frac{\partial U_{kj}}{\partial z'_i} \right] = - \sum_{s=1}^2 \Re \left[\frac{p_{js} D_{iks}}{z_s - z'_s} \right] \quad (\text{A1.3})$$

$$S_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial z'_k} + \frac{\partial T_{kj}}{\partial z'_i} \right] = \sum_{s=1}^2 \Re \left[q_{js} D_{iks} \frac{\mu_s n_1 - n_2}{(z_s - z'_s)^2} \right] \quad (\text{A1.4})$$

with $D_{iks} = A_{is} R_{ks} + A_{ks} R_{is}$ (no sum in s); $R_{1s} = 1$ and $R_{2s} = \mu_s$.

The integral equation above is discretized using the same procedure as for the displacement BIE. Stresses at interior point can be straightforwardly obtained from the strains by application of Hooke's law.

APPENDIX B

EVALUATION OF THE INTEGRATION CONSTANTS

When evaluating the integrals given by relations (3.25) and (3.26), we must take into account two distinct situations depending on whether the collocation point l belongs or does not to the element over which the integration is performed. The first situation, also called the *ordinary case*, presents no difficulty and can be evaluated numerically using a Gaussian quadrature. The Cauchy principal value (CPV) has meaning only in the later case which is known as the *singular case*. However, this situation needs some more attention.

On developing expression (3.25) for the integration constants $h_{ij}^m(l, k)$, we obtain the following integral:

$$h_{ij}^m(l, k) = 2\Re \left[\int_{-1}^1 \sum_{s=1}^2 \frac{q_{js} A_{is}}{z_s(\xi) - y_s^l} (\mu_s n_1 - n_2) \phi_m J^k d\xi \right], \quad (\text{A2.1})$$

which requires the evaluation of the complex integral

$$I_s = \int_{-1}^1 \frac{\mu_s n_1 - n_2}{z_s(\xi) - y_s^l} \phi_m J^k d\xi. \quad (\text{A2.2})$$

In the singular case, the integral I_s can be split into a regular integral \bar{I}_s and an integral in the CPV sense as follows:

$$I_s = \bar{I}_s + \int_{-1}^1 \frac{\phi_m}{\xi - \xi_l} d\xi, \quad (\text{A2.3})$$

where ξ_l is the natural coordinate of the collocation point. The CPV integral is solved taking into account the fact that the two infinite terms occurring for $\xi_l = 1$ and $\xi_l = -1$ cancel out when the evaluation is performed over two adjacent elements

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_m}{\xi - \xi_l} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{a\xi^2 + b\xi + c}{\xi - \xi_l} d\xi = 2(a + b\xi_l) + \phi_m(\xi_l) \ln \frac{1 - \xi_l}{1 + \xi_l}. \quad (\text{A2.4})$$

For the integration constants $g_{ij}^m(l, k)$, relation (3.26) may be recast as

$$g_{ij}^m(l, k) = 2\Re \left[\int_{-1}^1 \sum_{s=1}^2 p_{js} A_{is} \ln[z_s(\xi) - y_s^l] \phi_m J^k d\xi \right], \quad (\text{A2.5})$$

and hence another complex expression I_s must be evaluated, namely

$$I_s = \int_{-1}^1 \ln[z_s(\xi) - y_s^l] \phi_m J^k d\xi. \quad (\text{A2.6})$$

In the singular case, if $l \in k$ then the integral I_s becomes improper but after some manipulation it can be calculated using the following integral:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta. \quad (\text{A2.7})$$

A specific Gaussian quadrature suitable for computing the integral (A2.7) is further employed, namely

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta \approx \sum_{k=1}^n w'_k f(\eta'_k), \quad (\text{A2.8})$$

where w'_k are weight coefficients and η'_k is the coordinate for the quadrature, see Brebbia *et al.* [3].

APPENDIX C

EVALUATION OF NEW INTEGRATION CONSTANTS OF THE SENSITIVITY EQUATION

The new expressions which appear when computing $\delta h_{ij}^m(l, k)$ (5.23) involve integrals of the form

$$I_s = \int \left[-\frac{x_2(\xi) - x_2^l}{(z_s(\xi) - y_s^l)^2} (\mu_s n_1 - n_2) + \frac{n_1}{z_s(\xi) - y_s^l} \right] \phi_m J^k d\xi \quad (\text{A3.1})$$

Although they seem to be singular or hypersingular, they are not. If their nuclei are developed, it is easy to prove how infinite terms cancel, whether the collocation point belongs to the evaluation element or not.

In the case of the constants $\delta g_{ij}^m(l, k)$ (5.24), two kinds of integrals appear. First, logarithmic ones, which are solved as in Appendix A (A2.8). And secondly, there are new expressions with the form:

$$I_s = \int \frac{x_2(\xi) - x_2^l}{z_s(\xi) - y_s^l} \phi_m J^k d\xi \quad (\text{A3.2})$$

which are regular in both, ordinary and singular cases.

APPENDIX D

ANALYTICAL MATERIAL SENSITIVITY FOR CAVITIES AND INCLUSIONS IN AN INFINITE PLANE

The first case treated is an anisotropic infinite plate, with loads and geometry establishing a *plane stress* state. We consider an elliptic cavity inside, which boundary is subjected to a uniform internal traction, forming an angle φ with the horizontal axis (see figure (5.1)).

Below, the analytical expressions for the normal stress, σ_n , and horizontal displacement, u_1 , along the boundary of the cavity, are detailed. The angle θ is the position angle and φ is the inclination of the uniform load P , both referenced to the horizontal axis. a and b are horizontal and vertical half-axes of the ellipse.

$$\frac{\sigma_n}{P} = \Re \left[\frac{B}{AC} \left\{ b^2 \cos^2 \theta (a\mu_1\mu_2 \sin \varphi \sin \theta - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \varphi (b\mu_1\mu_2 \cos \theta - a(\mu_1 + \mu_2) \sin \theta)) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2ab \sin \theta \cos \theta (b\mu_1\mu_2 \sin \varphi \cos \theta + a \cos \varphi \sin \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. a^2 \sin^2 \theta (b \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi (b(\mu_1 + \mu_2) \cos \theta - a \sin \theta)) \right\} \right]$$

$$\frac{u_1}{P} = -\Im [B(\cos \varphi (a_{16} - a_{11}(\mu_1 + \mu_2)) + \sin \varphi (a_{12} - a_{11}\mu_1\mu_2))]$$

where,

$$\begin{aligned} A &= b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \\ B &= (b \cos \varphi + ia \sin \varphi)(\cos \theta - i \sin \theta) \\ C &= (b\mu_1 \cos \theta - a \sin \theta)(b\mu_2 \cos \theta - a \sin \theta) \end{aligned}$$

The second case studied is an elliptic core inserted in a plate. The core is soldered without negative allowance. Two possibilities are considered, one with an elastic core whose compliance constants are twice those of the matrix. The second is an absolutely rigid inclusion. In both cases, the plate is under remote horizontal loading P . Since the complete expressions are very unwieldy, only normal stresses on the boundary of the inclusion are shown, and for a particular case: matrix and core are orthotropic, material axes are parallel

to the cartesian ones, and the horizontal and vertical half-axes of the ellipse are $a = 2$ and $b = 1$

In the elastic core case, normal stresses along the interface are,

$$\frac{\sigma_n}{P} = \frac{1}{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} \left\{ \cos^2 \theta \left(1 + 2\Re \left[\frac{(I + \mu_1 J)\mu_2^2}{K} - \frac{(I + \mu_2 J)\mu_1^2}{L} \right] \right) - \right. \\ \left. - 8 \sin \theta \cos \theta \Re \left[\frac{(I + \mu_1 J)\mu_2}{K} - \frac{(I + \mu_2 J)\mu_1}{L} \right] + \right. \\ \left. 8 \sin^2 \theta \Re \left[\frac{I + \mu_1 J}{K} - \frac{I + \mu_2 J}{L} \right] \right\}$$

and for the rigid one,

$$\frac{\sigma_n}{P} = \frac{1}{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} \left\{ \cos^2 \theta \left(1 + 2\Re \left[\frac{(Q + \mu_1 R)\mu_2^2}{S} - \frac{(Q + \mu_2 R)\mu_1^2}{T} \right] \right) - \right. \\ \left. - 8 \sin \theta \cos \theta \Re \left[\frac{(Q + \mu_1 R)\mu_2}{S} - \frac{(Q + \mu_2 R)\mu_1}{T} \right] + \right. \\ \left. 8 \sin^2 \theta \Re \left[\frac{Q + \mu_1 R}{S} - \frac{Q + \mu_2 R}{T} \right] \right\}$$

where

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{2a_{12}}{a_{11}} + 2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{a_{66}}{a_{11}}}}, \quad B = \frac{2a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}}, \quad C = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}a_{11}}} \\ D &= \frac{1}{a_{66}} \left(2 \left(5a_{12}C + 4a_{11}\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} + a_{12}(1 - 4C) + a_{22}(-2a_{12} + 4a_{11}A) \right) \right) \\ E &= 2 + \frac{2}{a_{66}} (a_{12} + a_{11}B + \sqrt{a_{11}a_{22}}A) \quad F = \frac{2}{a_{66}} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (2 + A) \\ G &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \quad H = -2 \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \right) \\ I &= 1 - \frac{2a_{12} + 2a_{66} + 4Aa_{11} + 2Ba_{11} + Fa_{11}a_{66}}{a_{66}(D + E)} \\ J &= \frac{2i(4 + A - (2 + A)(1 - C))}{-(2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} - 2A)(4 + A) + (1 - C)H} \\ K &= (\mu_1 - \mu_2)(2i(G - 1) + (G + 1)\mu_2) \quad L = (\mu_1 - \mu_2)(2i(G - 1) + (G + 1)\mu_1) \\ M &= \frac{2a_{12}}{a_{66}}(1 + C) \quad N = \frac{2}{a_{66}}(a_{66} - a_{12} + a_{11}B) \quad O = 2 \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \right) \\ Q &= 1 - \frac{2}{a_{66}(M + N)} (a_{12} + a_{66} + a_{11}(A + B)) \\ R &= \frac{2i(A - (2 + A)(1 + C))}{2A^2 + (1 + C)O} \\ S &= \frac{1}{a_{66}}(\mu_1 - \mu_2)(2i(a_{66} - 1) + (a_{66} + 1)\mu_2) \\ T &= \frac{1}{a_{66}}(\mu_1 - \mu_2)(2i(a_{66} - 1) + (a_{66} + 1)\mu_1) \end{aligned}$$

To obtain the stress and displacement material sensitivities, these expressions are differentiated with respect to the compliance constants. The resultant expressions are not shown for being rather unwieldy.

APPENDIX E

ANALYTICAL EXPRESSIONS TO COMPUTE DISPLACEMENTS IN AN INFINITE ANISOTROPIC DOMAIN WITH UNIFORM STRESS STATE

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11} = & \frac{a_{11}(\mathfrak{J}(\mu_1+\mu_2)(\mathfrak{J}^2(\mu_1)-2\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{J}(\mu_2)+\mathfrak{J}^2(\mu_2)+\mathfrak{R}^2(\mu_1-\mu_2))\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(\sigma_{11}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{12}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\
& + \frac{\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{12}-\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{J}(\mu_2)\sigma_{22}+\mathfrak{R}(\mu_1)(\sigma_{12}+\mathfrak{J}(\mu_2)\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2}
\end{aligned} \tag{A5.1}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{12} = & \frac{a_{16}\sigma_{11}(0.5|\mu_1-\mu_2|^2+\mathfrak{J}^2(\mu_1)-2\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{J}(\mu_2)+\mathfrak{J}^2(\mu_2)+\mathfrak{R}^2(\mu_1)-2\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)+\mathfrak{R}^2(\mu_2))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\
& + \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(a_{12}\sigma_{12}+0.5(a_{66}\sigma_{12}+a_{26}\sigma_{22}))+a_{11}(-\mathfrak{R}^3(\mu_1)\sigma_{11}+\mathfrak{R}^2(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{11}+\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}^2(\mu_2)\sigma_{11})}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\
& + \frac{-\mathfrak{R}^3(\mu_2)\sigma_{11}-\mathfrak{J}^2(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2)\sigma_{11}-\mathfrak{J}^2(\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2)\sigma_{11}-|\mu_1-\mu_2|^2\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{12}}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\
& + \frac{|\mu_1-\mu_2|^2\mathfrak{J}(\mu_2)(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{22})+\mathfrak{J}(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)(2\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{11}+2\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2\sigma_{12}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\
& + \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2}
\end{aligned} \tag{A5.2}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{21} = & \frac{0.5a_{16}|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(0.5a_{66}|\mu_1|^2|\mu_2|^2\sigma_{12}+a_{12}|\mu_1|^2|\mu_2|^2\sigma_{12})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
& + \frac{a_{26}(0.5|\mu_1|^2|\mu_2|^2+|\mu_1|^2|\mu_2|^2)\sigma_{22}+a_{22}(|\mu_1|^2(\mathfrak{J}(\mu_2)(\mathfrak{R}(\mu_1)-2\mathfrak{R}(\mu_2))+\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2))\sigma_{11})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
& + \frac{|\mu_2|^2(\mathfrak{J}(\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_1)+\mathfrak{J}(\mu_1)-2(\mathfrak{R}(\mu_1)+\mathfrak{R}(\mu_2)))\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(\mathfrak{J}(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)+|\mu_2|^2)\sigma_{12})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
& + \frac{\mathfrak{J}^2(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)\sigma_{12}-\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22})+\mathfrak{R}(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{12}-\mathfrak{J}^2(\mu_2)\sigma_{22}-\mathfrak{R}(\mu_2)(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2))\sigma_{22})))}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2}
\end{aligned} \tag{A5.3}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{22} = & \frac{a_{12}|\mu_1|^2|\mu_2|^2(|\mu_1-\mu_2|^2-\Im^2(\mu_1)+2\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)-\Im^2(\mu_2)-\Re^2(\mu_1)+2\Re(\mu_1)\Re(\mu_2)-\Re^2(\mu_2))+\sigma_{11}}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(a_{26}|\mu_1|^2|\mu_2|^2-a_{16}|\mu_1|^2|\mu_2|^2)\sigma_{12}+a_{22}(|\mu_1|^2(-\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)+\Im^2(\mu_2))+\Re(\mu_1-\mu_2)\Re(\mu_2))\sigma_{11}}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{|\mu_2|^2(\Im^2(\mu_1)\sigma_{11}-\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)\sigma_{11}-\Re^2(\mu_1)\sigma_{11}+\Re(\mu_1)\Re(\mu_2)\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2\sigma_{22})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(\Im^2(\mu_2)(\Re(\mu_1)\sigma_{12}+\Im(\mu_1)\sigma_{22})+\Im(\mu_2)(\Re(\mu_1)\sigma_{12}+\Im^2(\mu_1)\sigma_{22}+\Re^2(\mu_1)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{\Re(\mu_2)(\Im^2(\mu_1)\sigma_{12}+\Re(\mu_1)\Re(\mu_1+\mu_2)\sigma_{12}+\Im(\mu_1)(\sigma_{12}+\Re(\mu_2)\sigma_{22})))}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2}
\end{aligned} \tag{A5.4}$$

Bibliography

- [1] Lekhnitskii, S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Mir Publishers: Moscow, 1981.
- [2] Mase, G.E. *Teoría y problemas de mecánica del medio continuo*. McGraw-Hill, serie Schaum: Méjico 1978.
- [3] Brebbia, C.A., Domínguez, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [4] París, F., Cañas, J. *Boundary Element Method. Fundamentals and Applications*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press: New York, 1997.
- [5] Dennis, J.E., Schnabel, R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations*. SIAM: Philadelphia 1996.
- [6] Isaacson, E., Keller, H.B. *Analysis of numerical methods*. John Wiley and Sons: New York, 1966.
- [7] Nocedal, J., Wright, S.J. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag: New York, 1999.
- [8] Sollero, P. *Fracture Mechanics Analysis of Anisotropic Laminates by the Boundary Element Method*. PhD thesis. Wessex Institute of Technology: UK, 1994.
- [9] Sáez, A., Domínguez, J. General traction BE formulation and implementation for 2-D anisotropic media. In *Proceedings Mit Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics 1*. Boston, USA, 2001. Published by Elsevier Science London. 449 – 451.
- [10] Schnur, D.S., Zabarás, N. An inverse method for determining elastic material properties and a material interface, *International Journal for numerical methods in engineering* 1992; **33**:2039 – 2057.
- [11] Mallardo, V., Alessandri, C. Inverse problems in the presence of inclusion and unilateral constraints: a boundary element approach. *Computational Mechanics* 2000; **26**: 571 – 581.
- [12] Heyliger, P., Ugander, P., Ledbetter, H. Anisotropic elastic constants: measurement by impact resonance. *Journal of materials in civil engineering*, September-October 2001; **13**(5):356 – 363
- [13] Wang, W.T., Kam, T.Y. Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates. *Journal of engineering mechanics*, November, 2001; **127**(11):1117 – 1123
- [14] Knops, R.J., Payne, L.E. *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*. Springer Verlag: Berlin, 1972.
- [15] Hadamard, J. *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Oxford University Press: London, 1923.

- [16] Beck, J.V., Blackwell, B., St Clair, C.R. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. Wiley-Interscience: New York, 1985.
- [17] Ikehata, M. How to draw a picture of an unknown inclusion from boundary measurements. Two mathematical inversion algorithms. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems* 1999; 7:255 – 271.
- [18] Colton, D., Kress, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*. Springer Verlag: Berlin, 1992.
- [19] Kubo, S. Inverse problems related to the mechanics and fracture of solids and structures. *JSME International Journal* 1988; 31:157 – 166.
- [20] Chen, J.T., Chen, K.H. Analytical study and numerical experiments for Laplace equation with overspecified boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling* 1998; 22:703 – 725.
- [21] Maniatty, A., Zabarar, N., Stelson, K. Finite element analysis of some elasticity problems. *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE* 1989; 115:1302 – 1316.
- [22] Zabarar, N., Morellas, V., Schnur, D. Spatially regularized solution of inverse elasticity problems using the BEM. *Communications in Applied Numerical Methods* 1989; 5:547 – 553.
- [23] Schnur, D. Zabarar, N. Finite element solution of two-dimensional elastic problems using spatial smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1990; 30:57 – 75.
- [24] Yeih, W.C., Koya, T., Mura, T. An inverse problem in elasticity with partially overspecified boundary conditions. I. Theoretical approach. *Transactions ASME Journal of Applied Mechanics* 1993; 60:595 – 600.
- [25] Koya, T., Yeih, W.C., Mura, T. An inverse problem in elasticity with partially overspecified boundary conditions. II. Numerical details. *Transactions ASME Journal of Applied Mechanics* 1993; 60:601 – 606.
- [26] Marin, L., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2001; 25:783 – 793.
- [27] Marin, L., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. An alternating boundary element algorithm for a singular Cauchy problem in linear elasticity. *Computational Mechanics* 2002; 28:479 – 488.
- [28] Huang, C.H., Shih, W.Y. A boundary element based solution of an inverse elasticity problem by conjugate gradient and regularization method. In *Proceedings of the 7th International Offshore Polar Engineering Conference*. Honolulu, USA, 1997; 383 – 395.
- [29] Marin, L., Háo, D.N., Lesnic, D. Conjugate gradient-boundary element method for the Cauchy problem in elasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 2002; 55:227 – 247.

- [30] Marin, L., Lesnic, D. Regularized boundary element solution for an inverse boundary value problem in linear elasticity. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 2002; **18**:817 – 825.
- [31] Marin, L., Lesnic, D. Boundary element solution for the Cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; **191**:3257 – 3270.
- [32] Marin, L., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. Boundary element regularisation methods for solving the Cauchy problem in linear elasticity. *Inverse Problems in Engineering* 2002; **10**:335 – 357.
- [33] Marin, L., Elliot, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. Parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2003; **28**:221 – 233.
- [34] Marin, L., Lesnic, D. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures* 2004; **41**:3425 – 3438.
- [35] Marin, L., Lesnic, D. Boundary element-Landweber method for the Cauchy problem in linear elasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics* 2005; In press.
- [36] Lavrent'ev, M.M. *Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*. Izdet. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR: Novosibirsk, 1962. In Russian.
- [37] Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y. *Methods for Solving Ill-Posed Problems*. Nauka: Moscow, 1986.
- [38] Bakushinsky, A., Goncharsky, A. *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Kluwert Academic: Dordrecht, 1994.
- [39] Morozov, V.A. *Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Nauka: Moscow, 1986.
- [40] Kozlov, V.A., Maz'ya, V.G., Fomin, A.F. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 1991; **31**:45 – 52.
- [41] Brebbia, C.A., Telles, J.F.C., Wrobel, L.C. *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag: London, 1984.
- [42] Lions, J.L., Magenes, E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Their Applications*. Springer Verlag: New York-Heidelberg, 1972.
- [43] Comino, L., Gallego, R. Material constant sensitivity boundary integral equation for anisotropic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; Accepted for publication.
- [44] Mera, N.S., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. The effect of a variable relaxation factor on the rate of convergence in the Cauchy problem. In *Boundary Element Techniques*, Aliabadi, M.H. (ed.). Queen Mary and Westfield College, Univ. of London, London, 1999; 357 – 366.
- [45] Fichera, G. Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace. *Boll. Un. Mat. Ital.* 1952; **7**:367 – 377.

- [46] Schiavone, P. Mixed problem in the theory of elastic plates with transverse shear deformation. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1997; **50**:239 – 249.
- [47] Wendland, W.L., Stephan, E., Hsiao, G.C. On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem for the Laplacian. *Mathematical Methods in Applied Science* 1979; **1**:265 – 321.
- [48] Johansson, T. An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations. *Mathematische Nachrichten* 2004; **272**:46 – 54.
- [49] Morozov, V.A. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet. Math. Dokl.* 1966; **167**:414 – 417.
- [50] Golub, G.H. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1977; **14**:651 – 667.
- [51] Hansen, P.C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM: Philadelphia, 1998.
- [52] Constantinescu, A. On the identification of elastic moduli of laminated plate. In *Proceedings of the International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Tanaka, M. and Dulikravich, G.S. (ed.). Elsevier, New York 1998; 115 – 6
- [53] Engl, H.W., Hanke, M., Neubauer, A. *Regularization of Inverse Problem*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1996.
- [54] Engl, H.W., Louis, A.K., Rundell, W. editors. *Inverse Problem in Medical Imaging and Nondestructive Testing*. Springer, Wien, New York 1996.
- [55] Huang, L., Sun, X., Liu, Y., Cen, Z. Parameter identification for two-dimensional orthotropic material bodies by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2003; **28**(2):109 – 121.
- [56] Ikehata, M. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 1990; **50**:1635 – 1644.
- [57] Kirsch, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer Verlag, New York 1996.
- [58] Lauwagie, T., Sol, H., Roebben, G., Heylen, W., Shi, Y., Van der Biest, O. Mixed numerical-experimental identification of elastic properties of orthotropic metal plates. *NDT&E International* 2003; **36**:487 – 495.
- [59] Lin, Z. On the determination of radially dependent Lamé coefficients. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 1998; **58**:875 – 903.
- [60] Liu, G.R., Han, X., Lam, K.Y. A combined genetic algorithm and nonlinear least squares method for material characterization using elastic waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; **191**:1909 – 1921.
- [61] Ramm, A.G. editor. *Inverse Problems: Mathematical and analytical techniques with applications to Engineering*. Springer Verlag: New York, 2005.

- [62] Rus, G., Gallego, R. Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2002; **26**:315 – 327.
- [63] Wang, W.T., Kam, T.Y. Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates. *Journal of Engineering Mechanics* 2001; **127**(11):1117 – 1123.
- [64] Eschenauer, H.A., Kobelev, V.V., Schumacher, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization* 1994; **8**:42 – 51.
- [65] Gallego, R., Rus, G. Identification of cracks and cavities using the topological sensitivity boundary integral equation. *Computational Mechanics* 2004; **33**.
- [66] Haataja, J. Matlab function for simulating a simple real-coded genetic algorithm. Center for Scientific Computing, Box 405, FIN-02101 Espoo. Internet: Juha.Haataja@csc.fi, 2000.
- [67] Koguchi, H., Watabe, H. Improving defects search in structure by boundary element and genetic algorithm scan method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 1997; **19**:105 – 116.
- [68] Kowalckzyk, T., Fukukawa, T., Yoshimura, S., Yagawa, G. *An extensible evolutionary algorithm approach for inverse problems*. In *Proc. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics ISIP 1998*. Tanaka, M., Dulikravich, G.S. et al. eds. Nagano, Japan, 1998; 541 – 550.
- [69] Sokołowski, J., Żochowski, A. *On topological derivative in shape optimization*, Rapport de Recherche 3170, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1997.
- [70] Stavroulakis, G.E. *Inverse and crack identification problems in engineering*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht 2001.
- [71] Stavroulakis, G.E. Antes, H. *Crack detection in elastostatics and elastodynamics. a BEM modelling - neural network approach*. In *Proc. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics ISIP 1998*. Tanaka, M., Dulikravich, G.S. et al. eds. Nagano, Japan, 1998; 81 – 90.
- [72] Stavroulakis, G.E. Antes, H. Flaw identification in elastomechanics: BEM simulation with local and genetic optimization. *Structural Optimization*, 1998; **16**:162 – 175.
- [73] Tanaka, M., Nakamura, M. *Application of genetic algorithm to plural defects identification*. In *Proc. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics ISIP 1994*. Bui, H., Tanaka, M. et al. eds. Rotterdam, The Netherlands, 1994; 377 – 382.
- [74] , Sokołowski, J., Zochowski, A. Topological derivatives for elliptic equations. *Inverse Problems*, 1999; **15**:123 – 134.
- [75] Jackowska-Strumilo, L., Sokolowski, J., Zochowski, A. *The topological derivative method and artificial neural networks for numerical solution of shape inverse problems*. INRIA 1999, 3739.
- [76] Rus, G. *Métodos numéricos para la detección no destructiva de defectos* PhD thesis. Grupo de Mecánica de Sólidos y Estructuras, University of Granada 2001.

- [77] Bonnet, M. Regularized BIE formulations for first and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures*, 1995; **56**:799 – 811.
- [78] Bonnet, M. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engineering Analysis with BEM*, 1995; **15**:121 – 126 ed. Elsevier.
- [79] Bonnet, M. Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal cracks using BIE and adjoint variable approach. *International Journal of Solids and Structures*, 2002; **39**:2365 – 2385, ed. Pergamon.
- [80] Gallego, R., Suarez, J. Numerical solution of the variation boundary integral equations for inverse problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000; **49**(4):501 – 518.
- [81] Petrycandand, H., Mroz, Z. Time derivatives of integrals functionals defined on varying volume and surface domains. *Arch. Mech.*, 1986; **38**:1579 – 95.
- [82] Menke, W. *Geophysical data analysis, Discrete Inverse Theory*. Academic Press INC., 1984.
- [83] Dennis, J.E. Jr., Gay, D.M., Welsch, R.E. Algorithm 573 NL2SOL - An adaptive Non-linear Least-Squares Algorithm [E4]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1981; **7**(3):369 – –383.
- [84] Bonnet, M., Constantinescu, A. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 2005; **21**(2):R1–R50.
- [85] Bonnet, M. Regularized BIE formulations for first and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers & Structures*, 1995; **56**:799 – 811.
- [86] Burczynski, T. Recent Advances in Boundary Element Approach to Design Sensitivity Analysis - a Survey. *Design Sensitivity Analysis*. Eds. M.Kleiber and T.Hisada. Atlanta Technology Publications: Atlanta, 1993;1 – 25
- [87] Barone, M.R., Yang, R.J. A boundary element approach for recovery of shape sensitivities in three-dimensional elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989;**74**:69 – 82.
- [88] Mellings, S.C., Aliabadi, M.H. Flaw identification using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995;; **38**:399 – 419.
- [89] Matsumoto, T., Tanaka, M., Miyigawa, M., Ishii, N. Optimum design of cooling lines in injection moulds by using boundary element design sensitivity analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1993; **14**:177 – 186.
- [90] Aithal, R., Saigal, S. Shape sensitivity in thermal problems using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995; **15**:115 – 120.
- [91] Burczynski, T., Kane, J.H., Balakrishna, C. Shape design sensitivity analysis via material derivative–adjoint variable technique for 3-D and 2-D curved boundary elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1995; **38**:2839 – 2866.
- [92] Lewinski, T., Sokolowski, J. *Topological derivative for nucleation of non-circular voids*. INRIA 1997, 3798.

- [93] Garreau, S., Duillaume, P.H., Massmoudi, M. The topological asymptotic for the PDE systems: the elasticity case, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001; **39**(6):1756 – 1778.
- [94] Choi, J.O., Kwak, B.M. Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1998; **26**:1579 – 1595.
- [95] Meric, R.A. Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995; **15**:181 – 188.

IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS EN PROBLEMAS ANISÓTROPAS ELASTOSTÁTICAS BASADA EN EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

TESIS DOCTORAL

Autora
Lucía Comino Mateos

Director
Rafael Gallego Sevilla

Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica ,
Universidad de Granada. España
lcomino@ugr.es tlf: +34958249431 fax: +34958249959
Granada (España)

Abril 2005

© Copyright 2005: Rafael Gallego Sevilla, Lucía Comino Mateos

ISBN:

Depósito legal: GR-

Imprime: Plácido Cuadros S. L.

Editor: Rafael Gallego Sevilla

Primera impresión: Abril de 2005

A mi familia

Agradecimientos

Quiero expresar mi gratitud a personas que me han ayudado en todos los sentidos a lo largo de todo el tiempo..., que no ha sido poco, en el que he estado trabajando para elaborar esta tesis doctoral.

En primer lugar, al Prof. Rafael Gallego Sevilla, que confió en mi desde el primer momento. Él me ha transmitido la gran mayoría de los conocimientos que he adquirido, siempre que lo he necesitado he tenido su ayuda, y me animado a seguir en los momentos difíciles.

En segundo lugar, al Dr. Guillermo Rus, cuya tesis ha sido para mi un manual de referencia. Gran experto en el tema, ha estado siempre a mi disposición y contestado pacientemente a todas mis dudas .

También quiero agradecerles al Prof. Marc Bonnet (École Polytechnique, Francia) y al Dr. Liviu Marin (University of Leeds, Reino Unido) sus colaboraciones, habiendo contribuido directamente en dos capítulos de esta tesis.

Quiero hacer especial mención al Dr. Lionel Elliot, que me dió la oportunidad de realizar una estancia investigadora muy provechosa en la Universidad de Leeds (Reino Unido). Pero sobretodo quiero resaltar mi cariño hacia su persona por toda la amabilidad y hospitalidad que ha derrochado siempre conmigo.

Por último, pero no menos importante, agradecer a todos mis amigos que siempre me han apoyado, en los buenos y malos momentos, y sin los cuales no habría podido terminar este trabajo. Quiero mencionar en particular a mis compañeros Juan José Granados y Esther Puertas y por supuesto... a Encarna.

Índice

Agradecimientos	iii
I PRELIMINARES	1
Capítulo 1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 JUSTIFICACIÓN DE LA TESIS	3
1.2 OBJETIVOS	4
Capítulo 2 ESTADO DEL ARTE	7
2.1 PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY	7
2.2 PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL	10
2.3 PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE DEFECTOS	11
2.3.1 Método Estado Adjunto	11
2.3.2 Derivada Topológica	12
Capítulo 3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	15
3.1 ELASTICIDAD ANISÓTropa	15
3.1.1 Ecuaciones básicas para la elasticidad lineal anisótropa	15
3.1.2 Definición del problema elástico anisótropo	16
3.2 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO	20
3.2.1 Solución Fundamental Anisótropa	20
3.2.2 Ecuación Integral en el Contorno	21
3.2.3 Discretización del Problema	22
3.3 PROBLEMA INVERSO	24
3.3.1 Definición	24
3.3.2 Estrategias para resolver Problemas Inversos	24
II CONTRIBUCIONES	27
Capítulo 4 PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY	29
4.1 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY EN ELASTICIDAD ANISÓTropa BIDIMENSIONAL	29

4.2	DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO	30
4.3	EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO	32
4.4	RESULTADOS NUMÉRICOS	33
4.4.1	Ejemplos	33
4.4.2	Tanteo inicial	34
4.4.3	Convergencia del algoritmo	35
4.4.4	Factor de relajación variable	40
4.4.5	Criterio de parada	42
4.4.6	Estabilidad del algoritmo	44
Capítulo 5	PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL	47
5.1	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	47
5.2	ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN	48
5.3	SENSIBILIDAD MATERIAL DE LA ECUACIÓN INTEGRAL EN EL CON- TORNIO	49
5.3.1	Derivadas de la solución fundamental	50
5.3.2	Discretización de la ecuación integral de la sensibilidad	52
5.3.3	Evaluación de las constantes de integración de la ecuación de la sensi- bilidad	52
5.3.4	Sensibilidad material de las deformaciones y tensiones en puntos in- ternos y del contorno	53
5.4	TESTS NUMÉRICOS DE LA SENSIBILIDAD	54
5.4.1	Placa infinita con cavidad elíptica con presión interna	54
5.4.2	Inclusión elíptica en una placa con carga remota	56
5.5	DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS: UNICIDAD DE SOLUCIÓN	60
5.6	TESTS NUMÉRICOS PARA EL PROBLEMA INVERSO	62
5.6.1	Definición de los tests	62
5.6.2	Resultados	63
Capítulo 6	PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN: MÉTODO DE LA VARI- ABLE ADJUNTA	69
6.1	DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN	69
6.2	SENSIBILIDAD GEOMÉTRICA	71
6.2.1	Diferenciación Material	71
6.2.2	Método de la Variable Adjunta	72
6.3	PARAMETRIZACIÓN	73
6.4	TESTS DE SENSIBILIDAD	74
6.5	ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN: BFGS	80
6.6	RESULTADOS NUMÉRICOS	81

6.6.1	Mediciones exactas	81
6.6.2	Efecto de datos experimentales con error	82
6.6.3	Efecto de constantes elásticas con error	83
Capítulo 7	PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN BASADO EN LA DERIVADA TOPOLÓGICA	85
7.1	INTRODUCCIÓN	85
7.2	DERIVADA TOPOLÓGICA	85
7.2.1	Derivada Topológica de la Ecuación Integral en el Contorno	86
7.2.2	Derivada topológica de la EIC para cavidades circulares	88
7.2.3	Discretización y resolución de la derivada topológica de la EIC	88
7.3	IDENTIFICACIÓN DE DEFECTOS MEDIANTE LA DERIVADA TOPOLÓ- GICA	89
7.3.1	Estimación del tamaño óptimo del defecto	89
7.3.2	Verificación del tamaño óptimo estimado del defecto	90
7.3.3	Localización del defecto	91
7.3.4	Verificación de la posición del defecto calculada con la derivada topológ- ica	91
7.4	SENSIBILIDAD TOPOLÓGICA ASOCIADA CON ALGORITMOS GENÉTIC- OS	94
7.4.1	Resultados Numéricos	95
III	CONCLUSIONES	103
Capítulo 8	CONCLUSIONES	105
8.1	PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY	105
8.2	PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL	107
8.3	PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN	109
8.3.1	Resolución basada en el Método de la Variable Adjunta	109
8.3.2	Resolución basada en la Derivada Topológica	110
8.4	DESARROLLOS FUTUROS	112
Apéndice A	CÁLCULO DE TENSIONES Y DEFORMACIONES EN PUNTOS INTERI- ORES	113
Apéndice B	EVALUACIÓN DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACIÓN	115
Apéndice C	EVALUACIÓN DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA SENSIBILIDAD	117

Apéndice D SENSIBILIDAD MATERIAL ANALÍTICA PARA CAVIDADES E INCLUSIONES EN UN PLANO INFINITO	119
Apéndice E EXPRESIONES ANALÍTICAS PARA CALCULAR DESPLAZAMIENTOS EN UN DOMINIO INFINITO ANISÓTROPO CON ESTADO DE TENSIÓN REMOTA UNIFORME	123
BIBLIOGRAFÍA	125

Listado de tablas

7.1	Diseño del algoritmo genético	95
-----	---	----

Listado de figuras

3.1	Cuerpo elástico anisótropo homogéneo	17
4.1	Errores de precisión (a) E_u , y (b) E_t , en función del número de iteraciones, k , obtenidos usando $N_e = 32$ ($- \circ -$), $N_e = 48$ ($- - -$) y $N_e = 96$ ($- \times -$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1. .	36
4.2	Errores de precisión (a) E_u , y (b) E_t , en función del número de iteraciones, k , obtenidos usando $N_e = 32$ ($- \circ -$), $N_e = 48$ ($- - -$) y $N_e = 96$ ($- \times -$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2. .	37
4.3	(a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}(-)$ y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}(-)$ y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno <i>indefinido</i> Γ_1 , usando $N_e = 32$ ($- \Delta -$), $N_e = 48$ ($- \square -$) y $N_e = 96$ ($- \times -$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , $k = 200$ iteraciones, para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.	39
4.4	(a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}(-)$ y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}(-)$ y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno <i>indefinido</i> Γ_1 , usando $N_e = 32$ ($- \Delta -$), $N_e = 48$ ($- \square -$) y $N_e = 96$ ($- \times -$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , $k = 200$ iteraciones, para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.	40
4.5	(a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}(-)$ y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}(-)$ y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno <i>indefinido</i> Γ_1 , sin considerar factor de relajación ($- \circ -$) y con un factor de relajación variable de amplitud $A = 1.5$ ($- \Delta -$), usando $N_e = 48$ elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.	42
4.6	Errores de precisión (a) E_u , y (b) E_t , en función del número de iteraciones, k , obtenidos usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y diversas cantidades de ruido añadidas a los datos $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ ($- \times -$), $p = 3\%$ ($- - -$) y $p = 5\%$ ($- \circ -$), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.	43

4.7	Error de convergencia $E = \ \mathbf{CX} - \mathbf{F}\ _2$ función del número de iteraciones, k , obtenido usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y diversas cantidades de ruido añadidas a los datos de $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ ($-\times-$), $p = 3\%$ ($- - -$) y $p = 5\%$ ($-\circ-$), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.	44
4.8	(a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ ($-$) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ ($-$) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno <i>indefinido</i> Γ_1 , usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y varios porcentajes de error introducidos en los desplazamientos $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ ($-\square-$), $p = 3\%$ ($-\circ-$) y $p = 5\%$ ($-\times-$), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.	45
4.9	(a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ ($-$) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ ($-$) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno <i>indefinido</i> Γ_1 , usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y varios porcentajes de error introducidos en los desplazamientos $\mathbf{u} _{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ ($-\square-$), $p = 3\%$ ($-\circ-$) y $p = 5\%$ ($-\times-$), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.	46
5.1	Cavidad elíptica en una placa infinita sometida a una presión interior.	55
5.2	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de los desplazamientos horizontales a lo largo de contorno de la cavidad, con respecto a la constante de flexibilidad a_{11} . Ángulo de inclinación de la carga 0° , 30° y 45°	55
5.3	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de los desplazamientos horizontales a lo largo de contorno de la cavidad, con respecto a la constante de flexibilidad a_{12} . Ángulo de inclinación de la carga 0° , 30° y 45°	56
5.4	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de los desplazamientos horizontales a lo largo de contorno de la cavidad, con respecto a la constante de flexibilidad a_{66} . Ángulo de inclinación de la carga 0° , 30° y 45°	56
5.5	Inclusión elíptica de material ortótropo en una placa infinita de material ortótropo, sometida a cargas remotas.	57
5.6	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo elástico, con respecto a la constante de flexibilidad a_{11}	58
5.7	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo elástico, con respecto a la constante de flexibilidad a_{12}	58

5.8	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo elástico, con respecto a la constante de flexibilidad a_{66} .	59
5.9	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo rígido, con respecto a la constante de flexibilidad a_{11} .	59
5.10	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo rígido, con respecto a la constante de flexibilidad a_{12} .	60
5.11	Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo rígido, con respecto a la constante de flexibilidad a_{66} .	60
5.12	Geometría y estados de carga, casos 1-2-3	63
5.13	Minimización de la función de costo con datos experimentales exactos para el ejemplo del caso 1	64
5.14	Minimización de la función de costo con datos experimentales exactos para el ejemplo del caso 2	64
5.15	Minimización de la función de costo con datos experimentales exactos para el ejemplo del caso 3	65
5.16	Minimización de la función de costo con un 2% (izquierda) y 5% (derecha) de error aleatorio en los datos experimentales para el ejemplo del caso 1.	66
5.17	Minimización de la función de costo con un 2% (izquierda) y 5% (derecha) de error aleatorio en los datos experimentales para el ejemplo del caso 2.	66
5.18	Minimización de la función de costo con un 2% de error aleatorio en los datos experimentales para el ejemplo del caso 3, cuatro ejecuciones del programa distintas	66
5.19	Superficie mínima del funcional de costo con 2% error en datos experimentales para el caso 3, con variaciones en a_{11} y a_{66}	67
6.1	Cuerpo elástico anisótropo	69
6.2	Caso 1: placa de material ortótropo con cavidad circular interna, posiciones real y supuesta.	75
6.3	Sensibilidad geométrica respecto al 1 ^{er} parámetro en caso 1: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	75
6.4	Sensibilidad geométrica respecto al 2 ^o parámetro en caso 1: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	76

6.5	Sensibilidad geométrica respecto al 4 ^o parámetro en caso 1: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	76
6.6	Caso 2: placa de material ortótropo con cavidad elíptica interna, posiciones real y supuesta.	77
6.7	Sensibilidad geométrica respecto al 1 ^{er} parámetro en caso 2: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	77
6.8	Sensibilidad geométrica respecto al 2 ^o parámetro en caso 2: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	78
6.9	Sensibilidad geométrica respecto al 4 ^o parámetro en caso 2: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	78
6.10	Caso 3: placa de material ortótropo con cavidad cuadrada interna, posiciones real y supuesta.	79
6.11	Sensibilidad geométrica respecto al 1 ^{er} parámetro en caso 3: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	79
6.12	Sensibilidad geométrica respecto al 2 ^o parámetro en caso 3: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas	80
6.13	Definición de la geometría y estado de carga para los tests.	81
6.14	Identificación de una cavidad con datos experimentales exactos.	82
6.15	Identificación de dos cavidades con datos experimentales exactos.	82
6.16	Identificación de una cavidad con datos experimentales alterados con un 2% y un 5% de error.	83
6.17	Identificación de una cavidad con constantes elásticas alteradas con 2% y un 5% de error.	84
6.18	Evolución del funcional de costo a lo largo del proceso de minimización.	84
7.1	Geometría del problema de referencia.	90
7.2	Correlación entre tamaño estimado y real del radio de la cavidad circular.	91
7.3	Funcional de Costo calculado con la derivada topológica en una placa con una cavidad circular centrada. Datos experimentales considerados: U_x en el lado izquierdo de la placa (izquierda) - P_y en el lado inferior de la placa (centro) - $U_x + P_y$ en ambos lados (derecha).	92
7.4	Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde las constantes elásticas consideradas tienen un 5% de error.	93
7.5	Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde las constantes elásticas consideradas tienen un 10% de error.	93
7.6	Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde los datos experimentales considerados tienen un 5% de error.	93

7.7	Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde los datos experimentales considerados tienen un 10% de error.	94
7.8	Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad elíptica centrada.	94
7.9	Identificación de cavidad circular, considerando datos experimentales exactos.	96
7.10	Identificación de cavidad circular, considerando un 2% error en datos experimentales.	96
7.11	Identificación de cavidad circular, considerando un 5% error en datos experimentales.	96
7.12	Identificación de cavidad circular, considerando un 10% error en datos experimentales.	97
7.13	Identificación de cavidad elíptica, considerando datos experimentales exactos.	97
7.14	Identificación de cavidad elíptica, considerando un 2% error en datos experimentales.	98
7.15	Identificación de cavidad elíptica, considerando un 5% error en datos experimentales.	98
7.16	Identificación de cavidad elíptica, considerando un 10% error en datos experimentales.	98
7.17	Identificación de dos cavidades circulares, considerando datos experimentales exactos de P_x en el lado derecho de la placa, y de U_x en el lado izquierdo de la placa.	99
7.18	Identificación de dos cavidades circulares, considerando datos experimentales exactos de desplazamientos U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.	99
7.19	Identificación de dos cavidades circulares, considerando datos experimentales exactos de P_x en el lado derecho de la placa, de U_x en el lado izquierdo de la placa, y de P_y en el lado inferior.	100
7.20	Identificación de dos cavidades circulares, considerando 1% error en las mediciones de U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.	101
7.21	Identificación de dos cavidades circulares, considerando 2% error en las mediciones de U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.	101
7.22	Identificación de dos cavidades circulares, considerando 5% error en las mediciones de U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.	101
7.23	Identificación de una cavidad elíptica, partiendo de dos cavidades circulares, medidas experimentales exactas tomadas en los cuatro lados de la placa. . . .	102

7.24 Identificación de una sola cavidad circular, partiendo de dos cavidades circulares, medidas experimentales exactas tomadas en los cuatro lados de la placa. 102

Parte I

PRELIMINARES

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 JUSTIFICACIÓN DE LA TESIS

El diseño de componentes mecánicos o estructurales responde cada vez a unos mayores niveles de exigencia impuestos por la Industria. En particular, la búsqueda de materiales avanzados cuyo diseño pueda adaptarse para proporcionar una respuesta estructural adecuada en cualquier aplicación particular, con una relación peso/propiedades resistentes ajustada, ha supuesto uno de los mayores retos de la ingeniería. Este es el caso de los materiales compuestos o *composites*, cuyas propiedades resistentes no son isótropas. Su uso se ha extendido ampliamente en los últimos cincuenta años, desde la industria aeronáutica, espacial, automovilística, ingeniería civil o hasta aplicaciones tan variadas como el deporte.

