EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE CON INVOLUCION

Rosendo Ruiz Sánchez

DEPARTAMENTO DE
GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1988

EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE CON INVOLUCION

Memoria presentada, para aspirar al Grado de Doctor en Ciencias (Sección de Matemáticas), por el Licenciado D. Rosendo Ruiz Sánchez y que ha sido dirigida por D. Eugenio Miranda Palacios Profesor Titular del Departamento de Algebra de la Universidad de Granada.

INDICE

Página

INTRODUCCION

Despues de los trabajos de **Hasse** sobre la aritmética de formas cuadráticas sobre los cuerpos de números algebraicos, **E. Witt** (35) fundó la teoría algebraica de formas cuadráticas sobre un cuerpo cualquiera K de característica distinta de 2, definiendo el anillo conmutativo W(K) cuyos elementos son clases de equivalencia de formas cuadráticas anisótropas. Algunos años mas tarde **C. Arf** (1) estudió el caso particular de formas cuadráticas sobre un cuerpo de característica 2. El discriminante y el álgebra de Clifford son invariantes de las formas cuadráticas, **C. T. Wall** combinó estos dos invariantes en uno solo, para un cuerpo, introduciendo el grupo de Brauer graduado.

En lo que concierne a la teoría de formas cuadráticas sobre un anillo o sobre un cuerpo ha sido desarrollado por **H. Bass**, **A. Micali** (23 y 26), **O. E. Villamayor** (23), **A. Fröhlich** (12 y 13), **A. M. Mc Evett** (12 y 25), **M. Knebusch** (19 y 20), **R. Ware** (19 y 20), **A. Rosemberg** (19 y 20), **W. Scharlau** (29), por citar algunos, habiéndose estudiado el grupo de Witt y el anillo de Witt de formas sesquilineales sobre cuerpos y anillos en diversas acepciones y posibilidades, asi como sobre dominios de Dedekind. Entre los resultados mas significativos destacan los siguientes:

El anillo de Witt de un cuerpo K, W(K), es isomorfo a Z/2Z si y solo si todo elemento de K• es un cuadrado.

El anillo de Witt sobre un cuerpo K, W(K), es isomorfo a Z si y solo si K es un cuerpo ordenado en el cual todo elemento positivo es un cuadrado.

Como casos particulares se han estudiado los anillos de Witt $W(Z)\simeq Z$; $W(Q)$; $W(R)\simeq Z$; $W(C)\simeq Z/2Z$.

Reciéntemente **C. Cibils** (7) ha estudiado el grupo de Witt $W_\varepsilon(A)$, ($\varepsilon=\pm 1$) donde A es una K-álgebra asociativa de dimensión finita provista de una involución σ dejando fijo el cuerpo base arbitrario K. Introduce el concepto de metabolizador, básico para definir una forma neutra y construye el grupo de Witt, $W_\varepsilon(A)$, donde sus elementos son clases de equivalencia de A-módulos provistos de una forma bilineal ε-simétrica, estable bajo la involución σ, no degenerada, con valores en K, módulo las formas neutras. Teniendo en cuenta que si radA es el ideal nilpotente maximal de A, y puesto que $\sigma(\mathrm{rad}A)=\mathrm{rad}A$, la involución σ está también definida en A/radA y demuestra que $W_\varepsilon(A)=W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$ apoyándose para ello en la existencia de una forma anisótropa única por clase de equivalencia en el grupo de Witt $W_\varepsilon(A)$. Puesto que A/radA es una K-álgebra semisimple de dimensión finita, provista de una involución dejando fijo el cuerpo K, tiene una descomposición única en producto de álgebras simples obtenida con un sistema de idempotentes $\{e_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$' centrales, ortogonales, primitivos y completos de tal manera que $A/\mathrm{rad}A=(A/\mathrm{rad}A)e_1 x (A/\mathrm{rad}A)e_2 x \ldots x (A/\mathrm{rad}A)e_n$ donde cada K-álgebra simple $(A/\mathrm{rad}A)e_i$ posee un solo módulo simple y demuestra que $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)=\oplus_i W_\varepsilon((A/\mathrm{rad}A)e_i)$. Por tanto reduce el cálculo del grupo de Witt, $W_\varepsilon(A)$, al caso de una K-álgebra simple con involución.

Pareció interesante intentar introducir estos conceptos, en casos no asociativos y fue por iniciativa de C. Cibils el hacerlo para álgebras de Lie de dimensión finita las cuales han sido siempre un modelo para las restantes álgebras no asociativas, y este es el objeto de la presente memoria.

El primer Capítulo está dedicado a la construcción del grupo de Witt, $W_\varepsilon(L)$, $(\varepsilon=\pm 1)$ de una K-álgebra de Lie L finito dimensional provista de una involución σ de L en L, es decir de un antiautomorfismo de orden 2, donde K es un cuerpo arbitrario. Para ello definimos los conceptos de forma ε-simétrica invariante, respecto a la involución σ considerada, o más simplemente ε-forma, ε-subforma, ε-forma neutra, suma ortogonal de ε-formas, metabolizador de una ε-forma, ε-forma neutra, conceptos todos ellos necesarios para construir el grupo de Witt, $W_\varepsilon(L)$, de formas ε-simétricas invariantes. Se demuestra que el conjunto de clases de equivalencia de L-módulos provistos de una forma bilineal ε-simétrica no degenerada y σ-invariante, módulo las ε-formas neutras, forman un grupo con la suma ortogonal. Este grupo es el ε-grupo de Witt de L, $W_\varepsilon(L)$, respecto a la involución σ considerada. Demostramos, además, que $W_\varepsilon(L)$ es vacío o bien un grupo abeliano de periodo 2 y por tanto un grupo 2-elemental abeliano, es decir un espacio vectorial sobre el cuerpo Z/2Z, si K es un cuerpo algebraicamente cerrado.

En el Capítulo segundo reducimos el estudio del grupo de Witt de un álgebra de Lie cualquiera al estudio del grupo de Witt de un álgebra de Lie reductiva, reducción interesante ya que las álgebras reductivas son precisamente suma directa de una abeliana y una semisimple lo que nos conduce al estudio del grupo de Witt de un álgebra abeliana por una parte y al estudio del grupo de Witt de un álgebra semisimple por otra. Para ello consideramos el radical nilpotente de un álgebra de Lie L, S(L), que es la intersección de todos los nucleos de las representaciones irreducibles. Demostramos que S(L) queda invariante por cualquier involución σ de L lo que nos permite considerar el grupo de Witt $W_\varepsilon(L/S(L))$ y llegamos a demostrar que $W_\varepsilon(L) \simeq W_\varepsilon(L/S(L))$. Al ser ahora L un álgebra de Lie reductiva, se tiene que $L = Z(L) \oplus [L\ L]$ donde Z(L) es abeliana y [L L] semisimple. Vemos que Z(L) y [L L] son invariantes por σ y podemos hablar de los grupos de Witt $W_\varepsilon(Z(L))$ y $W_\varepsilon([L\ L])$. Comprobamos que el estudio del grupo de Witt de álgebras de Lie abelianas finito dimensionales con involución arbitraria es exactamente lo mismo que estudiar el grupo de Witt de álgebras de polinomios con un número finito de indeterminadas y con involuciones que fijan unas cuantas indeterminadas e invirtiendo las restantes.

Pasamos entonces a considerar el caso de un álgebra de Lie semisimple L y nos preguntamos que involuciones definidas en L estabilizan las componentes simples L_i de L. Vemos que basta que exista en L_i un elemento no nulo cuya imagen, por la involución considerada en L, quede dentro de L_i, para que todo L_i quede invariante por la involución. Como toda subálgebra de Cartán de L debe de tener intersección no trivial con cada componente simple L_i, llegamos a que si la involución definida en L es tal que restringida a una subálgebra de Cartán de L es $\pm$id, entonces dicha involución estabiliza todas las componentes simples L_i de L. Es más, si la involución restringida a una subálgebra de Cartán es id, entonces dicha involución fija punto a punto una subálgebra de Cartán de cada componente simple, y si la involución restringida a una subálgebra de Cartán es -id, entonces la restricción de dicha involución a una subálgebra de Cartán de cada componente simple es -id. Por otra parte, y teniendo en cuenta el Teorema de **Borel-Mostow** (4), toda involución debe de dejar invariante alguna subálgebra de Cartán y además por **Jacobson** (18) debe llevar el espacio raiz L_α al espacio raiz $L_{-\sigma^*(\alpha)}$. Además involuciones muy significativas de las álgebras de Lie simples clásicas, en la representación estandar, son las que hacen corresponder a cada matriz su transpuesta. Estas involuciones restringidas a la subálgebra de Cartán estandar es la identidad. En nuestro estudio vamos a incluir las involuciones σ tales que $\sigma_{|H}=\pm id$, siendo H una subálgebra de Cartán de L, que son los casos extremos pues tomando una base conveniente en H, la matriz asociada a cualquier involución respecto a dicha base apropiada es diagonal con ± 1 en la diagonal. Si $\sigma_{|H}=id$, entonces forzosamente $\sigma(e_\alpha)=e_{-\alpha}$ siendo $L_\alpha=<e_\alpha>$ los espacios raices y a estas involuciones les llamamos **Transposiciones** que incluyen a las citadas anteriormante. Si $\sigma_{|H}=-id$, entonces en cada espacio raiz $L_\alpha=<e_\alpha>$ se tiene que $\sigma(e_\alpha)=\pm e_\alpha$. En particular está la $\sigma=-id$. Si $\sigma=-id$, entonces los conceptos de forma σ-invariante y módulo σ-dual coinciden con los conceptos clásicos. Observamos también la relación existente entre los grupos de Witt de un álgebra de Lie semisimple L con involución y los grupos de Witt de sus ideales minimales con involución inducida por la involución de L.

Las diversas reducciones hechas en Capítulos primero y segundo de esta memoria, del estudio del grupo de Witt de un álgebra de Lie con involución nos ha conducido al estudio del grupo de Witt de un álgebra de Lie simple, estudio que realizamos en Capítulo tercero. En este punto juega un papel primordial el concepto de módulo dual V_σ^*, respecto a la involución definida en un álgebra de Lie simple L, de un L-módulo V, que fue introducido en el Capítulo primero. Cada L-módulo simple autodual N lleva, de manera natural, asociada una ε-forma bilineal no degenerada y σ-invariante, f_N^{φ} dada por $f_N^{\varphi}(x,y)=(\varphi(x))(y)$ donde φ es un isomorfismo de N y N_σ^*. Vemos que estas f_N^{φ} no dependen de φ, salvo equivalencias, y las llamamos f_N. Ahora para cada L-módulo simple N consideramos las clases de $W_\varepsilon(L)$ que contengan alguna ε-forma isotípica de tipo N. Al conjunto de estas clases lo designamos por $W_\varepsilon(L)_N$ y lo llamamos componente isotípica de tipo N del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$. Demostramos que $W_\varepsilon(L)_N=\phi$ si y solo si N no es autodual, por el contrario si N es autodual, entonces $W_\varepsilon(L)_N$ es un subgrupo de $W_\varepsilon(L)$ y además $W_\varepsilon(L)=\bigoplus_N W_\varepsilon(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales. Terminamos, por una parte, detectando todos los L-módulos simples autoduales para cada una de las involuciones consideradas y, por otra parte, determinando las formas bilineales no degeneradas y σ-invariantes que se pueden definir en un L-módulo simple. Obtenemos que la forma bilineal natural, f_N, sobre un L-módulo simple autodual N es simétrica o antisimétrica y cuando es de uno o del otro tipo. Además, salvo equivalencias, ésta es la única ε-forma no neutra posible, no solamante sobre N, sino también sobre cualquier L-módulo semisimple isotípico de tipo N, lo cual nos determina los subgrupos $W_\varepsilon(L)_N$ siendo el resultado final los siguientes:

a) Si σ es tal que $\sigma_{|H}=-id$ y $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces obtenemos que $W_{+1}(L)=\bigoplus_N W_{+1}(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales, además para un tal N se tiene que $W_{+1}(L)_N\simeq Z/2Z$ y el conjunto $B=\{[(N,f_N)]\ /\ N=$L-módulo simple autodual, $f_N=$forma natural sobre N$\}$

es una base de $W_{+1}(L)$. Por el contrario $W_{-1}(L)=\emptyset$.

b) Si $\sigma=-\mathrm{id}$, entonces $W_{+1}(L)=\underset{N}{\oplus} W_{+1}(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales para los que el número $m=\sum_{\alpha\in\Phi^+}\lambda_0(h_\alpha)$ es par donde λ_0 es el peso máximo de N. Para un tal N se tiene que $W_{+1}(L)_N\simeq Z/2Z$ y el conjunto $B=\{\ [(N,f_N)]\ /N=$L-módulo simple autodual con m par, $f_N=$forma natural sobre N$\}$ es una base de $W_{+1}(L)$. Análogamente obtenemos que $W_{-1}(L)=\underset{N}{\oplus} W_{-1}(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales para los que el número m es impar. Además para un tal N se tiene que $W_{-1}(L)_N\simeq Z/2Z$, y el conjunto $B=\{[(N,f_N)]/N=$L-módulo simple autodual con m impar, $f_N=$forma natural sobre N$\}$ es una base de $W_{-1}(L)$.

c) Si σ es tal que $\sigma_{|H}=\mathrm{id}$ y $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=e_{-\alpha}$, entonces $W_{+1}(L)_N$ es isomorfo a $Z/2Z$ y el conjunto $B=\{\ [(N,f_N)]\ /N=$L-módulo simple, $f_N=$forma natural sobre N$\}$ es una base de $W_{+1}(L)$. Además $W_{-1}(L)=\emptyset$.

Finalmente definimos el producto Kronecker de ε-formas para un álgebra de Lie L con involución lo que nos permite construir el anillo de Witt $W_{+1}(L)$ de formas simétricas, el anillo de Witt $W(L)$, así como el anillo primo de cada uno de ellos.

No quiero terminar esta introducción sin agradecer profundamente a los profesores Dr. D. Claude Cibils, Dr. D. Eugenio Miranda Palacios y Dr. D. Vicente Ramón Varea Agudo sus inestimables ayudas sin las cuales no hubiera sido posible la realización de esta memoria.

Agradezco tambien a los miembros de los Departamentos de Algebra y de Geometría y Topología de la Universidad de Granada su buena acogida, su estímulo y su ayuda de todo tipo.

CAPITULO 0 : PRELIMINARES

CAPITULO 0.- PRELIMINARES

Sea K un cuerpo arbitrario (conmutativo)

Un espacio vectorial L sobre un cuerpo K con una operación $L\times L \dashrightarrow L$ denotada $(x,y) \dashrightarrow [x\ y]$ y llamada corchete o conmutador de x e y, se llama una K-álgebra de Lie si se satisfacen:

1.- La operación corchete es bilineal

2.- $[x\ x]=0$ para todo x de L

3.- $[x\ [y\ z]]+[y\ [z\ x]]+[z\ [x\ y]]=0 \quad \forall x,y,z \in L$

Si X e Y son subconjuntos de L, denotamos por $[X\ Y]$ el subespacio vectorial de L generado por los elementos $[x\ y]$ donde $x \in X$ e $y \in Y$.

Si V es un espacio vectorial, entonces el espacio vectorial End(V) con el producto $[f\ g]=f\circ g-g\circ f$ es un álgebra de Lie que denotaremos por gl(V).

I CLASES ESPECIALES DE ALGEBRAS DE LIE

1.- Abeliana

Un álgebra de Lie L se dice que es abeliana si $[x\ y]=0$ para todo x e y de L.

2.- Nilpotente

a) Dada un álgebra de Lie L, se llama **serie central descendente** o serie **central baja** de L a la sucesión de ideales de L definida por

$L^0=L$; $L^1=[L\ L]$; $L^2=[L\ L^1]$; . . . ; $L^i=[L\ L^{i-1}]$

b) El álgebra de Lie L se llama nilpotente si $L^n=0$ para algún entero positivo n.

c) El Teorema de Engel asegura que L es nilpotente si y solo si para cada x de L, la aplicación adjunta $adx:L\text{--->}L$ dada por $adx(y)=[y\ x]$, para y de L, es nilpotente.

d) En toda álgebra de Lie L existe un ideal nilpotente maximal llamado el nilradical de L y denotado por N(L).

3.- Resoluble

a) Dada un álgebra de Lie L, se llama **serie derivada** de L a la sucesión de ideales definida por

$L^{(0)}=L$; $L^{(1)}=[L\ L]$; $L^{(2)}=[L^{(1)}\ L^{(1)}]$; . . . ; $L^{(i)}=[L^{(i-1)}\ L^{(i-1)}]$.

b) El álgebra de Lie L se llama resoluble si $L^{(n)}=0$ para algún entero positivo n.

c) En toda álgebra de Lie L existe un único ideal resoluble maximal llamado el radical de L y denotado por Rad(L).

4.- Semisimple

Un álgebra de Lie L se dice que es semisimple si el único ideal abeliano de L es {0}. Si $L \neq 0$ y $Rad(L)=0$, entonces L es semisimple.

5.- Simple

Un álgebra de Lie L se dice que es simple si no contiene ideales propios y la dimensión es mayor que uno. Toda álgebra de Lie simple es semisimple.

6.- Reductiva

Un álgebra de Lie L se dice que es reductiva si su representación adjunta $L \longrightarrow gl(L)$ pada por $x \longrightarrow adx$ es completamente reducible.

II PRINCIPALES RESULTADOS DE ESTRUCTURA

1.- Teorema de Levi

Si K es un cuerpo de característica cero, entonces toda K-álgebra de Lie L se obtiene como una extensión de un algebra de Lie **resoluble** por una **semisimple**. Es decir, $L=Rad(L)\oplus S$ donde S es una subálgebra semisimple de L y $Rad(L)\cap S=\{0\}$.

Este resultado reduce el problema de clasificación de las algebras de Lie sobre cuerpos K de característica cero en tres subproblemas: clasificación de las resolubles, clasificación de las semisimples y clasificación de las representaciones $S \longrightarrow gl(Rad(L))$.

2.- Estructura de las álgebras de Lie semisimples

Un álgebra de Lie sobre un cuerpo K de característica cero es semisimple si y solo si es una suma directa de álgebras de Lie simples, es decir $L = N_1 \oplus \ldots \oplus N_r$ donde los N_i son ideales de L y además son álgebras de Lie simples.

Los ideales N_i son los únicos ideales minimales de L y cada ideal de L es suma de algunos de ellos.

