APORTACIONES SOBRE EL DESARROLLO

DE

KARHUNEN-LOEVE PARA PROCESOS DE SEGUNDO ORDEN

por

MARIANO JOSE VALDERRAMA BONNET

Tesis Doctoral realizada en el
Departamento de Estadística e
I.O. bajo la dirección del Prof.
Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez.

Granada, 20 de Julio de 1984

INDICE

INTRODUCCION 1

CAPITULO 1: EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA UN PROCESO DE SEGUNDO ORDEN 5

1.1. Generalidades sobre procesos de segundo orden 5

1.2. Desarrollo de Karhunen-Loève para un proceso de segundo orden 13

1.3. Ejemplos y aplicaciones 22

1.4. Optimalidad del desarrollo de Karhunen-Loève 48

1.5. Diferenciación del desarrollo de Karhunen-Loève 51

1.6. Desarrollo generalizado de Karhunen-Loève 54

CAPITULO 2: EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA UN PROCESO DEBILMENTE ESTACIONARIO 59

2.1. Procesos débilmente estacionarios y aplicación del Análisis Espectral 59

2.2. Desarrollo de Karhunen-Loève para procesos débilmente estacionarios 67

2.3. Ejemplos y aplicaciones 71

2.4. Particularización a procesos periódicos 90

2.5. Solución en el caso de espectro racional 94

2.6. La ecuación de Wiener-Hopf 108

CAPITULO 3: EL DESARROLLO APROXIMADO DE KARHUNEN-LOEVE 117

3.1. Necesidad de recurrir a métodos numéricos 117

3.2. El método de Rayleigh-Ritz 118

3.3. Construcción del desarrollo aproximado de Karhunen-Loève 124

3.4. Aplicación a procesos conocidos 128

3.5. Estudio del error de aproximación 135

3.6. El desarrollo aproximado de Karhunen-Loève para procesos débilmente estacionarios 138

CAPITULO 4: CARACTERIZACION DE PROCESOS GAUSSIANOS MEDIANTE SUS DESARROLLOS DE KARHUNEN-LOEVE 139

4.1. Fundamento de las caracterizaciones 139

4.2. Caracterización de un proceso de Gauss real, de cuarto orden, con incrementos estacionarios independientes 140

4.3. Caracterización de procesos Gaussianos entre -- clases con la misma función de covarianza 145

4.4. Caracterización de procesos Gaussianos con densidad espectral racional 154

APENDICE I: EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA PROCESOS - VECTOR-VALUADOS 159

APENDICE II: EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA CAMPOS -- ALEATORIOS 171

BIBLIOGRAFIA 177

La presente Memoria de Tesis Doctoral titulada: "Aportaciones sobre el desarrollo de Karhunen-Loève para procesos de segundo orden", fué dirigida por el Dr.D. Ramón Gutiérrez Jáimez, Catedrático de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada, y defendida en la Facultad de Ciencias de dicha Universidad el día 22 de Septiembre de 1984 ante el siguiente Tribunal:

Presidente: Prof.Dr.D. Ramón Gutiérrez Jáimez
Catedrático de la Facultad de Ciencias. Univ. de Granada.

Vocales : Prof.Dr.D. Pablo Bobillo Guerrero
Catedrático de la Facultad de Ciencias. Univ. de Granada.

" : Prof.Drª.Dª. Concepción Fernández Vivas
Catedrático de la Facultad de Ciencias. Univ. de Granada.

" : Prof.Dr.D. José Grané Manileu
Catedrático de la Facultad de Informática. Univ. Politécnica de Barcelona.

Secretario: Prof.Dr.D. Antonio Martín Andrés
Catedrático de la Facultad de Medicina. Univ. de Granada.

Obtuvo por unanimidad la calificación de: Sobresaliente "cum laude".

DEDICATORIA:

A mis padres

A Pilar

INTRODUCCION

Los procesos estocásticos de segundo orden sirven como modelo matemático para una gran cantidad de fenómenos físicos, biológicos y económicos; como ejemplos tenemos: El recorrido aleatorio de una partícula en movimiento browniano,el crecimiento de poblaciones, el número de electrones emitidos desde un foco luminoso,etc.

En ocasiones, para poder evaluar de forma simplificada tales procesos, interesa descomponerlos en un conjunto finito, o al menos numerable, de componentes ortogonales. Este procedimiento es usual en el estudio de la estimación y detección de señales. La razón física de dichas descomposiciones radica en que las componentes ortogonales pueden aislarse experimentalmente mediante el empleo de filtros adecuados.

Existen diversas formas de representar un proceso de segundo orden en términos de un conjunto numerable de componentes ortogonales. Así, Belyaev (1959) y Bartlett (1966) han establecido un desarrollo numerable de un proceso de segundo orden, en términos de sus derivadas sucesivas en media cuadrática (m.c.), imponiendo condiciones adicionales a su función de covarianza para que dicha representación sea ortogonal. La utilidad práctica de esta representación está limitada por el hecho de tener que ser la función de covarianza del proceso, infinitamente derivable.

Cuando el proceso es periódico en m.c., Papoulis (1965) demuestra que admite una representación ortogonal del tipo Fourier,en términos de exponenciales complejas. En tal caso ya no hace que exigir que existan derivadas sucesivas en m.c. del proceso, sino tan solo que éste sea continuo en m.c. además de periódico.

Sin embargo existe una representación numerable general, válida para un proceso de segundo orden y contínuo en m.c. cualquiera, en términos de variables aleatorias incorreladas. Dicha representación se basa en el teo

rema de Karhunen (1947), y se construye de forma que los coeficientes del desarrollo son las autofunciones de una ecuación de Fredholm de segunda - especie, homogénea, cuyo núcleo es la función de covarianza del proceso. Se denomina desarrollo de Karhuner-Loève, y su estudio es el objeto central de esta tesis.

Concretamente, el capítulo 1 está dedicado al estudio del desarrollo general de Karhunen-Loève. Así tras repasar los conceptos fundamentales - sobre procesos de segundo orden, describimos la deducción formal del desarrollo, construyendo para ello un espacio de Hilbert conveniente sobre el que se realiza el desarrollo. Así mismo se considera el caso de que el - proceso sea Gaussiano, resultando entonces que su desarrollo de Karhunen-Loève converge casi seguramente.

Posteriormente se estudian los desarrollos de Karhunen-Loève de algunos procesos conocidos, tales como el Wiener y el Puente Browniano, y se aplica dicho desarrollo a la resolución de algunos problemas físicos - (construcción de un filtro lineal óptimo, detección de señales en presencia de ruido, etc.).

También se estudian en este capítulo algunas propiedades estructurales del desarrollo, entre las que cabe destacar su carácter doblemente óptimo, y su diferenciabilidad, para finalizar construyendo un desarrollo - generalizado a familias finitas de procesos.

En el capítulo 2 se estudia el desarrollo de Karhunen-Loève para procesos débilmente estacionarios. Como consecuencia de esta propiedad se induce que el Análisis Espectral va a desempeñar un importante papel en su estudio, y que la ecuación integral asociada al desarrollo, que habíamos establecido en el capítulo 1, va a ser de tipo convolutorio. Esta analogía con los filtros lineales estacionarios nos va a permitir inducir un tipo de solución a dicha ecuación integral, como se ve en el §2.2.

Seguidamente estudiamos el desarrollo de Karhunen-Loève de algunos -

procesos débilmente estacionarios conocidos, entre los que cabe destacar el de Ornstein-Uhlenbeck, ya que para él, procedemos de dos formas distintas: Una, directamente, y otra, partiendo de que dicho proceso puede obtenerse a partir del proceso de Wiener mediante una transformación adecuada. Así mismo, demostramos que el desarrollo de Fourier de un proceso periódico es un caso particular del desarrollo de Karhunen-Loève.

También se demuestra en este capítulo 2 que la ecuación integral asociada al proceso tiene solución siempre que su densidad espectral sea de tipo racional, y se obtienen explícitamente sus soluciones.

Por último se estudia la ecuación de Wiener-Hopf, que como es sabido surge en diversos problemas de estimación y predicción.

A lo largo de estos dos primeros capítulos se utiliza el desarrollo explícito de Karhunen-Loève del proceso. Sin embargo no existe un método general válido para resolver la ecuación integral de Fredholm asociada al proceso y poder obtener la expresión explícita de sus autovalores y autofunciones, salvo en el caso antes indicado de tratarse de un proceso con densidad espectral racional. Ello es lo que nos ha inducido en el capítulo 3 a construir un desarrollo "aproximado" de Karhunen-Loève, en el sentido de que se obtenga tras resolver numéricamente su ecuación integral asociada.

El método numérico utilizado es el de Rayleigh-Ritz, y de ésta forma siempre puede obtenerse un desarrollo ortogonal del proceso que convergerá hacia el de Karhunen-Loève cuando las autofunciones y autovalores aproximados sean convergentes hacia los formales. Evidentemente, al utilizar un tal desarrollo aproximado en lugar del desarrollo formal, se comete un error; la expresión de dicho error es evaluada en el §3.5.

Así mismo, se estudian en este capítulo los desarrollos aproximados de Karhunen-Loève de varios importantes procesos conocidos (Wiener, Puente Brownianos y Ornstein-Uhlenbeck), para finalizar haciendo una breve referencia al modo de proceder en el caso débilmente estacionario.

El capítulo 4 está dedicado a caracterizar distintas clases de procesos Gaussianos mediante sus desarrollos de Karhunen-Loève. Concretamente, comenzamos caracterizando la clase de procesos de cuarto orden con incrementos estacionarios independientes, para pasar seguidamente a estudiar diversas clases de procesos con la misma función de covarianza; así consideramos las funciones de covarianza: $\min(t,s)$; $\min(t,s)[T-\max(t,s)]$, siendo T la amplitud del espacio paramétrico del proceso; y $ke^{-\alpha|t-s|}$, teniendo en este último caso que recurrir a un procedimiento más sofisticado para su caracterización.

Por último se estudia la caracterización Gaussiana de la clase de procesos con densidad espectral racional, considerando especialmente el caso en que el proceso en cuestión se obtenga tras filtrar un ruido blanco.

La tesis concluye con dos apéndices en los que se estudia la extensión del desarrollo de Karhunen-Loève a procesos vector-valuados, en primer lugar, y a campos aleatorios, en segundo lugar, quedando abierto el problema de estudiar la expresión de dicho desarrollo en el caso de procesos valuados en un espacio de Hilbert cualquiera, y en espacios de Banach en general.

Quisiera finalmente expresar mi profundo agradecimiento, al Director de esta memoria Dr.D.Ramón Gutiérrez Jáimez, Catedrático de Estadística e I.O., por su constante apoyo y estímulo, tanto personal como intelectual.

Granada, 20 de Julio de 1984

CAPITULO 1

EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA UN PROCESO DE SEGUNDO ORDEN.

1.1. GENERALIDADES SOBRE PROCESOS DE SEGUNDO ORDEN.

Un proceso de segundo orden (complejo) es una familia uniparamétrica de variables aleatorias complejo-valuadas con momentos de segundo orden finitos $\{X_t | t\in T\}$, es decir: $E[|X_t|^2]<\infty$, $\forall t\in T$.

Para estudiar las propiedades de segundo orden de un proceso, empezaremos considerando las operaciones lineales con procesos.

Diremos que una variable aleatoria Y se deriva de un proceso de segundo orden $\{X_t | t\in T\}$ mediante una operación lineal, si puede expresarse de la forma

$$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \qquad (1.1.1)$$

o bién como límite en media cuadrática (m.c.) de una sucesión de tales combinaciones lineales finitas.

El conjunto de todas las variables aleatorias obtenidas a partir de un proceso de segundo orden $X = \{X_t | t\in T\}$ mediante operaciones lineales, lo notaremos H_x. En dicho conjunto podemos establecer una relación de equivalencia de la forma siguiente: Dos variables aleatorias $Y, Y' \in H_x$ son indistinguibles sí y solamente sí son iguales en m.c., es decir $E[|Y-Y'|^2] = 0$.

Así H_x se convierte en espacio cociente, aunque lo seguiremos notando igual.

Definimos, entonces, en H_x un producto interno de la forma:

$$\langle Y|Z\rangle = E[Y\bar{Z}], \quad \forall Y,Z\in H_x \qquad (1.1.2)$$

Claramente se trata de un producto escalar, y H_x es así un espacio prehilbertiano.

Dicho producto escalar defino automáticamente una norma:

$$\|Y\| = \sqrt{\langle Y|Y\rangle} = \sqrt{E[|Y|^2]}, \quad \forall Y \in H_X \qquad (1.1.3)$$

y una métrica:

$$d(Y,Z) = \|Y-Z\| \quad , \forall Y,Z \in H_X \qquad (1.1.4)$$

Se demuestra fácilmente [47] que H_X es completo respecto a la métrica definida, por lo que se trata de un espacio de Hilbert.

Dicho espacio H_X desempeña un papel importante en el estudio de los desarrollos de Karhunen-Loève, como posteriormente veremos, así como en la resolución de problemas de predicción lineal y filtrados.

Asociado a todo proceso de segundo orden $\{X_t | t \in T\}$ tenemos los siguientes conceptos:

- Función media: $\mu(t) = E[X_t]$
- " de correlación: $\mathcal{R}(t,s) = E[X_t \bar{X}_s]$
- " de covarianza: $R(t,s) = E[(X_t - \mu(t))\overline{(X_s - \mu(s))}]$

Observemos, no obstante, que al ser el resultado de una operación lineal sobre el proceso $\{X_t | t \in T\}$ igual a la suma de los resultados de realizar la misma operación lineal sobre los procesos $\{X_t - \mu(t) | t \in T\}$ y $\{\mu(t) | t \in T\}$ por separado, podemos suponer que el proceso en cuestión es centrado (la función media es nula). Así las funciones de correlación y covarianza serán iguales, $\mathcal{R}(t,s) = R(t,s)$, por lo que a partir de ahora hablaremos solo de funciones de covarianza.

Por consiguiente, se puede decir de modo informal, que las propiedades de segundo orden de un proceso son aquellas que pueden deducirse a partir de su función de covarianza. En particular, veremos que toda propiedad del espacio H_X es de segundo orden.

En vista de la importancia que tiene la función de covarianza de un proceso de segundo orden, pasemos a estudiar sus propiedades fundamentales.

Propiedades de la función de covarianza:

1) Es semidefinida positiva, pues $\forall t_1,\dots,t_n \in T$ y $\forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$, es

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \bar{a}_j R(t_i,t_j) = E\left[\left|\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}\right|^2\right] \geq 0 \qquad (1.1.5)$$

Recíprocamente, para toda función semidefinida positiva R(t,s) siempre existe un proceso de segundo orden $(X_t \mid t\in T)$ que la tiene por función de covarianza. Más aún, siempre pueden hallarse dos procesos reales $(Y_t \mid t\in T)$ y $(Z_t \mid t\in T)$ conjuntamente Gaussianos tales que el proceso $(Y_t + iZ_t \mid t\in T)$ tenga por función de covarianza R(t,s), [16].

2) Como consecuencia, la parte real de una función de covarianza, es una función de covarianza, ya que si notamos $X_t = Y_t + iZ_t$, $\forall t\in T$, se tiene:

$$R(t,s)=E[(Y_t+iZ_t)(Y_s-iZ_s)]=E[Y_tY_s]+E[Z_tZ_s]+i(E[Z_tY_s]-E[Y_tZ_s]) \qquad (1.1.6)$$

de donde:

$$\mathrm{Re}[R(t,s)]=E[Y_tY_s]+E[Z_tZ_s] \qquad (1.1.7)$$

y así

$$E[Y_tY_s]=E[Z_tZ_s]=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}(R(t,s)) \qquad (1.1.8)$$

La parte imaginaria de R(t,s), en general, no es una función de covarianza.

3) Tiene simetría Hermítica, pues:

$$R(t,s)=E[X_t\bar{X}_s]=\overline{E[\bar{X}_tX_s]}=\overline{E[X_s\bar{X}_t]}=\overline{R(s,t)} \qquad (1.1.9)$$

4) Verifica la desigualdad de Schwartz, o sea:

$$|R(t,s)| \leq \sqrt{R(t,t).R(s,s)} \qquad (1.1.10)$$

ya que:

$$0\leq E\left[\left|X_t-\frac{E[X_t\bar{X}_s]}{E[|X_s|^2]}X_s\right|^2\right]=E\left[\left(X_t-\frac{E[X_t\bar{X}_s]}{E[|X_s|^2]}X_s\right)\left(\bar{X}_t-\frac{E[\bar{X}_tX_s]}{E[|X_s|^2]}\bar{X}_s\right)\right]=$$

$$=E[X_t\bar{X}_t]-\frac{E[X_t\bar{X}_s]}{E[|X_s|^2]}E[X_s\bar{X}_t]-\frac{E[\bar{X}_tX_s]}{E[|X_s|^2]}E[X_t\bar{X}_s]+\frac{E[X_t\bar{X}_s]E[\bar{X}_tX_s]}{(E[|X_s|^2])^2}E[|X_s|^2]=$$

$$=R(t,t)-\frac{R(t,s)R(s,t)}{R(s,s)}-\frac{R(t,s)R(s,t)}{R(s,s)}+\frac{R(t,s)R(s,t)}{R(s,s)}=R(t,t)-\frac{|R(t,s)|^2}{R(s,s)}$$

5) Es <u>cerrada</u> para las siguientes operaciones:

a) <u>Adición</u>.- Si $R_1(t,s)$ y $R_2(t,s)$ son dos funciones de covarianza, su suma es otra función de covarianza, ya que siempre pueden encontrarse dos procesos Gaussianos independientes $\{Y_t|t\in T\}$ y $\{Z_t|t\in T\}$, que las tengan respectivamente por covarianzas, y así su suma $\{X_t+Y_t|t\in T\}$ tendrá por función de covarianza $R_1(t,s)+R_2(t,s)$.

b) <u>Multiplicación</u>.- Análogamente, el producto de dos funciones de covarianza es una covarianza.

c) <u>Producto externo</u>.- Si $R(t,s)$ es una covarianza y λ es una constante positiva, entonces $\lambda R(t,s)$ es una covarianza, ya que toda constante positiva λ puede considerarse la función de covarianza del proceso $\{X_t=X|t\in T\}$ siendo X una variable Gaussiana centrada y con varianza λ. Así por b) se concluye.

En general, si $R_1(t,s),R_2(t,s),\ldots,R_n(t,s)$ son funciones de covarianza en $T\times T$, y $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ son constantes positivas, entonces $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i R_i(t,s)$ es también una covarianza en $T\times T$.

d) <u>Límite puntual</u>.- Si $\{R_k(t,s)\}_{k\in N}$ es una sucesión de funciones de covarianza en $T\times T$ que converge puntualmente hacia la función $R(t,s)$ en todo punto de $T\times T$, entonces $R(t,s)$ es también una covarianza en $T\times T$, ya que en virtud de la propiedad 1), las $R_k(t,s)$ son semidefinidas positivas, y así $R(t,s)$ también lo es, puesto que:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\bar{a}_jR(t_i,t_j)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i\bar{a}_jR_k(t_i,t_j)\geq 0 \quad (1.1.11)$$

por lo que aplicando nuevamente la propiedad 1) se concluye.

e) Formas bilineales.- Un proceso de segundo orden $\{X_t|t\in T\}$, siempre puede expresarse de la forma:

$$X_t=f(t)X, \qquad \forall t\in T \tag{1.1.12}$$

siendo f(t) una función arbitraria y X una variable Gaussiana tipificada. Así su covarianza es:

$$R(t,s)=E[X_t\bar{X}_s]=E[f(t)X\overline{f(s)X}]=f(t)\overline{f(s)}E[|X|^2]=f(t)\overline{f(s)} \tag{1.1.13}$$

Por tanto el producto $f(t)\overline{f(s)}$ es la función de covarianza de algún proceso. Así por a), toda suma bilineal finita $\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\overline{f_k(s)}$ es una covarianza, y también los es toda serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\overline{f_k(s)}$.

Más aún, por d), todo límite puntual de una sucesión de sumas bilineales $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\overline{f_k(s)}\right)_{k\in N}$ es una covarianza, lo que incluye integrales de la forma $\int_a^b f(t,\lambda)\overline{f(s,\lambda)}d\lambda$.

A partir de c) y d) se tiene el siguiente resultado, anteriormente mencionado:

Proposición 1.1.1.- Toda propiedad del espacio H_X es de segundo orden.

Estudiemos a continuación algunas operaciones de segundo orden con procesos estocásticos.

Continuidad en m.c. .- Un proceso de segundo orden $\{X_t|t\in T\}$ se dice que es contínuo en m.c. en $t\in T$, si

$$\lim_{h\to 0} E[|X_{t+h}-X_t|^2]=0 \tag{1.1.14}$$

Si esta condición se verifica $\forall t\in T$, se dice simplemente que el proceso es contínuo en m.c.

La continuidad en m.c. de un proceso de segundo orden está íntimamente ligada a la continuidad de su función de covarianza como muestra el siguiente teorema [47]:

Teorema 1.1.2.- Sea $\{X_t|t\in T\}$ un proceso de segundo orden con función de covarianza $R(t,s)$. Entonces se verifica:

i) $\{X_t|t\in T\}$ es contínuo en m.c. en $t\in T$ sí y sólo sí $R(.,.)$ es contínua en el punto diagonal $(t,t)\in T\times T$.

ii) Si $\{X_t|t\in T\}$ es contínuo en m.c. $\forall t\in T$, entonces $R(.,.)$ es contínua $\forall (t,s)\in T\times T$.

iii) Si una función semidefinida positiva en $T\times T$ es contínua en todo punto diagonal, entonces también lo es en todo punto de $T\times T$.

Como aplicación tenemos el siguiente resultado fundamental sobre el espacio H_X:

Teorema 1.1.3.- El espacio H_X es separable.

Demostración: Basta ver que el proceso $X=\{X_t|t\in T\}$ es separable ya que todo elemento de H_X es combinación lineal de variables de X, o bién límite en m.c. de tales combinaciones. Pero esto es cierto, ya que si consideramos $T\subset\mathbb{R}$, y notamos $T'=T\cap\mathbb{Q}$, al ser T' denso en T, se verifica que $\forall t\in T$ existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset T'$ tal que $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}\longrightarrow t$; y como $\{X_t|t\in T\}$ es contínuo en m.c., se verifica que $\lim_{n\to\infty} X_{t_n}=X_t$ en m.c., por lo que $\{X_t|t\in T\}$ es separable, y se concluye.

Derivación en m.c. .- Dado un proceso de segundo orden $\{X_t|t\in T\}$, se define su **derivada en m.c.** en el punto $t\in T$ como:

$$X'_t=\lim_{h\to 0}\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\quad \text{en m.c.} \qquad (1.1.15)$$

Observemos que $X'_t\in H_X$, ya que si notamos $h=\frac{1}{n}$, la definición (1.1.15) se expresa de la forma:

$$X'_t=\lim_{n\to\infty} n\left(X_{t+\frac{1}{n}}-X_t\right)\quad \text{en m.c.} \qquad (1.1.16)$$

A ser H_X un espacio completo, la convergencia en m.c. equivale a la convergencia mútua en m.c., por lo que se verifica que X'_t existe sí y sólo sí

$$\lim_{\substack{h\to o\\ h'\to o}} E\left[\left|\frac{X_{t+h}-X_t}{h}-\frac{X_{t+h'}-X_t}{h'}\right|^2\right]=0 \qquad (1.1.17)$$

y a su vez sí y sólo sí $\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$ existe en el punto (t,t).

Es decir, para que el proceso $\{X_t|t\in T\}$ sea derivable en m.c. en $t\in T$, es condición necesaria y suficiente que su función de covarianza R(t,s) admita derivada generalizada segunda finita en (t,t), y en tal caso es:

$$E[X'_t\overline{X'_s}] = \frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s} \qquad (1.1.18)$$

En efecto

$$E[X'_t\overline{X'_s}]= E\left[\left(\lim_{h\to o}\frac{X_{t+h}-X_t}{h}\right)\overline{\left(\lim_{h'\to o}\frac{X_{s+h'}-X_s}{h'}\right)}\right]=$$

$$= \lim_{\substack{h\to o\\ h'\to o}} \frac{1}{hh'} E[(X_{t+h}-X_t)\overline{(X_{s+h'}-X_s)}]=$$

$$= \lim_{\substack{h\to o\\ h'\to o}} \frac{1}{hh'}[R(t+h,s+h')-R(t+h,s)-R(t,s+h')+R(t,s)]=$$

$$= \lim_{\substack{h\to o\\ h'\to o}} \frac{1}{h}\left[\frac{R(t+h,s+h')-R(t+h,s)}{h'}-\frac{R(t,s+h')-R(t,s)}{h'}\right]=$$

$$= \lim_{h\to o}\frac{1}{h}\left[\frac{\partial R(t+h,s)}{\partial s}-\frac{\partial R(t,s)}{\partial s}\right]=\frac{\partial^2 R(t,s)}{\partial t\partial s}$$

Este resultado se extiende inmediatamente al siguiente:

$$E[X_t^{(n)}\overline{X_s^{(m)}}] = \frac{\partial^{n+m} R(t,s)}{\partial t^n \partial s^m} \qquad (1.1.19)$$

donde $X_t^{(n)}$ denota la derivada n-sima de X_t respecto de t en el sentido dado anteriormente.

Integración en m.c. .- Sea $\{X_t|t\in T\}$ un proceso de segundo orden, y consideremos una sucesión de particiones $(T_n)_{n\in N}$ de T taler que cuando $n\to\infty$, la partición T_n sea densa en T. Concretamente consideremos T=[a b]$\subset$R, y -

$$T_n=\{a=t_o^{(n)}<t_1^{(n)}<\ldots,<t_n^{(n)}=b\}/\max_{1\le i\le n}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \quad (1.1.20)$$

Así, para una función $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{C}$, $t\longrightarrow f(t)$, definimos la integral en m.c. de $f(t)X_t$ en el intervalo $[a,b]$, de la forma:

$$\int_a^b f(t)X_t\,dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=o}^{n-1} f(t'_{i_n})X_{t'_{i_n}}(t_{i-1}^{(n)}-t_i^{(n)}) \text{ en m.c.} \quad (1.1.21)$$

donde los t'_{i_n} son una sucesión de puntos verificando: $t_i^{(n)}\le t'_{i_n}\le t_{i+1}^{(n)}$.

La integral en m.c. tal y como la hemos definido en (1.1.21) es un elemento de H_x, y es independiente de la partición considerada.

Al igual que en la derivación en m.c., la existencia de la integral en m.c. puede caracterizarse mediante la función de covarianza del proceso, de la forma siguiente,[25],[26]:

Teorema 1.1.4.- Sea $\{X_t|t\in[a,b]\}$ un proceso de segundo orden. Entonces la integral en m.c. definida en (1.1.21) existe sí y sólo sí la integral $\int_a^b\int_a^b R(t,s)f(t)\overline{f(s)}dtds$ existe en el sentido Riemann.

Observemos entonces que si el proceso $\{X_t|t\in[a,b]\}$ es contínuo en m.c., entonces una condición suficiente para la existencia de (1.1.21) es que la función f sea contínua en $[a,b]$, ya que en virtud del teorema 1.1.2 la función de covarianza del proceso será contínua en $T\times T$, y así $R(t,s)f(t)\overline{f(s)}$ también lo será, y por tanto R-integrable.

Sin embargo, en la práctica puede ser preferible definir $\int_a^b f(t)X_t(\omega)dt$ como la integral de Lebesgue de una trayectoria $\{X_t(\omega)|t\in[a,b]\}$ del proceso. En tal caso para que exista dicha integral, el proceso ha de ser medible y ha de verificarse que

$$\int_a^b|f(t)|E[|X_t|]dt<\infty \quad (1.1.22)$$

en virtud del teorema de Fubini [25]

1.2. DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA UN PROCESO DE SEGUNDO ORDEN.

En éste parágrafo vamos a obtener un desarrollo en serie (numerable) para un proceso de segundo orden, en términos de variables aleatorias ortogonales, y cuyos coeficientes sean, así mismo, ortogonales. Dicho desarrollo "doblsmente ortogonal" será el de Karhunen-Loève.

Para su construcción vamos a basarnos en las propiedades del espacio de Hilbert, H_x, asociado al proceso de segundo orden $X\equiv(X_t|t\in T)$, donde $T\subset R$ será un intervalo finito o infinito.

Diremos que una familia S de H_x es ortogonal si

$$\langle Y|Z\rangle=0, \quad \forall Y,Z\in S(Y\neq Z) \tag{1.2.1}$$

donde $\langle|\rangle$ es el producto escalar de H_x definido en (1.1.2). Si además se verifica que

$$\|Y\| = 1, \quad \forall Y\in S \tag{1.2.2}$$

siendo $\|\ \|$ la norma de H_x definida en (1.1.3), diremos que S es ortonormal.

Una familia ortonormal S en H_x se dice que es completa si el único elemento de H_x ortogonal a todo elemento de S es el cero.

Como consecuencia de ser H_x separable se tiene el siguiente resultado [10]:

Proposición 1.2.1.- Toda familia ortonormal en H_x es finita o infinita numerable.

Consideremos entonces un proceso de segundo orden y contínuo en m.c. $(X_t|t\in T)$, y una familia ortonormal $(Z_n)_{n\in N}$ en H_x. Construyamos para cada $Y\in H_x$ una combinación lineal finita de la forma $\sum_{n=o}^{N} c_n Z_n$, cuya distancia en m.c. a Y sea mínima. Es decir, calculemos los coeficientes c_n para los que $\|Y-\sum_{n=o}^{N} c_n Z_n\|$ sea mínima.

Evidentemente una norma será mínima cuando su cuadrado lo sea. Por tanto hagamos el siguiente desarrollo:

$$\|Y-\sum_{n=0}^{N} c_n Z_n\|^2 = E[(Y-\sum_{n=0}^{N} c_n Z_n)(\bar{Y}-\sum_{m=0}^{N} \overline{c_m} \overline{Z_m})] =$$

$$= E[Y\bar{Y}] - \sum_{m=0}^{N} \overline{c_m} E[Y\overline{Z_m}] - \sum_{n=0}^{N} c_n E[Z_n \bar{Y}] + \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} c_n \overline{c_m} E[Z_n \overline{Z_m}] =$$

$$= E[|Y|^2] - \sum_{n=0}^{N} \overline{c_n} E[Y\overline{Z_n}] - \overline{\sum_{n=0}^{N} c_n E[Y\overline{Z_n}]} + \sum_{n=0}^{N} |c_n|^2 =$$

$$= E[|Y|^2] - \sum_{n=0}^{N} |\langle Y|Z_n\rangle|^2 + \sum_{n=0}^{N} E[|\langle Y|Z_n\rangle - c_n|^2] \quad (1.2.3)$$

Este resultado será mínimo para $c_n = \langle Y|Z_n\rangle$, y así la combinación lineal buscada será $\sum_{n=0}^{N} \langle Y|Z_n\rangle Z_n$. A los productos escalares $\langle Y|Z_n\rangle$ se les denomina <u>coeficientes de Fourier</u> de Y respecto de $\{Z_n\}_{n\in N}$, y se verifica entonces que:

$$0 \leq \|Y - \sum_{n=0}^{N} \langle Y|Z_n\rangle Z_n\|^2 = \|Y\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle Y|Z_n\rangle| \quad (1.2.4)$$

con lo que se obtiene la conocida <u>desigualdad de Bessel</u>:

$$\sum_{n=0}^{N} |\langle Y|Z_n\rangle|^2 \leq \|Y\|^2 \quad (1.2.5)$$

Así, en virtud del teorema de Riesz-Fischer [40], la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \langle Y|Z_n\rangle Z_n$ está bien definida.

Supongamos además que $\{Z_n\}_{n\in N}$ es completa en H_x. Entonces dado el elemento $Y - \sum_{n=0}^{\infty} \langle Y|Z_n\rangle Z_n \in H_x$ tenemos:

$$\langle Y - \sum_{n=0}^{\infty} \langle Y|Z_n\rangle Z_n | Z_m\rangle = \langle Y|Z_m\rangle - \sum_{n=0}^{\infty} \langle Y|Z_n\rangle \langle Z_n|Z_m\rangle = \langle Y|Z_m\rangle - \langle Y|Z_m\rangle = 0 \quad (1.2.6)$$

para cualquier Z_m de la familia. Por tanto ha de ser:

$$Y = \sum_{n=0}^{\infty} \langle Y|Z_n\rangle Z_n \quad (1.2.7)$$

o sea, todo elemento $Y \in H_x$ admite una representación de la forma (1.2.7).

Observemos que entonces es

$$\|Y\|^2 - \sum_{n=0}^{N} |\langle Y|Z_n\rangle|^2 = \|Y - \sum_{n=0}^{N} \langle Y|Z_n\rangle Z_n\|^2 = 0 \quad (1.2.8)$$

con lo que se obtiene la identidad de Parseval, a saber:

$$\sum_{n=o}^{\infty} |\langle Y|Z_n\rangle|^2 = \|Y\|^2 \qquad (1.2.9)$$

A partir de esta representación ortogonal efectuada en el espacio H_x vamos a obtener un desarrollo para la función de covarianza del proceso. Para ello supongamos que nos hallamos en las mismas condiciones anteriores de disponer de una familia ortonormal completa $(Z_n)_{n\in N}$, y por tanto numerable, en H_x.

Como la expresión (1.2.7) es válida para cualquier $Y\in H_x$, en particular para $X_t\in H_x$ tendremos

$$X_t = \sum_{n=o}^{\infty} \sigma_n(t) Z_n \,, \qquad \forall t\in T \qquad (1.2.10)$$

siendo

$$\sigma_n(t) = \langle X_t|Z_n\rangle \,, \qquad \forall t\in T \qquad (1.2.11)$$

Estas funciones $\sigma_n(t)$ son contínuas y linealmente independientes. En efecto:

i) Son contínuas ya que por la desigualdad de Schwartz es:

$$|\sigma_n(t+h)-\sigma_n(t)| = |E[X_{t+h}\overline{Z}_n]-E[X_t\overline{Z}_n]| = |E[(X_{t+h}-X_t)\overline{Z}_n]| \leq$$

$$\leq \sqrt{E[|X_{t+h}-X_t|^2]}\,\sqrt{E[|Z_n|^2]} \qquad (1.2.12)$$

y al ser el proceso contínuo en m.c. se verifica (1.1.14), por lo que

$$\lim_{h\to o} |\sigma_n(t+h)-\sigma_n(t)| = 0 \qquad (1.2.13)$$

y se concluye.

ii) Son linealmente independientes ya que $\forall t\in T$, $\forall N\in N$ y $\forall a_o, a_1, \ldots, a_N \in R$ se tiene:

$$\sum_{n=o}^{N} a_n \sigma_n(t) = 0 \Longrightarrow \sum_{n=o}^{N} a_n \langle X_t|Z_n\rangle = 0 \Longrightarrow \langle X_t \,|\, \sum_{n=o}^{N} a_n Z_n\rangle = 0 \qquad (1.2.14)$$

y al ser $\sum_{n=o}^{N} a_n Z_n$ ortogonal a X_t, $\forall t\in T$, también lo será a Z_n $\forall n\in N$, ya que

$(Z_n)_{n\in N}$ es una base de H_x. Por tanto:

$$\langle Z_m \mid \sum_{n=0}^{N} a_n Z_n \rangle = 0, \quad \forall m\in N \Longrightarrow a_n = 0, \quad \forall n= 0,1,\ldots,N \qquad (1.2.15)$$

y se concluye

Pues bien, a partir de (1.2.10) tenemos:

$$R(t,s) = E[X_t \bar{X}_s]=E[(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)Z_n)(\sum_{m=0}^{\infty} \overline{c_m(s)Z_m})]=$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n(t)\overline{c_m(s)}E[Z_n \bar{Z}_m]= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\overline{c_n(s)} , \quad \forall t,s\in T$$

(1.2.16)

Y recíprocamente, dada una familia de funciones contínuas y linealmente independientes $(c_n(t))_{n\in N}$ tales que la función de covarianza admita una representación del tipo (1.2.16), existe una familia ortonormal completa $(Z_n)_{n\in N}$ en el espacio H_x tal que el proceso puede desarrollarse como en (1.2.10), ya que para ello han de existir unas funciones finitas $\gamma_n(t)$ tales que $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_n(t)|^2$ sea convergente en T y la función de covarianza pueda expresarse de la forma $R(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(t)\overline{\gamma_n(s)}$, $\forall t,s\in T$ [23], y las funciones $c_n(t)$ definidas en (1.2.11) verifican dichos requisitos.

En definitiva, dadas las funciones $(c_n(t))_{n\in N}$, la covarianza R(t,s) se expresa como en (1.2.16) sí y sólo sí existe una tal familia ortonormal $(Z_n)_{n\in N}$ en H_x tal que el proceso puede representarse de la forma (1.2.10).

Sin embargo en todo esto se presenta una dificultad práctica, que radica en elegir convenientemente el sistema ortonormal $(Z_n)_{n\in N}$, de manera que el desarrollo (1.2.10) pueda ser tratado analíticamente. Para ello las variables Z_n deben poder expresarse fácilmente en función del proceso.

Una forma de resolver este problema es la que a continuación vamos a estudiar y dará lugar a una representación concreta del proceso llamada <u>desarrollo de Karhunen-Loève</u>, por ser debida a dichos autores (Kari Karhunen: "Über lineare methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung" en 1947; Michel Loève: "Fonctions aléatoires de second order" en 1945). El procedimiento -

es el siguiente:

Teorema 1.2.2.- Sea $(X_t|t\in[a,b])$ un proceso de segundo orden y contínuo en m.c. (a partir de ahora consideraremos que el espacio paramétrico T es el intervalo cerrado $[a,b]$). Supongamos que existe una familia ortonormal $(Z_n)_{n\in N}$ en H_x tal que el proceso admite una representación del tipo ------ (1.2.10), y supongamos así mismo que las funciones $\sigma_n(t)$ definidas en ---- (1.2.11) son ortogonales en $[a,b]$, es decir:

$$\int_a^b \sigma_m(t)\overline{\sigma_n(t)}dt = \lambda_n \delta_{m,n}, \quad \forall t\in[a,b] \qquad (1.2.17)$$

Entonces dichas funciones $\sigma_n(t)$ son las autofunciones de una ecuación integral de Fredholm homogénea de segunda especie, con núcleo la función de covarianza del proceso, es decir:

$$\int_a^b R(t,s)\phi(s)ds = \lambda\phi(t), \quad \forall t\in[a,b] \qquad (1.2.18)$$

Los λ_n que figuran en (1.2.17) serán, por tanto, los autovalores de dicha ecuación integral.

Demostración: Empecemos viendo que la convergencia de la serie (1.2.16) es acotada. En efecto; por la desigualdad de Schwartz tenemos:

$$\left|\sum_{n=0}^{N} c_n(t)\overline{\sigma_n(s)}\right| \le \sum_{n=0}^{N} |\sigma_n(t)|^2, \quad \forall t,s\in[a,b] \qquad (1.2.19)$$

y por la desigualdad de Bessel (1.2.5), se verifica:

$$\sum_{n=0}^{N} |\sigma_n(t)|^2 = \sum_{n=0}^{N} |\langle X_t|Z_n\rangle|^2 \le \|X_t\|^2 = E[|X_t|^2], \quad \forall t\in[a,b]. \qquad (1.2.20)$$

Por tanto se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\sup_{t,s\in[a,b]} \left|\sum_{n=0}^{N} \sigma_n(t)\overline{\sigma_n(s)}\right| \le \sup_{t,s\in[a,b]} \sum_{n=0}^{N} |\sigma_n(t)|^2 \le \sup_{t,s\in[a,b]} E[|X_t|^2] < \infty \qquad (1.2.21)$$

donde la última procede de ser el proceso de segundo orden.

Así la convergencia de la serie (1.2.16) es acotada.

Multiplicando entonces la serie (1.2.16) por $\sigma_m(s)$, e integrando en [a,b] respecto a s, tenemos:

$$R(t,s)=\sum_{n=o}^{\infty}\sigma_n(t)\overline{\sigma_n(s)} \Longrightarrow R(t,s)\sigma_m(s)=\sum_{n=o}^{\infty}\sigma_n(t)\overline{\sigma_n(s)}\sigma_m(s) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\int_a^b R(t,s)\sigma_m(s)ds=\sum_{n=o}^{\infty}\sigma_n(t)\int_a^b\sigma_m(s)\overline{\sigma_n(s)}ds=\sum_{n=o}^{\infty}\sigma_n(t)\lambda_n\delta_{n,m}=\lambda_m\sigma_m(t) \qquad (1.2.22)$$

y se concluye.

Por consiguiente vemos que el estudio de los desarrollos ortogonales del proceso se reduce al estudio de tales ecuaciones integrales, cuyo núcleo es simétrico en virtud de (1.1.9); así sus autovalores serán reales. Además al ser R(t,s) semidefinida positiva por (1.1.5), los autovalores serán no negativos [49].

El desarrollo fundamental que buscamos viene dado explícitamente en el siguiente teorema.

<u>Teorema 1.2.3 (Desarrollo de Karhunen-Loève)</u>.- Sea $\{X_t \mid t\in[a,b]\}$ un proceso de segundo orden, contínuo en m.c., y con función de covarianza R(t,s).

i) Si $(\phi_n)_{n\in N}$ es un sistema ortonormal de autofunciones de la ecuación integral (1.2.18), asociado al sistema de autovalores $(\lambda_n)_{n\in N}$, entonces podemos expresar:

$$X_t=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=o}^{N}\sqrt{\lambda_n}\,\phi_n(t)b_n \qquad (1.2.23)$$

siendo dicho límite en m.c. y uniformemente $\forall t\in[a,b]$, y donde $(b_n)_{n\in N}$ es una sucesión de variables aleatorias de la forma

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt \quad \text{en m.c.} \qquad (1.2.24)$$

ii) Recíprocamente, si el proceso admite una representación del tipo -

(1.2.23), siendo las funciones $\phi_n(t)$ ortonormales y b_n definidas como en (1.2.24), entonces $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ y $\{\phi_n\}_{n\in N}$ son, respectivamente, un sistema de autovalores y de autofunciones de la ecuación integral (1.2.18).

Observación: Los b_n definidos en (1.2.24) son ortonormales. En efecto:

$$E[b_n\overline{b_m}]=E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b\phi_m(s)\overline{X_s}\,ds\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b\int_a^b\overline{\phi_n(t)}E[X_t\overline{X_s}]\phi_m(s)\,dt\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b\int_a^b R(t,s)\phi_m(s)\overline{\phi_n(t)}\,dt\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b\left[\int_a^b R(t,s)\phi_m(s)\,ds\right]\overline{\phi_n(t)}\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b[\lambda_m\phi_m(t)]\overline{\phi_n(t)}\,dt=$$

$$=\frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b\phi_m(t)\overline{\phi_n(t)}\,dt=\frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\delta_{m,n}=\delta_{m,n}\qquad(1.2.25)$$

ya que si $n=m \Longrightarrow \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}=\frac{\lambda_n}{\lambda_n}=1$.

Demostración:

i) Calculemos $E[|X_t-\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\lambda_n}\phi_n(t)b_n|^2]$. Para ello evaluemos préviamente $E[X_t\overline{b_n}]$ y $E[b_n\overline{X_t}]$.

$$E[X_t\overline{b_n}]=E[X_t(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b\overline{\phi_n(s)}\overline{X_s}\,ds)]=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b E[X_t\overline{X_s}]\overline{\phi_n(s)}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b R(t,s)\overline{\phi_n(s)}\,ds=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\lambda_n\overline{\phi_n(t)}=\sqrt{\lambda_n}\overline{\phi_n(t)}\qquad(1.2.26)$$

$$E[b_n\overline{X_t}]=\overline{E[X_t\overline{b_n}]}=\sqrt{\lambda_n}\phi_n(t).\qquad(1.2.27)$$

Así tenemos:

$$E[|X_t - \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) b_n|^2] = E[(X_t - \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) b_n)(\bar{X}_t - \sum_{m=o}^{N} \sqrt{\lambda}_m \overline{\phi_m(t)}\, \bar{b}_m)] =$$

$$= E[X_t \bar{X}_t] - \sum_{m=o}^{N} \sqrt{\lambda}_m \overline{\phi_m(t)} E[X_t \bar{b}_m] - \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) E[b_n \bar{X}_t] +$$

$$+ \sum_{n=o}^{N} \sum_{m=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \sqrt{\lambda}_m \phi_n(t) \overline{\phi_m(t)} E[b_n \bar{b}_m] =$$

$$= R(t,t) - \sum_{m=o}^{N} \sqrt{\lambda}_m \overline{\phi_m(t)} \sqrt{\lambda}_m \phi_m(t) - \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) \sqrt{\lambda}_n \overline{\phi_n(t)} +$$

$$+ \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) \overline{\phi_n(t)} =$$

$$= R(t,t) - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n(t)|^2 - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n(t)|^2 + \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n(t)|^2 =$$

$$= R(t,t) - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n(t)|^2 \qquad (1.2.28)$$

Pero al ser R(t,s) simétrico, contínuo, y semidefinido positivo, por - el teorema de Mercer [34] tenemos que:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{N} \lambda_n \phi_n(t) \overline{\phi_n(s)} = R(t,s), \quad \forall t,s \in [a,b] \qquad (1.2.29)$$

uniforme y absolutamente.

En particular, haciendo t=s en (1.2.29) se tiene:

$$\lim_{N\to\infty} E[|X_t - \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) b_n|^2] = \lim_{N\to\infty} (R(t,t) - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n(t)|^2) = 0 \qquad (1.2.30)$$

uniformemente $\forall t \in [a,b]$, y por tanto se verifica (1.2.23).

ii) Recíprocamente, supongamos que X_t puede expresarse $\forall t \in [a,b]$ de la forma (1.2.23). Entonces se tiene:

$$R(t,s) = E[X_t \bar{X}_s] = \lim_{N\to\infty} E[(\sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t) b_n)(\sum_{m=o}^{N} \sqrt{\lambda}_m \overline{\phi_m(s)}\, \bar{b}_m)] =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{N} \sum_{m=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \sqrt{\lambda}_m \phi_n(t) \overline{\phi_m(s)} E[b_n \bar{b}_m] = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{N} \lambda_n \phi_n(t) \overline{\phi_n(s)}$$

y así es

$$\int_a^b R(t,s)\phi_m(s)ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n(t) \int_a^b \overline{\phi_n(s)}\phi_m(s)ds =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n(t)\delta_{n,m} = \lambda_m \phi_m(t)$$

por lo que las $\phi_m(t)$ y las λ_m satisfacen la ecuación integral (1.2.18), y se concluye.