La precisa definición del comportamiento de estos elementos es imprescindible para la correcta predicción de su funcionamiento o vida útil. De ahí la importancia de conocer con exactitud las propiedades elásticas del material que lo componen, las condiciones de contorno en las que se encuentran, así como la existencia de defectos en su interior. La presencia de los mismos, inevitable en la práctica, altera de manera drástica la distribución de tensiones bajo unas cargas dadas. Se propone pues, en un segundo paso, la detección del tipo de defectos posibles, constantes elásticas o demás parámetros del modelo del elemento, todo ello a la vista de su comportamiento ante excitaciones controladas. Este es el fundamento de las técnicas de experimentación no destructiva. Desde el punto de vista teórico, la obtención de parámetros de un sistema (propiedades del material, huecos internos, condiciones de contorno no accesibles, etc.) a partir de la respuesta ante excitaciones conocidas es lo que se denomina Problema Inverso (PI). Para la resolución de estos problemas, se necesitan potentes herramientas numéricas ya que suponen la resolución de numerosos problemas directos. Entre las de uso más extendido contamos con el Método de los Elementos Finitos, las Diferencias Finitas, y muy ventajosa en ciertos casos pero no tan desarrollada aún, el Método de los Elementos de Contorno.

Sin embargo, la literatura dedicada a materiales anisótropos es escasa, quizás por lo tedioso de su estudio debido a la complejidad de su formulación. Por tanto se hace cada vez más patente la necesidad de desarrollar e implementar herramientas numéricas para la resolución de estos problemas inversos anisótropos. Este es el motivo que ha impulsado este

trabajo, que contribuirá al desarrollo y aplicación de las técnicas de evaluación no destructiva en los nuevos materiales.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo principal de este trabajo es el estudio de una serie de Problemas Inversos que surgen en la Ingeniería mecánica del sólido y afines, haciendo especial hincapié en el uso del Método de los Elementos de Contorno.

En un problema directo calculamos la respuesta de un sistema a partir de un modelo definido por su geometría, condiciones de contorno y cargas a las que está sometido, propiedades mecánicas y leyes de comportamiento del material que lo compone. Cuando alguno de estos datos es desconocido, pero a cambio tenemos información adicional sobre el comportamiento del modelo ante unas excitaciones conocidas, estamos ante un *Problema Inverso*. En concreto, en este trabajo de investigación se busca el desarrollo de ecuaciones y algoritmos aplicables a sólidos bidimensionales de materiales elásticos anisótropos, sometidos a una excitación estática, para la resolución de los siguientes problemas inversos:

- Problema Inverso de Cauchy, problema que surge en situaciones en las que en parte del sólido desconocemos las condiciones de contorno, en cambio en el resto desplazamientos y tensiones son conocidas.
- Problema Inverso de propiedades del material, en el que se desconocen a priori las constantes elásticas del material isótropo o no.
- Problema Inverso de identificación, en el que parte de la geometría es desconocida, en concreto hablamos de defectos interiores como cavidades e inclusiones rígidas o elásticas.

Para conseguir este propósito resumimos a continuación las contribuciones que se han hecho al estado del arte.

- Revisión de las estrategias existentes para la resolución de problemas inversos, destacando ventajas e inconvenientes de cada una y estudiando la aplicabilidad a los distintos problemas que se presentan.
- Análisis en profundidad de aspectos computacionales cruciales en estos problemas, por ejemplo el cálculo de la derivada o sensibilidad de un magnitudes del problema o de un funcional, con respecto a la incógnita concreta en cada problema inverso. Habrá que investigar la técnica de derivación más adecuada en cada caso, en particular se usarán:
 - derivación directa en el caso de derivación con respecto a las constantes del material;
 - derivación por medio del *método de la variable adjunta* en el problema inverso de identificación;
 - derivada topológica también usada para detección de defectos en un sólido.

Además se compararán los resultados obtenidos con los calculados mediante otros métodos de diferenciación numérica como las *derivadas finitas* o con expresiones analíticas, cuando fuera posible.

- Otro punto clave en la resolución de problemas inversos es la elección del método de minimización. Se compararán los algoritmos más interesantes y eficaces, intentando adecuar su aplicación para cada caso concreto. Se considerarán en el estudio tanto métodos de orden cero como los Algoritmos Genéticos, así como métodos de pseudo-segundo orden como Levenberg-Marquardt, o el método quasi-newtoniano BFGS, o algoritmos de resolución iterativa como el propuesto por Kozlov et al.[40].
- Las formulaciones desarrolladas estarán basadas en el Método de los Elementos de Contorno, aprovechando las ventajas que posee frente a otros métodos de resolución aproximada.
- Se implementarán todos los métodos de resolución propuestos con códigos informáticos para así poder comprobar su validez con aplicaciones numéricas. Dichos ejemplos serán lo más realistas posible para lo cual se introducirán errores en los datos de entrada y en las mediciones experimentales simuladas. Además se analizarán distintos aspectos como la distancia inicial a la solución real, tamaño de los defectos, cantidad necesaria de información experimental... y se estudiará su influencia en la convergencia y estabilidad de los métodos.

CAPÍTULO 2

ESTADO DEL ARTE

Cuando resolvemos problemas de la mecánica del sólido, uno normalmente trata con sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, nos referimos a las ecuaciones de equilibrio que deben ser resueltas una vez que son conocidas la geometría del dominio en estudio, las propiedades del material, las cargas externas a las que está sometido el sólido y las condiciones de contorno e iniciales. Estos son los que conocemos como *problemas directos* y su cualidad de problemas *bien planteados* está claramente establecida, (ver Knops and Payne [14]). Cuando una o más de los datos necesarios para resolver el problema directo, son parcial o totalmente desconocidos, entonces nos encontramos ante un *problema inverso*. Éste puede ser reformulado, para la determinación de las incógnitas, a partir de especificaciones o medidas de la respuesta del sistema. Los PIs son considerados como *mal planteados* ya que no se cumplirán las condiciones de existencia, unicidad y continuidad de la solución. Además son generalmente inestables, ver e.g. Hadamard [15], en el sentido que pequeños errores en las mediciones de los datos de entrada, puede amplificar significativamente los errores en la solución. De ahí que se necesite de un algoritmo adecuado para resolver el problema. Los procedimientos más comunes hacen uso de técnicas de minimización de un funcional elegido adecuadamente, junto con métodos numéricos de modelización, tales como el Método de los Elementos Finitos (MEF) y el Método de los Elementos de Contorno (MEC).

En las dos últimas décadas, los problemas inversos han sido extensamente tratados en diferentes ramas de la ciencia, tales como transferencia de calor [16], tomografía con impedancia eléctrica [17], scattering acústico y electromagnético [18] y mecánica del sólido [19], etc. La estrategia más comúnmente usada consiste en determinar los parámetros óptimos del modelo mediante la minimización de la diferencia entre la respuesta del sistema real y la del modelo.

2.1 PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY

Un clásico ejemplo de problema inverso que se da en la mecánica del sólido, es el problema inverso de Cauchy en elasticidad. Se denomina con este nombre a la situación que aparece cuando ambos vectores, tanto el de tensiones como el de desplazamientos, son conocidos en parte del contorno, pero no hay ningún dato disponible en el resto. Los mecanismos

matemáticos que demuestran que los problemas de Cauchy están mal planteados, han sido explicados para la ecuación de Laplace por Chen y Chen [20], pero pueden ser aplicados análogamente para el caso elástico.

Existen importantes estudios en la literatura sobre el problema de Cauchy para materiales isótropos. Maniatty *et al.* [21] determinaron las condiciones de contorno en tensiones usando simple regularización diagonal y elementos finitos (MEF). Por el contrario, Zabaras *et al.* [22] usaron regularización espacial junto con elementos de contorno MEC y Schnur y Zabaras [23] junto con MEF. Yeih *et al.* [24] analizaron la existencia, unicidad y continuidad de solución dependiendo de los datos de entrada en el problema elástico de Cauchy, y propusieron un procedimiento de regularización alternativo llamado *el método del contorno ficticio*, el cual está basado en la teoría de potencial de capa simple o doble. La implementación numérica de dicho método ha sido llevada a cabo por Koya *et al.* [25], los cuales han usado MEC y el método Nyström, para la discretización de las integrales. Sin embargo, la formulación no ha resuelto aún el problema de las integrales múltiples. Marin *et al.* [26] determinaron la solución aproximada del problema de Cauchy en elasticidad lineal usando un método alternante iterativo basado en el MEC, el cual reducía el problema a resolver una secuencia de problemas de contorno bien planteados, y más tarde extendió el método a problemas de Cauchy singulares, ver Marin *et al.* [27]. Huang y Shih [28] y Marin *et al.* [29], ambos usaron el método de gradientes conjugados unido al MEC, para resolver el mismo problema. El método de regularización de Tikhonov y la *descomposición del valor singular*, unido al MEC, fue empleado por Marin y Lesnic [30, 31] para resolver el problema de Cauchy isótropo bidimensional en elasticidad lineal. Una comparación entre los métodos nombrados de regularización basados en el MEC para el problema de Cauchy en elasticidad isótropa lineal, es decir, el alternante iterativo, los gradientes conjugados, la descomposición del valor singular y la regularización de Tikhonov, puede ser encontrada en Marin *et al.* [32]. Recientemente, el método de la solución fundamental combinado con el funcional de primer orden de Tikhonov y el método de Landweber junto con el MEC y un criterio de parada, han sido propuestos por Marin y Lesnic [34, 35], respectivamente.

Métodos para obtener soluciones aproximadas a problemas de contorno mal planteados han sido estudiados ampliamente en la literatura, ver por ejemplo Lavrent'ev [36], Tikhonov y Arsenin [37], Bakushinsky and Goncharsky [38], Morozov [39], etc. Y en el presente, hay distintos enfoques para la resolución del problema de Cauchy para ecuaciones elípticas, que es un clásico ejemplo de problema mal planteado. En resumen, todas estas estrategias pueden dividirse en tres grandes grupos. El primero consiste en los métodos basados en convertir el problema en uno bien planteado en el sentido de Tikhonov, ver por ejemplo Lavrent'ev [36].

El segundo agrupa a los métodos que usan algoritmos universales regularizadores que pueden obtenerse con la ayuda del funcional paramétrico de Tikhonov, o versiones relacionadas a él, ver por ejemplo Tikhonov and Arsenin [37]. Desgraciadamente, este último grupo necesita de una selección paramétrica que puede ser difícil en circunstancias reales.

Finalmente, el grupo más desarrollado últimamente incluye los métodos de resolución iterativa de problemas directos, ver por ejemplo Bakushinsky and Goncharsky [38]. Éstos han producido los resultados principales y son los más extensamente usados en aplicaciones prácticas. De todos estos grupos, el último presenta dos ventajas muy importantes, a saber, una, permite incluir restricciones con sentido físico como positividad o monotonicidad, etc., dentro del esquema del algoritmo iterativo, y dos, su implementación es muy sencilla dentro de un esquema computacional para la resolución iterativa de una secuencia de problemas bien planteados. Una posible desventaja de usar estos algoritmos es el gran número de iteraciones necesarias para alcanzar la convergencia. Sin embargo, el uso de sencillos procedimientos de relajación mejora esta convergencia.

Basándonos en estas razones, hemos decidido para este estudio, el uso del MEC para implementar un algoritmo convergente para materiales anisótropos con comportamiento elástico lineal, basado en un procedimiento alternante iterativo que consiste en obtener solución de los sucesivos problemas bien planteados con condiciones de contorno mixtas. Este método numérico fue originariamente propuesto por Kozlov *et al.* [40] e implementado para sólidos isótropos en elasticidad lineal por Marin *et al.* [26, 27]. La gran cualidad de este algoritmo reside en que es convergente, si y sólo si, la solución al problema de Cauchy existe, lo que supera la redundancia matemática previa. Mientras Kozlov *et al.* [40] probaron la convergencia matemática del algoritmo pero sin llegar a encontrar la solución, el objetivo de este trabajo es mostrar la estabilidad numérica y convergencia del citado algoritmo, ya que determina una aproximación de la solución al problema de Cauchy en elasticidad anisótropa. Para cesar el algoritmo antes de que el efecto de la acumulación de ruido llegue a ser dominante y los errores en la solución numérica comiencen a incrementarse, se ha propuesto un criterio de parada regularizador.

Además de todos estos comentarios, es actualmente bien conocido, [3, 4], que el MEC funciona mejor que métodos de discretización de dominio como el MEF o el de diferencias finitas (MDF), en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Las principales ventajas del MEC son una mayor precisión proveniente del uso de las Identidades de Green, la predicción simultánea de la función solución y de su derivada normal en el contorno si es necesaria una derivación adicional, y el hecho de que sólo el contorno del dominio en cuestión ha de ser discretizado

2.2 PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL

El uso de materiales anisótropos es cada vez más habitual en la fabricación de sistemas estructurales de altas prestaciones, en diversas ramas de la ingeniería como la aeronáutica, naval, aeroespacial, civil, etc. Esto implica que las características mecánicas de estos materiales han de conocerse de forma precisa, a fin de predecir de manera adecuada el comportamiento de estas estructuras. Las constantes del material pueden identificarse mediante experimentos de laboratorio basados bien en la respuesta estática o dinámica ante excitaciones externas. Sin embargo, las propiedades obtenidas mediante test estandarizados pueden ser significativamente distintos de los valores reales, debido a los procesos industriales de fabricación, y sobre todo a los procesos de envejecimiento de los materiales. Además, las técnicas de laboratorio no pueden emplearse para testar un material que forma parte de una estructura en servicio, por lo que es necesario recurrir a técnicas de Evaluación No-Destructivas (END).

La obtención de las propiedades elásticas de un sólido no-isótropo a partir de su respuesta puede formularse como un Problema Inverso (PI). La literatura para el problema inverso de *tomografía de impedancia* (ver [53, 57, 54, 61]) es extensa, pero el correspondiente problema elástico ha sido mucho menos estudiado. También existen importantes resultados teóricos e.g. Ikehata [56], que consiguen determinar las constantes de Lamé de un cuerpo elástico isótropo mediante mapeado de datos Dirichlet-a-Neumann. Lin [59] probó que los coeficientes de Lamé radialmente dependientes de un cuerpo esférico isótropo pueden obtenerse haciendo sólo dos mediciones de desplazamientos y tensiones en la superficie del cuerpo. Son numerosos los estudios computacionales de aplicación a cuerpos isótropos, y que usan mediciones tomadas en el contorno del cuerpo, pero a nuestro conocimiento, no existe ninguna referencia similar para el caso anisótropo. Schnur and Zabaras [10] identificaron el tamaño y posición de una inclusión circular dentro de una placa finita, junto con sus constantes elásticas, tanto de la inclusión como de la matriz, ambas isótropas. Para ello combinaron el MEF con el algoritmo de minimización de Levenberg-Marquardt.

Mallardo y Alessandri [11] aplicaron técnicas basadas en el método de los elementos de contorno a un problema muy similar, pero en su caso usaron para el cálculo del gradiente del funcional la derivación implícita, en lugar de las Diferencias Finitas empleadas en [10]. Constantinescu [52] ha tratado la identificación de las propiedades y defectos de un material compuesto mediante la minimización de la ley constitutiva, dentro del ámbito de la tomografía de impedancia. Heyliger *et al.* [12] usaron métodos dinámicos basados en las mediciones de las vibraciones libres en cuerpos anisótropos tridimensionales excitados por resonancia de impacto. Wang y Kam [63] propusieron minimización condicionada para el caso de materiales compuestos deformables por cizalladura. También Liu *et al.* [60] identificaron las propiedades de materiales en placas compuestas, por medio de algoritmos

genéticos con técnicas basadas en mínimos cuadrados no lineales. Recientemente, Marin *et al.* [33] han obtenido las constantes elásticas de materiales isotrópicos usando técnicas de minimización y datos solo medidos en superficie. Finalmente, Lauwagie *et al.* [58] propusieron un método mixto numérico-experimental para determinar las propiedades elásticas en el plano de placas de materiales ortótropos.

En el presente trabajo se presenta una formulación para materiales con anisotropía rectilínea anisótropa, en cuerpos bidimensionales. La técnica usada combina una formulación basada en la Ecuación Integral en el Contorno con una minimización por mínimos cuadrados, de las diferencias entre los valores medidos en el contorno de tensiones o desplazamientos, y los valores calculados con el modelo. Se ha usado el método de Levenberg-Marquardt, que implica tener que calcular las derivadas de la función de costo a minimizar con respecto a las constantes del material incógnitas del problema. El Jacobiano calculado por Diferencias Finitas es la opción elegida por muchos autores, [55]. En cambio, nosotros hemos optado por derivar de forma explícita las expresiones de los desplazamientos o tensiones, para así reducir el esfuerzo computacional.

2.3 PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN DE DEFECTOS

Uno de los tipos de PI más importantes que aparecen en el contexto de la mecánica del sólido deformable es el detección de defectos. En estos problemas, la incógnita es parte de la geometría, es decir, la de un defecto interno inaccesible. La resolución de estos problemas se plantea como la minimización de un funcional de costo que depende de la discrepancia entre los valores calculados para una configuración supuesta del defecto y los datos obtenidos experimentalmente en una parte accesible del espécimen.

Estas funciones de costo son a menudo no convexas y presentan varios mínimos locales. A pesar de ello, los métodos de minimización tradicionales son preferibles a las técnicas de optimización global, tales como las redes neuronales o los algoritmos genéticos, ya que estos algoritmos son en muchos casos inaplicables, dado el altísimo costo computacional que supone la resolución de numerosos problemas directos. En este trabajo se van a estudiar ambas estrategias, cuando sean aplicables, a fin de evaluar las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas.

2.3.1 Método Estado Adjunto

Tanto los problemas de optimización de la forma como los problemas inversos geométricos, suelen abordarse como problemas de minimización de un cierto funcional de costo. En su resolución, los algoritmos de minimización más comunes, como el *BFGS*, *Gradientes conjugados* . . . , hacen uso de las derivadas de primer orden. De ahí que surja la necesidad de calcular la derivada con respecto a la forma o *sensibilidad geométrica* de un cierto funcional integral.

La función de costo que suele elegirse es el residuo entre los valores de una magnitud física calculados en una cierta configuración y los valores conocidos de la magnitud medidos en la configuración real (cuya geometría no es conocida en su totalidad).

El cálculo de la sensibilidad geométrica puede ser abordado con diversas estrategias como la derivación explícita o el método de la variable adjunta (ver Burczynski [86]). Considerando que la variable del problema son los cambios en la forma, el uso de formulaciones basadas en la ecuación integral en el contorno, se hace más atractiva, ya que el modelado necesario será mínimo, en lo que se refiere al campo de actuación de las incógnitas del problema.

En este contexto, la diferenciación directa ha sido estudiada por muchos autores, tanto en formulaciones basadas en el MEC en su forma singular (Barone and Yang [87], Mellings y Aliabadi [88]), como en su forma regularizada (Bonnet [85], Matsumoto et al. [89], Nishimura). Este método implica la resolución de tantos problemas de contorno como parámetros de definición de la forma, aunque hay que tener en cuenta que el hecho de que todos ellos estén gobernados por el mismo operador matricial, reduce el esfuerzo computacional mediante su factorización y posterior sustitución.

El método de la variable adjunta es incluso más ventajoso, ya que requiere resolver solo un problema de valores en el contorno nuevo (el llamado estado adjunto) por cada funcional integral, cualquiera que sea el número de parámetros de diseño. En relación con formulaciones basadas en el MEC, este método ha sido satisfactoriamente aplicado al cálculo de la sensibilidad geométrica por Aithal and Saigal [90], Choi y Kwak [94], Burczynski [91], Meric [95] y Bonnet [78, 79]. Se basa en la posibilidad de obtener una expresión final para la sensibilidad que consiste en una integral en el contorno en la cual intervienen tan solo valores del estado originario y del estado adjunto.

Este trabajo tratará con una formulación basada en el método de los elementos de contorno, para la detección de cavidades en medios anisótropos, cuyo análisis de la sensibilidad geométrica ha sido realizado mediante el método de la variable adjunta. No tenemos evidencia alguna de la existencia de estudios previos para esta clase de materiales utilizando dicho planteamiento.

2.3.2 Derivada Topológica

En los párrafos anteriores se ha detallado como el cálculo del gradiente del funcional de costo con respecto a los parámetros de forma ha sido extensamente estudiado junto a los procedimientos de minimización standard. Esto es debido principalmente a que el coste computacional que conllevaría el uso un método de minimización global como los algoritmos evolucionarios, sería muy alto. Sin embargo, en una parte de esta tesis se plantea una estrategia diferente, presentada originalmente por Gallego y Rus [65], la cual consiste en

diseñar una función de dominio, la llamada *Derivada Topológica* (DT), cuyo mínimo señala la posición y tamaño del defecto buscado. Para calcular la situación de dicho mínimo se propondrá el uso de métodos de orden cero, en concreto Algoritmos Genéticos (AG).

La idea de la *Derivada Topológica* fue introducida en primer lugar por Eschenauer *et al.*[64] (ellos lo llamaron “método burbuja”) y lo usaron para la minimización de la discrepancia en problemas elastostáticos bidimensionales. Más tarde fue generalizado para problemas inversos de forma por Sokolowski y colaboradores [74, 75], y por Lewinski [92] para defectos circulares y no circulares. Garreau *et al.*[93] también desarrollaron la idea para defectos de formas arbitrarias. En todos estos artículos se ha usado el método de la variable adjunta para calcular la derivada topológica, mientras que en nuestro caso se usará una método de derivación directa basado en la Ecuación Integral en el Contorno.

Son varios los autores que en la década pasada han investigado el uso de algoritmos genéticos para la identificación de defectos, dentro del marco de los procedimientos basados en la Ecuación Integral en el Contorno. Entre ellos podemos nombrar a Koguchi y Watabe [67], Kowalckzyk *et al.* [68], Tanaka y Nakamura [73], Stavroulakis y Antes [71, 72] o Stavroulakis [70]. Todos estos artículos tienen una característica común, el funcional a minimizar es el residuo completo, a diferencia de su derivada topológica (como se desarrollará más tarde en este trabajo), por lo que los cálculos son muy gravosos. El uso de la derivada topológica combinado con algoritmos genéticos, aumenta notablemente la aplicabilidad de los métodos de orden cero.

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

3.1 ELASTICIDAD ANISÓTROPA

En esta sección se presenta una breve revisión de los principios y ecuaciones básicas para el estudio del sólido deformable con anisotropía rectilínea general, sometido a cargas estáticas.

3.1.1 Ecuaciones básicas para la elasticidad lineal anisótropa

Las ecuaciones de la mecánica del sólido deformable pueden agruparse en cinco categorías:

- Las *Ecuaciones de Equilibrio*

$$\sigma_{ji,j} = 0 \quad (*),^1 \quad (3.1)$$

siendo σ_{ji} el tensor de tensiones.

- Las *Ecuaciones cinemáticas*, que relacionan los desplazamientos, u_i , con las deformaciones. En el caso de pequeñas deformaciones, el tensor lineal de deformaciones, ε_{ij} , puede calcularse mediante las ecuaciones,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (3.2)$$

- Las *Ecuaciones de Compatibilidad*

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0. \quad (3.3)$$

- Las *Condiciones de Contorno*
- Las *Ecuaciones Constitutivas o Ley de Hooke generalizada*

Estas ecuaciones definen el comportamiento particular de cada material. En esta tesis se tratará el caso en que las deformaciones son función lineal de las tensiones, i.e., el material tiene un comportamiento elástico lineal.

En lo que se refiere a las propiedades elásticas, los cuerpos pueden clasificarse en homogéneos o heterogéneos, según las propiedades elásticas sean las mismas o diferentes en distintos puntos del cuerpo. Un cuerpo será considerado *isótropo*, en relación a sus propiedades elásticas, cuando dichas propiedades (resistencia elástica) sean las mismas en todas las direcciones que parten de un punto dado; si variasen el cuerpo sería denominado *anisótropo*. Las direcciones para las cuales las propiedades elásticas son las mismas se denominan *elásticamente equivalentes*. Adicionalmente, podemos

¹donde, $\partial[*]/\partial x_j = [*, j]$.

decir que un cuerpo homogéneo tiene *anisotropía rectilínea*, si todos los segmentos paralelos a una dirección dada y que parten de distintos puntos del cuerpo, son elásticamente equivalentes. Para el caso más general de anisotropía en un cuerpo homogéneo, la ley de Hooke puede definirse como sigue, [1]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \quad (3.4)$$

donde C_{ijmn} es un tensor de cuarto orden con 81 constantes, aunque esta cantidad puede reducirse ya que muchas de estas constantes no son independientes. Para simplificar la expresión usaremos de ahora en adelante una notación mono-indicial,

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1 \dots 6, \quad (3.5)$$

siendo σ_i y ε_j pseudo-vectores en los que se han realizado los siguientes cambios en sus subíndices: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23 \rightarrow 4, 13 \rightarrow 5, 12 \rightarrow 6$ C_{ij} . La expresión puede invertirse y se obtiene una análoga,

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad (3.6)$$

donde a_{ij} son los llamados *coeficientes de flexibilidad o deformación*.

En ocasiones, cuando la estructura del cuerpo tiene algún tipo de simetría, las propiedades elásticas también presentan esta simetría, [1]. En estos casos, algunas de las constantes elásticas son cero. Un *plano de simetría elástica* en un cuerpo es definido como aquel plano con la siguiente propiedad: cada dos direcciones simétricas respecto a él son elásticamente equivalentes. A la dirección normal a este plano se la denomina *dirección principal*. Una situación especial se da cuando a través de cada punto de un cuerpo pasan tres planos de simetría elástica perpendiculares mutuamente, y además en todos los puntos, los planos de simetría respectivos serán paralelos. A los cuerpos con esta propiedad se les conoce como *ortótropos*. El número de constantes elásticas independientes se reduce hasta nueve para el caso ortótropo tridimensional, y hasta cuatro en el bidimensional. Si todas las direcciones en un cuerpo son principales y elásticamente equivalentes, el cuerpo es llamado *isótropo* y solo son necesarias dos constantes para definirlo.

3.1.2 Definición del problema elástico anisótropo

El objetivo de la Teoría de la Elasticidad es obtener la respuesta de un cuerpo, con forma arbitraria, bajo la acción de unas cargas cualesquiera. La definición de esta respuesta en términos de tensiones, deformaciones y campo de desplazamientos, es lo que se llama el *Problema Elástico*. En particular, nos interesaremos por el *Problema Elástico Anisótropo*.

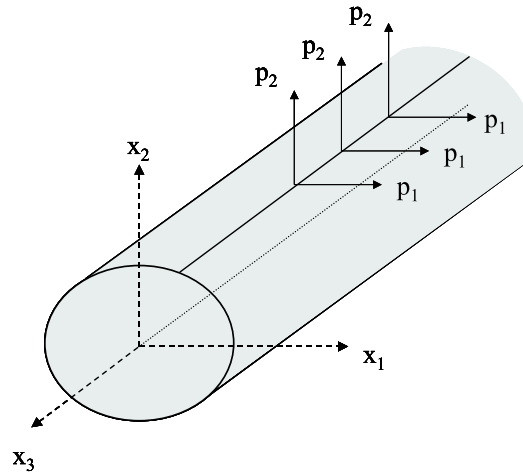


Figura 3.1: Cuerpo elástico anisótropo homogéneo

Consideramos el equilibrio elastostático de un cuerpo homogéneo con anisotropía rectilínea. El cuerpo está limitado por una superficie cilíndrica, y sobre él actúan fuerzas de superficie, \mathbf{p} , y de volumen, \mathbf{b} , perpendiculares a las generatrices del cilindro, ($p_3 = 0, b_3 = 0$), y constantes a lo largo de su longitud, $p_i = p_i(x_1, x_2)$ y $b_i = b_i(x_1, x_2)$. Consideramos ausencia de tensiones iniciales. El cuerpo está referido a un sistema de ejes coordenados cartesianos, x_1, x_2 y x_3 , en el cual x_3 es paralelo a las generatrices, ver Figura 3.1. En la situación que acabamos de describir, parece obvio que las componentes de las tensiones, y por tanto de las deformaciones, son función de sólo dos coordenadas (x_1, x_2). Dadas estas condiciones, si existe un plano de simetría elástica que coincide con la sección transversal del cuerpo, estas secciones permanecerán planas tras la deformación, este estado de tensión y deformación se conoce como *estado de deformación plana*, ($\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = 0$).

Análogamente, consideramos el equilibrio elástico de una placa plana de grosor uniforme de un material anisótropo homogéneo. Por cada punto de dicho material pasa un plano de simetría elástica paralelo al plano medio de la placa. Las fuerzas de superficie están distribuidas a lo largo del borde, y las fuerzas de volumen son simétricas respecto al plano medio de la placa y varían levemente a lo largo de su espesor. Bajo estas condiciones, σ_3, σ_4 y σ_5 se pueden despreciar en comparación con el resto de componentes del tensor de tensiones. Este estado es conocido como *tensión plana generalizada* ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$).

En los dos casos descritos anteriormente, las magnitudes del problema (desplazamientos, tensiones y deformaciones) pueden simplificarse a un estudio bidimensional. A lo largo de toda esta tesis, se tratarán problemas elastostáticos con materiales anisótropos, cuya geometría y condiciones de carga describen uno de los dos estados planos mencionados. Por lo tanto, las formulaciones se desarrollarán para el caso bidimensional.

Volviendo a la resolución del problema elástico, teniendo en cuenta las ecuaciones de la mecánica del sólido deformable definidas en la Sección 1.1., y asumiendo que las fuerzas de volumen se derivan de un potencial (U), el problema puede ser expresado en términos de una *función de tensiones* $F(x_1, x_2)$ [1]:

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + U \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + U \quad \sigma_6 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3.7)$$

Si aplicamos la ley constitutiva y las ecuaciones de compatibilidad entre desplazamientos y deformaciones, se obtiene la ecuación diferencial que satisface F :

$$L_4(F) = -(\beta_{12} + \beta_{22})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + (\beta_{16} + \beta_{26})\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} - (\beta_{11} + \beta_{12})\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}, \quad (3.8)$$

donde L_4 es un operador diferencial de cuarto orden de la forma,

$$L_4 = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (\beta_{12} + \beta_{66})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} - 2\beta_{16}\frac{\partial^4}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4}, \quad (3.9)$$

y β_{ij} son las denominadas *constantes elásticas reducidas*:

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}. \quad (3.10)$$

La ecuación (3.8) puede factorizarse, resolviendo el polinomio característico de cuarto orden $l_4(\mu) = 0$,

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{16}\mu + \beta_{22} = 0, \quad (3.11)$$

el cual tiene cuatro raíces complejas, llamadas *parámetros complejos*, dos pares conjugados. La solución es una expresión tal y como sigue,

$$F(x_1, x_2) = \Re[F_1(z_1) + F_2(z_2)] + F_0(x_1, x_2), \quad (3.12)$$

siendo $F_i(z_i)$ dos funciones arbitrarias de las variables complejas $z_i = x_1 + \mu_i x_2$, y F_0 es una solución particular de (3.8). Si ahora se introducen nuevos *potenciales complejos*, $\Phi_i(z_i) = F'_i(z_i)$, se obtienen expresiones generales para las tensiones y desplazamientos

$$\sigma_1 = 2\Re[\mu_1^2 \Phi'_1 + \mu_2^2 \Phi'_2], \quad \sigma_2 = 2\Re[\Phi'_1 + \Phi'_2], \quad \sigma_6 = -2\Re[\mu_1 \Phi'_1 + \mu_2 \Phi'_2], \quad (3.13)$$

$$u_1 = 2\Re[p_{11}\Phi_1 + p_{12}\Phi_2] - \omega x_2 + u_0, \quad u_2 = 2\Re[p_{21}\Phi_1 + p_{22}\Phi_2] + \omega x_1 + v_0, \quad (3.14)$$

donde u_0, v_0 y ω representa un movimiento simultáneo de sólido rígido.

Las ecuaciones expuestas son también válidas en un estado de *tensión plana generalizada*, tan solo habrá que sustituir las constantes elásticas reducidas β_{ij} por los coeficientes de flexibilidad a_{ij} .

3.2 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

La formulación analítica obtenida en la sección previa, es adecuada únicamente para unos pocos problemas con geometrías y condiciones de contorno muy simples. En la mayoría de los casos es necesario recurrir a métodos numéricos para encontrar la solución del problema. En esta tesis, todos los problemas van a modelizarse utilizando técnicas de basadas en el Método de los Elementos de Contorno (MEC). Hoy día, es bien sabido que en ciertas aplicaciones, este método es más adecuado que otros más populares tales como Diferencias Finitas o Elementos Finitos, aplicaciones tales como las que nos ocupan en esta tesis [3]. Las principales ventajas del MEC son su mayor precisión gracias al uso de la identidad integral de Green, el cálculo simultáneo de la variable primaria (desplazamientos en nuestro caso) y su derivada respecto a la normal en el contorno (tracciones en nuestro caso) sin necesidad de obtener las últimas mediante derivación, y finalmente, el hecho de que solamente es necesario discretizar el contorno del cuerpo considerado, con las ventajas computacionales que todo esto conlleva. Estas propiedades son muy importantes en el caso de los Problemas Inversos de nuestro interés, ya que los procedimientos que se emplean implican la resolución reiterada de problemas directos, que han de resolverse de manera precisa y eficaz.

El método de los elementos de contorno es un método numérico para la resolución aproximada de la representación integral de una ecuación. El proceso puede dividirse en dos etapas. La primera consiste en la obtención de la ecuación integral en el contorno a partir de la aplicación del teorema de Reciprocidad de Betti. El segundo paso será la discretización de la ecuación para poder así resolverla numéricamente. El contorno del dominio es dividido en elementos, que irán definidos por sus nodos, y la posición de cada punto del contorno se definirá con la ayuda de una funciones de forma. Así pues, las magnitudes del problema se aproximarán por medio de su valor en los nodos del elemento y las funciones de forma. En la totalidad de este trabajo se han usado elementos cuadráticos isoparamétricos. Si evaluamos la ecuación integral en cada nodo del contorno, se obtiene el sistema lineal de ecuaciones que ha de resolverse (más detalles en [3][4]).

3.2.1 *Solución Fundamental Anisótropa*

El MEC se basa en el Teorema de Reciprocidad de Betti, establecido entre dos estados equilibrados y compatibles, definidos sobre el mismo dominio en consideración. En el caso de las elasticidad, el teorema se establece entre el problema real definido sobre un dominio Ω con contorno Γ , y un problema auxiliar denominado *Solución Fundamental*.

La Solución Fundamental es la respuesta en un punto \mathbf{z} debido a una carga unidad aplicada en \mathbf{z}' , *punto de colocación*, en un medio infinito, de un material con las mismas propiedades que las del problema real. Cuando una carga unidad se aplica en la dirección cartesiana x_i , la solución de este problema auxiliar puede expresarse en función de potenciales complejos [8],

$$\Phi_{is}(z_s) = A_{is} \ln(z_s - z'_s), \quad (3.15)$$

donde A_{is} son constantes complejas que se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ p_{11} & -\bar{p}_{11} & p_{12} & -\bar{p}_{12} \\ p_{21} & -\bar{p}_{21} & p_{22} & -\bar{p}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \bar{A}_{i1} \\ A_{i2} \\ \bar{A}_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\delta_{i2}}{2\pi i} \\ \frac{\delta_{i1}}{2\pi i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

siendo δ_{ij} la delta de Kronecker y

$$\begin{aligned} p_{1k} &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k, \\ p_{2k} &= \beta_{12}\mu_k + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} - \beta_{26}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Todas estas ecuaciones son válidas también para el caso de *tensión plana generalizada*, cambiando simplemente las constantes elásticas reducidas β_{ij} por las constantes elásticas a_{ij} .

La solución fundamental para los desplazamientos puede obtenerse a partir de estos potenciales complejos, resultando la siguiente expresión

$$U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = 2 \sum_{s=1}^2 \Re [p_{js} A_{is} \ln(z_s - z'_s)], \quad (3.18)$$

mientras que las correspondientes tracciones de la solución fundamental en el contorno son:

$$T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = 2 \sum_{s=1}^2 \Re \left[\frac{q_{js} A_{is}}{z_s - z'_s} (\mu_1 n_1 - n_2) \right], \quad (3.19)$$

siendo $q_{1s} = \mu_s$, $q_{2s} = -1$ y n_i las componentes de la normal exterior \mathbf{n} en el contorno Γ .

3.2.2 Ecuación Integral en el Contorno

Una vez que el estado auxiliar esta definido, recordamos el teorema de Betti, que se establece entre dos sistemas de fuerzas de contorno y de dominio en equilibrio (\mathbf{t}, \mathbf{b}) y $(\mathbf{t}^*, \mathbf{b}^*)$. Estos sistemas de fuerzas están aplicados sobre el mismo dominio elástico anisótropo y su respuesta está caracterizada por los campos de desplazamientos \mathbf{u} y \mathbf{u}^* , respectivamente. Si el estado $*$ es el dado por la solución fundamental, es decir,

$$b_j^* = \delta_{ij} \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}'), \quad t_j^* = T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \quad u_j^* = U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}'), \quad (3.20)$$

siendo \mathbf{z}' un punto en el interior del dominio Ω . Suponiendo que el estado real no está sometido a fuerzas de dominio, $\mathbf{b} = 0$, se obtiene la *Identidad de Somigliana*,

$$u_i(\mathbf{z}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (3.21)$$

Moviendo el punto \mathbf{z}' a un punto del contorno del cuerpo, $\mathbf{y} \in \Gamma$, i.e., $\mathbf{z}' \rightarrow \mathbf{y}$, se obtiene la Ecuación Integral de Contorno (EIC) que gobierna el campo de desplazamientos elásticos, y que viene dada por,

$$c_{ij}(\mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{z}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{z}) d\Gamma, \quad (3.22)$$

siendo $c_{ij}(\mathbf{y})$ el término libre, cuyo valor depende de la posición del punto de colocación \mathbf{z}' [4, 3].

Finalmente, diferenciando la ecuación (3.21) con respecto a la coordenadas del punto de colocación $\mathbf{z}' \in \Omega \setminus \Gamma$ se obtiene la EIC para las deformaciones,

$$\epsilon_{ik}(\mathbf{z}') = \int_{\Gamma} V_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (3.23)$$

Detalles adicionales sobre el cálculo de los nuevos núcleos, V_{ijk} y S_{ijk} se recogen en el Apéndice A, [43]. Una vez que se han calculado las deformaciones, las tensiones en los puntos internos se obtienen aplicando la Ley de Hooke.

3.2.3 Discretización del Problema

A fin de resolver numéricamente la EIC (3.22), el contorno Γ se discretiza en un número N_e de elementos. La geometría, desplazamientos y tracciones en el contorno se interpolan sobre cada elemento a partir de sus valores en los nodos de los elementos, utilizando las denominadas *funciones de forma* ϕ_m . Para cada punto de colocación l , cuyas coordenadas son \mathbf{y}^l , puede escribirse la EIC (3.22) discretizada de la siguiente forma,

$$c_{ij} u_j(l) + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 h_{ij}^m(l, k) u_j^k(m) = \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 g_{ij}^m(l, k) t_j^k(m), \quad (3.24)$$

donde las constantes de integración $h_{ij}^m(l, k)$ y $g_{ij}^m(l, k)$, ($i, j = 1, 2, m = 1, 2, 3$), vienen dadas por

$$h_{ij}^m(l, k) = \int_{-1}^1 T_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l) \phi_m(\xi) J^k(\xi) d\xi, \quad (3.25)$$

$$g_{ij}^m(l, k) = \int_{-1}^1 U_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l) \phi_m(\xi) J^k(\xi) d\xi. \quad (3.26)$$

Teniendo en cuenta que hemos empleado elementos cuadráticos isoparamétricos, si el contorno es cerrado y se divide en N_e elementos, el número total de nodos de contorno será de $N = 2N_e$. El procedimiento de cálculo de las constantes de integración se detalla en el

Apéndice C.

Aplicando la ecuación (3.24) para todos los nodos del contorno, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas,

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}, \quad (3.27)$$

siendo \mathbf{u} y \mathbf{t} vectores que recogen los valores nodales de desplazamientos y tensiones, respectivamente, en todos los nodos del contorno. Después de aplicar las condiciones de contorno, y reordenando el sistema de ecuaciones, el sistema final de ecuaciones a resolver queda

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b}, \quad (3.28)$$

siendo \mathbf{A} una matriz cuadrada llena y no-simétrica y \mathbf{X} el vector de incógnitas en el contorno.

3.3 PROBLEMA INVERSO

3.3.1 Definición

Se declara en *problema directo* como el cálculo de la respuesta (vector de desplazamientos \mathbf{u} y vector de tensiones \mathbf{t} en el caso elástico) en un determinado cuerpo, definido por su geometría Ω de contorno Γ , propiedades mecánicas (a), comportamiento del modelo (operador L) y condiciones de contorno (ciertos valores de u y t en el contorno). En contraposición a éste, un *problema inverso* es aquel en el cual desconocemos parte de la información que hemos detallado arriba.

Un problema directo genérico (no necesariamente elástico) queda definido como:

$$L(a)u = q \quad \text{en } \Omega,$$

Kubo [19] clasificó esta clase de problemas dependiendo de la naturaleza de las incógnitas en cada caso:

- Identificación: una parte de la geometría (Ω). Éste es el caso de la búsqueda de defectos.
- Modelización: las ecuaciones matemáticas que modelan el comportamiento (L).
- Reconstrucción: las condiciones de contorno iniciales.
- Acciones externas: t .
- Propiedades del material: algunos de los parámetros que caracterizan al material (a).

Para resolver los distintos problemas nombrados y calcular las respectivas incógnitas, es necesario disponer de información suplementaria, en forma de valores de ciertas medidas realizadas en el cuerpo de estudio. Las mediciones pueden ser de cualquier magnitud física que se propague dentro de él y que se manifieste en una zona accesible del cuerpo que pueda estudiarse, y así obtener información acerca de lo que sucede en su interior. La identificación puede basarse en *fenómenos de propagación* de las propiedades elásticas (tales como deformación elástica, propagación de ondas, acústica, etc.) gobernados por ecuaciones en derivadas parciales; mediciones de flujo eléctrico, termal u otros descritos por ecuaciones de potenciales similares; o métodos basados en *radiación* (rayos-X, reconstrucción mediante fotografía, etc.). Para el presente trabajo, la información adicional necesaria será del primer tipo, i.e., desplazamientos y tensiones estáticos, u y t , medidos en una parte del contorno Γ .

3.3.2 Estrategias para resolver Problemas Inversos

Un problema inverso puede ser reformulado como la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales o la minimización de un funcional no lineal. Los métodos para resolverlos se clasifican principalmente en dos grupos según su convergencia: métodos globales y locales. Un algoritmo *convergente global o localmente* se define como aquel método que está

diseñado para converger, desde cualquier punto a un mínimo global o local del funcional, respectivamente.

Algunos métodos locales de minimización de un funcional de costo, son por ejemplo Mínimos cuadrados, Gauss-Newton, métodos secantes cuasi-newtonianos. Entre los métodos globales podemos nombrar a los algoritmos Genéticos o Evolucionarios, Redes neuronales, búsqueda aleatoria... En esta tesis, se tratarán ambos, globales y locales, usando el más apropiado en cada caso de estudio. Las características del algoritmo a tener en cuenta son: *precisión*, en el sentido de alcanzar una buena aproximación partiendo desde cualquier configuración, *efectividad*, en lo que se refiere a coste computacional, y *convergencia*, entendiéndola como una alta probabilidad de éxito para encontrar la solución real.

El esquema de un problema de minimización de un funcional de costo, puede resumirse como:

$$\min_x f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

donde el funcional f depende de las diferencias entre unos valores medidos de una cierta magnitud, y los mismos valores calculados en un modelo supuesto. Podemos encontrar estudios generales sobre técnicas de optimización aplicados a los problemas inversos en Menke [82], Dennis [5, 83] y Hansen [51]. Estas técnicas pueden clasificarse en *programación matemática clásica* y *computación suave*. Las primeros necesitan calcular funciones derivadas mientras que las últimos, también llamadas *métodos de orden cero*, consiguen evitar este cálculo. Un sinopsis de las técnicas de minimización empleadas para la resolución de PIs, en conjunción con el MEC, puede encontrarse en la [76].

Como se ha dicho anteriormente, la mayoría de los métodos standard de minimización requieren el cálculo del gradiente del funcional de costo, ∇f , con respecto a los parámetros incógnita del problema. El coste computacional de esta evaluación varía dependiendo del método de derivación que empleemos. El método de las *Diferencias Finitas* es el que supone el esfuerzo computacional más alto. Tiene la ventaja de la sencillez de su implementación, pero implica resolver un problema directo adicional a una pequeña distancia del original (a menos que estemos usando diferencias centrales) para cada término o vector de la matriz, i.e., para cada parámetro en cada iteración. Este inconveniente puede ser evitado usando para el cálculo del gradiente del funcional, el *método de la variable adjunta*. Solo necesitaremos resolver dos problemas directos, el problema original y un problema adjunto, sea cual sea el número de variables. Este método en cambio tiene como desventaja la complejidad de su formulación. Finalmente, la *derivación directa*, es la estrategia a seguir que implica menos coste computacional pero que conlleva la formulación más complicada. Las ecuaciones integrales son normalmente calculadas mediante expansiones en serie de sus núcleos

y funciones de peso.

Parte II

CONTRIBUCIONES

CAPÍTULO 4

PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY

4.1 FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA DE CAUCHY EN ELASTICIDAD ANISÓTROPA BIDIMENSIONAL

Consideramos un cuerpo homogéneo de un material anisótropo elástico lineal, que ocupa un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, asumiendo que Ω está delimitado por una superficie suave Γ en el sentido de Liapunov, tal que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1, \Gamma_2 \neq \emptyset$ y $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$. En particular, trataremos en caso en que la geometría y condiciones de carga configuran un estado plano puro, por lo que las variables del problema, desplazamientos, tensiones y deformaciones pueden simplificarse a un estudio bidimensional. Por simplicidad, asumimos ausencia de fuerzas de volumen ($\mathbf{b} = 0$).