3.- Descomposición en espacios raices de un álgebra de Lie semisimple

En el estudio de la álgebras de Lie semisimples juega un papel crucial la descomposición de L producida por ciertas subálgebras nilpotentes llamadas **subálgebras de Cartán.** Una subálgebra H de L se llama subálgebra de Cartán de L si

1º.- H es nilpotente

2º.- H es autonormalizada, es decir $[x\ H] \subseteq H \Longrightarrow x \in H$

La subálgebra de Cartán se dice **escindible** si los polinomios característicos de las transformaciones $\mathrm{ad}H: L \dashrightarrow L$ se escinden en el cuerpo base K.

Cada subálgebra de Cartán escindible H de un álgebra de Lie semisimple L sobre un cuerpo K de característica cero, descompone al álgebra L en suma directa de los espacios raices cuya definición y algunas de sus propiedades resumimos aquí:

Para cada aplicación lineal $\alpha: H \dashrightarrow K$ denotamos por $L_\alpha = \{x \in L / [h\ x] = \alpha(h)x,\ \forall h \in H\}$. La aplicación α se dice **raiz** de L si $\alpha \neq 0$ y $L_\alpha \neq 0$. La aplicación lineal nula nos da H, es decir $L_0 = H$.

Llamamos Φ al conjunto de las raices de L. Propiedades:

1.- Φ es finito

2.- $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$

3.- $\dim L_\alpha = 1$ para toda raiz α

4.- $[H\ H]=0$; $[H\ L_\alpha]\ L_\alpha$

$[L_\alpha\ L_\beta]=0$ si $\alpha+\beta$ no es raiz

$[L_\alpha\ L_\beta]\ L_{\alpha+\beta}$ si $\alpha+\beta$ es raiz

5.- Si α es una raiz, entonce $-\alpha$ también lo es. Además $-\alpha$ es el único múltiplo de α que es raiz

6.- El número de raices linealmente independientes es igual a la dimensión de H. El conjunto Φ de raices genera el espacio vectorial dual H^*

7.- Existen sistemas de raices $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ donde $l=\dim H$ tales que cualquier otra raiz β se puede expresar de la forma $\beta=k_1\alpha_1+\ldots+k_l\alpha_l$ donde los k_i son números racionales todos positivos o todos negativos. A tales sistemas se les llama base de Φ o sistema simple de raices. Si todos los k_i son positivos (resp.negativos), se dice que β es positivo (resp.negativo) y se denota $\beta>0$ (resp.$\beta<0$)

El conjunto de raices positivas relativas a una base de Φ se denota por Φ^+. Se dice que $\beta<\alpha$ si y solo si $\alpha-\beta$ es suma de raices positivas o $\beta=\alpha$.

4.- Estructura de las álgebras de Lie reductivas

Sea L un álgebra de Lie. Se llama radical nilpotente de L a la interseccion de los nucleos de las representaciones simples de dimensión finita de L. Se denota por S(L). Si consideramos Rad(L), las siguientes condiciones son equivalentes:

a) L es reductiva

b) $[L\ L]$ es semisimple

c) L es el producto de un álgebra semisimple y de un álgebra abeliana

d) El radical nilpotente, $S(L)$, de L es nulo

e) $Rad(L)$ es el centro de L

III MODULOS

1.- Teorema de Weyl

Sea $\varphi : L \dashrightarrow gl(V)$ una representación finito dimensional de un álgebra de Lie semisimple L, con $V \neq 0$. Entonces φ es completamente reducible.

2.- Descomposición en espacios peso

Sea L un álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cero, H una subalgebra de Cartán de L, Φ el conjunto de raices de L y Δ una base de Φ. Si V es un L-módulo de dimensión finita, entonces para todo $\lambda \in H^*$, considero $V_\lambda = \{v \in V / hv = \lambda(h)v,\ \forall h \in H\}$. La dimensión de V_λ se llama la multiplicidad de λ en V. Si la multiplicidad de λ en V es $\geqslant 1$, es decir si V_λ es distinto de cero, se dice que λ es un **peso** de V. La descomposición $V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ de V relativa a adH se llama de **espacios peso.** Si $v \in V_\lambda$ y $e_\alpha \in L_\alpha$, entonces $e_\alpha v \in V_{\lambda+\alpha}$.

Por definición un **vector maximal** de peso λ en un L-módulo V es un vector no nulo $v^+ \in V_\lambda$ anulado por todo L_α con $\alpha \in \Delta$.

En orden a estudiar L-módulos irreducibles finito dimensionales es usual estudiar la clase mas grande de módulos engendrados por un vector maximal. Si $V = U(L)v^+$ para un vector maximal v^+ de peso λ, se dice que V es **estandar cíclico** de peso λ y a λ se le llama el **peso máximo** de V.

Si V es un L-módulo estandar cíclico con vector maximal $v^+ \in V$ y $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. Entonces:

1.- V está engendrado por los vectores $y_{\beta_1}^{i_1} \ldots y_{\beta_m}^{i_m} v^+$ ($i_j \in Z^+$); en particular, V es la suma directa de sus espacios peso

2.- Los pesos de V son de la forma $\mu = \lambda - \sum_{i=1}^{l} k_i \alpha_i$ ($k_i \in Z^+$) es decir todo peso satisface que $\mu < \lambda$

Dos L-módulos irreducibles de dimension finita que tengan el mismo peso máximo son isomorfos.

La **forma de Killing** $f(x,y) = \text{traza}(\text{ad}x\ \text{ad}y)$ $\forall x,y \in L$ definida en L es no degenerada. Denotamos $f(x,y)$ por (x,y). Si consideramos el Q-espacio vectorial H_0^* engendrado por las raices de H en L, la forma de Killing definida en H_0^* es no degenerada. Si α es una raiz tal que $(\alpha,\alpha) \neq 0$, entonces la aplicación lineal $S_\alpha(\beta) = \beta - \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ definida en H_0^* se caracteriza porque aplica α en $-\alpha$ y deja fijo todo vector ortogonal a α. La reflexión S_α es una transformación ortogonal relativa a la forma de Killing y S_α permuta los pesos de H en cualquier L-módulo finito dimensional. Los S_α engendran el **grupo de Weyl** el cual es finito. Si Δ y Δ' son bases de Φ, entonces existe un único elemento S del grupo de Weyl tal que $S(\Delta) = \Delta'$.

IV INVOLUCIONES

Sea L un álgebra de Lie semisimple finito dimensional sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cero, H una subálgebra de Cartán $\Delta=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$ una base del sistema de raices Φ relativa a H, $e_i, f_i, h_i, i=1,2,\ldots,l$ un conjunto de generadores canónicos para L determinado por Δ. Entonces los h_i forman una base de H, $e_i \in L\alpha_i$, $f_i \in L_{-\alpha_i}$. Sea τ un automorfismo de L, entonces existe un automorfismo invariante (18, Pág. 265) Γ tal que $\Gamma(H)=\tau(H)$. entonces el automorfismo $\tau'=\Gamma^{-1}\tau$ aplica H en H. Consideremos τ un automorfismo que aplica la subálgebra de Cartán H en si misma. Si $e_\alpha \in L_\alpha$, entonces como $[e_\alpha\ h]=\alpha(h)e_\alpha$, se tiene que $[\tau(e_\alpha)\ \tau(h)]=\alpha(h)\tau(e_\alpha)$. Supongamos que $\tau(L_\alpha)=L_\beta$ donde β es raiz, obtenemos pues una aplicación $\alpha \longrightarrow \beta$ en el conjunto de las raices, y $[\tau(e_\alpha)\ \tau(h)]=\beta(\tau(h))\tau(e_\alpha)$. Por tanto $\alpha(h)=\beta(\tau(h))$. Sea τ^* la aplicación transpuesta en H^* de la restricción de τ a H. Por definición, si $\xi \in H^*$, entonces $\tau^*(\xi)(h)=\xi(\tau(h))$. Si consideramos $\xi=\beta$ se tiene que $\tau^*(\beta)(h)=\beta(\tau(h))=\alpha(h)$. Por tanto $\tau^*(\beta)=\alpha$ y $\beta=\tau^{*-1}(\alpha)$.

Si τ es un automorfismo de L tal que $\tau(H)=H$ para una subálgebra de Cartán H de L, entonces para cualquier raiz α de H en L se tiene que $\tau(L_\alpha)=L_{\tau^{*-1}(\alpha)}$ donde τ^* es la transpuesta en H^* de la restricción de τ a H.

Si Δ es una base de Φ, $\tau^{*-1}(\Delta)$ es tambien una base de Φ.

Consideremos las álgebras de Lie clásicas A_l, B_l, C_l y D_l. Se tiene de (18, Pág. 281):

El grupo de automorfismos del álgebra de Lie de matrices 2x2 de traza cero es el conjunto de aplicaciones $X \dashrightarrow A^{-1}XA$. El grupo de automorfismos del álgebra de Lie de matrices nxn de traza cero, n>2, es el conjunto de aplicaciones $X \dashrightarrow A^{-1}XA$ y $X \dashrightarrow -A^{-1}X'A$

siendo el cuerpo base K algebraicamente cerrado de característica cero, y A una matriz no singular.

Si consideramos las álgebras simples $B_l(l \geq 2)$, $C_l(l \geq 3)$ y $D_l(l \geq 4)$, éstas es el conjunto de matrices X satisfaciendo $S^{-1}X'S=-X$ donde $S=1$ para B_l y D_l, y $S'=-S$ para C_l. El orden de las matrices es $2l$ para C_l y D_l y $2l+1$ para B_l. Se tiene el siguiente resultado:

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y sea L el álgebra de Lie de matrices antisimétricas o el álgebra de Lie simpléctica de matrices X tales que $S^{-1}X'S=-X$ donde $S'=-S$. Supongamos el número de filas $n \geq 5$ en el caso antisimétrico impar-dimensional, $n \geq 6$ en el caso simpléctico y $n \geq 10$ en el caso antisimétrico par-dimensional. Entonces el grupo de automorfismos de L en el caso antisimétrico consiste en las aplicaciones $X \dashrightarrow O^{-1}XO$ donde O es ortogonal. En el caso impar-dimensional se puede añadir la condición de que O es propio. En el caso simpléctico el grupo de automorfismos es el conjunto de aplicaciones $X \dashrightarrow O^{-1}XO$ donde $O'SO=S$.

Estos resultados referentes a automorfismos de L tendrán su aplicación en Capítulos posteriores cuando hagamos un estudio de las involuciones de L teniendo en cuenta que una involución en L no es ni mas ni menos que un antiautomorfismo de orden dos.

Para mas detalle consultar los libros de **Jacobson** (18), **Humphreys** (17) y **Bourbaki** (5)

CAPITULO 1 : CONSTRUCCION DEL GRUPO DE WITT

CAPITULO 1.- CONSTRUCCION DEL GRUPO DE WITT

PARRAFO 1.- EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE CON INVOLUCION.

En este párrafo, partiendo de un álgebra de Lie finito dimensional sobre un cuerpo K arbitrario, damos las definiciones necesarias para llegar a construir el grupo de Witt de formas ε-simétricas invariantes.

Si L es una K-álgebra de Lie, un K-espacio vectorial V, provisto de una aplicación $L \times V \dashrightarrow V$, denotada $(a,x) \dashrightarrow ax$, se llama un L-módulo si se satisfacen los siguientes axiomas:

1.- $(\alpha a+\beta b)x=\alpha(ax)+\beta(bx)$

2.- $a(\alpha x+\beta y)=\alpha(ax)+\beta(ay)$

3.- $[a\ \ b]x=a(bx)-b(ax)$

$\forall a,b \in L;\ \forall x,y \in V;\ \forall \alpha,\beta \in K$

Sea L una K-álgebra de Lie de dimensión finita provista de una involución $a \dashrightarrow \bar{a}$, es decir un antiautomorfismo de orden dos en L. Se verifica $\overline{[a\ b]} = -[\bar{a}\ \bar{b}] = [\bar{b}\ \bar{a}]$.

DEFINICION 1.1.1.- Si $\varepsilon = \pm 1$, **una forma ε-simétrica invariante o más simplemente una ε-forma (V,f) es un L-módulo V de dimensión finita sobre K, provisto de una forma bilineal f, con valores en K, ε-simétrica, no degenerada e invariante, es decir**

$$f(ax,y) = f(x,\bar{a}y) \qquad \forall a \in L; \quad \forall x,y \in V$$

DEFINICION 1.1.2.- **Una ε-subforma de una ε-forma (V,f) es una ε-forma (N,g) donde N es un L-submódulo de V siendo $g = f|_{N\times N}$.**

DEFINICION 1.1.3.- **Una ε-forma (V,f) se llama anisótropa** si para todo L-submódulo **N de V es (N,g) una ε-subforma de (V,f)** donde $g = f|_{N\times N}$.

Sea $V^* = Hom_K(V,K)$ el K-espacio vectorial dual de V.

LEMA 1.1.4.- El K-espacio vectorial V^* se convierte en un L-módulo respecto a la involución considerada en el álgebra de Lie L si definimos

$$(a\varphi)(x) = \varphi(\bar{a}x) \qquad \forall \varphi \in V^*; \ \forall a \in L; \ \forall x \in V$$

DEMOSTRACION.- Es de fácil comprobación que:

(i) $((\alpha a+\beta b)\varphi)(x) = (\alpha(a\varphi)+\beta(b\varphi))(x)$

(ii) $(a(\alpha\varphi+\beta\psi))(x) = (\alpha(a\varphi)+\beta(a\psi))(x)$

(iii) $([a\ b]\varphi)(x)=(a(b\varphi)-b(a\varphi))(x)$

$\forall \alpha,\beta\in K;\ \forall a,b\in L;\ \forall \varphi,\psi\in V^*;\ \forall x\in V$

DEFINICION 1.1.5.-El L-módulo V^* se llama dual del L-módulo V respecto a la involución definida en L. Se nota por V^*_-.

PROPOSICION 1.1.6.- Si (V,f) es una ε-forma, entonces los L-módulos V y V^*_- son isomorfos.

DEMOSTRACION:

Considerando el homomorfismo de K-espacios vectoriales $\varphi_f: V \dashrightarrow V^*_-$ definido por $(\varphi_f(x))(y)=f(x,y)\ \forall x,y\in V$, se verifica que $\forall a\in L$ es $(\varphi_f(ax))(y)=f(ax,y)=f(x,\bar{a}y)=(\varphi_f(x))(\bar{a}y)=(a(\varphi_f(x)))(y)$ y por tanto φ_f es un homomorfismo de L-módulos.

Por otro lado $\forall x\in \mathrm{Ker}\,\varphi_f$ es $\varphi_f(x)$ el cero de V^*_- y por tanto $\forall y\in V$ es $(\varphi_f(x))(y)=f(x,y)=0$. Como f es no degenerada entonces x es el cero de V e implica que φ_f es inyectiva.

Al ser V y V^*_- de la misma dimensión finita y φ_f inyectiva es φ_f también sobreyectiva y por tanto isomorfismo.

DEFINICION 1.1.7.- Un L-módulo V se dice que es autodual si es isomorfo a V^*_-.

SUMA ORTOGONAL DE ε-FORMAS

DEFINICION 1.1.8.- Sean (V_1,f_1) , (V_2,f_2) dos ε-formas, se puede construir la ε-forma (V,f) donde $V=V_1\oplus V_2$ y f se define

como

$$f((x_1,y_1),(x_2,y_2))=f_1(x_1,x_2)+f_2(y_1,y_2)$$

$$x_i \in V_1,\ y_i \in V_2$$

Se expresa $(V,f)=(V_1,f_1)\perp(V_2,f_2)=(V_1\perp V_2,f_1\perp f_2)$

DEFINICION 1.1.9.- Un metabolizador de una ε-forma (V,f) es cualquier L-submódulo de V que sea igual a su ortogonal.

DEFINICION 1.1.10.- Una ε-forma (V,f) es neutra si admite un metabolizador.

DEFINICION 1.1.11.- Sea (V,f) una ε-forma y N un L-submódulo de V. N es isótropo si $f|_{N\times N}=0$.

LEMA 1.1.12.- N es un metabolizador de la ε-forma (V,f) si y solo si es un L-submódulo de V tal que $f|_{N\times N}=0$ y $2\dim N=\dim V$.

DEMOSTRACION:

Necesaria: Si N es un metabolizador de la ε-forma (V,f), entonces N es un L-submódulo de V tal que $N=N^{\perp}$, y por tanto $f|_{N\times N}=0$. Como f es no degenerada, $\dim V=\dim N+\dim N^{\perp}=2\dim N$.

Suficiente: Supongamos N un L-submódulo de V tal que $f|_{N\times N}=0$, entonces $N\subset N^{\perp}$. Como $\dim V=\dim N+\dim N^{\perp}=2\dim N$, tenemos $N=N^{\perp}$.

COROLARIO.- Si (V,f) es una ε-forma neutra, entonces la dimensión de V es par.

PROPOSICION 1.1.13.- La suma ortogonal de dos ε-formas neutras es una ε-forma neutra.

DEMOSTRACION:

Sean (V_1,f_1) y (V_2,f_2) dos ε-formas neutras con metabolizadores V_1' y V_2' respectivamente, entonces $V_1'=V_1'^{\perp}$ y $V_2'=V_2'^{\perp}$ siendo $\dim V_1=2\dim V_1'$, $\dim V_2=2\dim V_2'$. Veamos que es neutra la ε-forma $(V,f)=(V_1,f_1)\perp(V_2,f_2)$; para ello tomamos el L-submódulo $V_1'\oplus V_2'$ del L-módulo $V_1\oplus V_2$, siendo

$$(V_1'\oplus V_2')^{\perp}=\{(x,y)\in V_1\oplus V_2/\forall(x',y')\in V_1'\oplus V_2',\ f((x,y),(x',y'))=$$

$$=f_1(x,x')+f_2(y,y')=0\}=V_1'^{\perp}\oplus V_2'^{\perp}=V_1'\oplus V_2'.$$

Además

$$2(\dim V_1'+\dim V_2')=2\dim(V_1'\oplus V_2')=2\dim V_1'+2\dim V_2'=\dim V_1+\dim V_2=$$

$$=\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V.$$

El conjunto $\chi_\varepsilon(L)$ de las formas ε-simétricas invariantes con la suma ortogonal de ε-formas es un semigrupo.

DEFINICION 1.1.14.- Dos ε-formas (V,f) y (V',f') son isomorfas si existe un isomorfismo $i:V\dashrightarrow V'$ de L-módulos tal que $f(x,y)=f'(i(x),i(y))$, $\forall x,y\in V$. Se expresa $(V,f)\cong(V',f')$.

LEMA 1.1.15.- En el semigrupo $[\chi_\varepsilon(L),\perp]$ la relación binaria $(V,f)\sim(V',g)$ si y solamente si existen $(X,f_1),(Y,g_1)$ ε-formas neutras tal que $(V,f)\perp(X,f_1)\cong(V',g)\perp(Y,g_1)$ es de equivalencia.