El teorema 1.2.3 puede mejorarse en el caso de que el proceso considerado en él sea normal. En efecto, dada una forma bilineal semidefinida positiva tal y como R(t,s), existen siempre dos procesos reales conjuntamente normales $\{Y_t | t\in[a,b]\}$ y $\{Z_t | t\in[a,b]\}$ tales que el proceso $\{Y_t + iZ_t | t\in[a,b]\}$ tiene por función de covarianza R(t,s), según vimos al estudiar las propiedades de la función de covarianza.

Así, como en el caso de procesos normales real-valuados la ortogonalidad equivale a la independencia, se tiene que la convergencia en probabilidad equivale a la convergencia casi segura, sin más que aplicar el lema de convergencia mejorada para series de variables aleatorias independientes - [26].

Resumiendo, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.2.4.- Sea $\{X_t | t\in[a,b]\}$ un proceso de segundo orden y contínuo en m.c. Entonces se verifica:

i) $\{X_t | t\in[a,b]\}$ es normal sí y sólo sí las variables b_n definidas en (1.2.24) son normales.

ii) Si además dicho proceso es real-valuado, entonces las variables b_n son independientes, y el desarrollo en m.c. de Karhunen-Loève converge casi seguramente.

Demostración:

i) Al ser la clase de las variables aleatorias normales cerrada para las -

operaciones lineales y límites en m.c., también lo es para las derivaciones en m.c. e integraciones en m.c. Por tanto el proceso $\{X_t | t\in[a,b]\}$ es normal sí y sólo sí $\int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_t dt$ es normal sí y sólo sí b_n es normal.

ii) Es consecuencia inmediata de las consideraciones efectuadas préviamente al teorema.

1.3. EJEMPLOS Y APLICACIONES.

Vamos a estudiar a continuación los desarrollos de Karhunen-Loève de algunos procesos concretos de importancia, tales como el proceso de Wiener y el Puente Browniano. Así mismo vamos a aplicar dicha técnica de representación ortogonal para resolver tres problemas clásicos en la teoría de detección y de sistemas lineales, a saber: Construcción de un filtro lineal óptimo para estimación de señales; detección y estimación ante ruido Gaussiano; y estudio de los estadísticos de fotoconteo de electrones procedentes de luz Gaussiana.

I) Proceso de WIENER.- Un proceso $\{X_t | t\in[0,T]\}$ es de Wiener si es centrado, tiene incrementos independientes estacionarios, cada trayectoria sigue una distribución normal, y además $X_o=0$, [29].

El ejemplo más característico del proceso de Wiener es el movimiento Browniano, es decir, el movimiento irregular e incesante de una partícula sumergida en un líquido o gas, o bien de partículas de humo suspendidas en el aire.

Su función de covarianza viene dada por:

$$R(t,s) = \min(t,s) = \begin{cases} s, & \text{si } 0\leq s\leq t \\ t, & \text{si } t\leq s\leq T \end{cases} \qquad (1.3.1)$$

Vamos a calcular el desarrollo de Karhunen-Loève para este proceso. Por comodidad supondremos el proceso definido sobre el intervalo [0,1].

El primer paso consiste en resolver la ecuación (1.2.18), que en este caso se expresará de la forma

$$\int_0^t s\phi(s)ds + t\int_t^1 \phi(s)ds = \lambda\phi(t), \quad t\in[0,1] \tag{1.3.2}$$

Derivando respecto a t, tenemos:

$$\lambda\phi'(t) = t\phi(t) + \int_t^1 \phi(s)ds + t[-\phi(t)] = \int_t^1 \phi(s)ds, \quad t\in[0,1] \tag{1.3.3}$$

Derivando nuevamente respecto a t, tenemos:

$$\lambda\phi''(t) = -\phi(t), \quad t\in[0,1] \tag{1.3.4}$$

A partir de (1.3.2) y (1.3.3) se obtienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} &\lambda\phi(0) = \int_0^0 s\phi(s)ds + 0\int_0^1 \phi(s)ds = 0 \Longrightarrow \phi(0)=0 \\ &\lambda\phi'(1) = \int_1^1 \phi(s)ds = 0 \Longrightarrow \phi'(1)=0 \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

Por tanto se trata de resolver la ecuación diferencial (1.3.4), o sea, $\lambda\phi''(t)+\phi(t)=0$, con las condiciones de contorno (1.3.5).

Integrando (1.3.4) se obtiene

$$\phi(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + C_2 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{1.3.6}$$

Aplicando la condición $\phi(0)=0$, tenemos:

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \Longrightarrow C_2 = 0 \Longrightarrow \phi(t) = C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \tag{1.3.7}$$

Y aplicando la condición $\phi'(1)=0$, resulta:

$$\frac{C_1}{\sqrt{\lambda}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \cdot 0 \Longrightarrow \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \tag{1.3.8}$$

Por tanto el sistema de autovalores $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene dado por la condición (1.3.8), es decir:

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)=0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} = (n+\tfrac{1}{2})\pi \Longrightarrow \lambda_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}\ , \ \forall n\in N \tag{1.3.9}$$

Y el sistema de autofunciones $\{\phi_n\}_{n\in N}$ viene dado por la condición --- (1.3.7), es decir:

$$\phi_n(t) = \sqrt{2}\,\text{sen}\,[(n+\tfrac{1}{2})\pi t]\ , \quad \forall n\in N \tag{1.3.10}$$

ya que normalizando es $C_1 = \sqrt{2}$, puesto que:

$$\|\phi_n\|_2^2 = \int_0^1 |\phi_n(t)|^2 dt = C_1^2 \int_0^1 \text{sen}^2[(n+\tfrac{1}{2})\pi t]dt = \frac{C_1^2}{2}$$

y para que sea $\|\phi_n\|_2^2 = 1$, ha de ser $C_1 = \sqrt{2}$.

Por tanto el desarrollo de Karhunen-Loève del proceso de Wiener viene dado por:

$$X_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{2}\,\frac{\text{sen}[(n+\frac{1}{2})\pi t]}{(n+\frac{1}{2})\pi}\, b_n \tag{1.3.11}$$

$$b_n = (n+\tfrac{1}{2})\pi\sqrt{2}\int_0^1 \text{sen}[(n+\tfrac{1}{2})\pi t]X_t\,dt$$

donde ambas igualdades lo son en m.c., y el límite es uniforme $\forall t\in[0,1]$.

Conocido el desarrollo (1.3.11) para el proceso de Wiener, podemos determinar el desarrollo para todos los procesos que se obtengan a partir --- del Wiener mediante una transformación funcional conveniente, como nos --- muestra el siguiente teorema:

Teorema 1.3.1.- Sea $\{X_t | t\geq 0\}$ un proceso de Wiener y sean $f(t)$ y $\tau(t)$ dos - funciones contínuas para $t\geq 0$ tales que $\tau(t)$ es no decreciente y $\tau(0)=0$. Entonces todo proceso $Y\equiv\{Y_t | t\in[0,T]\}$ de la forma $Y_t = f(t)X_{\tau(t)}$, puede representarse como:

$$Y_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(t)b_n \tag{1.3.12}$$

donde $\{b_n\}_{n\in N}$ es un sistema ortonormal de variables aleatorias Gaussianas e independientes.

Además $b_n \in H_y$, $\forall n\in N$ sí y sólo sí existe un subconjunto S de $[0,\tau(T)]$, denso en él, y tal que $f(\tau^{-1}(t))\neq 0 \quad \forall t\in S$.

Demostración: Al ser $\{X_t | t\geq 0\}$ un proceso de Wiener y $\tau(t)$ no decreciente y tal que $\tau(0)=0$, $\{X_{\tau(t)} | t\in[0,T]\}$ también es de Wiener, por lo que admite una representación del tipo (1.3.11), es decir:

$$X_{\tau(t)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(\tau(t)) b_n \qquad (1.3.13)$$

siendo dicho límite en m.c. y uniformemente $\forall t\in[0,T]$.

Como el proceso de Wiener es Gaussiano, las variables b_n definidas como en (1.3.11) también lo son, por lo que al ser ortonormales son también independientes.

Multiplicando los dos miembros de (1.3.13) por f(t) tenemos:

$$Y_t = f(t) X_{\tau(t)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda}_n f(t) \phi_n(\tau(t)) b_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(t) b_n \qquad (1.3.14)$$

en m.c. y uniformemente $\forall t\in[0,T]$, siendo

$$a_n(t) = \sqrt{\lambda}_n f(t) \phi_n(\tau(t)) \qquad (1.3.15)$$

Para demostrar la segunda parte definamos la función $\tau(t)$ de la forma:

$$\tau^{-1}(t) = \min\{s | \tau(s)=t\} \qquad (1.3.16)$$

Así:

$$Y_{\tau^{-1}(t)} = f(\tau^{-1}(t)) X_t \quad , \quad \forall t\in[0,\tau(T)] \qquad (1.3.17)$$

Como $X\equiv\{X_t | t\in[0,\tau(T)]\}$ es contínuo en m.c., el espacio H_x queda también generado por $\{X_t | t\in S\}$, siendo S cualquier subconjunto denso de $[0,\tau(T)]$. Por tanto $b_n \in H_y$, $\forall n\in N$ sí y sólo sí existe un subconjunto S de $[0,\tau(T)]$ denso en él y tal que $f(\tau^{-1}(t))\neq 0$, $\forall t\in S$.

II) Proceso Puente Browniano.- Un proceso $\{X_t | t\in[0,T]\}$ es un Puente Browniano si X_t tiene $\forall t\in[0,T]$ la misma distribución que la variable condicionada $W_t|W_T=0$ donde $\{W_t|t\geq 0\}$ es un proceso de Wiener.

Una forma alternativa de definir el proceso Puente Browniano es la siguiente: Si $\{W_t|t\in[0,T]\}$ es un proceso de Wiener, entonces el proceso $\{X_t|t\in[0,T]\}$ definido por:

$$X_t=W_t-tW_T$$

es un Puente Browniano independiente de W_T. Su función de covarianza viene dada en $[0,1]$ por:

$$R(t,s)=\min(t,s)[1-\max(t,s)]=\begin{cases}s(1-t), & \text{si } 0\leq s\leq t\\ t(1-s), & \text{si } t\leq s\leq 1\end{cases} \qquad (1.3.18)$$

Igual que en el caso anterior consideraremos al proceso definido sobre $[0,1]$.

El proceso de obtención del desarrollo de Karhunen-Loève para el Puente Browniano será similar al seguido para el proceso Wiener. En este caso se trata de resolver la ecuación integral:

$$(1-t)\int_0^t s\phi(s)ds+t\int_t^1(1-s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad t\in[0,1] \qquad (1.3.19)$$

Derivando respecto a t, se obtiene:

$$\lambda\phi'(t)= -\int_0^t s\phi(s)ds+(1-t)t\phi(t)+\int_t^1(1-s)\phi(s)ds-t(1-t)\phi(t)=$$

$$= -\int_0^t s\phi(s)ds+\int_t^1(1-s)\phi(s)ds , \quad t\in[0,1] \qquad (1.3.20)$$

Derivando nuevamente respecto a t, tenemos:

$$\lambda\phi''(t)= -t\phi(t)-(1-t)\phi(t)= -\phi(t), \quad t\in[0,1] \qquad (1.3.21)$$

A partir de (1.3.19) se obtienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\lambda\phi(0)=\int_0^0 s\phi(s)ds+0\int_0^1(1-s)\phi(s)ds=0 \Longrightarrow \phi(0)=0$$

$$\lambda\phi(1)=0\int_0^1 s\phi(s)ds+\int_1^1(1-s)\phi(s)ds=0 \Longrightarrow \phi(1)=0 \qquad (1.3.22)$$

Por tanto se trata de resolver la ecuación (1.3.21) con las condiciones de contorno (1.3.22). Como hemos indicado anteriormente, la solución de la ecuación diferencial (1.3.21) viene dada por (1.3.6)

Aplicando la condición $\phi(0)=0$, se tiene (1.3.7), y aplicando la condición $\phi(1)=0$, se tiene:

$$C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)=0 \Longrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)=0 \qquad (1.3.23)$$

Por tanto, el sistema de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in N}$ viene dado ahora por (1.3.23), es decir:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)=0 \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}=n\pi \Longrightarrow \lambda_n=\frac{1}{n^2\pi^2}\ , \quad \forall n\in N \qquad (1.3.24)$$

Y el sistema de autofunciones $\{\phi_n\}_{n\in N}$ viene dado por (1.3.7), o sea:

$$\phi_n(t)=\sqrt{2}\operatorname{sen}(n\pi t), \quad \forall n\in N \qquad (1.3.25)$$

ya que normalizando es $C_1=\sqrt{2}$, puesto que:

$$\|\phi_n\|_2^2=\int_0^1|\phi_n(t)|^2dt=C_1^2\int_0^1\operatorname{sen}^2(n\pi t)dt=\frac{C_1^2}{2}$$

y para que sea $\|\phi_n\|_2^2=1$, ha de ser $C_1=\sqrt{2}$.

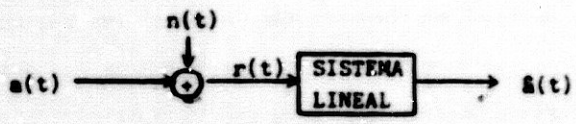
Por tanto el desarrollo de Karhunen-Loève del proceso Puente Browniano viene dado por:

$$X_t=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\sqrt{2}\,\frac{\operatorname{sen}(n\pi t)}{n\pi}\,b_n$$

$$b_n=n\pi\sqrt{2}\int_0^1\operatorname{sen}(n\pi t)X_t\,dt \qquad (1.3.26)$$

donde ambas igualdades lo son en m.c., y el límite es uniforme $\forall t\in[0,1]$.

III) Filtro lineal óptimo.- Estudiemos ahora, como aplicación, el problema de estimar un mensaje en presencia de un ruido interferidor. Para ello construiremos un filtro lineal real a través del cual pasaremos la señal recibida. El esquema será el siguiente:



donde:

a(t) es la trayectoria de un proceso de segundo orden, centrado, y con función de covarianza $R_a(t,s)$.

n(t) es un ruido constituido por un proceso con función de covarianza $R_n(t,s)$, e incorrelado con el anterior.

$r(t)=a(t)+n(t)$ es el proceso observado para $t\in[0,T]$.

â(t) es la estimación de a(t) que se obtiene tras filtrar r(t).

El filtro que emplearemos se va a caracterizar por su función impulso de respuesta h(t,s), es decir, el valor de la salida en el instante t correspondiente a un impulso unitario de entrada en el instante s. Además si el sistema es físicamente realizable, entonces $h(t,s)=0$ para $t<s$, ya que la salida no puede preceder a la entrada.

Supongamos que $r(t)=0$ para $t\notin[0,T]$. Así la salida â(t) del sistema lineal, puede expresarse de la forma:

$$\hat{a}(t)=\int_0^T h(t,s)r(s)ds \qquad (1.3.27)$$

Pasemos, entonces, a construir el filtro óptimo. Como criterio de optimización para h(t,s) tomaremos el siguiente: La función impulso de respuesta a elegir será aquella que minimice la integral promediada en [0 T] del error en m.c., es decir:

$$\delta_I=E\left[\frac{1}{T}\int_0^T(a(t)-\hat{a}(t))^2dt\right]=E\left[\frac{1}{T}\int_0^T(a(t)-\int_0^T h(t,s)r(s)ds)^2dt\right] \qquad (1.3.28)$$

$\mathcal{E}_I$ se denomina estimación del error por intervalos.

Análogamente podemos definir una estimación puntual del error, de la forma:

$$\mathcal{E}_p(t)=E\{(a(t)-\int_o^T h(t,s)r(s)ds)^2\}, \quad t\in[0,T] \qquad (1.3.29)$$

Una vez minimizado $\mathcal{E}_p(t)$ se tendrá minimizado $\mathcal{E}_I$.

Llamemos $h_o(t,s)$ a la función impulso de respuesta del filtro óptimo, es decir, el que minimiza $\mathcal{E}_p(t)$, y supongamos que $h_o(t,s)$ es contínua para $t,s\in[0,T]$. Así cualquier otro filtro de la misma clase se expresará como:

$$h(t,s)=h_o(t,s)+\epsilon h_\epsilon(t,s), \quad \forall t,s\in[0,T] \qquad (1.3.30)$$

Entonces se demuestra [43] que una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{E}_p(t)$ sea mínimo es que:

$$R_a(t,s)=\int_o^T h_o(t,v)R_r(s,v)dv, \quad \forall t\in[0,T], \quad \forall s\in]0,T[\qquad (1.3.31)$$

Observemos que $h_o(t,0)$ y $h_o(t,T)$ están definidos por la continuidad, de la forma:

$$h_o(t,0)=\lim_{s\to 0^+} h_o(t,s) \quad ; \quad h_o(t,T)=\lim_{s\to T^-} h_o(t,s) \qquad (1.3.32)$$

En el caso particular de que n(t) sea un ruido blanco, es $R_n(t,s)=\frac{N_o}{2}\delta(t-s)$, y así $R_r(t,s)=\frac{N_o}{2}\delta(t-s)+R_a(t,s)$

Por tanto la condición (1.3.31) se expresa de la forma:

$$R_a(t,s)=\frac{N_o}{2}h_o(t,s)+\int_o^T h_o(t,v)R_a(s,v)dv \ , \quad \forall t\in[0,T], \quad \forall s\in]0,T[\qquad (1.3.33)$$

Estudiemos ahora el error que se comete en la estimación puntual con el filtro óptimo, que notaremos $\mathcal{E}_{p_o}(t)$. Para ello consideremos la expresión (1.3.29) de $\mathcal{E}_p(t)$, y sustituyamos en ella (1.3.30). Así agrupando términos según las potencias de ϵ resulta:

$$\varepsilon_p(t)=R_a(t,t)-2\int_o^T h(t,s)R_a(t,s)ds+\int_o^T\int_o^T h(t,v)h(t,s)R_r(s,v)dsdv =$$

$$=R_a(t,t)-2\int_o^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds+\int_o^T\int_o^T h_o(t,v)h_o(t,s)R_r(s,v)dsdv-$$

$$-2\epsilon\int_o^T h_\epsilon(t,s)[R_a(t,s)-\int_o^T h_o(t,v)R_r(s,v)dv]ds+$$

$$+\epsilon^2\int_o^T\int_o^T h_\epsilon(t,v)h_\epsilon(t,s)R_r(s,v)dsdv \qquad (1.3.34)$$

donde en la primera igualdad hemos tenido en cuenta que los procesos a(t) y n(t) son incorrelados , y así:

$$E[a(t)r(s)]=E[a(t)(a(s)+n(s))]=R_a(t,s)+E[a(t)n(s)]=R_a(t,s).$$

Por tanto,tenemos:

$$\varepsilon_{p_o}(t)=R_a(t,t)-2\int_o^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds+\int_o^T\int_o^T h_o(t,v)h_o(t,s)R_r(s,v)dsdv =$$

$$= R_a(t,t)-\int_o^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds-\int_o^T h_o(t,s)[R_a(t,s)-\int_o^T h_o(t,v)R_r(s,v)dv]ds$$

(1.3.35)

Pero al ser óptimo el filtro se verifica (1.3.31), por lo que:

$$\varepsilon_{p_o}(t)=R_a(t,t)-\int_o^T h_o(t,s)R_a(t,s)ds \qquad (1.3.36)$$

y esta es la expresión del error puntual para el filtro óptimo.

Consideremos ahora el caso de ruido blanco. Su función de covarianza $\delta(t-s)$ puede desarrollarse por el teorema de Mercer, enunciado en (1.2.29), de la forma:

$$\delta(t-s) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(t)\phi_n(s) \qquad (1.3.37)$$

siendo $(\phi_n)_{n\in N}$ el sistema de autofunciones asociado al sistema de autovalores $(\lambda_n)_{n\in N}$ de la ecuación integral (1.2.18) con núcleo $\delta(t-s)$ en $[0,T]$, donde por comodidad hemos notado $\sum_{n=1}^{\infty}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}$ en m.c. y uniformemente en $[0,T]$.

Análogamente se puede expresar:

$$R_a(t,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\phi_n(t)\phi_n(s) \qquad (1.3.38)$$

Por tanto:

$$R_r(t,s) = \frac{N_o}{2}\delta(t-s)+R_a(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n+\frac{N_o}{2})\phi_n(t)\phi_n(s) \qquad (1.3.39)$$

Supongamos que el sistema $\{\phi_n\}_{n\in N}$ es completo. Entonces probando en la ecuación fundamental (1.3.31) una solución del tipo $h_o(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\phi_n(t)\phi_n(s)$, y sustituyendo en ella (1.3.38) y (1.3.39), resulta que el impulso de respuesta óptimo para el ruido blanco viene dado por:

$$h_o(t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{N_o}{2}}\phi_n(t)\phi_n(s) \qquad (1.3.40)$$

En este caso, los errores se expresan de la forma:

$$\xi_{P_o}(t)=\frac{N_o}{2}h_o(t,t)=\frac{N_o}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{N_o}{2}}\phi_n^2(t), \qquad \forall t\in[0,T].$$

$$\xi_I=\frac{1}{T}\int_o^T\xi_{P_o}(t)dt=\frac{N_o}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{N_o}{2}}\int_o^T\phi_n(t)\phi_n(t)\,dt=\frac{N_o}{2T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\lambda_n+\frac{N_o}{2}} \qquad (1.3.41)$$

Resumiendo, hemos estudiado el impulso de respuesta correspondiente a un filtro lineal óptimo, y hemos visto que, en general, queda caracterizado por la ecuación (1.3.31) siendo el error puntual cometido en la estimación, dado por (1.3.36).

En el caso particular de ruido blanco, el impulso de respuesta óptimo, puede expresarse explícitamente mediante (1.3.40), siendo dado el error por (1.3.41).

La expresión (1.3.40) del impulso de respuesta óptimo para el ruido -- blanco es de gran utilidad teórica y práctica en diversos problemas de estimación y filtrado. Sin embargo,para que a efectos de cómputo el algoritmo -

sea sencillo, el número de términos de dicho desarrollo ha de ser finito.

Por consiguiente vamos a estudiar a continuación un procedimiento aproximado para la obtención de $h_o(t,s)$, que va a consistir en obtener un desarrollo finito que converja hacia $h_o(t,s)$ cuando el número de términos crezca indefinidamente.

Para ello empecemos considerando el desarrollo de Karhunen-Loève del proceso a(t), pero truncado en el N-simo término, que notaremos $a_N(t)$:

$$a_N(t)=\sum_{n=1}^{N}\zeta_n\phi_n(t)\Big|\zeta_n=\int_o^T\phi_n(t)a(t)dt \qquad (1.3.42)$$

siendo la igualdad anterior en m.c. (para el fín que perseguimos basta considerar un desarrollo ortogonal, es decir, que las variables aleatorias ζ_n sean ortogonales y no necesariamente ortonormales). Claramente $a_N(t)$ es una aproximación de a(t).

La covarianza de $a_N(t)$ vendrá dada por:

$$R_N(t,s)=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\phi_n(t)\phi_n(s) \qquad (1.3.43)$$

y aproxima a $R_a(t,s)$.

El conjunto finito de variables $\{\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_N\}$ puede calcularse mediante un conjunto de estimadores fácilmente derivables, que sean las soluciones de un conjunto de ecuaciones integrales con núcleo $R_N(t,s)$.

Vamos entonces a demostrar que el estimador lineal óptimo realizable para el proceso $a_N(t)$, tiene por impulso de respuesta:

$$h_N(t,s)=\frac{2}{N_o}\Psi_N^T(t)\left(A_N^{-1}+\frac{2}{N_o}\int_o^T\Psi_N(t)\Psi_N^T(s)ds\right)^{-1}\Psi_N(s),\ \text{para } t>s \qquad (1.3.44)$$

siendo $\Psi_N(t)$ un vector cuyas N componentes son las funciones $\phi_n(t)$, y A_N una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los autovalores λ_n. Así mismo demostraremos que $h_n(t,s)$ se aproxima al impulso de respuesta óptimo $h_o(t,s)$ cuando N tiende a infinito.

Para la obtención de (1.3.44), vamos a considerar para el proceso $a_N(t)$ dado por (1.3.42) el siguiente sistema lineal N-dimensional en tiempo variable como modelo de estado:

$$\begin{aligned} \dot{X}_N(t) &= 0 \\ a_N(t) &= \nabla_N^T(t) X_N(t) \\ r_N(t) &= a_N(t) + n(t) \end{aligned} \qquad (1.3.45)$$

siendo $X_N(t)=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_N)^T$ y tal que $X_N(0)$ es una variable aleatoria centrada verificando:

$$E[X_N(0)X_N^T(0)]=A_N \qquad (1.3.46)$$

Bajo tales hipótesis, el estimador lineal óptimo realizable $\hat{a}_N(t)$ de $a_N(t)$ puede expresarse como la salida de un filtro de Kalman-Bucy de la forma [17]:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{X}}_N &= 0\hat{X}_N + \frac{2}{N_o} P_N(t)\nabla_N(t)\left[r_N(t)-\hat{a}_N(t)\right] \\ \hat{X}_N(0) &= 0 \\ \hat{a}_N(t) &= \nabla_N^T(t)\hat{X}_N(t) \end{aligned} \qquad (1.3.47)$$

donde $P_N(t)$ satisface la ecuación de Riccati:

$$\begin{aligned} \dot{P}_N(t) &= -\frac{2}{N_o} P_N(t)\nabla_N(t)\nabla_N^T(t)P_N(t) \\ P_N(0) &= A_N \end{aligned} \qquad (1.3.48)$$

El error de estimación en m.c. viene dado por:

$$E[(a_N(t)-\hat{a}_N(t))^2]=\nabla_N^T(t)E[\bar{X}_N(t)\bar{X}_N^T(t)]\nabla_N(t)=\nabla_N^T(t)P_N(t)\nabla_N(t) \qquad (1.3.49)$$

siendo $\bar{X}_N=X_N-\hat{X}_N$.

Para resolver (1.3.48) planteamos la ecuación diferencial correspondien

te a $P_N^{-1}(t)$, así como su condición de frontera. De tal forma se obtiene una fórmula explícita para $P_N^{-1}(t)$ que invertida nos da:

$$P_N(t)=\left(A_N^{-1}+\frac{2}{N_o}\int_o^t \nabla_N(s)\overline{\nabla_N^T}(s)ds\right)^{-1} \qquad (1.3.50)$$

Al ser las autofunciones $\phi_n(t)$ ortonormales, tenemos:

$$P_N(T)=\left(A_N^{-1}+\frac{2}{N_o}I\right)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{1+\frac{2}{N_o}\lambda_1} & & & \\ & \frac{\lambda_2}{1+\frac{2}{N_o}\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_N}{1+\frac{2}{N_o}\lambda_N} \end{bmatrix} \qquad (1.3.51)$$

Así, a partir de (1.3.47) y (1.3.48) se deduce fácilmente que

$$\frac{d}{dt}\left[P_N^{-1}(t)\hat{X}_N(t)\right]=\frac{2}{N_o}\nabla_N(t)r_N(t)$$

y así es

$$P_N^{-1}(t)\hat{X}_N(t)=\frac{2}{N_o}\int_o^t \nabla_N(s)r_N(s)ds \qquad (1.3.52)$$

Por tanto a partir de (1.3.47) obtenemos una expresión explícita para $\hat{a}_N(t)$ de la forma:

$$\hat{a}_N(t)=\frac{2}{N_o}\nabla_N^T(t)P_N(t)\int_o^t \nabla_N(s)r_N(s)ds \qquad (1.3.53)$$

Por tanto el estimador lineal óptimo realizable $\hat{a}_N(t)$ para $a_N(t)$ tiene

por impulso de respuesta

$$h_N(t,s) = \frac{2}{N_o} \Psi_N^T(t) P_N(t) \Psi_N(s)$$

donde $P_N(t)$ viene dado por (1.3.50), con lo que se obtiene la expresión -- (1.3.44) buscada.

Falta demostrar que en $L^2([0,T])$, $h_N(t,.)$ aproxima uniformemente a -- $h_o(t,.)$ cuando N tiende a infinito. Para ello hace falta suponer que ----- $R_a(t,s)$ es contínua.

Así tenemos:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{N_o}{2} h_o(t,s) + \int_o^t h_o(t,v) R_a(s,v)\,dv = R_a(t,s) \\ &\frac{N_o}{2} h_N(t,s) + \int_o^t h_N(t,v) R_N(s,v)\,dv = R_N(t,s) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ||h_o(t,.)-h_N(t,.)|| \leq \frac{2}{N_o} ||R_a(t,.)-R_N(t,.)|| \left(1+\frac{2}{N_o}||R_N(t,.)||\right) \leq$$

$$\leq \frac{2}{N_o} \alpha_N \left(1+\frac{2}{N_o}\beta_N\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad , \quad \forall t \in [0,T]. \tag{1.3.54}$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha_N &= \max_{t\in[0,T]} ||R(t,.)-R_N(t,.)|| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \\ \beta_N &= \max_{t\in[0,T]} ||R_N(t,.)|| \leq \max_{t\in[0,T]} ||R(t,.)|| \end{aligned} \tag{1.3.55}$$

y se concluye.

En definitiva $h_N(t,s)$ es un impulso de respuesta óptimo para el proceso $a_N(t)$, y aproxima al impulso óptimo de respuesta realizable $h_o(t,s)$ para el proceso original a(t). Por tanto podemos considerar $h_N(t,s)$ como un filtro "subóptimo"

para a(t), que da lugar a un estimador de la señal, de la forma:

$$\tilde{a}_N(t)=\int_o^t h_N(t,s)r(s)ds$$

Evidentemente, el error en m.c. cometido cuando utilizamos este filtro subóptimo es mayor que cuando se utiliza el filtro óptimo, y ambos errores se relacionan de la forma siguiente [17]:

$$E[(a(t)-\tilde{a}_N(t))^2]\leq E[(a(t)-\hat{a}(t))^2]+(\lambda_{max}+\frac{N_o}{2})(\frac{2}{N_o}\alpha_N)^2.(1+\frac{2}{N_o}\beta_N)^2 \qquad (1.3.56)$$

siendo λ_{max} el mayor autovalor de R(t,s), y α_N y β_N definidos como en (1.3.55). Por tanto, tenemos:

$$\int_o^T E[(a(t)-\tilde{a}_N(t))^2]dt\leq\int_o^T E[(a(t)-\hat{a}(t))^2]dt+(\lambda_{max}+\frac{N_o}{2}).[\sum_{i=N+1}^{\infty}(\frac{2}{N_o}\lambda_i)^2].$$

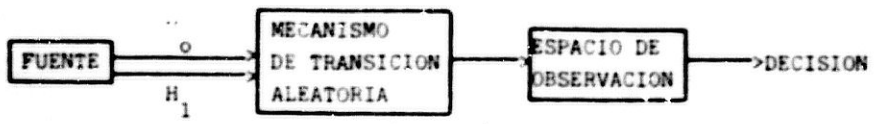
$$.(1+\frac{2}{N_o}\beta_N)^2 \qquad (1.3.57)$$

IV) Detección y estimación ante ruido Gaussiano "coloreado".-

Como aplicación del desarrollo realizado en el ejemplo anterior para el filtrado lineal, vamos a estudiar dos problemas clásicos que surgen en la teoría de transmisión y comunicación: La detección y la estimación de los parámetros de las señales, pero suponiendo que el ruido interferidor es Gaussiano y "coloreado" o no blanco.

Ambos problemas guardan una estrecha relación. De hecho tanto la detección como la estimación se basan en la construcción de una función de verosimilitud que se obtiene a partir de mecanismos de transición aleatorios, y en gran parte de los casos, dichos mecanismos actúan independientemente de si el problema a considerar es de detección o de estimación.

Esquemáticamente, un problema de detección consta de las siguientes componentes:

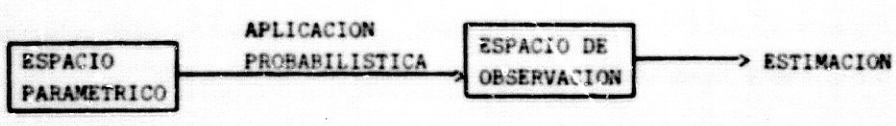


La "fuente" genera una salida que en el caso más simple puede ser una de dos, asociada a dos hipótesis H_o y H_1; pero en general puede haber más - hipótesis $H_o, H_1, H_2, \ldots$.

El "mecanismo de transición aleatoria" selecciona aquella hipótesis - que es verdadera, generando un punto en el "espacio de observación", según una determinada ley probabilística.

Finalmente, mediante una regla de "decisión" asignamos a cada punto -- una de las hipótesis, con objeto de averiguar cual de ellas era verdadera.

Un esquema del problema de estimación es el siguiente:



El "espacio paramétrico" está formado por un conjunto de puntos que no son más que las salidas posibles de la fuente. Es decir, cada salida de la fuente es un parámetro que consideraremos un punto del espacio.

El "espacio de observación" está formado por las imágenes de los parámetros anteriores mediante la ley probabilística que gobierna el efecto de la señal a estimar en la observación.

Finalmente, mediante una determinada regla de "estimación" inferimos a partir del espacio de observación, el valor estimado de la señal.

En el caso concreto que vamos a estudiar, la señal transmitida bajo la hipótesis H_1 la notaremos $\sqrt{E}s(t)$ para $t\in[0,T]$ (E representa la energía de - la señal recibida). Para los valores $t\notin[0,T]$ la consideraremos nula. Además supondremos que antes de ser recibida la señal, está "viciada" por un ruido Gaussiano aditivo n(t) siendo $t\in[T_i,T_f]$ (con $T_i\leq 0$ y $T_f\geq T$).

Por tanto, la onda recibida r(t) está definida en $[T_i,T_f]$ por:

$$r(t) = \begin{cases} \sqrt{Es}(t)+n(t) & \text{según } H_1 \\ n(t) & \text{" } H_o \end{cases} \qquad (1.3.58)$$

La razón de que la onda sea recibida aún cuando la señal emitida sea - nula, es que existe correlación entre el ruido,fuera y dentro del intervalo, y así mientras mejor se conozca el ruido dentro del intervalo, mejor podrá combatirse, y optimizarse nuestro sistema de ejecución.

El ruido que consideramos no es blanco, según indicábamos al comienzo; sin embargo conviene introducir una componente blanca con objeto de simplificar nuestro desarrollo. Es decir, consideraremos:

$$n(t)=w(t)+n_c(t) \qquad (1.3.59)$$

donde w(t) será la componente blanca, y $n_c(t)$ la componente coloreada, que supondremos cuadrado integrable.

Así notando $R_c(t,s)$ a la función de covarianza de $n_c(t)$, la correspondiente del proceso ruido será:

$$R_n(t,s)= \frac{N_o}{2}\delta(t-s)+R_c(t,s) \ , \quad \forall t,s\in[T_i,T_f] \qquad (1.3.60)$$

Pasemos a resolver nuestro problema de estimación.

Para ello vamos a representar el proceso r(t) definido en (1.3.58) mediante un desarrollo de Karhunen-Loève, y construiremos directamente la función de verosimilitud. (Al igual que en el ejemplo anterior basta exigir — que las variables aleatorias que aparecen en los desarrollos de Karhunen-Loève que vamos a utilizar sean ortogonales y no necesariamente ortonormales).

El desarrollo de Karhunen-Loève para el proceso n(t), viene dado por:

$$n(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}n_i\phi_i(t)\Big| \quad n_i=\int_{T_i}^{T_f}n(t)\phi_i(t)dt, \quad \forall t\in[T_i,T_f] \qquad (1.3.61)$$

siendo ambas igualdades en m.c., y el límite uniforme en $[T_i,T_f]$, y siendo $\phi_i(t)$ las autofunciones de la ecuación integral:

$$\int_{T_i}^{T_f}R_c(t,s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[T_i,T_f] \qquad (1.3.62)$$

Se tiene entonces que $E[n_i]=0$ y $E[n_in_j]=(\lambda_i+\frac{N_o}{2})\delta_{ij}$

Desarrollemos, así mismo, $\sqrt{E}s(t)$ y $r(t)$ respecto al mismo sistema ortogonal $\{\phi_i\}_{i\in N}$; así tenemos:

$$\sqrt{E}s(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}s_i\phi_i(t)\Big| s_i=\int_{T_i}^{T_f}\sqrt{E}s(t)\phi_i(t)dt, \quad \forall t\in[T_i,T_f] \qquad (1.3.63)$$

$$r(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}r_i\phi_i(t)\Big| r_i=\int_{T_i}^{T_f}r(t)\phi_i(t)dt \ , \quad \forall t\in[T_i,T_f] \qquad (1.3.64)$$

siendo todas las igualdades en m.c. y los límites uniformes en $[T_i,T_f]$

Por tanto:

$$r(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}r_i\phi_i(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}s_i\phi_i(t)+\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}n_i\phi_i(t) \ , \quad \forall t\in[T_i,T_f] \qquad (1.3.65)$$

Calculemos la función de verosimilitud, que en general viene dada por:

$$\Lambda(R)=\frac{P_{r|H_1}(R|H_1)}{P_{r|H_o}(R|H_o)} \qquad (1.3.66)$$

Si consideramos las N primeras coordenadas tenemos:

$$P_{r_1,r_2,\ldots,r_n|H_j}(R_1,R_2,\ldots,R_N|H_j)=\prod_{i=1}^{N}P_{r_i|H_j}(R_i|H_j) \qquad (1.3.67)$$

Además como el ruido es Gaussiano y la componente señal solo aparece en la

hipótesis H_1, resulta:

$$A(r_N(t)) = \frac{\prod_{i=1}^{N} P_{r_i|H_1}(R_i|H_1)}{\prod_{i=1}^{N} P_{r_i|H_o}(R_i|H_o)} = \frac{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda_i + \frac{N_o}{2})}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(R_i-s_i)^2}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}}}{\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\lambda_i + \frac{N_o}{2})}} e^{-\frac{1}{2}\frac{R_i^2}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}}}$$

(1.3.68)

ya que los R_i bajo la hipótesis H_1 siguen una ley $\mathcal{N}\left(s_i, \sqrt{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}\right)$ y bajo la hipótesis H_o, una ley $\mathcal{N}\left(0, \sqrt{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}\right)$ pues

$$E[r(t)] = E[s(t)] + E[n(t)] = E[s(t)] = \begin{cases} E[s(t)] & \text{, según } H_1 \\ 0 & \text{, " } H_o \end{cases}$$

Operando y simplificando, tenemos:

$$A(r_N(t)) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{(R_i-s_i)^2 - R_i^2}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}\right]} = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{s_i^2 - 2R_i s_i}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}\right]}$$

(1.3.69)

Aplicando logaritmos neperianos a los dos miembros de (1.3.69) tenemos:

$$LA(r_N(t)) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{s_i^2 - 2R_i s_i}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}} = \sum_{i=1}^{N}\frac{R_i s_i}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{s_i^2}{\lambda_i + \frac{N_o}{2}}$$

(1.3.70)

Haciendo tender N→∞, resulta:

$$LA(r(t))=\lim_{N\to\infty} LA(r_N(t))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{R_i s_i}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s_i^2}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}} \qquad (1.3.71)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las expresiones de r_i y s_i dadas en (1.3.63) y (1.3.64), podemos escribir:

$$R_i s_i = \sqrt{E}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f} r(t)\phi_i(t)\phi_i(u)s(u)dtdu \quad \text{en m.c.}$$

$$s_i^2 = E\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f} s(t)\phi_i(t)\phi_i(u)s(u)dtdu \quad \text{en m.c.} \qquad (1.3.72)$$

Así sustituyendo (1.3.72) en (1.3.71) resulta:

$$LA(r(t))=\sqrt{E}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f} r(t)\frac{\phi_i(t)\phi_i(u)}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}}s(u)dtdu-\frac{E}{2}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f} s(t)\frac{\phi_i(t)\phi_i(u)}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}}s(u)dtdu=$$

$$=\sqrt{E}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(t)\phi_i(u)}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}}\right)r(t)s(u)dtdu-\frac{E}{2}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(t)\phi_i(u)}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}}\right)s(t)s(u).$$

$$.dtdu \qquad (1.3.73)$$

Si notamos $Q_n(t,s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\phi_i(t)\phi_i(s)}{\lambda_i+\frac{N_o}{2}}$, entonces:

$$LA(r(t))=\sqrt{E}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f} Q_n(t,u)r(t)s(u)dtdu-\frac{E}{2}\int_{T_i}^{T_f}\int_{T_i}^{T_f} Q_n(t,u)s(t)s(u)dtdu$$

$$(1.3.74)$$

que es la función de verosimilitud buscada.

Observemos que:

$$\int_{T_i}^{T_f} R_n(t,u)Q_n(v,t)dt=\int_{T_i}^{T_f}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(t)\phi_i(u)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\phi_j(v)\phi_j(t)}{\lambda_j+\frac{N_o}{2}}\right)dt =$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_i(u)\phi_j(v)\frac{1}{\lambda_j+\frac{N_o}{2}}\int_{T_i}^{T_f}\phi_i(t)\phi_j(t)dt =$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\phi_i(u)\phi_j(v)\frac{1}{\lambda_j+\frac{N_o}{2}}\left(\lambda_i+\frac{N_o}{2}\right)\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(u)\phi_i(v)=\delta(u-v)$$

O sea, podemos definir $Q_n(t,s)$ como una especie de núcleo inverso de - $R_n(t,s)$, en el sentido de ser:

$$\int_{T_i}^{T_f} R_n(t,u)Q_n(v,t)dt=\delta(u-v)$$

V) Estadísticos de fotoconteo para luz Gaussiana.- Supongamos que un fotodetector percibe una corriente de electrones emanados desde un foco luminoso ideal, y que dicho campo óptico incidente en el fotodetector se puede modelar por un proceso de Gauss. Una tal situación se presenta, por ejemplo, cuando un cierto campo de señales que se quiere observar, se propaga a través de un medio difuso tal como nubes o humo; o bien cuando un radar óptico que clasifica vibraciones o pulsaciones es reflejado desde una superficie rugosa [19],[24].

En este ejemplo nos proponemos estudiar los estadísticos de conteo para dicho fotodetector, es decir, el número de electrones contabilizados por

él en un cierto intervalo de tiempo. Tales estadísticos de conteo vienen - definidos por la probabilidad de que el proceso de conteo N tome un valor concreto en el instante t, $P(N_t=n)$.

Los estadísticos de fotoconteo son de gran utilidad, cuando se quiere determinar el error en el funcionamiento de un fotodetector que contabiliza solamente el número de fotoelectrones incidentes en él durante un intervalo de tiempo, pero no tiene en cuenta sus tiempos de llegada, es decir, los tiempos que transcurren entre cada dos fotoelectrones recibidos.

Antes de enunciar formalmente el problema vamos a dar una definición que posteriormente utilizaremos:

Sea $\{V_t \mid t\in[0,T]\}$ un proceso vector-valuado y contínuo por la izquierda, y consideremos un proceso puntual cuyo proceso de conteo asociado es - $N=\{N_t \mid t\in[0,T]\}$. Diremos que N es un <u>Proceso Doblemente de Poisson</u> (P.D.P.) con proceso intensidad $\{\lambda_t(V_t) \mid t\in[0,T]\}$, si para casi todas las trayectorias dadas del proceso $\{V_t \mid t\in[0,T]\}$, N es un proceso de Poisson con función intensidad $\lambda_t(V_t)$.

Es decir, un P.D.P. es un proceso de Poisson con intensidad $\lambda_t(V_t)$, - condicionado al proceso $\{V_t \mid t\in[0,T]\}$ llamado <u>proceso información</u>. Así los - estadísticos de conteo para un P.D.P. $\{N_t \mid t\in[0,T]\}$ con intensidad $\lambda_t(V_t)$ -- vienen dados por:

$$P(N_t=n)=E[P(N_t=n \mid \{V_\sigma \mid \sigma\in[0,T]\})]=E\left[\frac{1}{n!}\left(\int_0^T \lambda_\sigma(V_\sigma)d\sigma\right)^n e^{-\int_0^T \lambda_\sigma(V_\sigma)d\sigma}\right] \qquad (1.3.75)$$

ya que para un proceso de Poisson con parámetro $\Lambda_t=\int_0^T \lambda_\sigma d\sigma$ es

$$P(N_t=n)=\frac{1}{n!}\left(\int_0^T \lambda_\sigma d\sigma\right)^n e^{-\int_0^T \lambda_\sigma d\sigma}$$

y en el caso del P.D.P. hay que integrar o tomar esperanzas sobre los V_σ -- con $\sigma\in[0,T]$.

Ahora bién, la esperanza que figura en (1.3.75) es muy difícil, si no

imposible de calcular. Para evaluarla en nuestro caso vamos a recurrir al - desarrollo de Karhunen-Loève.

Vamos, por tanto, a formular rigurosamente el problema de fotoconteo - para luz Gaussiana, y a continuación lo resolveremos.

Supongamos que un foco luminoso proyecta luz sobre una superficie foto sensitiva, y que dicha luz incidente puede caracterizarse por el campo esca lar eléctrico [38]:

$$s(t,\vec{r}) = \sqrt{2}\ \mathrm{Re}[S(t,\vec{r})e^{i2\pi\nu t}] \qquad (1.3.76)$$

en el instante t y posición $\vec{r}$, siendo ν la frecuencia óptica, y $S(t,\vec{r})$ un - espacio complejo de tiempos, envolvente del campo óptico escalar, que varía lentamente en comparación a ν.

La intensidad de luz en el instante t y posición $\vec{r}$ es $|S(t,\vec{r})|^2$. La - tasa o intensidad con que los electrones emanan desde el foco está referida a la intensidad luminosa incidente en su superficie sensitiva según la expresión:

$$\lambda_t = \frac{\eta}{h\nu} \int_a |S(t,\vec{r})|^2 d^2\vec{r} + \lambda_o \qquad (1.3.77)$$

donde η es la eficiencia cuántica del detector, o sea, la probabilidad de - que un cuantum de energía luminosa sea convertido en un electrón, h es la - constante de Plank, a es la superficie sensitiva del detector, y λ_o es la - tasa de generación de electrones extraños en el detector.