El problema elástico es definido en Ω tal y como se expuso en el Capítulo 3 (Sección 3.1.2) con las ecuaciones de equilibrio interno, las ecuaciones cinemáticas y la ecuación constitutiva del material:

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.2)$$

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j. \quad (4.3)$$

El vector de tensiones \mathbf{t} en un punto del contorno Γ , de normal exterior \mathbf{n} , se define como

$$t_i = \sigma_{ij}n_j. \quad (4.4)$$

Si tratamos con formulaciones de problemas directos, las condiciones de contorno necesarias consisten en el conocimiento de los desplazamientos y/o tensiones a lo largo de todo el contorno Γ , lo que nos proporciona las llamadas condiciones de contorno Dirichlet, Neumann o mixtas. Con ellas, podremos resolver el problema directo y calcular el vector de desplazamientos \mathbf{u} en el dominio Ω . A continuación, con la ayuda de las ecuaciones cinemáticas, Ecuación (4.2), se obtiene el tensor de deformaciones, y finalmente, mediante la ley constitutiva, Ecuación (4.3), se calculará el tensor de tensiones σ .

Cuando es posible conocer ambos vectores, el de desplazamientos y el de tensiones en una parte del contorno Γ , la notaremos con $\Gamma_2 \subset \Gamma$, y no tenemos ninguna información en el resto del contorno, al que llamaremos $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_2$, entonces estamos ante la formulación matemática de un problema inverso que consiste en las ecuaciones de equilibrio interno, Ecuación (4.1), junto a las condiciones de contorno sobre Γ_2 , al que llamaremos contorno *sobredefinido*.

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j} = 0 & \text{en } \Omega \\ u_i = \tilde{u}_i & \text{en } \Gamma_2 \\ t_i = \tilde{t}_i & \text{en } \Gamma_2. \end{cases} \quad (4.5)$$

Aquí $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$ son los vectores conocidos de desplazamientos y tensiones en Γ_2 , respectivamente. En la formulación de las condiciones de contorno expuesta, Ecuaciones (4.5₂) y (4.5₃), se puede observar como el contorno Γ_2 está *sobredefinido* ya que conocemos tanto desplazamientos $\mathbf{u}|_{\Gamma_2} = \tilde{\mathbf{u}}$, como tensiones $\mathbf{t}|_{\Gamma_2} = \tilde{\mathbf{t}}$. Por el contrario, el contorno Γ_1 está *indefinido*, ya que desconocemos todo y habrá que determinar tanto las tensiones como los desplazamientos.

Este problema, conocido como *Problema de Cauchy*, o *problema inverso de reconstrucción* siguiendo la clasificación de Kubo [19], es mucho más difícil de resolver, tanto analítica como numéricamente, que un problema directo, ya que su solución no satisface las condiciones generales para el buen planteamiento de un problema. Aunque el problema pueda tener solución única, es de sobra conocida la inestabilidad de la solución frente a pequeñas perturbaciones en los datos en Γ_2 , [15]. Así pues, el problema está *mal planteado* y no podrá usarse un método directo para la resolución del sistema lineal de ecuaciones que se obtiene tras discretizar la ecuación diferencial parcial y aplicar las condiciones de contorno (4.5), como sería el común método de eliminación de Gauss.

4.2 DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Partiendo de los datos exactos conocidos de $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$ en el contorno Γ_2 , usaremos el algoritmo iterativo convergente, originalmente propuesto por Kozlov *et al.* [40] e implementado para un medio elástico lineal isótropo por Marin *et al.* [26, 27], pero con un criterio de parada regularizador, esencial cuando los valores conocidos de $\tilde{\mathbf{u}}$ y/o $\tilde{\mathbf{t}}$ pueden contener errores. Este algoritmo se divide en los siguientes pasos:

Paso 1.1. $k = 0$. Especificar una aproximación inicial $\mathbf{t}^{(0)}$ para las tensiones en el contorno *indefinido* Γ_1 .

Paso 1.2. Resolver el problema de condiciones de contorno mixto.

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(1)} = 0 & \text{en } \Omega \\ t_i^{(1)} \equiv \sigma_{ij}^{(1)} n_j = t_i^{(0)} & \text{en } \Gamma_1 \\ u_i^{(1)} = \tilde{u}_i & \text{en } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.6)$$

para calcular los desplazamientos $\mathbf{u}^{(1)}$ sobre Ω y sobre Γ_1 .

Paso 2.1. Habiendo construido la aproximación $\mathbf{u}^{(2k-1)}$, $k > 0$, se resuelve el problema mixto

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(2k)} = 0 & \text{en } \Omega \\ u_i^{(2k)} = u_i^{(2k-1)} & \text{en } \Gamma_1 \\ t_i^{(2k)} \equiv \sigma_{ij}^{(2k)} n_j = \tilde{t}_i & \text{en } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.7)$$

para calcular los desplazamientos $\mathbf{u}^{(2k)}$ en Ω y las tensiones $\mathbf{t}^{(2k)} \equiv \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^{(2k)}) \cdot \mathbf{n}$ sobre Γ_1 .

Paso 2.2. Una vez obtenida la función con los valores del vector $\mathbf{u}^{(2k)}$, $k > 0$, se resuelve el problema mixto

$$\begin{cases} \sigma_{ji,j}^{(2k+1)} = 0 & \text{en } \Omega \\ t_i^{(2k+1)} \equiv \sigma_{ij}^{(2k)} n_j = t_i^{(2k)} & \text{en } \Gamma_1 \\ u_i^{(2k+1)} = \tilde{u}_i & \text{en } \Gamma_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

y así obtenemos los desplazamientos $\mathbf{u}^{(2k+1)}$ en Ω y sobre Γ_1 .

Paso 3. Ajustamos $k = k + 1$ y se repiten los pasos 2.1 y 2.2 hasta que el criterio de parada elegido se satisfaga.

Kozlov *et al.* [40] demostraron que siendo Γ una superficie suave, y si $\tilde{\mathbf{u}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$ satisfacen ciertas condiciones de continuidad [40], entonces el algoritmo alternante iterativo basado en los pasos del 1 – 3 produce dos secuencias de soluciones aproximadas $\{\mathbf{u}^{(2k)}(\mathbf{x})\}_{k>0}$ y $\{\mathbf{u}^{(2k-1)}(\mathbf{x})\}_{k>0}$, convergiendo ambas a la solución $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ del problema de Cauchy (4.5), para cualquiera que sea el valor del tanteo inicial. Además, el algoritmo tiene un carácter regularizador. Las mismas conclusiones pueden obtenerse si en el paso 1.1 especificamos un tanteo inicial para el vector de desplazamientos $\mathbf{u}^{(0)}$, y modificamos los pasos 1 y 2, respectivamente.

Hay que señalar que si el tanteo inicial $\mathbf{t}^{(0)}$ y la información disponible del contorno $\tilde{\mathbf{u}}$ and $\tilde{\mathbf{t}}$, satisfacen ciertas condiciones de continuidad, entonces los problemas (4.6) – (4.8) están bien planteados y tienen solución, ver Lions y Magenes [42]. Para resolver los problemas

directos intermedios, que son problemas con condiciones de contorno mixtas, se empleará el método de los elementos de contorno que se detalla en la sección siguiente. Para pasar de una iteración a la siguiente, son necesarios los valores de los vectores de desplazamientos y tensiones en el contorno Γ y no en el dominio Ω , por lo que el MEC es una técnica que se ajusta muy bien para resolver los problemas mixtos de contorno (4.6) – (4.8). Por lo tanto, los valores de desplazamientos y tensiones en puntos interiores al dominio Ω habrán de evaluarse sólo después de que el criterio de parada se haya satisfecho, y no en cada iteración, con el correspondiente ahorro en tiempo computacional y memoria de almacenamiento.

4.3 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS DE CONTORNO

En el capítulo 3 (Sección 3.2.3), donde se describía el método de los elementos de contorno, se expuso que el contorno Γ era discretizado para así poder resolver numéricamente la EIC. Para este problema particular, los contornos Γ , Γ_1 y Γ_2 se discretizan en N_e , N_e^1 y N_e^2 elementos, respectivamente, siendo $N_e^1 + N_e^2 = N_e$. La geometría, desplazamientos y tensiones, son interpolados sobre cada elemento. Se han empleado para este estudio elementos cuadráticos isoparamétricos, de tal forma que si el contorno Γ es cerrado y discretizado con N_e elementos, el número total de nodos del contorno vendrá dado por $N = 2N_e$. Consecuentemente, el número de nodos del contorno correspondiente al contorno *indefinido* Γ_1 y *sobredefinido* Γ_2 , vendrá dado por $N_1 = 2N_e^1$ y $N_2 = 2N_e^2$, respectivamente, cumpliéndose $N_1 + N_2 = N$.

El paso siguiente consistirá en la aplicación de la EIC discretizada (3.24) en cada nodo del contorno, dando lugar al sistema algebraico de ecuaciones:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}, \quad (4.9)$$

donde \mathbf{u} y \mathbf{t} son vectores que contiene los valores en los nodos de los desplazamientos y tensiones, respectivamente. Por último, habrá que reordenar el sistema aplicando las condiciones de contorno. En este problema de Cauchy en concreto, (4.5₂) y (4.5₃) proporcionan el valor de $4N_2$ de las incógnitas y el problema se reduce a resolver un sistema de $2N$ ecuaciones con $4N_1$ incógnitas que puede expresarse de una forma general como

$$\mathbf{C}\mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (4.10)$$

donde la matriz $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2N \times 4N_1}$ depende únicamente de la geometría del contorno y de las propiedades del material, el vector $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{4N_1}$ contiene los valores desconocidos de los desplazamientos y tensiones en el contorno Γ_1 y el vector $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{2N}$ se calcula usando las condiciones de contorno de Cauchy (4.5₂) y (4.5₃).

4.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se muestran los resultados numéricos obtenidos para problemas en los que se ha usado el algoritmo alternante iterativo presentado, junto con el método de los elementos de contorno. Además se han analizado aspectos como la convergencia con respecto a la discretización de la malla y el número de iteraciones necesario, cuando los datos de partida son exactos. También se ha estudiado la estabilidad del método cuando los datos están alterados con pequeños errores.

4.4.1 Ejemplos

Para poder ilustrar el funcionamiento del método numérico propuesto, se ha resuelto Problema de Cauchy para dos ejemplos con geometría bidimensional de contorno suave, en concreto, un dominio anular $\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid r_i^2 < x_1^2 + x_2^2 < r_o^2\}$, $r_i = 1$, $r_o = 4$, ya que la condición de *suavidad* es necesaria en el análisis teórico desarrollado por Kozlov *et al.* [40]. Asumimos que el contorno Γ está dividido en dos partes disjuntas, que notaremos con $\Gamma_1 = \Gamma_i \equiv \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid x_1^2 + x_2^2 = r_i^2\}$ y $\Gamma_2 = \Gamma_o \equiv \{\mathbf{x} \in \Gamma \mid x_1^2 + x_2^2 = r_o^2\}$ en el caso del Ejemplo 1, y $\Gamma_1 = \{\mathbf{x} \in \Gamma_i \mid \alpha_1 \leq \Theta(\mathbf{x}) \leq \alpha_2\}$ y $\Gamma_2 = \Gamma_o \cup \{\mathbf{x} \in \Gamma_i \mid 0 \leq \Theta(\mathbf{x}) < \alpha_1\} \cup \{\mathbf{x} \in \Gamma_i \mid \alpha_2 < \Theta(\mathbf{x}) \leq 2\pi\}$ en el caso del Ejemplo 2, donde $\Theta(\mathbf{x})$ es la coordenada polar angular de \mathbf{x} y $\alpha_i, i = 1, 2$, son ángulos especificados en el intervalo $(0, 2\pi)$. Para ilustrar los resultados numéricos hemos tomado $\alpha_1 = \pi/4$ and $\alpha_2 = 3\pi/4$.

En los ejemplos siguientes, consideraremos un material con comportamiento lineal elástico ortótropo (contrachapado de abedul), cuyos ejes de ortotropía coinciden con los ejes del sistema de referencia cartesiano. Las constantes elásticas ingenieriles del sólido constituido por este material, tienen los siguientes valores $E_1 = 11.76 \text{ GN/m}^2$, $E_2 = 5.88 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = 0.686 \text{ GN/m}^2$ y $\nu_{12} = 0.071$, o en términos de los coeficientes de flexibilidad $a_{11} = 0.08503 \text{ m}^2/\text{GN}$, $a_{12} = -0.006037 \text{ m}^2/\text{GN}$, $a_{22} = 0.1701 \text{ m}^2/\text{GN}$, $a_{66} = 1.4577 \text{ m}^2/\text{GN}$ y $a_{16} = a_{26} = 0.0 \text{ m}^2/\text{GN}$.

Ejemplo 1. El estado tensional considerado consiste en unas presiones internas y externas constantes de tracción $\sigma_i = 1.0 \text{ GN/m}^2$ y $\sigma_e = 2.0 \text{ GN/m}^2$, respectivamente.

Ejemplo 2. Se trata de un estado de presión hidrostática uniforme de valor $\sigma_e = 1.5 \text{ GN/m}^2$.

Aunque se pueden obtener las expresiones analíticas para las tensiones $\sigma^{(\text{an})}$, y por tanto el vector de tensiones $\mathbf{t}^{(\text{an})}$, hay que tener en cuenta que no sucede lo mismo con los correspondientes desplazamientos analíticos $\mathbf{u}^{(\text{an})}$, por lo que serán obtenidos numéricamente resolviendo el problema directo

$$\begin{cases} \sigma_{j,i,j}^{(\text{an})} = 0 & \text{en } \Omega \\ \sigma_{ij}^{(\text{an})} n_j = t_i^{(\text{an})} & \text{en } \Gamma, \end{cases} \quad (4.11)$$

donde se han eliminado los desplazamientos de sólido-rígido con

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^{(\text{an})} d\Omega = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}^{(\text{an})} \times \mathbf{x} d\Omega = 0. \quad (4.12)$$

Por tanto, el problema de Cauchy considerado y que queda descrito por la Ecuación (4.5), en el que los datos de Cauchy vienen dados por $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^{(\text{an})}$ y $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(\text{an})}$, donde el vector de desplazamientos $\mathbf{u}^{(\text{an})}$ se calcula numéricamente resolviendo el problema de Neumann (4.11), junto con las condiciones de sólido-rígido (4.12), con una discretización de la malla del contorno muy fina para así poder obtener la solución más cercana a la exacta. De aquí en adelante, el vector de tensiones analíticas $\mathbf{t}^{(\text{an})}$ y el correspondiente vector de desplazamientos $\mathbf{u}^{(\text{an})}$, serán referidos como vectores de tensión y desplazamientos “exactos”, respectivamente.

Para los problemas de Cauchy de los ejemplos 1 y 2, tanto los valores de los vectores de tensiones y desplazamientos en el contorno Γ_1 , \mathbf{t} y \mathbf{u} , como las soluciones en el interior del dominio Ω , serán las incógnitas a determinar. Los problemas de Cauchy que vienen dados por las ecuaciones (4.5) para los ejemplos considerado en este estudio, han sido resueltos iterativamente usando el MEC para obtener simultáneamente los vectores de desplazamientos y tensiones no especificados en el contorno Γ_2 . El número de elementos isoparamétricos cuadráticos usados en la discretización del contorno Γ se ha variado en los distintos tests, habiendo elegido $N_e \in \{32, 48, 96\}$ de forma que tanto el contorno exterior como interior del anillo están divididos en el mismo número de elementos, que notaremos con $N_e/2 \in \{16, 24, 48\}$.

4.4.2 Tanteo inicial

Para comenzar el proceso, el algoritmo necesita un tanteo inicial arbitrario de los valores $\mathbf{t}^{(0)}$ sobre el contorno *indefinido* Γ_1 . Para aumentar la convergencia del proceso iterativo, hemos elegido una función que asegura la continuidad de los valores de las tensiones en los extremos de Γ_1 y que además es lineal con la coordenada polar angular Θ . Para el Ejemplo 2, el tanteo inicial tomado es definido por

$$t_i^{(0)}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_2 - \Theta(\mathbf{x})}{\alpha_2 - \alpha_1} t_i^{(0)}(\mathbf{x}_1) + \frac{\Theta(\mathbf{x}) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} t_i^{(0)}(\mathbf{x}_2), \quad (4.13)$$

donde $\alpha_i = \Theta(\mathbf{x}_i)$ para $i = 1, 2$, \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_2 son los extremos de Γ_1 , y la elección de $\alpha_1 = \pi/4$ and $\alpha_2 = 3\pi/4$ también asegura que el tanteo inicial no está demasiado cerca de los valores exactos reales $\mathbf{t}^{(\text{an})}(\mathbf{x})$.

En el caso del Ejemplo 1, no podemos usar el procedimiento descrito y por lo tanto elegimos como tanteo inicial

$$t_i^{(0)}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.14)$$

4.4.3 Convergencia del algoritmo

La convergencia del algoritmo es analizada calculando *errores de precisión* en cada iteración, definidos como

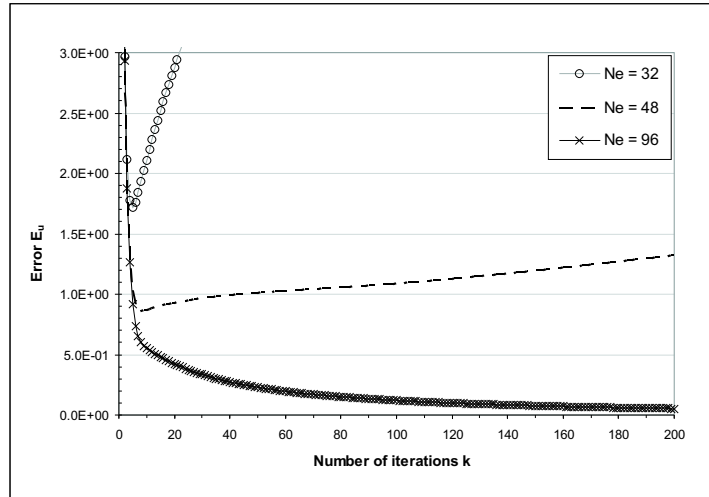
$$E_u = \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(\text{an})}\|_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)}, \quad E_t = \|\mathbf{t}^{(k)} - \mathbf{t}^{(\text{an})}\|_{L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_1)}, \quad (4.15)$$

donde $\mathbf{u}^{(k)}$ y $\mathbf{t}^{(k)}$ son los desplazamientos y tensiones en el contorno Γ_1 obtenidas tras k iteraciones, respectivamente, consistiendo cada iteración en la resolución de dos problemas directos bien planteados, con condiciones de contorno mixtas, mencionados en la sección 4.2.

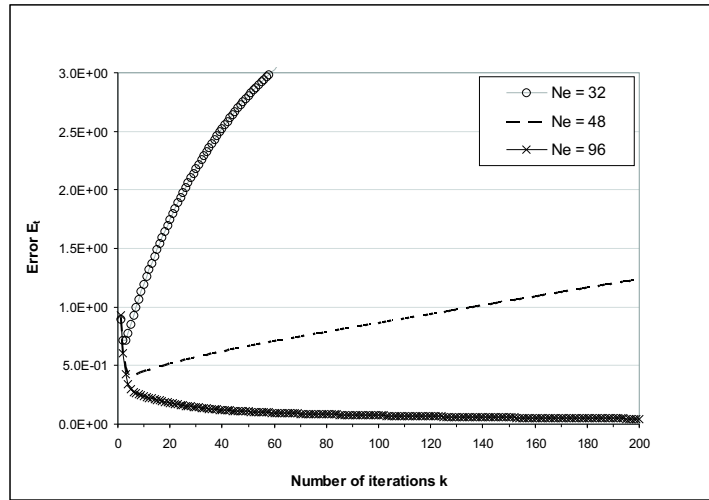
El error al predecir el vector de los desplazamientos en un punto interior del dominio Ω , puede también evaluarse usando la expresión

$$E_\Omega = \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^{(\text{an})}\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}, \quad (4.16)$$

pero tiene una evolución similar a la de los errores E_u y E_t , ya que el valor de dicho vector de desplazamientos es obtenido en cada iteración a partir de los valores de los vectores de tensiones y desplazamientos en el contorno Γ .



(a)

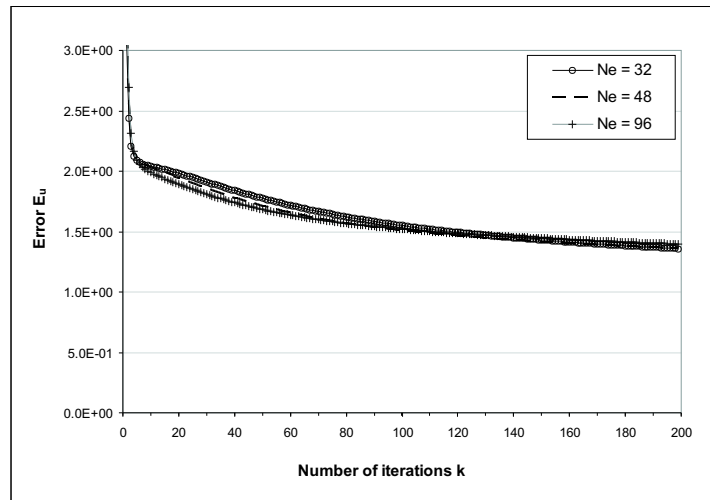


(b)

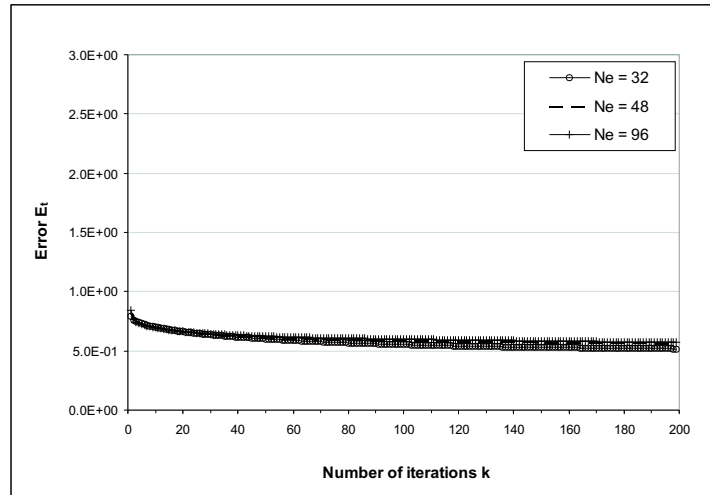
Figura 4.1: Errores de precisión (a) E_u , y (b) E_t , en función del número de iteraciones, k , obtenidos usando $N_e = 32$ ($- \circ -$), $N_e = 48$ ($- - -$) y $N_e = 96$ ($- \times -$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.

Cuando tomamos como valor inicial de las tensiones $\mathbf{t}^{(0)}$ el dado por las ecuaciones (4.14) y (4.13) para los ejemplos 1 y 2, respectivamente, se obtiene una secuencia de funciones $\{\mathbf{u}^{(k)}\}_{k>0}$ que van aproximándose al valor de $\mathbf{u}|_{\Gamma_1}$, según lo dicho por Kozlov *et al.* [40], y esta secuencia converge a la solución exacta. Si evaluamos los errores E_u and E_t en cada iteración, para el caso del Ejemplo 1, se observa que ambos errores son siempre decrecientes al aumentar el número de iteraciones, sólo cuando empleamos una malla muy refinada de $N_e = 96$, ver Figura 4.1. Por el contrario, si usamos una malla con menor número de elementos, i.e., $N_e = 32, 48$, los errores de precisión dados por la expresión (4.15), alcanzan un valor mínimo, y tras rebasar un cierto número de iteraciones, k , el error empieza a aumentar. Sin embargo, los errores E_u y E_t correspondientes al problema de Cauchy tratado

en el Ejemplo 2 tienen una tendencia decreciente sea cual sea la discretización del contorno empleada, ver Figura 4.2. Una posible explicación para este comportamiento diferente de los errores E_u y E_t en los ejemplos 1 y 2, podemos encontrarla en los distintos tanteos iniciales usados para cada caso. En particular, en el Ejemplo 2 se asegura la continuidad del vector de tensiones en los nodos extremos del contorno indefinido Γ_1 , mientras que para el Ejemplo 1 hemos usado el vector constante cero el cual no contiene ninguna información del valor real de las incógnitas en Γ_1 , (ver las ecuaciones (4.13) y (4.14), respectivamente).



(a)

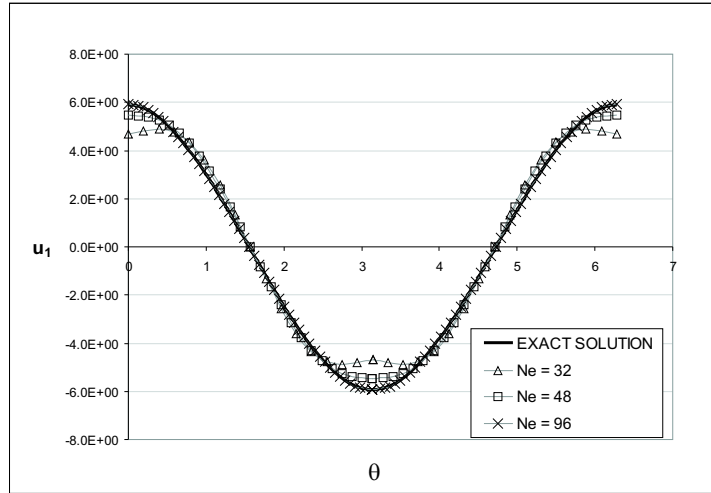


(b)

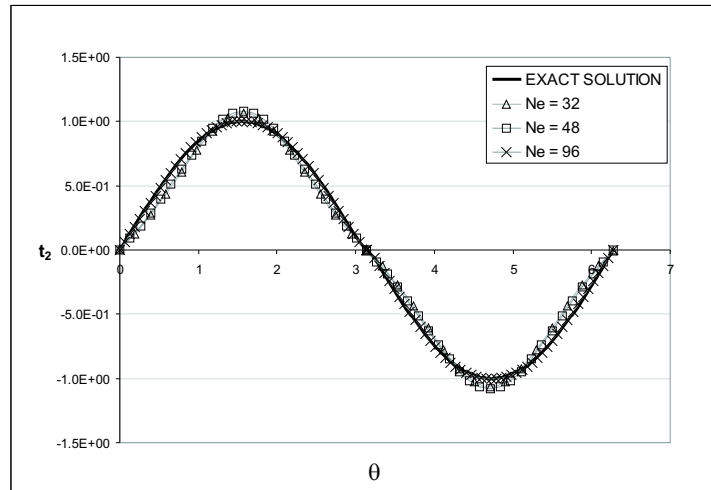
Figura 4.2: Errores de precisión (a) E_u , y (b) E_t , en función del número de iteraciones, k , obtenidos usando $N_e = 32$ ($- \circ -$), $N_e = 48$ ($- \times -$) y $N_e = 96$ ($- \times -$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.

De las figuras 4.3 y 4.4, podemos deducir que el algoritmo propuesto por Kozlov *et al.* [40], es convergente al aumentar el número de elementos de contorno. En ellas se representa la evolución de la solución numérica para la componente x_1 de los desplazamientos y la componente x_2 de las tensiones, para los problemas de Cauchy asociados con los ejemplos 1 y 2, respectivamente, para $N_e \in \{32, 48, 96\}$.

En las figuras 4.3 y 4.4 se observa que las soluciones numéricas para los desplazamientos $u_1|_{\Gamma_1}$ y las tensiones $t_2|_{\Gamma_1}$ son más precisas para el problema del Ejemplo 1 que para el Ejemplo 2. La razón la encontramos en que $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 = \emptyset$ en el caso del Ejemplo 1, mientras que $\bar{\Gamma}_1 \cap \bar{\Gamma}_2 \neq \emptyset$ en el Ejemplo 2, i.e., existen dos puntos del contorno donde los elementos cuadráticos isoparamétricos, pasan a tener condiciones de contorno mixtas. Es de sobra conocido, ver e.g. Fichera [45] y Schiavone [46], que el gradiente de los desplazamientos \mathbf{u} posee singularidades en los nodos donde las condiciones de contorno cambian pasando de especificar el valor de los desplazamientos a especificar el valor de las tensiones, aun cuando los desplazamientos y tensiones son de la clase C^∞ . En consecuencia, la solución clásica para los desplazamientos \mathbf{u} no puede ser suave, aunque si podemos mejorar esta cualidad si exigimos a los desplazamientos y tensiones que cumplan una serie de condiciones adicionales, ver Wendland *et al.* [47]. Sin embargo, en la implementación numérica uno puede usar funciones de peso en cada iteración del algoritmo para así anular las singularidades, ver Johansson [48], pero esta tarea queda aplazada para futuros trabajos.

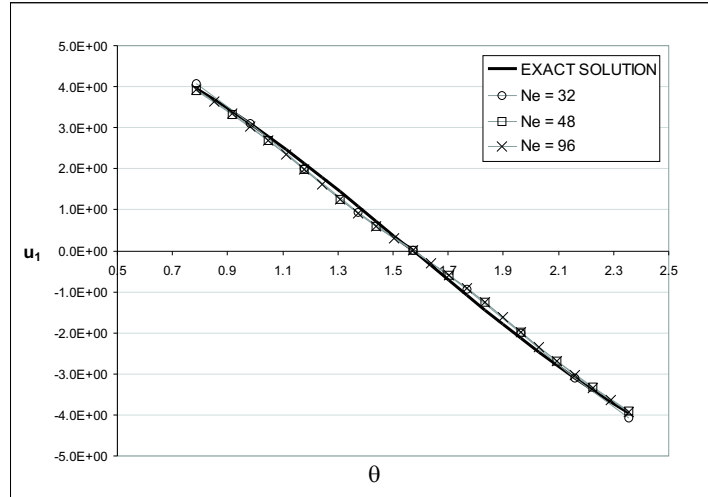


(a)

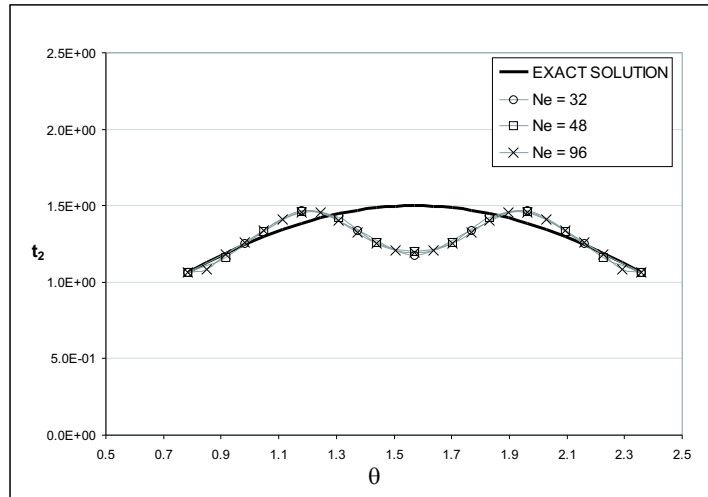


(b)

Figura 4.3: (a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ (—) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ (—) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno *indefinido* Γ_1 , usando $N_e = 32$ ($-\triangle-$), $N_e = 48$ ($-\square-$) y $N_e = 96$ ($-\times-$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , $k = 200$ iteraciones, para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.



(a)



(b)

Figura 4.4: (a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ (—) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ (—) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno *indefinido* Γ_1 , usando $N_e = 32$ ($-\triangle-$), $N_e = 48$ ($-\square-$) y $N_e = 96$ ($-\times-$) elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , $k = 200$ iteraciones, para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.

4.4.4 Factor de relajación variable

Aunque los resultados en desplazamientos y tensiones obtenidos en Γ_1 en los dos ejemplos analizados son aceptables, tratándose de unos requerimientos de precisión para aplicaciones ingenieriles, las discrepancias que se obtienen al calcular las tensiones $t_2|_{\Gamma_1}$ en el caso del Ejemplo 2 son todavía grandes, especialmente para los elementos cercanos a los extremos del contorno *indefinido* Γ_1 , ver Figura 4.5(b). Para conseguir un ahorro tanto en tiempo como

en capacidad de almacenamiento computacional, y para mejorar los resultados para las tensiones en Γ_1 , se ha relajado la condición (4.8₂) mediante el uso de

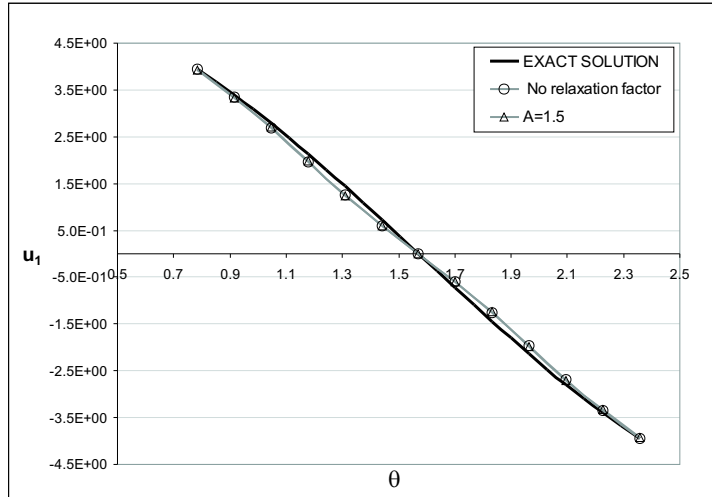
$$t_i^{(2k+1)} \equiv \sigma_{ij}^{(2k+1)} n_j = \rho t_i^{(2k)} + (1 - \rho) t_i^{(2k-1)} \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (4.17)$$

cuando pasamos del paso 2.1 al 2.2 del algoritmo descrito en la Sección 4.2, donde ρ es el parámetro de relajación prescrito.

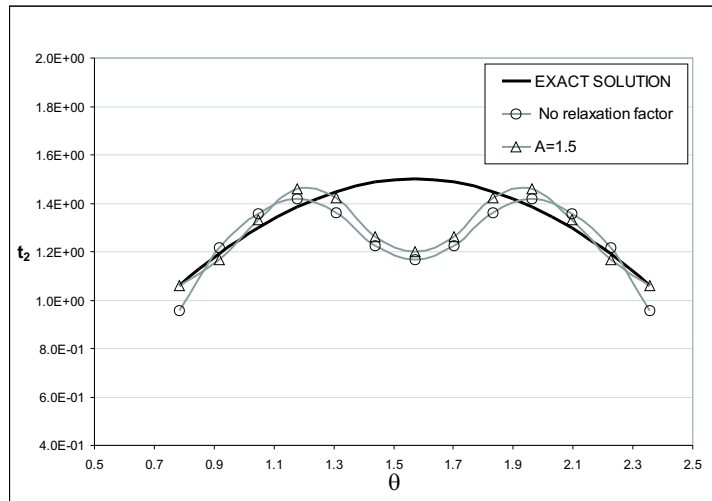
Mediante un cuidadoso examen de la solución numérica obtenida para el vector de tensiones en Γ_1 tras diferentes números de iteraciones sin factor de relajación, hemos observado que la convergencia obtenida en los nodos extremos del contorno indefinido Γ_1 , es mayor que en el resto del contorno Γ_1 . Tras varias iteraciones, la solución numérica para el vector de tensiones en los extremos de Γ_1 , se acerca a la solución exacta y tras rebasar un cierto número de iteraciones, la solución se desvía del valor exacto, mientras que en el resto de Γ_1 , el valor obtenido para las tensiones aún se acerca al valor verdadero. La gran variabilidad de la solución numérica para las tensiones en los nodos extremos de Γ_1 , en comparación con el resto del contorno, nos induce a introducir un factor de relajación variable $\rho = \rho(\Theta(\mathbf{x}))$ que sea pequeño en los extremos del contorno indefinido Γ_1 , y su valor sea máximo, llamémosle A , en el centro de Γ_1 . Hemos utilizado el factor de relajación elegido por Marin *et al.* [26] y Mera *et al.* [44],

$$\rho(\Theta(\mathbf{x})) = A \sin\left(\frac{\Theta(\mathbf{x}) - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \pi\right), \quad (4.18)$$

donde $A \in (0, 2]$. Las figuras 4.5 (a) y (b) ilustran como las soluciones para los desplazamientos $u_1|_{\Gamma_1}$ y para las tensiones $t_2|_{\Gamma_1}$, respectivamente, son más precisas cuando introducimos el factor de relajación (4.17) con $A = 1.5$, resultados similares pueden obtenerse con valores de $A \in (0, 2]$.



(a)



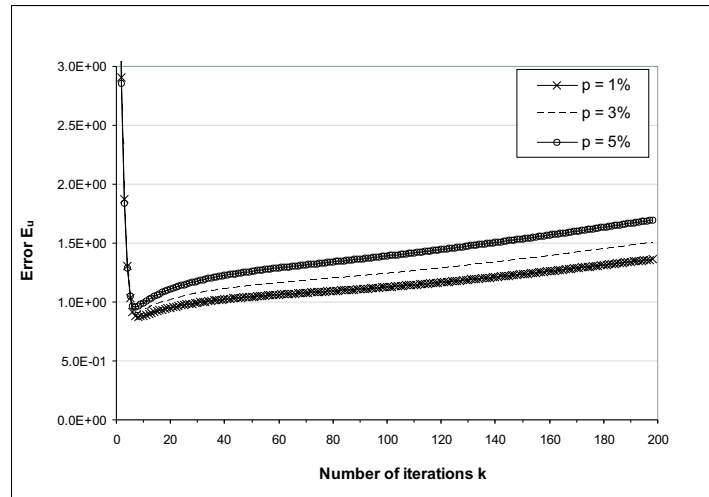
(b)

Figura 4.5: (a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ (—) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ (—) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno *indefinido* Γ_1 , sin considerar factor de relajación (—○—) y con un factor de relajación variable de amplitud $A = 1.5$ (—△—), usando $N_e = 48$ elementos cuadráticos isoparamétricos y valores exactos de las condiciones de contorno en Γ_2 , para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.

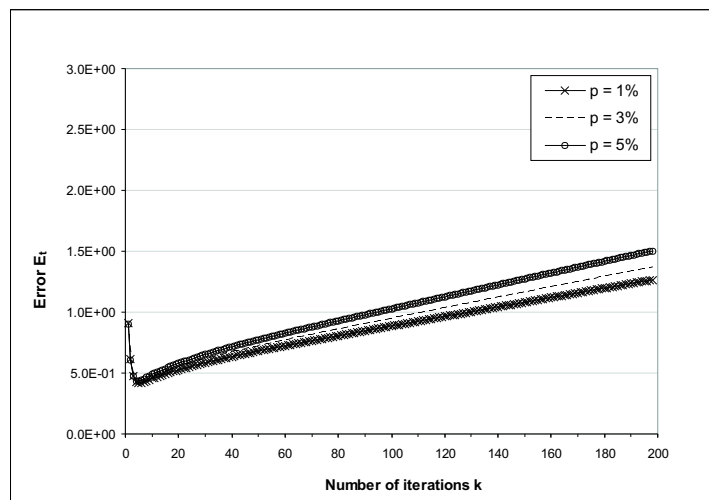
4.4.5 Criterio de parada

Una vez que hemos establecido la convergencia de la solución numérica mejora con respecto a un número creciente de elementos de contorno N_e , fijamos $N_e = 48$ para así estudiar la estabilidad de la solución para el Ejemplo 1. Para ello los desplazamientos iniciales $\tilde{u}_i|_{\Gamma_2}$, $i = 1, 2$, han sido alterados con $\tilde{u}_i^e|_{\Gamma_2} = \tilde{u}_i|_{\Gamma_2} + \delta\tilde{u}_i$, $i = 1, 2$, donde $\delta\tilde{u}_i$, $i = 1, 2$, es una variable aleatoria Gaussiana, de media cero y desviación típica $\sigma_i = \max_{\Gamma_2} |\tilde{u}_i| \times (p/100)$, $i = 1, 2$, y p es el porcentaje de ruido añadido a $\tilde{u}_i|_{\Gamma_2}$, $i = 1, 2$. En la Fig. 4.6 se presentan los errores de precisión E_u y E_t correspondientes al Ejemplo 1 para distintos niveles de ruido,

$p \in \{1,3,5\}$. Se puede concluir de este gráfico que ambos errores E_u y E_t , disminuyen hasta un cierto número de iteraciones, a partir del cual comienzan a aumentar. Si el proceso continúa después de este punto, la solución numérica pierde su suavidad y se convierte en altamente oscilatoria y sin limitar. Por lo tanto, es imprescindible establecer un criterio de parada regularizador para suspender el proceso iterativo en el punto en que los errores numéricos empiezan a crecer.



(a)



(b)

Figura 4.6: Errores de precisión (a) E_u , y (b) E_t , en función del número de iteraciones, k , obtenidos usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y diversas cantidades de ruido añadidas a los datos $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ ($- \times -$), $p = 3\%$ ($- - -$) y $p = 5\%$ ($- \circ -$), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.

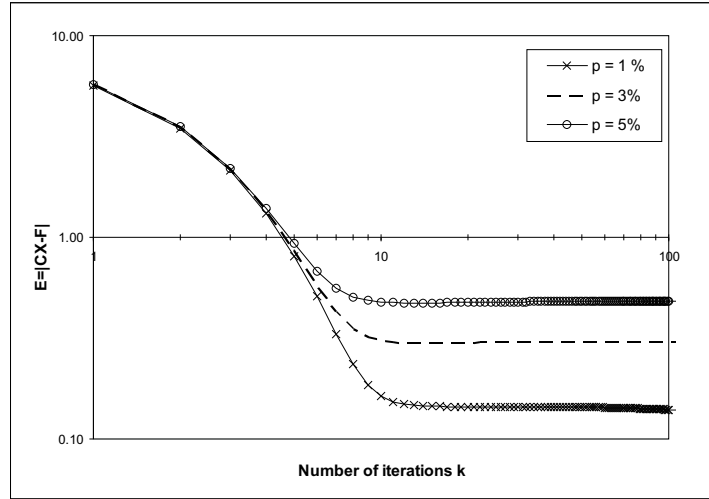


Figura 4.7: Error de convergencia $E = \|\mathbf{CX} - \mathbf{F}\|_2$ función del número de iteraciones, k , obtenido usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y diversas cantidades de ruido añadidas a los datos de $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ ($- \times -$), $p = 3\%$ ($- - -$) y $p = 5\%$ ($- \circ -$), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.

Si evaluamos la norma euclídea del vector $\mathbf{CX} - \mathbf{F}$, esta debería tender a cero cuando \mathbf{X} tiende a las solución exacta. De ahí que calculemos en cada iteración el error como,

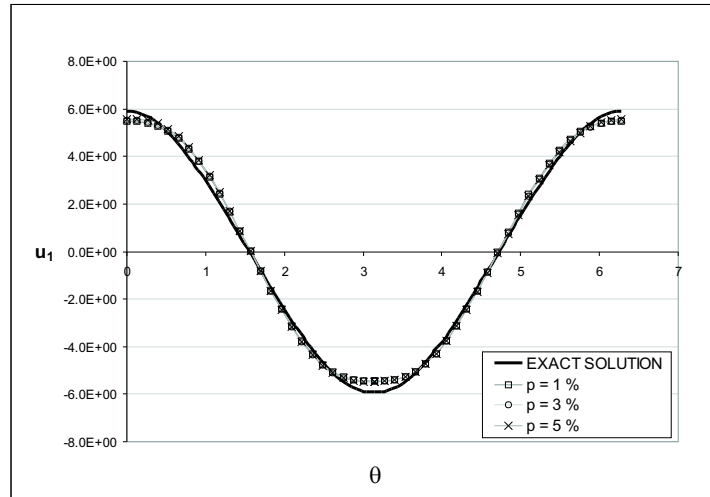
$$E = \|\mathbf{CX}^{(k)} - \mathbf{F}\|_2, \quad (4.19)$$

donde $\mathbf{X}^{(k)}$ es el vector obtenido de los valores de los desplazamientos y tensiones en el contorno Γ_1 tras k iteraciones. El error E incluye información de ambos, vector de desplazamientos y de tensiones, y se espera que proporcione un criterio de parada adecuado. De hecho, si investigamos el error E obtenido en cada iteración para el ejemplo considerado, añadiendo distintos niveles de ruido a los valores iniciales especificados $\tilde{u}_i|_{\Gamma_2}$, $i = 1, 2$, se obtienen las curvas representadas en Fig. 4.7. Aunque existen criterios de parada más rigurosos como el principio de discrepancia de Morozov [49] o la validación-cruzada [50], hemos optado por emplear un criterio de parada tipo curva-L, el cuál detiene el proceso iterativo en el número de iteración k_{opt} , que corresponde al ángulo de la curva representada en Fig. 4.7, ver e.g. Hansen [51]. En las figuras 4.6 y 4.7 se comprueba que el criterio elegido es muy eficiente a la hora de calcular el punto donde los errores numéricos comienzan a aumentar y debe terminar el proceso de resolución.