DEMOSTRACION: Trivial.

LEMA 1.1.16.- La relación de equivalencia es compatible con la suma ortogonal de ε-formas.

DEMOSTRACION:

Si $(V,f)\sim(V',g)$, existen (X,f_1), (Y,g_1) ε-formas neutras tal que $(V,f)\perp(X,f_1)\simeq(V',g)\perp(Y,g_1)$.

Si $(U,h)\sim(U',t)$, existen (M,h_1), (N,t_1) ε-formas neutras tal que $(U,h)\perp(M,h_1)\simeq(U',t)\perp(N,t_1)$. Entonces $(V,f)\perp(X,f_1)\perp(U,h)\perp(M,h_1)\simeq(V',g)\perp(Y,g_1)\perp(U',t)\perp(N,t_1)$ y teniendo en cuenta que la suma ortogonal de dos ε-formas neutras es una ε-forma neutra, obtenemos $(V,f)\perp(U,h)\sim(V',g)\perp(U',t)$.

En el conjunto cociente $\dfrac{X_\varepsilon(L)}{\sim}=W_\varepsilon(L)$ de clases de ε-formas equivalentes identificamos cada clase por una cualquiera de las ε-formas que contenga.

LEMA 1.1.17.- $W_\varepsilon(L)$ con la suma ortogonal es un grupo.

DEMOSTRACION:

La clase que contiene a las ε-formas neutras es el elemento neutro. El elemento simétrico de cualquier elemento (V,f) es $(V,-f)$ puesto que $(V,f)\perp(V,-f)=(V\perp V,f\perp(-f))$, que tiene de metabolizador el $\{(x,x)\ /\ x\in V\}$, es una ε-forma neutra.

DEFINICION 1.1.18.- $(W_\varepsilon(L),\perp)$ se llama grupo de Witt

de formas ε-simétricas invariantes.

PARRAFO 2.- DETERMINACION DE LOS ELEMENTOS DEL GRUPO DE WITT MEDIANTE LAS ε-FORMAS ANISOTROPAS

El objetivo de este párrafo es ver que en cada clase no nula del grupo de Witt existe una ε-forma anisótropa salvo isomorfismos.

PROPOSICION 1.2.1.- Todas las ε-formas neutras son equivalentes entre si, y la clase formada por ellas es el elemento neutro del grupo de Witt.

DEMOSTRACION:

Si $(V,f)\sim 0$, existen (H,g), (H',g') ε-formas neutras tal que $(V,f)\perp(H,g)\simeq(H',g')$. Como $(V,f)\perp(H,g)$ es una ε-forma neutra, tendrá un metabolizador N tal que $N=N^{\perp}$. Se puede escoger el metabolizador de $(V,g)\perp(H,g)$ de manera que contenga al metabolizador H_0 de (H,g). Para ello tomamos el L-submódulo maximal M_0 de $V\oplus H$ tal que $H_0\subset M_0\subset M_0^{\perp}$. Veamos que $(V,f)\perp(H,g)$ tiene como metabolizador a M_0. Consideramos $M_0+(N\cap M_0^{\perp})$. Por hipótesis $M_0\subset M_0^{\perp}$, puesto que $N\cap M_0^{\perp}\subset M_0^{\perp}$, entonces $M_0+(N\cap M_0^{\perp})\subset M_0^{\perp}$ (1).

Como $M_0\subset M_0^{\perp\perp}$ entonces $M_0\subset N^{\perp}+M_0^{\perp\perp}$ (2).

Por otro lado $N\cap M_0^{\perp}\subset N=N^{\perp}$ de donde $N\cap M_0^{\perp}\subset N^{\perp}+M_0^{\perp\perp}$ (3).

Obtenemos:

de (2) y (3) $M_0+(N\cap M_0^{\perp})\subset N^{\perp}+M_0^{\perp\perp}$ (4).

de (1) y (4) $M_0+(N\cap M_0^{\perp})\subset M_0^{\perp}\cap(N^{\perp}+M_0^{\perp\perp})=(M_0+(N\cap M_0^{\perp}))^{\perp}$.

Es decir: $M_0+(N\cap M_0^{\perp})$ está contenido en su ortogonal, contiene a H_0 y obviamente contiene a M_0. Por ser M_0 maximal es $M_0=M_0+(N\cap M_0^{\perp})$ y $N\cap M_0^{\perp}\subset M_0$; $M_0^{\perp}\subset(N\cap M_0^{\perp})^{\perp}=(N^{\perp}\cap M_0^{\perp\perp})^{\perp}=(N+M_0)^{\perp\perp}=N+M_0$. $\forall x\in M_0^{\perp}$ es $x\in N+M_0$ y así $x=n+p$ donde $n\in N$ y $p\in M_0\subset M_0^{\perp}$; $n=x-p\in M_0^{\perp}$ y $n\in N\cap M_0^{\perp}$.

Es decir $\forall x\in M_0$ es $x=n+p$ donde $n\in N\cap M_0^{\perp}$ y $p\in M_0$ y de esta manera $x\in M_0+(N\cap M_0^{\perp})$.

Luego $M_0^{\perp}\subset M_0+(N\cap M_0^{\perp})=M_0$ y por hipótesis $M_0=M_0^{\perp}$. M_0 es pues un metabolizador de la ε-forma neutra $(V,f)\perp(H,g)$ que contiene al metabolizador H_0 de la ε-forma neutra (H,g). Como M_0 es un L-submódulo de $V\oplus H$, llamamos M_0' la proyección de M_0 sobre V. Veamos que M_0' es un metabolizador de (V,f). El Ker de la proyección de M_0 sobre V es $M_0\cap H$ que es un L-submódulo isótropo de H ya que $M_0=M_0^{\perp}$. Como $H_0\subset M_0$ y $H_0\subset H$ entonces $H_0\subset M_0\cap H$ siendo H_0 el L-submódulo isótropo maximal de H y por tanto $H_0=M_0\cap H$.

Tenemos la sucesión exacta $0\dashrightarrow H_0\dashrightarrow M_0\dashrightarrow M_0'\dashrightarrow 0$

$\dim M_0=\dim H_0+\dim M_0'$; $\quad 2\dim M_0'=2\dim M_0-2\dim H_0=\dim(V\oplus H)-\dim H=$ $=\dim V$. Por otro lado la proyección de M_0 sobre H es H_0, en efecto, como $M_0=M_0^{\perp}$ es un L-submódulo de $V\oplus H$, entonces $\forall x\in M_0$ es $x\in V\oplus H$ y así $x=(a,b)$ donde $a\in V$ y $b\in H$. Como $H_0\subset M_0$, $\forall c\in H_0$, $(0,c)\in M_0$ y $(f\perp g)((a,b),(0,c))=f(a,0)+g(b,c)=0$. Es decir $\forall c\in H_0$, es $g(b,c)=0$ y por tanto $b\in H_0^{\perp}=H_0$. Luego $M_0=M_0'\oplus H_0$.

Veamos que M_0' es isótropo. $\forall x,y\in M_0'$, existe $a,b\in H_0=H_0^{\perp}$ tal que $(x,a),(y,b)\in M_0=M_0^{\perp}$. Entonces $(f\perp g)((x,a),(y,b))=f(x,y)+g(a,b)=0$. Como $g(a,b)=0$, es $f(x,y)=0$ $\forall x,y\in M_0'$. M_0' es un L-submódulo isótropo de V y por tanto $f_{|M_0'\times M_0'}=0$ y tal que $2\dim M_0'=\dim V$. Luego (V,f) es una ε-forma neuta.

COROLARIO.- La relación de equivalencia del Lema 1.1.15 puede enunciarse como $(V,f)\sim(V',g)$ si y solamente si la ε-forma $(V,f)\perp(V',-g)=(V\bullet V',f\perp(-g))$ es neutra.

TEOREMA 1.2.2.- Cada elemento distinto de cero del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$ contiene una y solo una ε-forma anisótropa salvo isomorfismos.

DEMOSTRACION:

<u>Existencia</u>

Supongamos que (V,f) es una ε-forma no neutra y no anisótropa. Tenemos que probar que existe una ε-forma anisótropa equivalente a (V,f). Por ser (V,f) no anisótropa debe existir un L-submódulo N de V tal que $N\cap N^{\perp}=N_1\neq 0$. Claramente $f_{|N_1\times N_1}=0$, luego N_1 debe de ser distinto de $N_1^{\perp}$ pues en otro caso (V,f) sería neutra, contradicción. Consideremos ahora $f_{|N_1^{\perp}\times N_1^{\perp}}$, entonces como

$$\mathrm{Ker}(f_{|N_1^{\perp}\times N_1^{\perp}})=\{x\in N_1^{\perp}\ /\ \forall y\in N_1^{\perp},\ f(x,y)=0\}=N_1^{\perp}\cap N_1^{\perp\perp}=N_1^{\perp}\cap N_1=N_1,$$

tenemos que f induce una forma bilineal f' ε-simétrica no degenerada e invariante sobre $N_1^{\perp}/N_1$. Vamos a demostrar que $(V,f)\sim(N_1^{\perp}/N_1,f')$ pero esto es lo mismo que demostrar que $(V,f)\perp(N_1^{\perp}/N_1,-f')$ es una ε-forma neutra. Sea $S=\{(x,[x])\in V\oplus(N_1^{\perp}/N_1)$ tal que $x\in N_1^{\perp}\}$. Veamos que S es metabolizador de $(V\oplus(N_1^{\perp}/N_1),f\perp(-f'))$.

S es un L-submódulo de $V\oplus(N_1^{\perp}/N_1)$, además $\forall(x,[x]),(y,[y])\in S$ sucede que $(f\perp(-f'))((x,[x]),(y,[y]))=f(x,y)-f'([x],[y])=$
$=f(x,y)-f'(x+N_1,y+N_1)=f(x,y)-f(x,y)-f(x,N_1)-f(N_1,y)-f(N_1,N_1)=0.$

Luego $(f\perp(-f'))_{|S\times S}=0.$

Por otro lado $\dim(V\oplus(N_1^{\perp}/N_1))=\dim V+\dim N_1^{\perp}-\dim N_1=$

$=\dim V+\dim N_1^{\perp}-\dim V+\dim N_1^{\perp}=2\dim N_1^{\perp}=2\dim S.$

Al ser S metabolizador de la ε-forma $(V\oplus(N_1^{\perp}/N_1),f\perp(-f'))$, ésta es neutra y entonces $(V,f)\sim(N_1^{\perp}/N_1,f')$.

Puesto que $\dim V=\dim N_1+\dim N_1^{\perp}$, es $\dim V>\dim(N_1^{\perp}/N_1)$.

Si $(N_1^{\perp}/N_1,f')$ fuese una ε-forma anisótropa, ya estaría demostrado. En caso contrario repetiríamos el proceso, hasta llegar, mediante un número finito de pasos, a una ε-forma anisótropa equivalente a (V,f) por ser $\dim_K V$ finita.

Unicidad

Tenemos que demostrar que dos ε-formas anisótropas (V_1,f_1) y (V_2,f_2) que sean equivalentes deben ser isomorfas. Por ser $(V_1,f_1)\sim(V_2,f_2)$ entonces $(V_1\oplus V_2,f_1\perp(-f_2))$ es una ε-forma neutra y tendrá un metabolizador, si éste es N, considero los L-submódulos

$V_1 \cap N$ y $V_2 \cap N$ de V_1 y V_2 respectivamente. $(V_1 \cap N, g)$ es una ε-subforma de (V_1, f_1), donde $g = f_{1|(V_1 \cap N) x (V_1 \cap N)} = 0$ y por tanto $V_1 \cap N = \{0\}$. Análogamente $V_2 \cap N = \{0\}$.

Sea la proyección $p_{V_1}: N ---> V_1$. Como $\mathrm{Ker} p_{V_1} = N \cap V_2 = \{0\}$ es p_{V_1} inyectiva. Además $(\mathrm{Im} p_{V_1}, h) = (p_{V_1}(N), h)$ es una ε-subforma de (V_1, f) donde $h = f_{1|p_{V_1}(N) x p_{V_1}(N)}$. Por tanto $V_1 = p_{V_1}(N) \perp (p_{V_1}(N))^{\perp}$; entonces $\forall x \in (p_{V_1}(N))^{\perp}$ es $x \perp p_{V_1}(N)$ y $(x,0) \perp N$, $(x,0) \in N^{\perp} = N$. Como $x \in V_1$ es $x \in V_1 \cap N = \{0\}$. Es decir $V_1 = p_{V_1}(N) = \mathrm{Im} p_{V_1}$, y p_{V_1} es sobreyectiva y por tanto isomorfismo. Igualmente $p_{V_2}: N ---> V_2$ es un isomorfismo.

Consideramos la composición $p = p_{V_2} o p_{V_1}^{-1}: V_1 ---> V_2$ que es un isomorfismo de L-módulos. Además $\forall x, y \in V_1$ será:

$p(x) = p_{V_2}(p_{V_1}^{-1}(x)) = p_{V_2}(x,n) = n$, y $(x,n) \in N$;

$p(y) = p_{V_2}(p_{V_1}^{-1}(y)) = p_{V_2}(y,m) = m$, y $(y,m) \in N$.

Como $N = N^{\perp}$ entonces $(f_1 \perp (-f_2))((x,n),(y,m)) = 0 = f_1(x,y) - f_2(n,m) = f_1(x,y) - f_2(p(x), p(y))$.

DEFINICION 1.2.3.- Un L-módulo V se llama irreducible o simple si no tiene mas L-submódulos que él mismo y el trivial.

PROPOSICION 1.2.4.- Un L-módulo $V \neq 0$ es simple si y solo si para cada $x \neq 0$, $x \in V$, se verifica que $L.x = V$.

DEMOSTRACION: Trivial

DEFINICION 1.2.5.- Un L-módulo V es semisimple si y solamente si es la suma directa de L-módulos simples.

LEMA 1.2.6.- Si (V_a, f) es una ε-forma anisótropa, entonces V_a es un L-módulo semisimple.

DEMOSTRACION:

Sea N un L-submódulo simple de V_a, que existe puesto que V_a es de dimensión finita. Consideremos la ε-subforma correspondiente (N,g) siendo $g=f_{|N\times N}$. Entonces $N\cap N^{\perp}=\{0\}$ y por tanto $\dim V_a=\dim N+\dim N^{\perp}=\dim(N+N^{\perp})$; con lo que $V_a=N\perp N^{\perp}$ siendo $(N^{\perp},f)$ una ε-forma anisótropa. Repitiendo el procedimiento con $(N^{\perp},f)$ y en número finito de pasos obtendremos que V_a es suma directa de L-submódulos simples.

PARRAFO 3.- PROPIEDADES FUNTORIALES

PROPOSICION 1.3.1.- $W_{\varepsilon}(-)$ es un funtor contravariante de la categoría de K-álgebras de Lie con involución hacia la categoría de grupos abelianos.

DEMOSTRACION:

Sean las K-álgebras de Lie L y L' con involuciones respectivas $a \dashrightarrow \bar{a}$, $a' \dashrightarrow \hat{a}'$ y el homomorfismo de K-álgebras de Lie $\varphi: L \dashrightarrow L'$ tal que $\varphi(\bar{a})=\widehat{\varphi(a)}$. Entonces tenemos $\varphi^*: W_{\varepsilon}(L') \dashrightarrow W_{\varepsilon}(L)$

definido por $\varphi^*[(V,f)]=[(V_\varphi,f)]$ donde V_φ es el L-módulo definido por $ax=\varphi(a)x$, $\forall a\in L$, $\forall x\in V$.

<u>φ^* está bien definido</u>

Si $(V,f)\sim(V',f')$ existen (X,f_1), (Y,f_1') ε-formas neutras tal que

$(V,f)\perp(X,f_1)\simeq(V',f')\perp(Y,f_1')$; $(V\perp X,f\perp f_1)\simeq(V'\perp Y,f'\perp f_1')$;

$((V\perp X)_\varphi,f\perp f_1)\simeq((V'\perp Y)_\varphi,f'\perp f_1')$; $(V_\varphi\perp X_\varphi,f\perp f_1)\simeq(V'_\varphi\perp Y_\varphi,f'\perp f_1')$;

$(V_\varphi,f)\perp(X_\varphi,f_1)\simeq(V'_\varphi,f')\perp(Y_\varphi,f_1')$; $(V_\varphi,f)\sim(V'_\varphi,f')$.

<u>φ^* es un homomorfismo de grupos</u>

$\varphi^*([(V,f)]\perp[(V',f')])=\varphi^*[(V\perp V',f\perp f')]=[((V\perp V')_\varphi,f\perp f')]=$

$=[(V_\varphi,f)\perp(V'_\varphi,f')]=[(V_\varphi,f)]\perp[(V'_\varphi,f')]=\varphi^*[(V,f)]\perp\varphi^*[(V',f')]$.

<u>$(1_L)^*=1_{W\varepsilon(L)}$</u>

En efecto, la identidad en la K-álgebra de Lie L induce la identidad entre L-módulos asi como entre ε-formas y por tanto entre clases del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$.

<u>$(\varphi\lambda)^*=\lambda^*\varphi^*$</u>

Si L, L' y L'' son K-álgebras de Lie con involuciones respectivas $a\text{--->}\bar{a}$; $a'\text{--->}\hat{a}'$; $a''\text{--->}\tilde{a}''$ y $\lambda:L\text{--->}L'$; $\varphi:L'\text{--->}L''$ son homomorfismos de K-álgebras de Lie donde $\lambda(\bar{a})=\widehat{\lambda(a)}$; $\varphi(\hat{a}')=\widetilde{\varphi(a')}$, éstos inducen $\varphi^*:W_\varepsilon(L'')\text{--->}W_\varepsilon(L')$; $\lambda^*:W_\varepsilon(L')\text{--->}W_\varepsilon(L)$ homomorfismos de grupos de tal manera que $(\lambda^*\varphi^*)[(V,f)]=\lambda^*[(V_\varphi,f)]=[((V_\varphi)_\lambda,f)]$ por otro lado $(\varphi\lambda)^*[(V,f)]=[(V_{\varphi\lambda},f)]$. Puesto que $V_{\varphi\lambda}=(V_\varphi)_\lambda$, queda probado.

PARRAFO 4.- SUBGRUPOS DEL GRUPO DE WITT-DESCOMPOSICION

DEFINICION 1.4.1.- Al K-espacio vectorial V con la acción $L\times V \dashrightarrow V$ tal que $(a,x) \dashrightarrow ax=0$, $\forall a\in L$, $\forall x\in V$ se le llama L-módulo trivial.