Mandel probó en 1958 que la corriente de fotoelectrones producida al - proyectar la luz sobre el receptor, se ajusta a un proceso de Poisson no ho mogéneo. Ahora bién, si se supone que el campo óptico incidente en el foto- detector varía aleatoriamente a lo largo del tiempo, entonces dicha corrien te de fotoelectrones forma un P.D.P. ya que es un proceso de Poisson condi-- cionado al campo óptico (proceso información en este caso).

A su vez vamos a suponer que el campo óptico varía alea- -iamente debi- do a fluctuaciones en las propiedades del medio en que se propaga la onda óp

tica, como ya habíamos indicado anteriormente (turbulencias atmosféricas, - cambios aleatorios en el índice de refracción atmosférico, etc.)

Nuestro problema consiste, pues, en calcular los estadísticos de conteo para dicho P.D.P.. Pasemos entonces a resolverlo.

Para simplificar el modelo teórico, consideremos que la superficie sensitiva a del fotodetector es lo suficientemente pequeña para que cualquier variación espacial de $S(t,\vec{r})$ pueda ser despreciada (Clark y Hoversten probaron en 1970 que esta restricción puede ser fácilmente suprimida). Entonces podemos expresar:

$$S(t,\vec{r}) = X_t \qquad (1.3.78)$$

y la ecuación $\lambda_t^s = \lambda_t - \lambda_o$, siendo λ_t definido en (1.3.77) puede escribirse como:

$$\lambda_t(X_t) = \alpha|X_t|^2 \quad \Big| \quad \alpha = \frac{\eta a}{h.\nu} \qquad (1.3.79)$$

En estas circunstancias, el proceso $\{X_t | t\in[0,T]\}$ es la envolvente compleja de un campo cuya parte real es:

$$x_t = \sqrt{2}\, Re[X_t e^{i2\pi\nu t}] \qquad (1.3.80)$$

Ahora bién, la salida del fotodetector ideal puede modelarse como un - proceso de Poisson $\{N_t | t\in[0,T]\}$ condicionado al proceso $\{X_t | t\in[0,T]\}$, o sea, como un P.D.P. con función intensidad (1.3.79). Así podemos considerar ---- $\{X_t | t\in[0,T]\}$ como un proceso Gaussiano centrado, que está motivado por la - radiación lejana.

Como la intensidad $|S(t,\vec{r})|^2$ integrada en t es siempre finita, se tiene que

$$E[|X_t|^2] = E[|S(t,\vec{r})|^2] < \infty \qquad (1.3.81)$$

y así el proceso $\{X_t | t\in[0,T]\}$ es de segundo orden.

Además $\{X_t | t\in[0,1]\}$ es claramente contínuo en m.c. por lo que admite -

un desarrollo de Karhunen-Loève de la forma:

$$X_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \zeta_k \phi_k(t) \Big| \quad \zeta_k = \int_o^T \overline{\phi_k(t)} X_t \, dt, \quad \forall t \in [0,T] \qquad (1.3.82)$$

donde las igualdades lo son en m.c., y el límite es uniforme en $[0,T]$. Además, igual que en ejemplos anteriores, basta considerar un desarrollo en términos de variables ortogonales y no ortonormales.

Si en (1.3.79) integramos los dos miembros respecto a t y aplicamos el desarrollo (1.3.82), resulta:

$$\int_o^T \lambda_\sigma(X_\sigma) d\sigma = \int_o^T \alpha |X_t|^2 dt = \alpha \int_o^T X_t \overline{X}_t \, dt = \alpha \int_o^T \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \phi_k(t)\Big)\overline{\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \zeta_j \phi_j(t)\Big)} dt =$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \zeta_k \overline{\zeta_j} \int_o^T \phi_k(t) \overline{\phi_j(t)} dt = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{kj} \zeta_k \overline{\zeta_j} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2 \qquad (1.3.83)$$

donde por comodidad hemos notado $\sum_{k=1}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N}$ en m.c. y uniformemente en $[0,T]$.

Consideremos la función característica $F_{N_t}(u)$ de la variable aleatoria N_t (número de fotones detectados en el instante t). Como $\{N_t | t\in[0,T]\}$ es un P.D.P. con proceso información $\{X_t | t\in[0,T]\}$, tenemos:

$$F_{N_t}(u) = E\left[e^{iuN_t}\right] = E\left[e^{(e^{iu}-1)\int_o^T \lambda_\sigma(X_\sigma) d\sigma}\right] \qquad (1.3.84)$$

(Para un proceso de Poisson no homogéneo es $F_{N_t}(u) = e^{(e^{iu}-1)\int_o^T \lambda_\sigma(X_\sigma) d\sigma}$)

Sustituyendo (1.3.83) en (1.3.84) tenemos:

$$F_{N_t}(u) = E\left[e^{(e^{iu}-1)\alpha \sum_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|^2}\right] = \prod_{k=1}^{\infty} E\left[e^{(e^{iu}-1)\alpha |\zeta_k|^2}\right] \qquad (1.3.85)$$

Ahora bién, se tiene que:

$$E\left[e^{(e^{iu}-1)a|\zeta_k|^2}\right]=\int_o^\infty e^{(e^{iu}-1)a|\zeta_k|^2}\,dP(|\zeta_k|^2)=\int_o^\infty e^{(e^{iu}-1)az}\,dP_z \qquad (1.3.86)$$

sin más que notar $z=|\zeta_k|^2$

Es fácil que z siga una ley exponencial con parámetro $\frac{1}{\lambda_k}$, así que vamos a resolver el problema suponiendo tal hipótesis. (En cualquier otro caso, la resolución se haría de forma análoga). En dicho caso se tiene:

$$P_z(z)=\frac{dP_z}{dz}=\frac{1}{\lambda_k}e^{-\frac{z}{\lambda_k}}$$

y así es:

$$E[e^{(e^{iu}-1)az}]=\frac{1}{\lambda_k}\int_o^\infty e^{(e^{iu}-1)az}e^{-\frac{z}{\lambda_k}}\,dz=\frac{1}{\lambda_k}\int_o^\infty e^{-\frac{1-a\lambda_k(e^{iu}-1)}{\lambda_k}z}\,dz=$$

$$=\frac{-1}{\lambda_k}\,\frac{\lambda_k}{1-a\lambda_k(e^{iu}-1)}\left[e^{-\frac{1-a\lambda_k(e^{iu}-1)}{\lambda_k}}\right]_o^\infty=\frac{1}{1-a\lambda_k(e^{iu}-1)} \qquad (1.3.87)$$

Por tanto la función característica (1.3.85) es de la forma:

$$F_{N_t}(u)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-a\lambda_k(e^{iu}-1)}\right) \qquad (1.3.88)$$

Observemos que la transformada inversa de Fourier de cada factor es:

$$P(N_t(k)=n_k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iun_k}}{1-a\lambda_k(e^{iu}-1)}\,du=\frac{(a\lambda_k)^{n_k}}{(1+a\lambda_k)^{n_k+1}} \qquad (1.3.89)$$

o sea se trata de la función de probabilidad de la distribución de Bose--Einstein.

Por tanto los estadísticos de conteo para el proceso que genera la corriente de fotoelectrones vienen dados por:

$$P(N_t=n)=\prod_{k=0}^{\infty}\frac{(a\lambda_k)^{n_k}}{(1+a\lambda_k)^{n_k+1}} \qquad (1.3.90)$$

y se concluye.

1.4. OPTIMALIDAD DEL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE.

Sea $(X_t|t\in[a,b])$ un proceso de segundo orden y contínuo en m.c., y consideremos su desarrollo de Karhunen-Loève en términos de variables ortogonales y no ortonormales:

$$X_t=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\zeta_n\phi_n(t)\Big|\zeta_n=\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt \qquad (1.4.1)$$

siendo ambas igualdades en m.c., y el límite uniforme en $[a,b]$.

Entonces el desarrollo (1.4.1) es doblemente óptimo en el sentido siguiente:

1) Minimiza el error en m.c. cometido al aproximar el desarrollo completo por un número finito de términos. Es decir, la esperanza

$$E\left[\left|X_t-\sum_{n=0}^{N}\zeta_n\psi_n(t)\right|^2\right] \qquad (1.4.2)$$

es mínima cuando las funciones $\psi_n(t)$ son las N+1 primeras autofunciones del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso, o sea: $\psi_n(t)=\phi_n(t)$, $n=0,1,\ldots,N$.

2) Minimiza la función de entropía definida sobre la distribución de probabilidad de los coeficientes coordenados $(\phi_n)_{n\in N}$. O sea, si p_n es la función de probabilidad de ζ_n, $n=0,1,\ldots$, entonces:

$$H((\phi_n(t))_{n\in N})=-\sum_{n=0}^{\infty}p_n\log p_n \qquad (1.4.3)$$

es mínima.

En efecto:

$$1)\ E[|X_t-\sum_{n=o}^{N}\zeta_n\Psi_n(t)|^2]=E[(X_t-\sum_{n=o}^{N}\zeta_n\Psi_n(t))(\bar{X}_t-\sum_{m=o}^{N}\bar{\zeta}_m\overline{\Psi_m(t)})]=$$

$$=R(t,t)-\sum_{m=o}^{N}E[X_t\bar{\zeta}_m]\overline{\Psi_m(t)}-\sum_{n=o}^{N}E[\zeta_n\bar{X}_t]\Psi_n(t)+$$

$$+\sum_{n=o}^{N}\sum_{m=o}^{N}E[\zeta_n\bar{\zeta}_m]\Psi_n(t)\overline{\Psi_m(t)}=$$

$$=R(t,t)-\sum_{n=o}^{N}\lambda_n\phi_n(t)\overline{\Psi_n(t)}-\sum_{n=o}^{N}\bar{\lambda}_n\overline{\phi_n(t)}\Psi_n(t)+\sum_{n=o}^{N}\lambda_n|\Psi_n(t)|^2=$$

$$=R(t,t)-\sum_{n=o}^{N}\lambda_n|\phi_n(t)|^2+\sum_{n=o}^{N}\lambda_n|\phi_n(t)-\Psi_n(t)|^2 \qquad (1.4.4)$$

ya que análogamente a (1.2.25), (1.2.26) y (1.2.27) es:

$$E[X_t\bar{\zeta}_m]=\lambda_m\phi_m(t)\ ;\ E[\zeta_n\bar{X}_t]=\lambda_n\overline{\phi_n(t)}\ ;\ E[\zeta_n\bar{\zeta}_m]=\lambda_m\delta_{mn}$$

Por tanto,para que (1.4.4) sea mínimo, ha de ser:

$$\phi_n(t)=\Psi_n(t)\ ,\quad n=0,1,\ldots,N$$

y en tal caso es:

$$E[|X_t-\sum_{n=o}^{N}\zeta_n\phi_n(t)|^2]=R(t,t)-\sum_{n=o}^{N}\lambda_n|\phi_n(t)|^2$$

como ya sabemos por (1.2.28).

2) Observemos en primer lugar que si el proceso $\{X_t|t\in[a,b]\}$ se considera normalizado, o sea:

$$\int_a^b|X_t|^2dt=1 \qquad (1.4.5)$$

entonces podemos tomar como función de probabilidad:

$$p_n=E[|\zeta_n|^2]=\lambda_n\ ,\quad n=0,1,\ldots \qquad (1.4.6)$$

ya que

$$X_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \zeta_n \phi_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \phi_n(t) \Longrightarrow |X_t|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_n \overline{\zeta_m} \phi_n(t) \overline{\phi_m(t)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_a^b |X_t|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_n \overline{\zeta_m} \int_a^b \phi_n(t) \overline{\phi_m(t)} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_n \overline{\zeta_m} \delta_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} |\zeta_n|^2 \tag{1.4.7}$$

Es decir, se obtiene la identidad de Parseval ya vista para el caso general en (1.2.9).

Por tanto, considerando ρ_n como en (1.4.6) se tiene:

$$\sum_{n=0}^{N} \rho_n = \sum_{n=0}^{\infty} E[|\zeta_n|^2] = E[\int_a^b |X_t|^2 dt] = 1 \tag{1.4.8}$$

Veamos, entonces, que la función de entropía se minimiza para los coeficientes coordenados $(\phi_n)_{n\in N}$ asociados al sistema de variables aleatorias $(\zeta_n)_{n\in N}$. En efecto, por la forma en que hemos definido ρ_n, se demuestra que para cualesquiera a_n, distintas de las ρ_n, asociadas a cualquier otro sistema de funciones ortonormales $(\Psi_n(t))_{n\in N}$, se verifica que [44]

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_k \geq \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{1.4.9}$$

Por tanto, tenemos:

$$\sum_{k=0}^{n} \rho_k \log \rho_k \geq \sum_{k=0}^{n} a_k \log a_k \Longrightarrow -\sum_{k=0}^{n} \rho_k \log \rho_k \leq -\sum_{k=0}^{n} a_k \log a_k \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow H((\phi_n(t))_{n\in N}) \leq H((\Psi_n(t))_{n\in N})$$

y se concluye.

Un planteamiento recíproco al formulado en 1) es el siguiente: Queremos que el error de truncamiento sea menor de un determinado nivel ε^2, y que el número de términos considerados en el desarrollo sea el menor posible. El problema consiste en buscar un sistema de funciones ortonormales tales que el desarrollo truncado del proceso para dichas funciones verifique la anterior propiedad.

Observemos que dichas funciones dependerán de la distribución de proba

bilidad del proceso, por lo que en general no quedan únicamente determinadas por la función de covarianza del proceso. No obstante, cuando el proceso sea Gaussiano, su distribución de probabilidad sí dependerá de su covarianza, y las funciones buscadas también.

Así parece intuirse que tales funciones van a ser las del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso. En efecto; Algazi y Sakrison [1] han probado que si el proceso es Gaussiano y de energía finita, o sea:

$$\int_a^b R(t,t)dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n < \infty \qquad (1.4.10)$$

entonces el número mínimo de términos que hay que considerar en el desarrollo para que sea

$$E\left[\left|X_t - \sum_{n=0}^{N} \zeta_n \Psi_n(t)\right|^2\right] < \epsilon^2$$

se consigue considerando como funciones ortonormales las del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso, o sea

$$\Psi_n(t) = \phi_n(t) \ , \quad n=0,1,\ldots,N.$$

Observemos que este teorema no nos dice cual es dicho número mínimo, - sino tan sólo que se logra tomando dichas funciones.

1.5. DIFERENCIACION DEL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE.

Sea $\{X_t \mid t\in[a,b]\}$ un proceso de segundo orden y contínuo en m.c., y consideremos su desarrollo de Karhunen-Loève del tipo (1.4.1).

Al ser la convergencia del desarrollo, uniforme en $[a,b]$ podemos integrarlo término a término, de modo que el desarrollo de Karhunen-Loève integrado del proceso, converge nuevamente en m.c. y uniformemente en $[a,b]$ a - la integral del proceso, es decir, se tiene:

$$\int_a^t X_b\, ds = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \zeta_n \int_a^t \phi_n(s)ds \qquad (1.5.1)$$

en m.c. y uniformemente $\forall t\in[a,b]$.

Sin embargo, la diferenciación término a término del desarrollo, no es, en general, válida aunque todas las autofunciones $\phi_n(t)$ sean diferenciables, ya que según el clásico teorema de Weierstrass para series de funciones en Análisis Funcional [27], la serie derivada ha de ser uniformemente convergente, y ello implicaría en nuestro caso, imponer ciertas restricciones a las autofunciones, lo que no es conveniente ya que éstas no son, en general, explícitamente conocidas.

Las condiciones habrá que imponerlas directamente sobre la función de covarianza del proceso. Así, en el caso particular de que el proceso sea Gaussiano, éste queda caracterizado exclusivamente por su covarianza, y todas las condiciones deben reducirse a condiciones sobre ella.

Busquemos, por tanto, una condición suficiente para que la diferenciación del desarrollo de Karhunen-Loève pueda llevarse a cabo. Para ello vamos a basarnos en el siguiente resultado debido a Kadota [21],[22] que es una versión diferenciada del teorema de Mercer.

Teorema 1.3.1.- Sea $R(t,s)$ una función de covarianza para $t,s\in[a,b]$, y supongamos que

$$\frac{\partial^{2k} R(t,s)}{\partial t^k \partial s^k}$$

es contínua. Entonces las autofunciones ortonormalizadas $\phi_n(t)$ correspondientes a $R(t,s)$, tienen derivadas n-simas contínuas, y se verifica que:

$$\frac{\partial^{2k} R(t,s)}{\partial t^k \partial s^k} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n^{(k)}(t)\overline{\phi_n^{(k)}(s)} \qquad (1.5.2)$$

en m.c. y uniformemente $\forall t,s\in[a,b]$, siendo λ_n, $n=0,1,\ldots$ los autovalores asociados a $R(t,s)$

Como consecuencia de éste teorema, se verifica:

$$\frac{\partial^{i+j} R(t,s)}{\partial t^i \partial s^j} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n^{(i)}(t)\overline{\phi_n^{(j)}(s)} \quad , \quad 0\leq i,j\leq n \qquad (1.5.3)$$

en m.c. y uniformemente $\forall t,\varepsilon,c[a,b]$.

La condición suficiente que buscamos, es la siguiente:

Teorema 1.5.2.- Sea $(X_t|t\in[a,b])$ un proceso tal que existe su derivada k-sima en m.c. $X_t^{(k)}$, y $E[|X_t^{(k)}|^2]<\infty$. Entonces se verifica:

$$X_t^{(k)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{N} \zeta_n \phi_n^{(k)}(t) \Big| \zeta_n = \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_t dt \qquad (1.5.4)$$

siendo ambas igualdades en m.c., y el límite uniforme $\forall t\in[a,b]$.

Demostración: Por (1.1.19) sabemos que

$$E[X_t^{(k)} \overline{X_s^{(k)}}] = \frac{\partial^{2k} R(t,s)}{\partial t^k \partial s^k}$$

Por otra parte tenemos:

$$E[X_t^{(k)} \overline{\zeta_m}] = E[X_t^{(k)} \int_a^b \overline{\phi_n(s)} \overline{X_s} ds] = \int_a^b E[X_t^{(k)} \overline{X_s}] \overline{\phi_n(s)} ds =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^k R(t,s)}{\partial t^k} \overline{\phi_n(s)} ds = \lambda_n \phi_n^{(k)}(t) \qquad (1.5.5)$$

Por tanto:

$$E[|X_t^{(k)} - \sum_{n=o}^{N} \zeta_n \phi_n^{(k)}(t)|^2] = E[(X_t^{(k)} - \sum_{n=o}^{N} \zeta_n \phi_n^{(k)}(t))\overline{(X_t^{(k)} - \sum_{m=o}^{N} \zeta_m \phi_m^{(k)}(t))}] =$$

$$= E[X_t^{(k)} \overline{X_t^{(k)}}] - \sum_{m=o}^{N} E[X_t^{(k)} \overline{\zeta_m}] \overline{\phi_m^{(k)}(t)} - \sum_{n=o}^{N} E[\zeta_n \overline{X_t^{(k)}}] \phi_n^{(k)}(t) +$$

$$+ \sum_{n=o}^{N} \sum_{m=o}^{N} E[\zeta_n \overline{\zeta_m}] \phi_n^{(k)}(t) \overline{\phi_m^{(k)}(t)} =$$

$$= \frac{\partial^{2k} R(t,t)}{\partial t^k \partial t^k} - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n^{(k)}(t)|^2 - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n^{(k)}(t)|^2 +$$

$$+ \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n^{(k)}(t)|^2 =$$

$$= \frac{d^{2k} R(t,t)}{dt^{2k}} - \sum_{n=o}^{N} \lambda_n |\phi_n^{(k)}(t)|^2 \qquad (1.5.6)$$

Tomando límites cuando $N\to\infty$, uniformemente en $[a,b]$, y aplicando el teorema 1.5.1, se tiene:

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left|X_t^{(k)} - \sum_{n=0}^{N} \zeta_n \phi_n^{(k)}(t)\right|^2\right] = 0$$

y se concluye.

Una particularización de este resultado es la siguiente:

Teorema 1.5.3.- Si bajo las hipótesis del teorema 1.5.2., el proceso real $\{X_t | t\in[a,b]\}$ es Gaussiano, entonces el desarrollo diferenciado de Karhunen-Loève converge casi seguramente en $[a,b]$.

Demostración: Al converger el desarrollo en m.c. hacia $X_t^{(n)}$, $\forall t\in[a,b]$, también converge en probabilidad. Pero al ser ahora el proceso Gaussiano, los términos del desarrollo son mútuamente independientes, por lo que la serie converge casi seguramente hacia $X_t^{(n)}$ en $[a,b]$.

1.6. DESARROLLO GENERALIZADO DE KARHUNEN-LOEVE.

Sea $\{X_i(t) | t\in[a,b]\}_{i=1,2,\ldots,m}$ una familia de m procesos centrados y de segundo orden, y notemos P_i a la probabilidad de que se presente el i-simo proceso. Así es

$$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1 \qquad (1.6.1)$$

Estudiemos qué condiciones tienen que cumplirse para poder expresar:

$$X_i(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} V_{in}\,\phi_n(t), \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (1.6.2)$$

en m.c. y uniformemente $\forall t\in[a,b]$, siendo las V_{in} variables aleatorias centradas, y $\{\phi_n(t)\}_{n\in N}$ un sistema ortonormal en $[a,b]$, es decir:

$$E[V_{in}] = 0$$
$$\int_a^b \phi_n(t)\overline{\phi_m(t)}\,dt = \delta_{n,m} \qquad (1.6.3)$$

Definiremos la función de covarianza conjunta para el m-proceso $\{X_i(t)|t\in[a,b]\}_{i=1,2,\ldots,m}$, de la forma:

$$R(t,s)=\sum_{i=1}^{m} P_i E[X_i(t)\overline{X_i(s)}]=\sum_{i=1}^{m} P_i E[(\sum_{n=0}^{\infty} V_{in}\phi_n(t))(\sum_{e=0}^{\infty}\overline{V_{ie}}\overline{\phi_e(s)})]=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{e=0}^{\infty}\phi_n(t)\overline{\phi_e(s)}(\sum_{i=1}^{m} P_i E[V_{in}\overline{V_{ie}}]) \qquad (1.6.4)$$

donde al igual que en ocasiones anteriores, hemos notado por comodidad $\sum_{n=0}^{\infty} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}$ en m.c. y uniformemente en $[a,b]$.

La condición necesaria que debe verificarse para que el m-proceso admita una representación del tipo (1.6.2) es que [9]:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i E[V_{in}\overline{V_{ie}}]=\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} P_i \operatorname{Var}[V_{in}]=\sigma_n , & \text{si } n=e\\ 0 , & \text{si } n\neq e\end{cases} \qquad (1.6.5)$$

es decir, las variables V_{in} del desarrollo correspondiente a dos procesos distintos de la familia han de ser incorrelados.

Observemos que entonces se tiene:

$$R(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n\phi_n(t)\overline{\phi_n(s)} \qquad (1.6.6)$$

y así es:

$$\int_a^b R(t,s)\phi_n(s)ds=\int_a^b(\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k\phi_k(t)\overline{\phi_k(s)})\phi_n(s)ds=\sigma_n\phi_n(t) \qquad (1.6.7)$$

siempre que dicha integral exista y conmute con la sumatoria.

La condición (1.6.5) es efectivamente necesaria para que la covarianza $R(t,s)$ admita una representación del tipo (1.6.6), ya que si notamos:

$$V_{in}=\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_i(t)dt,\ i=1,2,\ldots,m \qquad (1.6.8)$$

se verifica entonces:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i E[V_{in}\overline{V_{ie}}] - \sum_{i=1}^{m} P_i E[(\int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_i(t)dt)(\int_a^b \phi_e(s)\overline{X_i(s)}ds)] =$$

$$= \int_a^b \int_a^b (\sum_{i=1}^{m} P_i E[X_i(t)\overline{X_i(s)}]\phi_e(s)ds)\overline{\phi_n(t)}dt =$$

$$= \int_a^b (\int_a^b R(t,s)\phi_e(s)ds)\overline{\phi_n(t)}dt = \sigma_e \int_a^b \phi_e(t)\overline{\phi_n(t)}dt =$$

$$= \sigma_e \delta_{e,n} = \begin{cases} \sigma_n & , \text{ si } n=e \\ 0 & , \text{ si } n\neq e \end{cases}$$

En definitiva, a la representación del m-proceso:

$$X_i(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} V_{in}\phi_n(t) \Big| \; V_{in} = \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_i(t)dt, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{1.6.9}$$

siendo ambas igualdades en m.c., y el límite uniforme en $[a,b]$, se le denomina <u>desarrollo generalizado de Karhunen-Loève</u> para $\{X_i(t)|t\in[a,b]\}_{i=1,\ldots,m}$.

<u>Optimalidad del desarrollo generalizado de Karhunen-Loève</u>.-

El desarrollo generalizado de Karhunen-Loève (1.6.9) para el m-proceso $\{X_i(t)|t\in[a,b]\}_{i=1,2,\ldots,m}$ verifica dos propiedades óptimas similares a las vistas en el §1.4 para el desarrollo de Karhunen-Loève en general.

Tales propiedades de optimalidad para (1.6.9) son las siguientes:

1) Minimiza el error en m.c. cometido al aproximar el desarrollo completo de un m-proceso por un número finito de términos. Es decir, la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i E[|X_i(t) - \sum_{n=0}^{N} V_{in}\Psi_n(t)|^2] \tag{1.6.10}$$

es mínima cuando las funciones $\Psi_n(t)$ son las N+1 primeras autofunciones del desarrollo generalizado de Karhunen-Loève del proceso, o sea: $\Psi_n(t)=\phi_n(t)$, $n=0,1,\ldots,N$

2) Minimiza la función de entropía definida sobre la distribución de -

probabilidad de los coeficientes coordenados $(\phi_n)_{n\in N}$, conjuntamente para $i=1,2,\ldots,m$; o sea, si

$$\rho_n = \sum_{i=1}^{m} P_i E[|V_{in}|^2] = \sigma_n \quad , \quad n\in N \tag{1.6.11}$$

entonces la función de entropía:

$$H((\phi_n(t))_{n\in N}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \log \sigma_n \tag{1.6.12}$$

es mínima.

La demostración de ambas propiedades es parecida a la desarrollada en el §1.4.

$$1)\ \sum_{i=1}^{m} P_i E[|X_i(t)-\sum_{n=0}^{N} V_{in}\Psi_n(t)|^2] = \sum_{i=1}^{m} P_i E[|X_i(t)|^2] - \sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{m} P_i E[V_{in}\overline{X_i(t)}]\Big)\Psi_n(t) -$$

$$-\sum_{n=0}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{m} P_i E[\overline{V_{in}}X_i(t)]\Big)\overline{\Psi_n(t)} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{n=0}^{N}\sum_{e=0}^{N} P_i E[V_{in}\overline{V_{ie}}]\Psi_n(t)\overline{\Psi_e(t)} =$$

$$= R(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n \overline{\phi_n(t)}\Psi_n(t) - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n \phi_n(t)\overline{\Psi_n(t)} + \sum_{n=0}^{N} \sigma_n |\Psi_n(t)|^2 =$$

$$= R(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n |\phi_n(t)|^2 + \sum_{n=0}^{N} \sigma_n |\Psi_n(t) - \phi_n(t)|^2 \tag{1.6.13}$$

sin mas que aplicar (1.6.5), y tener en cuenta que

$$E[X_i(t)\overline{V_{in}}] = E[X_i(t)\int_a^b \phi_n(s)\overline{X_i(s)}ds] = \int_a^b E[X_i(t)\overline{X_i(s)}]\phi_n(s)ds \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} P_i E[X_i(t)\overline{V_{in}}] = \int_a^b \Big(\sum_{i=1}^{m} P_i E[X_i(t)\overline{X_i(s)}]\Big)\phi_n(s)ds = \int_a^b R(t,s)\phi_n(s)ds =$$

$$= \sigma_n \phi_n(t) \tag{1.6.14}$$

Por tanto, para que (1.6.13) sea mínimo ha de ser:

$$\phi_n(t) = \Psi_n(t), \quad n=0,1,\ldots,N$$

y en tal caso es:

$$\sum_{i=1}^{m} P_i E[|X_i(t)-\sum_{n=0}^{N} V_{in}\phi_n(t)|^2] = R(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \sigma_n |\phi_n(t)|^2 \tag{1.6.15}$$

Es decir se obtiene un resultado similar a (1.2.28).

2) Observemos en primer lugar que los ρ_n definidos en (1.6.11) son los autovalores de la ecuación integral asociada al m-proceso. Así si consideramos normalizados todos los $X_i(t)$ de la familia, es decir

$$\int_a^b |X_i(t)|^2 dt = 1, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{1.6.16}$$

entonces se tiene a partir de (1.6.2) que

$$\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{e=o}^{\infty} V_{in}\overline{V}_{ie}\phi_n(t)\overline{\phi_e(t)} = |X_i(t)|^2 \Longrightarrow \sum_{n=o}^{\infty}|V_{in}|^2 = \int_a^b |X_i(t)|^2 dt = 1, \quad i=1,2,\ldots,m \tag{1.6.17}$$

Por tanto los $(\rho_n)_{n\in N}$ constituyen una distribución de probabilidad asociada a $(\phi_n(t))_{n\in N}$, ya que

$$\sum_{n=o}^{\infty}\rho_n = \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} P_i E[|V_{in}|^2] = \sum_{i=1}^{m} P_i \left(\sum_{n=o}^{\infty} E[|V_{in}|^2]\right) = \sum_{i=1}^{m} P_i = 1$$

sin más que aplicar (1.6.17) y (1.6.1).

Por la forma en que hemos definido ρ_n, se demuestra que para cualesquiera a_n, distintas de las ρ_n, asociadas a cualquier otro sistema de funciones ortonormales $(\psi_n(t))_{n\in N}$ se verifica que

$$\sum_{k=o}^{n}\rho_k \geq \sum_{k=o}^{n} a_k$$

y así razonando como en §1.4. se concluye.

CAPITULO 2

EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA UN PROCESO DEBILMENTE ESTACIONARIO

2.1. PROCESOS DEBILMENTE ESTACIONARIOS Y APLICACION DEL ANALISIS ESPECTRAL.

Un proceso de segundo orden $\{X_t | t\in[a,b]\}$, donde $[a,b]$ puede ser $\bar{R}$, se dice que es débilmente estacionario, estacionario de covarianza, o estacionario en sentido ámplio, si su función de covarianza es función solamente de la diferencia de sus argumentos, es decir:

$$R(t,s)=R(t-s)=R(\tau)/\tau=t-s, \quad \forall t,s\in[a,b] \qquad (2.1.1)$$

Observemos, por tanto, que

$$R(t+h,s+h)=R(t+h-s-h)=R(t-s)=R(t,s), \quad \forall h\in R \qquad (2.1.2)$$

o sea, la función de covarianza de un proceso débilmente estacionario es invariante frente a traslaciones iguales de sus argumentos.

Esta característica induce a pensar que el Análisis Espectral va a desempeñar un papel importante en el estudio de los procesos débilmente estacionarios, y en particular, en su desarrollo de Karhunen-Loève.

Por consiguiente, vamos a repasar seguidamente los conceptos y resultados fundamentales de Análisis Espectral aplicados a procesos. Así, a partir de ahora, y salvo que se diga lo contrario, los procesos que manejaremos serán débilmente estacionarios contínuos en m.c. y con espacio paramétrico la recta real R.

Así mismo supondremos que la función de covarianza $R(\tau)$, es absolutamente integrable, o sea.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(\tau)|d\tau<\infty \qquad (2.1.3)$$

Como estamos suponiendo que el proceso es contínuo en m.c., y además -

toda función de covarianza es semidefinida positiva, R(τ) será además contínua y acotada, por el teorema 1.1.2. Así podemos considerar su transformada de Fourier.

$$S(\nu)= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau, \quad \forall \nu\in R \qquad (2.1.4)$$

a la que denominaremos densidad espectral del proceso. Claramente S(ν) será también semidefinida positiva, contínua y acotada.

La transformada inversa de Fourier de S(ν) será precisamente la función de covarianza R(τ):

$$R(\tau)= \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)e^{i2\pi\nu\tau}d\nu, \quad \forall \tau\in R \qquad (2.1.5)$$

Para precisar estas nociones consideremos un filtro lineal de tiempo invariante, caracterizado por una función impulso de respuesta h. Supongamos que la entrada es la función muestral de un proceso débilmente estacionario X_t, $t\in R$. Entonces la salida puede considerarse como la función muestral de otro proceso Y_t, $t\in R$, y podemos escribir:

$$Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X_\tau d\tau \qquad (2.1.6)$$

Dicha integral convolutoria ha de considerarse como una integral de Lebesgue absolutamente convergente. Pero al contener en su integrando una trayectoria X_τ del proceso X, habría que imponer a éste, propiedades que se salen fuera del ámbito de las propiedades de segundo orden hasta ahora consideradas.

Por tanto es más correcto considerar la anterior integral convolutoria como una integral en m.c. Y para que dicha integral exista en m.c., en virtud del teorema 1.1.4, es necesario y suficiente que

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\overline{h(s-\sigma)}R(\tau-\sigma)d\tau d\sigma \qquad (2.1.7)$$

exista como integral de Riemann.

Veamos entonces que (2.1.7) existe como integral de Riemann, con lo -

que quedará probada la existencia de Y_t dada por (2.1.6). Para ello nos basaremos en que $R(\tau)$ es absolutamente integrable, continua y acotada, y h es cuadrado-integrable. Se trata entonces de demostrar que:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi v(t-s)} |\hat{h}(v)|^2 S(v)\,dv \qquad (2.1.8)$$

siendo I la integral definida en (2.1.7)

En efecto ; aplicando (2.1.5) tenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\overline{h(s-\sigma)}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi v(\tau-\sigma)} S(v)\,dv\right]d\tau\,d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\overline{h(s-\sigma)} e^{i2\pi v(\tau-\sigma)} S(v)\,dv\,d\tau\,d\sigma$$

Multiplicando y dividiendo por $e^{i2\pi v(t-s)}$ tenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\overline{h(s-\sigma)} e^{i2\pi v(\tau-\sigma)} e^{i2\pi v(t-s)} e^{-i2\pi v(t-s)} S(v)\,dv\,d\tau\,d\sigma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\overline{h(s-\sigma)} e^{i2\pi v(\tau-\sigma)} e^{-i2\pi v(t-s)}\,d\tau\,d\sigma\right] e^{i2\pi v(t-s)} S(v)\,dv$$

Pero como:

$$e^{i2\pi v(\tau-\sigma)} e^{-i2\pi v(t-s)} = e^{i2\pi v(\tau-\sigma-t+s)} = e^{-i2\pi v(t-\tau)} e^{i2\pi v(s-\sigma)}$$

tenemos:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-i2\pi v(t-\tau)}\,d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(s-\sigma)} e^{i2\pi v(s-\sigma)}\,d\sigma\right] e^{i2\pi v(t-s)} S(v)\,dv$$

Así, notando $\hat{h}(v)$ a la transformada de Fourier de h(v), o sea:

$$\hat{h}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi vt}\,dt \qquad (2.1.9)$$

se tiene:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\hat{h}(v)\overline{(-\hat{h}(v))}\right] e^{i2\pi v(t-s)} S(v)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(v)|^2 e^{i2\pi v(t-s)} S(v)\,dv$$

con lo que resulta la expresión (2.1.8) buscada. Así en el caso particular de ser t=s, tenemos:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{h}(v)|^2 S(v)dv<\infty \qquad (2.1.10)$$

y se concluye.

Sin embargo, en la práctica, conviene interpretar (2.1.6) tanto como una integral en m.c. que como ur integral de Lebesgue para casi todas las trayectorias.

Observemos que según la definición de Y_t, se tiene:

$$E[Y_t\bar{Y}_s]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\overline{h(s-\sigma)}R(\tau-\sigma)d\tau d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{h}(v)|^2 e^{i2\pi v(t-s)}S(v)dv$$

lo que significa que el proceso salida del filtro es también débilmente estacionario, y su función espectral de densidad es:

$$S_Y(v)=|\hat{h}(v)|^2 S(v) \qquad (2.1.11)$$

La ecuación (2.1.5) representa la función de covarianza del proceso como una combinación lineal positiva de sinusoides. El criterio general referente a la representación armónica de la función de covarianza de un proceso débilmente estacionario nos la da el siguiente teorema [47]:

Teorema 2.1.1.- (Teoreme de Bochner). Una función $R(\tau)$, $\tau\in R$, es la función de covarianza de un proceso débilmente estacionario y contínuo en m.c. sí y solo sí es de la forma:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi v\tau}.F(dv) \qquad (2.1.12)$$

donde F es una medida de Borel finita en R llamada medida espectral.

Si definimos la función espectral de distribución ϕ de la forma

$$\phi(v)=F(]-\infty,v]) \qquad (2.1.13)$$

entonces ϕ es una función acotada y no decreciente tal que la integral (2.1.12) puede sustituirse por la integral de Stieltjes $\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi v\tau}d\phi(v)$.

Además, si ϕ es absolutamente contínua, es decir, si F es una medida absolutamente contínua respecto a la medida Lebesgue, entonces existe una -

función no negativa $S(\nu)$, tal que $\phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda} S(\nu)d\nu$. Evidentemente S es la densidad espectral del proceso.

Propiedades de $R(\tau)$.- Al ser $R(\tau)$ la función de covarianza de un proceso débilmente estacionario, verifica las mismas propiedades que la covarianza de un proceso de segundo orden cualquiera (ver capítulo 1, pág. 7). Pero debido al especial carácter de tener como argumento la diferencia de los dos instantes en que se considera el proceso, la covarianza $R(\tau)$ verifica algunas propiedades específicas, a saber:

1) La densidad espectral $S(\nu)$, o sea, la transformada de Fourier de $R(\tau)$ es no negativa. En efecto:

$$E\left[\left|\int_o^T X_t e^{-i2\pi\nu t}dt\right|^2\right]=E\left[\left(\int_o^T X_t e^{-i2\pi\nu t}dt\right)\left(\int_o^T \overline{X}_s e^{i2\pi\nu s}ds\right)\right]=$$

$$=\int_o^T\int_o^T R(t-s)e^{-i2\pi\nu(t-s)}dtds\geq 0$$

Haciendo el cambio de variable $\tau=t-s$, e integrando respecto a t la anterior expresión tenemos:

$$0\leq\int_o^T\int_\tau^T R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}dtd\tau+\int_{-T}^o\int_o^{T+\tau}R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}dtd\tau=$$

$$=\int_o^T R(\tau)(T-\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau+\int_{-T}^o R(\tau)(T+\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau$$

Dividiendo ahora por T, resulta:

$$0\leq\int_o^T R(\tau)(1-\frac{\tau}{T})e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau+\int_{-T}^o R(\tau)(1+\frac{\tau}{T})e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=$$

$$=\int_{-T}^T R(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau$$

Finalmente, como $R(\tau)$ es absolutamente integrable, haciendo tender T hacia infinito, se tiene:

$$0\leq\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^T R(\tau)(1-\frac{|\tau|}{T})e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\left[\lim_{T\to\infty}(1-\frac{|\tau|}{T})\right]e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=S(\nu)$$

y se concluye.

2) Al suponer, como estamos haciendo, que $R(\tau)$ es absolutamente integrable, puede ocurrir que $R(\tau)$ no sea periódica a menos que se trate de la función nula, ya que por el lema de Riemann-Lebesgue [45] se verifica que:

$$\lim_{\nu\to\infty} S(\nu)= \lim_{\nu\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=0 \qquad (2.1.14)$$

Por tanto, si descomponemos $R(\tau)$ como suma de una parte periódica y otra parte integrable, entonces $S(\nu)$ es la suma de una serie de impulsos espaciados a intervalos regulares, más un término que tiende a cero cuando la frecuencia tiende a infinito.

3) En general se verifica que

$$|R(\tau)|\leq R(0) \qquad (2.1.15)$$

ya que:

$$|R(\tau)|\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i2\pi\nu\tau}S(\nu)|d\nu=\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)d\nu=R(0)$$

4) Si el proceso débilmente estacionario es real, entonces $R(\tau)$ es una función par de su argumento, y $S(\nu)$, por tanto, también lo es. En efecto; al ser el proceso real se tiene:

$$R(\tau)=R(t-s)=\overline{R(t,s)}=\overline{R(s,t)}=R(s,t)=R(s-t)=R(-\tau)$$

Y para la función espectral de densidad es:

$$S(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=\overline{\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{i2\pi\nu\tau}d\tau}=\overline{S(-\nu)}=S(-\nu)$$

5) Si el proceso débilmente estacionario es real, entonces:

$$R(0)-R(\tau)\geq \frac{1}{4^n}[R(0)-R(2^n\tau)] \qquad (2.1.16)$$

En efecto:

$$1-\cos\theta=2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\geq 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta=\frac{1}{4}(1-\cos 2\theta)$$

Así se tiene:

$$R(0)-R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)[1-\cos 2\pi\nu\tau]d\nu\geq \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} S(\nu)[1-\cos 4\pi\nu\tau]d\nu=$$

$$= \frac{1}{4}[R(0)-R(2\tau)]$$

ya que por 1), S(v) es no negativa, y por 4), tanto R(τ) como S(v) son funciones pares, y así es

$$S(v)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)(\cos 2\pi v\tau)d\tau \; ; \quad R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S(v)(\cos 2\pi v\tau)dv$$

Continuando el proceso, se prueba la propiedad por inducción.

Representación espectral del proceso.- Sea $\{X_t | t \in R\}$ un proceso débilmente estacionario y contínuo en m.c.. Hemos visto en el teorema de Bochner (teorema 2.1.1) que su función de covarianza queda caracterizada como la integral de Stieltjes de una exponencial compleja, respecto a la función de densidad espectral, y por tanto puede representarse como combinación lineal - positiva de sinusoides.

Así mismo, al estudiar las propiedades de R(τ),hemos considerado integrales de Fourier de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} X_t e^{-i2\pi vt} dt$$

Por tanto, mediante la fórmula de inversión, podemos expresar también X_t - como combinación lineal de sinusoides.

El problema que surge es que una tal integral no tiene por qué existir como integral en m.c., o como cualquier otro tipo de integral, por lo que no es posible obtener una representación espectral de dicho proceso, - en general.

Para subsanar este problema vamos a introducir una clase de integrales de Fourier $\{\hat{X}_\lambda | \lambda \in R\}$ de la forma siguiente:

i) $\lim_{\lambda \to -\infty} \hat{X}_\lambda = 0$ en m.c.

ii) Si a y b son puntos de continuidad de la medida espectral F, entonces

$$\hat{X}_b - \hat{X}_a = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_a^b e^{-i2\pi vt} dv\right) X_t dt \qquad (2.1.17)$$

iii) En los puntos de discontinuidad de F, $\hat{X}_\lambda$ está definido de forma que $(\hat{X}_\lambda|\lambda\in R)$ es contínuo en m.c. por la izquierda.

Dicho proceso $(\hat{X}_\lambda|\lambda\in R)$ se denomina <u>proceso espectral</u> de $(X_t|t\in R)$, y verifica que:

$$E[(\hat{X}_b-\hat{X}_a)\overline{(\hat{X}_d-\hat{X}_c)}]=F([a,b[\cap[c,d[) \qquad (2.1.18)$$

Así, si notamos

$$d\hat{X}_\lambda=\hat{X}_{\lambda+d\lambda}-\hat{X}_\lambda$$

$$F(d\lambda)=F([\lambda,\lambda+d\lambda[) \qquad (2.1.19)$$

la igualdad (2.1.18) se escribe de la forma:

$$E[(d\hat{X}_\lambda)\overline{(d\hat{X}_\mu)}]=\delta_{\lambda,\mu}F(d\lambda) \qquad (2.1.20)$$

siendo $\delta_{\lambda,\mu}$ la delta de Kronecker. Por tanto $(\hat{X}_\lambda|\lambda\in R)$ es un proceso con incrementos ortogonales.

Vamos a definir, a continuación, integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\hat{X}_\lambda$. Para ello consideraremos tres casos:

i) Si $f=I_{[a,b[}$ (función indicador de $[a,b[$ en R), definimos:

$$\int_a^b f(\lambda)d\hat{X}_\lambda=\hat{X}_b-\hat{X}_a \qquad (2.1.21)$$

ii) Si $f=\sum_{i=1}^{n}a_i f_i$, imponemos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\hat{X}_\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i\int_{-\infty}^{\infty} f_i(\lambda)d\hat{X}_\lambda \qquad (2.1.22)$$

iii) Si $\int_{-\infty}^{\infty}|f_n(\lambda)-f(\lambda)|^2F(d\lambda)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, imponemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(\lambda)d\hat{X}_\lambda=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\hat{X}_\lambda \quad \text{en m.c.} \qquad (2.1.23)$$

De esta forma, $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)d\hat{X}_\lambda$ está bién definida para toda función f para la que exista una sucesión de funciones escalonadas $(f_n)_{n\in N}$ (o sea, combinaciones lineales de funciones indicadores), verificando que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(\lambda)-f(\lambda)|^2 F(d\lambda) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad (2.1.24)$$

La clase de dichas funciones es precisamente $L_2(F)$, o sea, la clase de funciones f que verifican

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty \qquad (2.1.25)$$

El resultado fundamental sobre representación espectral de procesos es el siguiente [47]:

Teorema 2.1.2 (Teorema de representación espectral).- Un proceso contínuo en m.c. $\{X_t | t\in R\}$ es débilmente estacionario sí y solo si existe un proceso con incrementos ortogonales $\{\hat{X}_\lambda | \lambda\in R\}$ tal que $E[|\hat{X}_\lambda|^2]$ esté acotada, y sea

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\lambda t} d\hat{X}_\lambda \qquad (2.1.26)$$

Este teorema no solo permite representar el proceso $\{X_t | t\in R\}$ como combinación lineal de sinusoides, sino que también proporciona una caracterización del espacio de Hilbert H_x generado por el proceso, de la forma siguiente:

Proposición 2.1.3.- Sea $\{\hat{X}_\lambda | \lambda\in R\}$ el proceso espectral asociado a $\{X_t | t\in R\}$, y F la medida espectral. Entonces una variable aleatoria Y pertenece a H_x sí y solo si existe una función $\eta\in L_2(F)$ tal que

$$Y = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(\lambda) d\hat{X}_\lambda \qquad (2.1.27)$$

2.2. DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA PROCESOS DEBILMENTE ESTACIONARIOS.

Cuando el proceso $\{X_t | t\in[a,b]\}$ es débilmente estacionario, el procedimiento de construcción del desarrollo de Karhunen-Loève seguido en el capítulo 1, puede repetirse, obteniéndose un resultado similar.