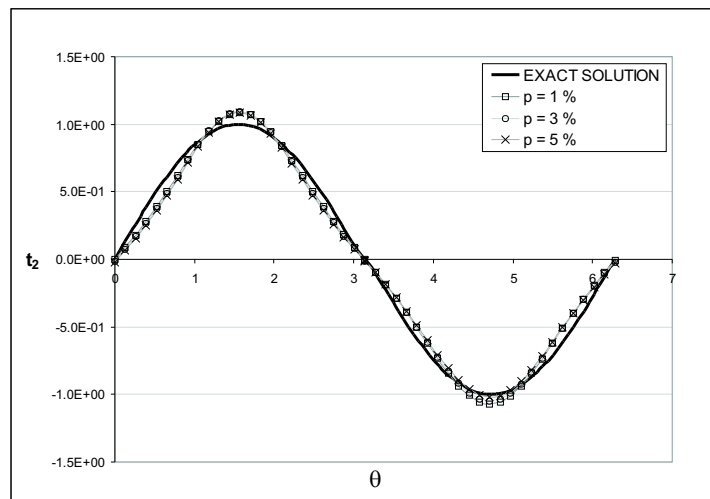
4.4.6 Estabilidad del algoritmo

En las figuras 4.8 y 4.9 se presentan los resultados numéricos obtenidos para los desplazamientos u_1 y las tensiones t_2 sobre el contorno *indefinido* Γ_1 , introduciendo diversos niveles de ruido en el vector de desplazamientos en el contorno Γ_2 , para los Ejemplos 1 y 2, y basándonos en el criterio de parada descrito anteriormente. De estas figuras podemos deducir que la solución numérica es una aproximación estable de la solución exacta, libre de oscilaciones. Además, de todos los resultados numéricos presentados en esta sección, podemos

concluir que el criterio de parada detallado en la Sección 4.4.5 tiene un efecto regularizador y la solución obtenida con el método de los elementos de contorno iterativo descrito es convergente y estable con respecto a un número creciente de elementos de la discretización del contorno y a un nivel decreciente de ruido en los datos de partida, respectivamente.

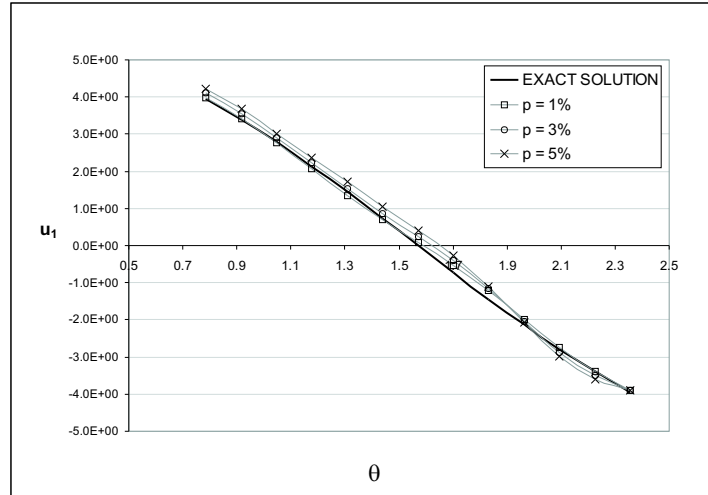


(a)

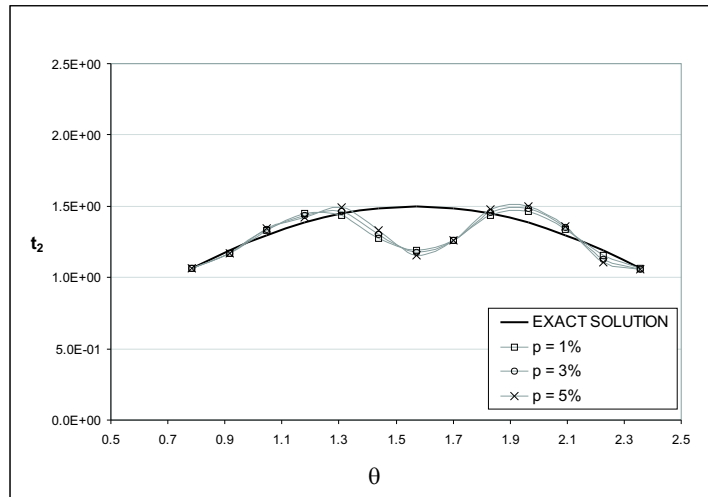


(b)

Figura 4.8: (a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ (—) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ (—) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno *indefinido* Γ_1 , usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y varios porcentajes de error introducidos en los desplazamientos $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ (—□—), $p = 3\%$ (—○—) y $p = 5\%$ (—×—), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 1.



(a)



(b)

Figura 4.9: (a) Desplazamientos exactos $u_1^{(an)}$ (—) y desplazamientos obtenidos numéricamente $u_1^{(num)}$, y (b) tensiones exactas $t_2^{(an)}$ (—) y tensiones obtenidas numéricamente $t_2^{(num)}$, en el contorno *indefinido* Γ_1 , usando $N_e = 48$ elementos de contorno cuadráticos isoparamétricos y varios porcentajes de error introducidos en los desplazamientos $\mathbf{u}|_{\Gamma_2}$, $p = 1\%$ (—□—), $p = 3\%$ (—○—) y $p = 5\%$ (—×—), para el problema de Cauchy considerado en el Ejemplo 2.

CAPÍTULO 5

PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL

5.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Comenzamos considerando un cuerpo elástico anisótropo Ω , limitado por un contorno suave Γ , y que está sometido a unas cargas estáticas de superficie. Por simplicidad, asumimos ausencia de fuerzas de volumen. Recordamos que cuando el problema está definido por la ecuación que gobierna el problema, las propiedades del material son conocidas, y las condiciones de contorno están prescritas a lo largo de todo el contorno Γ , estamos ante un *problema directo bien planteado*. En particular, nos centramos en el caso en que la geometría y cargas del problema conforman un estado de deformación plana pura, por lo que es estudio se simplifica al caso bidimensional. El problema queda definido por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\sigma_{j,i,j} &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \varepsilon_i &= a_{ij}\sigma_j \quad \text{en } \Omega, \\ t_i &= \sigma_{ij}n_j \quad \text{en } \Gamma.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Para el caso anisótropo bidimensional, tomando el plano medio del cuerpo coincidente con el plano coordenado 1-2, la ley de Hooke se puede expresar como sigue,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix},\tag{5.2}$$

donde recordamos que la notación indicial se ha transformado en una mono-indicial: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 12 \rightarrow 6$.

En este capítulo, trataremos con un problema elastostático anisótropo, donde las constantes elásticas del material a_{ij} son (total o parcialmente) desconocidas. Para conseguir resolver el problema, necesitamos información adicional y así compensar el exceso de incógnitas. El problema tratado es conocido como *problema de identificación de parámetros* o *problema inverso de las constantes del material*. En la práctica, estos datos adicionales serán las

mediciones de desplazamientos o tensiones tomadas en una zona accesible del sólido.

El método más común utilizado para resolver dicho problema consiste en la minimización de una función objetivo que representa la distancia entre los valores medidos y los calculados en un modelo inicialmente supuesto.

5.2 ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN

Lo que se pretende es ajustar una serie de valores de una magnitud física calculados con un modelo, $m_i(\mathbf{x})$, y que dependen de unos parámetros desconocidos x_j , ($j = 1 \dots n$), a los medidos experimentalmente, y_i , ($i = 1 \dots m$). En nuestro caso los parámetros incógnita son los coeficientes de flexibilidad del material a_{ij} . Las magnitudes físicas pueden ser desplazamientos y/o tensiones, que son respuesta del sistema a unas condiciones de contorno dadas. Si llamamos f a la función a minimizar, el problema de minimización se define como sigue

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m R_i(\mathbf{x})^2, \quad (5.3)$$

donde \mathbf{R} es el vector de residuos calculado como la diferencia entre los datos medidos experimentalmente y los valores calculados con el modelo supuesto, es decir, $R_i(\mathbf{x}) = m_i(\mathbf{x}) - y_i$. Como el modelo es no lineal en \mathbf{x} , surge un problema de mínimos cuadrados no lineal.

Para resolverlo, emplearemos el algoritmo de Levenberg-Marquardt, considerado como el más apropiado para problemas similares [62]. Este método converge q-linealmente de forma rápida en problemas no demasiado no-lineales y con pequeños residuos. Además posee la ventaja de estar bien definido cuando el Jacobiano es de rango completo en columna, y el paso es parecido a la dirección de máxima pendiente [5].

El funcionamiento del algoritmo se desarrolla como sigue: dado una estimación \mathbf{x}^k , se calcula un modelo afín \mathbf{M}^k de $\mathbf{R}^k(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{R}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{J}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k), \quad (5.4)$$

siendo \mathbf{J}^k el Jacobiano que viene dado por las derivadas,

$$\mathbf{J}_{ij}^k = \left. \frac{\partial R_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k} = \left. \frac{\partial m_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^k}. \quad (5.5)$$

El problema de minimización inicial queda reducido a,

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{2} \mathbf{M}^k{}^T \mathbf{M}^k \\ \text{sujeto a} \quad & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^k\|_2 \leq \delta^k, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde la restricción es impuesta para evitar posibles pasos fuera de la región donde el modelo afín es válido. La solución del problema que acabamos de definir proporciona una actualización de la estimación inicial del valor de los parámetros siguiendo el esquema

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - (\mathbf{J}^{kT} \mathbf{J}^k + \alpha^k \mathbf{I})^{-1} \mathbf{J}^{kT} \mathbf{R}(\mathbf{x}^k), \quad (5.7)$$

con el parámetro α^k que depende de δ^k .

Hay que señalar que no se ha considerado ninguna limitación en el problema de minimización inicial (5.3). Sin embargo, ya se dijo en la Sección 3.1 que el polinomio característico (3.11), para casos de materiales reales, siempre tiene raíces complejas [1]. Por lo tanto, tras actualizar el valor de los parámetros en cada iteración, i.e., las constantes elásticas del material, se calculará el valor de los parámetros complejos μ_i y se verificarán las desigualdades $\text{Im}(\mu_i) \neq 0$. En realidad, en ninguno de los tests numéricos realizados, el algoritmo ha encontrado una combinación de constantes elásticas que violen dichas desigualdades, por lo que no ha sido necesario imponer un valor distinto al obtenido.

Se han implementado diversos criterios de parada para cesar el proceso de búsqueda de Levenberg-Marquardt. En concreto, alcanzar un cierto mínimo de la función objetivo (función normalizada) ($f(\mathbf{x}) \leq \epsilon_1$); obtener un valor del paso menor que un cierto límite inferior ($\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \epsilon_2 \|\mathbf{x}^k\|$); y que el gradiente (normalizado) converja a un valor mínimo ($\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\| \leq \epsilon_3$), donde $\epsilon_i = 10^{-5}$ para todos los criterios nombrados. Se toma como número máximo de iteraciones posibles $k = 100$.

5.3 SENSIBILIDAD MATERIAL DE LA ECUACIÓN INTEGRAL EN EL CONTORNO

El algoritmo de minimización descrito en la sección anterior, implica tener que evaluar el Jacobiano \mathbf{J}^k en cada iteración. \mathbf{J}^k es el gradiente del funcional de costo con respecto a las incógnitas del problema, las constantes elásticas. Por lo tanto necesitaremos calcular las expresiones de la sensibilidad o derivada de los desplazamientos, deformaciones y tensiones con respecto a variaciones en estos parámetros. Con esta finalidad, se ha utilizado un método de derivación directa, consiguiendo así que el esfuerzo computacional sea mínimo.

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial a_{ij}} \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial a_{ij}} \quad \text{or} \quad \frac{\partial t_i}{\partial a_{ij}}. \quad (5.8)$$

El proceso comienza con la derivación de la ecuación integral en el contorno (3.22) con respecto a la constante elástica de flexibilidad a_{pq} , lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta u_i(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} u_j(\mathbf{z}) + T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta u_j(\mathbf{z}) \right) d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} t_j(\mathbf{z}) + U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \delta t_j(\mathbf{z}) \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde,

$$\delta u_i = \frac{\partial u_j}{\partial a_{pq}}, \quad \delta t_i = \frac{\partial t_i}{\partial a_{pq}}, \quad (5.10)$$

son las sensibilidades de los desplazamientos y tensiones en el contorno con respecto a una constante arbitraria, respectivamente.

En esta ecuación, además de los núcleos standard U_{ij} y T_{ij} , aparecen dos nuevos núcleos, cuyo cálculo es desarrollado a continuación, y aunque no es complicado, si que resulta tedioso.

5.3.1 Derivadas de la solución fundamental

La derivada de los núcleos $U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ y $T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ es obtenida diferenciando las ecuaciones (3.18) y (3.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} = \\ \sum_{s=1}^2 2\mathbb{R} \left[\left(\frac{\partial p_{js}}{\partial a_{pq}} A_{is} + p_{js} \frac{\partial A_{is}}{\partial a_{pq}} \right) \ln(z_s - y_s) + p_{js} A_{is} \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \ln(z_s - y_s) \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{y})}{\partial a_{pq}} = \\ \sum_{s=1}^2 2\mathbb{R} \left[\left(\frac{\partial q_{js}}{\partial a_{pq}} A_{is} + q_{js} \frac{\partial A_{is}}{\partial a_{pq}} \right) \frac{\mu_s n_1 - n_2}{z_s - y_s} \right. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\left. + q_{js} A_{is} \left\{ \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \left(\frac{1}{z_s - y_s} \right) (\mu_s n_1 - n_2) + \frac{1}{z_s - y_s} \left(\frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} n_1 - n_2 \right) \right\} \right]. \quad (5.13)$$

Tras derivar con respecto a los coeficientes de flexibilidad, los nuevos términos que aparecen en (5.12) pueden ser calculados aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \left(\frac{1}{z_s - y_s} \right) = -\frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} \left[\frac{x_2 - x_2^l}{(z_s - y_s)^2} \right], \quad \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \ln(z_s - y_s) = \frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}} \frac{x_2 - x_2^l}{z_s - y_s}. \quad (5.14)$$

Si tenemos en cuenta la definición de p_{jk} y q_{jk} (3.17), sus derivadas son

$$\frac{\partial q_{1s}}{\partial a_{pq}} = \frac{\partial \mu_s}{\partial a_{pq}}, \quad \frac{\partial q_{2s}}{\partial a_{pq}} = 0, \quad \frac{\partial p_{jk}}{\partial a_{pq}} = \frac{\partial p_{jk}}{\partial \beta_{mn}} \frac{\partial \beta_{mn}}{\partial a_{pq}}, \quad (5.15)$$

donde

$$\left[\frac{\partial p_{js}}{\partial \beta_{mn}} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{mn}} \mu_s^2 + 2\beta_{11} \mu_s \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} + \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \beta_{mn}} - \frac{\partial \beta_{16}}{\partial \beta_{mn}} \mu_s - \beta_{16} \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} \\ \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \beta_{mn}} \mu_s + \beta_{12} \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} + \frac{1}{\mu_s} \frac{\partial \beta_{22}}{\partial \beta_{mn}} - \frac{\beta_{22}}{\mu_s^2} \frac{\partial \mu_s}{\partial \beta_{mn}} - \frac{\partial \beta_{26}}{\partial \beta_{mn}} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \beta_{mn}} = \delta_{im} \delta_{jn}. \quad (5.17)$$

Las derivadas de las constantes A_{is} las calcularemos resolviendo el nuevo sistema de ecuaciones que se obtiene tras derivar el sistema inicial que venía dado por la Ecuación (3.16), quedando,

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{pq}} = - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_{pq}} \mathbf{A}, \quad (5.18)$$

donde

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial a_{pq}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{i1}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i1}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i2}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial A_{i2}}{\partial a_{pq}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial a_{pq}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{\mu}_1}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial \mu_2}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{\mu}_2}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial p_{11}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{11}}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial p_{12}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{12}}{\partial a_{pq}} \\ \frac{\partial p_{21}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{21}}{\partial a_{pq}} & \frac{\partial p_{22}}{\partial a_{pq}} & -\frac{\partial \bar{p}_{22}}{\partial a_{pq}} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Para obtener las derivadas de las raíces del polinomio característico, derivaremos la Ecuación (3.11), resultando,

$$\frac{\partial \mu_k}{\partial \beta_{mn}} = - \frac{\frac{\partial \beta_{11}}{\partial \beta_{mn}} \mu_k^4 - 2 \frac{\partial \beta_{16}}{\partial \beta_{mn}} \mu_k^3 + \left(2 \frac{\partial \beta_{12}}{\partial \beta_{mn}} + \frac{\partial \beta_{66}}{\partial \beta_{mn}} \right) \mu_k^2 - 2 \frac{\partial \beta_{26}}{\partial \beta_{mn}} \mu_k + \frac{\partial \beta_{22}}{\partial \beta_{mn}}}{4\beta_{11} \mu_k^3 - 6\beta_{16} \mu_k^2 + 2(2\beta_{12} + \beta_{66}) \mu_k - 2\beta_{26}}. \quad (5.20)$$

Finalmente, habrá que tener en cuenta que para el caso de deformación plana,

$$\frac{\partial \beta_{mn}}{\partial a_{pq}} = \delta_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mp} \delta_{3q} \frac{a_{n3}}{a_{33}} - \delta_{np} \delta_{3q} \frac{a_{m3}}{a_{33}} + \delta_{3p} \delta_{3q} \frac{a_{m3}}{a_{33}} \frac{a_{n3}}{a_{33}}, \quad (5.21)$$

mientras que en un estado de tensión plana

$$\frac{\partial \beta_{mn}}{\partial a_{pq}} = \delta_{mp} \delta_{nq}. \quad (5.22)$$

Es importante señalar que el orden de singularidad de los nuevos núcleos, es igual al de los núcleos standard. Así pues, $\frac{\partial T_{ij}(z,y)}{\partial a_{pq}}$ es singular, mientras que $\frac{\partial U_{ij}(z,y)}{\partial a_{pq}}$ es débilmente singular (logarítmico), como se ha mostrado en la Sección 5.3.3.

5.3.2 Discretización de la ecuación integral de la sensibilidad

Tras el proceso de discretización de la ecuación (5.9), la ecuación de la sensibilidad puede escribirse de un modo sencillo,

$$\frac{1}{2}\delta u_i(l) + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 h_{ij}^m(l,k)\delta u_j^k(m) = \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 g_{ij}^m(l,k)\delta t_j^k(m) + \sum_{k=1}^{N_e} \sum_{m=1}^3 \left[\delta g_{ij}^m(l,k)t_j^k(m) - \delta h_{ij}^m(l,k)u_j^k(m) \right], \quad (5.23)$$

donde

$$\delta h_{ij}^m(l,k) = \int_{-1}^1 \frac{\partial T_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l)}{\partial a_{pq}} \phi_m(\xi) J^k(\xi) d\xi, \quad (5.24)$$

$$\delta g_{ij}^m(l,k) = \int_{-1}^1 \frac{\partial U_{ij}(\mathbf{z}(\xi), \mathbf{y}^l)}{\partial a_{pq}} \phi_m(\xi) J^k(\xi) d\xi. \quad (5.25)$$

El calculo de las nuevas constantes de integración $\delta h_{ij}^m(l,k)$ y $\delta g_{ij}^m(l,k)$ sera detallado en la sección siguiente, Sección (5.3.3).

Aplicando la Ecuación (5.23) en cada nodo del contorno, se consigue un nuevo sistema de ecuaciones

$$\mathbf{H}\delta \mathbf{u} = \mathbf{G}\delta \mathbf{t} + (\delta \mathbf{G} \mathbf{t} - \delta \mathbf{H} \mathbf{u}), \quad (5.26)$$

y tras reordenar las columnas del sistema una vez tenidas en cuenta las condiciones de contorno queda,

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{G} \mathbf{t} - \delta \mathbf{H} \mathbf{u}, \quad (5.27)$$

de cuya solución se obtienen las sensibilidades de los desplazamientos y tensiones en todos los puntos del contorno.

Hay que señalar que $\delta u_i(\mathbf{y}) = 0$ en todos los puntos del contorno en que $u_i(\mathbf{y})$ es especificado, y a su vez $\delta t_i(\mathbf{y}) = 0$ en todos los puntos del contorno donde $t_i(\mathbf{y})$ es conocido. Por lo tanto, la matriz del sistema \mathbf{A} es la misma que la del sistema originario.

5.3.3 Evaluación de las constantes de integración de la ecuación de la sensibilidad

Aparecen dos casos distintos a la hora de evaluar las constantes de integración $\delta h_{ij}^m(l,k)$, $\delta g_{ij}^m(l,k)$. El más simple, cuando el punto de colocación no pertenece a elemento donde integramos, se resuelve con procedimientos de cuadratura Gaussiana standard, aunque el número de abscisas dependerá de la distancia entre el nodo y el elemento.

En el segundo caso, cuando el nodo pertenece al elemento, las nuevas expresiones que surgen al calcular $\delta h_{ij}^m(l, k)$, Ecuación (5.24), conllevan el cálculo de dos nuevos tipo de integrales. El primero es una integral singular similar a la expresada en la Ecuación A2.2 del Apéndice B, cuya integración está detallada en el Apéndice C. El segundo tipo, consiste en una integral de la forma:

$$I_s = \int_{-1}^1 \left[\frac{x_2(\xi) - x_2^l}{(z_s(\xi) - y_s^l)^2} (\mu_s n_1 - n_2) - \frac{n_1}{z_s(\xi) - y_s^l} \right] \phi_m J^k d\xi, \quad (5.28)$$

que a primera vista puede parecer singular o incluso hipersingular. Sin embargo, si desarrollamos el integrando I_s , se puede probar fácilmente que todos los términos singulares se anulan. Por lo tanto, $\delta h_{ij}^m(l, k)$ es descompuesto en una parte singular, que será calculada analíticamente (ver Apéndice C), y la restante parte regular que es integrada mediante una fórmula de cuadratura Gaussiana.

En el caso del cálculo de las constantes $\delta g_{ij}^m(l, k)$, Ecuación (5.25), también aparecen dos tipos de integrales. El primero corresponde a una integral logarítmica, que se resolverá numéricamente como se detalla en el Apéndice C. Y el segundo tipo es una integral de la forma:

$$I_s = \int_{-1}^1 \frac{x_2(\xi) - x_2^l}{z_s(\xi) - y_s^l} \phi_m J^k d\xi, \quad (5.29)$$

que se calculará usando una fórmula standard de cuadratura gaussiana, ya que es una integral regular.

5.3.4 Sensibilidad material de las deformaciones y tensiones en puntos internos y del contorno

Para calcular la sensibilidad de las deformaciones en puntos internos, con respecto a una constante elástica de flexibilidad arbitraria a_{pq} , debemos derivar (3.23) con respecto a la constante, obteniendose

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_{ik}(\mathbf{z}') &= \int_{\Gamma} [V_{ijk} \delta t_j(\mathbf{z}) - S_{ijk} \delta u_j(\mathbf{z})] d\Gamma + \\ &\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial V_{ijk}}{\partial a_{pq}} t_j(\mathbf{z}) - \frac{\partial S_{ijk}}{\partial a_{pq}} u_j(\mathbf{z}) \right] d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Aparecen dos nuevos núcleos,

$$\frac{\partial V_{ijk}}{\partial a_{pq}} = - \sum_{s=1}^2 \mathbb{R} \left[\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \{p_{js} D_{iks}\} \frac{1}{(z_s - z'_s)^2} + p_{js} D_{iks} \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \frac{1}{(z_s - z'_s)^2} \right], \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{ijk}}{\partial a_{pq}} &= \sum_{s=1}^2 \mathbb{R} \left[\frac{\partial}{\partial a_{pq}} \{q_{js} D_{iks}\} \frac{\mu_s n_1 - n_2}{(z_s - z'_s)^2} + \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \{ \mu_s n_1 - n_2 \} \frac{q_{js} D_{iks}}{(z_s - z'_s)^2} + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial a_{pq}} \left\{ \frac{1}{(z_s - z'_s)^2} \right\} q_{js} D_{iks} (\mu_s n_1 - n_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Aplicando de nuevo las reglas de la derivación y teniendo en cuenta las derivadas calculadas en la sección 5.3.1, los nuevos núcleos pueden ser calculados.

Para obtener el tensor de tensiones, se deriva la ley de Hooke con respecto al coeficiente de flexibilidad,

$$\delta\sigma_i = C_{ij}\delta\varepsilon_j + \frac{\partial C_{ij}}{\partial a_{pq}}\varepsilon_j, \quad (5.33)$$

donde C_{ij} es el tensor de constantes elásticas tales que,

$$C_{ij}a_{jk} = \delta_{ik}. \quad (5.34)$$

La derivada del tensor de las constantes de elásticas con respecto a la constante de flexibilidad se calcula fácilmente diferenciando la ecuación siguiente,

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial a_{pq}} = -C_{il}\frac{\partial a_{lk}}{\partial a_{pq}}C_{kj} = -C_{ip}C_{qj}, \quad (5.35)$$

y por lo tanto,

$$\delta\sigma_i = C_{ij}\delta\varepsilon_j - C_{ip}\sigma_q. \quad (5.36)$$

Finalmente, la sensibilidad de las deformaciones y tensiones en el contorno sera calculada por medio de la sensibilidad de las deformaciones longitudinales a lo largo del contorno y de las componentes del vector de tensiones.

5.4 TESTS NUMÉRICOS DE LA SENSIBILIDAD

Para probar la precisión conseguida con el método propuesto para calcular las sensibilidades materiales, hemos comparado las soluciones obtenidas con el procedimiento numérico basado en la EIC, con las calculadas analíticamente.

Se han resuelto varios problemas de forma analítica usando la teoría de potenciales complejos [1], obteniendo expresiones para los desplazamientos y tensiones. Seguidamente, usando un software de manipulación matemática simbólica, hemos calculado las derivadas de dichas magnitudes con respecto a las constantes elásticas. Las expresiones analíticas obtenidas se resumen en el Apéndice D.

A continuación se describen detalladamente los problemas analizados.

5.4.1 Placa infinita con cavidad elíptica con presión interna

En Fig. 5.1 se muestran la geometría y el estado de cargas. Los semiejes de la elipse guardan una proporción $a/b = 2$. Las constantes elásticas ingenieriles del material de la placa son: $E_1 = 11.270 \text{ GN/m}^2$, $E_2 = 5.880 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = 0.686 \text{ GN/m}^2$, $\nu_{12} = 0.076$, por lo que el valor de las constantes elásticas de flexibilidad será: $a_{11} = 0.8503 \cdot 10^{-1}$, $a_{16} = 0.0$, $a_{12} = 0.6463 \cdot 10^{-2}$, $a_{66} = 1.4580$, $a_{26} = 0.0$, $a_{22} = 0.1701$ donde las unidades empleadas son

m^2/GN . Los ejes de la elipse coinciden con los ejes de ortotropía del material y con los ejes coordenados. Se han considerado tres estado de carga distintos, variando el ángulo incidente $\alpha = 0^\circ, 30^\circ$ y 45° . El contorno de la cavidad ha sido discretizado mediante doce elementos cuadráticos isoparamétricos.

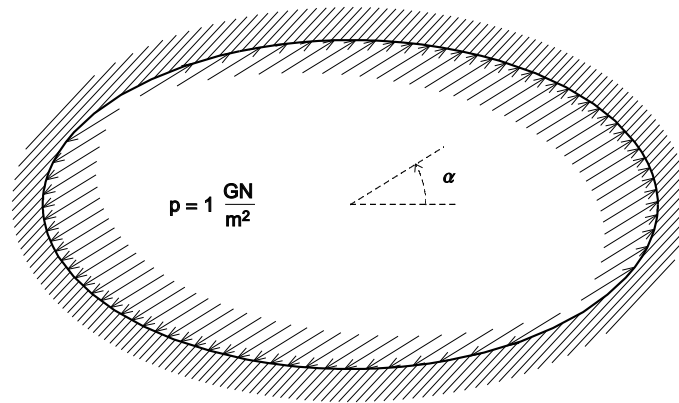


Figura 5.1: Cavidad elíptica en una placa infinita sometida a una presión interior.

En las Figuras 5.2, 5.3 y 5.4 se muestran parte de los resultados obtenidos. Se observa como los resultados analíticos y numéricos coinciden perfectamente. El método propuesto permite calcular las sensibilidades de los desplazamientos, tensiones y deformaciones, tanto en contorno como en el dominio.

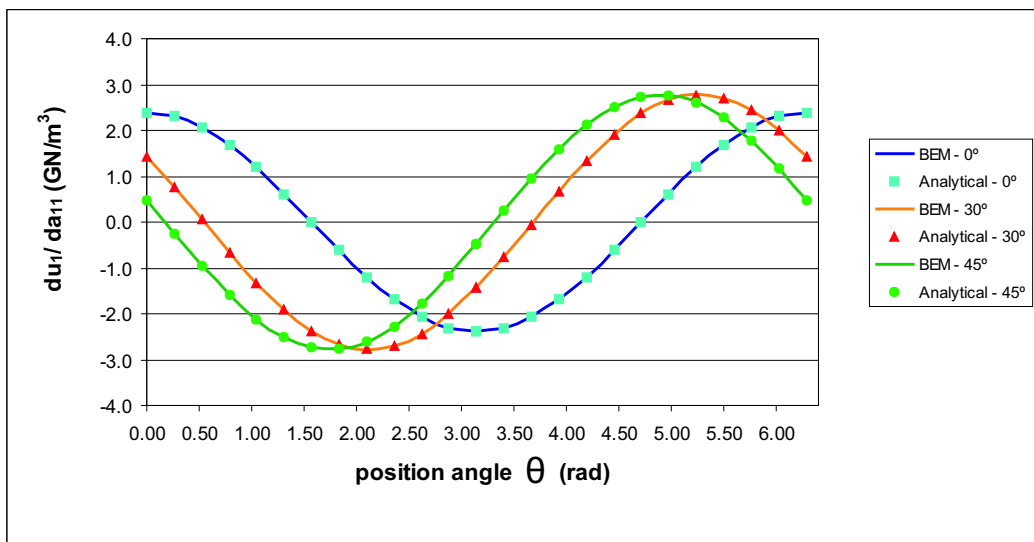


Figura 5.2: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de los desplazamientos horizontales a lo largo de contorno de la cavidad, con respecto a la constante de flexibilidad a_{11} . Ángulo de inclinación de la carga $0^\circ, 30^\circ$ y 45° .

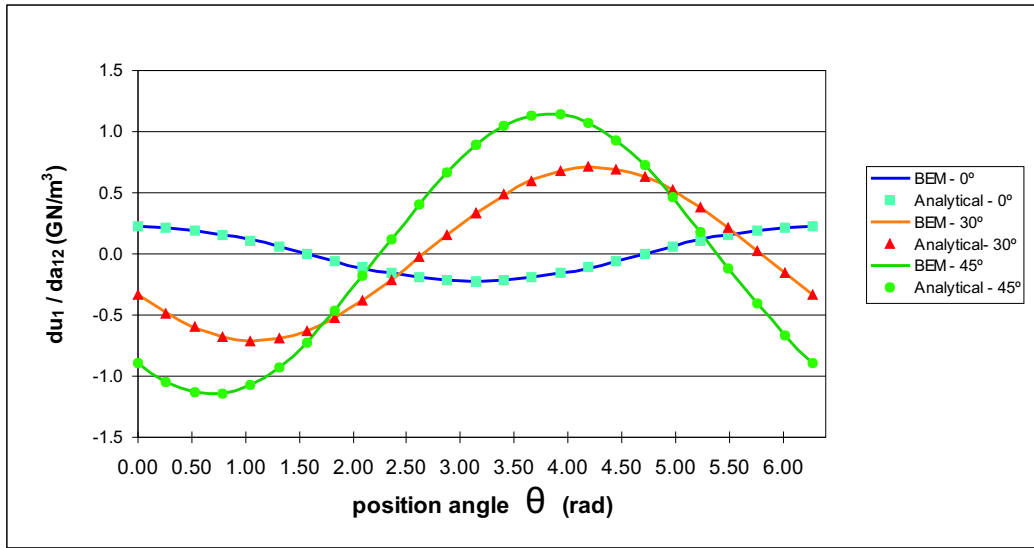


Figura 5.3: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de los desplazamientos horizontales a lo largo de contorno de la cavidad, con respecto a la constante de flexibilidad a_{12} . Ángulo de inclinación de la carga 0° , 30° y 45° .

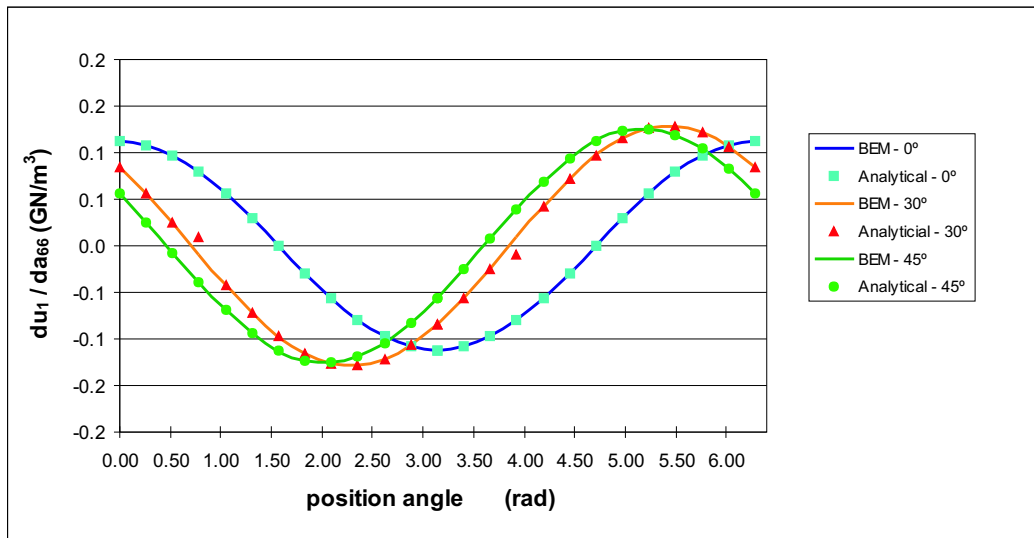


Figura 5.4: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de los desplazamientos horizontales a lo largo de contorno de la cavidad, con respecto a la constante de flexibilidad a_{66} . Ángulo de inclinación de la carga 0° , 30° y 45° .

5.4.2 Inclusión elíptica en una placa con carga remota

En la segunda aplicación, se ha considerado una inclusión elíptica en una placa infinita de material ortótropo, ver Fig. 5.5. La proporción entre los semiejes de la elipse es $a/b = 2$. La matriz de la placa es del mismo material que en el caso anterior, mientras que para la inclusión se han considerado dos posibilidades. En la primera, el núcleo es ortótropo y el

valor de sus constantes elásticas es el doble de las de la matriz. En la segunda, la inclusión es completamente rígida. El modelo de la inclusión ha sido discretizado con doce elementos.

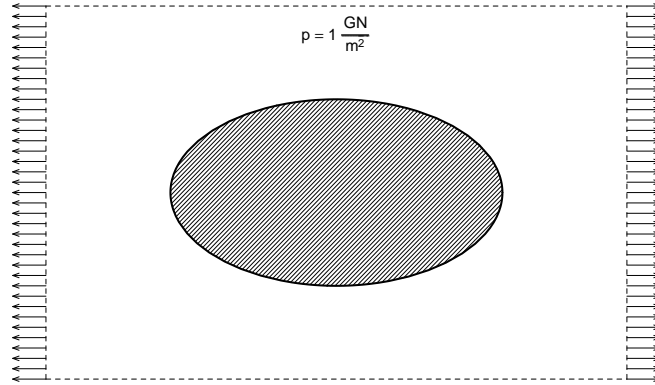


Figura 5.5: Inclusión elíptica de material ortótropo en una placa infinita de material ortótropo, sometida a cargas remotas.

En las Figuras de la 5.6 hasta la 5.11 se muestran la sensibilidad de la tensión normal con respecto a las constantes elásticas a_{11} , a_{12} y a_{66} . Para el caso de la inclusión, los resultados numéricos obtenidos para las sensibilidades con respecto a las constantes a_{11} y a_{66} , se corresponden perfectamente con los analíticos, apareciendo algunas discrepancias en el caso de la constante a_{12} . Éste es el único caso en que se ha encontrado alguna diferencia entre valor numérico y analítico. Además, puede que estas diferencias no sean del todo debidas la método numérico, ya que el cálculo analítico implica evaluar una gran cantidad de términos, y ha sido necesario afinar mucho para conseguir las expresiones analíticas.

Para resolver esta aplicación, se ha implementado un método basado en subregiones, y al calcular las sensibilidades, las constantes de flexibilidad de cada región son tratadas como variables independientes.

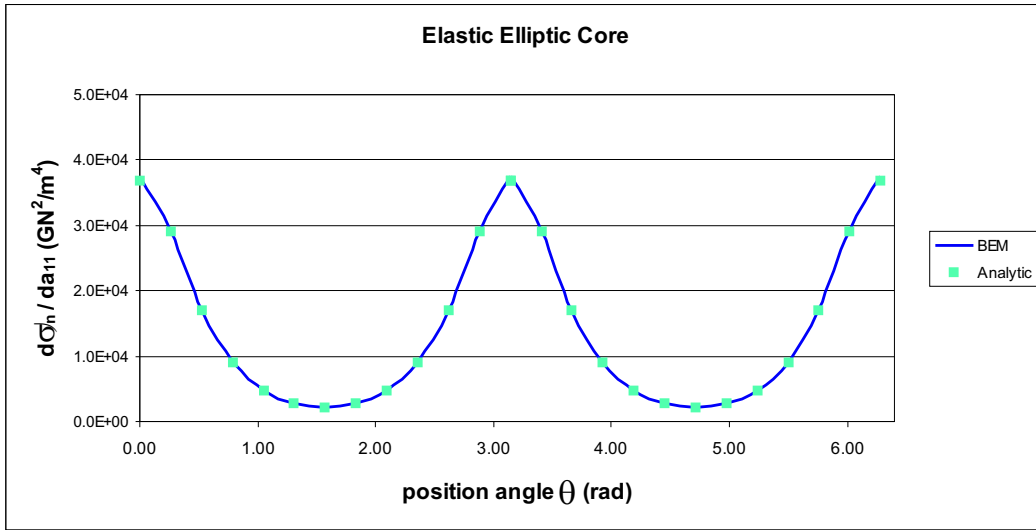


Figura 5.6: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo elástico, con respecto a la constante de flexibilidad a_{11} .

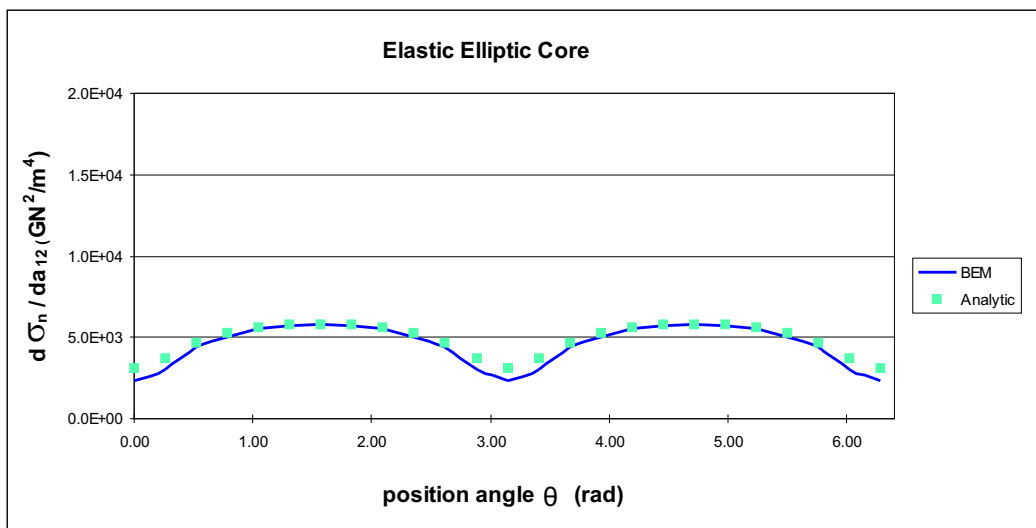


Figura 5.7: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo elástico, con respecto a la constante de flexibilidad a_{12} .

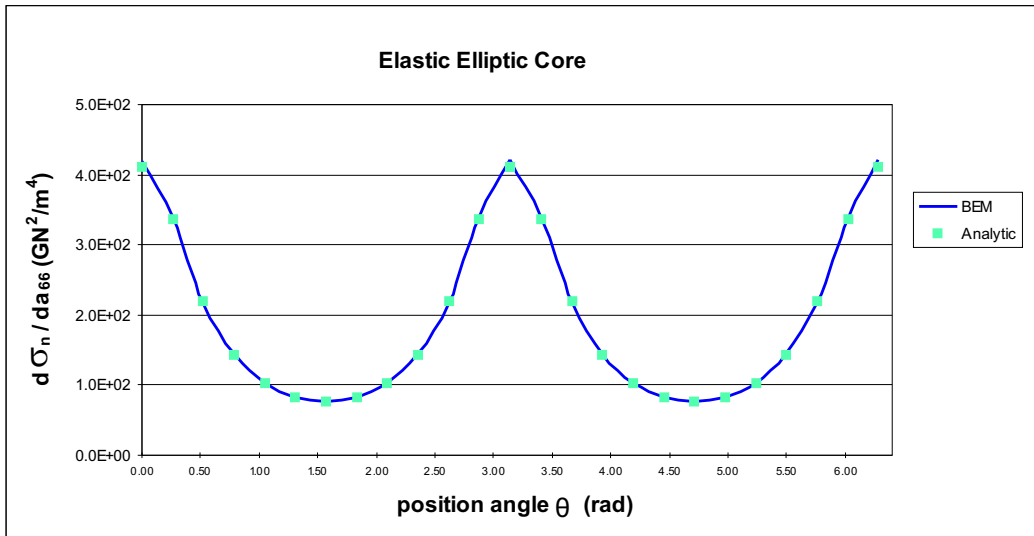


Figura 5.8: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo elástico, con respecto a la constante de flexibilidad a_{66} .

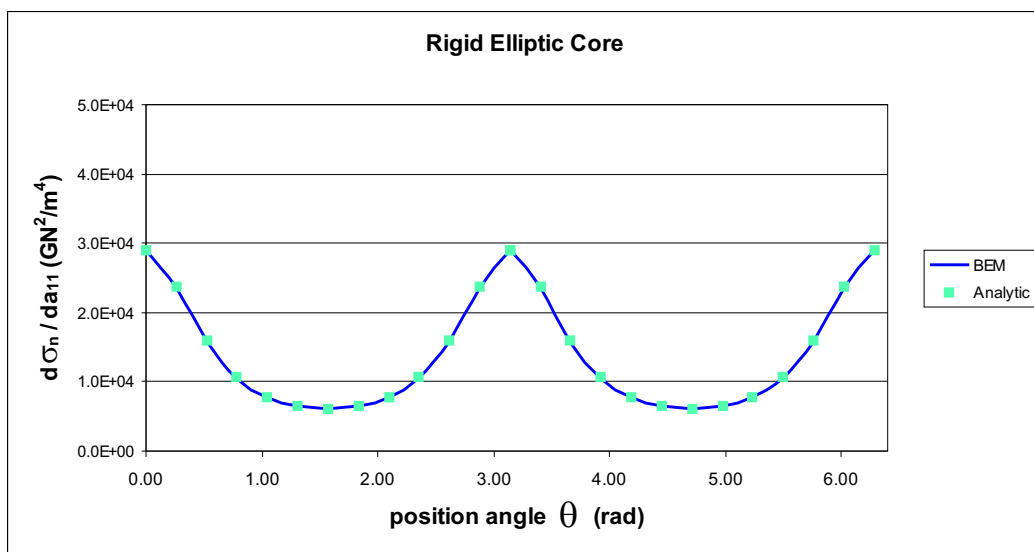


Figura 5.9: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo rígido, con respecto a la constante de flexibilidad a_{11} .

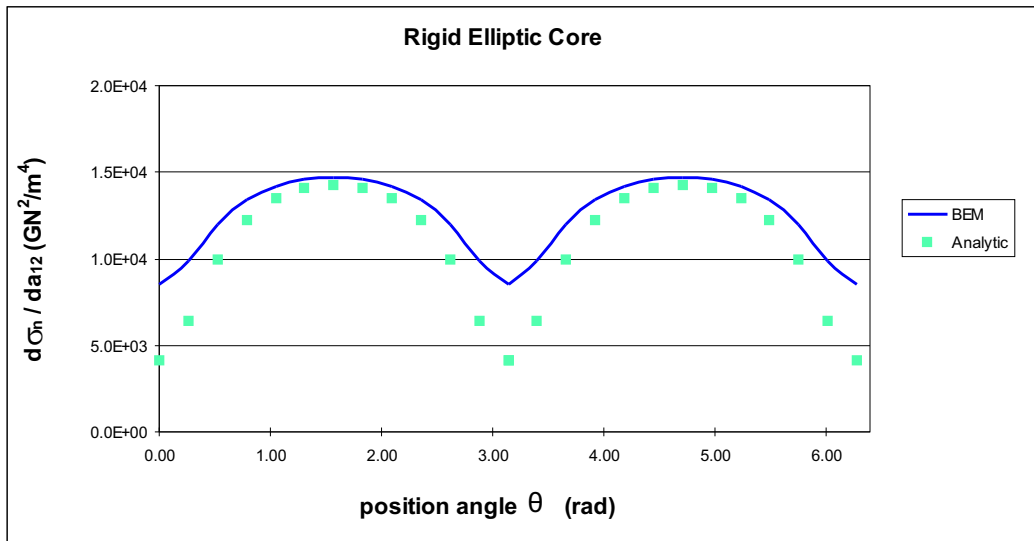


Figura 5.10: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo rígido, con respecto a la constante de flexibilidad a_{12} .