Toda forma bilineal no degenerada definida en un L-módulo trivial es invariante.

DEFINICION 1.4.2.- Si V es un L-módulo trivial y f es cualquier forma bilineal ε-simétrica no degenerada definida en V entonces a (V,f) se le llama ε-forma trivial.

En el grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$ consideramos los conjuntos:

$G_\varepsilon(L)=\{[(V,f)]\in W_\varepsilon(L) \;/\; V$ es un L-módulo trivial$\}$

$H_\varepsilon(L)=\{[(V,f)]\in W_\varepsilon(L) \;/\;$ dimensión de V es par$\}$

PROPOSICION 1.4.3.- $H_\varepsilon(L)$ y $G_\varepsilon(L)$ son subgrupos de $W_\varepsilon(L)$, y $G_\varepsilon(L)$ es isomorfo a $W_\varepsilon(K)$.

DEMOSTRACION:

Si consideramos el homomorfismo $W_\varepsilon(L) \dashrightarrow Z/2Z$ dado por la dimensión módulo dos, se trata de un homomorfismo bien definido pues las formas neutras son de dimensión par. El núcleo de este homomorfismo es $H_\varepsilon(L)$ y por tanto es un subgrupo de $W_\varepsilon(L)$. Es trivial que $G_\varepsilon(L)$ es un subgrupo de $W_\varepsilon(L)$. Veamos que $G_\varepsilon(L)$ es isomorfo a $W_\varepsilon(K)$. Para ello considero el homomorfismo $\phi: W_\varepsilon(K) \dashrightarrow G_\varepsilon(L)$ de grupos tal que $\forall[(V,f)]\in W_{\varepsilon}(K)$, $\phi[(V,f)]=[(V,f)]\in G_{\varepsilon}(L)$ donde V es ya un L-módulo trivial. El homomorfismo inverso queda definido cuando solo se conserva la estructura de espacio vectorial (y la forma bilineal) de cualquier elemento de $G_{\varepsilon}(L)$.

PROPOSICION 1.4.4.- $W_{-1}(L)=H_{-1}(L)$

DEMOSTRACION:

$H_{-1}(L)$ es un subgrupo de $W_{-1}(L)$. Además para todo $[(V,f)]$ de $W_{-1}(L)$, f es antisimétrica y no degenerada y por tanto la dimensión de V es par. Luego $[(V,f)]\in H_{-1}(L)$.

PROPOSICION 1.4.5.- $W_{+1}(L)=H_{+1}(L)+G_{+1}(L)$

DEMOSTRACION:

Para cualquier $[(V,f)]$ de $W_{+1}(L)$, si la dimension de V es par, entonces $[(V,f)]\in H_{+1}(L)$ y por tanto $[(V,f)]=[(V,f)]+0$. Si la dimensión de V es impar, consideramos la ε-forma trivial $[(V_1,g)]$ donde $\dim_K V_1=1$; entonces $[(V,f)]\perp[(V_1,g)]\in H_{+1}(L)$. Teniendo en cuenta que $(V_1,g)\perp(V_1,-g)$ es una ε-forma neutra se obtiene $[(V,f)]=([(V,f)]\perp[(V_1,-g)])\perp[(V_1,g)]$.

PROPOSICION 1.4.6.- Si $\varphi:L\text{--->}L'$ es cualquier homomorfismo de K-álgebras de Lie, $\varphi^*:G_{\varepsilon}(L')\text{--->}G_{\varepsilon}(L)$ es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACION:

Si consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & W_\varepsilon(K) \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ G_\varepsilon(L') \arrow[rr, dashed, "\varphi^*"'] & & G_\varepsilon(L) \end{tikzcd}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son isomorfismos de grupos, es $\psi_2=\varphi^*\psi_1$ y por tanto

$\varphi^*=\psi_2\,\psi_1^{-1}$ es un isomorfismo.

COROLARIO.- $\varphi^*(H_\varepsilon(L'))\subset H_\varepsilon(L)$.

Sea L una K-álgebra de Lie finito dimensional donde K es un <u>**cuerpo algebraicamente cerrado**</u>

LEMA 1.4.7.- Si (V,f) es una ε-forma, $(V,f)\simeq(V,-f)$

DEMOSTRACION:

Sea i una raiz cuadrada de -1. La aplicación $\varphi:V\dashrightarrow V$ tal que $\varphi(x)=ix\ \forall x\in V$ es un isomorfismo de L-módulos que verifica $-f(\varphi(x),\varphi(y))=f(x,y)$.

LEMA 1.4.8.- Si (V,f) es una ε-forma, $(V,f)\perp(V,f)$ es una ε-forma neutra.

DEMOSTRACION:

Si consideramos $N=\{(x,ix)\ /x\in V\}$ donde i es una raiz cuadrada de -1, entonces $(V\perp V,f\perp f)$ es una ε-forma neutra por ser N un metabolizador.

COROLARIO 1.- $(V,f)\sim(V,-f)$

COROLARIO 2.- $\forall \alpha \in W_\varepsilon(L)$, $2\alpha=0$ y por tanto $W_\varepsilon(L)$ es un espacio vectorial sobre $Z/2Z$.

LEMA 1.4.9.- Si $\varepsilon=+1$, entonces $G_{+1}(L)=Z/2Z$

DEMOSTRACION:

Sea $[(V,f)]\in G_{+1}(L)$. Si la dimensión de V es par, entonces $(V,f)\sim 0$. Si la dimensión de V es impar, $(V,f)\sim(K,1)$.

LEMA 1.4.10.- Si $\varepsilon=-1$, entonces $G_{-1}(L)=0$

DEMOSTRACION:

Si $[(V,f)]\in G_{-1}(L)$, por ser f antisimétrica y no degenerada, la dimensión de V es par, y por tanto, como $W_{-1}(K)\cong G_{-1}(L)$, es $G_{-1}(L)=0$.

LEMA 1.4.11.- $W_{+1}(L)=H_{+1}(L)\oplus G_{+1}(L)$

DEMOSTRACION:

(i) $\forall [(V,f)]\in H_{+1}(L)\cap G_{+1}(L)$ es $[(V,f)]\in H_{+1}(L)$ y por tanto la dimensión de V es par. Como $[(V,f)]\in G_{+1}(L)$, al ser la dimensión de V par obtenemos $(V,f)\sim 0$ y por tanto $H_{+1}(L)\cap G_{+1}(L)=\{0\}$

(ii) $\forall [(V,f)]\in W_{+1}(L)$. Si la dimensión de V es par, sucede que $[(V,f)]\in H_{+1}(L)$ y por tanto $[(V,f)]=[(V,f)]+0$. Si la dimensión de V es impar, consideramos la ε-forma trivial $[(V_1,g)]$ con $\dim_K V_1=1$. Entonces $[(V_1,g)]\in G_{+1}(L)$ y $[(V,f)]\perp[(V_1,g)]\in H_{+1}(L)$. Teniendo en cuenta que $(V_1,g)\perp(V_1,g)$ es una ε-forma neutra, entonces

$$[(V,f)]=([(V,f)]\perp[(V_1,g)])\perp[(V_1,g)]$$

El Lema anterior en general no es cierto como sucede si el cuerpo K no es algebraicamente cerrado.

PROPOSICION 1.4.12.- Si φ:L---> L' es un homomorfismo trivial de K-álgebras de Lie con involución, entonces $\varphi^*(H_\varepsilon(L'))=0$

DEMOSTRACION:

Si $[(V,f)]$ es una ε-forma de dimensión par, entonces $\varphi^*[(V,f)]=[(V_\varphi,f)]$ es neutra ya que V_φ es de dimensión par y con acción trivial.

CAPITULO 2 : REDUCCIONES Y ESTUDIO DE INVOLUCIONES

CAPITULO 2.- REDUCCIONES Y ESTUDIO DE INVOLUCIONES

En el Capítulo anterior hemos construido el grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$ de una K-álgebra de Lie L cualquiera de dimensión finita provista de una involución σ. El objetivo de este Capítulo es reducir este problema al estudio del grupo de Witt de un álgebra reductiva, reducción interesante ya que las álgebras reductivas son precisamente suma directa de una abeliana y una semisimple, lo que nos conducirá al estudio del grupo de Witt de un álgebra abeliana por una parte y al estudio del grupo de Witt de un álgebra semisimple por otra.

PARRAFO 1.- REDUCCION A UN ALGEBRA DE LIE REDUCTIVA

Sea K un cuerpo de característica cero y L una K-álgebra de Lie finito dimensional. Damos primeramente una serie de conceptos que nos servirán para reducir el estudio del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$ al del grupo de Witt de un álgebra reductiva.

DEFINICION (5, 1.5.3) 2.1.1.- El radical nilpotente de L es la intersección de los núcleos de las representaciones simples finito dimensionales de L. Se designa por S(L).

DEFINICION (5, 1.6.4) 2.1.2.- Un álgebra de Lie se llama reductiva si su representación adjunta es semisimple.

PROPOSICION (5, 1.6.4) 2.1.3.- Sea L un álgebra de Lie. Las siguientes condiciones son equivalentes

a) L es reductiva

b) $[L\ L]$ es semisimple

c) L es suma directa de un álgebra semisimple y de un álgebra abeliana

d) El radical nilpotente de L es nulo

c) Rad(L) es el centro de L

Supongamos definida en la K-álgebra de Lie L una involución σ, nos preguntamos si $\sigma(S(L))=S(L)$, para dar respuesta es necesario el siguiente

LEMA 2.1.4.- Si M es un L-módulo simple de dimensión finita, entonces M^*_σ es un L-módulo simple.

DEMOSTRACION:

Sea M un L-módulo simple de dimensión finita. Considero $M^*=\mathrm{Hom}_K(M,K)$. El K-espacio vectorial M^* se convierte en L-módulo mediante $(af)(x)=f(\sigma(a)x)$ para todo a de L, todo x de M y todo f de M^*. Sea S^*_σ un L-submódulo de M^*_σ y considero el subespacio vectorial $S=\{x\in M \text{ tal que } f(x)=0\ \forall f\in S^*_\sigma\}$ de M. Sabemos que $\dim S=\dim M^*_\sigma-\dim S^*_\sigma$. Veamos que S es un L-submódulo de M, para ello consideramos un elemento cualquiera a de L y un elemento cualquiera x de S, entonces para todo f de S_σ^* se verifica que $f(ax)=(\sigma(a)f)(x)=0$ pues $\sigma(a)f\in S_\sigma^*$ por ser $\sigma(a)\in L$ y S_σ^* un L-submódulo de M_σ^*. Luego ax es un elemento de S y por tanto S es un L-submódulo de M. Como M es simple, entonces S es el trivial ó M, con lo que S_σ^* es M_σ^* ó el trivial respectivamente y por tanto M_σ^* es simple.

PROPOSICION 2.1.5.- El radical nilpotente S(L) de una K-álgebra de Lie es estable bajo cualquier involución σ definida en L.

DEMOSTRACION:

Sea a un elemento cualquiera de S(L) y M un L-módulo simple cualquiera, entonces el L-módulo M_σ^* es tambien simple. Si f es un elemento cualquiera de M_σ^*, entonces $af=0$ con lo que para cualquier x de M es $(af)(x)=f(\sigma(a)x)=0$ y por tanto $\sigma(a)x=0$, es decir $\sigma(a)\in S(L)$.

Podemos pues considerar la K-álgebra de Lie reductiva L/S(L) en donde está definida la involución $\bar\sigma$ deducida de la involución σ definida en L de tal manera que $\bar\sigma(a+S(L))=\sigma(a)+S(L)$ con lo que nos permite hablar del grupo de Witt $W_\varepsilon(L/S(L))$

TEOREMA 2.1.6.- $W_\varepsilon(L)\simeq W_\varepsilon(L/S(L))$

DEMOSTRACION:

Sea $[(V,f)]$ un elemento no nulo de $W_\varepsilon(L)$ y (V_a,f) la única ε-forma anisótropa equivalente a (V,f). V_a es un L-módulo semisimple y por Teorema de Weyl es suma directa de L-módulos simples y por tanto anulado por S(L) por anular a todos los sumandos. Como V_a es un L-módulo y S(L) está contenido en los anuladores de V_a, se puede dotar a V_a de estructura de $L/S(L)$-módulo de la siguiente manera $\forall x \in V_a$, $\forall a+S(L) \in L/S(L)$, se verifique $(a+S(L))x=ax$. Veamos que está bien definido. Si $a+S(L)=b+S(L)$, entonces $a-b \in S(L)$ y $\forall x \in V_a$, $(a-b)x=0=ax-bx=(a+S(L))x-(b+S(L))x$.

Veamos que $F: W_\varepsilon(L) \dashrightarrow W_\varepsilon(L/S(L))$ tal que $F([(V,f)])=[(V_a,f)]$ es un isomorfismo de grupos.

Conserva la suma ortogonal

Sean $[(V,f)]$, $[(V',f')] \in W_\varepsilon(L)$, entonces existen (X,f_1) y (Y,f_1') ε-formas neutras tales que

$(V,f)=(X,f_1)\perp(V_a,f_2)$; $(V',f')=(Y,f_1')\perp(V_a',f_2')$ es decir

$$(V,f)\perp(V',f')=(V\perp V',f\perp f')=(X,f_1)\perp(V_a,f_2)\perp(Y,f_1')\perp(V_a',f_2')=$$

$$=(X\perp Y,f_1\perp f_1')\perp(V_a\perp V_a',f_2\perp f_2').$$

Como $[(V\perp V',f\perp f')] \in W_\varepsilon(L)$, existe una única ε-forma anisótropa equivalente tal que $(V\perp V',f\perp f')\sim((V\perp V')_a,f\perp f')$. Al ser la relación de equivalencia compatible con la suma ortogonal de ε-formas y al ser $(V,f)\sim(V_a,f_2)$; $(V',f')\sim(V_a',f_2')$ entonces $(V\perp V',f\perp f')\sim(V_a\perp V_a',f_2\perp f_2')$ y $((V\perp V')_a,f\perp f')\sim(V_a\perp V_a',f_2\perp f_2')$ por la transitividad de la relación de equivalencia en $W_\varepsilon(L)$.

$((V\perp V')_a\perp(V_a\perp V_a'),(f\perp f')\perp(-(f_2\perp f_2')))$ es una ε-forma neutra tanto en $W_\varepsilon(L)$ como en $W_\varepsilon(L/S(L))$. Así la relación de equivalencia tiene lugar en $W_\varepsilon(L/S(L))$ y $F([(V,f)]\perp[(V',f')])=F([(V,f)])\perp F([(V',f')])$

Inyectiva

Si $F([(V,f)])=[(V_a,f)]=0$ es $(V,f)\sim(V_a,f)=0$

Sobreyectiva

Sea $[(V,f)] \in W_\varepsilon(L/S(L))$ siendo (V_a,f) su representante anisótropo.

Como $[(V_a,f)]\in W_\varepsilon(L)$, $F([(V_a,f)])=[(V_a,f)]=[(V,f)]$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad y debido al Teorema anterior que L es reductiva. Así que $L=Z(L)\oplus[L\ L]$ donde el álgebra derivada $[L\ L]$ es semisimple y $Z(L)$ es el centro de L, siendo $Z(L)=Rad(L)$.

Notemos ahora que la involución σ deja estables tanto $Z(L)$ como $[L\ L]$. En efecto:

Sea $a\in Z(L)$ y b un elemento cualquiera de L . Como σ es suprayectiva, podemos poner $b=\sigma(c)$ para algún c de L. Tenemos que $[\sigma(a)\ b]=[\sigma(a)\ \sigma(c)]=-\sigma[a,c]=0$ pues $a\in Z(L)$, de donde obtenemos que $\sigma(a)\in Z(L)$ y por tanto $\sigma(Z(L))=Z(L)$.

Sea ahora $a\in[L\ L]$, entonces $a=\Sigma\ a_i\ b_i$. Tenemos que $\sigma(a)=\Sigma\sigma[a_i\ b_i]=\Sigma[\sigma(b_i)\ \sigma(a_i)]\in[L\ L]$. Por tanto $\sigma([L\ L])=[L\ L]$.

Esto nos permite definir sendas involuciones en $Z(L)$ y en $[L\ L]$inducidas por σ y por tanto nos permite hablar de los grupos de Witt $W_\varepsilon(Z(L))$ y $W_\varepsilon([L\ L])$.

Por (5, 1.6.8), $[L\ L]$ es un subálgebra Levi de L y tenemos por tanto el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr, dashed, shift left, "f"] & & L/Z(L) \arrow[ll, dashed, shift left, "g"] \\
& {[L\ L]} \arrow[ul, "i"] \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde i=inclusión, φ=isomorfismo, f=proyección canónica.

Puesto que $\varphi=f.i$ y $g=i.\varphi^{-1}$, entonces $f.g=id_{L/Z(L)}$

Mediante la construcción de los grupos de Witt correspondientes y por ser $W_\varepsilon(-)$ un funtor contravariante, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
W_\varepsilon(L) \arrow[rr, dashed, shift left, "g^*"] \arrow[dr, "i^*"'] & & W_\varepsilon(L/Z(L)) \arrow[ll, dashed, shift left, "f^*"'] \arrow[dl, "\varphi^*"] \\
& W_\varepsilon([L\ L]) &
\end{tikzcd}$$

donde i^* = epimorfismo, φ^* = isomorfismo, f^* = monomorfismo

Por tanto el grupo de Witt $W_\varepsilon(L/Z(L)) \simeq W_\varepsilon([L\ L])$ es de forma natural sumando directo del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$. Análogamente, $W_\varepsilon(Z(L))$ es un sumando directo del grupo $W_\varepsilon(L)$. Luego esto nos conduce al estudio de los dos siguientes casos:

1º.-Grupo de Witt de un álgebra de Lie abeliana

2º.-Grupo de Witt de un álgebra de Lie semisimple

PARRAFO 2.- SOBRE EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE ABELIANA

Sea L un álgebra de Lie abeliana finito dimensional sobre un cuerpo K de característica cero. Supongamos definida en L una involución σ, puesto que $\sigma^2 = id$, resulta que el polinomio mínimo de σ divide al polinomio $P(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$ con lo que respecto a una base de L $B_L = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ adecuada la matriz asociada a σ sería una matriz diagonal con 1 en número $r \geqslant 0$ y con -1 en número $\dim L - r$.