En efecto; una vez construido el espacio de Hilbert H_x, y seleccionado el sistema ortonormal completo $(Z_n)_{n\in N}$, podemos expresar X_t en la forma

(1.2.10), donde los coeficientes $(\sigma_n)_{n\in N}$ sean, así mismo, ortogonales.

A ser la covarianza R(t,s) contínua $\forall t,s\in[a,b]$, tenemos:

$$\sup_{t,s\in[a,b]} \left|\sum_{n=o}^{N} \sigma_n(t)\overline{\sigma_n(s)}\right| \leq \sup_{t\in[a,b]} \sum_{n=o}^{N} |\sigma_n(t)|^2 \leq \sup_{t\in[a,b]} R(0)<\infty \qquad (2.2.1)$$

sin más que aplicar en primer lugar la desigualdad de Schwartz, y posteriormente la desigualdad de Bessel.

Por tanto, la convergencia de la serie $R(t-s)=\sum_{n=o}^{\infty} \sigma_n(t)\overline{\sigma_n(s)}$ es acotada, y razonando igual que para procesos de segundo orden en general, se llega a que

$$\int_a^b R(t-s)\sigma_m(s)ds=\lambda_m \sigma_m(t), \quad \forall t\in[a,b] \qquad (2.2.2)$$

es decir, las $(\sigma_n)_{n\in N}$ son las autofunciones de una ecuación integral de Fredholm de segunda especie homogénea.

Así se puede establecer un teorema de desarrollo de Karhunen-Loève análogo al visto en el caso general.

La única peculiaridad que, en principio, muestra este razonamiento para procesos débilmente estacionarios, es que la ecuación integral (2.2.2) representa un filtro lineal en tiempo invariante, con impulso de respuesta R, o sea:

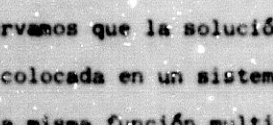
$$R*\sigma_m=\lambda_m \sigma_m, \quad \forall m\in N \qquad (2.2.3)$$

Esta consideración nos será útil seguidamente para inducir un tipo de soluciones para dichas ecuaciones integrales. No obstante, señalemos en primer lugar, que el problema de calcular los autovalores y autofunciones de ecuaciones del tipo (2.2.2) sigue en pie para casi todos los casos. Es decir, hay que recurrir a métodos indirectos para calcular sus soluciones, de igual forma a como hacíamos en los ejemplos del parágrafo 1.3, o bien a métodos aproximados, como veremos en el capítulo siguiente.

Solo hay un caso en el que la ecuación integral (2.2.2) puede resolverse directamente para autovalores y autofunciones. Se trata del caso en que la función de covarianza del proceso sea la transformada de Fourier de una función racional. Dicho caso lo estudiaremos detalladamente en el §2.5.

A continuación vamos a deducir un posible tipo de soluciones para la ecuación integral en cuestión, sobre un intervalo finito. Consideremos para ello el problema simple de filtrado lineal, de ecuación:

$$z(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)y(s)ds, \qquad \forall t\in R \qquad (2.2.4)$$



y(t)=Input (entrada)
z(t)=Output (salida)
h(τ)=Impulso de respuesta

Comparando la ecuación (2.2.4), con

$$\lambda\phi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} R(t-s)\phi(s)ds, \qquad \forall t\in R \qquad (2.2.5)$$

observamos que la solución de (2.2.5) es, simplemente, una función $\phi(t)$ -- que colocada en un sistema lineal con impulso de respuesta R, da como salida la misma función multiplicada por un factor constante.

A partir de la teoría elemental de sistemas lineales, se sabe que -- las exponenciales complejas cumplen este requisito [43], o sea:

$$\phi(t)=e^{i2\pi\nu t}, \qquad \nu\in R, \quad \forall t\in R \qquad (2.2.6)$$

Sustituyendo (2.2.6) en la ecuación (2.2.5), resulta:

$$\lambda e^{i2\pi\nu t}=\int_{-\infty}^{\infty} R(t-s)e^{i2\pi\nu s}ds \Longrightarrow \lambda=\int_{-\infty}^{\infty} R(t-s)e^{-i2\pi\nu(t-s)}ds=S(\nu) \qquad (2.2.7)$$

O sea, el autovalor correspondiente a un ν particular es la densidad espectral del proceso particularizada para dicho ν.

El inconveniente que surge es que no disponemos, en principio, de un

sistema numerable de autovalores y de autofunciones con los que establecer el desarrollo, ya que la densidad espectral toma un conjunto infinito no - numerable de valores para $\nu \in R$.

Para subsanar este problema, vamos a razonar sobre un intervalo finito cerrado, para después hacerlo crecer indefinidamente. Así consideremos la ecuación integral:

$$\lambda\phi(t)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R(t-s)\phi(s)ds, \qquad \forall t\in[-\tfrac{T}{2},\tfrac{T}{2}] \tag{2.2.8}$$

y probemos una solución de la forma:

$$\phi_n(t)=e^{i2\pi\nu_n t}, \quad \nu_n=n\nu_o, \quad \nu_o=\frac{1}{T} \tag{2.2.9}$$

Así, teniendo en cuenta (2.1.5), se tiene:

$$\lambda_n\phi_n(t)=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}R(t-s)e^{i2\pi\nu_n s}ds=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}S(\nu)e^{i2\pi\nu_n s}e^{i2\pi\nu(t-s)}d\nu ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}S(\nu)e^{i2\pi\nu t}\left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i2\pi(\nu_n-\nu)s}ds\right)d\nu=\int_{-\infty}^{\infty}S(\nu)e^{i2\pi\nu t}\left|\frac{\operatorname{sen}\pi T(\nu_n-\nu)}{\pi(\nu_n-\nu)}\right|d\nu \tag{2.2.10}$$

ya que:

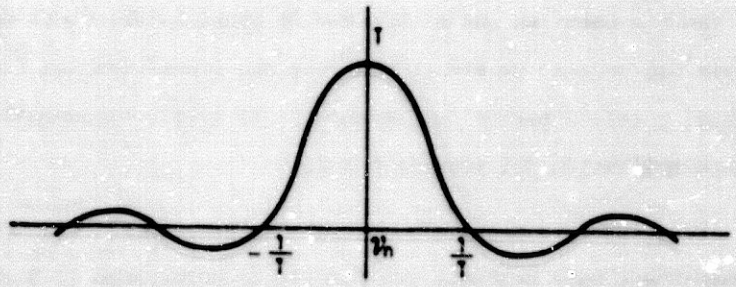
$$e^{i2\pi(\nu_n-\nu)t}=\cos[2\pi(\nu_n-\nu)t]+i\operatorname{sen}[2\pi(\nu_n-\nu)t]$$

y así:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{i2\pi(\nu_n-\nu)s}ds=\left.\frac{\operatorname{sen}[2\pi(\nu_n-\nu)s]}{2\pi(\nu_n-\nu)}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}-i\cdot\left.\frac{\cos[2\pi(\nu_n-\nu)s]}{2\pi(\nu_n-\nu)}\right|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}=$$

$$=\frac{\operatorname{sen}[\pi(\nu_n-\nu)T]}{\pi(\nu_n-\nu)} \tag{2.2.11}$$

Gráficamente, la función $\frac{\text{sen}[\pi(\nu_n-\nu)T]}{\pi(\nu_n-\nu)}$ es una sinusoide amortiguada de la forma:



Observemos que para $T\to\infty$, es $\frac{1}{T}\to 0$, y así dicha función tiende a ser un impulso en $\nu=\nu_n$. Por tanto se tiene:

$$\lambda_n\phi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\nu)e^{i2\pi\nu t}\delta(\nu-\nu_n)d\nu=S(\nu_n)e^{i2\pi\nu_n t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda_n e^{i2\pi\nu_n t}=S(\nu_n)e^{i2\pi\nu_n t} \Longrightarrow \underline{\lambda_n=S(\nu_n)=S(\frac{n}{T})} \qquad (2.2.12)$$

y las autofunciones ortonormalizadas son, por tanto:

$$\phi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i2\pi\nu_n t}\ , \quad t\in[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}] \qquad (2.2.13)$$

para T suficientemente grande.

El tamaño de T para que la aproximación sea lo más precisa posible depende de la forma como S(ν) varíe en un entorno de ν_n.

Una vez determinados λ_n y $\phi_n(t)$ mediante (2.2.12) y (2.2.13), el desarrollo de Karhunen-Loève queda establecido.

2.3. EJEMPLOS Y APLICACIONES.

I) Proceso de ORNSTEIN-UHLENBECK.- Existen otros modelos del movimiento Browniano, algo más realistas que el del proceso de Wiener. Uno de ellos es el proceso de Ornstein-Uhlenbeck que se define como un proceso normal, centrado, y débilmente estacionario, con función de covarianza:

$$R(t,s)=ke^{-\alpha|t-s|}\ , \quad k>0,\ \alpha>0 \qquad (2.3.1)$$

En este ejemplo vamos a obtener el desarrollo de Karhunen-Loève para dicho proceso, pero lo vamos a hacer por un procedimiento indirecto; o sea, nos vamos a basar en que el proceso de Ornstein-Uhlenbeck puede obtenerse a partir del proceso de Wiener mediante una transformación funcional conveniente, y así, a partir del desarrollo (1.3.11) obtendremos el buscado mediante aplicación del teorema 1.3.1.

En el ejemplo siguiente obtendremos directamente el desarrollo de Karhunen-Loève para procesos con función de covarianza (2.3.1), pero más generales que el de Ornstein-Uhlenbeck.

Proposición 2.3.1.- Sea $(Y_t|t\in R)$ un proceso normal, centrado y débilmente estacionario con covarianza $R(t,s)=e^{-|t-s|}$ (es decir, se trata del proceso de Ornstein-Uhlenbeck con parámetros k=a=1). Entonces existen dos funciones reales contínuas convenientes f(t) y g(t) tales que $(Y_t|t\in R)$ puede expresarse de la forma:

$$Y_t=f(t)X_{\frac{g(t)}{f(t)}} \qquad (2.3.2)$$

siendo $(X_t|t\geq 0)$ el proceso de Wiener.

(El hecho de considerar la covarianza $e^{-|t-s|}$, en vez de la general (2.3.1) es por simplificar el cálculo, pero este teorema puede extenderse al caso general de forma inmediata).

Demostración: Supongamos que Y_t admite una expresión de la forma (2.3.2), y calculemos explícitamente las funciones f(t) y g(t).

$$E[Y_t\bar{Y}_s]=E[f(t)X_{\frac{g(t)}{f(t)}}\overline{f(s)X_{\frac{g(s)}{f(s)}}}]=f(t)f(s)\min\{\frac{g(t)}{f(t)},\frac{g(s)}{f(s)}\}$$

Podemos suponer que $\frac{g(t)}{f(t)}$ es no decreciente. Así es

$$E[Y_t\bar{Y}_s]=f(t)f(s)\frac{g(\min(t,s))}{f(\min(t,s))}=f(\max(t,s))g(\min(t,s)) \qquad (2.3.3)$$

sin más que simplificar.

Por otra parte se tiene:

$$E[Y_t \bar{Y}_s] = e^{-|t-s|} = e^{-(\max(t,s)-\min(t,s))} = \frac{e^{-\max(t,s)}}{e^{-\min(t,s)}} \qquad (2.3.4)$$

Así igualando (2.3.3) y (2.3.4) resulta:

$$f(\max(t,s))g(\min(t,s)) = \frac{e^{-\max(t,s)}}{e^{-\min(t,s)}} \Longrightarrow \begin{cases} 1^{\circ}) f(t) = \lambda e^{-t} \mid \lambda \neq 0 \\ 2^{\circ}) f(t) = \dfrac{1}{g(t)} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{1}{[f(t)]^2} = \frac{1}{(\lambda e^{-t})^2} = \left(\frac{e^t}{\lambda}\right)^2 \Longrightarrow Y_t = \frac{\lambda}{e^t} X_{\left(\frac{e^t}{\lambda}\right)^2} \qquad (2.3.5)$$

y queda así establecida la expresión (2.3.2).

Observemos entonces, que si definimos la función

$$\tau(t) = \frac{g(t)}{f(t)} = \left(\frac{e^t}{\lambda}\right)^2 , \quad \forall t \in R \qquad (2.3.6)$$

nos hallamos bajo las hipótesis del teorema 1.3.1, ya que el proceso Y_t está ahora definido en todo R, y así la condición $\tau(0)=0$ equivale ahora a $\tau(-\infty)=0$, lo cual si se verifica claramente a partir de (2.3.6).

Por tanto, a partir del desarrollo de Karhunen-Loève para el proceso de Wiener (1.3.11) establecemos ahora el desarrollo de la forma (1.3.12):

$$Y_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(t) b_n$$

(en m.c., y uniformemente $\forall t \in R$), donde

$$a_n(t) = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{\lambda}{e^t} \sqrt{2}\, \operatorname{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi \left(\frac{e^t}{\lambda}\right)^2\right] = \sqrt{2}\, \frac{\operatorname{sen}\left[(n+\frac{1}{2})\pi \left(\frac{e^t}{\lambda}\right)^2\right]}{(n+\frac{1}{2})\pi \frac{e^t}{\lambda}} \qquad (2.3.7)$$

en m.c., y b_n está definido como en (1.3.11).

II) Señal telegráfica aleatoria.- Vamos a estudiar seguidamente el desarrollo de Karhunen-Loève de un proceso que tiene la misma covarianza que el de Ornstein-Uhlenbeck, pero que carece del carácter Gaussiano de aquel.

Consideremos un proceso $\{Y_t \mid t\in[0,T]\}$ definido de la forma:

$$Y_t=\begin{cases}1, \text{ si el número total de puntos en }]0,T[\text{ es par}\\ -1, \text{ si el número total de puntos en }]0,T[\text{ es impar}\end{cases}$$

Sabemos que la probabilidad de tener k puntos en $]0,T[$ viene dada por:

$$P(k)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{k!}$$

Así la probabilidad de tener un número par de puntos será:

$$P(0)+P(2)+\ldots+P(2k)+\ldots=e^{-\lambda t}\left[1+\frac{(\lambda t)^2}{2!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{2k}}{(2k)!}+\ldots\right]=e^{-\lambda t}Ch(\lambda t)$$

y la probabilidad de tener un número impar de puntos será:

$$P(1)+P(3)+\ldots+P(2k+1)+\ldots=e^{-\lambda t}\left[\lambda t+\frac{(\lambda t)^3}{3!}+\ldots+\frac{(\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!}+\ldots\right]=e^{-\lambda t}Sh(\lambda t)$$

Por tanto:

$$P(Y_t=1)=e^{-\lambda t}Ch(\lambda t)$$

$$P(Y_t=-1)=e^{-\lambda t}Sh(\lambda t)$$

Así es:

$$E[Y_t]=1.P(Y_t=1)-1.P(Y_t=-1)=e^{-\lambda t}Ch(\lambda t)-e^{-\lambda t}Sh(\lambda t)=$$

$$=e^{-\lambda t}[Ch(\lambda t)-Sh(\lambda t)]=e^{-\lambda t}e^{-\lambda t}=e^{-2\lambda t}.$$

Se demuestra fácilmente que [28]:

$$E[Y_t\bar{Y}_s]=e^{-2\lambda(t-s)}$$

Al proceso $\{Y_t | t\in[0,T]\}$ así definido se le denomina <u>señal telegráfica semialeatoria</u>.

Consideremos ahora una variable aleatoria A que tome los valores +1 y -1 con igual probabilidad:

$$P(A=1)=P(A=-1)=\frac{1}{2}$$

Así es:

$$E[A]=1.P(A=1)-1.P(A=-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$E[A^2]=1^2P(A=1)+(-1)^2P(A=-1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Supongamos que A es independiente de Y_t, $\forall t\in[0,T]$, y consideremos el proceso $\{X_t=AY_t | t\in[0,T]\}$. Así X_t es igual a Y_t ó a $-Y_t$, y se verifica que:

$$E[X_t]=E[AY_t]=E[A]E[Y_t]=0$$

$$R(t,s)=E[X_t\bar{X}_s]=E[(AY_t)(A\bar{Y}_s)]=E[A^2]E[Y_t\bar{Y}_s]=e^{-2\lambda(t-s)}$$

Al proceso $\{X_t | t\in[0,T]\}$ así definido se le denomina <u>señal telegráfica aleatoria</u>.

Vamos a obtener entonces, el desarrollo de Karhunen-Loève para una señal telegráfica aleatoria, o más generalmente, para un proceso con función de covarianza (2.3.1), mediante un procedimiento directo. Consideraremos, así mismo, un intervalo simétrico con objeto de simplificar el cálculo.

La ecuación integral asociada al proceso será entonces:

$$\int_{-T}^{T} ke^{-\alpha|t-s|}\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[-T,T] \qquad (2.3.8)$$

o equivalentemente:

$$k\int_{-T}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\phi(s)ds+k\int_{t}^{T} e^{\alpha(t-s)}\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[-T,T] \qquad (2.3.9)$$

Para resolver (2.3.9), derivaremos respecto a t dos veces, llegando a una ecuación diferencial con dos condiciones de contorno obtenidas a partir de las dos derivaciones efectuadas.

Derivando (2.3.9) respecto a t, se tiene:

$$-k\alpha e^{-\alpha t}\int_{-T}^{t} e^{\alpha s}\phi(s)ds+k\alpha e^{\alpha t}\int_{t}^{T} e^{-\alpha s}\phi(s)ds=\alpha\phi'(t), \quad \forall t\in[-T,T] \tag{2.3.10}$$

Derivando (2.3.10) respecto a t, se tiene:

$$\lambda\phi''(t)=k\alpha^2\int_{-T}^{T} e^{-\alpha|t-s|}\phi(s)ds-2k\alpha\phi(t)=\alpha^2\lambda\phi(t)-2k\alpha\phi(t)=$$

$$=\alpha^2(\lambda-\frac{2k}{\alpha})\phi(t) \tag{2.3.11}$$

En definitiva hemos llegado a la ecuación diferencial:

$$\phi''(t)-\frac{\alpha^2}{\lambda}(\lambda-\frac{2k}{\alpha})\phi(t)=0 \tag{2.3.12}$$

Las soluciones de (2.3.12) pueden ser de cuatro tipos según sea: $\lambda=0$; --- $0<\lambda<\frac{2k}{\alpha}$; $\lambda=\frac{2k}{\alpha}$; $\lambda>\frac{2k}{\alpha}$. Examinémoslas detenidamente.

Claramente, $\lambda=0$ no es solución de la ecuación pues, por definición,- los autovalores son no nulos (observemos además la expresión de (2.3.12) para $\lambda=0$).

Estudiemos el caso de ser $\lambda>\frac{2k}{\alpha}$.

$$\left.\begin{array}{l}\lambda>\frac{2k}{\alpha}\Longrightarrow\lambda-\frac{2k}{\alpha}>0\Longrightarrow\frac{\alpha^2}{\lambda}(\lambda-\frac{2k}{\alpha})>0\\ \lambda>\frac{2k}{\alpha}\Longrightarrow\lambda-\frac{2k}{\alpha}<\lambda\Longrightarrow\frac{\alpha^2}{\lambda}(\lambda-\frac{2k}{\alpha})<\frac{\alpha^2}{\lambda}.\lambda=\alpha^2\end{array}\right\}\Longrightarrow 0<\frac{\alpha^2}{\lambda}(\lambda-\frac{2k}{\alpha})<\alpha^2$$

Así existe un número $a^2\in]0,\alpha^2[$ tal que

$$a^2=\frac{\alpha^2}{\lambda}(\lambda-\frac{2k}{\alpha}) \tag{2.3.13}$$

y la ecuación diferencial se expresa entonces de la forma:

$$\phi''(t)-a^2\phi(t)=0 \tag{2.3.14}$$

cuya solución es conocida y es del tipo:

$$\phi(t)=c_1e^{at}+c_2e^{-at} \tag{2.3.15}$$

Sustituyendo la expresión (2.3.15) en la ecuación (2.3.9) tenemos:

$$k\int_{-T}^{t} e^{-a(t-s)}(c_1e^{as}+c_2e^{-as})ds+k\int_{t}^{T} e^{a(t-s)}(c_1e^{as}+c_2e^{-as})ds=\lambda(c_1e^{at}+c_2e^{-at})$$

Operando y agrupando convenientemente resulta:

$$k\left[c_1e^{at}\left(\frac{1}{a+a}-\frac{1}{a-a}\right)+c_2e^{-at}\left(\frac{1}{a+a}-\frac{1}{a-a}\right)+e^{-at}\left(\frac{c_2e^{(a-a)T}}{a-a}-\frac{c_1e^{-(a+a)T}}{a+a}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{at}\left(\frac{c_1e^{(a-a)T}}{a-a}-\frac{c_2e^{-(a+a)T}}{a+a}\right)\right]=\lambda c_1e^{at}+\lambda c_2e^{-at} \qquad (2.3.16)$$

Para que ambos miembros sean efectivamente iguales, los términos en e^{at} y e^{-at} han de ser nulos, o sea:

$$\frac{c_1e^{-(a+a)T}}{a+a}=\frac{c_2e^{(a-a)T}}{a-a} \Longrightarrow \frac{c_1e^{-aT}}{a+a}=\frac{c_2e^{aT}}{a-a}$$

$$\frac{c_1e^{(a-a)T}}{a-a}=\frac{c_2e^{-(a+a)T}}{a+a} \Longrightarrow \frac{c_1e^{aT}}{a-a}=\frac{c_2e^{-aT}}{a+a} \qquad (2.3.17)$$

Sumando miembro a miembro las dos últimas igualdades de (2.3.17), se tiene:

$$\frac{e^{-aT}}{a+a}(c_1+c_2)=\frac{e^{aT}}{a-a}(c_1+c_2) \qquad (2.3.18)$$

Así puede ocurrir, o bien que $c_1 \neq -c_2$, en cuyo caso a partir de (2.3.18) se tiene:

$$e^{2aT}=\frac{a-a}{a+a} \qquad (2.3.19)$$

o bien, que $c_1=-c_2$, en cuyo caso a partir de (2.3.17) se tiene:

$$e^{2aT}=-\frac{a-a}{a+a} \qquad (2.3.20)$$

Pero como $0<a^2<a^2$, claramente no pueden cumplirse ni (2.3.19) ni (2.3.20). Por tanto la ecuación integral (2.3.9) no puede verificarse para $\lambda>\frac{2k}{a}$.

De igual forma se prueba que tampoco se verifica para $\lambda = \frac{2k}{a}$.

Queda por estudiar el caso $0<\lambda< \frac{2k}{a}$.

$$0<\lambda< \frac{2k}{a} \Longrightarrow \lambda - \frac{2k}{a} <0 \Longrightarrow \frac{a^2}{\lambda}(\lambda - \frac{2k}{a})<0 \Longrightarrow -\frac{a^2}{\lambda}(\lambda - \frac{2k}{a})>0$$

Así existe un número $b^2>0$ tal que

$$b^2 = -\frac{a^2}{\lambda}(\lambda - \frac{2k}{a}) \qquad (2.3.21)$$

y la ecuación diferencial se expresa entonces de la forma:

$$\phi''(t)+b^2\phi(t)=0 \qquad (2.3.22)$$

cuya solución es conocida y es del tipo:

$$\phi(t)=c_1e^{ibt}+c_2e^{-ibt} \qquad (2.3.23)$$

Observemos que para a=ib se tiene (2.3.15). Por tanto, para que ---- (2.3.23) satisfaga la ecuación integral (2.3.8), tendrán que verificarse unas expresiones similares a (2.3.17):

$$\frac{c_1e^{-ibT}}{ib+a} = \frac{c_2e^{ibT}}{ib-a}$$

$$\frac{c_1e^{ibT}}{ib-a} = \frac{c_2e^{-ibT}}{ib+a} \qquad (2.3.24)$$

Se prueba fácilmente que para $c_1 \neq \pm c_2$, no puede verificarse (2.3.24).

Para $c_1=c_2$, las expresiones (2.3.24) se reducen a

$$e^{2ibT} = \frac{-a+ib}{a+ib}$$

de igual forma que en (2.3.19). Así operando, se tiene:

$$\cos 2bT+i\,\mathrm{sen}\,2bT = \frac{(-a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{-a^2+b^2+2iab}{a^2+b^2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{sen}\,2bT = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \\ \cos 2bT = \dfrac{-a^2+b^2}{a^2+b^2} \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2bT = \frac{2ab}{-a^2+b^2} = \frac{2\frac{a}{b}}{1-(\frac{a}{b})^2} \Rightarrow \operatorname{tg} bT = \frac{a}{b} \qquad (2.3.25)$$

De igual forma se demuestra que si $c_1 = -c_2$, entonces

$$\operatorname{tg} bT = -\frac{b}{a} \qquad (2.3.26)$$

Resumiendo, la ecuación integral (2.3.8) tiene solución solo para $0<\lambda<\frac{2k}{a}$. En tal caso los autovalores son de la forma

$$\lambda_n = \frac{2ka}{a^2+b_n^2} \quad , \quad n\in N \qquad (2.3.27)$$

ya que

$$b^2 = -\frac{a^2}{\lambda}(\lambda - \frac{2k}{a}) = -a^2 + \frac{2ka}{\lambda} \Rightarrow a^2+b^2 = \frac{2ka}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2ka}{a^2+b^2}$$

donde $(b_n)_{n\in N}$ es un sistema de soluciones de una de las dos ecuaciones (2.3.25) ó (2.3.26).

Y las autofunciones son de la forma:

$$\phi_n(t) = C_1 \cos b_n t, \quad \text{si los } b_n \text{ verifican } \operatorname{tg} b_n T = \frac{a}{b_n}, \ (c_1 = c_2)$$

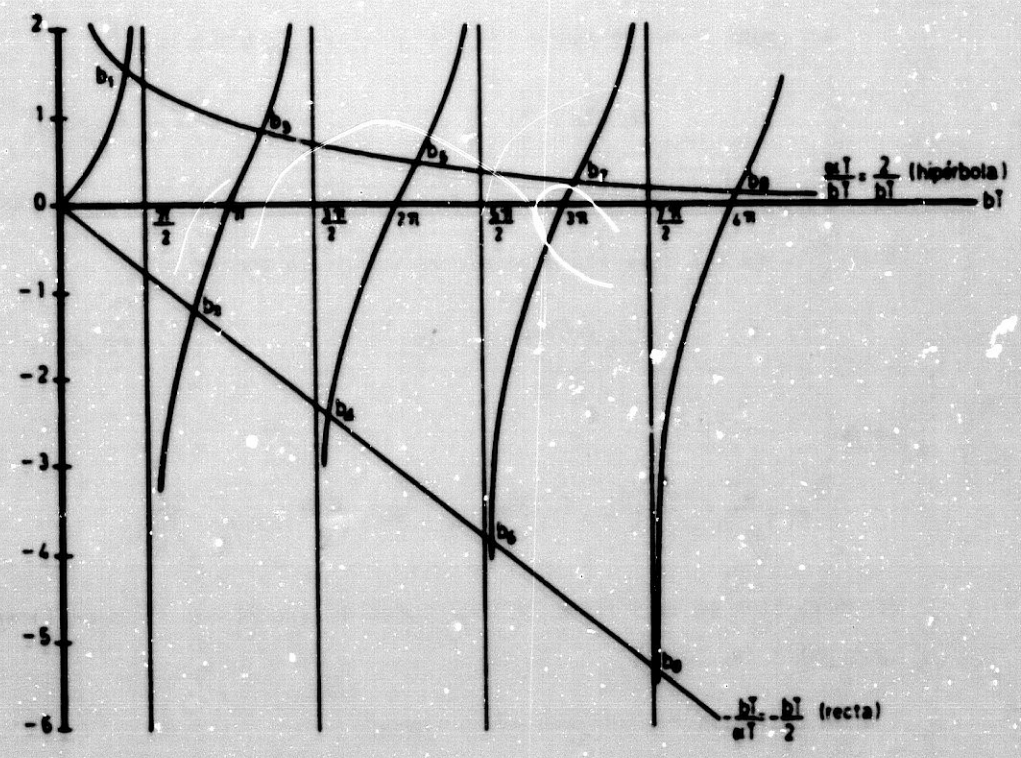
$$\phi_n(t) = C_2 \operatorname{sen} b_n t, \quad \text{si los } b_n \text{ verifican } \operatorname{tg} b_n T = -\frac{b_n}{a}, \ (c_1 = -c_2)$$

(2.3.28)

Por tanto el desarrollo de Karhunen-Loève para la señal telegráfica - aleatoria generalizada con covarianza (2.3.1), tendrá dos bloques de términos, unos serán combinaciones lineales de sinusoides, y otros combinaciones lineales de cosinusoides.

Los b_n pueden calcularse por métodos aproximados. Van Trees [43] desarrolla un procedimiento gráfico para el caso concreto de ser T=2, que consiste en combinar las expresiones (2.3.25) y (2.3.26), y hallar los puntos

de intersección de la línea tangente con $\frac{aT}{bT}$ y con $-\frac{bT}{aT}$:



Las intersecciones superiores corresponden a tg $bT = \frac{a}{b}$, y las inferiores a tg $bT = -\frac{b}{a}$.

Los autovalores son de la forma (2.3.27), y al estar ordenados los b_n de la forma: $b_1 < b_2 < \ldots$, se tendrá que $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$

Las correspondientes autofunciones serán, por tanto, de dos tipos según n sea par o impar. Así:

$$\phi_n(t)=\frac{\cos b_n T}{\sqrt{T}\left(1-\frac{\operatorname{sen} 2b_n T}{2b_n T}\right)^{1/2}}\quad,\quad \text{si } n \text{ es impar}\quad (c_1=c_2)$$

$$\phi_n(t)=\frac{\operatorname{sen} b_n T}{\sqrt{T}\left(1-\frac{\operatorname{sen} 2b_n T}{2b_n T}\right)^{1/2}}\quad,\quad \text{si } n \text{ es par}\quad (c_1=-c_2) \qquad (2.3.29)$$

Cuando T crece, los b_n decrecen monótonamente y los autovalores λ_n crecen monótonamente. Además cuando bT crece, las intersecciones superiores se aproximan a los puntos $\frac{(n-1)\pi}{2}$, con n impar, y las inferiores se aproximan a los puntos $\frac{(n-1)\pi}{2}$, con n par. Así, en tal caso se tiene:

$$\phi_n(t)=\frac{\cos\left[\frac{(n-1)\pi}{2}t\right]}{\sqrt{T}\left(1+\frac{\operatorname{sen}[(n-1)\pi T]}{(n-1)\pi T}\right)^{1/2}}\quad,\quad \text{si } n \text{ es impar}\quad (c_1=c_2)$$

$$\phi_n(t)=\frac{\operatorname{sen}\left[\frac{(n-1)\pi}{2}t\right]}{\sqrt{T}\left(1-\frac{\operatorname{sen}[(n-1)\pi T]}{(n-1)\pi T}\right)^{1/2}}\quad,\quad \text{si } n \text{ es par}\quad (c_1=-c_2) \qquad (2.3.30)$$

Por tanto, las autofunciones son asintóticamente funciones periódicas de senos y cosenos, según n sea par o impar respectivamente.

III) <u>Transmisión binaria aleatoria</u>.- Consideremos un proceso $\{Y_t \mid t\geq 0\}$ definido de la forma:

$$Y_t=\begin{cases}1, & \text{si se obtiene éxito en la n-sima prueba}\\ -1, & \text{si se obtiene fracaso en la n-sima prueba}\end{cases}$$

siendo $n-1<t<n$.

A partir de él, definamos otro proceso $\{X_t=Y_{t-e} \mid t\geq 0\}$ donde "e" es una

variable aleatoria uniformemente distribuida en $]0,1[$, independiente de Y_t, $\forall t \geq 0$. A dicho proceso se le denomina <u>transmisión binaria aleatoria.</u> Es un proceso centrado, y su función de covarianza viene dada por [28]:

$$R(t,s) = \begin{cases} 1-|t-s| & , \text{ si } 0 \leq |t-s| \leq 1 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad (2.3.31)$$

Calculemos el desarrollo de Karhunen-Loève para el proceso transmisión binaria aleatoria, pero con espacio paramétrico $[0,\frac{1}{2}]$; (el objeto de considerar dicho intervalo es para simplificar las condiciones de contorno que posteriormente aplicaremos). Se trata, por tanto, de resolver la ecuación integral

$$\int_0^{1/2} R(t,s)\phi(s)ds = \lambda\phi(t), \quad \forall t \in [0,\tfrac{1}{2}]$$

o equivalentemente

$$\int_0^t (1-t+s)\phi(s)ds + \int_t^{1/2} (1-s+t)\phi(s)ds = \lambda\phi(t), \quad \forall t \in [0,\tfrac{1}{2}] \qquad (2.3.32)$$

Derivando (2.3.32) respecto a t, tenemos:

$$-\int_0^t \phi(s)ds + \int_t^{1/2} \phi(s)ds = \lambda\phi'(t), \quad \forall t \in [0,\tfrac{1}{2}] \qquad (2.3.33)$$

Derivando (2.3.33) respecto a t, tenemos:

$$\lambda\phi''(t) = -\phi(t) + [-\phi(t)] = -2\phi(t), \quad \forall t \in [0,\tfrac{1}{2}] \qquad (2.3.34)$$

A partir de (2.3.33) se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} t=0 \Longrightarrow \int_0^{1/2} \phi(s)ds = \lambda\phi'(0) \\ t=\frac{1}{2} \Longrightarrow -\int_0^{1/2} \phi(s)ds = \lambda\phi'(\frac{1}{2}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \phi'(0) = -\phi'(\tfrac{1}{2}) \qquad (2.3.35)$$

A partir de (2.3.32) se tiene:

$$t=0 \Longrightarrow \int_0^{1/2}(1-s)\phi(s)ds=\lambda\phi(0) \Longrightarrow \int_0^{1/2}\phi(s)ds-\int_0^{1/2}s\phi(s)ds=\lambda\phi(0)$$

$$t=\frac{1}{2} \Longrightarrow \int_0^{1/2}(\frac{1}{2}+s)\phi(s)ds=\lambda\phi(\frac{1}{2}) \Longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\phi(s)ds+\int_0^{1/2}s\phi(s)ds=\lambda\phi(\frac{1}{2})$$

$$\Longrightarrow \frac{3}{2}\int_0^{1/2}\phi(s)ds=\lambda[\phi(0)+\phi(\frac{1}{2})] \Longrightarrow \frac{3}{2}\lambda\phi'(0)=\lambda[\phi(0)+\phi(\frac{1}{2})] \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \phi(0)+\phi(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\phi'(0) \qquad (2.3.36)$$

Se trata, por tanto, de integrar la ecuación diferencial (2.3.34), con las condiciones de contorno (2.3.35) y (2.3.36). La solución general de (2.3.34) es de la forma:

$$\phi(t)=c_1\cos(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}t)+c_2\operatorname{sen}(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}t) \qquad (2.3.37)$$

Así

$$\phi'(t)=-c_1\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\operatorname{sen}(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}t)+c_2\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\cos(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}t)$$

Aplicando entonces la condición (2.3.35), se tiene:

$$-\sqrt{\frac{2}{\lambda}}c_2=-\sqrt{\frac{2}{\lambda}}c_1\operatorname{sen}(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}.\frac{1}{2})+\sqrt{\frac{2}{\lambda}}c_2\cos(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}.\frac{1}{2}) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow c_1\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda}})=c_2[1+\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda}})] \Longrightarrow c_1=c_2\frac{1+\cos(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda}})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda}})}$$

Así (2.3.37) puede escribirse de la forma:

$$\phi(t)=C\cos[\sqrt{\frac{2}{\lambda}}(\frac{1}{4}-t)] \qquad (2.3.38)$$

siendo $C=2c_1\dfrac{\cos(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\lambda}})}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda}})}$, como puede probarse sin más que sustituir y operar convenientemente.

Aplicando ahora la condición (2.3.36) se tiene:

$$\left.\begin{aligned}\phi(0)&=C\cos\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)\\ \phi\left(\tfrac{1}{2}\right)&=C\cos\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)=C\cos\left(-\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)=C\cos\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)\\ \phi'(0)&=\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\,C\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2C\cos\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)=\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\,C\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)\Longrightarrow \mathrm{cotg}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)=\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}$$

Por tanto los autovalores vienen dados por la ecuación:

$$\mathrm{cotg}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}\right)_n=\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}_n\,,\quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad (2.3.39)$$

y las autofunciones ya normalizadas por:

$$\phi_n(t)=2\cos\left[\sqrt{\tfrac{2}{\lambda}}_n\left(t-\tfrac{1}{4}\right)\right],\quad \forall n\in\mathbb{N} \qquad (2.3.40)$$

Observemos que la ecuación (2.3.39) puede escribirse de la forma:

$\mathrm{cotg}x=3x$, siendo $x=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\lambda_n}}$. Dicha ecuación trascendente puede resolverse numéricamente mediante diversos métodos aproximados: Bisección, Whittaker, regula-falsi,... [20].

IV) Procesos de ruido blanco.- Un proceso débilmente estacionario se dice que es un ruido blanco si su densidad espectral es constante:

$$S(\nu)=S_o\,,\quad \forall \nu\in\mathbb{R}$$

Por tanto su función de covarianza es de la forma:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S_o e^{i2\pi\nu\tau}d\nu=S_o\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi\nu\tau}d\nu=S_o\,\delta(\tau)$$

siendo $\delta(\tau)=\delta(t-s)$ la función salto de Dirac.

En realidad un ruido blanco no puede ser nunca un proceso físico ya que

$$R(0)=\int_{-\infty}^{\infty} S_o\, d\nu=\infty$$

Sin embargo muchos procesos pueden aproximarse bastante bien mediante un - ruido blanco [29], de ahí su importancia matemática.

Una forma de obtener un ruido blanco, es derivando el proceso de Wiener [28]. Esta caracterización es de gran utilidad práctica, y basándonos en ella vamos a obtener el desarrollo de Karhunen-Loève para un proceso de ruido blanco.

Como sabemos, el desarrollo de Karhunen-Loève del proceso de Wiener en el intervalo [0,T] viene dado por:

$$X_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{T}{(n+\frac{1}{2})\pi}\sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]b_n$$

$$b_n = \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{T}\sqrt{\frac{2}{T}}\int_o^T \mathrm{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]X_t\,dt \qquad (2.3.41)$$

siendo ambas igualdades en m.c., y el límite uniforme en [0,T]. Además se verifica que

$$E[b_n\overline{b_m}]=\delta_{n,m}$$

Notemos $X_{t,N}$ al desarrollo truncado:

$$X_{t,N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{T}{(n+\frac{1}{2})\pi}\sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]b_n, \text{ en m.c.} \qquad (2.3.42)$$

Derivando respecto a t, tenemos:

$$X'_{t,N} = \sum_{n=0}^{N} \frac{T}{(n+\frac{1}{2})\pi}\sqrt{\frac{2}{T}}(n+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{T}\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]b_n =$$

$$=\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{n=0}^{N}\cos\left[(n+\tfrac{1}{2})\pi\frac{t}{T}\right]b_n \text{ , en m.c.} \qquad (2.3.43)$$

Observemos que

$$E[X'_{t,N}\overline{X'_{s,N}}]=\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\sqrt{\frac{2}{T}}\sqrt{\frac{2}{T}}\cos[(n+\frac{1}{2})\pi\frac{t}{T}]\cos[(m+\frac{1}{2})\pi\frac{s}{T}]E[b_n\overline{b_m}]=$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\frac{2}{T}\cos[(n+\frac{1}{2})\pi\frac{t}{T}]\cos[(n+\frac{1}{2})\pi\frac{s}{T}] \qquad (2.3.44)$$

y efectivamente (2.3.44) es la derivada parcial segunda respecto a "s" y "t" de la covarianza del proceso de Wiener expresada según el teorema de Mercer, y truncada en el N-simo término.

Por tanto el desarrollo de Karhunen-Loève del proceso derivado X'_t viene dado por:

$$X'_t=\lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{2}{T}}\sum_{n=0}^{N}\cos[(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{T}t]b_n \qquad (2.3.45)$$

en m.c., y uniformemente $\forall t\in[0,T]$, donde las variables aleatorias b_n están definidas como en (2.3.41).

Sin embargo la función de covarianza del ruido blanco, es:

$$R(t,s)=\frac{\partial^2[\min(t,s)]}{\partial t\partial s}=\delta(t-s) \qquad (2.3.46)$$

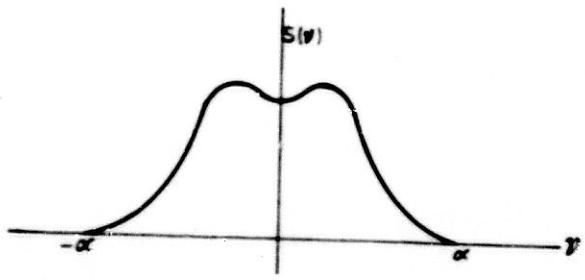
y así su ecuación integral asociada

$$\int_0^T\delta(t-s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \qquad \forall t\in[0,T] \qquad (2.3.47)$$

se satisface para cualquier $\phi(t)$ asociada al autovalor $\lambda=1$.

Por tanto, cualquier sistema ortonormal completo de funciones puede ser utilizado para desarrollar el proceso. La no unicidad en m.c. del desarrollo de Karhunen-Loève para el ruido blanco, es debida a que la función δ de Dirac no es cuadrado-integrable.

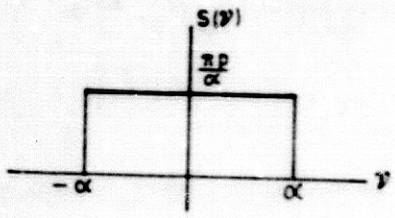
V) Procesos paso-bajo.- Un proceso débilmente estacionario y contínuo en m.c. se dice que es paso-bajo si su densidad espectral S(v) es nula fuera de una determinada banda $-a\leq v\leq a$.



Tales procesos pueden obtenerse haciendo pasar un ruido blanco a través de un filtro conveniente, y admiten claramente una representación espectral de la forma

$$X_t = \int_{-a}^{a} e^{i2\pi\nu t}\, d\hat{X}_\nu .$$

Un ejemplo simple de proceso paso-bajo es aquel cuya densidad espectral viene dada por:



$$S(\nu) = \begin{cases} \frac{\pi P}{a} , & \text{si } |\nu| \leq a \\ 0 , & \text{si } |\nu| > a \end{cases} \qquad (2.3.48)$$

Su función de covarianza será, por tanto:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu t}\, d\nu = \int_{-a}^{a} \frac{\pi P}{a} e^{i2\pi\nu t}\, d\nu = P \frac{\operatorname{sen} 2\pi a t}{a t} \qquad (2.3.49)$$

y la ecuación integral asociada al proceso paso-bajo $\{X_t \mid t\in[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]\}$ será:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} P \frac{\operatorname{sen}[2\pi a(t-s)]}{a(t-s)} \phi(s)\, ds = \lambda\phi(t), \quad \forall t\in[-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}] \qquad (2.3.50)$$

o bien, haciendo el cambio $2\pi a = \gamma$, será:

$$2\pi P \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{\operatorname{sen}[\gamma(t-s)]}{\gamma(t-s)} \phi(s)\, ds = \lambda\phi(t), \quad \forall t\in[-\tfrac{T}{2}, \tfrac{T}{2}] \qquad (2.3.51)$$

Procediendo como en ocasiones anteriores, o sea, derivando dos veces

respecto a t y operando, se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden de la forma [43]:

$$(1-t^2)f''(t)-2tf'(t)+(\mu-c^2t^2)f(t)=0, \quad -1<t<1 \qquad (2.3.52)$$

siendo $c=\frac{\gamma T}{2}=\pi\sigma T$, y $\mu=k\frac{\lambda}{2\pi}$.

La ecuación (2.3.52) tiene solución para determinados valores de μ a los que se les denomina <u>funciones de onda esferoidales</u>, y se notan $S_{on}(c,t)$. Dichas funciones satisfacen la ecuación integral:

$$2[R_{on}^{(1)}(c,1)]S_{on}(c,t)=\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sen}[c(t-s)]}{c(t-s)}S_{on}(c,s)ds, \quad \forall t\in[-1,1]$$

o bien, realizando un cambio de variable:

$$2\pi PT[R_{on}^{(1)}(\tfrac{\gamma T}{2},1)]^2S_{on}(\tfrac{\gamma T}{2},\tfrac{2t}{T})=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\frac{2\pi P\operatorname{sen}[\gamma(t-s)]}{\gamma(t-s)}S_{on}(\tfrac{\gamma T}{2},\tfrac{2s}{T})ds$$

$$\forall t\in[-\tfrac{T}{2},\tfrac{T}{2}]$$

donde las funciones $R_{on}^{(1)}(\frac{\gamma T}{2},1)$ se denominan <u>funciones de onda esferoidales radiales</u>. Por tanto, los autovalores son de la forma:

$$\lambda_n=2\pi PT[R_{on}^{(1)}(\tfrac{\gamma T}{2},1)]^2, \quad n\in\mathbb{N}$$

Las funciones de onda esferoidales están tabuladas en función de los valores de c [28], [43]. De dichas tablas pueden deducirse las autofunciones y autovalores buscados.

VI) <u>Proceso de covarianza $\cos[2\pi(t-s)]$</u>.- Estudiemos finalmente el desarrollo de Karhunen-Loève de un proceso débilmente estacionario con función de covarianza

$$R(t,s)=\cos[2\pi(t-s)] \qquad (2.3.53)$$

El procedimiento que vamos a seguir será, como en ejemplos anteriores, reducir la ecuación integral asociada al proceso en cuestión, a un problema

de contorno mediante derivaciones sucesivas. Pero previamente vamos a deducir el número de términos que va a tener su desarrollo de Karhunen-Loève, basándonos en las propiedades estructurales del espacio H_x asociado al proceso, definido en el §1.1.

Concretamente vamos a demostrar que el espacio H_x asociado al proceso de covarianza (2.3.53) es bidimensional, y así todo desarrollo en términos de una base ortonormal completa de H_x, tendrá solo dos términos.