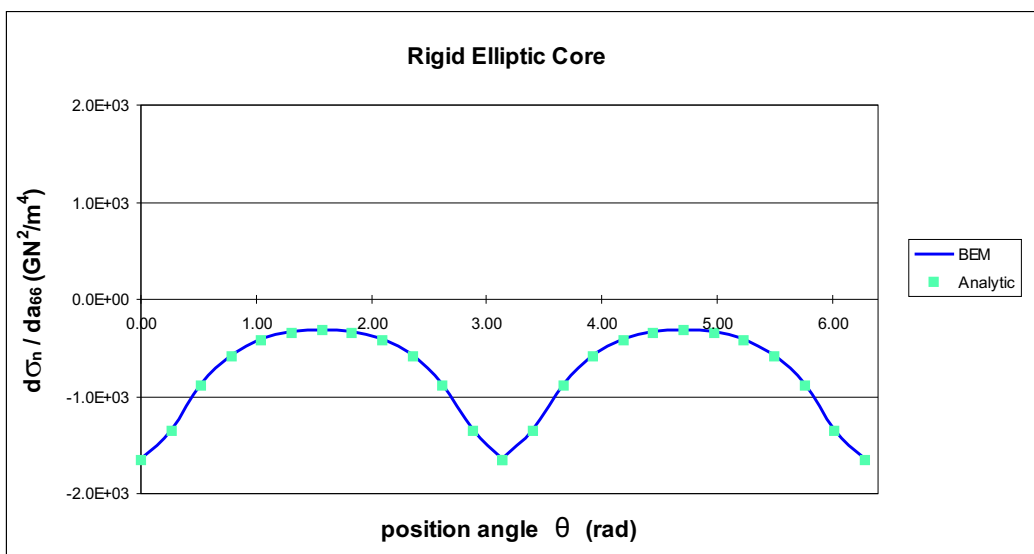


Figura 5.11: Comparación entre los resultados obtenidos de forma numérica (MEC) y de forma analítica para la sensibilidad de la componente normal de la tensión a lo largo de la interfase matriz-núcleo rígido, con respecto a la constante de flexibilidad a_{66} .

5.5 DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS: UNICIDAD DE SOLUCIÓN

Hemos obtenido la derivada del funcional basándonos en la sensibilidad de la ecuación integral en el contorno, y resolviéndola posteriormente con el método de los elementos de contorno. El paso siguiente es su implementación en el algoritmo de minimización descrito en la sección 5.2, y así concluir el problema de identificación de los parámetros. Pero hay

que analizar un aspecto, en lo referente a la determinación de las propiedades del material a partir de datos medidos en el contorno, nos referimos a la unicidad de solución.

Las constantes elásticas de un cuerpo anisótropo, o de una subregión dentro de él, no pueden determinarse de forma única para cada estado de carga y condiciones de apoyo. En primer lugar, es obvio que en regiones del dominio donde las tensiones son nulas, cualquier distribución de las constantes elásticas produciría la misma distribución de desplazamientos y tensiones en el contorno. Además, si una componente del tensor de tensiones es cero, pongamos σ_{12} , la constante elástica correspondiente en la diagonal de la matriz a_{ij} , (a_{66} en este caso) sería indeterminada. Este problema no surgirá, siempre que la región cuyas propiedades elásticas queramos identificar esté sometida a un estado de tensión general, i.e., que no sea nulo o tenga un valor muy pequeño a lo largo de la región de interés.

En segundo lugar, una distribución de tensiones uniforme dada, puede dar lugar a la misma distribución de deformaciones, y por lo tanto, los mismos desplazamientos en el contorno, para distintos materiales. Para ilustrar este fenómeno, consideremos un campo de tensiones uniforme σ_j y el correspondiente campo de deformaciones ε_i tal que (5.2),

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j \quad i = 1, 2, 6, \quad (5.37)$$

para unas constantes elásticas determinadas. Si modificamos dichas constantes de la forma, $a_{ij} + a_{ij}^*$ obtendremos las deformaciones siguientes,

$$\varepsilon_i^* = (a_{ij} + a_{ij}^*)\sigma_j \quad i = 1, 2, 6, \quad (5.38)$$

para el mismo campo de tensiones. Los campos de deformaciones cumplirán la condición $\varepsilon_i = \varepsilon_i^*$ siempre que,

$$a_{ij}^*\sigma_j = 0 \quad i = 1, 2, 6. \quad (5.39)$$

Por lo tanto, se deduce que cualquier perturbación a_{ij}^* de la matriz de constantes elásticas tal, que el tensor σ_j pertenezca a su núcleo, no cambiará el campo de deformaciones. De ahí que si el funcional de costo sólo contiene medidas de desplazamientos, y el campo de tensiones es aproximadamente constante, habrá múltiples soluciones para el problema inverso de las propiedades del material, ya que para cualquier vector de tensiones σ_j existe una matriz simétrica a_{ij}^* tal que $\sigma_j \in \text{kern}(a_{ij}^*)$. Por ejemplo, un tensor de tensiones arbitrario $\sigma_{11} = \alpha$, $\sigma_{22} = \beta$, $\sigma_{12} = \gamma$, pertenece al núcleo de la matriz,

$$a_{ij}^* = \begin{pmatrix} \beta^2 + \gamma^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ -\alpha\beta & \alpha^2 + \gamma^2 & -\beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Por último, en casos en que el estado de carga y los apoyos sean tales que el problema directo sea isostático (estáticamente determinado), el campo de tensiones, por definición, será insensible a cambios en las constantes elásticas. Obviamente, es este caso, el problema inverso basado en un funcional de costo que solo contenga mediciones de las tensiones en el contorno, tendrá múltiples soluciones.

Para evitar las tres situaciones mencionadas anteriormente, las condiciones de contorno y de carga, y las mediciones realizadas en el contorno, deben ser diseñadas de un modo apropiado. El campo de tensiones deberá ser general, i.e., que ninguna de sus componentes sea nula. Además, el funcional de costo debe contener mediciones en el contorno de ambos tipos, desplazamientos y tensiones, si fuera necesario. Sin olvidar que el campo de tensiones debe ser variable y sensible a cambios en las constantes elásticas, si es posible, i.e., estáticamente indeterminado. Finalmente, el número de constantes a determinar puede ser reducido, para así evitar la existencia de perturbaciones a_{ij}^* tales que $a_{ij}^* \sigma_j = 0$.

No obstante, no es fácil diseñar un problema inverso de forma que las seis constantes elásticas puedan ser obtenidas a partir de un experimento único, aún cumpliéndose las condiciones previamente mencionadas, ya que el funcional de costo dependerá mucho más de unas constantes que de otras, como se demuestra a continuación en los ejemplos numéricos.

5.6 TESTS NUMÉRICOS PARA EL PROBLEMA INVERSO

5.6.1 Definición de los tests

La eficacia del método propuesto para la identificación de las propiedades de un material, es probada con tres ejemplos distintos. El primero y segundo consisten en una placa cuadrada homogénea de un material anisótropo. Ambos casos difieren en las condiciones de carga. Los valores de las seis constantes elásticas están detallados a continuación, donde el subíndice 1 representa al eje horizontal y el 2 el vertical, (en $\frac{\text{m}^2}{\text{GN}}$),

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.41666 \cdot 10^{-2}, & a_{16} &= 0.41666 \cdot 10^{-3}, & a_{12} &= -0.12500 \cdot 10^{-2}, \\ a_{66} &= 0.76920 \cdot 10^{-2}, & a_{26} &= 0.26320 \cdot 10^{-3}, & a_{22} &= 0.26320 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

El tercer ejemplo consiste en una placa cuadrada con una inclusión de un material distinto. Las propiedades del material de la inclusión serán las incógnitas a identificar, y sus valores exactos son los mismos que en (5.41). Las constantes elásticas del material matriz son consideradas conocidas y sus valores son los mostrados abajo (en $\frac{\text{m}^2}{\text{GN}}$),

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0.83332 \cdot 10^{-2}, & a_{16} &= 0.83332 \cdot 10^{-3}, & a_{12} &= -0.2500 \cdot 10^{-2}, \\ a_{66} &= 0.1538 \cdot 10^{-1}, & a_{26} &= 0.5555 \cdot 10^{-3}, & a_{22} &= 0.5555 \cdot 10^{-2}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

El contorno exterior de la placa, en los tres casos definidos, ha sido modelizado con 24 elementos cuadráticos isoparamétricos. Se han medido los desplazamientos en el contorno de la placa en distintas posiciones (ver Figura 5.12). Para el caso 1 se han tomado 18 medidas y 20 para los casos 2 y 3. Estas mediciones no son reales en el sentido de que han sido simuladas con el código Fortran basado en el MEC, usando en el modelo las constantes elásticas buscadas. Para evitar cometer el *crimen inverso*, hemos añadido ruido Gaussiano a estos datos simulados.

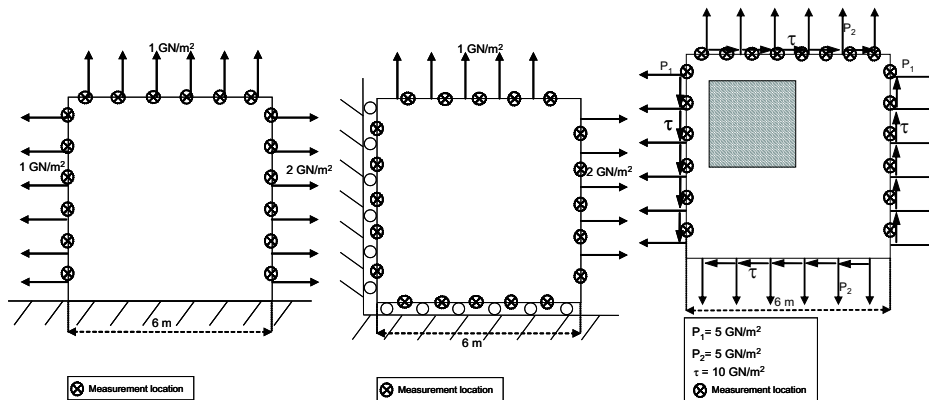


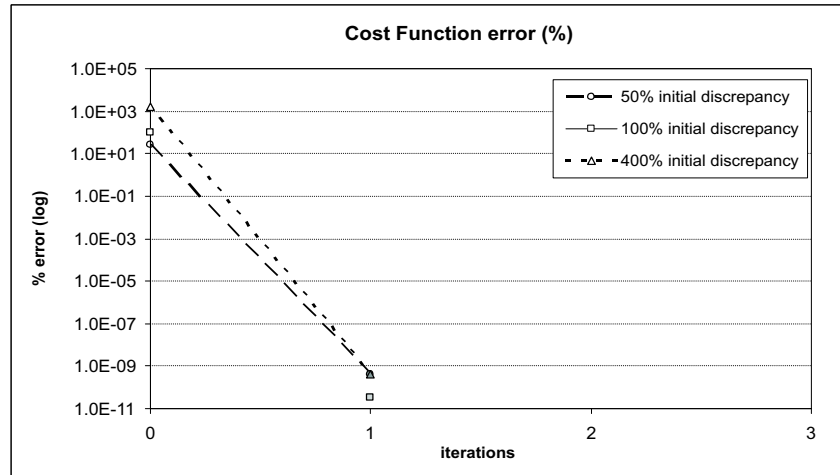
Figura 5.12: Geometría y estados de carga, casos 1-2-3

5.6.2 Resultados

Se han corrido ejemplos de dos tipos. En el primero no se considera error en los datos experimentales simulados. En el segundo, los datos han sido perturbados con pequeños errores, siguiendo una distribución Gaussiana, y así podremos probar si el algoritmo es estable.

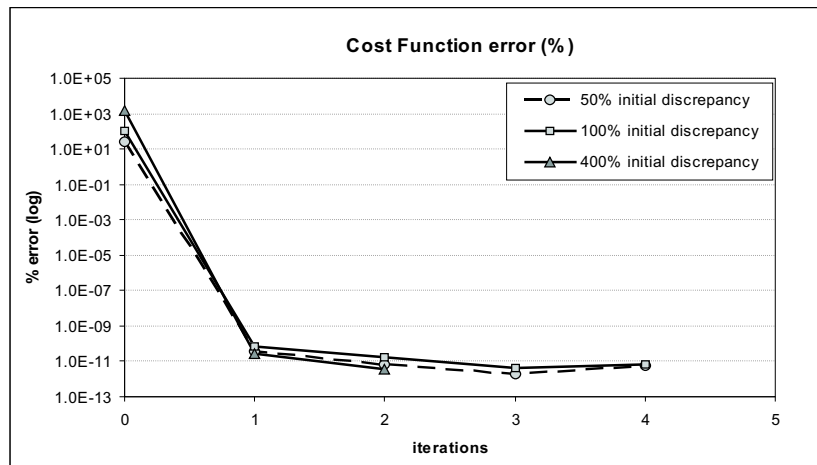
Tests con datos exactos

Debemos estimar el valor de seis constantes incógnita. Para ello se parte de tres valores iniciales distintos en la búsqueda, cada uno de ellos se aleja del valor real en un 50%, 100% y 400%, respectivamente. Las Figuras 5.13 a 5.15 muestran la evolución de la función de costo frente al número de iteraciones. Debajo de cada gráfico se muestran en una tabla los valores iniciales de las constantes y el valor que alcanzan en la última iteración.



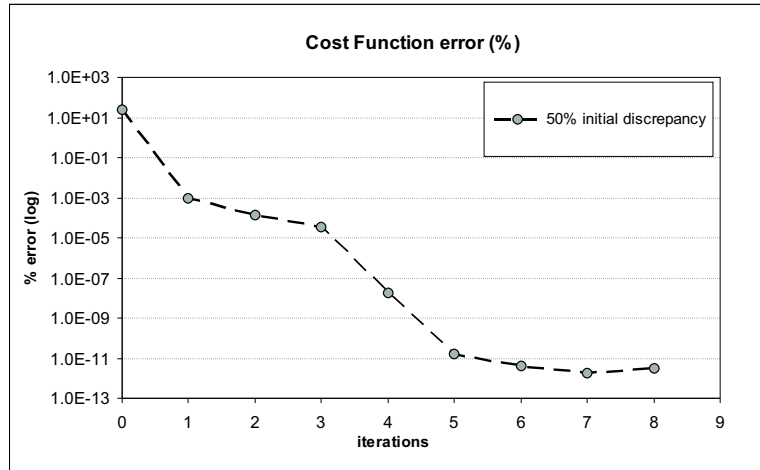
Elastic Constant	Real a_{ij}	% initial discrepancy between elastic constants and their real value					
		50%		100%		400%	
		Initial a_{ij}	Final a_{ij}	Initial a_{ij}	Final a_{ij}	Initial a_{ij}	Final a_{ij}
a_{11}	4.16660E-03	6.24990E-03	4.16660E-03	8.33320E-03	4.16660E-03	2.08330E-02	4.16660E-03
a_{16}	4.16660E-04	6.24990E-04	4.16665E-04	8.33320E-04	4.16655E-04	2.08330E-03	4.16672E-04
a_{12}	-1.25000E-03	-1.87500E-03	-1.25000E-03	-2.50000E-03	-1.25000E-03	-6.25000E-03	-1.25001E-03
a_{66}	7.69200E-03	1.15380E-02	7.69199E-03	1.53840E-02	7.69201E-03	3.84600E-02	7.69200E-03
a_{26}	2.63200E-04	3.94800E-04	2.63198E-04	5.26400E-04	2.63198E-04	1.31600E-03	2.63199E-04
a_{22}	2.63200E-03	3.94800E-03	2.63200E-03	5.26400E-03	2.63200E-03	1.31600E-02	2.63201E-03

Figura 5.13: Minimización de la función de costo con datos experimentales exactos para el ejemplo del caso 1



Elastic Constant	Real a_{ij}	% initial discrepancy between elastic constants and their real value					
		50%		100%		400%	
		Initial a_{ij}	Final a_{ij}	Initial a_{ij}	Final a_{ij}	Initial a_{ij}	Final a_{ij}
a_{11}	4.16660E-03	6.24990E-03	4.16660E-03	8.33320E-03	4.16660E-03	2.08330E-02	4.16661E-03
a_{16}	4.16660E-04	6.24990E-04	4.16665E-04	8.33320E-04	4.16660E-04	2.08330E-03	4.16667E-04
a_{12}	-1.25000E-03	-1.87500E-03	-1.25000E-03	-2.50000E-03	-1.24999E-03	-6.25000E-03	-1.25001E-03
a_{66}	7.69200E-03	1.15380E-02	7.69206E-03	1.53840E-02	7.69199E-03	3.84600E-02	7.69212E-03
a_{26}	2.63200E-04	3.94800E-04	2.63191E-04	5.26400E-04	2.63200E-04	1.31600E-03	2.63189E-04
a_{22}	2.63200E-03	3.94800E-03	2.63200E-03	5.26400E-03	2.63198E-03	1.31600E-02	2.63202E-03

Figura 5.14: Minimización de la función de costo con datos experimentales exactos para el ejemplo del caso 2



% initial discrepancy between elastic constants and their real value			
50%			
Elastic Constant	Real a_{ij}	Initial a_{ij}	Final a_{ij}
a_{11}	4.16660E-03	6.24990E-03	4.16672E-03
a_{16}	4.16660E-04	6.24990E-04	4.16558E-04
a_{12}	-1.25000E-03	-1.87500E-03	-1.24995E-03
a_{66}	7.69200E-03	1.15380E-02	7.69209E-03
a_{26}	2.63200E-04	3.94800E-04	2.63140E-04
a_{22}	2.63200E-03	3.94800E-03	2.63206E-03

Figura 5.15: Minimización de la función de costo con datos experimentales exactos para el ejemplo del caso 3

La buena convergencia de las constantes elásticas a su valor real es evidente. Estos son casos no muy sensibles a pequeñas variaciones en las constantes, por lo que la relación entre la función de costo y las propiedades del material es casi cuadrática. Ésto implica que el mínimo es alcanzado en sólo una o muy pocas iteraciones. Para el caso 3, ver Figura 5.15, la convergencia se tiene solo cuando el valor inicial supuesto para la búsqueda, no difiere mucho del valor exacto (50%). Para situaciones en que el valor de partida está muy alejado, el algoritmo no converge a la una buena solución, debido a la existencia de mínimos locales.

Tests con datos con errores

En situaciones prácticas de la vida real, es imposible obtener datos experimentales exactos cuando medimos magnitudes físicas. Además, el modelo numérico nunca representa perfectamente el comportamiento exacto real del espécimen. De ahí, que cuando se resuelven problemas inversos, hay que estudiar aspectos como la posibilidad de que existan errores en dichas mediciones. La figuras a continuación, muestran ejemplos en los que las medidas simuladas han sido modificadas añadiéndole porcentajes de error Gaussiano entre un 2% y un 5%.

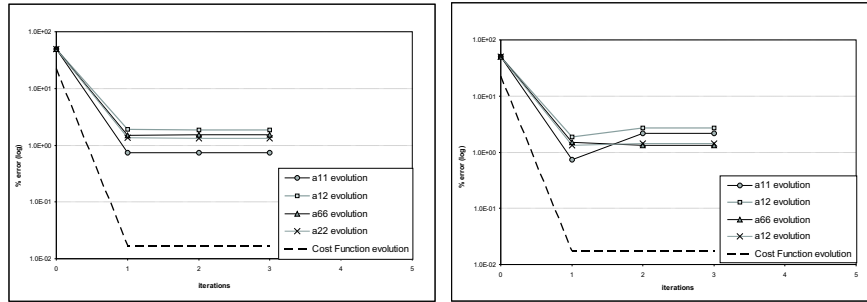


Figura 5.16: Minimización de la función de costo con un 2% (izquierda) y 5% (derecha) de error aleatorio en los datos experimentales para el ejemplo del caso 1.

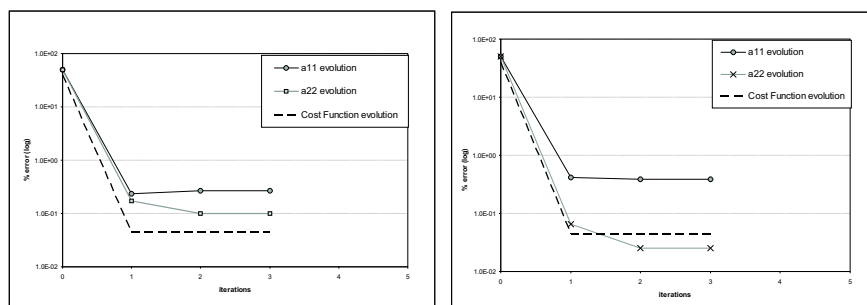


Figura 5.17: Minimización de la función de costo con un 2% (izquierda) y 5% (derecha) de error aleatorio en los datos experimentales para el ejemplo del caso 2.

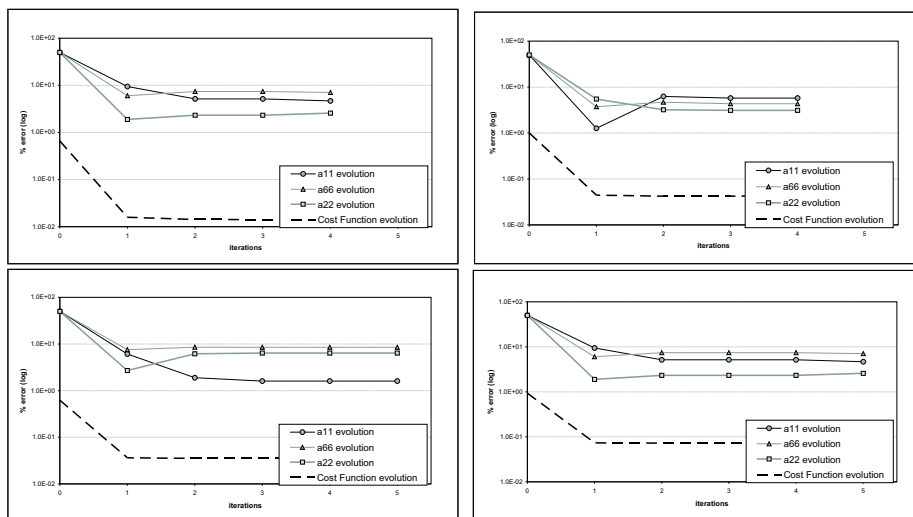


Figura 5.18: Minimización de la función de costo con un 2% de error aleatorio en los datos experimentales para el ejemplo del caso 3, cuatro ejecuciones del programa distintas

Las figuras 5.16 y 5.17 representan la identificación de cuatro parámetros para el caso 1 y dos parámetros para el caso 2, con 2% y 5% de error introducido en las mediciones. La Figura 5.18 muestra los resultados obtenidos al ejecutar el programa cuatro veces para el caso 3, con un error aleatorio del 2%. En las cuatro ocasiones, tres de los valores de constantes

elásticas obtenidos fueron satisfactorios. El proceso de minimización cuando introducimos ruido en los datos se complica bastante ya que la función objetivo tiene mínimos locales. La no-linealidad de esta función produce situaciones en las que especímenes de materiales distintos pueden tener distribuciones de tensión/deformación muy similar. La Figura 5.19 ilustra la superficie de la función objetivo cuando los valores de a_{11} y a_{66} varían ($\pm 50\%$ de su valor real), para el caso 3. Se ha introducido un 2% de error en los datos experimentales. Hay que señalar que la función de costo es mucho más sensible a cambios en a_{66} que a a_{11} y por tanto es difícil calcular el mínimo.

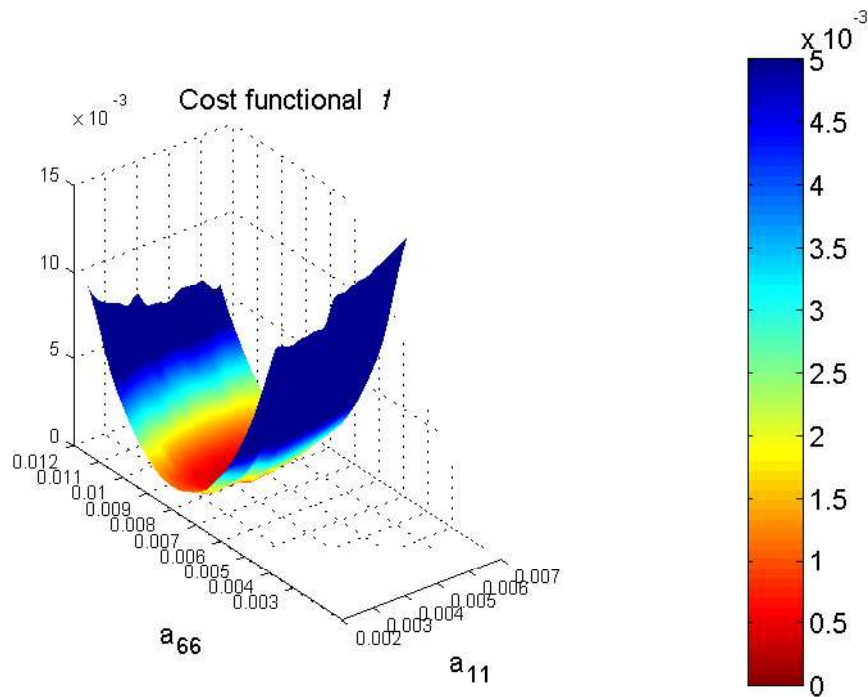


Figura 5.19: Superficie mínima del funcional de costo con 2% error en datos experimentales para el caso 3, con variaciones en a_{11} y a_{66}

CAPÍTULO 6

PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN: MÉTODO DE LA VARIABLE ADJUNTA

6.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN

En este capítulo se aborda otro tipo de problema inverso, el cual aparece cuando buscamos defectos en un material mediante técnicas de evaluación no destructiva. Según la clasificación de Kubo [19], esta situación es llamada *Problema Inverso de Identificación*. Las incógnitas son la posición y forma de cavidades internas de un cuerpo. Por lo tanto la incógnita es parte de la geometría.

El problema inverso se ha definido en un cuerpo bidimensional homogéneo de un material elástico anisótropo. El dominio Ω , cuyo contorno exterior notaremos con Γ , tiene ciertas cavidades, Ω^- , de forma arbitraria y contorno Γ_v , ver Figura 6.1. Su situación y forma son desconocidos a priori. Aunque la formulación se va a desarrollar para el caso de cavidades huecas, libres de esfuerzos, el procedimiento es extensible a otros tipos de defectos como grietas e inclusiones.

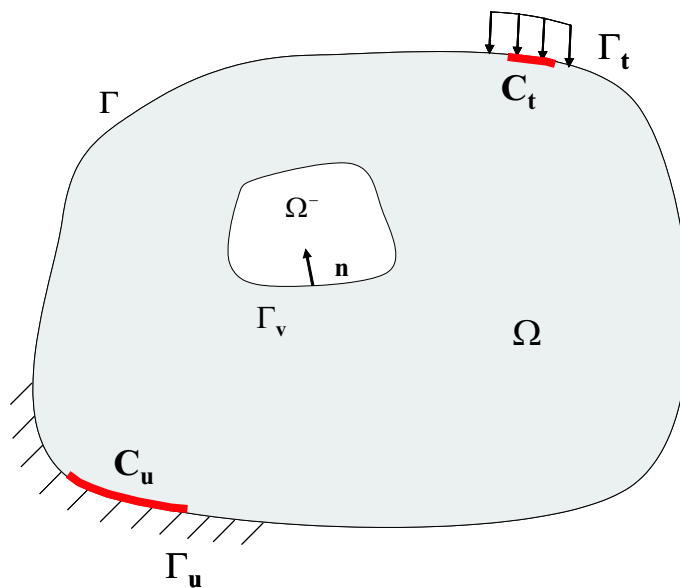


Figura 6.1: Cuerpo elástico anisótropo

Las variables del problema: \mathbf{u} desplazamientos, $\boldsymbol{\varepsilon}$ deformaciones, $\boldsymbol{\sigma}$ tensiones están relacionadas mediante las ecuaciones de la elasticidad lineal (Section 2.1.1.). Para el caso de ausencia de fuerzas de volumen,

$$\begin{aligned}
\sigma_{ji,j} &= 0 & \text{in } \Omega, \\
u_i &= \tilde{u}_i & \text{on } \Gamma_u, \\
t_i &= \tilde{t}_i & \text{on } \Gamma_t, \\
t_i &= \sigma_{ij}n_j = 0 & \text{on } \Gamma_v, \\
\sigma_i &= C_{ij}\varepsilon_j & \text{in } \Omega, \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) & \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

siendo \mathbf{n} normal exterior al contorno Γ_v , y Γ_u y Γ_t representan las partes del contorno donde los desplazamientos y tensiones están prescritos, respectivamente. La respuesta elástica del sistema, desplazamientos \mathbf{u} y tensiones \mathbf{t} , dependerá de la geometría del contorno Γ_v que es desconocida. Por lo tanto, notaremos a los desplazamientos y tensiones con \mathbf{u}_{Γ_v} y \mathbf{t}_{Γ_v} .

Para la resolución del *PI de Identificación*, se necesita información adicional. En particular, se asume que disponemos de medidas de los desplazamientos y/o tensiones, $\hat{\mathbf{u}}$ y/o $\hat{\mathbf{t}}$, en superficies exteriores C_u y/o C_t , respectivamente. Como en el problema inverso resuelto en el capítulo anterior, el problema es abordado como la minimización del residuo, diferencia entre las medidas experimentales y los valores calculados en una configuración supuesta \mathbf{u}_{Γ_v} y \mathbf{t}_{Γ_v} . Si J es la función de costo que representa el residuo calculado con diferencia por mínimos cuadrados, el funcional a minimizar queda \mathfrak{J} ,

$$\mathfrak{J}(\Gamma_v) = J(\mathbf{u}_{\Gamma_v}, \mathbf{t}_{\Gamma_v}) = \int_{C_u} j_u(\mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}})d\Gamma + \int_{C_t} j_t(\mathbf{t}, \hat{\mathbf{t}})d\Gamma, \tag{6.2}$$

siendo $j_u = \frac{1}{2}|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}|^2$ y $j_t = \frac{1}{2}|\mathbf{t} - \hat{\mathbf{t}}|^2$. La minimización de \mathfrak{J} depende de Γ_v sólo a través de \mathbf{u}_{Γ_v} y \mathbf{t}_{Γ_v} .

Los algoritmos de minimización más efectivos, como el BFGS, Gradientes conjugados... [5], implican el cálculo de las derivadas del funcional \mathfrak{J} con respecto a las incógnitas del problema. En este caso, dichas incógnitas son los parámetros de diseño del contorno Γ_v que determinan la posición y forma de la cavidad. Estas derivadas son llamadas *sensibilidades geométricas*. El hecho de que el funcional que se quiere minimizar, solo contenga valores en el borde, nos sugiere el uso de técnicas basadas en el método de los elementos de contorno. Además, en problemas donde la geometría es la incógnita principal, el uso del MEC que ofrece un esfuerzo para el modelado mínimo, supone un gran ahorro en lo que a coste computacional se refiere. De ahí que en este capítulo se presente una estrategia completa para la

detección de cavidades en problemas anisótropo planos, basada en el método de resolución numérica de los elementos de contorno.

6.2 SENSIBILIDAD GEOMÉTRICA

La forma más simple de abordar el cálculo de la sensibilidad geométrica, sería usando técnicas de derivación numérica como el método de las Diferencias Finitas. Sin embargo, esta técnica, además de ser cara, computacionalmente hablando, constituye un problema matemático *mal planteado* y propenso a acarrear problemas de precisión. Por ello, se propone usar un método de diferenciación analítica, el *Método de la Variable Adjunta*, con el que al final obtendremos una expresión sencilla de la sensibilidad con valores únicamente de contorno. Esta metodología nos parece la muy adecuada ya que sólo habrá que resolver un problema adicional, el llamado estado adjunto, por cada funcional a minimizar, [78]. No obstante, para comprobar la bondad y exactitud del gradiente calculado con este método, hemos contrastado los resultados conseguidos con otras sensibilidades calculadas con el método de las Diferencias Finitas.

6.2.1 Diferenciación Material

Se pretende calcular la sensibilidad geométrica de un funcional integral que depende de la forma $\mathfrak{J}(\Gamma_v)$, es decir, se investigan las variaciones de \mathfrak{J} cuando existen pequeñas perturbaciones en la geometría, Γ_v . Para ello, se introduce el concepto de *diferenciación material*. Lo primero será definir dichas perturbaciones de Γ_v , para ello se describe la transformación de un punto \mathbf{x} de Γ_v como:

$$\mathbf{x} \in \Gamma_v \Rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} = \mathbf{x} + \Theta(\mathbf{x})\boldsymbol{\tau}, \quad (6.3)$$

siendo Θ la velocidad de transformación, que solo afecta al contorno Γ_v , y $\boldsymbol{\tau}$ un vector de parámetros de diseño de la transformación ($\boldsymbol{\tau} \geq 0$).

Las derivadas materiales de integrales de dominio o contorno pueden expresarse de diversas formas. Según Petryc y Mroz [81], para una función $a(\mathbf{x}, \tau)$ suficientemente regular y una superficie Ω de contorno cerrado suave Γ :

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} a(\mathbf{x}, \tau) d\Omega = \int_{\Omega} [a_{,\tau}(\mathbf{x}, \tau) + a(\mathbf{x}, \tau)\Theta_{i,i}(\mathbf{x})] d\Omega, \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Gamma} a(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma = \int_{\Gamma} [a_{,\tau}(\mathbf{x}, \tau) + a(\mathbf{x}, \tau)\Theta_{i,i}^S(\mathbf{x})] d\Gamma, \quad (6.5)$$

donde $\Theta_{i,i}^S$ es la divergencia superficial del vector Θ que se calcula mediante $\Theta_{i,i}^S = \Theta_{i,i} - \Theta_{i,n}n_i$.

6.2.2 Método de la Variable Adjunta

El problema de minimización del funcional $\mathfrak{J}(\Gamma_v)$ se abordará como la minimización de $J(\mathbf{u}, \mathbf{t})$ condicionada a $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\Gamma_v}$ y $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{\Gamma_v}$. Para ello, partimos del funcional aumentado \mathfrak{L} de J :

$$\mathfrak{L}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) = J(\mathbf{u}, \mathbf{t}) + \mathfrak{A}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v), \quad (6.6)$$

igualdad que se cumple siendo $\mathfrak{A}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v)$ la formulación débil del problema directo original (6.1):

$$\mathfrak{A}(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) = \int_{\Omega} [\sigma_{ij} w_{i,j}] d\Omega + \int_{\Gamma} [\sigma_{ij} n_j w_i] d\Gamma = 0 \quad (6.7)$$

donde la función test \mathbf{w} es un multiplicador Lagrangiano perteneciente al espacio de funciones: $\mathfrak{W} = \{\mathbf{w} \in \{H_{loc}^1(\Omega)\}^3\}$.

Tomando la derivada material del nuevo funcional \mathfrak{L} , aplicando las Ecuaciones (6.4) y (6.5) y reagrupando términos se tiene:

$$\mathfrak{L}^*(\mathbf{u}, \mathbf{w}; \Gamma_v) = \mathfrak{L}_{,\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{,\tau} + \mathfrak{L}_{,\Gamma_v} \cdot \Theta \quad (6.8)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{,\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_{,\tau} &= \int_{C_u} [j_{u,u} \cdot \mathbf{u}_{,\tau}] d\Gamma + \int_{C_t} [j_{t,t} \cdot \mathbf{t}_{,\tau}] d\Gamma + \int_{\Omega} [\sigma_{ij}^{\tau} w_{i,j}] d\Omega, \\ \mathfrak{L}_{,\Gamma_v} \cdot \Theta &= \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} w_{i,j}) \Theta_{i,i}] d\Omega - \int_{\Omega} [(\sigma_{ij} w_{i,j} + \sigma_{ij}^w u_{i,j}) \Theta_{i,j}] d\Omega, \end{aligned} \quad (6.9)$$

siendo σ^{τ} y σ^w los tensores de tensiones correspondientes a los campos de desplazamientos $\mathbf{u}_{,\tau}$ y \mathbf{w} , respectivamente.

Las variaciones de \mathfrak{L} pueden producirse solo cuando $\Theta \neq 0$, por lo que los multiplicadores de Lagrange \mathbf{w} serán tales que cumplan

$$\mathfrak{L}_{,\mathbf{u}}(\mathbf{u}_{\Gamma_v}, \mathbf{w}_{\Gamma_v}; \Gamma_v) \cdot \mathbf{u}_{,\tau} = 0 \quad \forall \mathbf{u}_{,\tau} \in \mathfrak{W}. \quad (6.10)$$

Esta ecuación representa la formulación débil de un problema elastostático bien planteado al que llamaremos “estado adjunto” y cuya formulación fuerte se define a continuación,

$$\begin{aligned} \sigma_{j,i,j}^w &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{w}_i = \widetilde{\mathbf{w}}_i &= +j_{,t} \quad \text{en } C_t, \quad \mathbf{w}_i = 0 \quad \text{en } \Gamma_u/C_t, \\ t_i = \widetilde{t}_i &= -j_{,u} \quad \text{en } C_u, \quad t_i = 0 \quad \text{en } \Gamma_t/C_u. \end{aligned} \quad (6.11)$$

La derivada material de \mathfrak{J} puede ser calculada pues con:

$$\mathfrak{J}^* = \mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}_{,\Gamma_v}(\mathbf{u}_{\Gamma_v}, \mathbf{w}_{\Gamma_v}; \Gamma_v) \cdot \Theta. \quad (6.12)$$

Manipulamos la ecuación para conseguir una expresión en el contorno. Primero, separamos el tensor $w_{i,j}$ en su parte simétrica y su parte antimétrica, y después se aplica el Teorema de la Divergencia, obteniendo una integral en el contorno.

$$\mathfrak{L}^* = \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij} w_{i,j}) \Theta_n] d\Gamma - \int_{\Gamma} [(\sigma_{ij} n_j w_{i,j} + (\sigma_{ij}^w n_j) u_{i,j}) \Theta_i] d\Gamma, \quad (6.13)$$

donde Θ_n es la componente normal del vector velocidad de transformación. Si además se tiene en cuenta que los contornos de las cavidades están libres de tensiones, y que $\Theta = 0$ en Γ/Γ_v

$$\mathfrak{J}^* = \frac{d\mathfrak{J}}{d\tau} = \int_{\Gamma_v} [(\sigma_{ij} w_{i,j}) \Theta_n] d\Gamma. \quad (6.14)$$

A continuación, se emplea la descomposición en gradiente tangencial o superficial [77], obtenemos

$$\mathfrak{J}^* = \frac{d\mathfrak{J}}{d\tau} = \int_{\Gamma_v} [(\sigma_{ij} w_{i,j}^S) \Theta_n] d\Gamma, \quad (6.15)$$

donde $w_{i,j}^S$ es el gradiente superficial del campo de desplazamientos \mathbf{w} que se calcula como sigue $w_{i,j}^S = w_{i,j} - w_{i,n} n_j$. La Ecuación (6.15) nos proporciona la derivada material del funcional \mathfrak{J} o *sensibilidad geométrica* \mathfrak{J} , en dicha expresión sólo intervienen derivadas tangenciales y valores en el contorno del defecto Γ_v . Si se desarrolla el producto del integrando en unos ejes locales ($x'_1 = \mathbf{n}, x'_2 = \text{tangente}$) se puede observar que se simplifica notablemente ya que el tensor de tensiones local, σ' , en el contorno Γ_v :

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

por lo que finalmente tenemos:

$$\mathfrak{J}^* = \frac{d\mathfrak{J}}{d\tau} = \int_{\Gamma_v} [(\sigma'_{22} w'_{2,2}) \Theta_n] d\Gamma. \quad (6.16)$$

6.3 PARAMETRIZACIÓN

La variación de la geometría se representa normalmente por una parametrización. Aquí, hemos usado el concepto desarrollado por Gallego *et al.*[80]. Consiste en definir directamente el campo de variaciones en lugar de la propia geometría. Esto significa que aplicando un campo de deformaciones a una geometría inicial, esta sea capaz de deformarse hasta llegar a cualquier solución posible. Definimos la parametrización es definida como sigue

$$\delta x_i(\mathbf{x}) = \Theta_{ip} \delta \tau_p \quad (6.17)$$

donde Θ_{ip} es la matriz de parametrización y $\delta\tau_p$ es un vector con parámetros τ .

Se ha escogido como parametrización un campo de deformación lineal bidimensional, por lo tanto será definido mediante 6 parámetros. La matriz de parametrización y el vector de parámetros son los siguientes, [76]:

$$\Theta_{ip} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_2 & x_1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 1 & -x_1 & x_2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

con $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{real} - \mathbf{x}^{cg}$, es decir, \mathbf{x} es medido con respecto al centroide del defecto. El vector con los 6 parámetros elegidos $\delta\tau_p$ es el siguiente:

$$\delta\tau_p = \begin{bmatrix} \delta x_1^{cg} \\ \delta x_2^{cg} \\ \delta\omega \\ \delta\epsilon_m \\ \delta\epsilon_1 \\ \delta\epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{primera coordenada del centroide del defecto} \\ \text{segunda coordenada del centroide del defecto} \\ \text{ángulo de rotación} \\ \text{deformación esférica} \\ \text{elongación horizontal} \\ \text{distorsión} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

6.4 TESTS DE SENSIBILIDAD

Para probar la validez del método basado en la variable adjunta para el cálculo de las sensibilidad, se han realizado numerosos tests, comparando los resultados con las sensibilidades obtenidas con el método de Diferencias Finitas. Para los ejemplos se ha elegido una placa cuadrada de material ortótropo (contrachapado de abedul), de 12m de lado. Se han considerado 3 casos con cavidades de distinta forma. El Caso 1 tiene una cavidad circular de 1 m de radio, ver la figura 6.2, el Caso 2, una cavidad elíptica de semieje horizontal $a=1\text{m}$ y vertical $b=0.5\text{m}$, ver Figura 6.6. Por último, el Caso 3 contiene una cavidad cuadrada de 2m de lado, ver Figura 6.10.

Las discretizaciones del modelo han sido realizadas con un número creciente de elementos cuadráticos isoparamétricos. A continuación, las figuras muestran los resultados de la sensibilidad geométrica obtenidos teniendo en cuenta distintos parámetros de diseño. Cada gráfico contiene dos valores, los calculados con el método de la variable adjunta (azul) y las sensibilidades calculadas mediante el método numérico de las Diferencias Finitas (magenta). Se comprueba como las sensibilidades calculadas por ambos métodos están en concordancia, aumentando la precisión de éstos al aumentar el número de elementos empleados en la discretización del modelo. Hay que señalar que para el *Caso 3* se necesita una discretización más fina que para los otros dos casos, ya que se ha considerado un defecto cuadrado, cuyo contorno no es suave, siendo ésta una de las hipótesis de partida en el desarrollo de la formulación en la Sección 6.2.1, (ecuaciones (6.4) y (6.5)). Se han tomado medidas de u_2 en el lado izquierdo de la placa cuadrada.

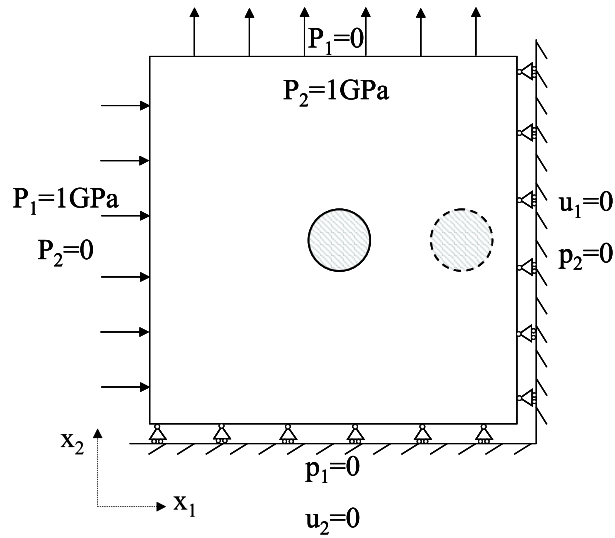
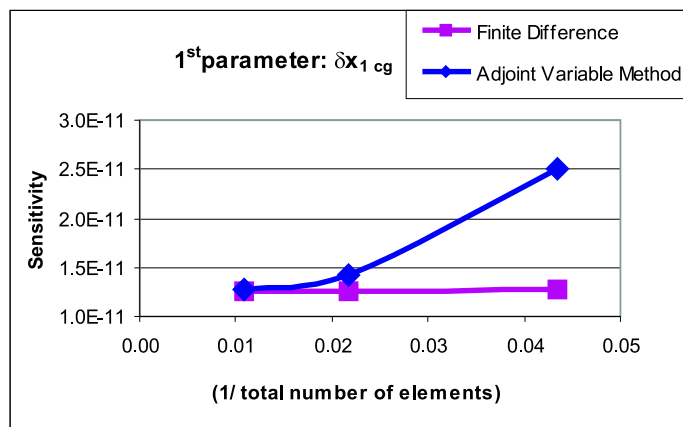
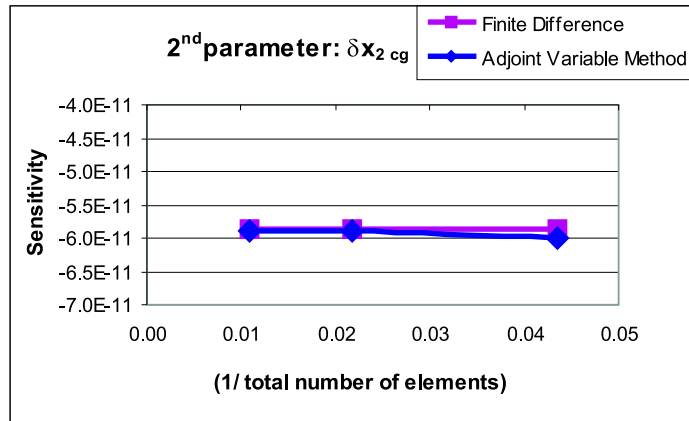


Figura 6.2: Caso 1: placa de material ortótropo con cavidad circular interna, posiciones real y supuesta.