Por otro lado el álgebra tensorial de L es $T(L) = K \oplus L \oplus (L \otimes L) \oplus (L \otimes L \otimes L) \oplus \dots$. Si consideramos el ideal bilátero J de T(L) engendrado por todos los elementos de la forma $x \otimes y - y \otimes x$

$\forall x,y \in L$, entoces el álgebra universal envolvente $U(L)=T(L)/J$ es isomorfa al álgebra de polinomios infinito dimensional $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$. Consideremos la aplicación canónica $p:T(L) \dashrightarrow U(L)$ y sea $\hat{p}=p_{|L}$ de tal manera que $\hat{p}(x_i)=x_i$ $\forall x_i \in B_L$, entonces la involución σ definida en L se extiende a un único homomorfismo $\bar{\sigma}$ en el álgebra asociativa $U(L)$ tal que $\bar{\sigma}\hat{p}=\hat{p}\sigma$ por lo que $\bar{\sigma}(x_i)=\sigma(x_i)$. Vemos pues que la involución σen L se puede extender a una involución $\bar{\sigma}$ en $U(L)$, involución $\bar{\sigma}$ que fija r indeterminadas e invierte las restantes.

Todo L-módulo se puede considerar como $U(L)$-módulo y si (V,f) es una ε-forma neutra para L, se puede considerar como una ε-forma neutra para $U(L)$. Si $(V,f)\sim(V',f')$ en $\chi_\varepsilon(L)$ entonces la ε-forma $(V,f)\perp(V',-f')$ es una ε-forma neutra para L y por tanto tambien lo será para $U(L)$ con lo que $(V,f)\sim(V',f')$ en $\chi_\varepsilon(U(L))$. Quiere esto decir que $W_\varepsilon(L)\simeq W_\varepsilon(U(L))$. Por tanto estudiar grupos de Witt de álgebras de Lie abelianas finito dimensionales con involución arbitraria es exactamante lo mismo que estudiar grupos de Witt de álgebras de polinomios con un número finito de indeterminadas, con involución que fija $r \geq 0$ indeterminadas y que invierte las restantes.

PARRAFO 3.- EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE SEMISIMPLE-ESTUDIO DE INVOLUCIONES-REDUCCION AL CASO SIMPLE

Sea L un álgebra de Lie semisimple sobre un cuerpo K de característica cero. Por el Teorema clásico de estructura de las álgebras de Lie semisimples (5, 1.6.2) se tiene que $L=L_1\oplus\dots\oplus L_r$ donde $L_1,\dots,L_r$ son ideales minimales de L, es decir ideales de L que no contienen a ningún ideal propio de L distinto de ellos. Todo ideal propio de L es suma de ciertos L_i y $L_1,\ldots,L_r$ están determinados por L pues son los únicos ideales minimales de L. Además $L_1,\ldots,L_r$ son álgebras de Lie simples, pues todo ideal de L_i es tambien un ideal de L.

El primer problema que encontramos en este caso, es que una involución de L no deje invariante necesariamente la componente L_i. Por ejemplo:

Si A es un álgebra de Lie simple, consideremos en el álgebra de Lie semisimple $A\oplus A$ la involución $\sigma : A\oplus A \dashrightarrow A\oplus A$ dada por $\sigma(a,b)=(-b,-a)$. Desde luego σ es involución, pues:

$\sigma[(a,b)\ (a',b')]=\sigma([a\ a'],[b\ b'])=(-[b\ b'],-[a\ a'])=$

$=([b'\ b],[a'\ a])=[(b',a')\ (b,a)]=[-\sigma(a',b')\ -\sigma(a,b)]=$

$=[\sigma(a',b')\ \sigma(a,b)]$. Sin embargo $\sigma(a,0)=(0,-a)$.

No obstante, obtenemos los siguientes resultados sobre involuciones estabilizando las componentes simples de un álgebra de Lie semisimple.

PROPOSICION 2.3.1.- Sea $\sigma : L_1 \dashrightarrow L_2$ un antiisomorfismo de K-álgebras de Lie e I un ideal minimal de L_1, entonces $\sigma(I)$ es un ideal minimal de L_2.

DEMOSTRACION:

Veamos en primer lugar que $\sigma(I)$ es un ideal de L_2, en efecto para todo a_2 de L_2 existe un único a_1 de L_1 tal que $\sigma(a_1)=a_2$, análogamente para todo x_2 de $\sigma(I)$ existe un único x_1 de I tal que $\sigma(x_1)=x_2$. Como I es un ideal de L_1, $[a_1\ x_1]\in I$, luego $\sigma[a_1\ x_1]=$ $=[\sigma(x_1)\ \sigma(a_1)]=[x_2\ a_2]\in\sigma(I)$. Luego $\sigma(I)$ es un ideal de L_2. Veamos que es minimal, si no lo fuese, existiría un ideal J de L_2 tal que $J\subset\sigma(I)$ con lo que $\sigma^{-1}(J)\subset I$ y por tanto I no sería ideal minimal de L_1, contradicción.

COROLARIO.- Sea $\sigma: L \dashrightarrow L$ un antiisomorfismo de una K-álgebra de Lie semisimple L. Sea $L=L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ la descomposición de L en sus componentes simples, entonces $(\sigma(L_1),\ldots,\sigma(L_n))$ es una permutación de $(L_1,\ldots,L_n)$.

DEMOSTRACION:

Por la Proposición anterior, $\sigma(L_1),\ldots, \sigma(L_n)$ son ideales minimales de L. Como $\sigma(L_i) \neq \sigma(L_j)$ si $i \neq j$, entonces $\sigma(L_1),\ldots, \sigma(L_n)$ son precisamente los ideales minimales de L pues L tiene exactamente n ideales minimales. Por tanto $\{\sigma(L_1),\ldots,\sigma(L_n)\} = \{L_1,\ldots,L_n\}$.

En particular tenemos que si L es una K-álgebra de Lie semisimple de forma que $L_i \not\cong L_j$ $(i \neq j)$ donde L_i son las componentes simples de L, entonces <u>cualquier involución</u> σ de L estabiliza todas las componentes simples de L. En efecto: $\sigma(L_i)$ es un ideal minimal de L y $\sigma(L_i) \cong L_i$, luego $\sigma(L_i)=L_i$ $\forall i=1,2,\ldots,n$.

En general si L es una K-álgebra de Lie <u>semisimple cualquiera</u> y σ es una <u>involución arbitraria</u>, entonces descomponemos L en sus componentes simples $L=L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$ y agrupamos las componentes simples L_i de forma que asociamos las que sean isomorfas entre si, supongamos que después de tener en cuenta ésto, la descomposición fuese $L=(L_{11} \oplus \ldots \oplus L_{1r}) \oplus \ldots \oplus (L_{k1} \oplus \ldots \oplus L_{kt})$ siendo $L_{pi} \cong L_{pj}$ para todo $p=1,\ldots,k$. Entonces σ estabiliza todas las componentes isotípicas de L, es decir todos los sumandos de la descomposición anterior. Entonces podemos considerar los grupos de Witt $W_\varepsilon(N_1),\ldots,W_\varepsilon(N_k)$ siendo $N_1=L_{11} \oplus \ldots \oplus L_{1r},\ldots, N_k=L_{k1} \oplus \ldots \oplus L_{kt}$.

Además encontramos también el siguiente criterio para que una involución σ estabilice las componentes simples

PROPOSICION 2.3.2.- Sea σ una involución de una K-álgebra de Lie semisimple L. Sea L_i una componente simple de L. Si existe un $0 \neq x \in L_i$ tal que $\sigma(x) \in L_i$, entonces σ estabiliza a L_i.

DEMOSTRACION:

Encontramos que $\sigma(x) \in L_i \cap \sigma(L_i)$. Por tanto $\sigma(L_i) \cap L_i \neq 0$. Por Proposición 2.3.1, $\sigma(L_i)$ es un ideal de L, luego $\sigma(L_i) \cap L_i$ es un ideal de L. Pero $0 \neq \sigma(L_i) \cap L_i \subset L_i$. Luego de la minimalidad de L_i deducimos que $\sigma(L_i) = L_i$.

Seguidamente estudiamos las involuciones definidas en un álgebra de Lie semisimple L. Sea σ una de ellas y pongamos $\tau = -\sigma$. Entonces $\tau: L \dashrightarrow L$ es un automorfismo de Lie con $\tau^2 = 1$. Aplicando el Teorema de Borel-Mostow de (4), al grupo cíclico de orden 2 de automorfismos de L generado por τ, obtenemos que τ deja invariante alguna subálgebra de Cartán H de L. Luego σ también deja invariante H.

Consideremos ahora la descomposición $L = H \oplus L_\alpha \oplus \ldots \oplus L_\gamma$ de L en los espacios raices relativa a H. Estudiemos el comportamiento de σ con el conjunto de raices $\Phi = \{\alpha, \ldots, \gamma\}$

Recordemos que una raiz α es una aplicación de H en K tal que existe un vector no nulo x en L verificando

$$[h\ x] = \alpha(h)x \quad \text{para todo } h \in H$$

Si α es una raiz, se denota por $L_\alpha = \{ x \in L \ / \ [h\ x] = \alpha(h)x, \ \forall h \in H \}$. Consideremos ahora la aplicación $\bar{\tau} = \tau_{|H}: H \dashrightarrow H$, y sea la aplicación dual $\bar{\tau}^*: H^* \dashrightarrow H^*$ definida por $\bar{\tau}^*(\xi) = \xi . \bar{\tau}$ para todo ξ de H^*. Tenemos que Φ es un subconjunto de H^* y veamos que:

1º.- $\bar{\tau}^*(\Phi)=\Phi$

2º.- $\tau(L_\alpha)=L_{\alpha.\bar{\tau}}$

En efecto: Sea α una raiz. Veamos que $\alpha.\bar{\tau}$ es también una raiz. Para ello veamos que $[h\ \tau(e_\alpha)]=((\alpha.\bar{\tau})(h))\tau(e_\alpha)$ para todo h de H. Como $\tau(H)=H$, podemos escribir $h=\tau(h')$ para un $h'\in H$. Entonces

$[h\ \tau(e_\alpha)]=[\tau(h')\ \tau(e_\alpha)]=\tau[h'\ e_\alpha]=\tau(\alpha(h')e_\alpha)=\alpha(h')\tau(e_\alpha)=$

$=\alpha(\tau(h))\tau(e_\alpha)$, pues $\tau(h)=\tau^2(h')=h'$. Tenemos entonces que $\alpha.\bar{\tau}$ es una raiz y además que $\tau(L_\alpha)=L_{\alpha.\bar{\tau}}$ (18, Pág. 276).

Tenemos así que $\bar{\tau}^*$ es una permutación del conjunto de raices Φ y que τ respeta la descomposición de L en los espacios raices. Tomemos ahora un sistema simple π de raices. Entonces π tiene l raices, donde $l=\dim H$. Pongamos $\pi=\{\alpha_1,\dots,\alpha_l\}$. Se tiene que toda raiz es de la forma $\pm\sum_{i=1}^{l} k_i\alpha_i$ donde todos los k_i son enteros no negativos. Aplicando $\bar{\tau}^*$, vemos que toda raiz tiene tambien la forma $\pm\sum_{i=1}^{l} k_i\bar{\tau}^*(\alpha_i)$. Esto garantiza que $\bar{\tau}^*(\pi)$ es otro sistema simple de raices (18, Pág. 276). Luego $\bar{\tau}^*$ queda determinada por su acción sobre un sistema simple de raices.

CASOS ESPECIALES

Como $\sigma_{|H}: H \dashrightarrow H$ es una aplicación lineal tal que $(\sigma_{|H})^2=1$, tenemos que en H existe una base $\{h_1,\dots,h_r,h_{r+1},\dots,h_l\}$ tal que la matriz de $\sigma_{|H}$ corespondiente es de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Nosotros vamos a considerar los dos casos extremos. Es decir

$\underline{1^{\circ}\text{ CASO}}$ $\sigma_{|H} = \mathrm{id}$

$\underline{2^{\circ}\text{ CASO}}$ $\sigma_{|H} = -\mathrm{id}$

I.- Estudio del caso $\sigma_{|H} = \mathrm{id}$

Pongamos $\tau = -\sigma$. Luego $\tau_{|H} = -\mathrm{id}$. Por lo anterior tenemos que $\bar{\tau}^*(\alpha) = \alpha.\bar{\tau} = -\alpha$ para toda raiz α y $\tau(L_\alpha) = L_{-\alpha}$. Para cada raiz α, fijemos un vector no nulo e_α en L_α. Así que $L_\alpha = <e_\alpha>$ y $\tau(e_\alpha) \in L_{-\alpha} = <e_{-\alpha}>$. Luego $\tau(e_\alpha) = t_\alpha e_{-\alpha}$. Pero entonces $\tau^2(e_\alpha) = e_\alpha = t_\alpha \tau(e_{-\alpha}) = t_\alpha t_{-\alpha} e_\alpha$. De donde $t_\alpha t_{-\alpha} = 1$. En cada espacio raiz $L_{-\alpha}$ correspondiente a una raiz negativa $-\alpha$, podemos cambiar $e_{-\alpha}$ por $-t_\alpha e_{-\alpha}$; llamemos ahora $e_{-\alpha}$ a este vector. Tenemos así la base de L siguiente:

$\{h_1, \ldots, h_l, e_\alpha, e_{-\alpha}, \ldots, e_\gamma, e_{-\gamma}\}$ donde $h_i = [e_{\alpha_i}\ e_{-\alpha_i}]$ para cada raiz α_i de un sistema simple dado π. La acción de $\sigma = -\tau$ es pues $\sigma(h_i) = -\tau(h_i) = h_i$ para todo i, y $\sigma(e_\alpha) = -\tau(e_\alpha) = -t_\alpha e_{-\alpha} = e_{-\alpha}$.

Recíprocamente, eligiendo en cada espacio raiz L_α un vector e_α, la aplicación lineal definida por $\sigma(h) = h$ para todo h de H, $\sigma(e_\alpha) = e_{-\alpha}$, es una involución. (5, 8.4.2)

Estas involuciones las llamaremos **TRANSPOSICIONES**, porque para las álgebras de Lie clásicas $\mathbf{A_l}$, $\mathbf{B_l}$, $\mathbf{C_l}$ y $\mathbf{D_l}$ consideradas en su forma matricial estandar, la aplicación X---> X' (matriz transpuesta) es una involución de este tipo. En efecto:

Llamamos e_{ij} a la matriz con 1 en fila i columna j y el resto ceros.

$\mathbf{A_l}$ es el álgebra de Lie de las matrices de orden l+1 de traza cero donde la subálgebra engendrada por las matrices $h_i = e_{ii} - e_{i+1\,i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ es de Cartán. Base estandar $\{h_1, \ldots, h_l, e_{rs}\}$ con $r \neq s$ y $r, s = 1, 2, \ldots, l+1$.

La aplicación $\sigma: A_l \dashrightarrow A_l$ donde $\sigma(h_i)=h_i$ y $\sigma(e_{rs})=e_{sr}$ es una involución transposición.

B_l es el álgebra de Lie de las matrices de orden $2l+1$ de traza cero donde la subálgebra engendrada por las matrices $h_i=e_{ii}-e_{l+i\,l+i}$ con $(2\leq i\leq l+1)$ es de Cartán. La base estandar está formada por las matrices siguientes: $h_i=e_{ii}-e_{l+i\,l+i}$ con $(2\leq i\leq l+1)$; $b_1=e_{1\,l+i+1}-e_{i+1\,1}$ con $(1\leq i\leq l)$; $b_2=e_{1\,i+1}-e_{l+i+1\,1}$ con $(1\leq i\leq l)$; $m_{ij}=e_{i+1\,j+1}-e_{l+j+1\,l+i+1}$ con $(1\leq i\neq j\leq l)$; $n_{ij}=e_{i+1\,l+j+1}-e_{j+1\,l+i+1}$ con $(1\leq i<j\leq l)$; $p_{ij}=e_{i+l+1\,j+1}-e_{j+l+1\,i+1}$ con $(1\leq i<j\leq l)$. La aplicación $\sigma: B_l \dashrightarrow B_l$ tal que $\sigma(h_i)=h_i$, $\sigma(b_1)=-b_2$, $\sigma(m_{ij})=m_{ji}$, $\sigma(n_{ij})=p_{ij}$ es una involución transposición.

C_l es el álgebra de Lie de la matrices de orden $2l$ de traza cero donde la subálgebra engendrada por las matrices $h_i=e_{ii}-e_{l+i\,l+i}$ $(1\leq i\leq l)$ es de Cartán. La base estandar está formada por las matrices siguientes: $h_i=e_{ii}-e_{l+i\,l+i}$ con $(1\leq i\leq l)$; $m_{ij}=e_{ij}-e_{l+j\,l+i}$ con $(1\leq i\neq j\leq l)$; $n_i=e_{i\,l+i}$ con $(1\leq i\leq l)$; $n_{ij}=e_{i\,l+j}+e_{j\,l+i}$ con $(1\leq i<j\leq l)$; $p_i=e_{l+i\,i}$ con $(1\leq i\leq l)$; $p_{ij}=e_{l+j\,i}+e_{l+i\,j}$ con $(1\leq j<i\leq l)$. La aplicación $\sigma: C_l \dashrightarrow C_l$ definida por $\sigma(h_i)=h_i$, $\sigma(m_{ij})=m_{ji}$, $\sigma(n_i)=p_i$, $\sigma(n_{ij})=p_{ij}$ es una involución transposición.

D_l es el álgebra de Lie de las matrices de orden $2l$ de traza cero donde la subálgebra engendrada por las matrices $h_i=e_{ii}-e_{l+i\,l+i}$ con $(2\leq i\leq l+1)$ es de Cartán. La base estandar está formada por las matrices siguientes: $h_i=e_{ii}-e_{l+i\,l+i}$ con $(2\leq i\leq l+1)$; $m_{ij}=e_{ij}-e_{l+j\,l+i}$ con $(1\leq i\neq j\leq l)$; $n_{ij}=e_{i\,l+j}-e_{j\,l+i}$ con $(1\leq i<j\leq l)$; $p_{ij}=e_{i+l\,j}-e_{j+l\,i}$ con $(1\leq i<j\leq l)$. La aplicación $\sigma: D_l \dashrightarrow D_l$ tal que $\sigma(h_i)=h_i$, $\sigma(m_{ij})=m_{ji}$, $\sigma(n_{ij})=p_{ij}$ es una involución transposición.

Por tanto, este caso $\sigma_{|H}=id$ incluye este tipo de involuciones especialmente importantes.