En efecto; probemos que $\{X_o, X_{1/4}\}$ es una base ortonormal de H_x:

$$E[X_o \bar{X}_{1/4}]=R(0,\tfrac{1}{4})=R(\tfrac{-1}{4})=\cos(\tfrac{-2\pi}{4})=\cos(\tfrac{-\pi}{2})=0$$

$$E[|X_o|^2]=R(0,0)=R(0)=\cos 0=1$$

$$E[|X_{1/4}|^2]=R(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})=R(0)=\cos 0=1$$

Luego efectivamente es una base ortonormal.

Probemos que, además, es completa:

$$E[|X_t-X_o\cos 2\pi t-X_{1/4}\operatorname{sen}2\pi t|^2]=R(t,t)-R(t,0)\cos 2\pi t-R(t,\tfrac{1}{4})\operatorname{sen}2\pi t-$$

$$-R(0,t)\cos 2\pi t-R(0,0)\cos^2 2\pi t+R(0,\tfrac{1}{4})\cos 2\pi t\operatorname{sen}2\pi t-$$

$$-R(\tfrac{1}{4},t)\operatorname{sen}2\pi t+R(\tfrac{1}{4},0)\operatorname{sen}2\pi t\cos 2\pi t+R(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4})\operatorname{sen}^2 2\pi t=$$

$$=1-\cos^2 2\pi t-\operatorname{sen}2\pi t\cos[(t-\tfrac{1}{4})2\pi]-\cos^2 2\pi t+\cos^2 2\pi t-$$

$$-\operatorname{sen}2\pi t\cos[2\pi(t-\tfrac{1}{4})]+\operatorname{sen}^2 2\pi t=2\operatorname{sen}^2 2\pi t-2\operatorname{sen}2\pi t\cos[2\pi(t-\tfrac{1}{4})]=$$

$$=2\operatorname{sen}2\pi t(\operatorname{sen}2\pi t-\cos[2\pi(t-\tfrac{1}{4})])=2\operatorname{sen}2\pi t(\operatorname{sen}2\pi t-\operatorname{sen}2\pi t)=0$$

Por tanto se verifica que:

$$X_t=X_o\cos 2\pi t+X_{1/4}\operatorname{sen}2\pi t \qquad \text{en m.c.}$$

y la familia $\{X_o, X_{1/4}\}$ es completa en H_x, según razonábamos en el §1.2.

Los autovalores y autofunciones dependen del intervalo [0,T] considerado.

Supongamos que T∈N, y consideremos la ecuación

$$\int_0^T \cos[2\pi(t-s)]\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[0,T] \tag{2.3.54}$$

Derivando (2.3.54) respecto a t, tenemos

$$-2\pi\int_0^T \operatorname{sen}[2\pi(t-s)]\phi(s)ds=\lambda\phi'(t), \quad \forall t\in[0,T] \tag{2.3.55}$$

Derivando (2.3.55) respecto a t, tenemos

$$-4\pi^2\int_0^T \cos[2\pi(t-s)]\phi(s)ds=\lambda\phi''(t), \quad \forall t\in[0,T] \tag{2.3.56}$$

A partir de (2.3.54) y (2.3.56) se tiene

$$-4\pi^2\lambda\phi(t)=\lambda\phi''(t) \Longrightarrow \phi''(t)+4\pi^2\phi(t)=0 \tag{2.3.57}$$

Operando y normalizando se obtienen como autofunciones

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i2\pi t}, \frac{1}{\sqrt{T}}e^{-i2\pi t}\right\}$$

o equivalentemente

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{T}}\cos 2\pi t, \frac{2}{\sqrt{T}}\operatorname{sen}2\pi t\right\}$$

Si T∉N, entonces las autofunciones serán combinaciones lineales de -- sen2πt y cos2πt.

2.4. PARTICULARIZACION A PROCESOS PERIODICOS.

Sea $\{X_t \mid t\in R\}$ un proceso débilmente estacionario y contínuo en m.c. con función de covarianza $R(\tau)=R(t-s)$. Se dice que dicho proceso es <u>periódico en m.c.</u> si

$$R(\tau+T)=R(\tau), \quad \forall \tau\in R \tag{2.4.1}$$

Al menor número T que verifica (2.4.1) se le denomina <u>periodo</u> del proceso.

Si la función de covarianza es periódica, admite un desarrollo en serie de Fourier de la forma:

$$R(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{\frac{i2\pi n\tau}{T}}$$

$$R_n=\frac{1}{T}\int_0^T R(\tau)e^{-\frac{i2\pi n\tau}{T}}d\tau \qquad (2.4.2)$$

Así el proceso también puede representarse como suma de exponenciales complejas con coeficientes aleatorios, de la forma:

$$X_t=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} Z_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}}\ ,\ \text{en m.c.}$$

$$Z_n=\frac{1}{T}\int_0^T X_t e^{-\frac{i2\pi nt}{T}}dt,\ \text{en m.c.} \qquad (2.4.3)$$

donde los coeficientes $\{Z_n\}_{n\in N}$ son ortogonales ya que

$$E[Z_m\bar{Z}_n]=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E[X_t\bar{X}_s]e^{-\frac{i2\pi(mt-ns)}{T}}dtds=$$

$$=\frac{1}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_k\int_0^T\int_0^T e^{\frac{i2\pi k(t-s)}{T}}e^{-\frac{i2\pi(mt-ns)}{T}}dtds=$$

$$=\frac{1}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_k\int_0^T\int_0^T e^{\frac{i2\pi(k-m)t}{T}}e^{\frac{i2\pi(n-k)s}{T}}dtds$$

sin mas que aplicar (2.4.2). Pero se tiene que

$$\int_0^T e^{\frac{i2\pi(k-m)t}{T}}dt=\frac{T}{2\pi(k-m)}[\operatorname{sen}2\pi(k-m)+i(1-\cos 2\pi(k-m))]=$$

$$=\left\{\begin{array}{ll}0\ , & \text{si}\quad k\neq m\\ T\ , & \text{si}\quad k=m\end{array}\right\}=T\delta_{k,m} \qquad (2.4.4)$$

Y análogamente

$$\int_0^T e^{\frac{i2\pi(n-k)s}{T}}\,ds = T\delta_{n,k} \qquad (2.4.5)$$

Por tanto,

$$E[Z_m\bar{Z}_n]=\frac{1}{T^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_kT\delta_{k,m}T\delta_{n,k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_k\delta_{km}\delta_{nk}=R_n\delta_{m,n} \qquad (2.4.6)$$

Para probar (2.4.3) se empieza demostrando que

$$E[X_t\bar{Z}_n]=R_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}}$$

$$E[Z_m\bar{X}_t]=\bar{R}_m e^{-\frac{i2\pi mt}{T}}$$

de forma análoga a la realizada anteriormente. Así es

$$E[|X_t-\sum_{n=-N}^{N}Z_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}}|^2]=E[(X_t-\sum_{m=-N}^{N}Z_m e^{\frac{i2\pi mt}{T}})(\bar{X}_t-\sum_{n=-N}^{N}\bar{Z}_n e^{-\frac{i2\pi nt}{T}})]=$$

$$=E[X_t\bar{X}_t]-\sum_{n=-N}^{N}E[X_t\bar{Z}_n]e^{-\frac{i2\pi nt}{T}}-\sum_{m=-N}^{N}E[Z_m\bar{X}_t]e^{\frac{i2\pi mt}{T}}+$$

$$+\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N}E[Z_m\bar{Z}_n]e^{\frac{i2\pi(m-n)t}{T}}=$$

$$=R(0)-\sum_{n=-N}^{N}R_n-\sum_{m=-N}^{N}\bar{R}_m+\sum_{n=-N}^{N}R_n=R(0)-\sum_{m=-N}^{N}\bar{R}_m$$

Por tanto

$$\lim_{N\to\infty}E[|X_t-\sum_{n=-N}^{N}Z_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}}|^2]=R(0)-\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{R}_m=0$$

ya que

$$R(0)=\overline{R(0)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\bar{R}_m$$

y se concluye.

En definitiva (2.4.3) es un desarrollo ortogonal del proceso periódico con coeficientes aleatorios también ortogonales.

Vamos a demostrar seguidamente, que dicho desarrollo es del tipo Karhunen-Loève. Para ello hay que probar que las funciones

$$e^{\frac{i2\pi nt}{T}}$$

son las autofunciones de una ecuación integral con núcleo la función de covarianza R(τ) del proceso. Es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \int_o^T e^{\frac{i2\pi n(t-s)}{T}} \phi(s)ds=\lambda\phi(t), \qquad \forall t\in[0,T] \qquad (2.4.7)$$

Ensayemos en (2.4.4) la solución $\phi_m(t)=e^{\frac{i2\pi mt}{T}}$:

$$\lambda_m e^{\frac{i2\pi mt}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \int_o^T e^{\frac{i2\pi n(t-s)}{T}} e^{\frac{i2\pi ms}{T}} ds= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}} \int_o^T e^{\frac{i2\pi(m-n)s}{T}} ds=$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{\frac{i2\pi nt}{T}} T\delta_{m,n} = R_m e^{\frac{i2\pi mt}{T}} T$$

sin más que aplicar (2.4.4). Así se tiene que los autovalores son de la -- forma:

$$\lambda_m = R_m T \qquad (2.4.8)$$

Por tanto (2.4.3) es un desarrollo de Karhunen-Loève.

Con objeto de expresar dicho desarrollo en la forma estandard (1.2.23), podemos considerar que un proceso periódico $\{X_t \mid t\in[0,T]\}$ con función de covarianza (2.4.2) tiene asociada una ecuación integral del tipo (2.4.7), cuyos autovalores son los coeficientes del desarrollo de R(τ) multiplicados por - el periodo T, o sea, son de la forma (2.4.8), y cuyas autofunciones ortonormalizadas son exponenciales complejas de la forma:

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\frac{i2\pi nt}{T}} \qquad (2.4.9)$$

que, como sabemos, constituyen un sistema completo.

Sobre los procesos periódicos cabe destacar que su densidad espectral viene dada por:

$$S(\nu) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n \delta(\nu - \frac{2\pi n}{T})$$

ya que la transformada de Fourier de $e^{\frac{i2\pi nt}{T}}$ es $2\pi\delta(\nu - \frac{2\pi n}{T})$.

2.5. SOLUCION EN EL CASO DE ESPECTRO RACIONAL.

Como sabemos, una de las principales dificultades para obtener el desarrollo explícito de Karhunen-Loève de un proceso de segundo orden y contínuo en m.c., estriba en la dificultad de obtener los autovalores y autofunciones de la ecuación integral asociada al proceso, ya que solo en un número muy limitado de casos es posible calcularlos.

Para procesos débilmente estacionarios en general, dicho problema continua en pie. Sin embargo, dentro de ellos existe un caso especial de gran importancia práctica, tal que siempre puede resolverse directamente su ecuación integral asociada. Se trata del caso en que la densidad espectral del proceso es cociente de dos polinomios en $(i2\pi\nu)^2$, y así su covarianza es la tranformada de Fourier de una tal función racional. La resolución del problema en tal caso puede sintetizarse de la forma siguiente:

Teorema 2.5.1.- Sea $\{X_t | t\in[a,b]\}$ un proceso débilmente estacionario y contínuo en m.c. cuya función de covarianza puede expresarse de la forma

$$R(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k (2\pi i\nu)^{2k}}{\sum_{k=0}^{d} a_k (2\pi i\nu)^{2k}} e^{i2\pi\nu(t-s)} d\nu, \quad n<d$$

(2.5.1)

Entonces la ecuación integral

$$\int_a^b R(t,s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \qquad \forall t\in[a,b] \tag{2.5.2}$$

satisface una ecuación diferencial homogénea de la forma:

$$\lambda\sum_{k=o}^{d} a_k \phi^{2k)}(t)=\sum_{k=o}^{n} b_k \phi^{2k)}(t) \tag{2.5.3}$$

Demostración: Derivando 2k veces (2.5.1) respecto a t, tenemos:

$$\frac{\partial^{2k}R(t,s)}{\partial t^{2k}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{k=o}^{n} b_k (2\pi iv)^{2k}}{\sum_{k=o}^{d} a_k (2\pi iv)^{2k}}(2\pi iv)^{2k} e^{i2\pi v(t-s)}dv, \quad k=0,1,\ldots,d \tag{2.5.4}$$

Multiplicando (2.5.4) por a_k, para k=0,1,...,d respectivamente, y sumando todas las expresiones obtenidas resulta:

$$\sum_{k=o}^{d} a_k \frac{\partial^{2k}R(t,s)}{\partial t^{2k}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sum_{k=o}^{n} b_k (2\pi iv)^{2k}}{\sum_{k=o}^{d} a_k (2\pi iv)^{2k}}\left[\sum_{k=o}^{d} a_k (2\pi iv)^{2k}\right]e^{i2\pi v(t-s)}dv=$$

$$=\sum_{k=o}^{n} b_k \int_{-\infty}^{\infty}(2\pi iv)^{2k} e^{i2\pi v(t-s)}dv=\sum_{k=o}^{n} b_k \frac{\partial^{2k}}{\partial t^{2k}}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi v(t-s)}dv\right]=$$

$$=\sum_{k=o}^{n} b_k \frac{\partial^{2k}}{\partial t^{2k}}\delta(t-s) \tag{2.5.5}$$

Por otra parte, a partir de la ecuación (2.5.2) se tiene:

$$\int_a^b \frac{\partial^{2k}R(t,s)}{\partial t^{2k}}\phi(s)ds=\lambda\frac{\partial^{2k}\phi(t)}{\partial t^{2k}}, \quad k=0,1,\ldots,d \tag{2.5.6}$$

Multiplicando (2.5.6) por a_k, para k=0.1....,d respectivamente, y sumando todas las expresiones obtenidas resulta:

$$\lambda\sum_{k=o}^{d} a_k \frac{\partial^{2k}\phi(t)}{\partial t^{2k}}=\sum_{k=o}^{d} a_k \int_a^b \frac{\partial^{2k}R(t,s)}{\partial t^{2k}}\phi(s)ds=\int_a^b\left[\sum_{k=o}^{d} a_k \frac{\partial^{2k}R(t,s)}{\partial t^{2k}}\right]\phi(s)ds \tag{2.5.7}$$

Pero en virtud de (2.5.5) podemos escribir:

$$\lambda\sum_{k=0}^{d} a_k \phi^{(2k)}(t)=\int_a^b\left[\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{\partial^{2k}\delta(t-s)}{\partial t^{2k}}\right]\phi(s)ds=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{\partial^{2k}}{\partial t^{2k}}\left[\int_a^b \delta(t-s)\phi(s)ds\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n} b_k \phi^{(2k)}(t) \quad , \quad a<t<b.$$

con lo que se obtiene (2.5.3) y se concluye.

Si notamos $P=2\pi iv$, y llamamos:

$$N(P^2)=\sum_{k=0}^{n} b_k P^{2k} \quad , \quad D(P^2)=\sum_{k=0}^{d} a_k P^{2k} \qquad (2.5.8)$$

el teorema 2.5.1 puede enunciarse diciendo que si la función de covarianza admite una expresión de la forma:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(P^2)}{D(P^2)} e^{P\tau} dv \qquad (2.5.9)$$

entonces los autovalores y autofunciones de la ecuación integral (2.5.2) verifican la ecuación diferencial homogénea

$$\lambda D\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\phi(t)=N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\phi(t) \quad , \quad a<t<b \qquad (2.5.10)$$

donde los operadores $D\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)$ y $N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)$ están definidos por:

$$D\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)=\sum_{k=0}^{d} a_k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \quad , \quad N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \qquad (2.5.11)$$

Observemos que en el ejemplo II del §2.3 estamos bajo las hipótesis del teorema 2.5.1 ya que la función de covarianza del proceso señal telegráfica aleatoria es la transformada de Fourier de una función racional. En efecto

$$S(v)=\int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i2\pi v\tau} d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-a|\tau|}e^{-i2\pi v\tau} dv=$$

$$=k\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau+k\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau}e^{-i2\pi\nu\tau}d\tau=$$

$$=k\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-i2\pi\nu)\tau}d\tau+k\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+i2\pi\nu)\tau}d\tau=\frac{2k\alpha}{\alpha^2+(2\pi\nu)^2} \qquad (2.5.12)$$

Una de las principales aplicaciones del teorema 2.5.1 se tiene al estudiar problemas de predicción y optimización. En líneas generales, el problema de optimización para una señal s(t) y un ruido n(t), ambos de duración finita, que atraviesan un filtro, consiste en hallar una función h(t) que minimice

$$E[(s(t+\eta)-\hat{s}(t+\eta))^2]$$

siendo

$$\hat{s}(t+\eta)=\int_{t-T}^{t}h(t-u)y(u)du=\int_{0}^{T}h(\alpha)y(t-\alpha)d\alpha \qquad (2.5.13)$$

donde $y(t)=s(t)+n(t)$.

Para resolverlo se puede seguir un procedimiento formal de minimización, o bien imponer que, para que $\hat{s}(t+\eta)$ sea el mejor estimador en el sentido de mínimos cuadrados, el error debe estar incorrelado con y(α), $\forall u\in[t-T,t]$, o sea [47]:

$$E[(s(t+\eta)-\hat{s}(t+\eta))y(u)]=0\ ,\quad \forall u\in[t-T,t] \qquad (2.5.14)$$

Así sustituyendo (2.5.13) en (2.5.14) tenemos:

$$0=E[(s(t+\eta)-\hat{s}(t+\eta))y(u)]=E[(s(t+\eta)-\int_{0}^{T}h(\alpha)y(t-\alpha)d\alpha)y(u)]=$$

$$=E[s(t+\eta)y(u)]-\int_{0}^{T}h(\alpha)E[y(t-\alpha)y(u)]d\alpha$$

Por tanto, despejando:

$$\int_{0}^{T}R_y(t-u-\alpha)h(\alpha)d\alpha=E[s(t+\eta)y(u)] \qquad (2.5.15)$$

Notando t-u=v, y $E[s(t+\eta)y(u)]=z(v)$, la ecuación (2.5.15) se expresa

de la forma:

$$\int_0^T R_y(v-a)h(a)da=z(v) \qquad (2.5.16)$$

que ya es del tipo (2.5.2) estudiado.

Volviendo al significado del teorema 2.5.1, observemos que según él, cualquier solución de la ecuación integral (2.5.2) debe satisfacer la --- ecuación diferencial homogénea (2.5.10). Pero la solución general de (2.5.10) contiene al parámetro λ y además 2d constantes indeterminadas $c_1, c_2, \ldots, c_{2d}$, o sea, es de la forma:

$$\phi(t)=\sum_{k=1}^{2d} c_k \phi_{h_k}(t,\lambda) \qquad (2.5.17)$$

Para calcular λ y ver si cualquier elección de dichas constantes nos proporciona una solución de la ecuación integral (2.5.2), tenemos que sustituir en ella la solución general (2.5.17). Procediendo así, se demuestra, como posteriormente veremos, que para que una determinada elección de las constantes proporcione una solución de (2.5.2), es condición necesaria y - suficiente que se verifiquen ciertas condiciones de contorno. Además la --- ecuación integral (2.5.2) se satisface solo para un conjunto discreto de - valores de λ.

En el estudio que haremos nos centraremos en una ecuación integral -- más general que (2.5.2), de la forma:

$$\int_a^b R(t-s)x(s)ds=y(t), \quad \forall t\in[a,b] \qquad (2.5.18)$$

cuya covarianza o núcleo sea real.

El proceso a seguir será estudiar una condición necesaria y suficiente para que la solución de la ecuación diferencial

$$N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)x(t)=D\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)y(t), \quad a<t<b \qquad (2.5.19)$$

(que puede obtenerse mediante un proceso análogo al seguido para obtener -

(2.5.10)), sea una solución de la ecuación integral (2.5.18), en primer lugar considerando $N(P^2)=1$, y posteriormente en el caso general.

Teorema 2.5.2.- La solución $x(t)$ de la ecuación diferencial

$$x(t)=D\left(-\frac{d^2}{dt^2}\right)y(t) \quad , \quad a<t<b \tag{2.5.20}$$

satisface la ecuación integral (2.5.18) si y solo si se verifican las condiciones lineales y homogéneas de contorno:

$$\sum_{k=0}^{2d-2}[Y_k R^{k)}(t-a)+Z_k R^{k)}(b-t)]=0 \quad , \quad \forall t\in[a,b] \tag{2.5.21}$$

Demostración: Comencemos estudiando el comportamiento de $R(\tau)$, que en el caso particular que estamos considerando será de la forma:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{P\tau}}{D(P^2)}\,dv \tag{2.5.22}$$

Derivando k veces respecto a τ, tenemos:

$$R^{k)}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P^k e^{P\tau}}{D(P^2)}\,dv, \qquad k=0,1,\ldots,2d-2 \tag{2.5.23}$$

que existe por ser dicha integral absolutamente convergente.

Sea Γ un recinto cerrado que contiene todos los resíduos de $\frac{e^{P\tau}}{D(P^2)}$ del semiplano positivo, y Γ' otro recinto cerrado que contiene todos los resíduos de $\frac{e^{P\tau}}{D(P^2)}$ del semiplano negativo. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} R(\tau)&=\int_{\Gamma}\frac{e^{P\tau}}{D(P^2)}\,dv, \qquad \text{para} \quad \tau>0 \\ R(\tau)&=\int_{\Gamma'}\frac{e^{P\tau}}{D(P^2)}\,dv, \qquad \text{para} \quad \tau<0 \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Por tanto, para k=0,1,...,2d-2, será:

$$R^{k)}(\tau)=\int_{\Gamma}\frac{p^k e^{p\tau}}{D(p^2)}\,, \quad \text{para} \quad \tau>0$$

$$R^{k)}(\tau)=\int_{\Gamma'}\frac{p^k e^{p\tau}}{D(p^2)}\,, \quad \text{para} \quad \tau<0 \qquad (2.5.25)$$

Notemos a_{2d} al coeficiente de p^{2d} en $D(p^2)$. Así, para $\tau>0$ se verifica:

$$R^{2d-1)}(\tau)=\frac{(2\pi i)^{2d-1}}{a_{2d}(2\pi i)^{2d}}\int_{\Gamma}\frac{v^{2d-1}e^{i2\pi v\tau}}{(v-z_1),\ldots,(v-z_{2d})}\,dv=$$

$$=\frac{1}{a_{2d}}\,\Sigma(\text{resíduos en el semiplano positivo})$$

$$R^{2d-1)}(-\tau)=\frac{(2\pi i)^{2d-1}}{a_{2d}(2\pi i)^{2d}}\int_{\Gamma'}\frac{-v^{2d-1}e^{-i2\pi v\tau}}{(v-z_1),\ldots,(v-z_{2d})}\,dv=$$

$$=-\frac{1}{a_{2d}}\,\Sigma(\text{resíduos en el semiplano negativo})$$

Por tanto:

$$R^{2d-1)}(\tau)-R^{2d-1)}(-\tau)=\frac{1}{a_{2d}}\,\Sigma(\text{todos los resíduos})$$

En particular, para $\tau=0$ es:

$$R^{2d-1)}(0^+)-R^{2d-1)}(0^-)=\frac{1}{a_{2d}}\lim_{\tau\to 0}\Sigma(\text{todos los resíduos})=\frac{1}{a_{2d}} \qquad (2.5.26)$$

Ahora bien, el polinomio $D(p^2)$ puede factorizarse de la forma [14] :

$$D(p^2)=D^+(2\pi iv)D^-(2\pi iv) \qquad (2.5.27)$$

donde D^+ tiene todos sus ceros en el semiplano positivo, y D^- en el semiplano negativo. Así por (2.5.24) se tiene:

$$\left.\begin{aligned} D^{+}\left(\frac{d}{d\tau}\right)R(\tau)&=\int_{\Gamma}\frac{e^{P\tau}}{D^{+}(P)}\,dv=0 \quad , \quad \tau>0\\ D^{-}\left(\frac{d}{d\tau}\right)R(\tau)&=\int_{\Gamma'}\frac{e^{P\tau}}{D^{-}(P)}\,dv=0 \quad , \quad \tau<0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow D\left(\frac{d^2}{d\tau^2}\right)R(\tau)=0 \qquad \forall\tau\neq 0 \qquad (2.5.28)$$

Tras estudiar el comportamiento de $R(\tau)$ pasemos a obtener las condiciones de contorno buscadas. El procedimiento consistirá, como hemos indicado anteriormente, en sustituir en la ecuación integral la expresión de $x(t)$ obtenida a partir de la ecuación diferencial. Así si escribimos

$$D(P^2)=\sum_{k=o}^{d} a_{2k}P^{2k}$$

tenemos

$$x(t)=\sum_{k=o}^{d} a_{2k}\left(\frac{d}{dt}\right)^{2k} y(t), \qquad a<t<b \qquad (2.5.29)$$

Sustituyendo entonces en (2.5.18) resulta:

$$\int_a^b R(t-s)x(s)ds=\sum_{k=o}^{d} a_{2k}\int_a^t R(t-s)y^{2k)}(s)ds+\sum_{k=o}^{d} a_{2k}\int_t^b R(t-s)y^{2k)}(s)ds$$

Integrando por partes tenemos:

$$\int R(t-s)y^{2k)}(s)ds=R(t-s)y^{2k-1)}(s)+\int R'(t-s)y^{2k-1)}(s)ds$$

$$u(s)=R(t-s) \Longrightarrow du(s)=R'(t-s)ds$$

$$dv(s)=y^{2k)}(s)ds \Longrightarrow v(s)=y^{2k-1)}(s)$$

Por tanto:

$$\int_a^b R(t-s)x(s)ds=\sum_{k=1}^{d} a_{2k}\left[R(t-s)y^{2k-1)}(s)\right]_a^t+\sum_{k=1}^{d} a_{2k}\int_a^t R'(t-s)y^{2k-1)}(s)ds+$$

$$+\sum_{k=1}^{d} a_{2k}\left[R(t-s)y^{2k-1)}(s)\right]_t^b+\sum_{k=1}^{d} a_{2k}\int_t^b R'(t-s)y^{2k-1)}(s)ds+$$

$$+a_o\int_a^b R(t-s)y(s)ds=$$

$$=-\sum_{k=1}^{d} a_{2k}R(t-a)y^{2k-1)}(a)+\sum_{k=1}^{d} a_{2k}R(t-b)y^{2k-1)}(b)+$$

$$+\sum_{k=1}^{d} a_k \int_a^t R'(t-s)y^{2k-1)}(s)ds+\sum_{k=1}^{d} \int_t^b R'(t-s)y^{2k-1)}(s)ds+$$

$$+a_o \int_a^b R(t-s)y(s)ds$$

Procediendo, igualmente, por partes con las integrales sucesivas

$$\int R^{l)}(t-s)y^{2k-1)}(s)ds, \quad l=2,3,\ldots,2k$$

y sustituyendo, resulta:

$$\int_a^b R(t-s)x(s)ds=Y_o R(t-a)+Z_o R(t-b)+Y_1 R'(t-a)+Z_1 R'(t-b)+,\ldots,+$$

$$+Y_{2d-2}R^{2d-2)}(t-a)+Z_{2d-2}R^{2d-2)}(t-b)+a_{2d}R^{2d-1)}(0^+)y(t)-$$

$$-a_{2d}R^{2d-1)}(0^-)y(t)+\int_a^b y(s)[\sum_{k=o}^{2d} a_{2k}R^{2k)}(t-s)]ds$$

(2.5.30)

siendo Y_k y Z_k combinaciones lineales de las derivadas de y(t), en a y b respectivamente.

Por (2.5.28) se tiene que:

$$\int_a^b y(s)[\sum_{k=o}^{2d} a_{2k}R^{2k)}(t-s)]ds=0 \qquad (2.5.31)$$

y por (2.5.26):

$$a_{2d}R^{2d-1)}(0^+)y(t)-a_{2d}R^{2d-1)}(0^-)y(t)=a_{2d}y(t)\frac{1}{a_{2d}}=y(t) \qquad (2.5.32)$$

Así a partir de (2.5.31) y (2.5.32) se verifica que:

$$\int_a^b R(t-s)x(s)ds=\sum_{k=o}^{2d-2} Y_k R^{k)}(t-a)+\sum_{k=o}^{2d-2} Z_k R^{k)}(b-t)+y(t) \qquad (2.5.33)$$

Por tanto para que x(t) verifique la ecuación integral (2.5.18) es necesario y suficiente que:

$$\sum_{k=o}^{2d-2}[Y_k R^{k)}(t-a)+Z_k R^{k)}(b-t)]=0, \quad \forall t\in[a,b]$$

y se concluye.

Observemos que una condición suficiente, aunque no necesaria, para -- que se verifiquen las condiciones de contorno (2.5.21) anteriores, es que

$$Y_k = Z_k = 0, \qquad \forall k = 0,1,\ldots,2d-2$$

De hecho, como $D^*(P)$ es de grado d, en virtud de (2.5.28) cada ----- $R^{k)}(t-a)$, $k=d,d+1,\ldots,2d-2$, puede expresarse como combinación lineal de -- las d-1 primeras derivadas de $R(t-a)$, $\forall t>a$. Además como las primeras 2d-2 derivadas existen y son contínuas, esta propiedad también se cumple para - $t-a=0$, o sea $t=a$. Así $\sum_{k=o}^{2d-2} Y_k R^{k)}(t-a)$ puede sustituirse por una suma de -- d-1 términos linealmente independientes.

Análogamente podemos razonar con $\sum_{k=o}^{2d-2} Z_k R^{k)}(b-t)$, y reemplazarla por - otra sumatoria de d-1 términos linealmente independientes.

En definitiva, y(t) y sus derivadas sucesivas deben satisfacer 2d-2 - condiciones linealmente independientes en los puntos extremos a y b.

Si la ecuación integral (2.5.18) no tuviera solución, propiamente hablando, debido a que y(t) no satisfaciera las condiciones de contorno - (2.5.21), siempre existiría una solución singular que comprendería funciones impulsos y sus derivadas sucesivas. En efecto; reemplacemos x(t) en la ecuación (2.5.18) por la sumatoria

$$x(t) + \sum_{k=o}^{2d-2} [b_k \delta^{k)}(t-a) + c_k \delta^{k)}(t-b)]$$

donde los coeficientes b_k y c_k son indeterminados.

Así se tiene:

$$y(t) = \int_a^b R(t-s)\{x(s) + \sum_{k=o}^{2d-2} [b_k \delta^{k)}(s-a) + c_k \delta^{k)}(s-b)]\}ds =$$

$$= \int_a^b R(t-s)x(s)ds + \sum_{k=o}^{2d-2} [b_k R^{k)}(t-a) + c_k R^{k)}(t-b)]$$

Luego para que se verifique la igualdad (2.5.18), ha de ser:

$$\sum_{k=o}^{2d-2} [b_k R^{k)}(t-a) + c_k R^{k)}(t-b)] = 0$$

Así tomando $b_k=-Y_k$ y $c_k=-Z_k$, las condiciones de contorno pueden suprimirse, y la ecuación integral siempre se satisface.

Generalicemos el teorema 2.5.2 al caso general, o sea, para $N(P^2)\neq 1$. En tal caso R(t) es de la forma (2.5.9)

Teorema 2.5.3.- La solución x(t) de la ecuación diferencial (2.5.19) satisface la ecuación integral (2.5.18) si y solo si x(t) es solución de la ecuación

$$\int_a^b \tilde{R}(t-s)x(s)ds=z(t), \qquad \forall t\in[a,b] \qquad (2.5.34)$$

donde z(t) verifica:

$$N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)z(t)=y(t) \qquad (2.5.35)$$

Demostración: Observemos que en (2.5.34) es

$$\tilde{R}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{P\tau}}{D(P^2)}\,dv \qquad (2.5.36)$$

Por tanto, como

$$N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\int_a^b \tilde{R}(t-s)x(s)ds=\int_a^b R(t-s)x(s)ds=y(t)$$

se verifica que si x(t) es una solución de (2.5.34) para cualquier z(t) -- que satisfaga (2.5.35), entonces x(t) es solución de la ecuación integral (2.5.18).

Recíprocamente, si x(t) es solución de (2.5.18), entonces

$$N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)\int_a^b \tilde{R}(t-s)x(s)ds=N\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)z_1(t)$$

siendo $z_1(t)$ una solución arbitraria de (2.5.35). Así notando

$$\varepsilon(t)=\int_a^b \tilde{R}(t-s)x(s)ds-z_1(t), \qquad \forall t\in[a,b]$$

se verifica que

$$N(\frac{d^2}{dt^2})\epsilon(t)=0$$

Por tanto $\tilde{z}(t)=z_1(t)+\epsilon(t)$ es una solución de (2.5.35) y también lo es de - la ecuación (2.5.34) para $z(t)=\tilde{z}(t)$.

Sintetizando ambos teoremas, el procedimiento práctico para resolver la ecuación (2.5.18), consiste en operar mediante

$$D(\frac{d^2}{dt^2})$$

en la solución general de 2.5.35), y sustituir la expresión resultante en (2.5.18). Si ésta tiene solución propia, entonces queda garantizado que para alguna elección de las constantes indeterminadas, dicha solución es la buscada. En caso contrario deben sumarse funciones impulso y sus derivadas sucesivas como hacíamos en el teorema 2.5.2.

Todo el razonamiento que hemos realizado ha sido en base a la ecuación (2.5.18). Claramente se traslada a la ecuación (2.5.2) asociada al proceso, tomando

$$y(t)=\lambda x(t), \qquad x(t)=\phi(t).$$

Existe una familia particular de espectros que sirve como modelo útil para muchos procesos físicos. Se trata de la familia espectral de Butterworth $\{S_n(\nu)\}_{n\,N}$ definida de la forma [43]:

$$S_n(\nu)=(\frac{2nP}{a})\,\frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2n})}{1+(\frac{\nu}{a})^{2n}}, \qquad \forall n\in N \qquad (2.5.37)$$

Dicha familia conduce también a ecuaciones integrales de fácil solución.

En el límite cuando n→∞, se tiene un proceso paso-bajo (ejemplo V -- del §2.3)

Procedimientos alternativos. Capon [8] ha desarrollado un procedimiento diferente al estudiado anteriormente para obtener explícitamente los autovalores y autofunciones de la ecuación integral (2.5.2). Así ha demostrado que si

$$\text{d-n=par} \Rightarrow \lambda_j = \frac{b_n}{a_d}\left[\frac{\pi(j+\frac{1}{2})}{b-a}\right]^{-2(d-n)} + O(j^{2(d-n)-2}),\ j\le j_1$$

$$\text{d-n=impar} \Rightarrow \lambda_j = \frac{b_n}{a_d}\left[\frac{\pi j}{b-a}\right]^{-2(d-n)} + O(j^{2(d-n)-2}),\quad j\le j_1 \qquad (2.5.38)$$

siendo j_1 un número natural par suficientemente pequeño, y los autovalores están ordenados de la forma $\lambda_o<\lambda_1<\ldots$

Las autofunciones son entonces de la forma

$$\text{d-n=par} \Rightarrow \phi_j(t) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\frac{\pi(j+\frac{1}{2})}{b-a}t + \frac{\pi(d-n-1)}{4}\right] + O(j),\quad j\le j_1$$

$$\text{d-n=impar} \Rightarrow \phi_j(t) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\left[\frac{\pi j}{b-a}t + \frac{\pi(d-n-1)}{4}\right] + O(j),\quad j\le j_1 \qquad \forall t\in[a,b] \qquad (2.5.39)$$

Dicho procedimiento consiste en aplicar la transformada bilateral de Laplace [11] a la autofunción $\phi_j(t)$, suponiendo que $\phi_j(t)$ está definida -- $\forall t\in R$, pero vale cero para $t\notin[a\ b]$. Así se tiene

$$\phi_j^{m}(z) = \frac{D^{+}(z)P_j(z) - e^{-z(b-a)}D^{-}(z)Q_j(z)}{\lambda_j D(z^2) - N(z^2)} \qquad (2.5.40)$$

donde $P_j(z)$ y $Q_j(z)$ son polinomios con coeficientes reales de grado d-1 a lo sumo, tales que

$$Q_j(z)=\pm P_j(-z); \quad D(z^2)=D^+(z)D^-(z) \; ; \quad D^+(z)=D^-(-z)$$

donde las raices de $D^+(z)$ son las raices de $D(z^2)$ situadas en la parte izquierda del plano.

Entonces se halla la expresión de las raices del denominador $\lambda_j D(z^2)-N(z^2)$, que vendrán en función del autovalor λ_j a calcular. Notemos dichas raices: $\pm\omega_{1j}, \pm\omega_{2j},\ldots, \pm\omega_{dj}$, y supongamos que $Re\omega_{kj}>0$, k=1,2,...,d. Así λ_j se despeja en función de dichas raices.

Para hallar el valor concreto de $\pm\omega_{kj}$, k=1,2,...,d, Capon se basa en el siguiente resultado de Youla [50]:

Si $P_j(z)=\sum_{k=o}^{d-1} p_{kj} z^k$, entonces los coeficientes p_{kj} deben verificar el sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=o}^{d-1}\left[1\mp(-1)^k \frac{D^-(\omega_{hj})}{D^+(\omega_{hj})} e^{-\omega_{hj}(b-a)}\right]\omega_{hj}^k p_{kj}=0, \qquad h=1,2,\ldots,d.$$

Al tratarse de un sistema lineal homogéneo, para que sea compatible, el determinante de los coeficientes ha de ser nulo. Así, haciendo operaciones se despejan las raices ω_{kj}, y se sustituyen en la expresión de λ_j antes mencionada, obteniéndose los autovalores de forma explícita, que dependerán de la diferencia d-n.

Las autofunciones (2.5.39) se obtienen a partir de la expresión de la transformada bilateral de Laplace (2.5.40), una vez calculados los autovalores.

Pierre [33] ha refinado el resultado obtenido por Capon para las autofunciones, demostrando que si

$$\text{d-n=par} \Rightarrow \phi_j(t)=\left[\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}+O(j)\right]\cos\left[\frac{\pi(j+\frac{1}{2})}{b-a}t+\frac{\pi(d-n-1)}{4}\right]+O(j^{n-d+1}), \quad j\leq j_1$$

$$\text{d-n=impar} \Rightarrow \phi_j(t)=\left[\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{1}{2}}+O(j)\right]\cos\left[\frac{\pi j}{b-a}t+\frac{\pi(d-n-1)}{4}\right]+O(j^{n-d+1}), \quad j\leq j_1$$

(2.5.41)

Finalmente indiquemos que los resultados de esta sección no son demasiado restrictivos ya que casi todas las densidades espectrales de interés pueden aproximarse mediante una función racional.

2.6. LA ECUACION DE WIENER-HOPF.

En el §2.5 hemos planteado el problema de estimación sobre un intervalo finito. En tal caso, la solución al problema venía dada por la ecuación (2.5.16).

En el problema de predicción se desea conocer el valor futuro de una señal, conociendo sus valores presente y pasado. Por tanto se puede partir de que el proceso estocástico de los datos es igual a la señal, y por tanto no existe ruido interferidor, es decir, $y(t)=s(t)$ en el intervalo en cuestión. En tal caso es

$$E[s(t+\eta)y(u)]=E[s(t+\eta)s(u)]=R(t+\eta-u)$$

pues suponemos que el proceso de datos es debilmente estacionario, y así la ecuación (2.5.16) se escribe de la forma:

$$\int_0^T R(v-\alpha)h(\alpha)d\alpha=R(v+\eta), \qquad \forall v\geq 0 \qquad (2.6.1)$$

siendo $v=t-u$.

Vamos a considerar ahora el caso de que la señal se perciba durante un intervalo infinito.

Si dicho intervalo es toda la recta real, entonces $s(t+\eta)$ es uno de los datos y no se precisa estimación alguna. Pero si el intervalo en cuestión es del tipo $(-\infty,t)$, la estimación de la señal se expresará de la forma:

$$\hat{s}(t+\eta)=\int_{-\infty}^{t} h(t-u)s(u)du=\int_0^{\infty} h(\alpha)s(t-\alpha)d\alpha \qquad (2.6.2)$$

y la ecuación (2.6.1) será entonces

$$\int_0^{\infty} R(v-\alpha)h(\alpha)d\alpha=R(v+\eta), \qquad \forall v\geq 0 \qquad (2.6.3)$$

Esta igualdad (2.6.3) se conoce con el nombre de ecuación integral de Wiener-Hopf.

Para una función h(t) definida por la ecuación (2.6.3),el error en m. c. que se comete al considerar $\hat{s}(t+\eta)$ como $s(t+\eta)$ es

$$E[(s(t+\eta)-\hat{s}(t+\eta))^2]=E[(s(t+\eta)-\hat{s}(t+\eta))s(t+\eta)]-E[(s(t+\eta)-\hat{s}(t+\eta))\hat{s}(t+\eta)]=$$

$$=E[(s(t+\eta)-\int_0^\infty h(\alpha)s(t-\alpha)d\alpha)s(t+\eta)]=R(0)-\int_0^\infty R(-\eta-\alpha)h(\alpha)d\alpha=$$

$$=R(0)-\int_0^\infty R(\eta+\alpha)h(\alpha)d\alpha \qquad (2.6.4)$$

Sin los datos, el error en m.c. sería

$$E[(s(t+\eta))^2]=R(0)$$

Por tanto vemos que los datos reducen el error en la cuantía de

$$\int_0^\infty R(\eta+\alpha)h(\alpha)d\alpha.$$

La expresión (2.6.3) puede interpretarse como la ecuación de un sistema lineal con impulso de respuesta h(v), tal que a una entrada R(v) corresponde una salida R(v+η).

Antes de estudiar la resolución de la ecuación, de Wiener-Hopf, observemos que cuando la función de covarianza del proceso de señales sea analítica, entonces $s(t+\eta)$ puede predecirse exactamente en función de s(t) y de sus derivadas sucesivas mediante un desarrollo en serie de Taylor [42]:

$$s(t+\eta)=\sum_{n=0}^{\infty} s^{n)}(t)\,\frac{\eta^n}{n!}\,, \quad \text{en m.c.}$$

Tal es el caso en que s(t) sea un proceso paso-bajo.

Pasemos ya a resolver la ecuación (2.6.3). Nosotros vamos a limitarnos a estudiar el caso particular de que el proceso de señales tenga densidad espectral racional. Como indicábamos en el §2.5, tal hipótesis no es muy restrictiva ya que casi toda densidad espectral puede aproximarse por una función racional.

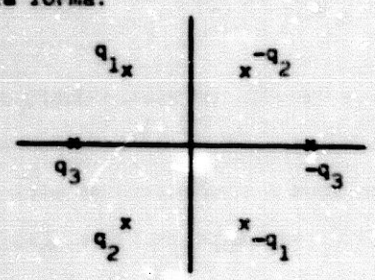
Así, si notamos S(ν) a la densidad espectral del proceso, la función $S(\frac{q}{2\pi i})$ podrá expresarse de la forma:

$$S(\frac{q}{2\pi i}) = \frac{P(q^2)}{Q(q^2)} \qquad (2.6.5)$$

donde $P(q^2)$ y $Q(q^2)$ son dos polinomios en q^2 con coeficientes reales, tales que $grP(q^2)<grQ(q^2)$.

Solución de la ecuación de Wiener-Hopf. Vamos a esquematizar uno de los métodos más eficaces para resolver la ecuación (2.6.3), que consiste en hallar la función de transferencia H(q) del sistema (o transformada de Fourier del impulso de respuesta), en función de los polinomios $P(q^2)$ y $Q(q^2)$.

Partimos de que si q_i es raíz del polinomio $P(q^2)$, entonces $-q_i$ también lo es, por lo que las raíces de $P(q^2)$ son simétricas respecto al eje imaginario. Y análogamente para $Q(q^2)$. Así, $S(\frac{q}{2\pi i})$ puede factorizarse de la forma:



$$S(\frac{q}{2\pi i}) = \frac{P(q^2)}{Q(q^2)} = \frac{A(q)A(-q)}{B(q)B(-q)} \qquad (2.6.6)$$

donde A(q) y B(q) contienen todas las raíces de $A(q^2)$ y $B(q^2)$ respectivamente, situadas en el semiplano izquierdo.

Notando

$$F(q) = \frac{A(q)}{B(q)} \qquad (2.6.7)$$

la expresión (2.6.6) puede escribirse de la forma

$$S(\frac{q}{2\pi i}) = F(q)F(-q) \qquad (2.6.8)$$

Sean $q_1, q_2, \ldots, q_n$ las raíces de B(q); supongamos que $Req_i \leq 0$, $i=1,2,\ldots,n$, y que, por comodidad, todas son simples (no habría ninguna dificul-

tad matemática en considerar que alguna raiz es múltiple). Descomponiendo F(q) como suma de fracciones simples, se tiene:

$$\frac{A(q)}{B(q)} = \frac{a_1}{q-q_1} + \frac{a_2}{q-q_2} + \ldots + \frac{a_n}{q-q_n} \qquad (2.6.9)$$

donde

$$a_i = \frac{A(q_i)}{B'(q_i)}, \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (2.6.10)$$

Formemos entonces la función

$$F_1(q) = \frac{a_1 e^{q_1 \eta}}{q-q_1} + \frac{a_2 e^{q_2 \eta}}{q-q_2} + \ldots + \frac{a_n e^{q_n \eta}}{q-q_n} = \frac{A_1(q)}{B(q)} \qquad (2.6.11)$$

siendo η la constante que aparece en (2.6.3), y $A_1(q)$ el numerador resultante de la suma de términos

$$\frac{a_i e^{q_i \eta}}{q-q_i}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Claramente $F_1(q)$ es una función racional de q, ya que los $e^{q_i \eta}$, i=1,2,..,n, son constantes.

A partir de (2.6.11) se deduce que

$$A_1(q_i) = A(q_i) e^{q_i \eta}, \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (2.6.12)$$

La función de transferencia buscada viene entonces dada por:

$$H(q) = \frac{F_1(q)}{F(q)} = \frac{A_1(q)}{A(q)} \qquad (2.6.13)$$

En efecto; para demostrarlo nos basamos en que si una función f(t) es causal, y su transformada de Fourier es $\hat{f}(v)$, entonces

$$\hat{f}\left(\frac{q}{2\pi i}\right)$$

es analítica en el semiplano derecho Re q>0 , por tratarse de una exponencial.

Así, si g(t) es una función tal que

$$g(t)=0, \quad \forall t\geq 0 \tag{2.6.14}$$

y $\hat{g}(\nu)$ es su transformada de Fourier, entonces $\hat{g}(\frac{\nu}{2\pi i})$ es analítica en el semiplano izquierdo Re q<0.