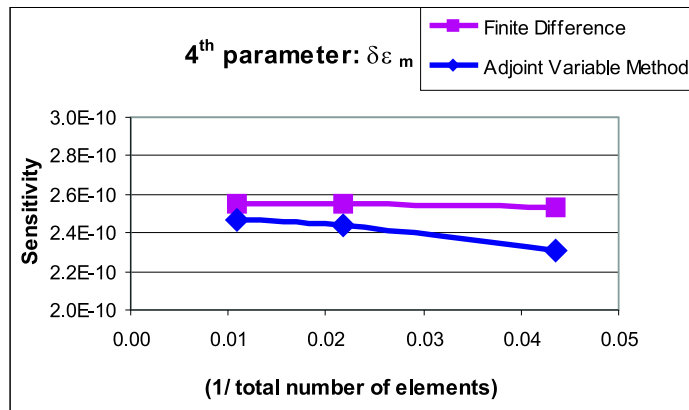
number of elements external plate side + internal cavity quarter		A V M	Fin. Diff.
Derivative parameter δx_{1cg}	20+3	2.505E-11	1.269E-11
	40+6	1.428E-11	1.253E-11
	80+12	1.269E-11	1.253E-11

Figura 6.3: Sensibilidad geométrica respecto al 1^{er} parámetro en caso 1: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas



number of elements external plate side + internal cavity quarter		A V M	Fin. Diff.
Derivative parameter δx_{2cg}	20+3	-6.000E-11	-5.862E-11
	40+6	-5.905E-11	-5.872E-11
	80+12	-5.895E-11	-5.871E-11

Figura 6.4: Sensibilidad geométrica respecto al 2º parámetro en caso 1: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas



number of elements external plate side + internal cavity quarter		A V M	Fin. Diff.
Derivative parameter $\delta \epsilon_m$	20+3	2.311E-10	2.535E-10
	40+6	2.439E-10	2.549E-10
	80+12	2.464E-10	2.549E-10

Figura 6.5: Sensibilidad geométrica respecto al 4º parámetro en caso 1: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas

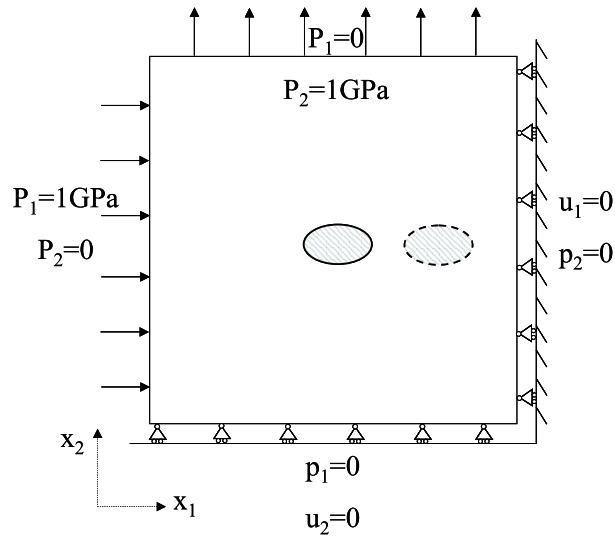


Figura 6.6: Caso 2: placa de material ortótropo con cavidad elíptica interna, posiciones real y supuesta.

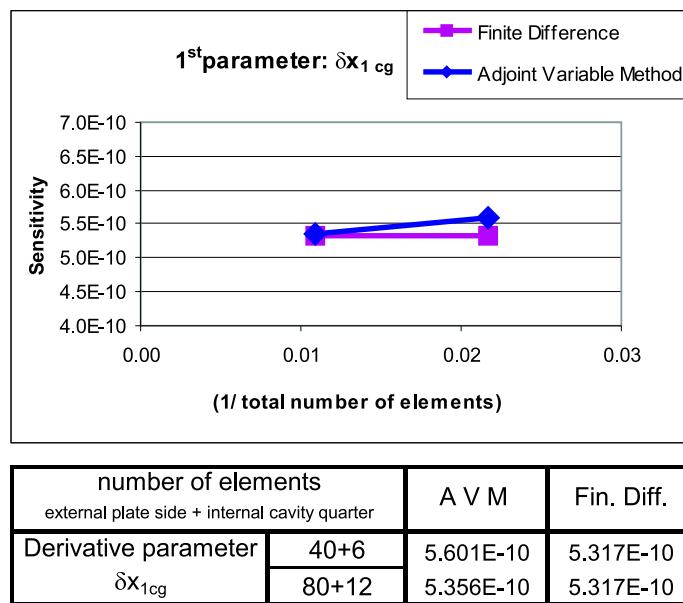


Figura 6.7: Sensibilidad geométrica respecto al 1^{er} parámetro en caso 2: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas

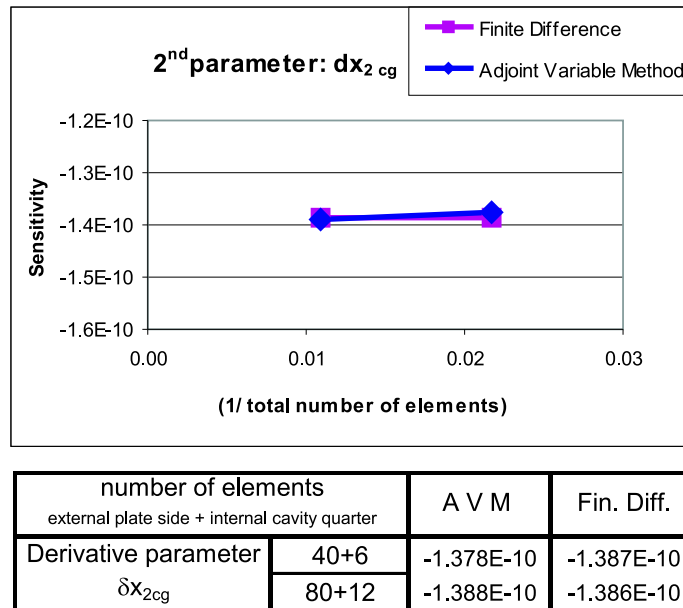


Figura 6.8: Sensibilidad geométrica respecto al 2º parámetro en caso 2: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas

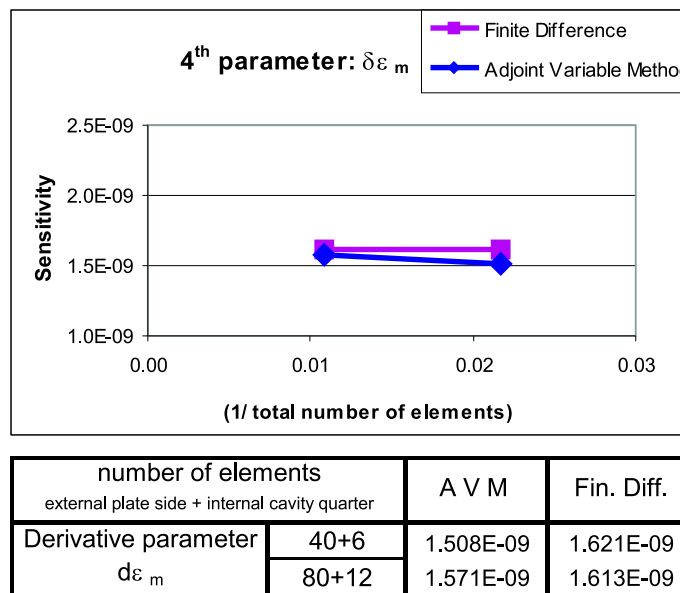


Figura 6.9: Sensibilidad geométrica respecto al 4º parámetro en caso 2: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas

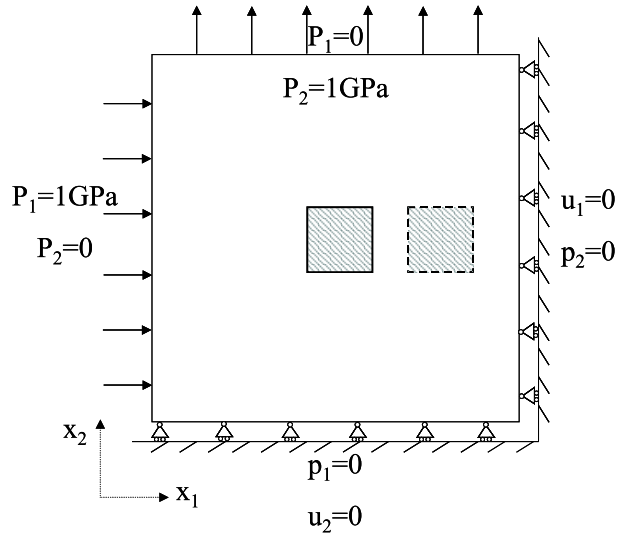
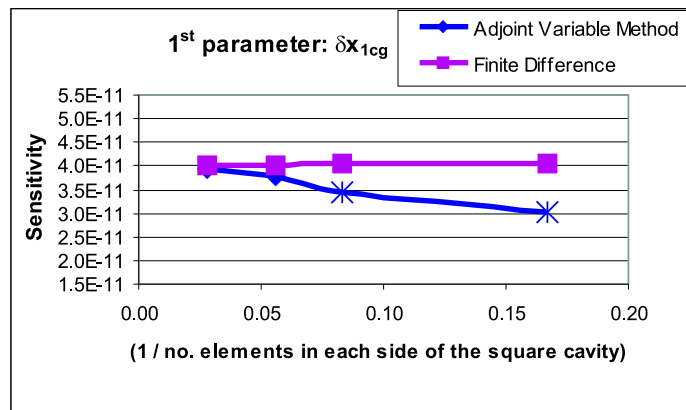


Figura 6.10: Caso 3: placa de material ortótropo con cavidad cuadrada interna, posiciones real y supuesta.



number of elements		A V M	Fin. Diff.
external plate side + internal cavity side			
Derivative parameter δx_{1cg}	40+6	3.227E-11	4.051E-11
	80+12	3.437E-11	4.039E-11
	40+18	3.785E-11	4.026E-11
	80+36	3.933E-11	4.026E-11

Figura 6.11: Sensibilidad geométrica respecto al 1^{er} parámetro en caso 3: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas

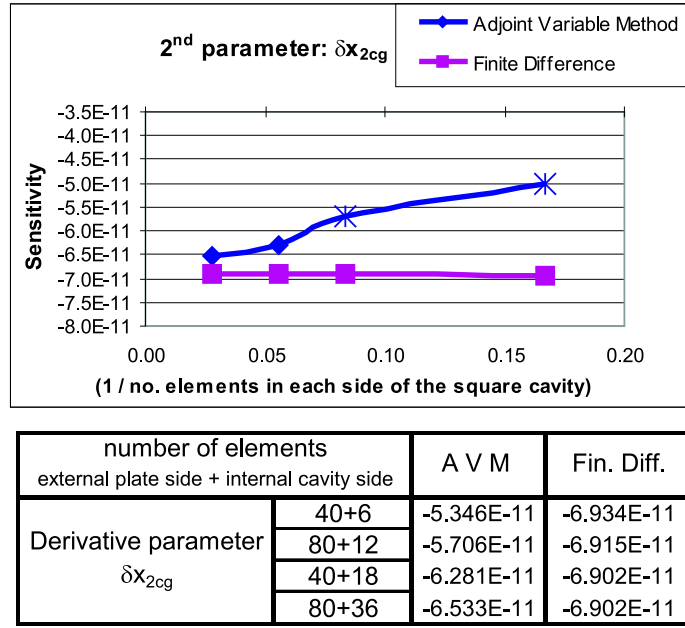


Figura 6.12: Sensibilidad geométrica respecto al 2º parámetro en caso 3: Método Variable Adjunta vs Diferencias Finitas

6.5 ALGORITMO DE MINIMIZACIÓN: BFGS

Una vez que la validez de la sensibilidad está confirmada, se implementa dentro del algoritmo de minimización. Hemos usado un método quasi-newtoniano, el denominado *BFGS*. Este algoritmo, es un método de pseudo-segundo orden, que en cada iteración utiliza la actualización del Hessiano propuesta por Broyden, Fletcher, Goldfarb y Shanno (1970) [5], de ahí su nombre. El valor de las variables del problema, los parámetros de la Ecuación (6.19) que definen el campo de transformaciones, estarán limitados para evitar que se produzcan configuraciones imposibles. Los parámetros son agrupados en el vector \mathbf{X} , y actualizados en cada iteración siguiendo el esquema siguiente,

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \lambda_k \mathbf{H}_k^{-1} \nabla f_k \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad (6.20)$$

siendo ∇f_k el gradiente del funcional de costo y \mathbf{H}_k el Hessiano. El Hessiano es actualizado en cada iteración con la aproximación de Broyden et al. [5],

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \mathbf{H}_{k-1} + \frac{\mathbf{y}_{k-1} \mathbf{y}_{k-1}^T}{\mathbf{y}_{k-1}^T \mathbf{s}_{k-1}} - \frac{\mathbf{H}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{H}_{k-1}}{\mathbf{s}_{k-1}^T \mathbf{H}_{k-1} \mathbf{s}_{k-1}}, \\ \mathbf{y}_{k-1} &= \nabla f(\mathbf{X}_k) - \nabla f(\mathbf{X}_{k-1}), \\ \mathbf{s}_{k-1} &= \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Se han implementado diversos criterios de parada como son un número máximo permitido de iteraciones, pasos excesivamente pequeños y un gradiente del funcional menor que una cierta tolerancia.

6.6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Se han realizado numerosos tests para probar la validez del método propuesto. El ejemplo diseñado consiste en una placa cuadrada de material ortótropo (contrachapado de abedul). Las dimensiones de la placa son $1m \times 1m$ y las condiciones de contorno están reflejadas en la Figura 6.13. Se han utilizado 160 elementos cuadráticos isoparamétricos para la discretización del modelo de la placa. En el interior de ésta, suponemos una cavidad elíptica de semiejes $a=0.0916m$, $b=0.15m$, modelizada con 24 elementos del mismo tipo. El defecto inicialmente supuesto para comenzar el proceso de minimización, es una cavidad circular alejada de la posición real (ver Figura 6.13). Como datos experimentales consideramos las mediciones de los desplazamientos u_2 tomadas en el lado izquierdo de la placa. Estos valores serán simulados computacionalmente resolviendo el problema directo, con la cavidad en su posición y forma real.

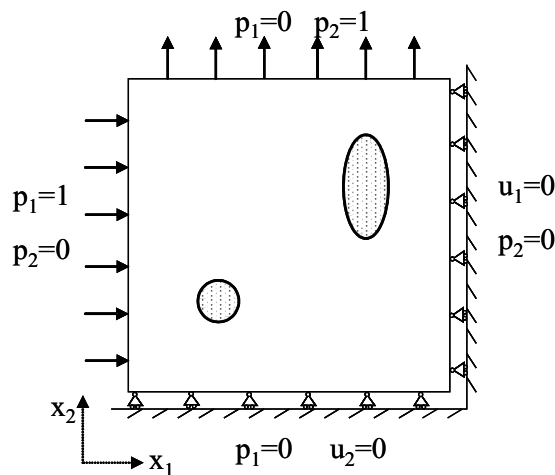


Figura 6.13: Definición de la geometría y estado de carga para los tests.

6.6.1 Mediciones exactas

En primer lugar hemos analizado la convergencia del algoritmo suponiendo que las mediciones tomadas son exactas, y no existen fuentes de error. Se comprueba que tras 26 iteraciones del algoritmo, el funcional de costo ha decrecido desde un valor $J_0 = 0.101206$ a $J_{26} = 9.343 \cdot 10^{-8}$. La cavidad detectada coincide perfectamente con la real, (ver Figura 6.14).

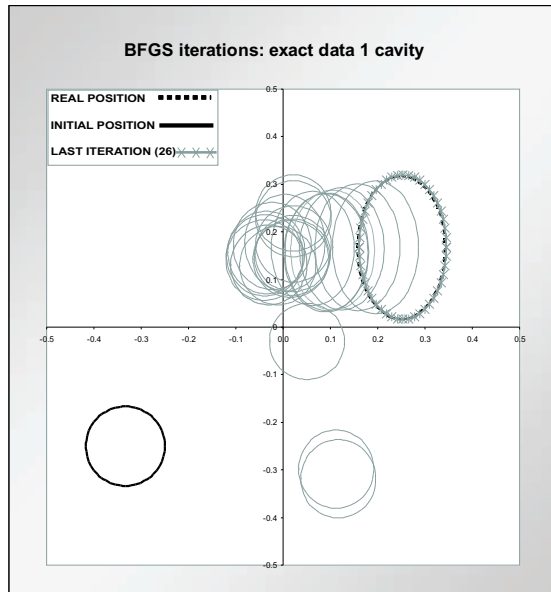


Figura 6.14: Identificación de una cavidad con datos experimentales exactos.

El segundo ejemplo analizado consiste en una placa con dos cavidades circulares, hay que tener en cuenta que el código informático diseñado para la resolución de un problema con una sola cavidad. El programa se ha ejecutado varias veces, variando los parámetros de diseño escogidos como variables del problema. Aunque la solución obtenida es menos precisa que en el caso anterior, el algoritmo proporciona una buena predicción de la localización y tamaño del defecto, (ver Figura 6.15).

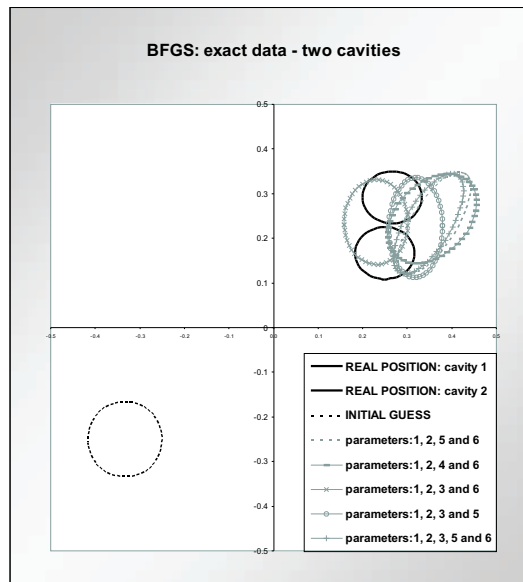


Figura 6.15: Identificación de dos cavidades con datos experimentales exactos.

6.6.2 Efecto de datos experimentales con error

Un segundo tipo de tests ha sido realizado introduciendo diferentes porcentajes de ruido en las mediciones simuladas de los desplazamientos. El error aleatorio ha sido generado siguiendo una distribución gaussiana. Los resultados muestran una muy buena convergencia a la solución real del problema, incluso en casos con un 5% de error, (ver Figura 6.16).

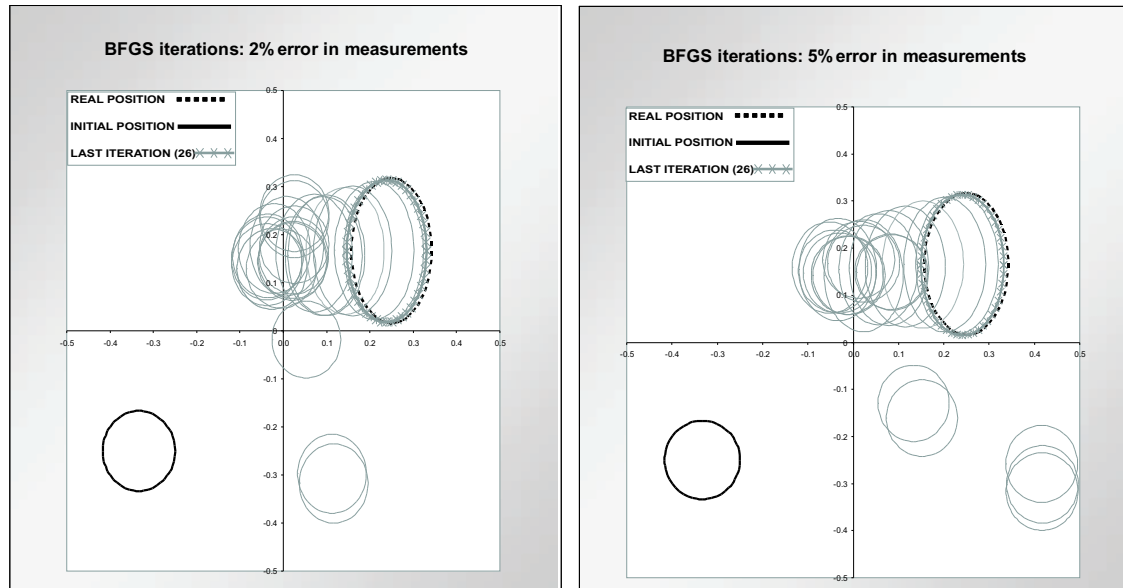


Figura 6.16: Identificación de una cavidad con datos experimentales alterados con un 2% y un 5% de error.

6.6.3 Efecto de constantes elásticas con error

En la realidad, se dan casos muy a menudo en que los valores de las constantes elásticas del material, no son muy precisos. Para estudiar la influencia que tendrían estos errores en la resolución del problema con el método propuesto, hemos introducido desde un 2% hasta un 5% de error en las constantes elásticas del modelo. Los gráficos de la Figura 6.17 muestran que los resultados obtenidos siguen estando en buena concordancia con la posición y forma de la cavidad real, aunque el número de iteraciones del algoritmo que se han necesitado, ha aumentado ligeramente (ha pasado de 26 a 28 iteraciones).

Finalmente, en la Figura 6.18 se representa la evolución del funcional de costo a lo largo del proceso de minimización en los tests de los casos anteriores.

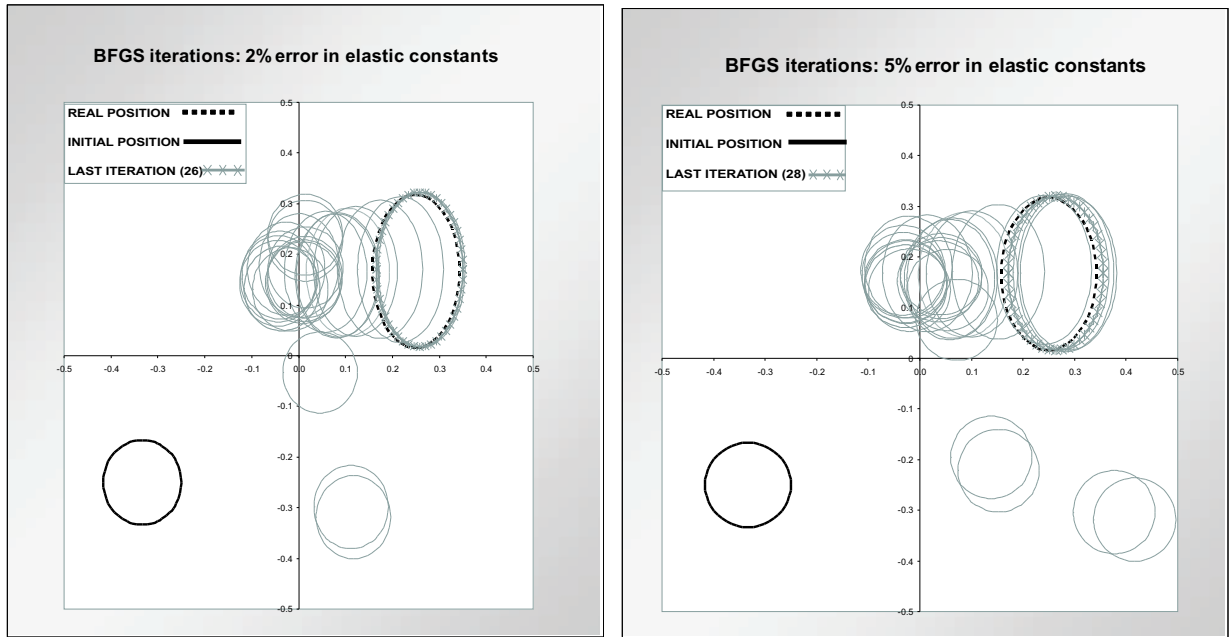


Figura 6.17: Identificación de una cavidad con constantes elásticas alteradas con 2% y un 5% de error.

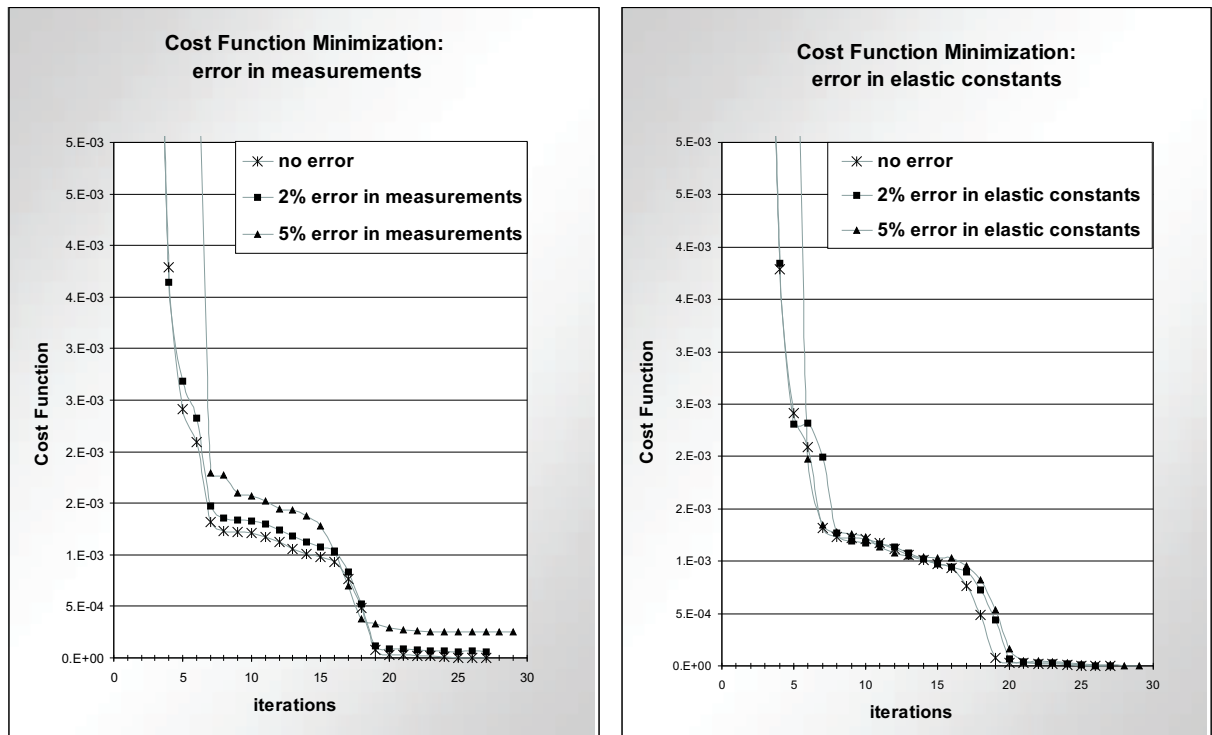


Figura 6.18: Evolución del funcional de costo a lo largo del proceso de minimización.

CAPÍTULO 7

PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN BASADO EN LA DERIVADA TOPOLÓGICA

7.1 INTRODUCCIÓN

El capítulo anterior trató el problema inverso de identificación, la estrategia de resolución utilizada era la más comúnmente, es decir, transformar el problema en la minimización de un funcional de costo. Ahora, por el contrario, emplearemos una novedosa metodología que se basa en la *Derivada Topológica* (DT). La DT es una función de dominio cuya mínimo señala la posición y tamaño del defecto buscado. El concepto de DT fue inicialmente introducido por Eschenauer et al. [64] para problemas de minimización de la discrepancia, y más tarde fue generalizada para problemas inversos de forma por Sokolowski y otros [69]. A diferencia de estos trabajos, en los que la derivada topológica era calculada mediante el método del estado adjunto, aquí se emplea un método directo basado en la Ecuación Integral en el Contorno, estrategia propuesta por Gallego y Rus [65]. El cálculo se hace mediante una expansión linealizada a partir del estado sin dañar, siendo ésta la principal ventaja del método, ya que no se precisará modelización del defecto. En este capítulo se desarrollará la formulación completa para el caso de un medio anisótropo elastostático bidimensional con cavidades circulares, aunque el procedimiento es extensible a otros defectos con formas variadas o grietas.

La derivada topológica, por si misma, proporciona una herramienta muy útil y precisa para la identificación de defectos. Pero además, si es asociada a algoritmos evolucionarios, su campo de aplicación se ve incrementado, ya que el esfuerzo computacional se reduce drásticamente.

7.2 DERIVADA TOPOLÓGICA

La derivada o sensibilidad topológica de un funcional de forma se define como la variación que experimenta el funcional debida a la aparición de un pequeño defecto centrado en una posición dada x_0 . Dado un funcional, \mathcal{J} tal que

$$\mathcal{J} : \Omega \rightarrow \mathcal{R}, \tag{7.1}$$

siendo Ω el dominio y $B_r(x_0)$ una bola cerrada de radio $r > 0$, centrada en x_0 , la derivada topológica de dicho funcional en x_0 puede definirse como sigue,

$$\mathcal{J}^*(x_0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{J}(\Omega \setminus B_r(x_0)) - \mathcal{J}(\Omega)}{\|B_r(x_0)\|}. \quad (7.2)$$

Para problemas planos, una definición equivalente se deriva de la expansión linealizada del funcional \mathcal{J} en un medio sin dañar alrededor de $r = 0^+$,

$$J(r) = J(0^+) + \frac{r^2}{2} J''(0^+) + o(r^2), \quad (7.3)$$

donde al despreciar términos de orden superior, $J''(0^+)$ coincide, salvo una constante, con la derivada topológica del funcional, $\mathcal{J}^*(x_0)$.

7.2.1 Derivada Topológica de la Ecuación Integral en el Contorno

El objetivo que se persigue en este trabajo es la detección de los defectos existentes en un dominio dado de un material con anisotropía rectilínea, mediante el uso de la sensibilidad topológica de un funcional de costo. Dicho funcional dependerá de las variables del problema elastostático: desplazamientos y/o tensiones. Para su cálculo se propone una formulación que parte de la *Ecuación Integral en el Contorno* (EIC) de los desplazamientos, y una vez calculada la DT de las variables en el contorno, la obtención de la DT del funcional es inmediata.

Formalmente, si tenemos un dominio homogéneo sin dañar Ω , de frontera Γ , sujeto a unas condiciones de contorno cualesquiera, la EIC de los desplazamientos se expresa como sigue, [3]:

$$c_k^i(\mathbf{y})u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})q_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \quad (7.4)$$

donde

- $u_k(\mathbf{x})$ es la k -ésima componente del vector de desplazamientos en el punto \mathbf{x} , en el considerado *estado no dañado*.
- $q_k(\mathbf{x}) = \sigma_{jk}(\mathbf{x})n_j(\mathbf{x})$ es el vector de tensiones en el punto \mathbf{x} , del *estado no dañado*. $\sigma_{jk}(\mathbf{x})$ es el tensor de tensiones de normal exterior n_j .
- $u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ es la k -ésima componente del vector de desplazamientos en el punto \mathbf{x} debida a una carga unidad puntual con la dirección i , aplicada en el *punto de colocación* \mathbf{y} (lo que se conoce como *solución fundamental*).
- $q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sigma_{ik}^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})n_i(\mathbf{x})$ es el vector de tensiones de la *solución fundamental*.
- $c_k^i(\mathbf{y})$ es el término libre cuyo valor depende de la posición del *punto de colocación* \mathbf{y} .

La *solución fundamental* en desplazamientos y tensiones para un medio anisótropo fue definida en el capítulo 2, (Sección 3.2.1, Ecuaciones (3.18) y (3.19)). La Ecuación (7.4) se discretiza y se resuelve con técnicas basadas en el método de los elementos de contorno, como

se vió en el Capítulo 2, Sección 3.2.1. Posteriormente, con la ayuda de las ecuaciones cinemáticas y la Ley de Hooke en un medio anisótropo, se obtienen el resto de variables en el contorno Γ y dominio Ω .

El siguiente paso será calcular la DT de la EIC, para lo cual partimos del mismo dominio homogéneo Ω , con frontera Γ , en el cual ha aparecido un defecto infinitesimal centrado en \mathbf{z} , cuyo contorno es Γ_z . A este estado lo llamaremos *estado dañado*, y le aplicamos la EIC (7.4) dividiendo el contorno en dos partes Γ y Γ_z ,

$$\begin{aligned} c_k^i(\mathbf{y})\tilde{u}_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{q}_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ + \int_{\Gamma_z} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{u}_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\tilde{q}_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

donde la tilde sobre las variables indica que su valor se ha modificado debido a la aparición del defecto. Esta ecuación puede ser reescrita realizando algunas simplificaciones. Así pues, tenemos que $\tilde{q}_k = 0$ a lo largo de Γ_z , ya que consideramos el defecto como una cavidad libre de tensiones. Los desplazamientos a lo largo del contorno del defecto Γ_z , pueden expresarse como suma de un movimiento de sólido rígido u_k^0 , y un movimiento relativo al centro \mathbf{z} ,

$$\tilde{u}_k(\mathbf{x}) = u_k^0 + \delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}). \quad (7.6)$$

Además, las tensiones en un punto \mathbf{y} interior al dominio $\Omega \setminus \Omega_z$ alejado del defecto, en primer orden, son iguales a las del *estado no dañado* $\sigma_{ij}(\mathbf{z})$, y por tanto los desplazamientos $\delta\tilde{u}_k(\mathbf{x})$ a lo largo del defecto Γ_z son iguales a los debidos a un estado de tensión remota uniforme $\sigma_{ij}(\mathbf{z})$, en un medio infinito, que notamos con $\delta u_k^\infty(\mathbf{x})$. Es decir,

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\mathbf{y}) = \sigma_{ij}(\mathbf{z}) + t.o.s. \quad (7.7)$$

$$\delta\tilde{u}_k(\mathbf{x}) = \delta u_k^\infty(\mathbf{x}) + t.o.s., \quad (7.8)$$

donde *t.o.s.* representa los *términos de orden superior*. Por último, teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta ahora, junto con

$$q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \sigma_{jk}^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})n_j(\mathbf{x}) = \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y})n_j(\mathbf{x}) + t.o.s. \quad (7.9)$$

y restando la EIC para el estado dañado, Ecuación (7.5), de la ecuación integral para el estado sin dañar, Ecuación (7.4), obtenemos la llamada *Ecuación Integral en el Contorno de la Derivada Topológica* (DT-EIC).

$$\begin{aligned} c_k^i(\mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} \left[q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta q_k(\mathbf{x}) \right] d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = -\sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y}) \int_{\Gamma_z} n_j(\mathbf{x})\delta u_k^\infty(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (7.10)$$

donde $\delta u_k(\mathbf{y})$ y $\delta q_k(\mathbf{y})$ son las derivadas topológicas de los desplazamientos y de las tensiones debidas a la aparición de un defecto infinitesimal en \mathbf{z} .

7.2.2 Derivada topológica de la EIC para cavidades circulares

Para el caso de defectos tales como cavidades circulares de radio R , con contorno libre de tensiones, los desplazamientos $\delta u_k^\infty(\mathbf{x})$ tienen expresiones analíticas conocidas que podemos escribir de la forma siguiente,

$$\delta u_k^\infty = -\delta R \Sigma_{kl} n_l, \quad (7.11)$$

para $k, l = 1, 2$, donde n_l es la normal exterior al contorno Γ_z y Σ_{kl} es una matriz constante que depende del valor de $\sigma_{ij}(\mathbf{z})$, de las constantes elásticas a_{ij} y de las raíces complejas μ_i del polinomio característico, Ecuación (3.11), [1]. En concreto, la componente Σ_{11} se calcula con la expresión siguiente,

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} = & \frac{a_{11}(\Im(\mu_1+\mu_2)(\Im^2(\mu_1)-2\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)+\Im^2(\mu_2)+\Re^2(\mu_1-\mu_2))\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(\sigma_{11}+\Re(\mu_2)\sigma_{12}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{\Im(\mu_1)\Re(\mu_2)\sigma_{12}-\Im(\mu_1)\Im(\mu_2)\sigma_{22}+\Re(\mu_1)(\sigma_{12}+\Im(\mu_2)\sigma_{12}+\Re(\mu_2)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

obteniéndose expresiones similares para el resto de las componentes, ver Apéndice 5.

Por último, sustituyendo la Ecuación (7.11) en la DT-EIC, Ecuación (7.10), tenemos

$$\begin{aligned} c_k^i(\mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma} [q_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta u_k(\mathbf{x}) - u_k^i(\mathbf{x}; \mathbf{y})\delta q_k(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) = \\ = -\pi\delta R^2 \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y})\Sigma_{kl}(\mathbf{z})\delta_{jl} = -\delta A \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}; \mathbf{y})\Sigma_{kj}(\mathbf{z}), \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde $\delta A = \pi\delta R^2$ es el área de la cavidad.

Cuando la DT-EIC (7.10) se generaliza para m cavidades circulares centradas en una serie de puntos \mathbf{z}^j , la parte derecha de la ecuación se convierte en $\sum_{j=1}^m {}^tU^i(\mathbf{z}^j; \mathbf{y})\delta A_j$, siendo δA_j un vector con las áreas de los defectos centrados en \mathbf{z}^j y ${}^tU^i(\mathbf{z}^j; \mathbf{y}) = \sigma_{jk}^i(\mathbf{z}^j; \mathbf{y})\Sigma_{kj}(\mathbf{z}^j)$.

7.2.3 Discretización y resolución de la derivada topológica de la EIC

Al igual que la EIC (7.4), resolvemos la derivada topológica de la EIC aplicando técnicas de discretización basadas en el método de los elementos de contorno. Como consecuencia se obtiene el sistema algebraico de ecuaciones siguiente,

$$\mathbf{M}\delta\mathbf{v} = {}^t\mathbf{\Delta}\delta\mathbf{A}, \quad (7.14)$$

donde $\delta\mathbf{v}$ es un vector que agrupa las sensibilidades de las variables correspondientes a las incógnitas en el contorno, ya sean desplazamientos o tensiones; $\delta\mathbf{A}$ es un vector con las áreas de los defectos y ${}^t\mathbf{\Delta}$ es una matriz $n \times m$ siendo n el número de puntos de colocación y m el número de defectos. Observando la Ecuación (7.10) vemos que el operador integral para

δu_k y δq_k es el mismo que en el estado no dañado. Por lo tanto la matriz de coeficientes \mathbf{M} es la misma y no es necesario discretizar el contorno del defecto, i.e., en la Ecuación (7.14) solo interviene información referente al estado no dañado. Resolviendo el sistema para cada columna de ${}^t\Delta$, se obtiene el *Jacobiano Topológico* definido como sigue,

$$\mathbf{M}\mathfrak{J} = {}^t\Delta, \quad (7.15)$$

y la derivada topológica de las variables en el contorno puede calcularse mediante la siguiente expresión,

$$\delta\mathbf{v} = \mathfrak{J}\delta\mathbf{A}. \quad (7.16)$$

7.3 IDENTIFICACIÓN DE DEFECTOS MEDIANTE LA DERIVADA TOPOLÓGICA

El procedimiento estándar para buscar defectos en un dominio consiste en minimizar un funcional de costo que representa la diferencia entre los valores de una magnitud física medidos en el espécimen y los valores calculados en el modelo supuesto. Para ello, se usan algoritmos de optimización que requieren la resolución del problema directo del estado dañado en cada iteración. Aquí se propone una estrategia distinta basada en la DT, que como hemos visto solo contiene información del estado no dañado. Por lo tanto será necesario resolver un único problema directo, sin necesidad de discretizar los posibles defectos. Así se reduce drásticamente el coste computacional.

7.3.1 Estimación del tamaño óptimo del defecto

El método propuesto estima en un primer paso el tamaño del defecto. Para ello, definimos el funcional de costo como $f = \frac{1}{2}\mathbf{R}^T\mathbf{R}$, siendo \mathbf{R} el residuo entre los valores de una cierta magnitud (desplazamientos y/o tensiones) medidos experimentalmente, \mathbf{v}^{exp} , y su valor en el modelo supuesto con m defectos centrados en \mathbf{z}^j , $\mathbf{v}(\mathbf{A}(\mathbf{z}_j))$, i.e., $\mathbf{R} = \mathbf{v}^{\text{exp}} - \mathbf{v}(\mathbf{A}(\mathbf{z}_j))$. Si realizamos la expansión topológica de \mathbf{R} a partir de un estado no dañado, y tenemos en cuenta la Ecuación (7.16), se obtiene

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}(\mathbf{z}_j)) \cong \mathbf{v}^{\text{exp}} - (\mathbf{v}(0) + \delta\mathbf{v}) = \Delta\mathbf{v} - \mathfrak{J}(\mathbf{z}_j)\delta\mathbf{A}, \quad (7.17)$$

donde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\text{exp}} - \mathbf{v}(0)$ y puede ser calculado una vez es resuelto el estado no dañado. Aplicando la expansión topológica de \mathbf{R} en la definición del funcional, f es aproximado por

$$f = \frac{1}{2}\mathbf{R}^T\mathbf{R} \cong f(0) + \delta f = f(0) + \frac{1}{2}\delta\mathbf{A}^T \mathfrak{J}^T \mathfrak{J} \delta\mathbf{A} - \delta\mathbf{A}^T \mathfrak{J}^T \Delta\mathbf{v}, \quad (7.18)$$

siendo $f(0) = \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}^T\Delta\mathbf{v}$, y δf la *derivada topológica del funcional* f . El tamaño óptimo de los posibles defectos será por tanto aquel que minimiza el valor del funcional aproximado, es decir,

$$\delta\mathbf{A} = (\mathfrak{J}^T \mathfrak{J})^{-1} \mathfrak{J}^T \Delta\mathbf{v}. \quad (7.19)$$

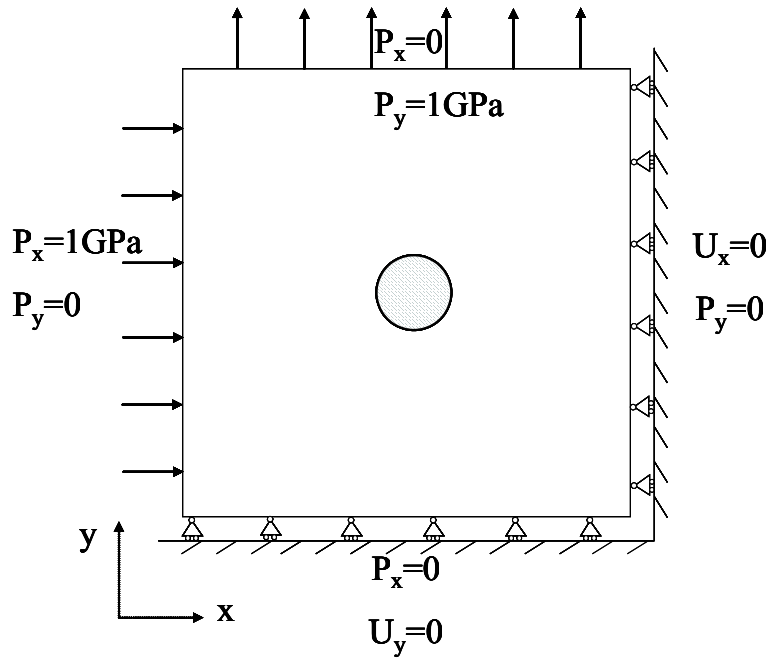


Figura 7.1: Geometría del problema de referencia.

7.3.2 Verificación del tamaño óptimo estimado del defecto

Para verificar la validez del uso de la aproximación topológica del residuo, para la cálculo del tamaño del defecto, se ha diseñado un simple ejemplo de referencia, Figura 7.1. Consiste en una placa cuadrada de dimensiones $2m \times 2m$, de un material ortótropo (contrachapado de abedul), sometida a las condiciones de contorno mostradas en la figura. En el centro de la placa aparece una cavidad circular. El modelo de la placa ha sido discretizado con 80 elementos cuadráticos isoparamétricos.

Los datos experimentales necesarios para calcular el residuo \mathbf{R} han sido simulados resolviendo el problema directo con un código Fortran, en una placa cuadrada con una cavidad circular centrada y discretizada con 48 elementos. El problema ha sido resuelto para diferentes radios r de la cavidad, desde un radio muy pequeño, $r \approx 10^{-6}m$, hasta uno muy grande $r \approx 0.8m$. Hay que tener en cuenta que para el tamaño mayor de radio usado, el defecto ocupa casi la totalidad de la placa.

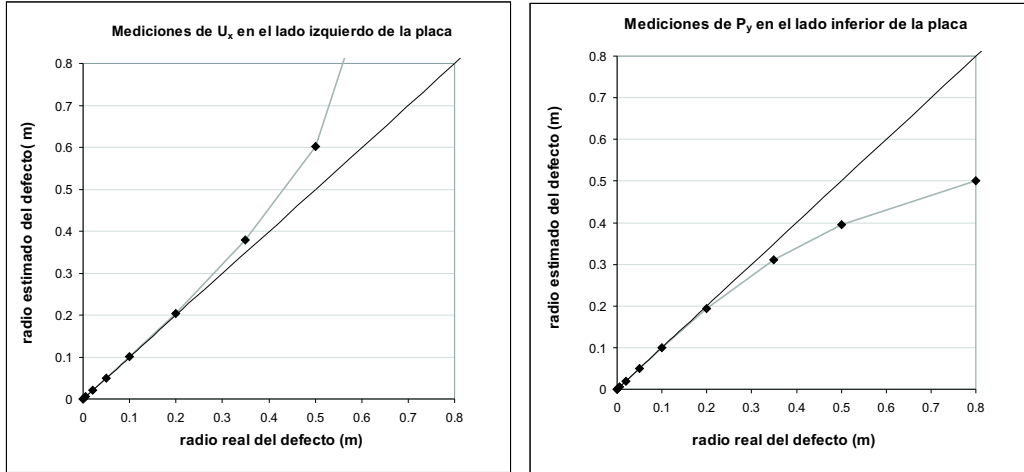


Figura 7.2: Correlación entre tamaño estimado y real del radio de la cavidad circular.