II.- Estudio del caso $\sigma_{|H} = -id$

Pongamos $\tau = -\sigma$. Por lo visto en el caso general tenemos que al ser $\tau_{|H} = id$, entonces $\bar{\tau}^*(\alpha) = \alpha\bar{\tau} = \alpha$ y $\tau(L_\alpha) = L_\alpha$ para toda raiz α. Fijemos, como en el caso anterior, un vector no nulo e_α en cada espacio raiz L_α. Entonces encontramos $\tau(e_\alpha) = \varepsilon_\alpha e_\alpha$ para algún $\varepsilon_\alpha \in K$. Además tenemos que $e_\alpha = \tau^2(e_\alpha) = \varepsilon_\alpha \tau(e_\alpha) = \varepsilon_\alpha^2 \tau(e_\alpha)$, de donde $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. Por tanto, para cada raiz α, $\tau(e_\alpha) = \pm e_\alpha$. Pero notemos las siguientes condiciones. Sea una raiz α, entonces el vector $[e_\alpha\ e_{-\alpha}]$ pertenece a H. Pongamos $[e_\alpha\ e_{-\alpha}] = h_\alpha$; $h_\alpha \in H$. Entonces $\tau(h_\alpha) = h_\alpha = [\tau(e_\alpha)\ \tau(e_{-\alpha})] = \varepsilon_\alpha \varepsilon_{-\alpha} h_\alpha$ y por tanto $\varepsilon_\alpha \varepsilon_{-\alpha} = 1$. Así que $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{-\alpha}$ para toda raiz α. Además, si tomamos dos raices α, β con $\beta \neq \pm\alpha$. Entonces $0 \neq [e_\alpha\ e_\beta] \in L_{\alpha+\beta}$ ó $[e_\alpha\ e_\beta] = 0$. En el primer caso encontramos que $[e_\alpha\ e_\beta] = t e_{\alpha+\beta}$ para algún $t \in K$, y luego $[\tau(e_\alpha)\ \tau(e_\beta)] = t\tau(e_{\alpha+\beta}) = t\varepsilon_{\alpha+\beta} e_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta [e_\alpha\ e_\beta] = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta t e_{\alpha+\beta}$ de donde $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha+\beta}$.

Tomando en L la base siguiente $\{h_1, \dots, h_l, e_\alpha, \dots, e_\gamma\}$ la acción de $\sigma = -\tau$ sería: $\sigma(h_i) = -h_i$, para todo $i = 1, \dots, l$; $\sigma(e_\alpha) = \pm e_\alpha$ para cada raiz α.

NOTAS

1.- En el caso de que $\sigma(e_\alpha) = -e_\alpha$ para toda raiz α, entonces $\sigma = -id$. Encontramos en este caso que la definición de forma invariante respecto de σ coincide con la definición clásica, y que el concepto de módulo dual M^*_σ, relativo a la involución σ, de un módulo M, dado en Lema 1.1.4, coincide con el concepto de módulo dual clásico.

2.- Notemos también que si $\sigma(L_\sigma) = L_\sigma$ para toda raiz α, entonces forzosamente $\sigma_{|H} = id$ (18, Pág.278). Además por Proposición 3 de la anterior cita, si $\sigma_{|H}=-id$, entonces $-\sigma$ es un automorfismo invariante. Luego estas involuciones son también especialmente importantes.

EJEMPLOS

1.- Consideremos el caso del álgebra de Lie $L=A_1$, formada por las matrices 2x2 de traza cero. La base estandar de A_1 es la siguiente:

$$h_\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad e_\alpha=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad e_{-\alpha}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

El espacio $H=\langle h_\alpha\rangle$ es una subálgebra de Cartán de A_1 y la descomposición $L=\langle h_\alpha\rangle\oplus\langle e_\alpha\rangle\oplus\langle e_{-\alpha}\rangle$ es la correspondiente a los espacios raices relativa a H. Como toda involución debe permutar las raices, tenemos los siguientes casos:

a.- $\tau=-\sigma:A_1\text{--->}A_1$ tal que $Ke_\alpha\text{--->}Ke_\alpha$; $ke_{-\alpha}\text{--->}Ke_{-\alpha}$. Entonces $\tau(e_\alpha)=\lambda_\alpha e_\alpha$ con lo que $\tau^2(e_\alpha)=e_\alpha=\lambda^2 e_\alpha$ y por tanto $\lambda_\alpha=\pm 1$. Análogamente $\tau(e_{-\alpha})=\lambda_{-\alpha}e_{-\alpha}$ con $\lambda_{-\alpha}=\pm 1$. Pero $h_\alpha=[e_\alpha\ e_{-\alpha}]$, luego tenemos que $\tau(h_\alpha)=[\tau(e_\alpha)\ \tau(e_{-\alpha})]=\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}[e_\alpha\ e_{-\alpha}]=\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}h_\alpha$. Por otra parte $[h_\alpha\ e_\alpha]=\alpha(h_\alpha)e_\alpha$, luego $\tau([h_\alpha\ e_\alpha])=[\tau(h_\alpha)\ \tau(e_\alpha)]=\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}\lambda_\alpha[h_\alpha\ e_\alpha]=$ $=\lambda_\alpha^2\lambda_{-\alpha}\alpha(h_\alpha)e_\alpha$. Como $\tau([h_\alpha\ e_\alpha])=\tau(\alpha(h_\alpha)e_\alpha)=\alpha(h_\alpha)\lambda_\alpha e_\alpha$, entonces $\lambda_\alpha^2\lambda_{-\alpha}=\lambda_\alpha$ y por tanto $\lambda_{-\alpha}=\lambda_\alpha$. Luego $\tau(h_\alpha)=h_\alpha$, es decir $\sigma_{|H}=-id$.

b.- $\tau=-\sigma:A_1\text{--->}A_1$ tal que $Ke_\alpha\text{--->}Ke_{-\alpha}$, entonces necesariamente $Ke_{-\alpha}\text{--->}Ke_\alpha$. Luego $\tau(e_\alpha)=\lambda_\alpha e_{-\alpha}$ y $\tau(e_{-\alpha})=\lambda_{-\alpha}e_\alpha$. Pero $[e_\alpha\ e_{-\alpha}]=h_\alpha$ por tanto $\tau(h_\alpha)=\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}[e_{-\alpha}\ e_\alpha]=-\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}[e_\alpha\ e_{-\alpha}]=-\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}h_\alpha$. Como $e_\alpha=\tau^2(e_\alpha)=\lambda_\alpha\tau(e_{-\alpha})=\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}e_\alpha$, entonces $\lambda_\alpha\lambda_{-\alpha}=1$. Por tanto $\tau(h_\alpha)=-h_\alpha$ y $\sigma_{|H}=id$.

Vemos entonces que todas las involuciones del álgebra de Lie A_1 son de los tipos considerados por nosotros.

2.- Sea ahora el caso del álgebra de Lie $L=A_2$ y consideremos su descomposición en espacios raices $L=H\oplus L_\alpha\oplus L_{-\alpha}\oplus L_\beta\oplus L_{-\beta}\oplus L_{\alpha+\beta}\oplus L_{-(\alpha+\beta)}$ relativa a la subálgebra de Cartán H, donde $\dim H=2$. Supongamos que $H=<h_\alpha,h_\beta>$, $L_\alpha=<e_\alpha>$, $L_{-\alpha}=<e_{-\alpha}>$, $L_\beta=<e_\beta>$, $L_{-\beta}=<e_{-\beta}>$, $L_{\alpha+\beta}=<e_{\alpha+\beta}>$, $L_{-(\alpha+\beta)}=<e_{-(\alpha+\beta)}>$. Veamos que existen involuciones $\sigma:L--->L$ tales que $\sigma_{|H}\neq\pm id$. Consideremos el automorfismo $\tau=-\sigma:L--->L$ definido por $\tau(e_\alpha)=e_\beta$, $\tau(e_\beta)=e_\alpha$, $\tau(e_{-\alpha})=e_{-\beta}$, $\tau(e_{-\beta})=e_{-\alpha}$. Es evidente que $\tau^2=1$. Como $h_\alpha=[e_\alpha\ e_{-\alpha}]$, entonces $\tau(h_\alpha)=[\tau(e_\alpha)\ \tau(e_{-\alpha})]=[e_\beta\ e_{-\beta}]=h_\beta$. Luego $\sigma(h_\alpha)=-h_\beta$ y por tanto $\sigma_{|H}\neq\pm id$.

Para las involuciones σ que nosotros consid mos, es decir $\sigma_{|H}=\pm id$, tenemos el siguiente <u>b u e n</u> resultado

TEOREMA 2.3.3.- Si L es una K-álgebra de Lie semisimple provista de una involución σ tal que $\sigma_{|H}=\pm id$ para alguna subálgebra de Cartán H de L, entonces σ estabiliza todas las componentes simples de L.

DEMOSTRACION:

Sea $L=L_1\oplus\ldots\oplus L_n$ la descomposición de L en sus ideales minimales. Sea $x\in H$, escribamos $x=x_1+\ldots+x_n$ donde $x_i\in L_i$, $i=1,2,\ldots,n$. Definamos la aplicación $p_i:H--->L_i$ mediante $p_i(x)=x_i$. Llamo $H_i:=\mathrm{Im}\,p_i$. El hecho de que algún H_i sea nulo significa que H está contenido en

$M=L_1\oplus\ldots\oplus L_{i-1}\oplus L_{i+1}\oplus\ldots\oplus L_n$ el cual es un ideal propio de L, pero toda subálgebra de L por encima de H debe ser autonormalizada (17, Lema B de 15.2 y Teorema de 15.3) luego $N_L(M)=M$, pero $N_L(M)=L$ por ser M un ideal de L, por tanto $M=L$, contradicción por ser M un ideal propio de L. Por tanto, $H_i\neq 0$ $\forall i=1,2,\ldots,n$. Tomemos $0\neq y_i\in H_i$ y sea x un elemento cualquiera de H. Por definición de H_i, existe un elemento $y\in H$ tal que $p_i(y)=y_i\in L_i$ donde $y=y_1+\ldots+y_i+\ldots+y_n$ con $y_j\in L_j$. Encontramos que $[x\ y]=[\sum_1^n x_i\ \sum_1^n y_j]$, teniendo en cuenta la bilinealidad de la operación corchete, aparecen sumandos del tipo $[x_i\ y_j]\in[L_i\ L_j]\subset L_i\cap L_j=0$ si $i\neq j$. Por otro lado $[x\ y]=0$ por ser H abeliano (17, Corolario de 15.3 y Lema de 8.1). Luego $0=[x_1\ y_1]+\ldots+[x_n\ y_n]$. Pero $[x_i\ y_i]\in[L_i\ L_i]=L_i$ $\forall i=1,2,\ldots,n$. Como la suma es directa llegamos a que $[x_i\ y_i]=0$ para todo $i=1,2,\ldots,n$.

Ahora, $[y_i\ x]=[y_i\ x_1]+\ldots+[y_i\ x_n]=[y_i\ x_i]=0$ pues $[y_i\ x_j]=0$ si $i\neq j$. Luego $\forall x\in H$, resulta que $[y_i\ x]=0$, por tanto $y_i\in C_L(H)\subseteq N_L(H)=H$. Hemos probado que $0\neq H_i\subseteq L_i\cap H$ $\forall i=1,2,\ldots,n$.

Finalmente, tomemos $0\neq y_i\in H_i\subseteq L_i\cap H$. Como $y_i\in H$, $\sigma(y_i)=\pm y_i\in L_i$. Luego en cada componente simple L_i de L hay un elemento fijado por σ, así que aplicando la Proposición anterior, nos encontramos que σ estabiliza todas las componentes simples.

NOTA

Sean σ, L, H como en el enunciado de Teorema anterior. Consideremos las $H_1,\ldots,H_n$ de la demostración de dicho Teorema. Tenemos que las H_i son subálgebras abelianas de L_i, $\forall i=1,2,\dots,n$ pues las H_i están contenidas en H y H es abeliana. Aún más, son subálgebras de Cartán de L_i. En efecto, sea $a\in L_i$ tal que $[a\ h_i]\in H_i$ para todo $h_i\in H_i$. Tenemos que ver que $a\in H_i$. Para ello probemos primero que $a\in H$. Sea $y\in H$ un elemento cualquiera, escribamos $y=y_1+\dots+y_n$ donde $y_i\in L_i$. Por definición de las H_i, tenemos que $y_i\in H_i$, $\forall i=1,2,\dots,n$. Encontramos $[a\ y]=[a\ y_1]+\dots+[a\ y_n]=[a\ y_i]$ pues $[a\ y_j]\in[L_i\ L_j]\subset L_i\cap L_j=0$ si $i\neq j$. Luego $[a\ y]=[a\ y_i]\in H_i$ pues $y_i\in H_i$. Pero como $H_i\subseteq H$, llegamos a que $[a\ H]\subseteq H$ y por tanto $a\in H$ por ser H una subálgebra de Cartán de L. Finalmente como $a\in L_i\cap H$ resulta que $p_i(a)=a$ con lo que $a\in H_i$ por definición de H_i.

Como consecuencia tenemos el siguiente

TEOREMA 2.3.4.- **Sea σ una involución de una K-álgebra de Lie simple L que fija punto a punto una subálgebra de Cartán H de L (respectivamente $\sigma_{|H}=-id$). Entonces σ estabiliza todas las componentes simples de L y además fija punto a punto una subálgebra de Cartán de cada componente simple (respectivamente, la restricción de σ a una subálgebra de Cartán de cada componente simple es $-id$).**

Ahora observamos la relación existente entre el grupo de Witt de una K-álgebra de Lie semisimple L con involución y los grupos de Witt de sus ideales minimales con involución inducida de la involución de L.

Sea $L=L_1\oplus\dots\oplus L_r$ una K-álgebra de Lie semisimple donde $\forall i=1,2,\dots,r$, los L_i son sus ideales minimales que son álgebras de Lie simples. Para todo $i=1,2,\dots,r$ se pueden considerar los homomorfismos entre álgebras de Lie $\lambda_i: L_i \dashrightarrow L$ y $p_i: L \dashrightarrow L_i$ siendo los λ_i las inyecciones canónicas, monomorfismos, y los p_i las proyecciones canónicas epimorfismos, de tal manera que $p_i\lambda_i = 1_{L_i}$; $\sum_1^r \lambda_i p_i = 1_L$; $p_i\lambda_j = 0$.

LEMA 2.3.5.- Para $1 \leq i \leq r$, es $p_i^*: W_\varepsilon(L_i) \dashrightarrow W_\varepsilon(L)$ un monomorfismo de grupos.

DEMOSTRACION:

Aplicando el funtor $W_\varepsilon(-)$ es $p_i^*: W_\varepsilon(L_i) \dashrightarrow W_\varepsilon(L)$ un homomorfismo de grupos. Como $p_i\lambda_i = 1_{L_i}$, $(p_i\lambda_i)^* = \lambda_i^* p_i^* = 1_{W_\varepsilon(L_i)}$; p_i^* es invertible por la izquierda y por tanto es inyectiva.

LEMA 2.3.6.- Si el cuerpo K es además <u>algebraicamente cerrado</u>, entonces se verifica:

a) $\lambda_i^* p_j^* = (p_j\lambda_i)^* = \delta_{ij} : H_\varepsilon(L_j) \dashrightarrow H_\varepsilon(L_i)$

b) $\sum_1^r p_i^* : H_\varepsilon(L_1) \oplus \dots \oplus H_\varepsilon(L_r) \dashrightarrow H_\varepsilon(L)$ **es inyectiva**

DEMOSTRACION:

a) Aplicando el funtor $W_\varepsilon(-)$, tenemos:

$\lambda_i^*: W_\varepsilon(L) = H_\varepsilon(L) \oplus G_\varepsilon(L) \dashrightarrow W_\varepsilon(L_i) = H_\varepsilon(L_i) \oplus G_\varepsilon(L_i)$ y

$p_j^*: W_\varepsilon(L_j) = H_\varepsilon(L_j) \oplus G_\varepsilon(L_j) \dashrightarrow W_\varepsilon(L) = H_\varepsilon(L) \oplus G_\varepsilon(L)$.

Si $i=j$, entonces $(p_i\lambda_i)^* = (1_{L_i})^* = 1_{W_\varepsilon(L_1)}$

Si $i \neq j$, entonces $(p_j\lambda_i)^* = (0)^* = 0^* : H_\varepsilon(L_j) \dashrightarrow H_\varepsilon(L_i)$

b) Sea $\Sigma p_i^*(V_1,\dots,V_r)=\Sigma p_i^*(V_i)=0$, entonces se verifica que $\forall j=1,2,\dots,r$ es $0=\lambda_j^*(\Sigma p_i^*(V_i))=\Sigma\lambda_j^* p_i^*(V_i)=V_j$

El Teorema 2.3.4 nos asegura una situación totalmente satisfactoria en el problema de reducir el cálculo del grupo de Witt de un álgebra de Lie semisimple L con una involución que fija punto a punto una subálgebra de Cartán de L (respectivamente, con una involución que transforma cada elemento de una subálgebra de Cartán de L en su opuesto) pues se nos reduce al cálculo del grupo de Witt de un álgebra de Lie simple con una involución dejando también fijo punto a punto una subálgebra de Cartán (respectivamente, con una involución que transforma cada elemento de una subálgebra de Cartán en su opuesto).

TEOREMA 2.3.7.- Sea σ una involución Transposición del álgebra de Lie semisimple L, **entonces la restricción de σ en cada componente** simple es **también involución Transposición.**

DEMOSTRACION:

Basta demostrarlo para el caso $n=2$. Sabemos que si $\sigma:L=L_1\oplus L_2 \dashrightarrow L=L_1\oplus L_2$ es una cualquiera de las involuciones Transposición de L, entonces por Teorema 2.3.3 es $\sigma(L_1)\subseteq L_1$, $\sigma(L_2)\subseteq L_2$ y por tanto podemos hablar de las involuciones $\sigma_1=\sigma|_{L_1}$ y $\sigma_2=\sigma|_{L_2}$ de L_1 y L_2 respectivamente. Sea H la subálgebra de Cartán de L tal que $\sigma(h)=h$ $\forall h\in H$. Tomemos $H_1=H\cap L_1$ y $H_2=H\cap L_2$. Hemos visto en la Nota anterior que H_i es una subálgebra de Cartán de L_i $(i=1,2)$. Sean ahora:

$L=H\oplus L_\alpha\oplus\dots\oplus L_\gamma$, $L_1=H_1\oplus(L_1)_{\alpha'}\oplus\dots\oplus(L_1)_{\gamma'}$, $L_2=H_2\oplus(L_2)_{\alpha''}\oplus\dots\oplus(L_2)_{\gamma''}$

las descomposiciones de L, L_1 y L_2 en sus espacios raices relativos a

H, H_1 y H_2 respectivamente.