Consideremos la función

$$g(\nu)=R(\nu+\eta)-\int_0^\infty R(\nu-\alpha)h(\alpha)d\alpha \tag{2.6.15}$$

que por (2.6.3) será del tipo (2.6.14), y apliquémosle transformada de Fourier a ambos miembros de la igualdad. Así, por el teorema de convolución, (2,6,15) se transforma en

$$\hat{g}(\nu)=S(\nu)e^{i2\pi\nu\eta}-S(\nu)H(i\nu)=S(\nu)[e^{i2\pi\nu\eta}-H(i\nu)] \tag{2.6.16}$$

siendo $H(i\nu)=\hat{h}(\nu)$ la función de transferencia. Por tanto:

$$\hat{g}(\frac{q}{2\pi i})= S(\frac{q}{2\pi i})[e^{q\eta}-H(q)] \tag{2.6.17}$$

que según lo antes dicho, debe ser analítica en el semiplano izquierdo. Así como nuestro sistema es causal, la función desconocida

$$H(q)= \frac{M(q)}{L(q)}$$

debe ser analítica en el semiplano derecho.

A partir de (2.6.6) y de (2.6.17), se tiene:

$$\hat{g}(\frac{q}{2\pi i})= \frac{A(q)A(-q)}{B(q)D(-q)}\left[\frac{e^{q\eta}L(q)-M(q)}{L(q)}\right] \tag{2.6.18}$$

Para que (2.6.18) no tenga polos en el semiplano izquierdo, hay que elegir M(q) de forma que

$$M(q)=A(q) \tag{2.6.19}$$

Y para cancelar B(q), hay que elegir L(q) de forma que:

$$e^{q_i \eta} L(q_i) = M(q_i), \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (2.6.20)$$

Si suponemos que grM(q)=n-1, el polinomio M(q) queda unívocamente determinado a partir de (2.6.20), de modo que

$$M(q_i) = e^{q_i \eta} A(q_i) \qquad (2.6.21)$$

Por tanto, según (2.6.12) ha de ser

$$M(q) = A_1(q) \qquad (2.6.22)$$

y queda así demostrado (2.6.13).

Otras formas alternativas para la resolución de la ecuación de Wiener-Hopf pueden verse en [18] ,[43].

Ejemplos.-

a) Consideremos la señal telegráfica aleatoria, cuya función de covarianza es

$$R(\tau) = ke^{-\alpha|\tau|}$$

y su densidad espectral, según vimos en (2.5.12), es

$$S(\nu) = \frac{2k\alpha}{\alpha^2 + (2\pi\nu)^2}$$

Vamos a resolver la ecuación de Wiener-Hopf asociada, siguiendo la técnica que hemos desarrollado anteriormente.

$$S\left(\frac{q}{2\pi i}\right) = \frac{2k\alpha}{\alpha^2 - q^2} = \frac{\sqrt{2k\alpha}}{\alpha+q} \cdot \frac{\sqrt{2k\alpha}}{\alpha-q} \Longrightarrow \begin{cases} A(q) = \sqrt{2k\alpha} \\ B(q) = \alpha + q \end{cases}$$

$$F(q)= \frac{A(q)}{B(q)} = \frac{\sqrt{2k\alpha}}{\alpha+q} \quad \Longrightarrow \quad q_1 = -\alpha$$

$$F_1(q)= \frac{\sqrt{2k\alpha}}{\alpha+q}\, e^{-\alpha\eta}$$

Por tanto

$$H(q)= \frac{F_1(q)}{F(q)} = e^{-\alpha\eta}$$

Así

$$h(t)= e^{-\alpha t}\delta(t)$$

y nuestra estimación es:

$$\hat{s}(t+\eta)= e^{-\alpha\eta}s(t)$$

El error resultante viene dado por:

$$R(0)-e^{-\alpha\eta}R(\eta)=k(1-e^{-2\alpha\eta}) \text{ en m.c.}$$

b) Consideremos ahora el proceso cuya covarianza sea

$$R(\tau)= \frac{3}{2}\, e^{-|\tau|} + \frac{11}{3}e^{-3|\tau|}$$

Así, operando de igual forma que en (2.5.12), se obtiene que su densidad - espectral viene dada por

$$S(\nu)= \frac{49+100\pi^2\nu^2}{(1+4\pi^2\nu^2)(9+4\pi^2\nu^2)}$$

Resolvamos su ecuación de Wiener-Hopf asociada.

$$S\left(\frac{q}{2\pi i}\right)= \frac{49-25q^2}{(1-q^2)(9-q^2)} = \frac{7+5q}{(1+q)(3+q)} \cdot \frac{7-5q}{(1-q)(3-q)} \Longrightarrow \begin{cases} A(q)=7+5q \\ B(q)=(q+1)(q+3) \end{cases}$$

$$F(q)= \frac{A(q)}{B(q)}= \frac{7+5q}{(q+1)(q+3)} = \frac{1}{q+1} + \frac{4}{q+3} \Longrightarrow \begin{cases} q_1=-1 \\ q_2=-3 \end{cases}$$

$$F_1(q) = \frac{e^{-\eta}}{q+1} + \frac{4e^{-3\eta}}{q+3}$$

Tomemos el valor particular $\eta=L2$. Así es:

$$F_1(q) = \frac{\frac{1}{2}}{q+1} + \frac{\frac{1}{2}}{q+3} = \frac{q+2}{(q+1)(q+3)}$$

Por tanto

$$H(q) = \frac{F_1(q)}{F(q)} = \frac{1}{5} + \frac{\frac{3}{5}}{5q+7}$$

Así

$$h(t) = \frac{1}{5}\delta(t) + \frac{3}{25} e^{-\frac{7t}{5}} U(t)$$

Observemos que debido al gran valor de η considerado, el error en m.c. es próximo a R(0), de modo que nuestro estimador no es muy útil.

CAPITULO 3

EL DESARROLLO APROXIMADO DE KARHUNEN-LOEVE

3.1. NECESIDAD DE RECURRIR A METODOS NUMERICOS.

El desarrollo de Karhunen-Loève para un proceso de segundo orden continuo en m.c., establecido en el capítulo 1, es de gran utilidad teórica y práctica como hemos visto en diversos ejemplos. Sin embargo, su aplicación práctica está limitada por dos hechos fundamentales: El primero consiste en que se trata de un desarrollo con un número infinito, aunque numerable, de términos (en el límite en m.c.); y el segundo es que sus coeficientes son las autofunciones de una ecuación integral con núcleo la covarianza del proceso, del tipo (1.2.18), que, en general, no puede resolverse.

El primer problema es de fácil solución, ya que el error en m.c. que se comete al aproximar el proceso por los N+1 primeros términos del desarrollo de Karhunen-Loève, viene explícitamente dado por la expresión ----- (1.2.28), a saber:

$$E\left[\left|X_t - \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda_n}\,\phi_n(t)\,b_n\right|^2\right] = R(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \left|\phi_n(t)\right|^2$$

Por tanto, cuando interese podrá utilizarse el desarrollo truncado, sabiendo cual es el error preciso (en m.c.) que se comete. Además, en el §1.4 hemos demostrado que un tal desarrollo de Karhunen-Loève truncado es doblemente óptimo para el proceso.

El segundo problema es más complicado, ya que no existe una teoría general útil para resolver ecuaciones del tipo (1.2.18). A excepción del caso en que el proceso estocástico sea débilmente estacionario y con densidad espectral racional, como hemos demostrado en el §2.5, o bien tenga una función de covarianza muy particular, como las de ejemplos vistos en los capítulos anteriores, en los cuales la ecuación integral pueda reducirse tras sucesivas derivaciones a un problema de contorno, no va a ser posible

calcular los autovalores y autofunciones de la ecuación (1.2.18).

Una forma de resolver este segundo problema es la que vamos a desarrollar en este capítulo, que va a consistir en resolver la ecuación integral (1.2.18) mediante un algoritmo numérico, y a partir de las autofunciones y autovalores aproximados, construir un desarrollo de Karhunen-Loève también aproximado que converja hacia el desarrollo formal cuando los autovalores y autofunciones aproximados converjan hacia los verdaderos. Así mismo, estudiaremos el error que se comete al considerar el desarrollo aproximado - como el formal, deduciendo una expresión explícita para él.

3.2. EL METODO DE RAYLEIGH-RITZ.

En la actualidad existen diversos procedimientos numéricos para resolver ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie homogéneas. Así - tenemos los distintos métodos de cuadratura, el método de colocación, el - método de Galerkin, etc.

Una particularización del método de Galerkin al caso en que la ecuación integral tenga núcleo simétrico es el método de Rayleigh-Ritz [2]. Como la ecuación (1.2.18) tiene por núcleo la función de covarianza del proceso, que es simétrica según vimos en (1.1.9), pensamos que dicho método es el idóneo para su resolución.

El método numérico de Rayleigh-Ritz consiste en resolver la ecuación (1.2.18), mediante la construcción de un problema matricial de autovalores tal que sus autovalores aproximen a los de la ecuación (1.2.18), y sus autovectores también aproximen, en el sentido que a continuación vamos a ver, a las autofunciones de (1.2.18). Más aún, los autovalores y autofunciones aproximadores, son las soluciones de otra ecuación integral cuyo núcleo aproxima a R(t,s).

Concretamente, en el método de Rayleigh-Ritz se parte de un sistema - de funciones linealmente independientes $(f_0, f_1, \ldots, f_k)$ de $L^2[a,b]$, que constituirán una base de un subespacio suyo de dimensión k+1, y se supone -

que las autofunciones aproximadas son de la forma:

$$\tilde{\phi}(t,k)=\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j f_j(t),\quad \tilde{a}_o,\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_k\in R \qquad (3.2.1)$$

Para calcular los coeficientes $\tilde{a}_j$ de este desarrollo, se sustituye (3.2.1) en la ecuación (1.2.18), obteniéndose:

$$\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j\int_a^b R(t,s)f_j(s)ds \simeq \tilde{\lambda}(k)\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j f_j(t) \qquad (3.2.2)$$

donde $\tilde{\lambda}(k)$ es un autovalor aproximado del autovalor real λ. Entonces se impone que si se multiplican los dos miembros de (3.2.2) por $\overline{f_i(t)}$, $i=0,1,\ldots,k$, e integramos en $[a,b]$ respecto a t, se de la igualdad, o sea:

$$\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j\int_a^b\int_a^b R(t,s)f_j(s)\overline{f_i(t)}dtds=\tilde{\lambda}(k)\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j\int_a^b f_j(t)\overline{f_i(t)}dt,\ i=0,1,\ldots,k \qquad (3.2.3)$$

Así, notando

$$A_{ij}=\int_a^b\int_a^b R(t,s)f_j(s)\overline{f_i(t)}dtds,\quad B_{ij}=\int_a^b f_j(t)\overline{f_i(t)}dt \qquad (3.2.4)$$

la igualdad (3.2.3) puede escribirse de la forma:

$$\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j A_{ij}=\tilde{\lambda}(k)\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j B_{ij},\quad i=0,1,\ldots,k \qquad (3.2.5)$$

Es decir, tenemos el siguiente problema matricial de autovalores:

$$A\tilde{a}=\tilde{\lambda}(k)B\tilde{a} \qquad (3.2.6)$$

donde:

$$A\equiv(A_{ij})_{i,j},\quad B\equiv(B_{ij})_{i,j},\quad \tilde{a}\equiv(\tilde{a}_o,\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_k)^T \qquad (3.2.7)$$

Así, el problema (3.2.6) puede ser ya fácilmente resuelto bien directamente o mediante algoritmos numéricos [46].

Al ser las funciones $f_i(t)$ linealmente independientes, la matríz B es siempre no singular ya que se trata de una matriz de Gram [15]. Por tanto el problema matricial (3.2.6) puede reducirse a su forma estandard:

$$(B^{-1}A)\tilde{a} = \tilde{\lambda}(k)\tilde{a}$$

Una gran simplificación se consigue eligiendo las funciones $f_i(t)$ de forma que constituyan un sistema ortonormal respecto al producto escalar definido en $L^2[a,b]$, lo cual riempre es posible sin más que aplicar el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. De tal forma B es la matriz identidad, y el problema queda reducido a la expresión:

$$(A-\lambda I)\tilde{a} = 0 \qquad (3.2.8)$$

Observaciones.

1) La matriz A definida en (3.2.7) es hermítica, ya que R(t,s) tiene simetría hermítica. En efecto:

$$A_{ij}=\int_a^b\int_a^b R(t,s)f_j(s)\overline{f_i(t)}dtds=\int_a^b\int_a^b \overline{R(s,t)}\,\overline{f_j(s)}\,f_i(t)dtds =$$

$$=\overline{\int_a^b\int_a^b R(s,t)\overline{f_j(s)}f_i(t)dtds} = \overline{A_{ji}}$$

2) Las autofunciones aproximadas $\tilde{\phi}(t,k)$ no tienen por qué ser ortogonales aunque las autofunciones verdaderas sí lo sean. En efecto

$$\int_a^b \tilde{\phi}_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt=\int_a^b\Big(\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j^n f_j(t)\Big)\Big(\sum_{i=o}^{k}\overline{\tilde{a}_i^m f_i(t)}\Big)dt=$$

$$=\sum_{j=o}^{k}\sum_{i=o}^{k}\tilde{a}_j^n\tilde{a}_i^m\int_a^b f_j(t)\overline{f_i(t)}dt=\sum_{i=o}^{k}\tilde{a}_i^n\tilde{a}_j^m \neq 0$$

3) Respecto a la elección de las funciones básicas $f_i(t)$, puede ocurrir que tengamos cierta información acerca de como han de ser las autofunciones, de manera que nos oriente sobre la elección de las $f_i(t)$. En caso de carecer de tal información, podemos elegir en este orden: Funciones trigonométricas, polinomios de Legendre, polinomios de Chebyshev, funciones spline, etc.

En ocasiones se sugiere que una vez determinada $f_o(t)$, se obtengan las restantes funciones básicas mediante la ley de recurrencia:

$$f_{i+1}(t)=\int_a^b R(t,s)f_i(s)ds, \quad i=0,1,\ldots,k-1.$$

Pero el sistema así obtenido puede no ser linealmente independiente.

Convergencia del método.- El algoritmo numérico de Rayleigh-Ritz que acabamos de describir no es, en general, convergente. Para que lo sea, hay que imponer al sistema $\{f_o,f_1,\ldots,f_k\}$ que sea ortonormal y además forme -- parte de un sistema completo en $L^2[a,b]$. En tal caso se prueba [35] que si $\tilde{\lambda}(k)$ es un autovalor y $(\tilde{a}_o,\tilde{a}_1,\ldots,\tilde{a}_k)^T$ un autovector de la matriz A definida en (3.2.7), entonces $\tilde{\lambda}(k)$ y $\tilde{\phi}(t,k)=\sum_{j=o}^{k}\tilde{a}_j f_j(t)$ son respectivamente un - autovalor y una autofunción de la ecuación integral:

$$\int_a^b \tilde{R}_k(t,s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t) \ , \quad t\in[a,b] \qquad (3.2.9)$$

cuyo núcleo viene dado por:

$$\tilde{R}_k(t,s)=\sum_{i=o}^{k} f_i(s)\int_a^b R(t,s)\overline{f_i(s)}ds \qquad (3.2.10)$$

Además dicho núcleo $\tilde{R}_k(t,s)$ tiene los mismos autovalores que

$$\tilde{R}_{(k)}(t,s)=\sum_{i=o}^{k}\sum_{j=o}^{k} A_{ij} f_i(t)\overline{f_j(s)}=\sum_{i=o}^{k}\sum_{j=o}^{k}\left[\int_a^b\int_a^b R(t,s)f_j(s)\overline{f_i(t)}dtds\right].$$

$$.f_i(t)\overline{f_j(s)} \qquad (3.2.11).$$

Ahora bién, bajo nuestras hipótesis se verifica que [13]

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b\int_a^b |R(t,s)-\tilde{R}_{(k)}(t,s)|^2 dtds = 0 \qquad (3.2.12)$$

Finalmente, Baker [3] demuestra que si R y $\tilde{R}_{(k)}$ son operadores integrales con núcleos hermíticos R(t,s) y $\tilde{R}_{(k)}(t,s)$ respectivamente, entonces:

$$\lambda-\tilde{\lambda}(k)\leq||R-\tilde{R}_{(k)}||_2 \ , y \ ||R-\tilde{R}_{(k)}||_2^2\leq\int_a^b\int_a^b|R(t,s)-\tilde{R}_{(k)}(t,s)|^2 dtds$$

(3.2.13).

Por tanto, para la convergencia de autovalores concluimos el siguiente resultado:

Teorema 3.2.1.- Sea $(f_o, f_1, \ldots, f_k)$ un sistema ortonormal de funciones linealmente independientes, que forma parte de un sistema completo en $L^2[a,b]$, y supongamos que la función $R(t,s)$ es cuadrado-integrable. Entonces es

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\lambda}(k) = \lambda$$

En lo referente a autofunciones surge el problema de que un autovalor de multiplicidad p tiene asociado un espacio de autofunciones de dimensión p. No obstante la aproximación puede plantearse considerando la proyeccion de una autofunción en el espacio de las autofunciones aproximadas, y recíprocamente, donde por proyección de un punto de un espacio en un subespacio suyo se entiende aquel punto del subespacio cuya distancia al punto del espacio con la métrica considerada sea la menor posible, o sea, la distancia a cualquier otro punto del subespacio sea mayor que la distancia a su proyección.

El resultado fundamental referente a la convergencia de autofunciones aproximadas, es el siguiente [35]:

Teorema 3.2.2.- Bajo las condiciones del teorema 3.2.1, si $P\tilde{\phi}(t,k)$ representa la proyección de la autofunción aproximada $\tilde{\phi}(t,k)$ en el espacio de las autofunciones asociadas al autovalor λ, entonces

$$\lim_{k\to\infty} ||P\tilde{\phi}(t,k) - \tilde{\phi}(t,k)||_2 = 0$$

Recíprocamente, si $Q\phi(t)$ representa la proyección de la autofunción $\phi(t)$ en el espacio de las autofunciones aproximadas asociadas al mismo autovalor λ, entonces

$$\lim_{k\to\infty} ||Q\phi(t) - \phi(t)||_2 = 0$$

En el caso particular de que λ sea un autovalor simple, si $\phi(t)$ es la autofunción asociada, y $\tilde{\phi}(t,k)$ su autofunción aproximada, entonces la conclusión del teorema 3.2.2, puede expresarse de la forma:

$$\lim_{k\to\infty}||\phi(t)-\tilde{\phi}(t,k)||_2=0$$

Puede ser útil reseñar que una condición suficiente para que un autovalor de la ecuación (1.2.18) sea simple, es que se verifique [12]:

$$\int_a^b\int_a^b|R(t,s)|^2dtds=|\lambda|^2$$

Por último, en lo referente al cálculo y convergencia de las autofunciones aproximadas, conviene indicar que como lo que se pretende es la obtención de un algoritmo numérico, y éste necesita basarse en un número finito de puntos, la aproximación en m.c. que hemos desarrollado puede no -- ser útil para tal fin, aunque sí lo sea desde un punto de vista teórico.

Vamos entonces a esbozar el procedimiento puntual a seguir en el caso numérico.

En primer lugar, el núcleo R(t,s) ha de verificar dos condiciones adicionales llamadas "hipótesis de continuidad", a saber:

1) $\sup_{t\in[a,b]}\int_a^b|R(t,s)|^2ds<\infty$

2) $\lim_{t_1\to t_2}\int_a^b|R(t_1,s)-R(t_2,s)|^2ds=0$

Además en vez de trabajar con el núcleo degenerado $\tilde{R}_k(t,s)$, trabajaremos con su adjunto $\overline{\tilde{R}_k(t,s)}$, que tiene los mismos autovalores que $\tilde{R}_k(t,s)$.

Así, notando $\tilde{\Psi}(t,k)$ a las autofunciones de $\overline{\tilde{R}_k(t,s)}$, podemos enunciar un teorema análogo al teorema 3.2.2, pero considerando la norma uniforme:

$$\|f\|_\infty=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

en vez de la norma $\|\ \|_2$.

<u>Teorema 3.2.3</u>.- Bajo las condiciones del teorema 3.2.1, y R(t,s) verificando las hipótesis de continuidad, si $P\tilde{\Psi}(t,k)$ representa la proyección de --

$\tilde{\Psi}(t,k)$ en el espacio de las autofunciones asociadas al autovalor λ, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} P\tilde{\Psi}(t,k) = \tilde{\Psi}(t,k)$$

uniformemente en $[a,b]$.

Recíprocamente, si $Q\Phi(t)$ representa la proyección de $\Phi(t)$ en el espacio de las autofunciones aproximadas $\tilde{\Psi}(t,k)$ asociadas al mismo autovalor λ, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} Q\Phi(t) = \Phi(t)$$

uniformemente en $[a,b]$.

En el caso particular de que λ sea un autovalor simple, si $\Phi(t)$ es la autofunción asociada, y $\tilde{\Psi}(t,k)$ su autofunción aproximada, entonces la conclusión del teorema 3.2.3, puede expresarse de la forma:

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\Psi}(t,k) = \Phi(t)$$

uniformemente en $[a,b]$.

3.3. CONSTRUCCION DEL DESARROLLO APROXIMADO DE KARHUNEN-LOEVE.

Sea $\{X_t | t\in[a,b]\}$ un proceso de segundo orden y contínuo en m.c.. En el §1.2 hemos establecido el desarrollo formal de Karhunen-Loève para el proceso mediante las expresiones (1.2.23) y (1.2.24). En dicho desarrollo, los coeficientes eran las autofunciones de la ecuación integral (1.2.18) con núcleo $R(t,s) = E[X_t \overline{X}_s]$.

Pues bien, basándonos en ello, y en el método numérico desarrollado en el §3.2, establecemos un <u>desarrollo aproximado de Karhunen-Loève</u> para $\{X_t | t\in[a,b]\}$ de la forma:

$$\tilde{X}_t(k) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{\Phi}_n(t,k) \int_a^b \overline{\tilde{\Phi}_n(t,k)} X_t\, dt, \quad \text{en m.c.} \quad \forall t\in[a,b] \qquad (3.3.1)$$

donde $\tilde{\Phi}_n(t,k)$ denota la proyección de la autofunción $\Phi_n(t)$ asociada al auto

valor λ_n, en el espacio de las autofunciones aproximadas, o sea, $\tilde{\phi}_n(t,k) = Q\phi_n(t)$, y siendo $N \leq k$, ya que según el método de Rayleigh-Ritz, la matriz $A=(A_{ij})_{i,j}$ definida en (3.2.7) es cuadrada y de dimensión k+1, por lo que el número máximo de autovalores aproximados $\tilde{\lambda}_n(k)$ que puede obtenerse a partir del sistema $\{f_o,f_1,\ldots,f_k\}$ es k+1, y de proyecciones $\tilde{\phi}_n(t,k)$, también.

Supondremos que los autovalores y autofunciones aproximados se construyen por el método de Rayleigh-Ritz con k+1 funciones linealmente independientes y ortonormales $\{f_o,f_1,\ldots,f_k\}$, que forman parte de un sistema completo en $L^2[a,b]$.

El hecho de haber suprimido en (3.3.1) la expresión de los autovalores, se debe a que dicho desarrollo no es, en principio, ortogonal, y mucho menos ortonormal, respecto a los coeficientes ni respecto a las variables $\int_a^b \overline{\tilde{\phi}_n(t,k)} X_t dt$, por lo que su presencia solo dificultaría el cálculo.

Observemos, en efecto, que

$$E\left[\left(\int_a^b \overline{\tilde{\phi}_m(t,k)} X_t dt\right)\left(\int_a^b \tilde{\phi}_n(s,k)\bar{X}_s ds\right)\right]=\int_a^b\int_a^b E[X_t\bar{X}_s]\tilde{\phi}_n(s,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dtds =$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b R(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds\right]\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt \qquad (3.3.2)$$

Ahora bien, al estudiar la convergencia del método de Rayleigh-Ritz, hemos visto que $\tilde{\lambda}_n(k)$ y $\tilde{\phi}_n(t,k)$ son las soluciones de la ecuación integral (3.2.9) con núcleo dado en (3.2.10), es decir:

$$\int_a^b R_k(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds=\tilde{\lambda}_n(k)\tilde{\phi}_n(t,k), \quad \forall t\in[a,b] \qquad (3.3.3)$$

Así notando:

$$r_n(t,k)=\int_a^b R(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds-\int_a^b R_k(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds =$$

$$=\int_a^b[R(t,s)-\tilde{R}_k(t,s)]\tilde{\phi}_n(s,k)ds \qquad (3.3.4)$$

se verifica que:

$$\int_a^b R(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds=\int_a^b \tilde{R}_k(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds+\gamma_n(t,k)=\tilde{\lambda}_n(k)\tilde{\phi}_n(t,k)+\gamma_n(t,k) \tag{3.3.5}$$

sin más que sustituir la expresión (3.3.3).

Por tanto, sustituyendo (3.3.5) en (3.3.2) resulta

$$E[(\int_a^b \overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}X_t\,dt)(\int_a^b \tilde{\phi}_m(s,k)\tilde{X}_s\,ds)]=\int_a^b[\tilde{\lambda}_n(k)\tilde{\phi}_n(t,k)+\gamma_n(t,k)]\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt =$$

$$=\tilde{\lambda}_n(k)\int_a^b \tilde{\phi}_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt+\int_a^b \gamma_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt \neq 0 \tag{3.3.6}$$

Por tanto, vemos que las variables aleatorias que figuran en el desarrollo aproximado (3.3.1) no son ortogonales. Posteriormente veremos que asintóticamente sí lo son al crecer k indefinidamente.

<u>Convergencia del desarrollo aproximado</u>.- Vemos ahora que el desarrollo definido en (3.3.1) converge en m.c. en k hacia el desarrollo formal de Karhunen-Loève del proceso, y que, por tanto, constituye una buena aproximación.

Para simplificar, notemos:

$$\Sigma=\sum_{n=0}^{N}\phi_n(t)\int_a^b \overline{\phi_n(t)}X_t\,dt$$

$$\tilde{\Sigma}(k)=\sum_{n=0}^{N}\tilde{\phi}_n(t,k)\int_a^b \overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}X_t\,dt \qquad \forall t\in[a,b] \tag{3.3.7}$$

Se trata entonces de probar que

$$\lim_{k\to\infty}||\Sigma-\tilde{\Sigma}(k)||=0 \tag{3.3.8}$$

en m.c. y uniformemente en [a,b].

En efecto; observemos en primer lugar que para una función cualquiera $f\in L^2[a,b]$, se tiene:

$$||\int_a^b f(t)X_t\,dt||^2=E[|\int_a^b f(t)X_t\,dt|^2]=E[(\int_a^b f(t)X_t\,dt)(\int_a^b \overline{f(t)}\overline{X}_t\,dt)] =$$

$$=\int_a^b\int_a^b E[|X_t|^2]f(t)\overline{f(t)}dtdt=\int_a^b\int_a^b ||X_t||^2|f(t)|^2dtdt =$$

$$=(b-a)\int_a^b \|X_t\|^2|f(t)|^2dt=M(b-a)\int_a^b|f(t)|^2dt=M(b-a)\,\|f\|_2^2$$

ya que al ser el proceso de segundo orden, se verifica que:

$$E[|X_t|^2]=M<\infty$$

y $\|\ \|_2$ representa la norma en $L^2[a,b]$.

Por tanto será:

$$\|\int_a^b f(t)X_t\,dt\|=\sqrt{M(b-a)}\,\|f\|_2 \qquad (3.3.9)$$

donde $\|\ \|$ es la norma en el espacio H_x asociado al proceso, definida en -- (1.1.3).

En particular se verifica:

$$\|\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt-\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}X_t\,dt\|=\|\int_a^b[\overline{\phi_n(t)-\tilde{\phi}_n(t,k)}]X_t\,dt\|=$$

$$=\sqrt{M(b-a)}\,\|\overline{\phi_n(t)-\tilde{\phi}_n(t,k)}\|_2 \qquad (3.3.10)$$

Así podemos escribir:

$$\|\Sigma-\tilde{\Sigma}(k)\|\le\sum_{n=0}^{N}\|\phi_n(t)\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt-\tilde{\phi}_n(t,k)\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}X_t\,dt\|=$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\|\phi_n(t)\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt-\tilde{\phi}_n(t,k)\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt+$$

$$+\tilde{\phi}_n(t,k)\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt-\tilde{\phi}_n(t,k)\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}X_t\,dt\|\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{N}\{\|\phi_n(t)-\tilde{\phi}_n(t,k)\|_2\|\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt\|+$$

$$+\|\tilde{\phi}_n(t,k)\|_2\|\int_a^b\overline{\phi_n(t)}X_t\,dt-\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}X_t\,dt\|\}$$

, en virtud de (3.3.10) tenemos:

$$\|\Sigma-\tilde{\Sigma}(k)\|\le\sum_{n=0}^{N}\|\phi_n(t)-\tilde{\phi}_n(t,k)\|_2\|\int_a^b\overline{\phi_n(\ )}X_t\,dt\|+$$

$$+\sqrt{M(b-a)}\sum_{n=0}^{N}\|\tilde{\phi}_n(t,k)\|_2\|\overline{\phi_n(t)-\tilde{\phi}_n(t,k)}\|_2$$

Así, haciendo tender k→∞, por el teorema 3.2.2 se concluye (3.3.8) - con lo que queda probada la convergencia.

3.4. APLICACION A PROCESOS C[illegible]OCIDOS.

Vamos a construir el desarrollo aproximado de Karhunen-Loève para los procesos de Wiener, Puente Browniano, y Ornstein-Uhlenbeck. En todos los - casos consideraremos un sistema ortonormal con solo dos funciones lineal-- mente independientes $\{f_o, f_1\}$, que forma parte de un sistema completo en L^2. Tales funciones $f_i(t)$ van a ser, o bien polinomios de Legendre, o bien fun ciones trigonométricas.

I) Proceso de Wiener.- Empecemos considerando el siguiente sistema de poli nomios de Legendre en el intervalo [0,1]:

$$\{f_o(t)=1, \quad f_1(t)=2\sqrt{3}\,t-\sqrt{3}\} \qquad (3.4.1)$$

(En general, los polinomios de Legendre están definidos en el intervalo -- [-1, 1], con función peso w(x)=1, mediante:

$$P_o(t)=1\ , \quad P_1(t)=t\ , \quad P_{n+1}(t)=\frac{2n+1}{n+1}\,P_n(t)-\frac{n}{n+1}\,P_{n-1}(t), \quad n\geq 1\ )$$

Vamos entonces a calcular los autovalores y autofunciones aproximados de la ecuación integral

$$\int_o^1 \min(t,s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[0\ 1] \qquad (3.4.2)$$

mediante el método de Rayleigh-Ritz, utilizando el sistema (3.4.1)

$$A_{oo}=\int_o^1\int_o^1 \min(t,s).1.1\ dtds=\int_o^1\left[\int_o^t sds+t\int_t^1 ds\right]dt =$$

$$=\int_o^1\left[\frac{t^2}{2}+t(1-t)\right]dt=\frac{1}{3}$$

$$A_{o1}=\int_o^1\int_o^1 \min(t,s).1.(2\sqrt{3}\,s-\sqrt{3})dtds=\sqrt{3}\int_o^1\left[\int_o^t s(2s-1)+t\int_t^1(2s-1)ds\right]dt=$$

$$=\sqrt{3}\int_o^1\left(\frac{2t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t^2-t^3\right)dt=\sqrt{3}\int_o^1\left(-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}\right)dt=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$A_{10}=\int_0^1\int_0^1 \min(t,s).1.(2\sqrt{3}t-\sqrt{3})\,dtds=\sqrt{3}\int_0^1\Big[\int_0^t s\,ds+t\int_t^1 ds\Big](2t-1)dt=$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1(t-\frac{t^2}{2})(2t-1)dt=\sqrt{3}\int_0^1(-t^3+\frac{5}{2}t^2-t)dt=\frac{\sqrt{3}}{12}=\overline{A_{01}}.$$

Como era de esperar.

$$A_{11}=\int_0^1\int_0^1 \min(t,s)(2\sqrt{3}s-\sqrt{3})(2\sqrt{3}t-\sqrt{3})\,ds=$$

$$=3\int_0^1\Big[\int_0^1 \min(t,s)(2s-1)ds\Big](2t-1)dt=3\int_0^1(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3})(2t-1)dt=$$

$$=3\int_0^1(\frac{2}{3}t^4+\frac{4}{3}t^3-\frac{t^2}{2})dt=\frac{1}{10}$$

Por tanto tenemos

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{3}}{12}\\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{10}\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad(3.4.3)$$

Así la ecuación (3.4.2) puede reducirse al siguiente problema matricial de autovalores:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\lambda & \frac{\sqrt{3}}{12}\\ \frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{1}{10}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{a}_0\\ \tilde{a}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\qquad(3.4.4)$$

Su polinomio característico viene dado por:

$$|A-\lambda I|=0\Longrightarrow(\frac{1}{3}-\lambda)(\frac{1}{10}-\lambda)-\frac{3}{144}=0\Longrightarrow\lambda^2-\frac{13}{30}\lambda+\frac{1}{80}=0\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\tilde{\lambda}_0(1)=0'4022589\\ \tilde{\lambda}_1(1)=0'0310744\end{cases}\qquad(3.4.5)$$

y estos son los autovalores aproximados.

Sustituyendo (3.4.5) en el problema (3.4.4), obtenemos las autofunciones aproximadas:

$$\tilde{I}_o(1)=0'4022589 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -0'0689256 & 0'1443375 \\ 0'1443375 & -0'3022589 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_o \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tilde{a}_1 = 0'47753\tilde{a}_o \Longrightarrow \tilde{\phi}_o(t,1)=1+0'47753t \qquad (3.4.6)$$

$$\tilde{I}_1(1)=0'0310744 \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0'3022589 & 0'1443375 \\ 0'1443375 & 0'0689256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_o \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tilde{a}_1=-2'09411\tilde{a}_o \Longrightarrow \tilde{\phi}_1(t,1)=1-2'09411t \qquad (3.4.7)$$

Por tanto queda establecido el desarrollo (3.3.1) para el proceso de Wiener con sistema de funciones (3.4.1).

Vamos a considerar ahora para el proceso de Wiener, el sistema de funciones trigonométricas en $[0,1]$:

$$\{f_o(t)=1 \ , \ f_1(t)=\sqrt{2}\cos\pi t\} \qquad (3.4.8)$$

Así, razonando igual que en el caso anterior se obtiene

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{\pi^2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{1}{\pi^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad B \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.4.9)$$

con lo que el problema matricial de autovalores asociado a la ecuación --- (3.4.2) es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\lambda & \frac{-\sqrt{2}}{\pi^2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\pi^2} & \frac{1}{\pi^2}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_o \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.4.10)$$

Su polinomio característico viene entonces dado por:

$$|A-\lambda I|=0 \Longrightarrow (\frac{1}{3}-\lambda)(\frac{1}{\pi^2}-\lambda)+\frac{2}{\pi^4}=0 \Longrightarrow \lambda^2-\lambda(\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi^2})+(\frac{1}{3\pi^2}-\frac{2}{\pi^4})=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \tilde{\lambda}_o(1)=0'4016892 \\ \tilde{\lambda}_1(1)=0'0329652 \end{cases} \qquad (3.4.11)$$

Sustituyendo (3.4.11) en el problema matricial (3.4.10) obtenemos las autofunciones aproximadas:

$$\tilde{\lambda}_o(1)=0'4016892 \Rightarrow \begin{pmatrix} -0'0683667 & -0'1432897 \\ -0'1432897 & -0'3003789 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a}_o \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_1 = -0'4771222\tilde{a}_o \Rightarrow \tilde{\phi}_o(t,1)=1-0'67475\cos\pi t \qquad (3.4.12)$$

$$\tilde{\lambda}_1(1)=0'0329652 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0'3003681 & -0'1432897 \\ -0'1432897 & 0'068356 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a}_o \\ \tilde{a}_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{a}_1 = 2'0962271\tilde{a}_o \Rightarrow \tilde{\phi}_1(t,1)= 1+2'9645\cos\pi t \qquad (3.4.13)$$

con lo que queda establecido el desarrollo (3.3.1) para el proceso de Wiener con sistema de funciones (3.4.8).

Para más detalles ver [41]

II) Proceso Puente Browniano.- Vamos a construir ahora el desarrollo aproximado del proceso Puente Browniano en [0,1]. Para ello habrá que resolver numéricamente la ecuación.

$$\int_o^1 \min(t,s)[1-\max(t,s)]\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[0,1] \qquad (3.4.14).$$

Comencemos considerando el sistema de funciones trigonométricas ----- (3.1.8). Así tenemos:

$$A_{oo}=\int_o^1\int_o^1 R(t,s).1.1.dtds=\int_o^1[(1-t)\int_o^t sds+t\int_t^1(1-s)ds]dt=$$

$$=\int_o^1[(1-t)\frac{t^2}{2}+t(1-\frac{1}{2}-t+\frac{t^2}{2})]dt=\int_o^1(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2})dt=\frac{1}{12}=0'0833333$$

$$A_{1o}=\int_o^1\int_o^1 R(t,s)\sqrt{2}\cos\pi t.1.dtds=\sqrt{2}\int_o^1[\int_o^1 R(t,s)ds]\cos\pi t dt=$$

$$=\sqrt{2}\int_o^1(\frac{t}{2}-\frac{t^2}{2})\cos\pi t dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_o^1(t-t^2)\cos\pi t dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(-\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\right)-\left(-\frac{2}{\pi^2}\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}\right)=0=\overline{A_{01}}=A_{01}$$

$$A_{11}=\int_0^1\int_0^1 R(t,s)\sqrt{2}\cos\pi s\sqrt{2}\cos\pi t\,dt\,ds=2\int_0^1\left[\int_0^1 R(t,s)\cos\pi s\,ds\right]\cos\pi t\,dt=$$

$$=2\int_0^1\left[(1-t)\int_0^t s\cos\pi s\,ds+t\int_t^1(1-s)\cos\pi s\,ds\right]\cos\pi t\,dt=$$

$$=2\int_0^1\left[(1-t)\left(\frac{1}{\pi}t\,\mathrm{sen}\,\pi t+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi t-\frac{1}{\pi^2}\right)+t\left(\frac{1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\pi t+\frac{1}{\pi}t\,\mathrm{sen}\,\pi t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\pi^2}\cos\pi t\right)\right]\cos\pi t\,dt=2\int_0^1\left(\frac{1}{\pi^2}\cos\pi t-\frac{1}{\pi^2}+\frac{2}{\pi^2}t\right)\cos\pi t\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\cos^2\pi t\,dt-\frac{2}{\pi^2}\int_0^1\cos\pi t\,dt+\frac{4}{\pi^2}\int_0^1 t\cos\pi t\,dt=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{2}-0+\frac{4}{\pi^2}\left(\frac{-1}{\pi^2}-\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{1}{\pi^2}-\frac{8}{\pi^4}=\frac{1}{\pi^2}\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)=0'0191933$$

Por tanto, tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}0'0833333 & 0\\ 0 & 0'0191933\end{pmatrix}\quad;\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad(3.4.15)$$

con lo que el problema matricial asociado a la ecuación (3.4.14) tiene como autovalores

$$\begin{aligned}\lambda_0(1)&=0'0833333\\ \lambda_1(1)&=0'0191933\end{aligned}\qquad(3.4.16)$$

Por tanto las autofunciones aproximadas son:

$\lambda_0(1)=0'0833333 \Longrightarrow \tilde{a}_1=0\ ,\ \forall\tilde{a}_0\in R$

Luego podemos considerar $\tilde{a}_0=1$, y así

$$\tilde{\phi}_0(t,1)=1\qquad(3.4.17)$$

$\lambda_1(1)=0'0191933 \Longrightarrow \tilde{a}_0=0\ ,\ \forall\tilde{a}_1\in R$

Luego podemos considerar $\tilde{a}_1=1$, y así

$$\tilde{\phi}_1(t,1)=\sqrt{2}\cos\pi t\qquad(3.4.18)$$

Así podemos establecer el desarrollo aproximado de Karhunen-Loève para el proceso Puente Browniano con dos términos.

Si eligiésemos el sistema de polinomios de Legendre (3.4.1) para resolver la ecuación integral (3.4.14), tendríamos

$$A = \begin{pmatrix} 0'0833333 & 0 \\ 0 & 0'0166666 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.4.19)$$

sin más que seguir un proceso análogo al anterior.

Así los autovalores del correspondiente problema matricial son:

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_0(1) &= 0'0833333 \\ \tilde{\lambda}_1(1) &= 0'0166666 \end{aligned} \qquad (3.4.20)$$

por lo que las autofunciones aproximadas, entonces son:

$$\tilde{\lambda}_0(1)=0'0833333 \Longrightarrow \tilde{a}_1=0, \quad \forall \tilde{a}_0 \in \mathbb{R} \cdot \tilde{a}_0=1 \Longrightarrow \phi_0(t,1)=1 \qquad (3.4.21)$$

$$\tilde{\lambda}_1(1)=0'0166666 \Longrightarrow \tilde{a}_0=1, \quad \forall \tilde{a}_1 \in \mathbb{R} \cdot \tilde{a}_1=1 \Longrightarrow \phi_1(t,1)=2\sqrt{3}t-\sqrt{3} \qquad (3.4.22)$$

Y así puede establecerse el desarrollo aproximado (3.3.1) para el sistema (3.4.1).

III) <u>Proceso de Ornstein-Uhlenbeck</u>.- Estudiemos finalmente el desarrollo aproximado de Karhunen-Loève para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Por simplificar supondremos que está definido en el intervalo $[-1,1]$, y que la constante k que aparece en (2.3.1) es igual a uno. Así tendremos que resolver numéricamente la ecuación:

$$\int_{-1}^{1} e^{-\alpha|t-s|}\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t \in [-1,1] \qquad (3.4.23)$$

Utilizaremos para ello el sistema de polinomios de Legendre en $[-1,1]$:

$$\{f_0(t)=1 \ , \quad f_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}\, t; \qquad (3.4.24)$$

Así, operando como en casos anteriores tenemos:

$$A_{oo}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-a|t-s|}\,.1.1\,dtds=\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{t} e^{-a(t-s)}ds+\int_{t}^{1} e^{a(t-s)}ds\right]dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[e^{-at}\int_{-1}^{t} e^{as}ds+e^{at}\int_{t}^{1} e^{-as}ds\right]dt=\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}\left[e^{-at}(e^{at}-e^{-a})-e^{at}(e^{-a}-e^{-at})\right]dt=$$

$$=\frac{1}{a}\int_{-1}^{1}(2-e^{-a}e^{-at}-e^{-a}e^{at})dt=\frac{1}{a}\left[4+\frac{e^{-a}}{a}(e^{-a}-e^{a})-\frac{e^{-a}}{a}(e^{a}-e^{-a})\right]=$$

$$=\frac{1}{a}\left(4+\frac{2e^{-2a}}{a}-\frac{2}{a}\right)=\frac{2}{a}\left(2-\frac{1}{a}+\frac{e^{-2a}}{a}\right)$$

$$A_{1o}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-a|t-s|}\,.1.\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\,dtds=\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1} e^{-a|t-s|}ds\right]tdt=$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^{1}(2-e^{-a}e^{-at}-e^{-a}e^{at})dt=$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}\left[-e^{-a}\left(-\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-a}}{a^2}-\frac{e^{a}}{a}+\frac{e^{a}}{a^2}\right)-e^{-a}\left(\frac{e^{a}}{a}-\frac{e^{a}}{a^2}+\frac{e^{-a}}{a}+\frac{e^{-a}}{a^2}\right)\right]=0=A_{o1}$$

$$A_{11}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-a|t-s|}\sqrt{\frac{3}{2}}t.\sqrt{\frac{3}{2}}s\,dtds=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{t} e^{-a(t-s)}sds+\int_{t}^{1} e^{a(t-s)}sds\right]tdt=$$

$$=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^{-at}\int_{-1}^{t} e^{as}sds+e^{at}\int_{t}^{1} e^{-as}sds\right]tdt=$$

$$=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[e^{-at}\left(\frac{te^{at}}{a}-\frac{e^{at}}{a^2}+\frac{e^{-a}}{a}+\frac{e^{-a}}{a^2}\right)+e^{at}\left(-\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-a}}{a^2}+\frac{te^{-at}}{a}+\frac{e^{-at}}{a^2}\right)\right]tdt=$$

$$=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left(\frac{2t^2}{a}+\frac{e^{-a}e^{-at}t}{a}+\frac{e^{-a}e^{-at}t}{a^2}-\frac{e^{-a}e^{at}t}{a}-\frac{e^{-a}e^{at}t}{a^2}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}\left[\frac{4}{3a}+\frac{e^{-a}}{a}\left(-\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-a}}{a^2}-\frac{e^{a}}{a}+\frac{e^{a}}{a^2}\right)+\frac{e^{-a}}{a^2}\left(-\frac{e^{-a}}{a}-\frac{e^{-a}}{a^2}-\frac{e^{a}}{a}+\frac{e^{a}}{a^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-a}}{a}\left(\frac{e^{a}}{a}-\frac{e^{a}}{a^2}+\frac{e^{-a}}{a}+\frac{e^{-a}}{a^2}\right)-\frac{e^{-a}}{a^2}\left(\frac{e^{a}}{a}-\frac{e^{a}}{a^2}+\frac{e^{-a}}{a}+\frac{e^{-a}}{a^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{4}{3a}-\frac{2e^{-2a}}{a^2}-\frac{4e^{-2a}}{a^3}-\frac{2e^{-2a}}{a^4}-\frac{2}{a^2}+\frac{2}{a^4}\right)=$$

$$=\frac{3}{a}\left(\frac{2}{3}-\frac{e^{-2a}}{a}-\frac{e^{-2a}}{a^2}-\frac{e^{-2a}}{a^2}-\frac{e^{-2a}}{a^3}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}\right)$$

Por tanto tenemos:

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{a}\left(2-\frac{1}{a}+\frac{e^{-2a}}{a}\right) & 0\\ 0 & \frac{3}{a}\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^3}-\frac{e^{-2a}}{a}-\frac{2e^{-2a}}{a^2}-\frac{e^{-2a}}{a^3}\right)\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(3.4.25)

En el caso particular de ser $\alpha=1$, se tiene

$$A=\begin{pmatrix} 2(1+e^{-2}) & 0 \\ 0 & 2(1-6e^{-2}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2'27067 & 0 \\ 0 & 0'37598 \end{pmatrix} \quad (3.4.26)$$

Por tanto los autovalores aproximados de la ecuación (3.4.23) son

$$\tilde{\lambda}_0(1)=2'27067$$
$$\tilde{\lambda}_1(1)=0'37598 \quad (3.4.27)$$

y sus correspondientes autofunciones aproximadas son:

$$\tilde{\lambda}_0(1)=2'27067 \Rightarrow \tilde{a}_1=0,\ \forall \tilde{a}_0\in R \text{ y } \tilde{a}_0=1 \Rightarrow \tilde{\phi}_0(t,1)=1 \quad (3.4.28)$$

$$\tilde{\lambda}_1(1)=0'37598 \Rightarrow \tilde{a}_0=0,\ \forall \tilde{a}_1\in R \text{ y } \tilde{a}_1=1 \Rightarrow \tilde{\phi}_1(t,1)=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t \quad (3.4.29)$$

Por tanto queda establecido el desarrollo (3.3.1) para el proceso de Ornstein-Uhlenbeck para el sistema (3.4.24).