Los gráficos en la Figura 7.2 muestran la correlación entre el radio real del defecto, y el estimado con la derivada topológica (Ecuación (7.19)). La correlación es muy buena, y las discrepancias solo aparecen para tamaños muy grandes de la cavidad, situación poco probable. Estos errores se deben a la influencia de los términos de orden superior que previamente fueron despreciados.

7.3.3 Localización del defecto

Una vez que el tamaño de los defectos ha sido estimado con la Ecuación (7.19), ya podremos calcular el valor de la aproximación linealizada del funcional aplicando la Ecuación (7.18),

$$f(0) + \delta f(\mathbf{z}_j) = (\Delta \mathbf{v} - \mathbf{J}(\mathbf{z}_j) \delta \mathbf{A})^T (\Delta \mathbf{v} - \mathbf{J}(\mathbf{z}_j) \delta \mathbf{A}), \quad (7.20)$$

y según todo lo expuesto, los defectos se encontrarán en los valores de \mathbf{z}_j que minimizan f , dicho de otra forma, el mínimo de δf apuntará a la posición de los defectos.

7.3.4 Verificación de la posición del defecto calculada con la derivada topológica

La idea expuesta en la sección anterior es confirmada con diversos tests. La Figura 7.1 muestra la geometría del ejemplo empleado, el cual tiene una cavidad circular centrada de radio $r = 0.1m$. Las figuras siguientes, de la 7.3 a la 7.8, muestran el valor del funcional de costo calculado mediante su expansión linealizada y la derivada topológica (Ecuación 7.18), superpuesto a la geometría del problema con el defecto real en trazo grueso. En el punto donde se alcanza el mínimo de la función de costo, se ha dibujado una cavidad circular en trazo más fino, con el tamaño estimado en un paso previo mediante la derivada topológica. Se comprueba que el mínimo de la derivada topológica señala exactamente la presencia, localización y tamaño de la cavidad. La Figura 7.3 muestra tres casos que difieren en los datos experimentales medidos para calcular el residuo \mathbf{R} . Se puede observar que al aumentar la información de partida, el algoritmo señala más claramente la posición del defecto. Hay que tener en cuenta, que el valor del funcional en el centro de la placa es tres ordenes de magnitud menor que en cualquier otro punto, por lo que la posición queda claramente

definida.

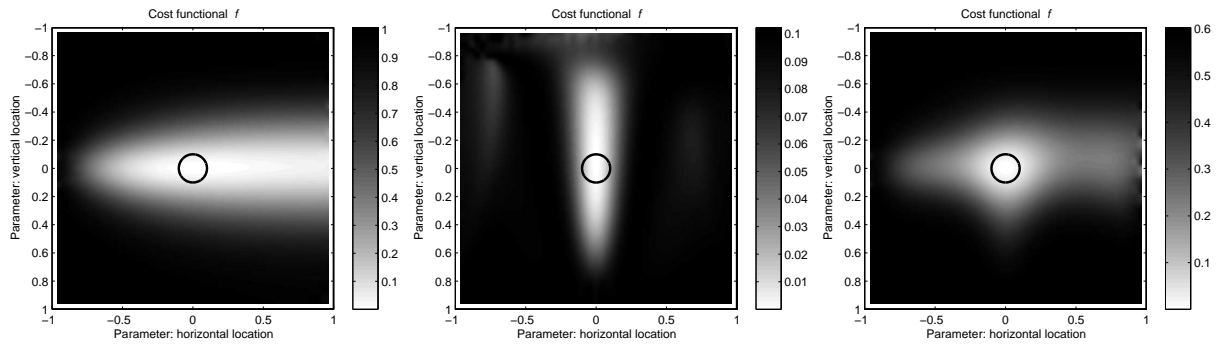


Figura 7.3: Funcional de Costo calculado con la derivada topológica en una placa con una cavidad circular centrada. Datos experimentales considerados: U_x en el lado izquierdo de la placa (izquierda) - P_y en el lado inferior de la placa (centro) - $U_x + P_y$ en ambos lados (derecha).

La estabilidad del método es verificada realizando una serie de tests, en los que se ha introducido algunos errores en la información de partida. En primer lugar se han considerado errores en las propiedades elásticas del material de la placa. Los resultados se muestran en las Figuras 7.4 y 7.5 y se comprueba que incluso con un 10% de error gaussiano, el orden de magnitud del mínimo del funcional de costo es 100 veces menor que el resto de valores, por lo que se sigue prediciendo con exactitud el centro del defecto. El tamaño es igualmente bien estimado. A continuación, los errores se han introducido en los datos experimentales. Aunque las soluciones obtenidas no son tan exactas como en los casos anteriores, las Figuras 7.6 y 7.7 demuestran que hasta con un 10% de ruido gaussiano en los datos, el mínimo del funcional está cerca del centro real de la cavidad, y el tamaño coincide con el del defecto real.

Finalmente, se ha resuelto un problema donde el error consiste en la geometría del modelo, siendo la cavidad real una elipse de semiejes $a = 0.15m$ y $b = 0.1m$. Las condiciones de contorno son idénticas a las de las aplicaciones anteriores. La derivada topológica es calculada para una cavidad circular. La posición del defecto es encontrada con precisión, ver Figura 7.8 siendo el valor del funcional la mitad que en el resto de la placa.

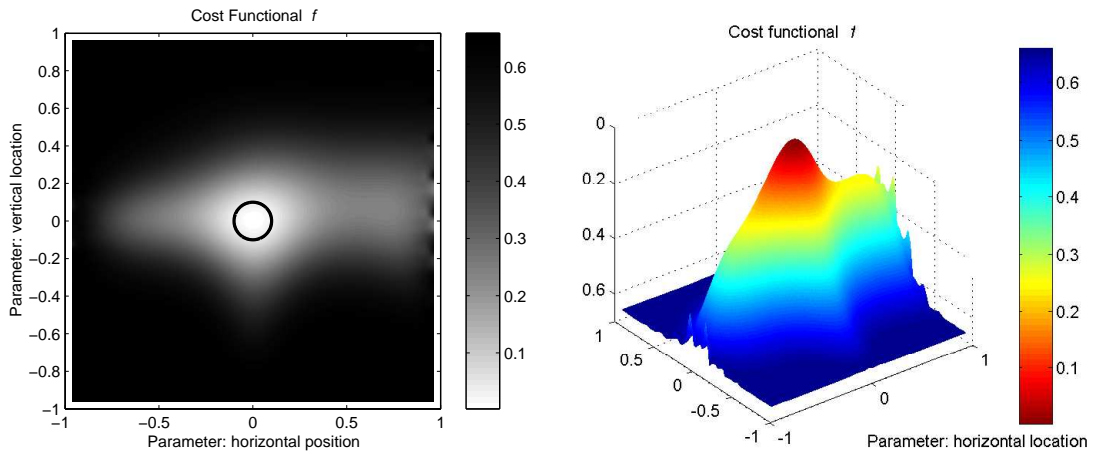


Figura 7.4: Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde las constantes elásticas consideradas tienen un 5% de error.

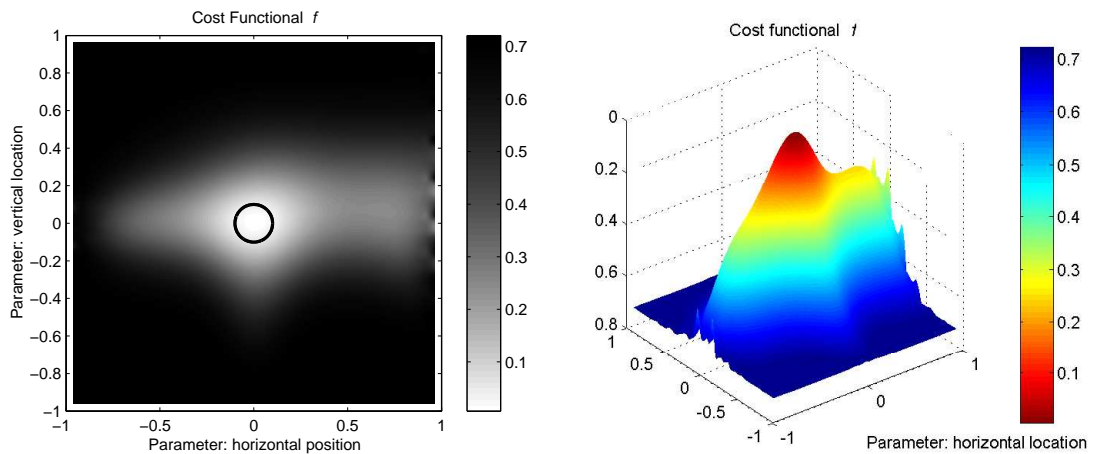


Figura 7.5: Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde las constantes elásticas consideradas tienen un 10% de error.

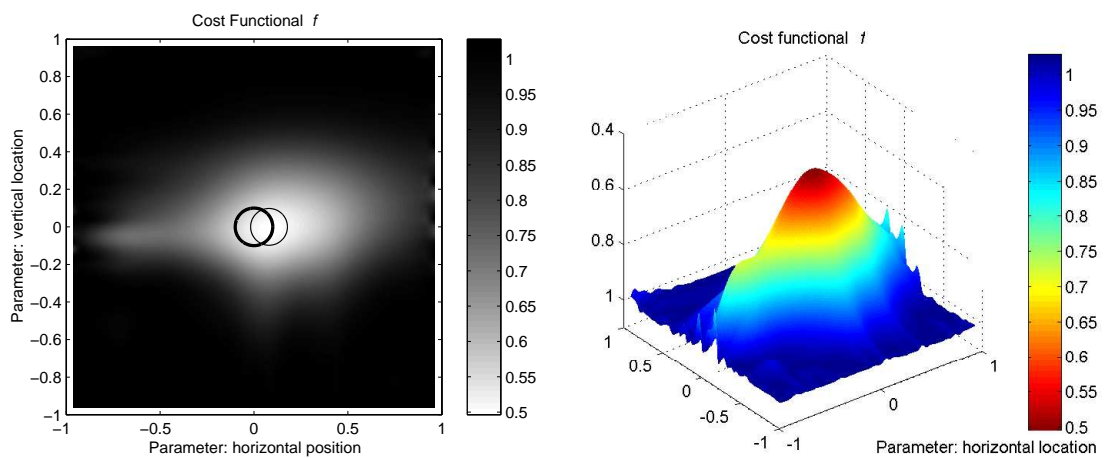


Figura 7.6: Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde los datos experimentales considerados tienen un 5% de error.

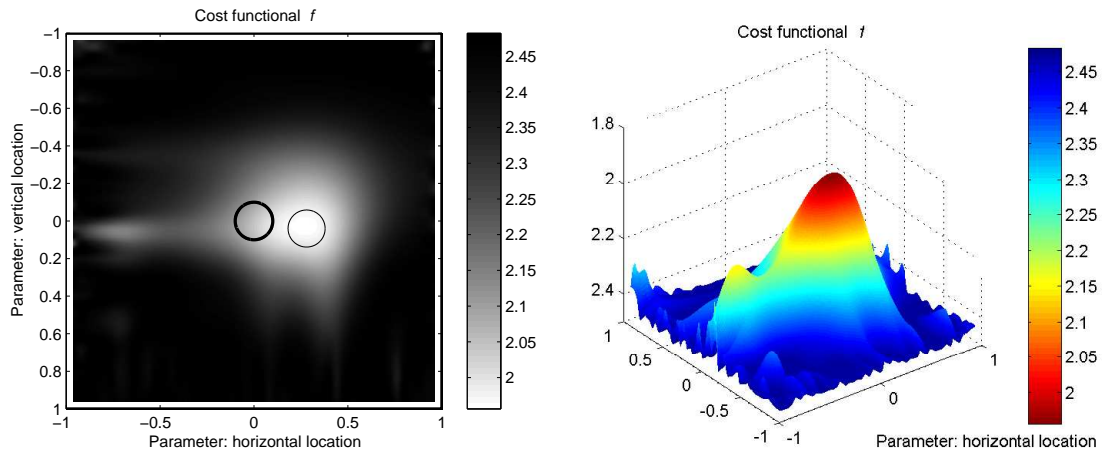


Figura 7.7: Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad circular centrada, donde los datos experimentales considerados tienen un 10% de error.

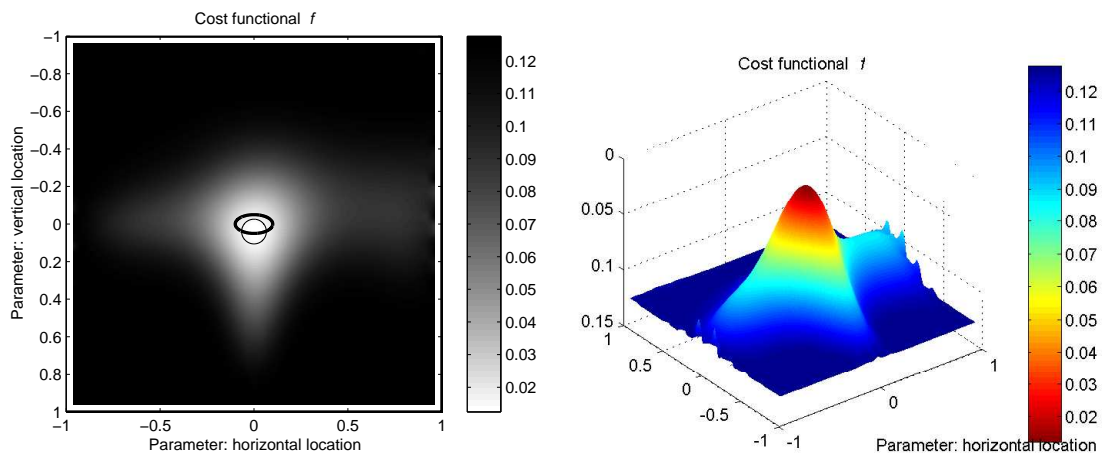


Figura 7.8: Funcional de costo calculado con la derivada topológica en una placa con cavidad elíptica centrada.

7.4 SENSIBILIDAD TOPOLÓGICA ASOCIADA CON ALGORITMOS GENÉTICOS

El uso de los Algoritmos Genéticos (AG) está muy extendido para los problemas de identificación de defectos. Algunos autores como Koguchi et al [67], Solokowski y Kowalczyk [68], Tanaka et al [73], Antes [72], Stravoulakis [70],[71], ya los emplearon para minimizar el funcional residuo. A diferencia de ellos, este trabajo propone la minimización de la DT del funcional. Además de ser métodos globales, otra ventaja que presentan estos algoritmos es la de ser métodos de orden cero, es decir, no necesitan del gradiente del funcional con respecto a los parámetros de diseño. En contraposición, tienen el inconveniente de tener que evaluar el funcional de costo un gran número de veces, a diferencia de otros métodos de optimización de orden superior. Pero gracias al uso de la DT, este coste computacional disminuye drásticamente, al reducir el número de parámetros, ya que el tamaño del defecto

se calcula en un paso previo, y además se obtiene el valor del funcional con información del estado no dañado.

Para el caso que nos atañe se ha diseñado un algoritmo genético en el que la población está compuesta de "individuos" que consisten en $2 \times m$ parámetros de diseño o "fenotipos". Estas variables son las dos coordenadas del centro de los m defectos. Cada cadena de fenotipos es lo que se conoce como "cromosoma". Para cada individuo se calcula su función fitness que es definida como $e(x) = -\log f$, por lo tanto el error será mayor cuanto menor sea f . Se ha usado una versión muy simple de AG que consta de los pasos básicos: selección, cruce y mutación.

7.4.1 Resultados Numéricos

Se han realizado una serie de tests numéricos para probar eficiencia del uso conjunto de los AG y la derivada topológica. Para ello se ha implementado, junto al código Fortran que calcula la DT, un algoritmo genético adaptado del desarrollado por Haataja [66]. Los detalles del cálculo se muestran a continuación.

Individuos de la población	50
Número de generaciones	200
Probabilidad de mutación	0.02
Probabilidad de cruce	0.8
Probabilidad de "tournament"	0.7
Escala de mutación	0.1

Tabla 7.1: Diseño del algoritmo genético

Si usáramos el AG para la detección de defectos por si mismo, necesitaríamos resolver $200 \times 50 = 10000$ problemas directos. En cambio, si asociamos el AG con la sensibilidad topológica, solamente tenemos que resolver el problema del estado no dañado, y los 10000 análisis sólo implican una sustitución en el sistema cuya matriz \mathbf{M} ya está factorizada.

Para los variedad de ejemplos resueltos, el espécimen escogido para todos ellos consiste en una placa cuadrada, con las dimensiones, material y condiciones de contorno, idénticas a las del problema de referencia de la Figura 7.1. Cada figura mostrada a continuación contiene dos gráficos, en el lado izquierdo se muestra el mejor individuo obtenido (en trazo fino) superimpuesto a la geometría del problema con el defecto real (trazo grueso). El gráfico de la derecha representa la evolución de la función fitness a lo largo de las sucesivas generaciones.

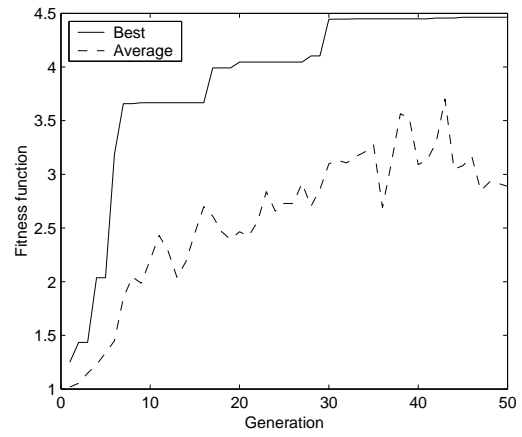
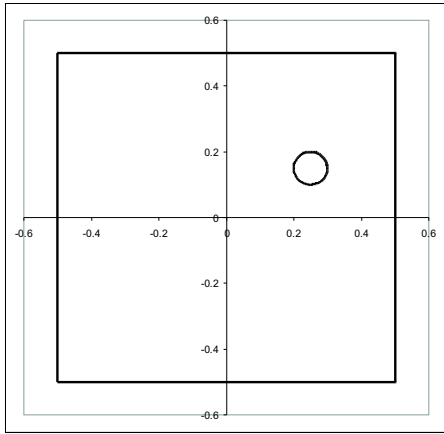


Figura 7.9: Identificación de cavidad circular, considerando datos experimentales exactos.

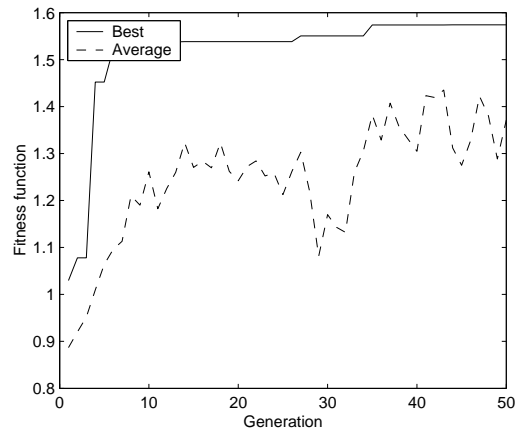
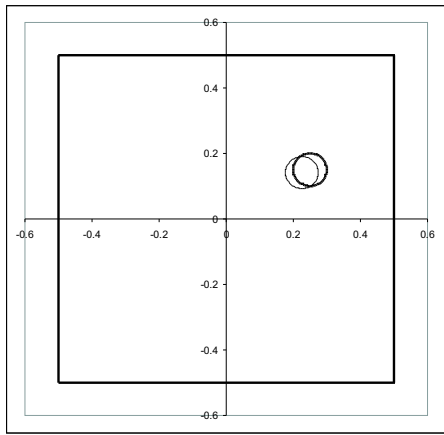


Figura 7.10: Identificación de cavidad circular, considerando un 2% error en datos experimentales.

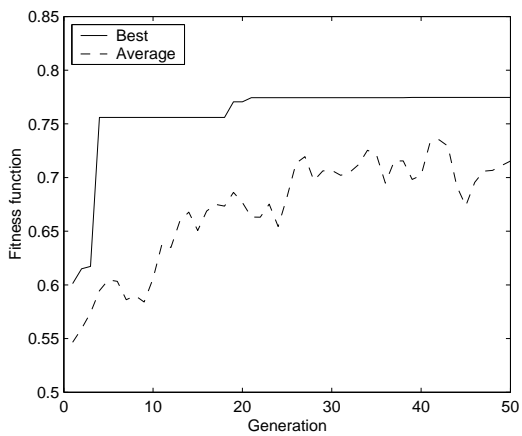
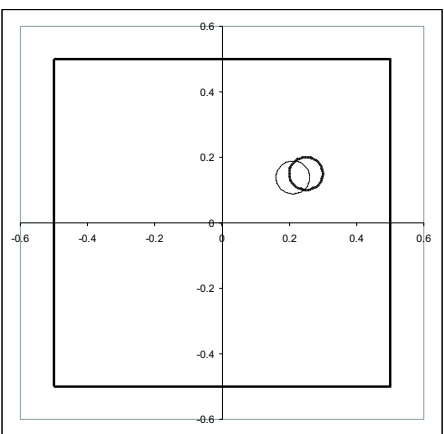


Figura 7.11: Identificación de cavidad circular, considerando un 5% error en datos experimentales.

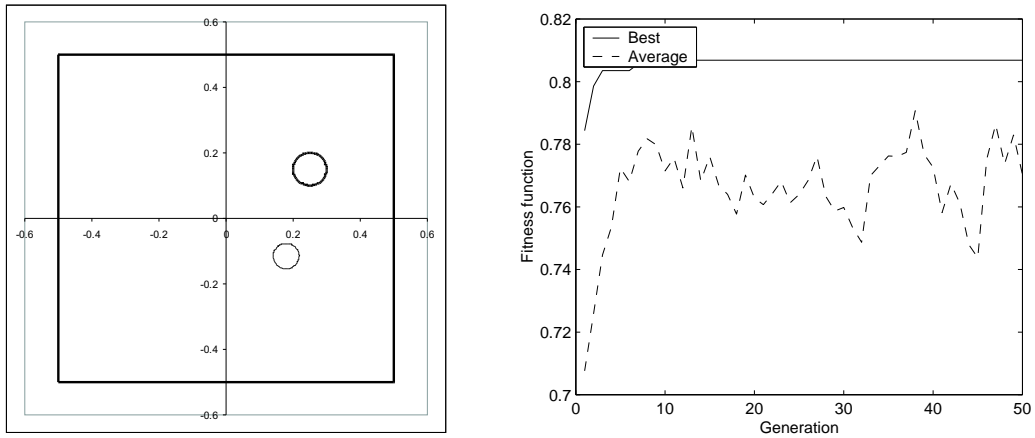


Figura 7.12: Identificación de cavidad circular, considerando un 10% error en datos experimentales.

El primer grupo de tests que se han realizado consiste en una placa con una cavidad circular, se han introducido varios porcentajes de error que sigue una distribución gaussiana, en los datos experimentales medidos, desde un 0% hasta un 10%. El número de generaciones permitidas es 50. Los resultados son mostrados en las Figuras de la 7.9 a la 7.12. Se comprueba una estimación del tamaño del defecto muy buena, al igual que la posición que aun con un 5% de error se acerca mucho a la solución real.

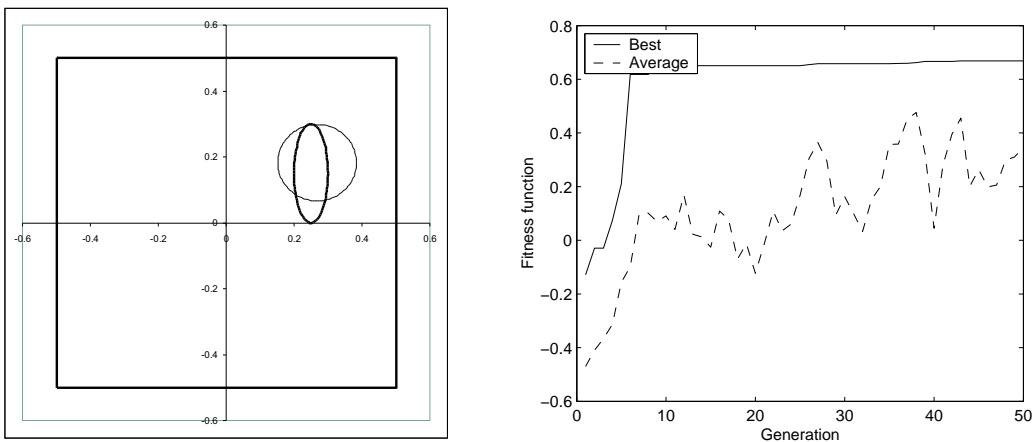


Figura 7.13: Identificación de cavidad elíptica, considerando datos experimentales exactos.

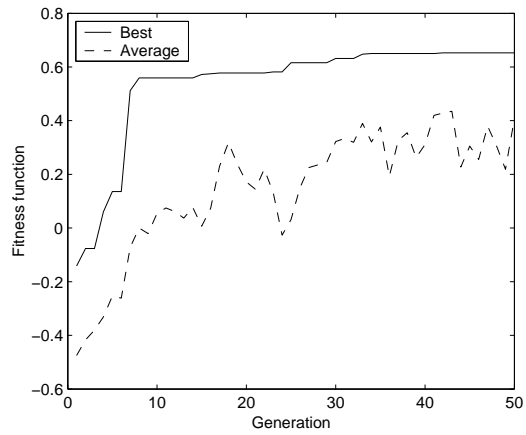
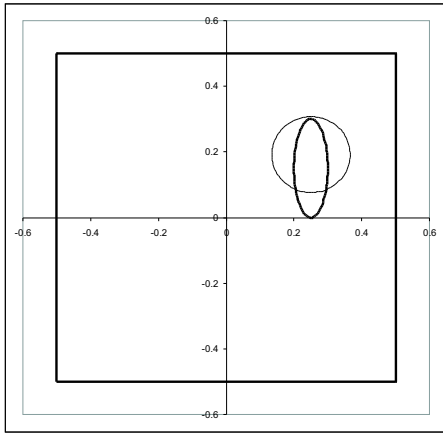


Figura 7.14: Identificación de cavidad elíptica, considerando un 2% error en datos experimentales.

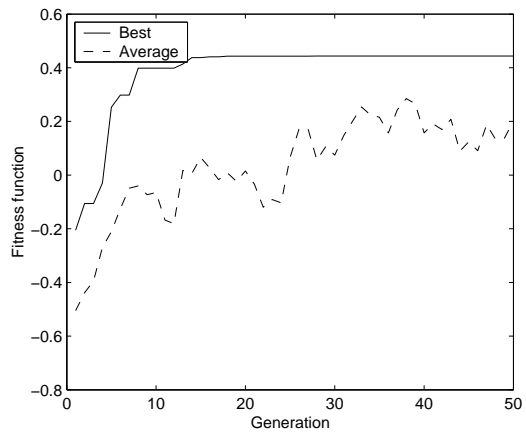
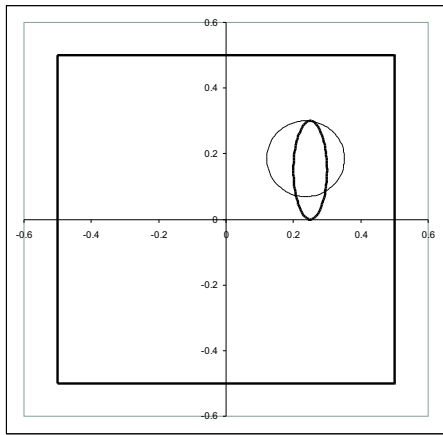


Figura 7.15: Identificación de cavidad elíptica, considerando un 5% error en datos experimentales.

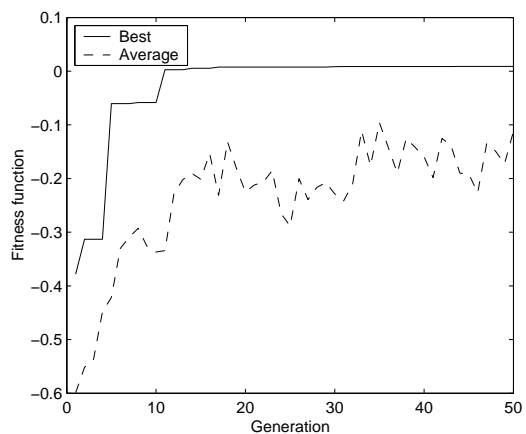
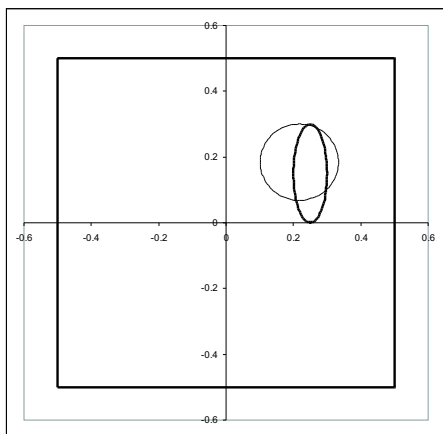


Figura 7.16: Identificación de cavidad elíptica, considerando un 10% error en datos experimentales.

En segundo lugar, hemos estudiado una cavidad elíptica, teniendo en cuenta que el programa sólo predice cavidades circulares. Como en los casos anteriores, los tests se han realizado con medidas experimentales exactas, y también con un cierto porcentaje de error. Si

nos fijamos en las Figuras 7.13 a 7.16, se puede ver que en todos los casos el tamaño y posición del defecto pronosticados coinciden con la solución real, aunque la forma del defecto no coincida.

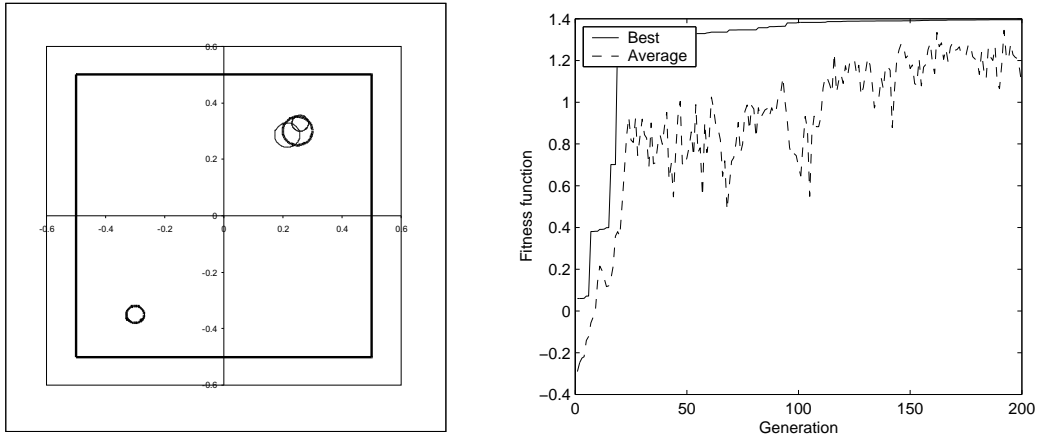


Figura 7.17: Identificación de dos cavidades circulares, considerando datos experimentales exactos de P_x en el lado derecho de la placa, y de U_x en el lado izquierdo de la placa.

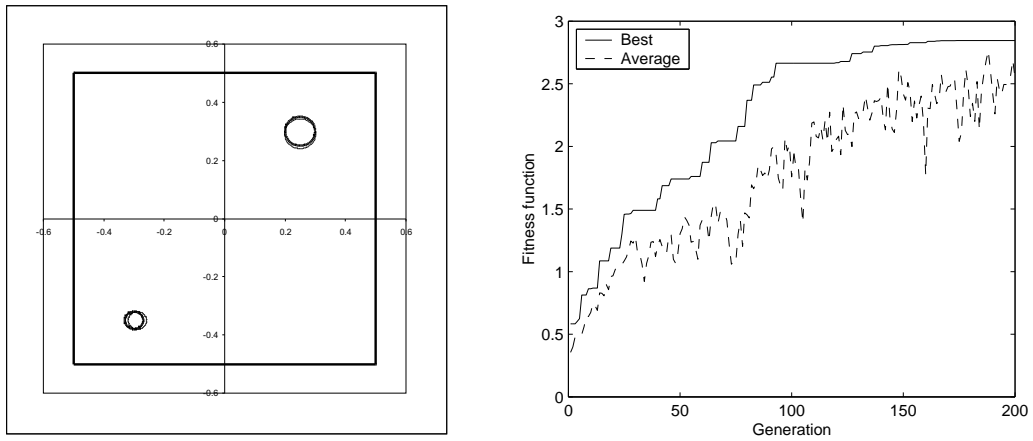


Figura 7.18: Identificación de dos cavidades circulares, considerando datos experimentales exactos de desplazamientos U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.

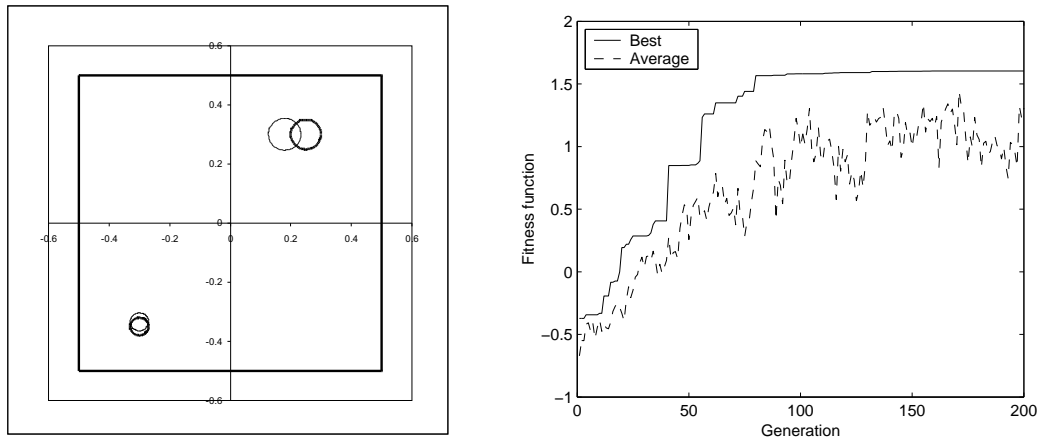


Figura 7.19: Identificación de dos cavidades circulares, considerando datos experimentales exactos de P_x en el lado derecho de la placa, de U_x en el lado izquierdo de la placa, y de P_y en el lado inferior.

Un tercer grupo de ejemplos ha sido realizado con el objetivo de identificar dos cavidades, partiendo del supuesto de que existen dos, por lo que el vector cromosoma tendrá cuatro parámetros, las coordenadas de los dos centros de las cavidades. Se han permitido en el proceso 200 generaciones. En las Figuras de la 7.17 a la 7.19 se muestran tres casos. En cada uno se han variado el número y tipo de mediciones experimentales tomadas en el contorno de la placa, para calcular el residuo \mathbf{R} . En principio, no se ha introducido error en estos tests. Se comprueba que cuanto mayor es el número de datos de partida, mejores son los resultados, pero también es importante qué tipo de magnitud se mide, desplazamientos o tensiones. El caso mostrado en la Figura 7.17, solo consigue predecir una cavidad correctamente. El caso de la Figura 7.18 encuentra con gran precisión ambos defectos, habiéndose tomado mediciones de desplazamientos U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo. Sin embargo, el mejor individuo encontrado para el caso de la Figura 7.19 es peor que el anterior, aún siendo mayor el número de datos experimentales. Con todo esto, se quiere resaltar la importancia de un estudio previo para el diseño del experimento, donde se analice donde y como medir los datos experimentales, de forma que se optimice la exactitud de los resultados.

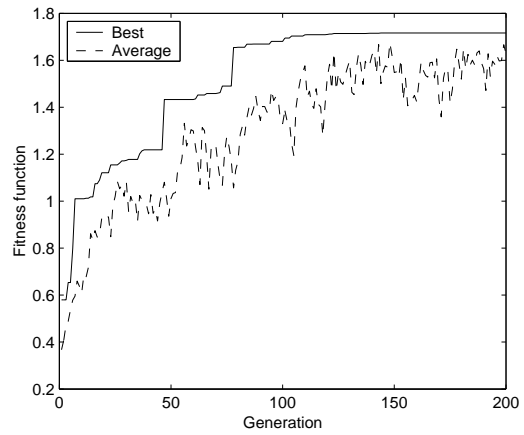
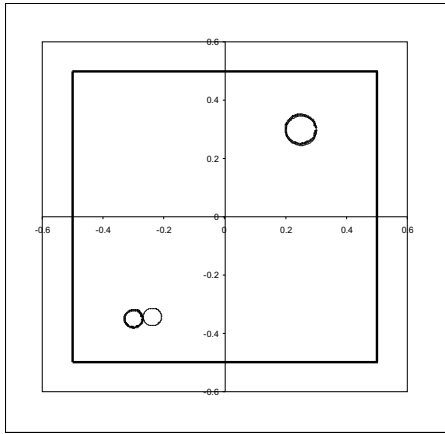


Figura 7.20: Identificación de dos cavidades circulares, considerando 1% error en las mediciones de U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.

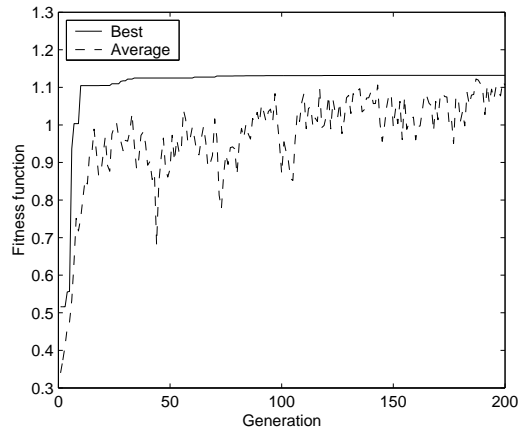
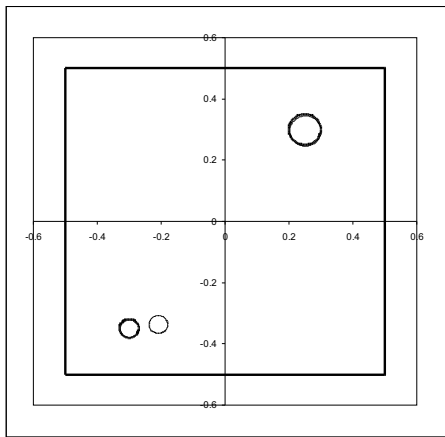


Figura 7.21: Identificación de dos cavidades circulares, considerando 2% error en las mediciones de U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.

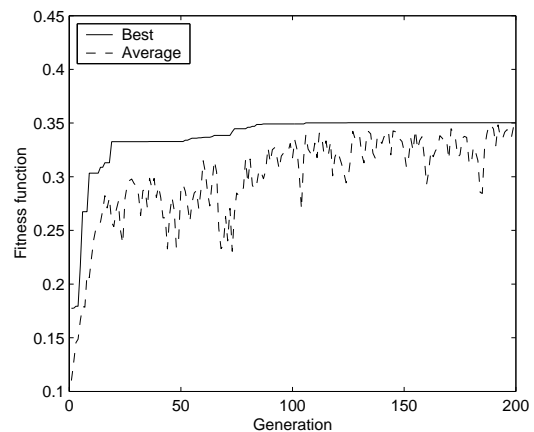
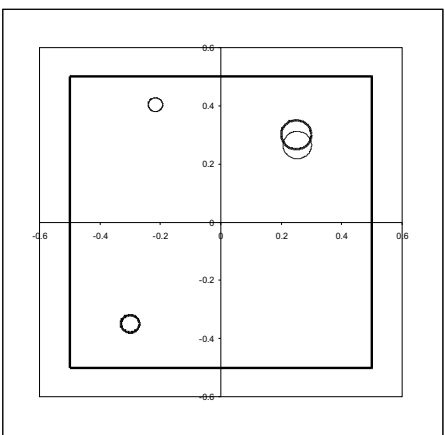


Figura 7.22: Identificación de dos cavidades circulares, considerando 5% error en las mediciones de U_y en el lado superior de la placa y de U_x en el lado izquierdo de la placa.

Seguidamente se han introducido diversos porcentajes de error en los datos experimentales, las Figuras de la 7.20 a la 7.22 muestran los resultados obtenidos.

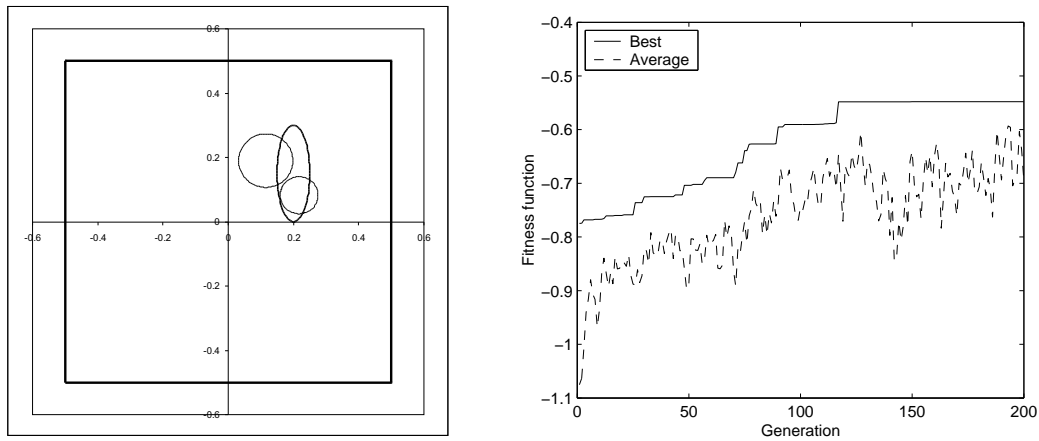


Figura 7.23: Identificación de una cavidad elíptica, partiendo de dos cavidades circulares, medidas experimentales exactas tomadas en los cuatro lados de la placa.

En la Figura 7.23, se presenta el caso en el que el defecto real es una cavidad elíptica, el programa parte de dos cavidades circulares. Las mediciones han sido tomadas en los cuatro lados de la placa y consideramos valores exactos. Se observa que la posición y tamaño del defecto son estimados con bastante precisión.

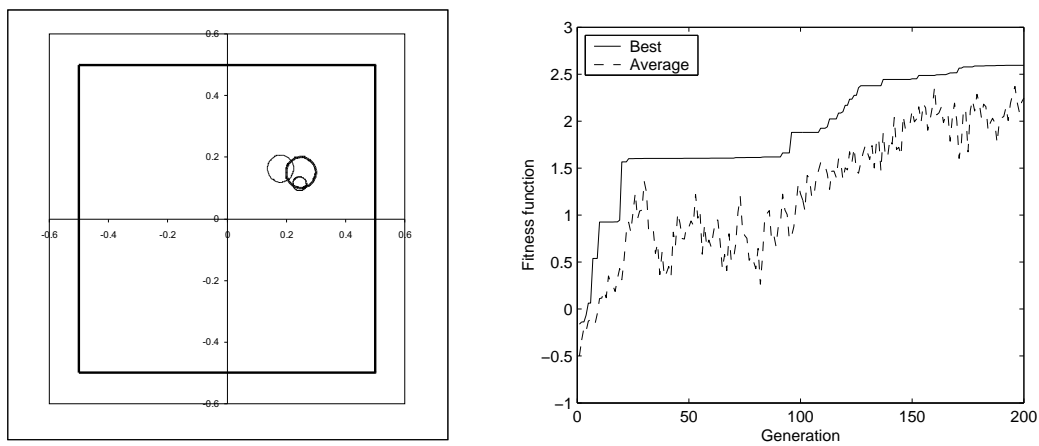


Figura 7.24: Identificación de una sola cavidad circular, partiendo de dos cavidades circulares, medidas experimentales exactas tomadas en los cuatro lados de la placa.

Por último, la Figura 7.24, muestra el caso en que existe una cavidad circular, y partimos de la suposición de que existen dos cavidades.

Parte III

CONCLUSIONES

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES

En este trabajo de investigación se ha tratado la resolución de diversos problemas inversos elastostáticos en medios bidimensionales anisótropos. Para cada uno se ha desarrollado una formulación completa basada en técnicas del Método de los Elementos de Contorno. Se han aplicado distintos algoritmos de minimización, empleando el más apropiado en cada caso. Se ha realizado un análisis de la sensibilidad particular para cada problema, usando técnicas de diferenciación directa, el método de la variable adjunta y la derivada topológica. El problema inverso de Cauchy ha sido abordado mediante una estrategia distinta, se ha usado un algoritmo alternante iterativo.

8.1 PROBLEMA INVERSO DE CAUCHY

Se ha resuelto el *problema inverso de reconstrucción de Cauchy* en elasticidad, i.e., problema en el cual el contorno del dominio esta dividido en dos partes, en una conocemos los desplazamientos y tensiones que se producen en ella, contorno *sobredefinido*, pero en el resto no disponemos de información alguna, contorno *indefinido*. Se ha empleado un algoritmo iterativo, originalmente propuesto por Kozlov *et al.* [40]. El problema *mal planteado* en un principio (condición inherente a los problemas inversos) se reduce a una secuencia de problemas directos mixtos *bien planteados*, y evitar así inestabilidades en la solución. Dichos problemas serán resueltos mediante el método de los elementos de contorno.

Para probar el funcionamiento del método propuesto, se han propuesto dos ejemplos que difieren en sus condiciones de contorno y en el tanteo inicial utilizado para comenzar el proceso iterativo. Se han probado modelos con discretizaciones con un número creciente de elementos cuadráticos isoparamétricos. La convergencia es analizada mediante el *error de precisión*, entendido como la norma euclídea de la diferencia entre los desplazamientos/tensiones calculados y los valores exactos. Se comprueba que el algoritmo es convergente al aumentar el número de elementos de contorno, y que los resultados obtenidos para el ejemplo 2, en el que el contorno *sobredefinido* y el *indefinido* tienen dos puntos comunes (donde las condiciones cambian a mixtas) son menos precisos que en el caso en que no tienen ningún punto en común. Esto es debido a que el gradiente de los desplazamientos tiene singularidades en los nodos donde cambian las condiciones de contorno. También se ha observado, que los valores de las tensiones obtenidos para el citado ejemplo 2, no son

tan buenos en los elementos cercanos a los nodos comunes al contorno *sobredefinido* y el *indefinido*. Para mejorar dichos resultados, se ha introducido un factor de relajación variable.