Tomemos $x\in(L_1)_{\alpha'}$, entonces $\forall h_1\in H_1$ se tiene $[x\ h_1]=\alpha'(h_1)x$. Sea $h\in H$ arbitrario, escribamos $h=h_1+h_2$, donde $h_1\in H_1$ y $h_2\in H_2$, entonces se tiene que $[x\ h]=[x\ h_1]+[x\ h_2]=\alpha'(h_1)x+[x\ h_2]=\alpha'(h_1)x$ pues $[x\ h_2]\in[L_1\ L_2]\subset L_1\cap L_2=0$. Ahora escribamos $x=h_0+t_\alpha e_\alpha+\ldots+t_\gamma e_\gamma$ donde $L_\alpha=\langle e_\alpha\rangle$ y $h_0\in H$, entonces $[x\ h]=t_\alpha\alpha(h)e_\alpha+\ldots+t_\gamma\gamma(h)e_\gamma=$ $=\alpha'(h_1)x=\alpha'(h_1)(h_0+t_\alpha e_\alpha+\ldots+t_\gamma e_\gamma)$. Encontramos $t_\alpha\alpha(h)=t_\alpha\alpha'(h_1),\ldots,$ $t_\gamma\gamma(h)=t_\gamma\alpha'(h_1)$. Como $x\notin H$, algún $t_\alpha\neq 0$, luego $\alpha'(h_1)=\delta(h)$ para algún $\delta\in\{\alpha,\ldots,\gamma\}$. Supongamos, por ejemplo, que $\delta=\alpha$. Encontramos entonces que $[x\ h]=\alpha(h)x$, $\forall h\in H$, de donde $x\in L_\alpha$. Hemos visto que cada $(L_1)_{\alpha'}$ está contenido en algún L_α. Como $\dim L_\alpha=1$, tenemos que $(L_1)_{\alpha'}=L_\alpha$. Por tanto algunos de los espacios raices $L_\alpha,\ldots,L$ de L relativos a H son los espacios raices $(L_1)_{\alpha'},\ldots,(L_1)_{\gamma'}$ de L_1 relativos a H_1 y el resto serán los espacios raices $(L_2)_{\alpha''},\ldots,(L_2)_{\gamma''}$ de L_2 relativos a H_2. Como L_1 (respectivamente, L_2) es simple, si α es raiz de L_1 (respectivamente, L_2), entonces $-\alpha$ es también raiz de L_1 (respectivamente, L_2) (18, Pág. 109). Luego las involuciones σ_1 y σ_2 de L_1 y L_2, respectivamente, son Transposiciones.

CAPITULO 3 : EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE SIMPLE

CAPITULO 3.- EL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE SIMPLE

PARRAFO 1.- DESCOMPOSICION DEL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE SIMPLE EN SUS COMPONENTES ISOTIPICAS

En el Capítulo anterior hemos realizado diversas reducciones del estudio del grupo de Witt de un álgebra de Lie y nos ha conducido al grupo de Witt de un álgebra de Lie simple. En este Párrafo vamos a descomponer el grupo de Witt de un álgebra de Lie simple en suma directa de subgrupos, reduciendo así el estudio del grupo de Witt de un álgebra de Lie, al estudio de estos subgrupos.

Sea L un álgebra de Lie simple de dimensión finita sobre un cuerpo K de característica cero y $\sigma: L \dashrightarrow L$ una involución. Por el Teorema de Weyl todo L-módulo V es completamente reducible, es decir $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$ con $r \geq 1$ y los V_i son L-módulos simples.

DEFINICION 3.1.1.- Dado un L-módulo simple N, se llama L-módulo isotípico de tipo N a un L-módulo V tal que $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_r$, siendo $V_i\cong N$ para todo $i\in\{1,2,\ldots,r\}$

Una ε-forma (V,f) se dice isotípica de tipo N si V es un L-módulo isotípico de tipo N.

Para cada L-módulo simple N consideramos las clases de $W_\varepsilon(L)$ que contengan alguna ε-forma isotípica de tipo N. El conjunto de estas clases lo designamos por $W_\varepsilon(L)_N$ y lo llamamos la componente isotípica de tipo N del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$.

El objetivo de este Párrafo es determinar los L-módulos N para los cuales $W_\varepsilon(L)_N\neq\emptyset$ y probar en esos casos que $W_\varepsilon(L)_N$ es un subgrupo de $W_\varepsilon(L)$ y además que $W_\varepsilon(L)=\bigoplus_N W_\varepsilon(L)_N$.

Primero observamos que si N es un L-módulo simple no autodual, entonces no existen ε-formas isotípicas de tipo N como muestra la siguiente

PROPOSICION 3.1.2.- Sea N un L-módulo simple no autodual. Entonces:

a) Toda forma bilineal invariante sobre N es nula.

b) No existen ε-formas isotípicas de tipo N.

DEMOSTRACION:

a) Sea $f:N\times N\dashrightarrow K$ cualquier forma bilineal invariante sobre N. Consideremos la aplicación lineal asociada a ella $\varphi:N\dashrightarrow N^*_\sigma$ dada por $(\varphi(x))(y)=f(x,y)$, $x,y\in N$. Veamos que φ es un homomorfismo de L-módulos. Para ello sea $a\in L$ entonces

$(\varphi(ax))(y)=f(ax,y)=f(x,\sigma(a)y)=(\varphi(x))(\sigma(a)y)=(a(\varphi(x))(y)$, $x,y \in N$

Como $Ker\varphi$ es un L-submódulo de N tenemos que $Ker\varphi=0$ ó $Ker\varphi=N$ por ser N simple.

Si $Ker\varphi=0$, entonces por ser dimN finita tenemos que $\dim N=\dim N^*_\sigma$ y φ es sobreyectiva. Llegamos a que φ es un isomorfismo y es una contradicción por ser N no autodual. Luego $Ker\varphi=N$ y $\varphi=0$ con lo que $f=0$.

b) Sea (V,f) una ε-forma isotípica de tipo N, entonces $V=V_1\oplus...\oplus V_r$, $r>1$ donde para todo $i=1,2,...,r$, $V_i \simeq N$. Como N no es autodual los V_i no serán autoduales y por tanto los V_i no serán isomorfos a V_j para todo $i,j=1,2,...,r$. Considero $f_{|V_1 x V_j}$ y el consiguiente L-homomorfismo $\varphi: V_i \dashrightarrow V^*_{j\sigma}$. Como V_i es un L-módulo simple y no isomorfo a $V^*_{j\sigma}$ entonces $Ker\varphi=V_i$ es decir $\varphi=0$ y $f_{|V_i x V_j}=0$ para todo $i,j=1,2,...,r$. Luego $f=0$ contradicción con la no degeneración.

COROLARIO.- $W(L)_N \neq \phi$ si y solo si N es un L-módulo simple autodual.

Pasamos ahora a estudiar el caso de L-módulos simples N autoduales.

PROPOSICION 3.1.3.- En cada L-módulo simple autodual N podemos definir una ε-forma f_N, no neutra, para cada isomorfismo φ entre N y N^*_σ.

DEMOSTRACION:

Como N es autodual existe un isomorfismo $\varphi: N \dashrightarrow N^*_\sigma$ el cual define una aplicación $f^\varphi_N: NxN \dashrightarrow K$ dada por $(\varphi(x))(y)=f^\varphi_N(x,y)$,

$x,y\in N$. Se comprueba fácilmente que es bilineal y por ser φ un isomorfismo es f_N^φ no degenerada. Además f_N^φ es invariante pues para todo x e y de N y todo a de L se verifica

$$f_N^\varphi(ax,y)=(\varphi(ax))(y)=(a(\varphi(x)))(y)=\varphi(x)(\sigma(a)y)=f_N^\varphi(x,\sigma(a)y)$$

Toda forma bilineal es suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica. Por tanto $f_N^\varphi=f_s+f_a$ siendo

$f_s(x,y)=1/2(f_N^\varphi(x,y)+f_N^\varphi(y,x))$ y $f_a(x,y)=1/2(f_N^\varphi(x,y)-f_N^\varphi(y,x))$, que además son invariantes. A partir de f_s y f_a definimos los L-homomorfismos $\varphi_s,\varphi_a:N\text{--->}N_\sigma^*$ como $(\varphi_s(x))(y)=f_s(x,y)$; $(\varphi_a(x))(y)=f_a(x,y)$. Como N es simple entonces φ_s y φ_a son cero ó isomorfismos. Si ambos son cero entonces f_N^φ es cero y por tanto degenerada en contra de que no lo era. Es decir φ_s ó φ_a es un isomorfismo y la correspondiente forma bilineal es no degenerada por lo que (N,f_N^φ) será +1-forma ó -1-forma.

PROPOSICION 3.1.4.- Sea N un L-módulo simple autodual, entonces **$W_\varepsilon(L)_N$ es un subgrupo de $W_\varepsilon(L)$.**

DEMOSTRACION:

Sean $[(V,f)]$, $[(U,g)]$ dos elementos de $W_\varepsilon(L)_N$. El elemento simétrico de $[(U,g)]$ es la clase dada por la ε-forma $(U,-g)$. Si consideramos el elemento $[(V,g)]\perp[(U,-g)]=[(V\oplus U,f\perp -g)]$ al ser $V\oplus U$ isotípico de tipo N se tiene que $[(V,f)]\perp[(U,-g)]\in W_\varepsilon(L)_N$.

PROPOSICION 3.1.5.- Si (V,f) es una ε-forma donde V es suma directa de L-módulos simples no autoduales, entonces (V,f) es una ε-forma neutra.

DEMOSTRACION:

Sea $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$ donde los V_i para $i \in \{1,2,\ldots,r\}$ son L-módulos simples no autoduales. Reordenamos los sumandos de V de tal manera que tomamos en primer lugar el V_1 y todos aquellos sumandos de V que sean isomorfos como L-módulos a V_1. Todos estos sumandos no serán isomorfos a $V^*_{1_\sigma}$. A continuación agruparíamos todos los sumandos de V que sean isomorfos a $V^*_{1_\sigma}$. Realizado esto, tomaría otro sumando de V distinto de los ya agrupados y haríamos la misma operación y así sucesivamente. El L-módulo V con esta ordenación tomaría la siguiente expresión:

$V = (V_{11} \oplus V_{12} \oplus \ldots \oplus V_{1s}) \oplus (V_{21} \oplus V_{22} \oplus \ldots \oplus V_{2r}) \oplus \ldots \oplus (V_{n1} \oplus V_{n2} \oplus \ldots \oplus V_{nt}) =$

$= W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$ siendo $W_i = \bigoplus_k V_{ik}$ donde para i=1, k varía de 1 a s; para i=2, k varía de 1 a r;...; para i=n, k varía de 1 a t. Teniendo en cuenta la Proposición 3.1.2, la forma bilineal f restringida a $W_1 \times W_j$ y a $W_j \times W_1$ es cero salvo si j=2 y f restringida a $W_2 \times W_j$ y a $W_j \times W_2$ es cero excepto si j=1. Si llamamos $U_1 = W_1 \oplus W_2$; $U_2 = \bigoplus_{i=3}^{n} W_i$; $f_{|U_1 \times U_1} = f_1$; $f_{|U_2 \times U_2} = f_2$, entonces $(V,f) = (U_1,f_1) \perp (U_2,f_2)$. Veamos que (U_1,f_1) es una ε-forma neutra. Puesto que f es no degenerad , $V \simeq V^*_\sigma$ como L-módulos y por tanto V^*_σ será suma de los duales de los L-módulos simples de V. Luego

$V^*_\sigma = (V^*_{11_\sigma} \oplus V^*_{12_\sigma} \oplus \ldots \oplus V^*_{1s_\sigma}) \oplus (V^*_{21_\sigma} \oplus V^*_{22_\sigma} \oplus \ldots \oplus V^*_{2r_\sigma}) \oplus \ldots \oplus (V^*_{n1_\sigma} \oplus V^*_{n2_\sigma} \oplus \ldots \oplus V^*_{nt_\sigma}) =$

$= W^*_{1_\sigma} \oplus W^*_{2_\sigma} \oplus \ldots \oplus W^*_{n_\sigma}$ siendo $W^*_{i_\sigma} = \bigoplus_k V^*_{ik_\sigma}$ donde para i=1, k varía de 1 a s; para i=2, k varia de 1 a r;...; para i=n, k varía de 1 a t.

Cualquier par de sumandos de $W^*_{1_\sigma}$ son isomorfos entre si e isomorfos a cualquier sumando de W_2 y análogamente cualquier par de sumandos de $W^*_{2_\sigma}$

son isomorfos entre si e isomorfos a cualquier sumando de W_1. Por tanto $r=s$ y $\dim U_1=2\dim W_1=2\dim W_2$. Como $f_{1|W_1\times W_1}=f_{|W_1\times W_1}=0$, resulta que W_1 sería un metabolizador de (U_1,f_1) y por tanto es una ε-forma neutra. Quiere esto decir que $(V,f)\sim(U_2,f_2)$ y haciendo el mismo razonamiento para (U_2,f_2) se llegaría a que la ε-forma (V,f) es neutra.

TEOREMA 3.1.6.- Sea (V,f) una ε-forma no neutra e isotípica de tipo N, entonces existe una ε-forma (W,g) anisótropa e isotípica de tipo N equivalente a (V,g).

DEMOSTRACION:

Supongamos que (V,f) no es anisótropa, entonces debe de existir un L-submódulo M de V tal que $M\cap M^{\perp}\neq 0$. Escribamos $P=M\cap M^{\perp}$, tenemos que $f_{|P\times P}=0$, luego $P\subseteq P^{\perp}$. Como (V,f) no es neutra se tiene que $P\neq P^{\perp}$. Consideremos el L-submódulo no nulo $P^{\perp}/P$. Como $P=\mathrm{Ker}(f_{|P^{\perp}\times P^{\perp}})$, ver Teorema 1.2.2, tenemos que f induce una forma bilineal ε-simétrica f' sobre $P^{\perp}/P$. En la demostración del citado Teorema se ve que la ε-forma $(P^{\perp}/P,f')$ es equivalente con la ε-forma dada (V,f). Ahora escribimos $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_r$ siendo V_i L-submódulos simples de V isomorfos a N para todo $i\in\{1,2,\ldots,r\}$. Como $P^{\perp}$ es un L-submódulo de V se tiene que $P^{\perp}=V_{i_1}\oplus\ldots\oplus V_{i_r}$ donde $\{i_1,\ldots,i_r\}\subset\{1,\ldots,r\}$ Por tanto $P^{\perp}$ es isotípico de tipo N. Resulta que $P^{\perp}/P$ es tambien isotípico de tipo N. Hemos conseguido una ε-forma $(P^{\perp}/P,f')$ isotípica de tipo N con $\dim P^{\perp}/P < \dim V$. Por un proceso de inducción sobre la $\dim V$ se llega a la existencia de una ε-forma isotípica de tipo N y anisótropa equivalente a (V,f).

PROPOSICION 3.1.7.- Dos ε-forma no neutras e isotípicas de distinto tipo no pueden ser equivalentes.

DEMOSTRACION:

Sean (V_1,f_1) y (V_2,f_2) dos ε-formas no neutras e isotípicas de tipos N_1 y N_2 respectivamente. Por el Teorema anterior existen ε-formas (W_i,g_i) anisótropas e isotípicas de tipos N_i equivalentes a (V_i,f_i), $i\in\{1,2\}$. Entonces si (V_1,f_1) es equivalente a (V_2,f_2) se tiene que (W_1,g_1) es equivalente a (W_2,g_2) de donde $W_1 \cong W_2$ y por tanto $N_1 \cong N_2$ lo cual es una contradicción.

PROPOSICION 3.1.8.- Sea $V_1,V_2,\ldots,V_h$ una familia de L-módulos isotípicos de distinto tipo dos a dos. Si $(V_1,f_1),\ldots,(V_h,f_h)$ son ε-formas anisótropas, entonces la ε-forma $(V_1,f_1)\perp\cdots\perp(V_h,f_h)$ es anisótropa.

DEMOSTRACION:

Si llamo $(V_1,f_1)\perp(V_2,f_2)\perp\cdots\perp(V_h,f_h)=(V,f)$ y es una ε-forma no anisótropa, entonces existe un L-submódulo M de V tal que $f_{|M\times M}$ es degenerada. Si consideramos el L-submódulo $M\cap M^{\perp}$ de M entonces $f_{|M\cap M^{\perp}\times M\cap M^{\perp}} = 0$. Como $M\cap M^{\perp}$ es un L-submódulo de V, podemos considerar su descomposición isotípica, con lo que existen L-submódulos M_i de V_i para todo $i\in\{1,2,\dots,h\}$ tales que $M \quad M^{\perp}=\oplus_i M_i$. Como $f_{|M_i\times M_i}=0$, entonces para todo $i\in\{1,2,\dots,h\}$ (V_i,f_i) serían ε-formas no anisótropas en contra de la hipótesis.

TEOREMA 3.1.9.- $W_\varepsilon(L)=\oplus_N W_\varepsilon(L)_N$ donde N recorre todos los módulos simples autoduales.

DEMOSTRACION:

En primer lugar vamos a ver que $W_\varepsilon(L)=\sum_N W_\varepsilon(L)_N$ para ello sea (V,f) una ε-forma cualquiera y llamamos M al L-submódulo de V que sea suma directa de todos los L-submódulos simples autoduales y P al L-submódulo de V suma directa de todos los L-submódulos simples no autoduales. Como M no es isomorfo a P^*_σ por Proposición 3.1.2, la forma f se descompone como $f=g\perp h$ donde $g=f_{|M\times M}$ y $h=f_{|P\times P}$. Por Proposición 3.1.5 (P,h) es una ε-forma neutra y por tanto $(V,f)\sim(M,g)$. Si $M=\oplus_i M_i$ es la descomposición de L-módulo M en sus componentes isotípicas, considero $g_{ij}:M_i\times M_j\text{--->}K$ tal que $g_{ij}(x_i,y_j)=g(x_i,y_j)$, $x_i\in M_i$, $y_j\in M_j$. Si $i\neq j$, entonces M_i y M_j son componentes isotípicas de distinto tipo y $g_{ij}=0$. Si $i=j$, entonces g_{ij} es una forma bilineal ε-simétrica invariante definida en la componente isotípica M_i de M. Por tanto se verifica que $(V,f)\sim(M,g)=\perp_i(M_i,g_i)$ siendo $g_i=g_{|M_i\times M_i}$ es decir toda ε-forma es equivalente a una suma ortogonal de ε-formas sobre sus componentes isotípicas autoduales.