3.5. ESTUDIO DEL ERROR DE APROXIMACION.

En el §3.3 hemos demostrado que el desarrollo aproximado de Karhunen-Loève con N+1 términos, converge hacia el desarrollo formal cuando el número de funciones $f_i(t)$ consideradas tiende a infinito. Este resultado es fundamental para asegurar que la definición (3.3.1) es consistente.

Sin embargo, en la práctica para aproximar las autofunciones, siempre se utiliza un sistema finito $\{f_0,f_1,\ldots,f_k\}$, y así el desarrollo aproximado de Karhunen-Loève tendrá a lo sumo k+1 términos, es decir, $N\leq k$.

Vamos a estudiar el error en m.c. que se comete al aproximar el proceso $\{X_t \mid t\in[a,b]\}$ mediante (3.3.1). Para ello tendremos que evaluar $||X_t-\bar{\bar{X}}||$, siendo $\bar{\bar{X}}$ definido en (3.3.7), y $\|\ \|$ la norma en el espacio H_X.

$$E\left[X_t\left(\int_a^b \tilde{\phi}_n(s,k)\bar{\bar{X}}_s\,ds\right)\right]=\int_a^b k(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)\,ds=\tilde{\lambda}_n(k)\tilde{\phi}_n(t,k)+\gamma_n(t,k)$$

(3.5.1)

Así operando y agrupando convenientemente, resulta:

$$||X_t-\tilde{\Sigma}||^2=E[(X_t-\Sigma)\overline{(X_t-\tilde{\Sigma})}]=R(t,t)-2\sum_{n=0}^{N}\tilde{\lambda}_n(k)|\tilde{\phi}_n(t,k)|^2-$$

$$-2Re[\sum_{n=0}^{N}\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\gamma_n(t,k)]+\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{\lambda}_n(k)\tilde{\phi}_m(t,k)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\cdot$$

$$\cdot\int_a^b\tilde{\phi}_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt+\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{\phi}_m(t,k)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\int_a^b\gamma_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt \qquad (3.5.2)$$

El sistema de autofunciones aproximadas $\{\tilde{\phi}_n(t,k)\}_{n\in N}$ no es ortogonal, pero podemos ortonormalizarlo por el método de Gram-Schmidt. En tal caso, (3.5.2) se expresa de la forma:

$$||X_t-\tilde{\Sigma}||^2=R(t,t)-\sum_{n=0}^{N}\tilde{\lambda}_n(k)|\tilde{\phi}_n(t,k)|^2-2Re[\sum_{n=0}^{N}\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\gamma_n(t,k)]+$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}\tilde{\phi}_m(t,k)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\int_a^b\gamma_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt \qquad (3.5.3)$$

Por tanto, el error en m.c cometido en la aproximación viene dado -- por la raíz cuadrada positiva de (3.5.2) o de (3.5.3).

Estas expresiones no son demasiado manejables; así, con objeto de simplificarlas y hacerlas más operativas, vamos a realizar el siguiente proceso [41]:

Integramos (3.5.3) en [a,b] respecto a t

$$\int_a^b||X_t-\tilde{\Sigma}||^2dt=\sum_{n=0}^{N}\lambda_n\int_a^b|\phi_n(t)|^2dt-\sum_{n=0}^{N}\tilde{\lambda}_n(k)\int_a^b|\tilde{\phi}_n(t,k)|^2dt-$$

$$-2Re[\sum_{n=0}^{N}\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\gamma_n(t,k)dt]+$$

$$+\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N}(\int_a^b\tilde{\phi}_m(t,k)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}dt)(\int_a^b\gamma_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_m(t,k)}dt)=$$

$$=\sum_{n=0}^{N}(\lambda_n-\tilde{\lambda}_n(k))-\sum_{n=0}^{N}\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\gamma_n(t,k)dt \qquad (3.5.4)$$

ya que estamos suponiendo ortonormalizado el sistema $\{\tilde{\phi}_n(t,k)\}_{n\in N}$ y además

por el teorema de Mercer sabemos que:

$$R(t,t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\lambda_n|\phi_n(t)|^2 \quad \text{, en m.c.}$$

Ahora bien, se tiene que:

$$\int_a^b\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\gamma_n(t,k)dt=\int_a^b\int_a^b[R(t,s)-\tilde{R}_k(t,s)]\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\tilde{\phi}_n(s,k)dtds=$$

$$=\int_a^b\int_a^b R(t,s)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\tilde{\phi}_n(s,k)dtds-\int_a^b\left(\int_a^b\tilde{R}_k(t,s)\tilde{\phi}_n(s,k)ds\right).$$

$$\cdot\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}dt=\int_a^b\int_a^b R(t,s)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}\tilde{\phi}_n(s,k)dtds-$$

$$-\tilde{\lambda}_n(k)\int_a^b\tilde{\phi}_n(t,k)\overline{\tilde{\phi}_n(t,k)}dt=\lambda_R[\tilde{\phi}_n]-\tilde{\lambda}_n(k) \qquad (3.5.5)$$

donde $\lambda_R[\tilde{\phi}_n]$ denota el <u>cociente de Rayleigh</u> [3], que se define como aquel autovalor que minimiza $||\gamma_n(t,k)||_2$.

Por tanto, sustituyendo (3.5.5) en (3.5.4) resulta:

$$\int_a^b||X_t-\tilde{\Sigma}||^2dt=\sum_{n=0}^{N}\lambda_n-\sum_{n=0}^{N}\tilde{\lambda}_n(k)-\sum_{n=0}^{N}\lambda_R[\tilde{\phi}_n]+\sum_{n=0}^{N}\tilde{\lambda}_n(k)=\sum_{n=0}^{N}(\lambda_n-\lambda_R[\tilde{\phi}_n]) \qquad (3.5.6)$$

Finalmente, por el primer teorema del valor medio para integrales de funciones contínuas, existirá algún punto $\zeta\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b||X_t-\tilde{\Sigma}||^2dt=(b-a)||X_\zeta-\tilde{\Sigma}_\zeta||^2 \qquad (3.5.7)$$

donde $\tilde{\Sigma}_\zeta$ denota el valor de la sumatoria $\tilde{\Sigma}$ para $t=\zeta$.

Así a partir de (3.5.6) y (3.5.7) concluimos que:

$$||X_\zeta-\tilde{\Sigma}_\zeta||=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\sum_{n=0}^{N}(\lambda_n-\lambda_R[\tilde{\phi}_n])\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.5.8)$$

que se puede interpretar como un error "promediado" de la aproximación con N+1 términos en el intervalo [a,b].

3.6. EL DESARROLLO APROXIMADO DE KARHUNEN-LOEVE PARA PROCESOS DEBILMENTE ESTACIONARIOS.

El procedimiento desarrollado en los apartados anteriores para construir un desarrollo aproximado de Karhunen-Loève para un proceso de segundo orden y contínuo en m.c. $\{X_t | t\in[a,b]\}$, es también de gran utilidad cuando el proceso en cuestión es débilmente estacionario, ya que salvo en el caso de tener densidad espectral racional, no existe un método general válido para calcular las soluciones de la ecuación integral asociada a él, según vimos en el capítulo 2.

No existe un algoritmo específico para resolver numéricamente la ecuación:

$$\int_a^b R(t-s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[a,b]$$

donde R(t-s) es la covarianza del proceso débilmente estacionario $\{X_t | t\in[a,b]\}$. Por tanto el desarrollo aproximado de Karhunen-Loève para dicho proceso, se definirá como en el §3.3 (ver ejemplo III del §3.4).

Para el caso particular de que la ecuación integral asociada a un proceso $\{X_t | t\geq 0\}$ sea la ecuación de Wiener-Hopf:

$$\int_0^\infty R(t-s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\geq 0$$

sí existen procedimientos numéricos para su resolución. Entre ellos cabe destacar el método de Stenger [39] que se basa en la transformada de Fourier. Concretamente, para calcular una autofunción aproximada, lo que se hace es aproximar la transformada de Fourier de la autofunción real, y posteriormente se invierte la transformación.

Otro método eficaz para tratar la ecuación de Wiener-Hopf es el desarrollado por Shinbrot [37], que se basa en las propiedades analíticas de la proyección ortogonal. Además, bajo ciertas hipótesis adicionales, extiende su estudio a ecuaciones integrales cuyos límites de integración son -l y +l, sin más que definir un operador acotado conveniente.

CAPITULO 4

CARACTERIZACION DE PROCESOS GAUSSIANOS MEDIANTE SUS DESARROLLOS DE KARHUNEN-LOEVE.

4.1. FUNDAMENTO DE LAS CARACTERIZACIONES.

En capítulos anteriores hemos visto la importancia de conocer el desarrollo de Karhunen-Loève de un proceso de segundo orden, en problemas estadísticos tales como la inferencia, y en problemas físicos tales como la detección de señales y construcción de filtros óptimos.

Para obtener el desarrollo de Karhunen-Loève de un proceso de segundo orden, imponíamos únicamente que éste fuera contínuo en m.c. Sin embargo,- en algunos casos hay que imponer hipótesis adicionales tales como considerar que el proceso sea Caussiano, con objeto de que las variables aleatorias del desarrollo no sean solamente incorrelacdas (ortogonales), sino además estadísticamente independientes, como es el caso en que hay que evaluar un procesador óptimo de datos; o más aún, suponer que para algunas representaciones del proceso, las variables aleatorias incorrelacdas son independientes, aunque el proceso no sea Gaussiano.

En este capítulo vamos a caracterizar un proceso real con incrementos independientes estacionarios y momentos de cuarto orden finitos, como un -- proceso de Gauss, en términos de su desarrollo de Karhunen-Loève.

Posteriormente generalizaremos la caracterización, a clases de procesos con la misma covarianza. En particular nos referiremos a las covarianzas min (t,s), min (t,s)[T-max (t,s)] siendo T la amplitud del espacio paramétrico del proceso, y $ke^{-\alpha|t-s|}$.

Por último estudiaremos el caso de que el proceso sea débilmente estacionario con densidad espectral racional, centrándonos de forma especial en el caso de un proceso lineal resultante de filtrar un ruido blanco.

4.2. CARACTERIZACION DE UN PROCESO DE GAUSS REAL, DE CUARTO ORDEN, CON INCREMENTOS ESTACIONARIOS INDEPENDIENTES.

La caracterización que vamos a estudiar en esta sección se basa en -- las propiedades de una clase especial de procesos: Los procesos lineales. Comencemos, pues, estudiando dicha clase de procesos.

Un proceso real $\{X_t | t\in[a,b]\}$ es lineal si puede expresarse como la siguiente integral en m.c.:

$$X_t = \int_c^d h(t,\lambda)\,dZ_\lambda \quad , \quad -\infty \le c < d \le \infty \qquad (4.2.1)$$

donde

i) $\{Z_\lambda | \lambda\in[c,d]\}$ es un proceso real, centrado, con incrementos estacionarios independientes, continuidad muestral c.s., y tal que $E[Z_\lambda^4]=0$. Su -- función de covarianza es $R_Z(\lambda,\sigma)=E[Z_\lambda Z_\sigma]$, y su función característica --- $c(\lambda,u)$ viene dada por

$$\log c(\lambda,u) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux)\frac{1}{x^2}\,dk(x)$$

siendo $k(x)$ una función monótona acotada tal que $k(-\infty)=1$.

ii) $\{h(t,\lambda) | (t,\lambda)\in[a,b]\times[c,d]\}$ es un proceso bidimensional real, independiente de $\{Z_\lambda | \lambda\in[c,d]\}$. Si notamos su covarianza por $R_h(t,\lambda,\sigma) = E[h(t,\lambda)h(t,\sigma)]$, entonces

$$\int_c^d \int_c^d R_h(t,\lambda,\sigma)\,d_\lambda d_\sigma R_Z(\lambda,\sigma)$$

existe como integral de Riemann-Stieltjes, y es finita $\forall t\in[a,b]$.

iii) La integral $\int_c^d \int_c^d \int_c^d \int_c^d E[h(t,\lambda)h(t,\sigma)h(t,\tau)h(t,\mu)]\,d_\lambda d_\sigma d_\tau d_\mu E[Z_\lambda Z_\sigma Z_\tau Z_\mu]$ existe y es finita $\forall t\in[a,b]$.

En general, los procesos lineales no tienen por que ser Gaussianos

Un funcional del proceso lineal $\{X_t | t\in[a,b]\}$ de la forma:

$$1=\int_a^b X_t\,dL_t \qquad (4.2.2)$$

se dice que es un <u>funcional lineal</u>. L_t puede ser aleatorio también, y es independiente de $\{Z_\lambda \mid \lambda\in[c,d]\}$ y de $\{h(t,\lambda)\mid(t,\lambda)\in[a,b]\times[c,d]\}$.

Mediante el empleo de funcionales lineales podemos aleatorizar medidas del proceso $\{X_t \mid t\in[a,b]\}$. Así notando

$$\Psi(\lambda)=\int_a^b h(t,\lambda)\,dL_t \qquad (4.2.3)$$

tenemos:

$$1=\int_a^b X_t\,dL_t=\int_a^b\int_c^d h(t,\lambda)\,dZ_\lambda\,dL_t=\int_c^d\int_a^b h(t,\lambda)\,dL_t\,dZ_\lambda=\int_c^d \Psi(\lambda)\,dZ_\lambda \qquad (4.2.4)$$

Pierre [30] ha probado el siguiente resultado

<u>Proposición 4.2.1</u>. Sean 1_1 y 1_2 funcionales lineales del proceso lineal $\{X_t \mid t\in[a,b]\}$, y supongamos que $\Psi_1(\lambda)$ y $\Psi_2(\lambda)$, definidas como en (4.2.3.), son independientes, y que

$$\int_c^d E[\Psi_1^2(\lambda)\Psi_2^2(\lambda)]\,d\lambda>0$$

Entonces 1_1 y 1_2 son independientes si y solo si $\{Z_\lambda \mid \lambda\in[c,d]\}$ es Gaussiano, e $\int_c^d \Psi_1(\lambda)\Psi_2(\lambda)\,d\lambda=0$ con probabilidad 1.

Sea $\{X_t \mid t\in[a,b]\}$ un proceso lineal real de segundo orden, y contínuo en m.c. Así admite un desarrollo de Karhunon-Loève de la forma:

$$X_t=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\zeta_n\phi_n(t) \quad \text{en m.c.}$$

donde

$$\zeta_n=\int_a^b X_t\phi_n(t)\,dt=\int_a^b\left(\int_c^d h(t,\lambda)\,dZ_\lambda\right)\phi_n(t)\,dt \qquad (4.2.5)$$

Se prueba [16] que las dos integrales de (4.2.5) permutan si $h(t,\lambda)$ es no - aleatorio y además

$$I_1=\int_c^d\left(\int_a^b|h(t,\lambda)||\phi_n(t)|dt\right)^2E[|dZ_\lambda|^2]<\infty$$

$$I_2=\int_a^b\left(\int_c^d|h(t,\lambda)|^2|\phi_n(t)|^2E[|dZ_\lambda|^2]\right)^{\frac{1}{2}}dt<\infty \qquad (4.2.6)$$

En nuestro caso, según la forma como hemos definido el proceso $\{Z_\lambda|\lambda\in[c,d]\}$, se tiene que

$$E[|dZ_\lambda|^2]=d\lambda$$

Además, las autofunciones que aparecen en el desarrollo de Karhunen-Loève son ortonormales. Así, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene:

$$I_1\leq\int_c^d\left(\int_a^b|h(t,\lambda)|^2dt\right)d\lambda$$

$$I_2=\int_a^b\left(\int_c^d|h(t,\lambda)|^2d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}|\phi_n(t)|dt\leq\left(\int_a^b\int_c^d|h(t,\lambda)|^2d\lambda dt\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4.2.7)$$

Por tanto, para que se verifique (4.2.6) es condición suficiente que las integrales del miembro derecho en (4.2.7) sean finitas.

Basándonos en estos razonamientos se tiene el siguiente resultado:

<u>Teorema 4.2.2</u>. Sea $\{X_t|t\in[0,1]\}$ un proceso real, centrado, con incrementos estacionarios independientes, y momentos de cuarto orden finitos. Entonces dos variables cualesquiera de su desarrollo de Karhunen-Loève, ζ_n y ζ_m, -- son independientes si y solo si el proceso es Gaussiano.

<u>Demostración</u>: Consideremos la función

$$h(t,\lambda)=\begin{cases}1, & \text{si } \lambda\leq t\\ 0, & \text{si } \lambda>t\end{cases}$$

Así podemos expresar:

$$X_t=\int_0^t dX_\lambda=\int_0^1 h(t,\lambda)dX_\lambda \qquad (4.2.8)$$

por lo que $(X_t|t\in[0,1])$ es un proceso lineal

Supongamos $s<t$; así tenemos:

$$R(t,s)=E[X_tX_s]=E[(X_t-X_s+X_s)X_s]=E[(X_t-X_s)X_s]+E[X_sX_s]=$$

$$=E[X_s X_s]=Var[X_s]=\sigma^2 s, \quad \sigma^2>0$$

ya que el proceso tiene incrementos estacionarios independientes.

Análogamente, si $t<s$, se verifica

$$R(t,s)=Var[X_t]=\sigma^2 t\ , \quad \sigma^2>0$$

Por tanto, la covarianza del proceso en cuestión es

$$R(t,s)=\sigma^2 \min(t,s)$$

Sus autovalores y autofunciones asociados vienen dados por (ejemplo I del §1.3):

$$\lambda_n=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2} \quad ; \quad \phi_n(t)=\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \quad \forall n\in N$$

Además las integrales I_1 e I_2 definidas en (4.2.6) son finitas ya — que en nuestro caso es:

$$\int_a^b\int_c^d |h(t,\lambda)|^2 dtd\lambda=\int_0^1\int_0^1 |h(t,\lambda)|^2 dtd\lambda=\int_0^1\left(\int_\lambda^1 dt\right)d\lambda=$$

$$=\int_0^1(1-\lambda)d\lambda=\lambda-\frac{\lambda^2}{2}\Big|_0^1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<\infty$$

Por tanto podemos intercambiar las integrales que figuran en el miembro de recho de (4.2.5), obteniéndose:

$$\zeta_n=\int_0^1\left(\int_0^1 h(t,\lambda)\phi_n(t)dt\right)dX_\lambda=\int_0^1\psi_n(\lambda)dX_\lambda$$

donde

$$\psi_n(\lambda)=\int_0^1 h(t,\lambda)\phi_n(t)dt=\int_\lambda^1\phi_n(t)dt=\sqrt{2}\int_\lambda^1\operatorname{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)dt$$

Así $\psi_n(\lambda)$ es contínua, por lo que ζ_n es un funcional lineal. Además, se —

prueba sin más que integrar que:

$$\int_0^1 \nabla_n^2(\lambda)\nabla_m^2(\lambda)d\lambda \neq 0$$

por lo que

$$\int_0^1 E[\nabla_n^2(\lambda)\nabla_m^2(\lambda)]d\lambda > 0$$

Si suponemos entonces que dos variables cualesquiera ζ_n y ζ_m del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso $\{X_t | t\in[0,1]\}$ son independientes, por la proposición 4.2.1 dicho proceso será Gaussiano.

La demostración recíproca es trivial, ya que dado un proceso de Gauss, la incorrelación equivale a la independencia, y al ser incorreladas, por construcción, todas las variables del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso, serán independientes.

Resumiendo, observemos que para que un proceso que cumple los requisitos del teorema 4.2.2 sea Gaussiano, basta imponer que solo dos coeficientes de su desarrollo de Karhunen-Loève sean independientes.

El teorema 4.2.2. fué generalizado por Buhlmann [7] que demostró que si $\{X_t | t\in[a,b]\}$ es una L^2-martingala y todas las variables de su desarrollo de Karhunen-Loève son independientes, entonces el proceso es Gaussiano.

Como puede observarse, al considerar una clase más amplia de procesos como son las L^2-martingalas, hay que imponer una condición más fuerte para que el proceso sea Gaussiano como es el considerar que todas las variables de su desarrollo sean independientes.

A su vez estos resultados pueden generalizarse a una clase aún más amplia de procesos y de representaciones. Así se demuestra [31] que si $\{X_t | t\in R\}$ es un proceso separable, con incrementos independientes, y contínuo en probabilidad, entonces dicho proceso puede representarse de la forma:

$$X_t = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i(t) \quad \text{en probabilidad}$$

siendo $(Y_i(t))_{i\in N}$ una sucesión de procesos independientes no degenerados, y con continuidad muestral c.s. si y solo si $(X_t|t\in R)$ es Gaussiano.

Observemos que esta caracterización comprende procesos sin momentos de segundo orden finitos, y representaciones cuyas componentes no tienen que ser ortogonales.

4.3. CARACTERIZACION DE PROCESOS GAUSSIANOS ENTRE CLASES CON LA MISMA FUNCION DE COVARIANZA.

En el §4.2 hemos caracterizado la clase de procesos reales, con incrementos estacionarios independientes, y momentos de cuarto orden finitos, como procesos de Gauss, en términos del desarrollo de Karhunen-Loève. A continuación vamos a caracterizar las clases de procesos con covarianzas de uno de estos tres tipos: $\min(t,s)$, $\min(t,s)[T-\max(t,s)]$ siendo T la amplitud del espacio paramétrico del proceso, y $ke^{-\alpha|t-s|}$. Para ello necesitaremos conocer los desarrollos de Karhunen-Loève de cada proceso sobre dos intervalos distintos.

Un resultado básico en el que nos apoyaremos contínuamente es el siguiente [32].

Teorema 4.3.1 (Teorema de Ramachandran). Sea $(Z_n)_{n\in N}$ una sucesión de variables aleatorias mútuamente independientes, y sean $(a_n)_{n\in N}$ y $(b_n)_{n\in N}$ dos sucesiones de números reales tales que verifican:

i) Las subsucesiones $(\frac{a_n}{b_n}|a_n b_n\neq 0)_{n\in N}$ y $(\frac{b_n}{a_n}|a_n b_n\neq 0)_{n\in N}$ están acotadas.

ii) Las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n Z_n$ convergen en probabilidad hacia las variables aleatorias X e Y respectivamente.

iii) X e Y son independientes.

Entonces para todo n∈N tal que $a_n b_n \neq 0$, Z_n es Gaussiana.

I) Clase de procesos con covarianza R(t,s)=min(t,s).-

Sea X_t un proceso con función de covarianza

$$R(t,s)= \min(t,s) \tag{4.3.1}$$

y consideremos su desarrollo de Karhunen-Loève sobre dos intervalos reales I_1 e I_2 tales que $I_1 \subset I_2$:

$$X_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=o}^{N} \xi_i(I_1)\phi_i(t;I_1) = \sum_{i=o}^{\infty} \xi_i(I_1)\phi_i(t;I_1), \quad \forall t\in I_1$$

$$Y_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=o}^{N} \xi_j(I_2)\phi_j(t;I_2) = \sum_{j=o}^{\infty} \xi_j(I_2)\phi_j(t;I_2), \quad \forall t\in I_2 \tag{4.3.2}$$

en m.c. y uniformemente sobre los respectivos intervalos, siendo:

$$\xi_i(I_1) = \int_{I_1} \phi_i(t;I_1) X_t\, dt \quad \text{en m.c.}$$

$$\xi_j(I_2) = \int_{I_2} \phi_j(t;I_2) X_t\, dt \quad \text{en m.c.} \tag{4.3.3}$$

y donde los miembros derechos en (4.3.2) son simple notación.

Notando, entonces

$$I_{ji}(I_2;I_1) = \int_{I_1} \phi_j(t;I_2)\phi_i(t;I_1)\, dt \tag{4.3.4}$$

se tiene:

$$\xi_i(I_1) = \int_{I_1} X_t \phi_i(t;I_1)\, dt = \int_{I_1} \sum_{j=o}^{\infty} \xi_j(I_2)\phi_j(t;I_2)\phi_i(t;I_1)\, dt =$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} I_{ji}(I_2;I_1)\xi_j(I_2) \tag{4.3.5}$$

en virtud de la convergencia uniforme del desarrollo de Karhunen-Loève.

La caracterización buscada es la siguiente:

Teorema 4.3.2.- Sea X_t un proceso con covarianza dada por (4.3.1),y consideremos sus desarrollos de Karhunen-Loève (4.3.2) sobre dos intervalos de la forma $I_1=[0,T_1]$ e $I_2=[0,T_2]$, donde $T_1<T_2$. Supongamos que $nT_1\neq mT_2$ $\forall n,m\in Z$ impares, y que las variables $\zeta_i(I_2)$ son mútuamente independientes entre sí, $\forall i\in N$. Entonces dos variables $\zeta_i(I_1)$ y $\zeta_j(I_1)$ son independientes si y solo si X_t es Gaussiano.

Demostración: La condición suficiente es trivial, sin mas que razonar como en el teorema 4.2.2.

Para demostrar la condición necesaria consideremos los autovalores y autofunciones asociados a la covarianza (4.3.1) que serán de la forma --- (ejemplo I del §1.3):

$$\lambda_i=\frac{T^2}{\pi^2(i+\frac{1}{2})^2}\quad;\quad \phi_i(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_i}}\right),\quad i=0,1,2,\ldots$$

Así tenemos:

$$I_{ji}(I_2;I_1)=\int_0^{T_1}\phi_j(t;I_2)\phi_i(t;I_1)dt=\int_0^{T_1}\sqrt{\frac{2}{T_2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_j(I_2)}}\right)\sqrt{\frac{2}{T_1}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_j(I_1)}}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{T_1\cdot T_2}}\,\frac{\lambda_i(I_1)\sqrt{\lambda_j(I_2)}}{\lambda_i(I_1)-\lambda_j(I_2)}\,\mathrm{sen}\left(\frac{T_1}{\sqrt{\lambda_i(I_1)}}\right)\cos\left(\frac{T_1}{\sqrt{\lambda_j(I_2)}}\right)$$

sin más que integrar.

Ahora bien

$$\cos\left(\frac{T_1}{\sqrt{\lambda_j(I_2)}}\right)=\cos\left(\frac{T_1}{\frac{T_2}{\pi(j+\frac{1}{2})}}\right)=\cos\left[(j+\tfrac{1}{2})\pi\cdot\frac{T_1}{T_2}\right]$$

Por tanto

$$\cos\left(\frac{T_1}{\sqrt{\lambda_j(I_2)}}\right)=0\Longleftrightarrow \pi(j+\tfrac{1}{2})\frac{T_1}{T_2}=(k+\tfrac{1}{2})\pi\ ,\quad k\in Z\ \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (j+\tfrac{1}{2})T_1=(k+\tfrac{1}{2})T_2,\quad k\in Z \Leftrightarrow (2j+1)T_1=(2k+1)T_2,\quad k\in Z$$

Pero por hipótesis es $nT_1 \neq mT_2$, $\forall m,n\in Z$ impares. Por tanto ha de ser

$$\cos\left(\frac{T_1}{\lambda_j(I_2)}\right)=0$$

Así mismo se tiene:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{T_1}{\lambda_i(I_1)}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{T_1}{\frac{T_1}{\pi(i+\frac{1}{2})}}\right)=\operatorname{sen}\left[\pi(i+\tfrac{1}{2})\right]=\pm 1.$$

Por tanto $I_{ji}(I_2;I_1)\neq 0$, y además se verifica:

$$\frac{I_{ji}(I_2;I_1)}{I_{j1}(I_2;I_1)}=\frac{\lambda_i(I_1)}{\lambda_1(I_1)}\,\frac{\lambda_1(I_1)-\lambda_j(I_2)}{\lambda_i(I_1)-\lambda_j(I_2)}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{T_1}{\lambda_i(I_1)}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{T_1}{\lambda_1(I_1)}\right)}=$$

$$=\frac{T_1^2-\frac{(1+\frac{1}{2})^2}{(j+\frac{1}{2})^2}T_2^2}{T_1^2-\frac{(i+\frac{1}{2})^2}{(j+\frac{1}{2})^2}T_2^2}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{T_1}{\lambda_i(I_1)}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{T_1}{\lambda_1(I_1)}\right)}$$

sin más que sustituir y operar.

Por tanto, considerando:

$$\begin{aligned}\zeta_i(I_1)&=\sum_{j=0}^{\infty} I_{ji}(I_2;I_1)\zeta_j(I_2)\quad \text{en m.c.}\\ \zeta_1(I_1)&=\sum_{j=0}^{\infty} I_{j1}(I_2;I_1)\zeta_j(I_2)\quad \text{en m.c.}\end{aligned}\qquad (4.3.6)$$

se verifica:

i) $\left\{\left[\frac{I_{ji}(I_2;I_1)}{I_{j1}(I_2;I_1)}\right]\right\}$ y $\left\{\left[\frac{I_{j1}(I_2;I_1)}{I_{ji}(I_2;I_1)}\right]\right\}$ están acotadas, e $I_{ji}(I_2;I_1)$ bajo nuestras hipótesis es no nulo.

ii) Las series (4.3.6) convergen en m.c., y por tanto en probabilidad hacia $\zeta_i(I_1)$ y $\zeta_1(I_1)$ respectivamente.

iii) Por hipótesis $\zeta_i(I_1)$ y $\zeta_1(I_1)$ son independientes.

Así por el teorema de Rumachandran (4.3.1), las variables $\{\zeta_j(I_2)\}_{j\in N}$ son Gaussianas, y por tanto, el proceso también lo es.

II) <u>Clase de procesos con covarianza $R(t,s)=\min(t,s)[T-\max(t,s)]$</u>.-

Sea X_t un proceso con función de covarianza

$$R(t,s)=\min(t,s)[T-\max(t,s)] \qquad (4.3.7)$$

siendo T la amplitud del espacio paramétrico del proceso.

Para obtener el desarrollo de Karhunen-Loève de dicho proceso sobre el intervalo $[0,T]$, se procede como en el ejemplo II del §1.3. Así se tiene la ecuación integral

$$(T-t)\int_0^t s\phi(s)ds+t\int_t^T(T-s)\phi(s)ds=\lambda\phi(t), \quad \forall t\in[0,T] \qquad (4.3.8)$$

que tras ser derivada dos veces respecto a t, se reduce a

$$\lambda\phi''(t)=-T\phi(t), \quad \forall t\in[0,T] \qquad (4.3.9)$$

La solución general de la ecuación (4.3.9) viene dada por:

$$\phi(t)=c_1\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}t\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}t\right) \qquad (4.3.10)$$

A partir de (4.3.8) se obtienen las condiciones de contorno:

$$\phi(0)=0 \quad ; \quad \phi(T)=0 \qquad (4.3.11)$$

que sustituidas en (4.3.10) nos dan:

$$\phi(t)=c_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda}}t\right) \quad ; \quad \mathrm{sen}\left(\frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}}\right)=0$$

De igual forma que en (1.3.10), para que las autofunciones sean ortonormales ha de ser $c_1=\sqrt{\frac{2}{T}}$. Por tanto, las autofunciones son de la forma:

$$\phi_n(t)=\sqrt{\frac{2}{T}}\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{T}{\lambda_n}}t\right) \qquad (4.3.12)$$

y los autovalores:

$$\mathrm{sen}\left(\frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}}\right)_n=0 \Longleftrightarrow \frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}}_n=0 \Longleftrightarrow \frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{\lambda}}_n=n\pi, \quad \forall n\in\mathbb{Z} \Longleftrightarrow \lambda_n=\frac{T^3}{n^2\pi^2}, \quad \forall n\in\mathbb{Z} \qquad (4.3.13)$$

En este caso, la caracterización buscada es la siguiente:

Teorema 4.3.3.- Sea X_t un proceso con covarianza dada por (4.3.7), y consideremos sus desarrollos de Karhunen-Loève (4.3.2) sobre dos intervalos de la forma $I_1=[0,T_1]$ e $I_2=[0,T_2]$ donde $T_1<T_2$. Supongamos que $nT_1\neq mT_2$, $\forall n,m\in\mathbb{Z}$, y que las variables $\zeta_i(I_2)$ son mútuamente independientes entre sí $\forall i\in\mathbb{N}$. Entonces dos variables $\zeta_i(I_1)$ y $\zeta_j(I_1)$ son independientes si y solo si X_t es Gaussiano.

Demostración: La condición suficiente es trivial. Para demostrar la necesidad, partiendo de los autovalores y autofunciones del proceso, hagamos los cálculos siguientes:

$$I_{ji}(I_2;I_1)=\int_0^{T_1}\phi_j(t;I_2)\phi_i(t;I_1)\,dt=\int_0^{T_1}\sqrt{\frac{2}{T_2}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{j\pi t}{T_2}\right)\sqrt{\frac{2}{T_1}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{i\pi t}{T_1}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{T_1T_2}}\int_0^{T_1}\mathrm{sen}\left(\frac{j\pi t}{T_2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{i\pi t}{T_1}\right)dt=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{T_1T_2}}\,\frac{iT_1T_2^2}{j^2T_1^2\pi-i^2T_2^2\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{j\pi T_1}{T_2}\right)\cos(i\pi)=$$

$$= \pm \frac{iT_2\sqrt{T_1T_2}}{j^2T_1^2\pi - i^2T_2^2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi T_1}{T_2}\right)$$

sin más que integrar.

Ahora bien

$$\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi T_1}{T_2}\right)=0 \Longleftrightarrow j\pi\frac{T_1}{T_2} = k\pi\,,\quad k\in Z \Longleftrightarrow jT_1=kT_2,\quad k\in Z$$

Pero por hipótesis es $nT_1 \neq mT_2$, $\forall n,m\in Z$. Por tanto ha de ser $\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi T_1}{T_2}\right)\neq 0$, y así $I_{ji}(I_2;I_1)\neq 0$.

Razonando entonces como en el teorema 4.3.2, se concluye.

III) Clase de procesos con covarianza $R(t,s)=ke^{-a|t-s|}$.-

Sea X_t un proceso con función de covarianza

$$R(t,s)=ke^{-a|t-s|},\quad k>0,\quad a>0 \qquad (4.3.14)$$

y consideremos su desarrollo de Karhunen-Loève sobre el intervalo $I=[-T,T]$, que como sabemos (ejemplo II del §3.2) viene dado por

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i(I)k_i(I)\cos[b_i(I)t] + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\zeta}_i(I)\tilde{k}_i(I)\operatorname{sen}[\tilde{b}_i(I)t] \qquad (4.3.15)$$

ya que las autofunciones son senos o cosenos según el índice sea par o impar respectivamente. (En la expresión (4.3.15) hemos notado directamente - por simplificación $\sum_{i=0}^{\infty} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N}$ en m.c. y uniformemente $\forall t\in I$).

Como en los casos anteriores consideraremos dos intervalos $I_1=[-T_1,T_1]$ e $I_2=[-T_2,T_2]$, donde $T_1<T_2$. Así las variables $\zeta_i(I_1)$ y $\tilde{\zeta}_i(I_1)$ del desarrollo (4.3.15) respecto al intervalo I_1 vienen dadas por:

$$\zeta_i(I_1)=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j(I_2)k_j(I_2)k_i(I_1)\int_{-T_1}^{T_1}\cos[b_i(I_1)t]\cos[b_j(I_2)t]dt \quad \text{en m.c.}$$

$$\tilde{\zeta}_i(I_1)=\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\zeta}_j(I_2)\tilde{k}_j(I_2)\tilde{k}_i(I_1)\int_{-T_1}^{T_1}\operatorname{sen}[\tilde{b}_i(I_1)t]\operatorname{sen}[\tilde{b}_j(I_2)t]dt \quad \text{en m.c.}$$

(4.3.16)

Sin embargo, en este caso no podemos recurrir a la independencia de - las variables aleatorias del desarrollo (4.3.15) para caracterizar Gaussianamente la clase de procesos con covarianza (4.3.14), mediante aplicación del teorema de Ramachandran, ya que tal hipótesis de independencia no es,- en general, cierta como nos prueba el siguiente teorema [32]:

Teorema 4.3.4.- Sea X_t un proceso con función de covarianza dada por ---- (4.3.14), y consideremos sus desarrollos de Karhunen-Loève (4.3.15) sobre dos intervalos $I_1=[-T_1,T_1]$ e $I_2=[-T_2,T_2]$. Si las variables $(\zeta_j(I_2))_{j\in N}$ son mútuamente independientes y

$$\frac{n\pi}{T_2-T_1}\operatorname{tg}\left(\frac{n\pi T_2}{T_2-T_1}\right)\neq 1, \qquad \forall n\in Z^{*}$$

entonces ningún par de variables $\zeta_i(I_1)$ son independientes.

Y recíprocamente, si las variables $(\tilde{\zeta}_j(I_2))_{j\in N}$ son mútuamente independientes y

$$\frac{n\pi}{T_2-T_1}\operatorname{cotg}\left(\frac{n\pi T_2}{T_2-T_1}\right)\neq 1, \qquad \forall n\in Z^{*}$$

entonces ningún par de variables $\tilde{\zeta}_i(I_1)$ son independientes.

Vamos, pues, a buscar una solución a este problema por un camino distinto. Para ello haremos un planteamiento general que comprenderá una sucesión infinita de intervalos, y que será aplicable a una clase de procesos - más ámplia que aquella definida por la covarianza (4.3.14).

El resultado general básico de caracterización, al que hemos hecho referencia es el siguiente [32]:

Teorema 4.3.5.- Sea X_t un proceso centrado, y contínuo en m.c., y sean $I_1=[-T_1,T_1]$ e $I_2=[-T_2,T_2]$, con $T_1<T_1$, dos intervalos de una sucesión $\{A_k=[-S_k,S_k]\}_{k\in N}$ tal que $S_k\to\infty$ cuando $k\to\infty$. Suponganos que:

i) $E[|\xi_j(A_k)|^2]I^2_{ji}(A_k;I_1)\to 0$ $\forall i,j$, uniformemente respecto a j cuando $S_k\to\infty$.

ii) Para cualquier j, existen i, l distintos tales que

$$I_{ji}(I_2;I_1)I_{jl}(I_2;I_1)\neq 0.$$

iii) Existe $\sigma_4=\sum_{j=0}^{\infty}(E[|\xi_j(I_2)|^2]-3|E[(\xi_j(I_2))^2]|^2)I^4_{ji}(I_2;I_1)<\infty$

Entonces las variables $\{\xi_j(A_k)\}_{j\in N}$ del desarrollo de Karhunen-Loève de X_t son mútuamente independientes para cada intervalo de la sucesión $\{A_k=[-S_k,S_k]\}_{k\in N}$ con $S_k\to\infty$ para $k\to\infty$, si y solo si X_t es Gaussiano.

La conclusión de este teorema es más débil que la obtenida mediante el teorema de Ramachandran, pues comprende un conjunto infinito de intervalos en vez de dos. Sin embargo, sus hipótesis pueden ser verificadas con mayor facilidad.

La hipótesis i) del teorema 4.3.5 corresponde a la conjetura intuitiva de que para procesos débilmente estacionarios, la energía de cada autofunción se distribuye uniformemente sobre el intervalo de desarrollo, es decir

$$\int_a^b|\phi_i(t;I_2)|^2dt\sim\frac{b-a}{2T_2}$$

para T_2 suficientemente grande.

Los procesos con función de covarianza (4.3.14), satisfacen las tres hipótesis del teorema 4.3.5 ya que las autofunciones verifican:

$$\phi_i(t;I_2)\frac{1}{\sqrt{T_2}}\cos(b_i t) \quad \text{ó} \quad \phi_i(t;I_2)\frac{1}{\sqrt{T_2}}\operatorname{sen}(b_i T)$$

y así dicha clase de procesos queda caracterizada Gaussianamente.

4.4. CARACTERIZACION DE PROCESOS GAUSSIANOS CON DENSIDAD ESPECTRAL RACIONAL

En esta sección vamos a comenzar caracterizando como procesos de --- Gauss, una clase especial de procesos con densidad espectral racional: La obtenida haciendo pasar un ruido blanco a través de un filtro lineal conveniente.

Posteriormente estudiaremos una conjetura que nos permitirá caracterizar Gaussianamente, un proceso débilmente estacionario con densidad espectral cualquiera.

Para la primera caracterización vamos a considerar un proceso lineal $\{n(t)|t\in[0,1]\}$ definido por

$$n(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\lambda)\,dZ_\lambda \qquad (4.4.1)$$

donde

$$h(t,\lambda)=h(t-\lambda)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} e^{-\sigma_i(t-\lambda)}\cdot(a_i\cos[\omega_i(t-\lambda)]+b_i\operatorname{sen}[\omega_i(t-\lambda)]), & \text{si } t>\lambda\\ 0, & \text{si } t<\lambda\end{cases} \qquad (4.4.2)$$

siendo $\sigma_i>0$.

Así $\{n(t)|t\in[0,1]\}$ es un proceso débilmente estacionario con densidad espectral racional, que puede concebirse como un ruido blanco filtrado convenientemente.

El teorema de caracterización buscado es el siguiente:

Teorema 4.4.1.- Sean ξ_i, ξ_j, y ξ_k tres variables del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso $\{n(t)|t\in[0,1]\}$ definido en (4.4.1). Entonces ξ_i, ξ_j,

y ζ_k son mútuamente independientes si y solo si el proceso es Gaussiano.

Demostración: La suficiencia es trivial, al igual que en teoremas anteriores.

Para demostrar la necesidad nos basamos en que las autofunciones asociadas $\{\phi_i(t)\}_{i\in N}$ satisfacen una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en $[0,1]$, y son por tanto, sumas finitas de funciones trigonométricas según el teorema 2.5.1. Además, considerando

$$\Psi_i(\lambda) = \begin{cases} \int_\lambda^1 h(t-\lambda)\phi_i(t)dt\,, & \text{si } 0<\lambda<1 \\ \int_0^1 h(t-\lambda)\phi_i(t)dt\,, & \text{si } \lambda<0 \\ 0\,, & \text{si } \lambda>1 \end{cases} \qquad (4.4.3)$$

las funciones $\{\Psi_i(\lambda)\}_{i\in N}$ son también sumas finitas de funciones trigonométricas.

Por otra parte, observemos que para $t-\lambda>0$, es

$$|\phi_i(t-\lambda)| \leq k e^{-\sigma(t-\lambda)}$$

siendo $k=N\max_i(\sqrt{a_i^2+b_i^2})$, y $0<\sigma<\sigma_i$, $i=0,1,\ldots,N$. Esto implica que las integrales I_1 e I_2 definidas en (4.2.6) son finitas, de forma que podemos expresar

$$\zeta_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i(\lambda)dZ_\lambda \qquad (4.4.4)$$

que es un verdadero funcional lineal.

Por la proposición 4.4.1 tenemos que si $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i^2(\lambda)\Psi_j^2(\lambda)d\lambda>0$, entonces ζ_i y ζ_j son independientes solo si $\{Z_\lambda|\lambda\in[-\infty,\infty]\}$ es Gaussiano. Y si $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i^2(\lambda)\Psi_j^2(\lambda)d\lambda=0$ es porque una de las funciones $\Psi_i(\lambda)$ ó $\Psi_j(\lambda)$ es idénticamente nula para $\lambda\in[0,1]$, mientras que la otra lo es para $\lambda<0$.

En tal caso, los dos pares (ζ_i, ζ_k) y (ζ_j, ζ_k) no pueden ser indepen-

dientes ya que una de las dos integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nabla_i^2(\lambda)\nabla_k^2(\lambda)d\lambda \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \nabla_j^2(\lambda)\nabla_k^2(\lambda)d\lambda$$

debe ser positiva. Por tanto, si ξ_i, ξ_j, y ξ_k son mútuamente independientes, el proceso $\{n(t)|t\in[0,1]\}$ es Gaussiano, y se concluye.

Pasemos ya a deducir una conjetura sobre el comportamiento del desarrollo de Karhunen-Loève para grandes intervalos, que nos servirá para caracterizar de forma general la clase de procesos con densidad espectral racional. Para ello definamos

$$X_j^2(I_2)=\lambda_j(I_2)I_{ji}^2(I_2;I_1) \qquad (4.4.5)$$

Se trata de probar que $\lim_{I_2\to\infty} X_j^2(I_2)=0$ uniformemente en j.

Sustituyendo $I_{ji}(I_2;I_1)$ en (4.4.5) por su valor, tenemos:

$$X_j^2(I_2)=\lambda_j(I_2)\left(\int_{-T_1}^{T_1}\phi_i(t;I_1)\phi_j(t;I_2)dt\right)^2=\left(\int_{-T_2}^{T_2}\int_{-T_1}^{T_1}\frac{\phi_j(s;I_2)}{\sqrt{\lambda_j(I_2)}}R(t,s)\phi_i(t;I_1)dtds\right)^2 \qquad (4.4.6)$$

donde suponemos contínuas todas las funciones en sus respectivos intervalos, con objeto de poder intercambiar integrales.