La estabilidad del algoritmo es comprobada añadiendo diversos porcentajes de error a los datos experimentales de partida, que en este caso serán simulados. Se han introducido niveles de ruido desde un 1% hasta un 5%, comprobándose que los errores de precisión disminuyen hasta una cierta iteración, a partir de la cual la solución es oscilatoria, por lo que es necesario establecer un criterio de parada regularizador que interrumpa el proceso cuando la acumulación de ruido sea dominante y los errores al predecir la solución exacta empiecen a aumentar. Se ha elegido con éxito el método de la Curva-L de Hansen, [51]. Hay que señalar, que los desplazamientos y tensiones obtenidos en la iteración donde se alcanza un mínimo, están muy cercanos a los exactos, incluso con un 5% de error en los datos de entrada.

Por tanto, de los tests realizados, concluimos que el algoritmo alternante iterativo junto con el método de los elementos de contorno, proporcionan una solución numérica convergente, estable y consistente con respecto a un número creciente de elementos y una cantidad decreciente de ruido en los datos experimentales.

8.2 PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL

Otro problema inverso muy común en elasticidad, que aparece cuando se utilizan técnicas de evaluación no destructiva, es el *problema inverso de identificación de parámetros o propiedades del material*. Las incógnitas son las constantes elásticas correspondientes a un medio bidimensional de comportamiento elástico lineal anisótropo. De ahí que el número máximo de constantes independientes que definen al material es seis. Se han realizado muchos estudios para resolver numéricamente este problema inverso pero todos ellos para el caso isótropo, o a lo más, ortótropo.

El problema ha sido abordado como la minimización de un funcional de costo. Se ha usado uno de los algoritmos de minimización más eficientes para este propósito, el propuesto por Levenberg-Marquardt. Cuando se usa esta técnica, debemos calcular las derivadas de los desplazamientos y tensiones en el contorno del sólido, respecto a las incógnitas del problema, en este caso las propiedades del material. Para ello se ha optado por usar derivación directa. Se obtienen a partir de la derivada de la ecuación integral en el contorno con respecto a las constantes elásticas, que es calculada analíticamente y posteriormente discretizada y resuelta con técnicas basadas en el método de los elementos de contorno. Los nuevos núcleos que aparecen en la ecuación de la sensibilidad son débilmente singulares o a lo más, del mismo orden de singularidad de los núcleos standard de la formulación del MEC. Su integración se ha realizado mediante una descomposición analítica-numérica, que proporciona resultados muy exactos.

Se ha contrastado la precisión de la sensibilidad obtenida mediante el método propuesto, con expresiones calculadas analíticamente con la teoría de *potenciales complejos* [1]. Para ello se han diseñado dos ejemplos. El primero consiste en una placa con una cavidad elíptica hueca, cuyo contorno está libre de tensiones, y el segundo es una placa en cuyo interior se encuentra una inclusión de otro material. Se han probado varios casos con distintos estados de carga y los resultados muestran una gran exactitud, incluso para valores calculados con discretizaciones poco refinadas. La implementación que se ha hecho permite el cálculo de sensibilidades en cuerpos con subregiones con materiales de distintas propiedades.

Una vez que queda probada la bondad de las sensibilidades calculadas mediante el MEC, se incluyen dentro del proceso de minimización para identificar las constantes elásticas de un material o de parte de él (caso de inclusiones). Se han diseñado tres casos distintos y se han realizado numerosos tests numéricos para analizar diversos aspectos del algoritmo de minimización. Los dos primeros casos consisten en una placa cuadrada homogénea de un cierto material, difieren en las condiciones de contorno. El tercer caso representa una placa cuadrada en cuyo interior existe una inclusión cuadrada de otro material. En un principio, las mediciones tomadas en el contorno se han simulado considerando valores exactos, es

decir, no existen fuentes de error. Para cada caso, se han probado tres tanteos iniciales para el valor de las constantes a determinar, los cuales distaban un 50%, 100% y 400% de la solución real. A la vista de los resultados, se comprueba como la convergencia del algoritmo al valor real es muy rápida, por lo que la relación entre la función de costo y las propiedades del material es casi cuadrática.

Otro aspecto muy importante en la resolución de los problemas inversos es la estabilidad frente a pequeños alteraciones en los datos. Por ello, se han realizado un segundo grupo de tests en los que se ha introducido unos porcentajes de error en las mediciones, datos de partida, en concreto un 2% y un 5%. A pesar de que el proceso se complica bastante, en los caso 1 y 2 se siguen obteniendo muy buena concordancia entre los resultados y los valores exactos. Esto debido a la existencia de mínimos locales en la función de costo, no siendo global el método de minimización empleado.

En conjunto, se concluye que el procedimiento propuesto para la resolución del problema inverso produce una solución numérica estable y convergente.

8.3 PROBLEMA INVERSO DE IDENTIFICACIÓN

El tercer problema inverso estudiado, es el *problema inverso de identificación* para la detección de defectos. El problema ha sido abordado con dos estrategias distintas. Primero, se ha optado por la forma más standard que consiste en minimizar un funcional residuo usando un algoritmo de optimización de pseudo-segundo orden. En segundo lugar, se utiliza un concepto recientemente desarrollado, la *derivada topológica*.

8.3.1 Resolución basada en el Método de la Variable Adjunta

El problema es resuelto a través de la minimización de un funcional de costo. Se ha empleado un algoritmo cuasi-newtoniano, el conocido como *BFGS*. Esto implica la necesidad de un cálculo previo de las derivadas del funcional con respecto a las variables del problema. En este caso, siendo la incógnita del problema parte de la geometría del dominio (los defectos interiores al cuerpo), se ha calculado la derivada del funcional con respecto a los parámetros de diseño del defecto. Este gradiente, conocido como *sensibilidad geométrica*, ha sido calculado mediante un proceso de derivación analítica basado en el *método de la variable adjunta*, para el cual se introduce el concepto de diferenciación material.

Con esta técnica, conseguimos una expresión integral en el contorno para la sensibilidad del funcional, muy compacta y sencilla de calcular, que nos permite utilizar técnicas basadas en el método de los elementos de contorno. Esta cualidad es muy útil en problemas de geometría cambiante como el que abordamos, ya que supone un ahorro de esfuerzo computacional en el modelado muy grande. Para comprobar la validez de la sensibilidad geométrica calculada con el MVA se ha comparado con resultados obtenidos con el método de diferenciación numérica de las Diferencias Finitas. Se han diseñado tres ejemplos que consisten en una placa cuadrada de material anisótropo, con una cavidad en su interior. Difieren en la forma de la cavidad, circular, elíptica o cuadrada. El modelo ha sido discretizado con un número creciente de elementos cuadráticos isoparamétricos. Los resultados muestran claramente como la sensibilidad calculada por el MVA converge al valor obtenido con DF al aumentar el número de elementos. También hay que señalar que en el caso de cavidades con un contorno no suave, son necesarias discretizaciones mas finas.

A continuación, la expresión de la sensibilidad ha sido implementada dentro del algoritmo BFGS. Se han planteado dos ejemplos con el fin de probar la conveniencia del método en la identificación de defectos. El primero consiste en una placa cuadrada en la que existe una cavidad elíptica. Para iniciar el proceso de minimización, partimos de una cavidad circular alejada de la posición verdadera. Los mediciones de desplazamientos tomadas en el contorno, son simuladas con un código informático y se suponen, en una primera parte, exactas, sin fuentes posibles de error. Con los tests realizados se ha comprobado como el método converge tras un número no muy elevado de iteraciones, a la solución real. Para

el segundo ejemplo consideramos dos cavidades circulares en la placa, aunque inicialmente suponemos un solo defecto. Aunque con menos precisión, el resultado obtenido se acerca bastante a la realidad, en posición y forma.

Por último, se estudia la estabilidad del algoritmo frente a errores, tanto en las mediciones iniciales como en el valor de las propiedades del material del modelo. Se han introducido errores siguiendo una distribución gaussiana, desde un 2% hasta un 5%, y en todos los casos la convergencia ha sido aceptable, habiendo aumentando muy ligeramente el número de iteraciones necesarias para llegar a una buena solución. Queda pues probada la convergencia y estabilidad del método propuesto.

8.3.2 *Resolución basada en la Derivada Topológica*

La derivada topológica es una novedosa y muy prometedora herramienta para la identificación de defectos, ya que ha quedado probada la exactitud con la que predice el tamaño y posición de los posibles defectos en un cuerpo. La derivada topológica ha sido definida como la variación, en primer orden, que se experimenta en la respuesta de un sistema al aparecer un defecto infinitesimal, en una posición determinada. Se ha desarrollado su cálculo para el caso de cavidades circulares en medios anisótropos, partiendo de la Ecuación Integral en el Contorno, y el cual necesita sólo información del problema en un estado sin dañar, con todas las ventajas que ello conlleva.

Numerosos tests han probado esta idea. En primer lugar, la correlación entre el radio real de la cavidad, y el estimado con la derivada topológica, es prácticamente perfecta, con un rango de tamaños muy amplio, tanto para cavidades muy pequeñas como para las muy grandes. En segundo lugar se ha diseñado un ejemplo con una placa cuadrada y una cavidad circular en su centro. Los resultados prueban como el mínimo de la derivada topológica predice con exactitud la posición y tamaño del defecto, tanto en tests donde no existen fuentes de error ni en el modelo ni los datos experimentales, como en tests en los se ha introducido hasta un 10% de error en las propiedades del material. Cuando se han considerado errores del 10% en las medidas simuladas de desplazamientos y/o tensiones en el contorno, el tamaño de la cavidad es estimado con mucha precisión, y la posición, aunque no perfecta, está muy cercana a la verdadera. También se ha probado el caso de en el que la cavidad tiene forma elíptica. Aunque el algoritmo no puede predecir la forma exacta, su posición y tamaño son suficientemente próximos a los reales.

La estrategia propuesta combina el cálculo de la derivada topológica de un funcional de costo con un algoritmo de minimización de orden cero, un algoritmo genético. Su uso conjunto goza de una serie de ventajas frente a otros métodos de optimización de uso más extendido en la detección de defectos. Estas ventajas se resumen a continuación.

- El problema directo a resolver es el que se define en el estado no dañado, teniendo que ser resuelto una sola vez en todo el proceso, independientemente del número de defectos. Por lo tanto desaparece la necesidad de modelizar el defecto, teniendo que calcular una única matriz M del sistema.

- El tiempo computacional transcurrido en cada iteración se reduce drásticamente ya que el sistema de ecuaciones a resolver, solamente implica calcular M y ${}^t\Delta$. M es la correspondiente al estado no dañado e invariable para todas las iteraciones, en un primer paso se factoriza y en las iteraciones sucesivas solo habrá que sustituir, una vez para cada defecto. Por su parte, ${}^t\Delta$ implica el cálculo de las tensiones en los puntos de evaluación de la derivada topológica, en el estado no dañado. En la práctica se calcularía al principio el campo de tensiones completo para el estado no dañado, en una malla lo suficientemente pequeña y luego se calcularían las tensiones en dichos puntos por interpolación.

- El número de parámetros de diseño se reduce, quedando como incógnita solo la posición del defecto. El tamaño óptimo se calcula en un paso interno.

- Existe la posibilidad de considerar en la búsqueda una cantidad de defectos en exceso, ya que el proceso permite que desaparezcan por si mismos los sobrantes.

Se han diseñado aplicaciones numéricas que confirman la validez de este método que combina AG con DT. Los primeros tests consisten en la búsqueda de una única cavidad circular o elíptica. Se han considerado errores en los datos experimentales, porcentajes que van desde el 0% al 10%. Los resultados muestran como el mejor individuo seleccionado por el algoritmo se ajusta muy bien al defecto real, con errores de hasta el 5%. Hay que señalar que hay distintos aspectos que tienen una alta influencia en la bondad de solución final ofrecida por el algoritmo, tales como la cantidad de datos experimentales, tipo de mediciones y lugar donde medir, el tamaño del defecto y su cercanía al contorno... En segundo lugar se han realizado pruebas para detectar dos cavidades. Los resultados obtenidos son muy precisos cuando las medidas tomadas tienen 2% de error. Finalmente, en los dos últimos ejemplos mostrados, se ha intentado encontrar una cavidad circular y una elíptica, partiendo de dos cavidades supuestas en la configuración inicial. El algoritmo señala la posición y tamaño con bastante precisión.

8.4 DESARROLLOS FUTUROS

Las investigaciones más inmediatas que la presentación de esta tesis sugiere, consisten en la extensión de las formulaciones desarrolladas a otros casos como:

- problemas tridimensionales
- estados de carga dinámicos
- otros materiales de comportamiento elástico anisótropo como son los piezoeléctricos.

El problema inverso de identificación ha sido resuelto para la detección de cavidades circulares, aunque el procedimiento usado es extensible a cavidades con forma arbitraria o a grietas. Las nuevas expresiones necesarias esperan ser desarrolladas en un futuro próximo.

Se han propuesto cuatro estrategias para la resolución numérica de varios problemas inversos que se dan en la realidad. Con ejemplos numéricos se ha probado la bondad y efectividad de los métodos propuestos. El paso siguiente sería validar todo lo expuesto con ensayos de laboratorio.

APÉNDICE A

CÁLCULO DE TENSIONES Y DEFORMACIONES EN PUNTOS INTERIORES

La Identidad de Somigliana Identity fue definida como

$$u_i(\mathbf{z}') + \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z}) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) d\Gamma. \quad (\text{A1.1})$$

Si derivamos con respecto a las coordenadas del punto de colocación $\mathbf{z}' \in \Omega \setminus \Gamma$, y aplicamos las ecuaciones cinemáticas, se obtiene la ecuación integral para las deformaciones,

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{z}') = \int_{\Gamma} [V_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') t_j(\mathbf{z}) - S_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') u_j(\mathbf{z})] d\Gamma \quad (\text{A1.2})$$

donde los núcleos son,

$$V_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_{ij}}{\partial z'_k} + \frac{\partial U_{kj}}{\partial z'_i} \right] = - \sum_{s=1}^2 \Re \left[\frac{p_{js} D_{iks}}{z_s - z'_s} \right] \quad (\text{A1.3})$$

$$S_{ijk}(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial z'_k} + \frac{\partial T_{kj}}{\partial z'_i} \right] = \sum_{s=1}^2 \Re \left[q_{js} D_{iks} \frac{\mu_s n_1 - n_2}{(z_s - z'_s)^2} \right] \quad (\text{A1.4})$$

con $D_{iks} = A_{is} R_{ks} + A_{ks} R_{is}$ (no suma en s); $R_{1s} = 1$ y $R_{2s} = \mu_s$.

La ecuación integral obtenida es discretizada usando el mismo procedimiento que para la ecuación integral en el contorno de los desplazamientos. Las tensiones en puntos interiores se calculan de forma inmediata a partir de las deformaciones y la ley de Hooke.

APÉNDICE B

EVALUACIÓN DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACIÓN

Cuando evaluamos las integrales dadas en las ecuaciones (3.25) y (3.26), debemos tener en cuenta dos situaciones distintas, dependiendo de si el punto de colocación l pertenece o no al elemento donde se está evaluando la integral. La primera situación, también conocida como *caso ordinario*, no presenta dificultades y pueden ser evaluadas numéricamente usando cuadratura Gaussiana. El VPC, *Valor Principal de Cauchy* tendrá sentido en el segundo caso, también conocido como *caso singular*. Esta situación merece un poco más de atención.

Cuando desarrollamos la expresión (3.25) para el cálculo de las constantes de integración $h_{ij}^m(l, k)$, se obtiene la siguiente integral:

$$h_{ij}^m(l, k) = 2\Re \left[\int_{-1}^1 \sum_{s=1}^2 \frac{q_{js} A_{is}}{z_s(\xi) - y_s^l} (\mu_s n_1 - n_2) \phi_m J^k d\xi \right], \quad (\text{A2.1})$$

la cual requiere la evaluación de la integral compleja

$$I_s = \int_{-1}^1 \frac{\mu_s n_1 - n_2}{z_s(\xi) - y_s^l} \phi_m J^k d\xi. \quad (\text{A2.2})$$

En el caso singular, la integral I_s puede separarse en una integral regular \bar{I}_s y una integral en el sentido de VPC como sigue:

$$I_s = \bar{I}_s + \int_{-1}^1 \frac{\phi_m}{\xi - \xi_l} d\xi, \quad (\text{A2.3})$$

donde ξ_l es la coordenada natural del punto de colocación.

El VPC de la integral es resuelto teniendo en cuenta el hecho de que los dos términos infinitos, para $\xi_l = 1$ y $\xi_l = -1$, se anulan cuando la evaluación de la integral es realizada en dos elementos adyacentes

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi_m}{\xi - \xi_l} d\xi = \int_{-1}^1 \frac{a\xi^2 + b\xi + c}{\xi - \xi_l} d\xi = 2(a + b\xi_l) + \phi_m(\xi_l) \ln \frac{1 - \xi_l}{1 + \xi_l}. \quad (\text{A2.4})$$

Para las constantes de integración $g_{ij}^m(l, k)$, la ecuación (3.26) puede ser reescrita como

$$g_{ij}^m(l, k) = 2\Re \left[\int_{-1}^1 \sum_{s=1}^2 p_{js} A_{is} \ln[z_s(\xi) - y_s^l] \phi_m J^k d\xi \right], \quad (\text{A2.5})$$

y por lo tanto habrá que evaluar otra integral compleja I_s

$$I_s = \int_{-1}^1 \ln[z_s(\xi) - y_s^l] \phi_m J^k d\xi. \quad (\text{A2.6})$$

En el caso singular, si $l \in k$ la integral I_s se vuelve impropia, pero tras algunas manipulaciones se puede calcular usando la integral

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta. \quad (\text{A2.7})$$

Para evaluar la integral (A2.7), se emplea una fórmula de cuadratura específica

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\eta}\right) f(\eta) d\eta \approx \sum_{k=1}^n w'_k f(\eta'_k), \quad (\text{A2.8})$$

donde w'_k son coeficientes de peso y η'_k es la coordenada para la cuadratura, ver Brebbia *et al.* [3].

APÉNDICE C

EVALUACIÓN DE LAS CONSTANTES DE INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA SENSIBILIDAD

Cuando se procede al cálculo de las ecuaciones $\delta h_{ij}^m(l, k)$ (5.24) aparecen nuevas integrales a resolver del tipo

$$I_s = \int \left[-\frac{x_2(\xi) - x_2^l}{(z_s(\xi) - y_s^l)^2} (\mu_s n_1 - n_2) + \frac{n_1}{z_s(\xi) - y_s^l} \right] \phi_m J^k d\xi \quad (\text{A3.1})$$

Aunque en un principio pudieran parecer singulares o hipersingulares, en realidad no lo son. Al desarrollar sus núcleos, es fácil probar que los términos infinitos se anulan, tanto en el caso en que el punto de colocación pertenece al elemento en que se evalúa la integral como cuando no, caso *ordinario*.

Para el cálculo de las sensibilidades de las constantes $\delta g_{ij}^m(l, k)$ (5.25), aparecen integrales de dos tipos. El primero consiste en integrales logarítmicas que se resuelven como en el desarrollo detallado en el Apéndice 1. El segundo es una integral de la forma

$$I_s = \int \frac{x_2(\xi) - x_2^l}{z_s(\xi) - y_s^l} \phi_m J^k d\xi \quad (\text{A3.2})$$

que no presenta dificultades al ser regular tanto en el caso *ordinario* como en el *singular*.

APÉNDICE D

SENSIBILIDAD MATERIAL ANALÍTICA PARA CAVIDADES E INCLUSIONES EN UN PLANO INFINITO

labelanalytical

En primer lugar consideramos una placa infinita de material anisótropo, con estado de carga tal que configura un estado de tensión plana. En su interior existe una cavidad elíptica, cuyo contorno se encuentra sujeto a un estado de tensión uniforme, formando un ángulo φ con el eje horizontal (ver figura (5.1)).

A continuación se exponen las expresiones para las tensiones normales, σ_n , y desplazamientos horizontales, u_1 , a lo largo del contorno de la cavidad. El ángulo θ es el ángulo de posición y φ es la inclinación de la carga uniforme P , ambos referidos al eje horizontal. a y b son los semiejes horizontal y vertical de la elipse.

$$\frac{\sigma_n}{P} = \Re \left[\frac{B}{AC} \left\{ b^2 \cos^2 \theta (a\mu_1\mu_2 \sin \varphi \sin \theta - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos \varphi (b\mu_1\mu_2 \cos \theta - a(\mu_1 + \mu_2) \sin \theta)) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2ab \sin \theta \cos \theta (b\mu_1\mu_2 \sin \varphi \cos \theta + a \cos \varphi \sin \theta) + \right. \right. \\ \left. \left. a^2 \sin^2 \theta (b \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi (b(\mu_1 + \mu_2) \cos \theta - a \sin \theta)) \right\} \right]$$

$$\frac{u_1}{P} = -\Im [B(\cos \varphi (a_{16} - a_{11}(\mu_1 + \mu_2)) + \sin \varphi (a_{12} - a_{11}\mu_1\mu_2))]$$

donde,

$$\begin{aligned} A &= b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta \\ B &= (b \cos \varphi + ia \sin \varphi)(\cos \theta - i \sin \theta) \\ C &= (b\mu_1 \cos \theta - a \sin \theta)(b\mu_2 \cos \theta - a \sin \theta) \end{aligned}$$

El segundo caso estudiado es un inclusión elíptica dentro de una placa, (semiejes $a = 2$ y $b = 1$). El núcleo está soldado a la matriz. Se han considerado dos posibilidades referentes al material de la inclusión, una en la que el valor de las constantes elásticas de dicha inclusión

es el doble de las de la matriz, y otra en que la inclusión es completamente rígida. Para ambos casos el estado de carga es el mismo, una tensión remota P . Como las expresiones completas son muy complicada, solo detallamos las referidas a las tensiones normales en el contorno de la inclusión rígida o elástica, y para el caso particular en que el material de la matriz y el núcleo es ortótropo y sus ejes de ortotropía son paralelos a los ejes cartesianos.

Las tensiones normales a lo largo de la interfase matriz-núcleo vienen dadas por,

$$\frac{\sigma_n}{P} = \frac{1}{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} \left\{ \cos^2 \theta \left(1 + 2\Re \left[\frac{(I + \mu_1 J)\mu_2^2}{K} - \frac{(I + \mu_2 J)\mu_1^2}{L} \right] \right) - \right. \\ \left. - 8 \sin \theta \cos \theta \Re \left[\frac{(I + \mu_1 J)\mu_2}{K} - \frac{(I + \mu_2 J)\mu_1}{L} \right] + \right. \\ \left. 8 \sin^2 \theta \Re \left[\frac{I + \mu_1 J}{K} - \frac{I + \mu_2 J}{L} \right] \right\}$$

y en el caso de inclusión rígida,

$$\frac{\sigma_n}{P} = \frac{1}{\cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta} \left\{ \cos^2 \theta \left(1 + 2\Re \left[\frac{(Q + \mu_1 R)\mu_2^2}{S} - \frac{(Q + \mu_2 R)\mu_1^2}{T} \right] \right) - \right. \\ \left. - 8 \sin \theta \cos \theta \Re \left[\frac{(Q + \mu_1 R)\mu_2}{S} - \frac{(Q + \mu_2 R)\mu_1}{T} \right] + \right. \\ \left. 8 \sin^2 \theta \Re \left[\frac{Q + \mu_1 R}{S} - \frac{Q + \mu_2 R}{T} \right] \right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{2a_{12}}{a_{11}} + 2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{a_{66}}{a_{11}}}}, \quad B = \frac{2a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \quad C = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{22}a_{11}}} \\
D &= \frac{1}{a_{66}} \left(2 \left(5a_{12}C + 4a_{11}\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} + a_{12}(1 - 4C) + a_{22}(-2a_{12} + 4a_{11}A) \right) \right) \\
E &= 2 + \frac{2}{a_{66}} (a_{12} + a_{11}B + \sqrt{a_{11}a_{22}}A) \quad F = \frac{2}{a_{66}} \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} (2 + A) \\
G &= (\cos \theta + i \sin \theta)^2 \quad H = -2 \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} + \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \right) \\
I &= 1 - \frac{2a_{12} + 2a_{66} + 4Aa_{11} + 2Ba_{11} + Fa_{11}a_{66}}{a_{66}(D + E)} \\
J &= \frac{2i(4 + A - (2 + A)(1 - C))}{-(2\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} - 2A)(4 + A) + (1 - C)H} \\
K &= (\mu_1 - \mu_2)(2i(G - 1) + (G + 1)\mu_2) \quad L = (\mu_1 - \mu_2)(2i(G - 1) + (G + 1)\mu_1) \\
M &= \frac{2a_{12}}{a_{66}}(1 + C) \quad N = \frac{2}{a_{66}}(a_{66} - a_{12} + a_{11}B) \quad O = 2 \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} - \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \right) \\
Q &= 1 - \frac{2}{a_{66}(M + N)} (a_{12} + a_{66} + a_{11}(A + B)) \\
R &= \frac{2i(A - (2 + A)(1 + C))}{2A^2 + (1 + C)O} \\
S &= \frac{1}{a_{66}} (\mu_1 - \mu_2)(2i(a_{66} - 1) + (a_{66} + 1)\mu_2) \\
T &= \frac{1}{a_{66}} (\mu_1 - \mu_2)(2i(a_{66} - 1) + (a_{66} + 1)\mu_1)
\end{aligned}$$

Para calcular las sensibilidades de los desplazamientos y tensiones, habrá que derivar estas expresiones con respecto a las constantes elásticas de flexibilidad.

APÉNDICE E

EXPRESIONES ANALÍTICAS PARA CALCULAR DESPLAZAMIENTOS EN UN DOMINIO INFINITO ANISÓTROPO CON ESTADO DE TENSIÓN REMOTA UNIFORME

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} = & \frac{a_{11}(\mathfrak{J}(\mu_1+\mu_2)(\mathfrak{J}^2(\mu_1)-2\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{J}(\mu_2)+\mathfrak{J}^2(\mu_2)+\mathfrak{R}^2(\mu_1-\mu_2))\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(\sigma_{11}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{12}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{12}-\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{J}(\mu_2)\sigma_{22}+\mathfrak{R}(\mu_1)(\sigma_{12}+\mathfrak{J}(\mu_2)\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \end{aligned} \quad (\text{A5.1})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{12} = & \frac{a_{16}\sigma_{11}(0.5|\mu_1-\mu_2|^2+\mathfrak{J}^2(\mu_1)-2\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{J}(\mu_2)+\mathfrak{J}^2(\mu_2)+\mathfrak{R}^2(\mu_1)-2\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)+\mathfrak{R}^2(\mu_2))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(a_{12}\sigma_{12}+0.5(a_{66}\sigma_{12}+a_{26}\sigma_{22}))+a_{11}(-\mathfrak{R}^3(\mu_1)\sigma_{11}+\mathfrak{R}^2(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{11}+\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}^2(\mu_2)\sigma_{11})}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{-\mathfrak{R}^3(\mu_2)\sigma_{11}-\mathfrak{J}^2(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2)\sigma_{11}-\mathfrak{J}^2(\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2)\sigma_{11}-|\mu_1-\mu_2|^2\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{12}}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{|\mu_1-\mu_2|^2\mathfrak{J}(\mu_2)(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{22})+\mathfrak{J}(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)(2\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{11}+2\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2\sigma_{12}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \\ & + \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22}))}{|\mu_1-\mu_2|^2} \end{aligned} \quad (\text{A5.2})$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{21} = & \frac{0.5a_{16}|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(0.5a_{66}|\mu_1|^2|\mu_2|^2\sigma_{12}+a_{12}|\mu_1|^2|\mu_2|^2\sigma_{12})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\ & + \frac{a_{26}(0.5|\mu_1|^2|\mu_2|^2+|\mu_1|^2|\mu_2|^2)\sigma_{22}+a_{22}(|\mu_1|^2(\mathfrak{J}(\mu_2)(\mathfrak{R}(\mu_1)-2\mathfrak{R}(\mu_2))+\mathfrak{J}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2))\sigma_{11})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\ & + \frac{|\mu_2|^2(\mathfrak{J}(\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_1)+\mathfrak{J}(\mu_1)-2(\mathfrak{R}(\mu_1)+\mathfrak{R}(\mu_2)))\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2(\mathfrak{J}(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)+|\mu_2|^2)\sigma_{12})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\ & + \frac{\mathfrak{J}^2(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)\sigma_{12}-\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22})+\mathfrak{R}(\mu_1)(\mathfrak{J}(\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{12}-\mathfrak{J}^2(\mu_2)\sigma_{22}-\mathfrak{R}(\mu_2)(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2)\sigma_{22})))}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \end{aligned} \quad (\text{A5.3})$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{22} = & \frac{a_{12}|\mu_1|^2|\mu_2|^2(|\mu_1-\mu_2|^2-\mathfrak{I}^2(\mu_1)+2\mathfrak{I}(\mu_1)\mathfrak{I}(\mu_2)-\mathfrak{I}^2(\mu_2)-\mathfrak{R}^2(\mu_1)+2\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)-\mathfrak{R}^2(\mu_2))+\sigma_{11}}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(a_{26}|\mu_1|^2|\mu_2|^2-a_{16}|\mu_1|^2|\mu_2|^2)\sigma_{12}+a_{22}(|\mu_1|^2(-\mathfrak{I}(\mu_1)\mathfrak{I}(\mu_2)+\mathfrak{I}^2(\mu_2)+\mathfrak{R}(\mu_1-\mu_2)\mathfrak{R}(\mu_2))\sigma_{11}}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{|\mu_2|^2(\mathfrak{I}^2(\mu_1)\sigma_{11}-\mathfrak{I}(\mu_1)\mathfrak{I}(\mu_2)\sigma_{11}-\mathfrak{R}^2(\mu_1)\sigma_{11}+\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{11}+|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2\sigma_{22})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{|\mu_1-\mu_2|^2(\mathfrak{I}^2(\mu_2)(\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{12}+\mathfrak{I}(\mu_1)\sigma_{22})+\mathfrak{I}(\mu_2)(\mathfrak{R}(\mu_1)\sigma_{12}+\mathfrak{I}^2(\mu_1)\sigma_{22}+\mathfrak{R}^2(\mu_1)\sigma_{22})}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2} \\
+ & \frac{\mathfrak{R}(\mu_2)(\mathfrak{I}^2(\mu_1)\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_1)\mathfrak{R}(\mu_1+\mu_2)\sigma_{12}+\mathfrak{I}(\mu_1)(\sigma_{12}+\mathfrak{R}(\mu_2)\sigma_{22})))}{|\mu_1-\mu_2|^2|\mu_1|^2|\mu_2|^2}
\end{aligned} \tag{A5.4}$$

Bibliografía

- [1] Lekhnitskii, S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Mir Publishers: Moscow, 1981.
- [2] Mase, G.E. *Teoría y problemas de mecánica del medio continuo*. McGraw-Hill, serie Schaum: Méjico 1978.
- [3] Brebbia, C.A., Domínguez, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. McGraw-Hill Book Company, 1992.
- [4] París, F., Cañas, J. *Boundary Element Method. Fundamentals and Applications*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press: New York, 1997.
- [5] Dennis, J.E., Schnabel, R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations*. SIAM: Philadelphia 1996.
- [6] Isaacson, E., Keller, H.B. *Analysis of numerical methods*. John Wiley and Sons: New York, 1966.
- [7] Nocedal, J., Wright, S.J. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag: New York, 1999.
- [8] Sollero, P. *Fracture Mechanics Analysis of Anisotropic Laminates by the Boundary Element Method*. PhD thesis. Wessex Institute of Technology: UK, 1994.
- [9] Sáez, A., Domínguez, J. General traction BE formulation and implementation for 2-D anisotropic media. In *Proceedings Mit Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics 1*. Boston, USA, 2001. Published by Elsevier Science London. 449 – 451.
- [10] Schnur, D.S., Zabarás, N. An inverse method for determining elastic material properties and a material interface, *International Journal for numerical methods in engineering* 1992; **33**:2039 – 2057.
- [11] Mallardo, V., Alessandri, C. Inverse problems in the presence of inclusion and unilateral constraints: a boundary element approach. *Computational Mechanics* 2000; **26**: 571 – 581.
- [12] Heyliger, P., Ugander, P., Ledbetter, H. Anisotropic elastic constants: measurement by impact resonance. *Journal of materials in civil engineering*, September-October 2001; **13**(5):356 – 363
- [13] Wang, W.T., Kam, T.Y. Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates. *Journal of engineering mechanics*, November, 2001; **127**(11):1117 – 1123
- [14] Knops, R.J., Payne, L.E. *Uniqueness Theorems in Linear Elasticity*. Springer Verlag: Berlin, 1972.
- [15] Hadamard, J. *Lectures on Cauchy Problem in Linear Partial Differential Equations*. Oxford University Press: London, 1923.

- [16] Beck, J.V., Blackwell, B., St Clair, C.R. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. Wiley-Interscience: New York, 1985.
- [17] Ikehata, M. How to draw a picture of an unknown inclusion from boundary measurements. Two mathematical inversion algorithms. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems* 1999; 7:255 – 271.
- [18] Colton, D., Kress, R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*. Springer Verlag: Berlin, 1992.
- [19] Kubo, S. Inverse problems related to the mechanics and fracture of solids and structures. *JSME International Journal* 1988; 31:157 – 166.
- [20] Chen, J.T., Chen, K.H. Analytical study and numerical experiments for Laplace equation with overspecified boundary conditions. *Applied Mathematical Modelling* 1998; 22:703 – 725.
- [21] Maniatty, A., Zabarar, N., Stelson, K. Finite element analysis of some elasticity problems. *Journal of Engineering Mechanics Division ASCE* 1989; 115:1302 – 1316.
- [22] Zabarar, N., Morellas, V., Schnur, D. Spatially regularized solution of inverse elasticity problems using the BEM. *Communications in Applied Numerical Methods* 1989; 5:547 – 553.
- [23] Schnur, D. Zabarar, N. Finite element solution of two-dimensional elastic problems using spatial smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1990; 30:57 – 75.
- [24] Yeih, W.C., Koya, T., Mura, T. An inverse problem in elasticity with partially overspecified boundary conditions. I. Theoretical approach. *Transactions ASME Journal of Applied Mechanics* 1993; 60:595 – 600.
- [25] Koya, T., Yeih, W.C., Mura, T. An inverse problem in elasticity with partially overspecified boundary conditions. II. Numerical details. *Transactions ASME Journal of Applied Mechanics* 1993; 60:601 – 606.
- [26] Marin, L., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2001; 25:783 – 793.
- [27] Marin, L., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. An alternating boundary element algorithm for a singular Cauchy problem in linear elasticity. *Computational Mechanics* 2002; 28:479 – 488.
- [28] Huang, C.H., Shih, W.Y. A boundary element based solution of an inverse elasticity problem by conjugate gradient and regularization method. In *Proceedings of the 7th International Offshore Polar Engineering Conference*. Honolulu, USA, 1997; 383 – 395.
- [29] Marin, L., Háo, D.N., Lesnic, D. Conjugate gradient-boundary element method for the Cauchy problem in elasticity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 2002; 55:227 – 247.

- [30] Marin, L., Lesnic, D. Regularized boundary element solution for an inverse boundary value problem in linear elasticity. *Communications in Numerical Methods in Engineering* 2002; **18**:817 – 825.
- [31] Marin, L., Lesnic, D. Boundary element solution for the Cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; **191**:3257 – 3270.
- [32] Marin, L., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. Boundary element regularisation methods for solving the Cauchy problem in linear elasticity. *Inverse Problems in Engineering* 2002; **10**:335 – 357.
- [33] Marin, L., Elliot, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. Parameter identification in isotropic linear elasticity using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2003; **28**:221 – 233.
- [34] Marin, L., Lesnic, D. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures* 2004; **41**:3425 – 3438.
- [35] Marin, L., Lesnic, D. Boundary element-Landweber method for the Cauchy problem in linear elasticity. *IMA Journal of Applied Mathematics* 2005; In press.
- [36] Lavrent'ev, M.M. *Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*. Izdet. Sibirsk. Otdel. Akad. Nauk SSSR: Novosibirsk, 1962. In Russian.
- [37] Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y. *Methods for Solving Ill-Posed Problems*. Nauka: Moscow, 1986.
- [38] Bakushinsky, A., Goncharsky, A. *Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Kluwert Academic: Dordrecht, 1994.
- [39] Morozov, V.A. *Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Nauka: Moscow, 1986.
- [40] Kozlov, V.A., Maz'ya, V.G., Fomin, A.F. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 1991; **31**:45 – 52.
- [41] Brebbia, C.A., Telles, J.F.C., Wrobel, L.C. *Boundary Element Techniques*. Springer Verlag: London, 1984.
- [42] Lions, J.L., Magenes, E. *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Their Applications*. Springer Verlag: New York-Heidelberg, 1972.
- [43] Comino, L., Gallego, R. Material constant sensitivity boundary integral equation for anisotropic solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2005; Accepted for publication.
- [44] Mera, N.S., Elliott, L., Ingham, D.B., Lesnic, D. The effect of a variable relaxation factor on the rate of convergence in the Cauchy problem. In *Boundary Element Techniques*, Aliabadi, M.H. (ed.). Queen Mary and Westfield College, Univ. of London, London, 1999; 357 – 366.
- [45] Fichera, G. Sul problema della derivata obliqua e sul problema misto per l'equazione di Laplace. *Boll. Un. Mat. Ital.* 1952; **7**:367 – 377.

- [46] Schiavone, P. Mixed problem in the theory of elastic plates with transverse shear deformation. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 1997; **50**:239 – 249.
- [47] Wendland, W.L., Stephan, E., Hsiao, G.C. On the integral equation method for the plane mixed boundary value problem for the Laplacian. *Mathematical Methods in Applied Science* 1979; **1**:265 – 321.
- [48] Johansson, T. An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations. *Mathematische Nachrichten* 2004; **272**:46 – 54.
- [49] Morozov, V.A. On the solution of functional equations by the method of regularization. *Soviet. Math. Dokl.* 1966; **167**:414 – 417.
- [50] Golub, G.H. Practical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 1977; **14**:651 – 667.
- [51] Hansen, P.C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems: Numerical Aspects of Linear Inversion*. SIAM: Philadelphia, 1998.
- [52] Constantinescu, A. On the identification of elastic moduli of laminated plate. In *Proceedings of the International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics*, Tanaka, M. and Dulikravich, G.S. (ed.). Elsevier, New York 1998; 115 – 6
- [53] Engl, H.W., Hanke, M., Neubauer, A. *Regularization of Inverse Problem*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, 1996.
- [54] Engl, H.W., Louis, A.K., Rundell, W. editors. *Inverse Problem in Medical Imaging and Nondestructive Testing*. Springer, Wien, New York 1996.
- [55] Huang, L., Sun, X., Liu, Y., Cen, Z. Parameter identification for two-dimensional orthotropic material bodies by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2003; **28**(2):109 – 121.
- [56] Ikehata, M. Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 1990; **50**:1635 – 1644.
- [57] Kirsch, A. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer Verlag, New York 1996.
- [58] Lauwagie, T., Sol, H., Roebben, G., Heylen, W., Shi, Y., Van der Biest, O. Mixed numerical-experimental identification of elastic properties of orthotropic metal plates. *NDT&E International* 2003; **36**:487 – 495.
- [59] Lin, Z. On the determination of radially dependent Lamé coefficients. *SIAM Journal of Applied Mathematics* 1998; **58**:875 – 903.
- [60] Liu, G.R., Han, X., Lam, K.Y. A combined genetic algorithm and nonlinear least squares method for material characterization using elastic waves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2002; **191**:1909 – 1921.
- [61] Ramm, A.G. editor. *Inverse Problems: Mathematical and analytical techniques with applications to Engineering*. Springer Verlag: New York, 2005.

- [62] Rus, G., Gallego, R. Optimization algorithms for identification inverse problems with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2002; **26**:315 – 327.
- [63] Wang, W.T., Kam, T.Y. Elastic constants identification of shear deformable laminated composite plates. *Journal of Engineering Mechanics* 2001; **127**(11):1117 – 1123.
- [64] Eschenauer, H.A., Kobelev, V.V., Schumacher, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization* 1994; **8**:42 – 51.
- [65] Gallego, R., Rus, G. Identification of cracks and cavities using the topological sensitivity boundary integral equation. *Computational Mechanics* 2004; **33**.
- [66] Haataja, J. Matlab function for simulating a simple real-coded genetic algorithm. Center for Scientific Computing, Box 405, FIN-02101 Espoo. Internet: Juha.Haataja@csc.fi, 2000.
- [67] Koguchi, H., Watabe, H. Improving defects search in structure by boundary element and genetic algorithm scan method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 1997; **19**:105 – 116.
- [68] Kowalckzyk, T., Fukukawa, T., Yoshimura, S., Yagawa, G. *An extensible evolutionary algorithm approach for inverse problems*. In *Proc. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics ISIP 1998*. Tanaka, M., Dulikravich, G.S. et al. eds. Nagano, Japan, 1998; 541 – 550.
- [69] Sokołowski, J., Żochowski, A. *On topological derivative in shape optimization*, Rapport de Recherche 3170, Institute National de Recherche en Informatique et en Automatique, 1997.
- [70] Stavroulakis, G.E. *Inverse and crack identification problems in engineering*, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht 2001.
- [71] Stavroulakis, G.E. Antes, H. *Crack detection in elastostatics and elastodynamics. a BEM modelling - neural network approach*. In *Proc. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics ISIP 1998*. Tanaka, M., Dulikravich, G.S. et al. eds. Nagano, Japan, 1998; 81 – 90.
- [72] Stavroulakis, G.E. Antes, H. Flaw identification in elastomechanics: BEM simulation with local and genetic optimization. *Structural Optimization*, 1998; **16**:162 – 175.
- [73] Tanaka, M., Nakamura, M. *Application of genetic algorithm to plural defects identification*. In *Proc. International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics ISIP 1994*. Bui, H., Tanaka, M. et al. eds. Rotterdam, The Netherlands, 1994; 377 – 382.
- [74] , Sokołowski, J., Zochowski, A. Topological derivatives for elliptic equations. *Inverse Problems*, 1999; **15**:123 – 134.
- [75] Jackowska-Strumilo, L., Sokolowski, J., Zochowski, A. *The topological derivative method and artificial neural networks for numerical solution of shape inverse problems*. INRIA 1999, 3739.
- [76] Rus, G. *Métodos numéricos para la detección no destructiva de defectos* PhD thesis. Grupo de Mecánica de Sólidos y Estructuras, University of Granada 2001.

- [77] Bonnet, M. Regularized BIE formulations for first and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers and Structures*, 1995; **56**:799 – 811.
- [78] Bonnet, M. BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. *Engineering Analysis with BEM*, 1995; **15**:121 – 126 ed. Elsevier.
- [79] Bonnet, M. Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal cracks using BIE and adjoint variable approach. *International Journal of Solids and Structures*, 2002; **39**:2365 – 2385, ed. Pergamon.
- [80] Gallego, R., Suarez, J. Numerical solution of the variation boundary integral equations for inverse problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000; **49**(4):501 – 518.
- [81] Petrycandand, H., Mroz, Z. Time derivatives of integrals functionals defined on varying volume and surface domains. *Arch. Mech.*, 1986; **38**:1579 – 95.
- [82] Menke, W. *Geophysical data analysis, Discrete Inverse Theory*. Academic Press INC., 1984.
- [83] Dennis, J.E. Jr., Gay, D.M., Welsch, R.E. Algorithm 573 NL2SOL - An adaptive Non-linear Least-Squares Algorithm [E4]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1981; **7**(3):369 – –383.
- [84] Bonnet, M., Constantinescu, A. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 2005; **21**(2):R1–R50.
- [85] Bonnet, M. Regularized BIE formulations for first and second-order shape sensitivity of elastic fields. *Computers & Structures*, 1995; **56**:799 – 811.
- [86] Burczynski, T. Recent Advances in Boundary Element Approach to Design Sensitivity Analysis - a Survey. *Design Sensitivity Analysis*. Eds. M.Kleiber and T.Hisada. Atlanta Technology Publications: Atlanta, 1993;1 – 25
- [87] Barone, M.R., Yang, R.J. A boundary element approach for recovery of shape sensitivities in three-dimensional elastic solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989;**74**:69 – 82.
- [88] Mellings, S.C., Aliabadi, M.H. Flaw identification using the boundary element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1995;; **38**:399 – 419.
- [89] Matsumoto, T., Tanaka, M., Miyigawa, M., Ishii, N. Optimum design of cooling lines in injection moulds by using boundary element design sensitivity analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1993; **14**:177 – 186.
- [90] Aithal, R., Saigal, S. Shape sensitivity in thermal problems using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995; **15**:115 – 120.
- [91] Burczynski, T., Kane, J.H., Balakrishna, C. Shape design sensitivity analysis via material derivative–adjoint variable technique for 3-D and 2-D curved boundary elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1995; **38**:2839 – 2866.
- [92] Lewinski, T., Sokolowski, J. *Topological derivative for nucleation of non-circular voids*. INRIA 1997, 3798.

- [93] Garreau, S., Duillaume, P.H., Massmoudi, M. The topological asymptotic for the PDE systems: the elasticity case, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2001; **39**(6):1756 – 1778.
- [94] Choi, J.O., Kwak, B.M. Boundary integral equation method for shape optimization of elastic structures, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1998; **26**:1579 – 1595.
- [95] Meric, R.A. Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1995; **15**:181 – 188.