Notemos

$$m(s)=\int_{-T_1}^{T_1}R(t,s)\phi_i(t;I_1)dt, \quad \forall s\in[-T_2,T_2] \qquad (4.4.7)$$

Como $T_2\to\infty$, la función m(s) está definida en todo R. Por tanto, si $\{M_j(I_2)\}_{j\in N}$ son los coeficientes de Fourier de m(s) respecto al sistema $\{\phi_i(t;I_2)\}_{i\in N}$, podemos expresar

$$X_j^2(I_2)=\frac{M_j^2(I_2)}{\lambda_j(I_2)} \qquad (4.4.8)$$

Sea X_t un proceso débilmente estacionario con densidad espectral $S(\nu)$, y supongamos que

$$B = \sup_{\nu \in R} S(\nu) < \infty$$

Consideremos una función $f \in L^2(-\infty,\infty)$ cuyos coeficientes de Fourier respecto al sistema $\{\phi_j(t;I_2)\}_{j\in N}$ son $\{f_j(I_2)\}_{j\in N}$, y sea $\hat{f}(\nu)$ su transformada de Fourier.

Finalmente, sea $0 \leq L < B$, y consideremos el conjunto de índices

$$J(L) = \{j \mid L < \lambda_j(I_2) \leq B\}$$

y la región

$$\Omega(L) = \{\nu \mid L < S(\nu) \leq B\}$$

La conjetura buscada es, entonces, la siguiente [32]

Conjetura.- Sea $\Omega'(L) = \Omega(L) \cap \{\nu \mid S(\nu) \neq 0\}$; entonces

$$\sum_{j\in J(L)} \frac{f_j^2(I_2)}{\lambda_j(I_2)} \xrightarrow[T_2 \to \infty]{} \int_{\Omega'(L)} \frac{|\hat{f}(\nu)|^2}{S(\nu)}\, d\nu \qquad (4.4.9)$$

para todo $L>0$ tal que $\mu(S(\nu)=L)=0$, siendo μ la medida Lebesgue en R, y los términos significativos finitos.

Esta conjetura es cierta para la covarianza (4.3.14). Además, si la covarianza de un proceso es de clase $L^1(-\infty,\infty)$ y $\mu(\Omega(L_1)-\Omega(L_2)) \longrightarrow 0$ cuando $L_1 \neq L_2$ uniformemente en cualquier intervalo acotado lejano del origen, entonces la conjetura es una condición suficiente para probar que $\lim_{T_2 \to \infty} X_j^2(I_2) = 0$ uniformemente en j.

La caracterización buscada es la siguiente [32]:

Teorema 4.4.2.- Sea X_t un proceso con densidad espectral racional. Suponga-

mos que verifica la conjetura, y además que existe

$$c_4(A_h;A_k)=\sum_{j=0}^{\infty}\{E[\zeta_j^4(A_k)]-3|E[(\zeta_j(A_k))^2]|^2\}I_{ji}^4(A_h;A_k)<\infty \quad .$$

para cualesquiera $A_h=[-S_h,S_h]$ y $A_k=[-S_k,S_k]$ tales que $S_h<S_k$. Entonces las variables del desarrollo de Karhunen-Loève del proceso, $\{\zeta_j(A_k)\}_{j\in N}$, son independientes para cada intervalo de una sucesión $\{[-S_k,S_k]\}_{k\in N}$ con $S_k\to\infty$, si y solo si X_t es Gaussiano.

Observemos que las condiciones i) y ii) del teorema 4.3.5 pueden reemplazarse, entonces, por la condición de tener X_t densidad espectral racional. Así para demostrar el teorema 4.4.2 basta probar que $\lim_{T_2\to\infty} X_j^2(I_2)=0$.

APENDICE I

EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA PROCESOS VECTOR-VALUADOS

Un proceso estocástico vector-valuado es una familia uniparamétrica de vectores, cuyas componentes son procesos unidimensionales definidos sobre el mismo espacio paramétrico que el proceso vectorial. El número de componentes de cada vector puede ser finito o infinito. Nosotros nos limitaremos a estudiar el caso finito.

La razón física de tales procesos vector-valuados se halla en algunos problemas de recepción de señales, en los que conviene considerar varias de ellas simultáneamente como si se tratase de una sola señal con varias componentes.

El objetivo de este apéndice es estudiar el desarrollo de Karhunen-Loève para un proceso vector-valuado con dos componentes, siendo trivial la extensión de los resultados obtenidos a un proceso vectorial con un número finito de componentes mayor que dos.

Concretamente, sea $\left\{X_t \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \middle| t\in[a,b]\right\}$ un proceso vector-valuado de segundo orden, es decir:

$$E[|X_t|^2]=E[X_t^T\overline{X}_t]=E[|X_1(t)|^2]+E[|X_2(t)|^2]<\infty \quad \forall t\in[a,b]$$

Supongamos que dicho proceso es centrado, y que sus componentes son a su vez procesos unidimensionales de segundo orden, que están correlados, o sea:

$$E[X_t]=\begin{pmatrix} E[X_1(t)] \\ E[X_2(t)] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad E[X_1(t)\overline{X_2(t)}]\neq 0, \quad \forall t\in[a,b]$$

Notemos $R_x(t,s)$ a la matriz de covarianza del proceso:

$$R_x(t,s)=E[X_t\bar{X}_s^T]=\begin{pmatrix} E[X_1(t)\overline{X_1(s)}] & E[X_1(t)\overline{X_2(s)}] \\ E[X_2(t)\overline{X_1(s)}] & E[X_2(t)\overline{X_2(s)}] \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{11}(t,s) & R_{12}(t,s) \\ R_{21}(t,s) & R_{22}(t,s) \end{pmatrix} \qquad (I.1)$$

Si $X_1(t)$ y $X_2(t)$ fuesen incorrelados, tendríamos

$$R_{12}(t,s)=R_{21}(t,s)=0$$

y la matriz de covarianza sería diagonal.

Para estudiar el desarrollo de Karhunen-Loève del citado proceso vamos a seguir dos caminos distintos. El primero va a consistir en construir un espacio de Hilbert asociado al proceso bidimensional, sobre el que podrá desarrollarse directamente; mientras que en el segundo vamos a basarnos en los desarrollos de Karhunen-Loève de sus componentes, que como hemos indicado son procesos unidimensionales de segundo orden.

A) Desarrollo global del proceso.- Sea un proceso bidimensional de segundo orden $\left\{X_t\equiv\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \mid t\in[a,b]\right\}$, y supongamos que es contínuo en m.c., o sea:

$$\lim_{h\to 0}\{E[|X_1(t+h)-X_1(t)|^2]+E[|X_2(t+h)-X_2(t)|^2]\}=0 \qquad (I.2)$$

Sea H_x^2 el espacio formado por todas las combinaciones lineales finitas del proceso, de la forma:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\begin{pmatrix} X_1(t_i) \\ X_2(t_i) \end{pmatrix} \qquad (I.3)$$

así como los límites en m.c. de sucesiones de elementos del tipo (I.3).

Definimos en H_x^2 un producto escalar de la forma

$$\left\langle\left\langle\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\middle|\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\right\rangle\right\rangle=E[Y_1\bar{Z}_1]+E[Y_2\bar{Z}_2]\ ,\ \forall\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}\in H_x^2 \qquad (I.4)$$

Así se demuestra que H_x^2 es un espacio de Hilbert separable, por lo que -- existirá una base ortonormal numerable

$$Z_n \equiv \left\{ \begin{pmatrix} Z_n^1 \\ Z_n^2 \end{pmatrix} \right\}_{n \in N}$$

tal que el proceso puede representarse de la forma:

$$X_t = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(t) Z_n \iff \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{n=o}^{\infty} c_n(t) \begin{pmatrix} Z_n^1 \\ Z_n^2 \end{pmatrix} \quad (I.5)$$

Las funciones $c_n(t)$ son contínuas y linealmente independientes.

Así mismo, podemos definir una norma a partir de (I.4), de la forma:

$$\left\| \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \sqrt{E[|Y_1|^2] + E[|Y_2|^2]}, \quad \forall \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \in H_x^2 \quad (I.6)$$

Teniendo en cuenta la expresión (I.5), la matriz de covarianza del proceso puede escribirse de la forma:

$$R_x(t,s) = E\left[\left(\sum_{n=o}^{\infty} c_n(t) Z_n \right) \left(\sum_{m=o}^{\infty} \overline{c_m(s)} \overline{Z_m^T} \right) \right] = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=o}^{\infty} c_n(t) \overline{c_m(s)} E[Z_n \overline{Z_m^T}] =$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{m=o}^{\infty} c_n(t) \overline{c_m(s)} \begin{pmatrix} E[Z_n^1 \overline{Z_m^1}] & E[Z_n^1 \overline{Z_m^2}] \\ E[Z_n^2 \overline{Z_m^1}] & E[Z_n^2 \overline{Z_m^2}] \end{pmatrix} \quad (I.7)$$

Supongamos la siguiente hipótesis adicional:

$$E[Z_n \overline{Z_m^T}] = (A_n) \delta_{n,m} \; / (A_n) = \begin{pmatrix} \lambda_n^1 & 0 \\ 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}, \quad (I.8)$$

siendo $\lambda_n^1 > 0$ y $\lambda_n^2 > 0$.

Así (I.7) se expresa de la forma:

$$R_x(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\overline{c_n(s)}\begin{pmatrix}\lambda_n^1 & 0\\ 0 & \lambda_n^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^1 c_n(t)\overline{c_n(s)} & 0\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2 c_n(t)\overline{c_n(s)}\end{pmatrix} \qquad (I.9)$$

Observemos que al añadir la hipótesis (I.8), estamos restringiendo la matriz de covarianza del proceso a ser diagonal. Sin embargo, la hipótesis (I.8) es necesaria para construir el desarrollo de Karhunen-Loève, como -- posteriormente veremos.

Supongamos así mismo, que el sistema $(c_n(t))_{n\in N}$ es ortonormal en $[a,b]$, es decir

$$\int_a^b c_n(t)\overline{c_m(t)}dt=\delta_{n,m} \qquad (I.10)$$

Multiplicando entonces el primer y último miembro de (I.9) por $c_m(s)$, e integrando en $[a,b]$ respecto a s, tenemos:

$$\int_a^b R_x(t,s)c_m(s)ds=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^1 c_n(t)\int_a^b\overline{c_n(s)}c_m(s)ds & 0\\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n^2 c_n(t)\int_a^b\overline{c_n(s)}c_m(s)ds\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_m^1 c_m(t) & 0\\ 0 & \lambda_m^2 c_m(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_m^1 & 0\\ 0 & \lambda_m^2\end{pmatrix}c_m(t) \qquad (I.11)$$

O sea, bajo las hipótesis (I.8) y (I.10), las $c_n(t)$ son las autofun-- ciones de la ecuación integral:

$$\int_a^b R_x(t,s)\phi(s)ds=(A)\phi(t)\ ,\quad \forall t\in[a,b] \qquad (I.12)$$

siendo (A) una matriz diagonal real positiva.

Pasemos entonces a establecer el desarrollo de Karhunen-Loève para -- procesos vector-valuados.

Teorema I.1.- Sea $\left\{X_t \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \middle| t \in [a,b]\right\}$ un proceso vector-valuado, centrado, de segundo orden, y contínuo en m.c., y supongamos que se verifica (I.8). Entonces si $\{\phi_n(t)\}_{n\in N}$ es un sistema ortonormal de autofunciones de la ecuación integral (I.12), asociado al sistema de autovalores matriciales $\{(A_n)\}_{n\in N}$, el proceso vectorial puede representarse de la forma:

$$X_t \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (A_n)^{\frac{1}{2}} \phi_n(t) B_n \qquad (I.13)$$

siendo dicho límite en m.c., y uniformemente $\forall t \in [a,b]$, y donde $\{B_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de variables aleatorias vectoriales cuasi-ortonormales, de la forma:

$$B_n = (A_n)^{-\frac{1}{2}} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_t \, dt \quad \text{en m.c.} \qquad (I.14)$$

Y recíprocamente.

Demostración: Empecemos demostrando el caracter ortogonal de las B_n

$$B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2}} \end{pmatrix} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^1}} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_1(t) dt \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2}} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_2(t) dt \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$E[B_n^T \overline{B_m}] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n^1}} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_1(t) dt, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2}} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_2(t) dt\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_m^1}} \int_a^b \phi_m(s) \overline{X_1(s)} ds \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_m^2}} \int_a^b \phi_m(s) \overline{X_2(s)} ds \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^1}\sqrt{\lambda_m^1}} \int_a^b \int_a^b R_{11}(t,s)\phi_m(s)\overline{\phi_n(t)}\,dt\,ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2}\sqrt{\lambda_m^2}} \int_a^b \int_a^b R_{22}(t,s)\phi_m(s)\overline{\phi_n(t)}\,dt\,ds =$$

$$= \frac{\lambda_m^1}{\sqrt{\lambda_n^1}\sqrt{\lambda_m^1}}\delta_{n,m} + \frac{\lambda_m^2}{\sqrt{\lambda_n^2}\sqrt{\lambda_m^2}}\delta_{n,m} = \delta_{n,m} + \delta_{n,m} = 2\delta_{n,m}$$

Pasemos ya a demostrar el teorema. Para ello evaluemos las expresiones

$$E[X_t^T (A_n)^{1/2} \overline{B_n}], \quad E[B_n^T (A_n)^{1/2} \overline{X_t}] \quad \text{y} \quad E[B_n^T (A_n)^{1/2} (A_m)^{1/2} \overline{B_m}].$$

$$E[X_t^T (A_n)^{1/2} \overline{B_n}] = E\left[\left(\sqrt{\lambda_n^1} X_1(t), \sqrt{\lambda_n^2} X_2(t)\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^1}} \int_a^b \phi_n(s)\overline{X_1(s)}\,ds \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^2}} \int_a^b \phi_n(s)\overline{X_2(s)}\,ds \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \int_a^b R_{11}(t,s)\phi_n(s)\,ds + \int_a^b R_{22}(t,s)\phi_n(s)\,ds = \lambda_n^1 \phi_n(t) + \lambda_n^2 \phi_n(t).$$

$$E[B_n^T (A_n)^{1/2} \overline{X_t}] = \overline{E[X_t^T (A_n)^{1/2} \overline{B_n}]} = \lambda_n^1 \overline{\phi_n(t)} + \lambda_n^2 \overline{\phi_n(t)}$$

$$E[B_n^T (A_n)^{1/2} (A_m)^{1/2} \overline{B_m}] = E\left[B_n^T \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_n^1}\sqrt{\lambda_m^1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_n^2}\sqrt{\lambda_m^2} \end{pmatrix} \overline{B_m}\right] =$$

$$= E\left[\left(\sqrt{\lambda_m^1} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_1(t)\,dt, \sqrt{\lambda_m^2} \int_a^b \overline{\phi_n(t)} X_2(t)\,dt\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_m^1}} \int_a^b \phi_m(s)\overline{X_1(s)}\,ds \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_m^2}} \int_a^b \phi_m(s)\overline{X_2(s)}\,ds \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \int_a^b \int_a^b R_{11}(t,s)\phi_m(s)\overline{\phi_n(t)}\,dt\,ds + \int_a^b \int_a^b R_{22}(t,s)\phi_m(s)\overline{\phi_n(t)}\,dt\,ds =$$

$$= \lambda_m^1 \delta_{m,n} + \lambda_m^2 \delta_{m,n}$$

Por tanto, tenemos:

$$E\{|X_t - \sum_{n=0}^{N} (A_n)^{1/2} \phi_n(t) B_n|^2\} = E\{(X_t^T - \sum_{n=0}^{N} \phi_n(t) B_n^T (A_n)^{1/2})(\overline{X_t - \sum_{m=0}^{N} \phi_m(t)(A_m)^{1/2} B_m})\} =$$

$$= E\{X_t^T \overline{X_t}\} - \sum_{m=0}^{N} \overline{\phi_m(t)} E\{X_t^T (A_m)^{1/2} \overline{B_m}\} - \sum_{n=0}^{N} \phi_n(t) E\{B_n^T (A_n)^{1/2} \overline{X_t}\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \phi_n(t) \overline{\phi_m(t)} E\{B_n^T (A_n)^{1/2} (A_m)^{1/2} \overline{B_m}\} =$$

$$= R_{11}(t,t) + R_{22}(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^1 |\phi_n(t)|^2 - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2 |\phi_n(t)|^2 - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^1 |\phi_n(t)|^2 -$$

$$- \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2 |\phi_n(t)|^2 + \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^1 |\phi_n(t)|^2 + \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2 |\phi_n(t)|^2 =$$

$$= \{R_{11}(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^1 |\phi_n(t)|^2\} + \{R_{22}(t,t) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n^2 |\phi_n(t)|^2\} \qquad (I.15)$$

Observemos ahora que tanto $R_{11}(t,s)$ como $R_{22}(t,s)$ son funciones contínuas, pues son las covarianzas de dos procesos unidimensionales contínuos - en m.c. Por tanto para ambas se verifica el teorema de Mercer, y así, cuando $N \to \infty$, la expresión (I.15) tiende hacia cero uniformemente, y se tiene entonces (I.13).

El recíproco se demuestra trivialmente.

B) Desarrollo del proceso componente a componente.- Vamos a obtener ahora - el desarrollo de Karhunen-Loève del proceso

$$X_t = \left\{ \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \mid t \in [a,b] \right\}$$

basándonos en los de sus componentes, que hemos supuesto correladas.

Como $X_1(t)$ y $X_2(t)$ son componentes de un mismo proceso (por ejemplo, - varios mensajes enviados simultáneamente), podemos suponer que son del mismo tipo, aunque no iguales, y así los espacios de Hilbert que generan son - idénticos, por lo que ambos pueden desarrollarse en función de una misma base ortonormal completa $\{Z_n\}_{n \in N}$. Así tenemos:

$$\left.\begin{aligned} X_1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^1(t) Z_n \quad | \sigma_n^1(t) = E[X_1(t)\bar{Z}_n] \\ X_2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t) Z_n \quad | \sigma_n^2(t) = E[X_2(t)\bar{Z}_n] \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow X_t \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_n^1(t) \\ \sigma_n^2(t) \end{pmatrix} Z_n \qquad (I.16)$$

Por tanto, la matriz de covarianza se expresa:

$$R_x(t,s) = E[X_t \bar{X}_s^T] = E[\{\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_n^1(t) \\ \sigma_n^2(t) \end{pmatrix} Z_n\} \{\sum_{m=0}^{\infty} (\overline{\sigma_m^1(s)}, \overline{\sigma_m^2(s)})\bar{Z}_m\}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \sigma_n^1(t)\overline{\sigma_m^1(s)} & \sigma_n^1(t)\overline{\sigma_m^2(s)} \\ \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_m^1(s)} & \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_m^2(s)} \end{pmatrix} E[Z_n \bar{Z}_m] =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^1(t)\overline{\sigma_n^1(s)} & \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^1(t)\overline{\sigma_n^2(s)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_n^1(s)} & \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_n^2(s)} \end{pmatrix} \qquad (I.17)$$

Supongamos que:

$$\int_a^b (\sigma_n^1(t), \sigma_n^2(t)) \begin{pmatrix} \overline{\sigma_m^1(t)} \\ \overline{\sigma_m^2(t)} \end{pmatrix} dt = \int_a^b [\sigma_n^1(t)\overline{\sigma_m^1(t)} + \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_m^2(t)}] dt = \lambda_n \delta_{n,m} \qquad (I.18)$$

Así tenemos:

$$\int_a^b R_x(t,s) \begin{pmatrix} \sigma_m^1(s) \\ \sigma_m^2(s) \end{pmatrix} ds = \int_a^b \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^1(t)\overline{\sigma_n^1(s)} & \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^1(t)\overline{\sigma_n^2(s)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_n^1(s)} & \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n^2(t)\overline{\sigma_n^2(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_m^1(s) \\ \sigma_m^2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} [c_n^1(t) \int_a^b \overline{c_n^1(s)} c_m^1(s) ds + c_n^1(t) \int_a^b \overline{c_n^2(s)} c_m^2(s) ds] \\ \sum_{n=0}^{\infty} [c_n^2(t) \int_a^b \overline{c_n^1(s)} c_m^1(s) ds + c_n^2(t) \int_a^b \overline{c_n^2(s)} c_m^2(s) ds] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_m c_m^1(t) \\ \lambda_m c_m^2(t) \end{pmatrix} = \lambda_m \begin{pmatrix} c_m^1(t) \\ c_m^2(t) \end{pmatrix} \qquad (I.19)$$

Por tanto, los vectores $\begin{pmatrix} c_n^1(t) \\ c_n^2(t) \end{pmatrix}$ son las autofunciones vectoriales de la ecuación integral:

$$\int_a^b R_x(t,s)\Psi(s)ds = \lambda\Psi(t), \quad \forall t \in [a,b] \qquad (I.20)$$

El desarrollo de Karhunen-Loève puede enunciarse ahora de la forma siguiente

<u>Teorema I.2</u>.- Sea $\left\{ X_t \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} \mid t \in [a,b] \right\}$ un proceso vector-valuado, centrado, de segundo orden, y contínuo en m.c. Entonces si $\{\Psi_n(t)\}_{n\in N}$ es un sistema ortonormal de autofunciones vectoriales de la ecuación integral -- (I.20), asociado al sistema escalar de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in N}$, el proceso vectorial puede representarse de la forma:

$$X_t \equiv \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda_n} \Psi_n(t) b_n \qquad (I.21)$$

siendo dicho límite en m.c., y uniformemente $\forall t \in [a,b]$, y donde $\{b_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de variables aleatorias escalares ortonormales, de la forma:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \int_a^b \overline{\Psi_n^T(t)} X_t dt \quad \text{en m.c.} \qquad (I.22)$$

Y recíprocamente.

Demostración: Comencemos probando la ortonormalidad de las variables b_n

$$E[b_n \overline{b_m}]=E[(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b \overline{\Psi_n^T(t)}X_t dt)(\frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b \overline{X_s^T \Psi_m(s)}ds)]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b\int_a^b \overline{\Psi_n^T(t)}R_X(t,s)\Psi_m(s)dtds=\frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\int_a^b \overline{\Psi_n^T(t)}\Psi_m(t)dt=$$

$$=\frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}}\delta_{n,m}=\delta_{n,m}.$$

Pasemos ya a demostrar el teorema. Para ello evaluemos $E[X_t^T \overline{b_n}]$ y $E[b_n \overline{X_t}]$.

Observemos que a partir de (I.22), se tiene:

$$b_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_a^b(\overline{\phi_n^1(t)},\overline{\phi_n^2(t)})\begin{pmatrix}X_1(t)\\X_2(t)\end{pmatrix}dt=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}[\int_a^b\overline{\phi_n^1}(t)X_1(t)dt+\int_a^b\overline{\phi_n^2}(t)X_2(t)dt]$$

Así es:

$$E[X_1(t)\overline{b_n}]=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}[\int_a^b R_{11}(t,s)\phi_n^1(s)ds+\int_a^b R_{12}(t,s)\phi_n^2(s)ds]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\lambda_n\phi_n^1(t)=\sqrt{\lambda_n}\phi_n^1(t)$$

ya que a partir de (I.20), se verifica

$$\int_a^b\begin{pmatrix}R_{11}(t,s) & R_{12}(t,s)\\R_{21}(t,s) & R_{22}(t,s)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_n^1(s)\\\phi_n^2(s)\end{pmatrix}ds=\lambda_n\begin{pmatrix}\phi_n^1(t)\\\phi_n^2(t)\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\begin{pmatrix}\int_a^b R_{11}(t,s)\phi_n^1(s)ds+\int_a^b R_{12}(t,s)\phi_n^2(s)ds\\\int_a^b R_{21}(t,s)\phi_n^1(s)ds+\int_a^b R_{22}(t,s)\phi_n^2(s)ds\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_n\phi_n^1(t)\\\lambda_n\phi_n^2(t)\end{pmatrix}$$

Análogamente se tiene:

$$E[X_2(t)\overline{b_n}]=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}[\int_a^b R_{21}(t,s)\phi_n^1(s)ds+\int_a^b R_{22}(t,s)\phi_n^2(s)ds]=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\lambda_n\phi_n^2(t)=\sqrt{\lambda_n}\phi_n^2(t).$$

Por tanto:

$$E[X_t^T \overline{b_n}]=E[(X_1(t)\overline{b_n},\ X_2(t)\overline{b_n})]=(\sqrt{\lambda}_n \phi_n^1(t),\ \sqrt{\lambda}_n \phi_n^2(t))$$

y análogamente:

$$E[b_n \overline{X_t}]=\overline{E[X_t^T \overline{b_n}]}=(\sqrt{\lambda}_n \overline{\phi_n^1(t)},\ \sqrt{\lambda}_n \overline{\phi_n^2(t)})$$

con lo que se verifica:

$$E[X_t^T \overline{b_n}]\overline{\Psi_n(t)}=(\sqrt{\lambda}_n \phi_n^1(t),\sqrt{\lambda}_n \phi_n^2(t))\begin{pmatrix}\overline{\phi_n^1(t)}\\ \overline{\phi_n^2(t)}\end{pmatrix}=\sqrt{\lambda}_n|\phi_n^1(t)|^2+\sqrt{\lambda}_n|\phi_n^2(t)|^2$$

$$\overline{\Psi_n^T(t)}E[b_n \overline{X_t}]=\overline{E[X_t^T \overline{b_n}]\Psi_n(t)}=\sqrt{\lambda}_n|\phi_n^1(t)|^2+\sqrt{\lambda}_n|\phi_n^2(t)|^2$$

En definitiva tenemos:

$$E[|X_t-\sum_{n=o}^{N}\sqrt{\lambda}_n \Psi_n(t)b_n|^2]=E[(X_t^T-\sum_{n=o}^{N}\sqrt{\lambda}_n \Psi_n^T(t)b_n)(X_t-\sum_{m=o}^{N}\sqrt{\lambda}_m \overline{\Psi_m(t)}\overline{b_m})]=$$

$$=E[X_t^T \overline{X_t}]-\sum_{m=o}^{N}\sqrt{\lambda}_m E[X_t^T \overline{b_m}]\Psi_m(t)-\sum_{n=o}^{N}\sqrt{\lambda}_n \Psi_n^T(t)E[b_n \overline{X_t}]+$$

$$+\sum_{n=o}^{N}\sum_{m=o}^{N}\sqrt{\lambda}_n\sqrt{\lambda}_m \Psi_n^T(t)\overline{\Psi_m(t)}E[b_n \overline{b_m}]=$$

$$=E[|X_1(t)|^2]+E[|X_2(t)|^2]-\sum_{m=o}^{N}\sqrt{\lambda}_m(\sqrt{\lambda}_m|\phi_m^1(t)|^2+\sqrt{\lambda}_m|\phi_m^2(t)|^2)-$$

$$-\sum_{n=o}^{N}\sqrt{\lambda}_n(\sqrt{\lambda}_n|\phi_n^1(t)|^2+\sqrt{\lambda}_n|\phi_n^2(t)|^2)+\sum_{n=o}^{N}\lambda_n(|\phi_n^1(t)|^2+|\phi_n^2(t)|^2)=$$

$$=(R_{11}(t,t)-\sum_{n=o}^{N}\lambda_n|\phi_n^1(t)|^2)+(R_{22}(t,t)-\sum_{n=o}^{N}\lambda_n|\phi_n^2(t)|^2) \qquad (I.23)$$

Así aplicando el teorema de Mercer a $R_{11}(t,s)$ y $R_{22}(t,s)$ se verifica que la expresión (I.23) tiende a cero uniformemente cuando $N\to\infty$, y se concluye (I.21).

La demostración recíproca es trivial.

C) Conclusión.- Tanto el procedimiento A como el B se basan en que las -

componentes del proceso vectorial son a su vez procesos unidimensionales contínuos en m.c.

El procedimiento A es más intuitivo que el B, pues repite el razonamiento realizado en el capítulo 1 para desarrollar un proceso unidimensional, pero trasladado a vectores. A través de A se llega a una ecuación integral con autovalores matriciales y autofunciones escalares. Sin embargo para que el desarrollo obtenido sea tratable matemáticamente, hay que imponer una restricción muy fuerte, la (1.8), que reduce la matriz de covarianza a una matriz diagonal.

El método B conduce a una ecuación integral con autovalores escalares y autofunciones vectoriales, y si bien, parte de que los espacios de Hilbert asociados a ambas componentes son idénticos, el algoritmo que emplea es mucho más lógico y directo, que el utilizado en A.

APENDICE II

EL DESARROLLO DE KARHUNEN-LOEVE PARA CAMPOS ALEATORIOS

Un proceso estocástico cuyo espacio paramétrico sea multidimensional, se denomina campo aleatorio. Los campos aleatorios más simples son aquellos cuyos espacios paramétricos son subconjuntos de R^n, o sea, son de la forma:

$$\{X_{(t_1,t_2,\ldots,t_n)} / (t_1,t_2,\ldots,t_n) \in I_1 x I_2 x \ldots x I_n \subset R^n\}$$

La definición de esperanza se extiende inmediatamente a campos aleatorios, sin mas que considerar la medida de probabilidad sobre el correspondiente espacio probabilístico; y en general, pueden extenderse sin dificultad todas las definiciones y propiedades de los procesos estocásticos que no dependan del hecho de ser unidimensional su espacio paramétrico.

Observemos, por tanto, que el caso débilmente estacionario no puede trasladarse de forma tan trivial, ya que en campos aleatorios pueden existir transformaciones paramétricas, distintas de las traslaciones, que preserven la distancia entre los argumentos de la función de covarianza del campo aleatorio. De tal forma surgen los llamados campos isotrópicos homogéneos [48].

El objetivo de este apéndice es estudiar el desarrollo de Karhunen-Loève para un campo aleatorio general de segundo orden. Además, nos limitaremos al caso de que el campo aleatorio sea bidimensional, es decir, de la forma $\{X_{(t_1,t_2)} / (t_1,t_2) \in [a,b] \times [c,d]\}$, y supondremos que es centrado, y contínuo en media cuadrática.

Su función de covarianza se define de la forma:

$$R(t_1,t_2;s_1,s_2)=E[X_{(t_1,t_2)}\overline{X_{(s_1,s_2)}}] \qquad (II.1)$$

Al igual que para procesos estocásticos, para deducir el desarrollo de Karhunen-Loève de un campo aleatorio, comenzamos construyendo un espacio de Hilbert H_{x_2} sobre el que desarrollar el campo. Los elementos de H_{x_2} serán de la forma

$$Y=\sum_{i=1}^{n} c_i X_{(t_1^i,t_2^i)} \qquad (II.2)$$

o bien, límites en m.c. de sucesiones de elementos del tipo (II.2)

En H_{x_2} se define el producto escalar

$$\langle Y|Z\rangle=E[Y\bar{Z}], \quad \forall Y,Z\in H_{x_2} \qquad (II.3)$$

con el que se demuestra que es un espacio de Hilbert separable. De tal forma, existirá una base ortonormal numerable $\{Z_n\}_{n\in N}$ de H_{x_2} de manera que el campo aleatorio podrá representarse de la forma:

$$X_{(t_1,t_2)}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1,t_2)Z_n \Big| c_n(t_1,t_2)=E[X_{(t_1,t_2)}\bar{Z}_n] \qquad (II.4)$$

Las funciones $c_n(t_1,t_2)$ son contínuas y linealmente independientes.

Así mismo, a partir de (II.3) definimos la norma:

$$\|Y\|=\sqrt{\langle Y|Y\rangle}=\sqrt{E[|Y|^2]}, \quad \forall Y\in H_{x_2} \qquad (II.5)$$

La función de covarianza del campo podrá expresarse entonces de la forma

$$R(t_1,t_2;s_1,s_2)=E\{(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1,t_2)Z_n)(\sum_{m=0}^{\infty}\overline{c_m(s_1,s_2)}\bar{Z}_m)\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_n(t_1,t_2)\overline{c_m(s_1,s_2)}E[Z_n\bar{Z}_m]=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t_1,t_2)\overline{c_n(s_1,s_2)} \qquad (II.6)$$

ya que el sistema $\{Z_n\}_{n\in N}$ es ortonormal.

Observemos que esta serie (II.6) es convergente, como puede deducirse repitiendo el razonamiento realizado en (1.2.21), ya que las desigualdades de Schwartz y de Bessel se siguen verificando para funciones de dos variables.

Supongamos que las funciones $\{\sigma_n(t_1,t_2)\}_{n\in N}$ son ortogonales dos a dos, es decir:

$$\int_a^b\int_c^d \sigma_m(t_1,t_2)\overline{\sigma_n(t_1,t_2)}dt_1dt_2=\lambda_n\delta_{m,n} \qquad (II.7)$$

Multiplicando entonces el primer y último miembro de (II.6) por $\sigma_m(s_1,s_2)$, e integrando en $[a,b]\times[c,d]$ respecto a (s_1,s_2), tenemos

$$\int_a^b\int_c^d R(t_1,t_2;s_1,s_2)\sigma_m(s_1,s_2)ds_1ds_2=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(t_1,t_2)\int_a^b\int_c^d\overline{\sigma_n(s_1,s_2)}\sigma_m(s_1,s_2).$$

$$.ds_1ds_2=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n(t_1,t_2)\lambda_n\delta_{m,n}=\lambda_m\sigma_m(t_1,t_2) \qquad (II.8)$$

Es decir, bajo la hipótesis (II.7), las funciones $\{\sigma_n(t_1,t_2)\}_{n\in N}$ son las autofunciones de una ecuación integral del tipo:

$$\int_a^b\int_c^d R(t_1,t_2;s_1,s_2)\phi(s_1,s_2)ds_1ds_2=\lambda\phi(t_1,t_2) \qquad (II.9)$$

Basándonos en todo este razonamiento, podemos enunciar un resultado análogo al del teorema 1.2.3, pero aplicado a campos aleatorios. Tal resultado es el siguiente:

<u>Teorema II.1</u>.- Sea $\{X_{(t_1,t_2)}/(t_1,t_2)\in[a,b]\times[c,d]\}$ un campo aleatorio de segundo orden ($E[|X_{(t_1,t_2)}|^2]<\infty$), contínuo en m.c.

($\lim_{\substack{h\to 0\\k\to 0}} E[|X_{(t_1+h,t_2+k)}-X_{(t_1,t_2)}|^2]=0$), y con función de covarianza

$R(t_1,t_2;s_1,s_2)$. Entonces, si $\{\phi_n(t_1,t_2)\}_{n\in N}$ es un sistema ortonormal de autofunciones de la ecuación integral (II.9), asociado al sistema de autovalores $\{\lambda_n\}_{n\in N}$, el campo aleatorio puede representarse de la forma:

$$X_{(t_1,t_2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=o}^{N} \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t_1,t_2) b_n \qquad (II.10)$$

siendo dicho límite en m.c., y uniformemente $\forall (t_1,t_2)\in[a,b]\times[c,d]$, y donde $\{b_n\}_{n\in N}$ es una sucesión de variables aleatorias ortonormales de la forma:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}_n} \int_a^b \int_c^d \overline{\phi_n(t_1,t_2)} X_{(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 \quad \text{en m.c.} \qquad (II.11)$$

Y recíprocamente.

<u>Demostración</u>: Comencemos probando que el sistema de variables $\{b_n\}_{n\in N}$ definidas en (II.11), es ortonormal.

$$E[b_n \overline{b_m}] = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}_n} \int_a^b \int_c^d \overline{\phi_n(t_1,t_2)} X_{(t_1,t_2)} dt_1 dt_2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}_m} \int_a^b \int_c^d \phi_n(s_1,s_2) \overline{X_{(s_1,s_2)}} ds_1 ds_2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}_n \sqrt{\lambda}_m} \int_a^b \int_c^d \int_a^b \int_c^d R(t_1,t_2;s_1,s_2) \phi_m(s_1,s_2) \overline{\phi_n(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}_n \sqrt{\lambda}_m} \int_a^b \int_c^d \lambda_m \phi_m(t_1,t_2) \overline{\phi_n(t_1,t_2)} dt_1 dt_2 = \frac{\lambda_m}{\sqrt{\lambda}_n \sqrt{\lambda}_m} \delta_{m,n} = \delta_{m,n} \qquad (II.12)$$

Luego efectivamente $\{b_n\}_{n\in N}$ es ortonormal.

Pasemos a demostrar (II.10). Para ello evaluemos préviamente las expresiones $E[X_{(t_1,t_2)}\overline{b_n}]$ y $E[b_n \overline{X_{(t_1,t_2)}}]$:

$$E[X_{(t_1,t_2)}\overline{b_n}] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}_n} \int_a^b \int_c^d R(t_1,t_2;s_1,s_2) \phi_n(s_1,s_2) ds_1 ds_2 = \sqrt{\lambda}_n \phi_n(t_1,t_2)$$

$$E[b_n \overline{X_{(t_1,t_2)}}] = \overline{E[X_{(t_1,t_2)} \overline{b_n}]} = \sqrt{\lambda_n}\,\overline{\phi_n(t_1,t_2)}.$$

Así tenemos:

$$E[|X_{(t_1,t_2)} - \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda_n}\,\phi_n(t_1,t_2) b_n|^2] =$$

$$= E\left[(X_{(t_1,t_2)} - \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda_n}\,\phi_n(t_1,t_2) b_n)(X_{(t_1,t_2)} - \sum_{m=0}^{N} \sqrt{\lambda_m}\,\overline{\phi_m(t_1,t_2)}\,\overline{b_m})\right] =$$

$$= R(t_1,t_2;t_1,t_2) - \sum_{m=0}^{N} \sqrt{\lambda_m}\,\overline{\phi_m(t_1,t_2)} E[X_{(t_1,t_2)} \overline{b_m}] -$$

$$- \sum_{n=0}^{N} \sqrt{\lambda_n}\,\phi_n(t_1,t_2) E[b_n \overline{X_{(t_1,t_2)}}] + \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} \sqrt{\lambda_n}\sqrt{\lambda_m}\,\phi_n(t_1,t_2)\overline{\phi_m(t_1,t_2)} E[b_n \overline{b_m}] =$$

$$= R(t_1,t_2;t_1,t_2) - \sum_{m=0}^{N} \lambda_m \phi_m(t_1,t_2)\overline{\phi_m(t_1,t_2)} - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n(t_1,t_2)\overline{\phi_n(t_1,t_2)} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n(t_1,t_2)\overline{\phi_n(t_1,t_2)} = R(t_1,t_2;t_1,t_2) - \sum_{n=0}^{N} \lambda_n |\phi_n(t_1,t_2)|^2$$

y esta expresión tiende a cero uniformemente cuando $N \to \infty$, ya que al ser $R(.,.;-,-)$ un operador compacto, se verifica el teorema de Mercer generalizado, a saber:

$$R(t_1,t_2;s_1,s_2) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \phi_n(t_1,t_2)\overline{\phi_n(s_1,s_2)}$$

uniformemente $\forall (t_1,t_2),(s_1,s_2) \in [a,b] \times [c,d]$. Así se concluye (II.10) .

El recíproco se demuestra de forma trivial.

El teorema II.1 se generaliza inmediatamente a campos aleatorios multidimensionales.

Queda, sin embargo, abierto el problema de estudiar el desarrollo de Karhunen-Loève para campos aleatorios débilmente estacionarios, teniendo en cuenta las consideraciones previamente realizadas.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALGAZI,V.R.- SAKRISON,D.J.: "On the optimality of the Karhunen-Loève expansión".
I.E.E.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-15,nº2,pág. 319-321. (1969).

[2] ATKINSON,K.E.: "A survey of numerical methods for the solution of — Fredholm Integral Equations of the second kind".
S.I.A.M. (1976).

[3] BAKER,C.T.H.: "The numerical treatment of Integral Equations".
Oxford University Press. (1977).

[4] BARTLETT,M.S.: "An introduction to Stochastic Processes with special reference to methods and applications".
Cambridge University Press. (1966).

[5] BELYAEV,Y.K.: "Analytic Random Processes".
Theory of Probability and its applications.Vol.4;pág.402-409. (1959).

[6] BLANC-LAPIERRE,A.- PICINBONO,B.: "Fonctions Aléatoires".
MASSON. (1981).

[7] BUHLMANN,H.: "L^2-Martingales and orthogonal decompositions".
Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie & Verwandte Gebiete.Vol.1,nº.4;pág.394-414. (1963).

[8] CAPON,J.: "Asymptotic eigenfunctions and eigenvalues of a Homogeneus Integral Equation".
I.R.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-8,nº 1;pág. 2-4. (1962).

[9] CHIEN,Y.T.- FU,K.S.: "On the generalized Karhunen-Loève expansion".
I.E.E.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-13,nº 4; -

pág.518-520. (1967).

[10] CHOQUET,G.: "Topología".
Toray-Masson,S.A. (1971).

[11] COLOMBO,S.- LAVOINE,J.: "Transformations de Laplace et de Mellin".
Mémorial des Sciences Mathématiques. Fascicule CLXIX. Gauthier-Villars. (1972).

[12] CORDUNEANU,C.: "Principles of Differential and Integral Equations".
Chelsea Publishing Company. (1977).

[13] COURANT,R.- HILBERT,D.: "Methods of Mathematical [illegible]sics.Vol.I"
Interscience. (1953).

[14] DAVENPORT,W.B.- ROOT,W.L.: "Random signals and noise".
Mc Graw Hill. (1958).

[15] DAVIS,P.J.: "Interpolation and approximation".
Blaisdell, Dover. (1963).

[16] DOOB,J.L.: "Stochastic Processes".
John Wiley and Sons, Inc. (1953).

[17] FORTMANN,T.E.- ANDERSON,B.D.O.: "On the approximation of optimal realizable linear filters using a Karhunen-Loève expansión".
I.E.E.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-19,nº 4;pág. 561-564. (1973).

[18] HOCHSTADT,H.: "Integral Equations".
John Wiley and Sons, Inc. (1973).

[19] HOVERSTEN,E.V.- HARGER,R.O.- HALME,S.J.: "Communication Theory for the turbulent atmosphere".
Proceedings of the I.E.E.E., 58,nº 10;pág. 1626-1650. (1970).

[20] ISAACSON,E.- KELLER,H.B.: "Analysis of Numerical Methods".
John Wiley and Sons, Inc. (1966).

[21] KADOTA,T.T.: "Term by term differentiability of Mercer's expansion". Proceedings of the American Mathematical Society.Vol.18; pág. 69-72. (1967).

[22] KADOTA,T.T.: "Differentiation of Karhunen-Loève expansion and application to optimun reception of sure signals in noise". I.E.E.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-13,nº 2; — pág.255-260.(1967).

[23] KARHUNEN,K.: "Métodos lineales en el Cálculo de Probabilidades". Trabajos de Estadística.Vol.III, cuaderno I-II;pág.59-137.--- (1952).

[24] KENNEDY,R.S.: "Comunication through optical scattering channels: An - introduction". Proceedings of the I.E.E.E.,58,nº10;pág.1651-1665. (1970).

[25] LEVY,P.: "Processus Stochastiques et Mouvement Brownien". Gauthier-Villars. (1965).

[26] LOEVE,M.: "Teoría de la Probabilidad". Tecnos. (1976).

[27] MARKUSHEVICH,A.: "Teoría de las Funciones Analíticas. Tomo I". Mir. (1978).

[28] PAPOULIS,A.: "Probabilidad, Variables Aleatorias, y Procesos Estocásticos". EUNIBAR. (1980).

[29] PARZEN,E.: "Procesos Estocásticos". Paraninfo. (1972).

[30] PIERRE,P.A.: "On the independence of linear functionals of linear processes". S.I.A.M. Journal of Applied Mathematics.Vol.17,nº 4;pág.624-637. (1969).

[31] PIERRE,P.A.: "The sample function regularity of Linear Random Processes".
S.I.A.M. Journal of Applied Mathematics.Vol.17,nº6;pág.1070-1077. (1969).

[32] PIERRE,P.A.: "Characteristics of Gaussian Random Processes by repre--sentations in terms of independent Random Variables".
I.E.E.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-15,nº 6;pág. 648-658. (1969).

[33] PIERRE,P.A.: "Asymptotic eigenfunctions of covariance kernels with rational spectral densities".
I.E.E.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-16,nº 3;pág. 346-347. (1970).

[34] RIESZ,F.- NAGY,B.S.: "Leçons d'analyse fonctionnelle".
Gauthier-Villars. (1968).

[35] SCHLESINGER,S.: "Approximating eigenvalues and eigenfunctions of symmetric kernels".
S.I.A.M. Journal of Applied Mathematics. Vol.5,nº 1;pág.1-14. (1957).

[36] SHINBROT,M.: "On the range of general Wiener-Hopf operators".
Journal of Applied Mathematics and Mechanics.Vol.18,nº 7;pág. 587-601. (1969).

[37] SHINBROT,M.: "The solution of some Integral Equations of Wiener-Hopf type".
Quarterly of Applied Mathematics. Vol.28,nº 1;pág.15-36.(1970).

[38] SNYDER,D.L.: "Random Point Processes"
John Wiley and Sons, Inc. (1975).

[39] STENGER,F.: "The approximate solution of Wiener-Hopf Integral Equa--tions".
Journal of Mathematical Analysis and Applications,nº 37;pág.

687-724. (1972).

[40] TAYLOR,A.E.: "Introduction to Functional Analysis".
John Wiley and Sons, Inc. (1958).

[41] VALDERRAMA, M.J.: "Construcción de un desarrollo aproximado de Karhunen-Loève".
XIV Congreso Nacional de la S.E.I.O.E.I. Granada. Tomo II;pág. 824-837. (1984).

[42] VALDERRAMA,M.J.: "Desarrollo ortogonal de un proceso de segundo orden, en términos de sus derivadas sucesivas en m.c.".
Cuadernos de Estadística. Granada. (por aparecer).

[43] VAN TREES,H.L.: "Detection, Estimation and Modulation Theory.Part I".
John Wiley and Sons, Inc. (1968).

[44] WATANABE,S.: "Karhunen-Loève expansion and factor analysis. Theoretical remarks and applications".
Proceedings of the 4th conference on Information Theory. (1965).

[45] WEIR,A.J.: "Lebesgue integration and measure".
Cambridge University Press. (1973).

[46] WILKINSON,J.H.: "The algebraic eigenvalue problem".
Oxford University Press. (1965).

[47] WONG,E.: "Stochastic Processes in information and dynamical systems".
Mc Graw Hill. (1971).

[48] YADRENKO,M.I.: "Spectral Theory of Random Fields".
Optimization Software, Inc. (1983).

[49] YOSIDA,K.: "Equations Différentielles et Intégrales".
DUNOD. (1971).

[50] YOULA,D.: "The solution of a homogeneous Wiener-Hopf integral equation occurring in the expansion of second-order stationary Random-Functions".

I.R.E. Transactions on Information Theory.Vol.IT-3,nº 5;pág. 187-193. (1957).