Veamos que es suma directa, para ello supongamos que (V_i,f_i), $i\in\{1,2,\dots,r\}$ es una ε-forma no neutra e isotípica de tipo N_i

con $N_i \neq N_j$ si $i \neq j$ tales que

$$(V_1,f_1) \perp (V_2,f_2) \perp \cdots \perp (V_{i-1},f_{i-1}) \perp (V_i,f_i) \perp (V_{i+1},f_{i+1}) \perp \cdots \perp (V_r,f_r) \text{ es}$$

neutra. Entonces se verifica

$$(V_1,f_1) \perp \cdots \perp (V_{i-1},f_{i-1}) \perp (V_{i+1},f_{i+1}) \perp \cdots \perp (V_r,f_r) \sim (V_i,-f_i).$$

La ε-forma $(V_i,-f_i)$ no es neutra por ser (V_i,f_i) no neutra. Por Teorema 3.1.6 podemos tomar ε-formas anisótropas (W_j,g_j) isotípicas de tipo N_j para $j \in \{1,2,\dots,r\}$ de forma que $(W_j,g_j) \sim (V_j,f_j)$ para $j \neq i$ y $(W_i,g_i) \sim (V_i,-f_i)$. Ahora consideramos la suma $(W_1,g_1) \perp \cdots \perp (W_{i-1},g_{i-1}) \perp (W_{i+1},g_{i+1}) \perp \cdots \perp (W_r,g_r)$ que es equivalente a $(V_1,f_1) \perp \cdots \perp (V_{i-1},f_{i-1}) \perp (V_{i+1},f_{i+1}) \perp \cdots \perp (V_r,f_r)$ y además es anisótropa por Proposición 3.1.8. Por Teorema 1.2.2, $W_1 \oplus \dots \oplus W_{i-1} \oplus W_{i+1} \oplus \dots \oplus W_r \cong W_i$. Como los W_j, $j \in \{1,2,\dots,r\}$ y $j \neq i$ son isotípicos de tipo N_j y W_i es isotípico de tipo N_i, contradicción por ser los $N_j \neq N_i$.

OBSERVACION

Si (V,f) es una ε-forma neutra isotípica de tipo N, entonces el metabolizador de (V,f) es tambien isotípico de tipo N.

DEMOSTRACION:

Sea (V,f) una ε-forma neutra e isotípica de tipo N. Por ser neutra tiene un metabolizador $M = M^{\perp}$ que es un L-submódulo de V y por tanto sumando directo. Como V es isotípico de tipo N, es M isotípico de tipo N.

PARRAFO 2.- DETERMINACION DE LOS MODULOS SIMPLES AUTODUALES SOBRE UN ALGEBRA DE LIE SIMPLE CON LAS INVOLUCIONES $\sigma_{|H} = \pm$ id

En el Párrafo anterior hemos visto que los L-módulos simples autoduales son los únicos que proporcionan una componente isotípica del grupo de Witt $W_\varepsilon(L)$ y que $W_\varepsilon(L)=\oplus_N W_\varepsilon(L)_N$. El objetivo de este Párrafo es detectar los L-módulos simples autoduales de un álgebra de Lie simple L dotada de las involuciones $\sigma: L \dashrightarrow L$ tales que $\sigma_{|H}=\pm$id siendo H una subálgebra de Cartán de L (Ver Párrafo 3 de Capítulo 2). Si Δ es la base del sistema de raices Φ relativa a H y teniendo en cuenta Observación 2 de (5, 8.7.2), existe un único elemento ω_o del grupo de Weyl que transforma Δ en $-\Delta$. Además si λ es peso máximo de un L-módulo simple de dimensión finita V, entonces $\omega_o(\lambda)$ es el peso mínimo de V.

1º CASO $\sigma_{|H} = -$id

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

TEOREMA 3.2.1.- Si en la K-álgebra de Lie simple L se define una involución σ tal que para una subálgebra de Cartán H de L sea $\sigma_{|H}=-$id, entonces:

1º.- El conjunto de pesos de cualquier L-módulo simple de dimensión finita V es opuesto al conjunto de pesos del L-módulo simple V^*_σ.

2º.- Si λ es el peso máximo de V, entonces $-\omega_o(\lambda)$ es el peso máximo de V^*_σ.

3º.- V es isomorfo a V^*_σ si y solo si $-\omega_o(\lambda)=\lambda$.

DEMOSTRACION:

Sea V un L-módulo simple de dimensión finita con conjunto de pesos P y sea $V=\bigoplus_{p\in P} V_p$ la descomposición de V en sus espacios peso relativo a adH siendo $V_p=\{v\in V/hv=p(h)v,\ \forall h\in H\}$. Consideremos el L-módulo V^*_σ que, por Lema 2.1.4, es simple. Entonces $V^*_\sigma=\bigoplus_{p\in P}(V_p)^*$ siendo $(V_p)^*=\{f:V_p\text{--->}K\}$. Si $V^*_\sigma=\bigoplus_{q\in Q}(V^*_\sigma)_q$ es la descomposición de V^*_σ en sus espacios peso relativo a adH siendo $(V^*_\sigma)_q=\{f\in V^*/hf=q(h)f,\ \forall h\in H\}$, veamos que $Q=-P$. Para ello bastará demostrar que $(V_p)^*=(V^*_\sigma)_{-p}$ para todo p de P.

Si $f\in(V_p)^*$, entonces para todo h de H y todo v de V_p se tiene $(hf)(v)=f(\sigma(h)v)=f(-hv)=f(-p(h)v)=-p(h)f(v)$ y por tanto $f\in(V^*_\sigma)_{-p}$. Luego $(V_p)^*\subset(V^*_\sigma)_{-p}$.

Por otro lado $f\in(V^*_\sigma)_{-p}$ si y solo si $hf=-p(h)f$, $\forall h\in H$. Entonces $\forall v\in V$ se verifica $(hf)(v)=f(\sigma(h)v)=f(-hv)=(-p(h)f)(v)=-p(h)f(v)$. Es decir, $f\in(V^*_\sigma)_{-p}$ si y solo si $\forall h\in H$ y $\forall v\in V$ se tiene $f(-hv)=-p(h)f(v)$. Sea $w\in V_q$ donde $q\neq p$, entonces $-hw=-q(h)w$ $\forall h\in H$. Como $w\in V_q\subset V$, entonces $f(-hw)=-p(h)f(w)$. Pero $f(-hw)=-q(h)f(w)$. Luego tenemos que $q(h)f(w)=p(h)f(w)$ y por tanto $(q-p)(h)f(w)=0$. Puesto que $q\neq p$, tiene que existir algún h de H tal que $(q-p)(h)\neq 0$ y por tanto $f(w)=0$. Luego si $f\in(V^*_\sigma)_{-p}$ y $w\in V_q$ siendo $q\neq p$, entonces $f(w)=0$. Sabemos que $\forall v\in V=\bigoplus_{p\in P} V_p$ es $v=\Sigma v_p$. Si $f\in(V^*_\sigma)_{-p}\subset V^*$, se tiene que $f(v)=f(v_p)$ y por tanto $f\in(V_p)^*$. Es decir $(V^*_\sigma)_{-p}\subset(V_p)^*$ y por la doble inclusión, $(V_p)^*=(V^*_\sigma)_{-p}$.

Si λ es el peso máximo del L-módulo simple V, entonces $\omega_o(\lambda)$ es el peso mínimo de V y por lo anterior, $-\omega_o(\lambda)$ será el peso máximo del L-módulo simple V^*_σ.

Si los L-módulos simples V y V^*_σ son isomorfos, tienen que tener igual peso máximo y por lo anterior $-\omega_0(\lambda)=\lambda$. Recíprocamente si los L-módulos simples V y V^*_σ tienen igual peso máximo, entonces son isomorfos (17, Teorema A de 20.3)

OBSERVACION

Por el Teorema anterior V^*_σ tal que $\sigma_{|H}=-id$ coincide con V^*_{-1}, es decir al concepto de módulo dual clásico. En efecto, por el primer apartado del Teorema, el conjunto de pesos de V^*_σ es opuesto al conjunto de pesos de V y por (5, 8.7.5) los pesos del módulo dual clásico son opuestos a los de V, por tanto V^*_σ es isomorfo a V^*_{-1}.

Desde luego en aquellas álgebras de Lie simples L en el que el elemento ω_0 del grupo de Weyl valga -1, todo L-módulo simple finito dimensional será autodual. Este es el caso de las álgebras de Lie simples siguientes:

A_1; $B_l (l\geq 2)$; $C_l (l\geq 3)$; D_l(l par≥ 4); E_7; E_8; F_4; G_2. (5, 8.7.5 Obs.2)

TEOREMA 3.2.2.- Si L es una de las álgebras de Lie simples siguientes: A_1, $B_l (l\geq 2)$, $C_l (l\geq 3)$, D_l(l par ≥ 4), E_7, E_8, F_4, G_2, y σ es una involución definida en L tal que $\sigma_{|H}=-id$, donde H es una subálgebra de Cartán de L, entonces todo L-módulo simple de dimensión finita es autodual.

Veamos lo que sucede cuando el álgebra de Lie simple L sea $A_l (l>1)$, D_l(l impar>4) ó E_6.

Consideremos el álgebra de Lie simple $A_l (l>1)$ y sea la base $\Delta=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2, \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ldots,\alpha_l=\varepsilon_l-\varepsilon_{l+1}\}$, del sistema de raices Φ relativa a H, entonces ω_o es tal que $\omega_o(\alpha_i)=-\alpha_{l+1-i}$ (5, 6.Plancha I)

TEOREMA 3.2.3.- Los A_l-módulos ($l>1$) simples autoduales de dimensión finita, con la involución $\sigma_{|H}=-id$ en A_l tienen de peso máximo $\lambda=\Sigma\, a_i(\alpha_i+\alpha_{l-(i-1)})$.

DEMOSTRACION:

Si V es un A_l-módulo simple de dimensión finita y peso máximo $\lambda=\sum_1^l a_i\alpha_i$, será autodual si el peso másimo del A_l-módulo simple V_σ^*, que es $-\omega_o(\lambda)$, es también λ. Por tanto $-(-a_1\alpha_l-a_2\alpha_{l-1}-\ldots-a_l\alpha_1)=$ $=\sum_1^l a_i\alpha_i=\sum_1^l a_i\alpha_{l-i+1}$, es decir $a_i=a_j$ con $i+j=l+1$. Por tanto el peso máximo de los A_l-módulos simples autoduales de dimensión finita tienen que ser de la forma $\lambda=\sum_1^h a_i(\alpha_i+\alpha_{l-i+1})$ donde $h=l/2$ si l es par ó $h=(l+1)/2$ si l es impar.

Sea ahora el álgebra de Lie simple D_l(l impar>4) y sea la base $\Delta=\{\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2, \alpha_2=\varepsilon_2-\varepsilon_3,\ldots,\alpha_{l-1}=\varepsilon_{l-1}-\varepsilon_l, \alpha_l=\varepsilon_{l-1}+\varepsilon_l\}$ del sistema de raices Φ relativa a H, entonces ω_o es tal que $\omega_o(\alpha_i)=-\alpha_i$ para $i=\{1,2,\ldots,l-2\}$ y $\omega_o(\alpha_{l-1})=-\alpha_l$. (5, 6.Plancha IV)

TEOREMA 3.2.4.- Los D_l-módulos (l impar>4) simples autoduales de dimensión finita, con la involución $\sigma_{|H}=-id$ en D_l tienen de peso máximo $\lambda=\sum_1^{l-2} a_i\alpha_i+2a_{l-1}\varepsilon_{l-1}$ con $a_i\in Z$.

DEMOSTRACION:

Si V es un D_l-módulo simple de dimensión finita y con peso máximo $\lambda = \sum_1^l a_i\alpha_i$, será autodual si el peso máximo del D_l-módulo simple V_σ^*, que es $-\omega_o(\lambda)$, es tambien λ. Por tanto ha de verificarse $\lambda = \sum_1^l a_i\alpha_i = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_{l-2}\alpha_{l-2} + a_{l-1}\alpha_l + a_l\alpha_{l-1}$, es decir $a_1, a_2, \ldots, a_{l-2}$ pueden tomar cualquier valor de Z y $a_{l-1} = a_l$. Por tanto el peso máximo de los D_l-módulos simples autoduales de dimensión finita tienen que ser de la forma $\lambda = a_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots + a_{l-2}(\varepsilon_{l-2} - \varepsilon_{l-1}) + 2a_{l-1}\varepsilon_{l-1}$ con $a_i \in Z$.

Sea finalmente el álgebra de Lie simple E_6 y sea la base $\Delta = \{\alpha_1 = 1/2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$, $\alpha_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\alpha_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\alpha_4 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$, $\alpha_5 = \varepsilon_4 - \varepsilon_3$, $\alpha_6 = \varepsilon_5 - \varepsilon_4\}$ del sistema de raices Φ relativo a H. Como $\omega_o(\alpha_1) = -\alpha_6$, $\omega_o(\alpha_2) = -\alpha_2$, $\omega_o(\alpha_3) = -\alpha_5$, $\omega_o(\alpha_4) = -\alpha_4$, $\omega_o(\alpha_5) = -\alpha_3$, $\omega_o(\alpha_6) = -\alpha_1$. (5, 6.Plancha V)

TEOREMA 3.2.5.- Los E_6-módulos simples autoduales de dimensión finita, con la involución $\sigma_{|H} = -id$ en E_6 tienen de peso máximo $\lambda = a_1(\alpha_1 + \alpha_6) + a_2\alpha_2 + a_3(\alpha_3 + \alpha_5) + a_4\alpha_4$ con $a_i \in Z$.

DEMOSTRACION:

Si V es un E_6-módulo simple de dimensión finita y con peso máximo $\lambda = \sum_1^6 a_i\alpha_i$, será autodual si el peso máximo del E_6-módulo simple V_σ^*, que es $-\omega_o(\lambda)$, es también λ. Por tanto ha de verificarse $\lambda = \sum_1^6 a_i\alpha_i = a_1\alpha_6 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_5 + a_4\alpha_4 + a_5\alpha_3 + a_6\alpha_1$ con lo que $a_1 = a_6$, $a_3 = a_5$ y

a_2 y a_4 pueden tomar cualquier valor. Es decir, el peso máximo de los E_6-módulos simples autoduales de dimensión finita tienen que ser de la forma $\lambda=a_1(\alpha_1+\alpha_6)+a_2\alpha_2+a_3(\alpha_3+\alpha_5)+a_4\alpha_4$ con $a_i\in Z$.

2º CASO $\sigma_{|H}=id$

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero y L una K-álgebra de Lie simple provista de una involución σ tal que $\sigma_{|H}=id$ siendo H una subálgebra de Cartán de L, entonces

TEOREMA 3.2.6.- Todo L-módulo simple de dimensión finita es autodual.

DEMOSTRACION:

Sea V un L-módulo simple de dimensión finita y con peso máximo λ. Consideremos la descomposición $V=\bigoplus_{p\in P} V_p$ en sus espacios peso relativos a adH. Veamos cual es el conjunto de pesos y el peso máximo del L-módulo simple $V^*_\sigma=\bigoplus_{p\in P}(V_p)^*$. Si $V^*_\sigma=\bigoplus_{q\in Q}(V^*_\sigma)_q$ es la descomposición de V^*_σ en sus espacios peso relativos a adH, veamos que Q=P, para ello bastará demostrar que $(V_p)^*=(V^*_\sigma)_p$ para todo p de P. Recordemos que $V_p=\{v\in V/hv=p(h)v,\ \forall h\in H\}$, $(V_p)^*=\{f:V_p\dashrightarrow K\}$ y que $(V^*_\sigma)_q=\{f\in V^*_\sigma/hf=q(h)f,\ \forall h\in H\}$.

Si $f\in(V_p)^*$, entonces para todo h de H y todo v de V_p se tiene $(hf)(v)=f(\sigma(h)v)=f(hv)=f(p(h)v)=p(h)f(v)$ y por tanto $f\in(V^*_\sigma)_p$. Luego $(V_p)^*\subset(V^*_\sigma)_p$.

Por otro lado $f\in(V^*_\sigma)_p$ si y solo si $hf=p(h)f$, $\forall h\in H$. Entonces $\forall v\in V$ se verifica $(hf)(v)=f(\sigma(h)v)=f(hv)=(p(h)f)(v)=p(h)f(v)$. Es decir

$f\in(V_\sigma^*)_p$ si y solo si $\forall h\in H$ y $\forall v\in V$ se tiene $f(hv)=p(h)f(v)$. Sea ahora $w\in V_q$ donde $q\neq p$, entonces $hw=q(h)w$, $\forall h\in H$. Como $w\in V_q\subset V$, entonces $f(hw)=p(h)f(w)=q(h)f(w)$. Es decir $q(h)f(w)=p(h)f(w)$ y por tanto $(q-p)(h)f(w)=0$. Puesto que $q\neq p$, tiene que existir algún h de H tal que $(q-p)(h)\neq 0$ y por tanto $f(w)=0$.

Luego si $f\in(V_\sigma^*)_p$ y $w\in V_q$ siendo $q\neq p$, entonces $f(w)=0$. Sabemos que para todo v de $V=\bigoplus_{p\in P} V_p$ es $v=\Sigma v_p$. Si $f\in(V_\sigma^*)_p\subset V^*$, se tiene que $f(v)=f(v_p)$ y por tanto $f\in(V_p)^*$. Es decir $(V_\sigma^*)_p\subset(V_p)^*$ y por la doble inclusión se tiene que $(V_p)^*=(V_\sigma^*)_p$.

Veamos ahora que λ es también el peso máximo del L-módulo simple V_σ^*. Para ello es necesario que $e_\alpha f=\theta$ para todo f de $(V_\lambda)^*$ y todo α de Φ^+. Consideremos $(e_\alpha f)v_p=f(\sigma(e_\alpha)v_p)=f(e_{-\alpha}v_p)$ para todo v_p de V_p. Sucede que $e_{-\alpha}v_p\in[L_{-\alpha}\ V_p]\ V_{p-\alpha}$. En el caso de que $p-\alpha\neq\lambda$, entonces $(e_\alpha f)v_p=f(e_{-\alpha}v_p)=0$ para todo v_p de V_p. Luego $e_\alpha f=\theta$. Si $p-\alpha=\lambda$, entonces $p=\alpha+\lambda$ y esto es imposible ya que λ era peso máximo de V. Por tanto λ es también peso máximo de V_σ^*. Puesto que los L-módulos simples de dimensión finita V y V_σ^* tienen igual peso máximo, son isomorfos. (17, Teorema A de 20.3).

CONCLUSION

Si σ es una involución definida en un álgebra de Lie simple L cualquiera tal que $\sigma|_H=id$ donde H es una subálgebra de Cartán de L, entonces todo L-módulo simple de dimensión finita es autodual.

Si σ es una involución definida en un álgebra de Lie simple L tal que

$\sigma_{|H}=-id$ donde H es una subálgebra de Cartán de L, entonces:

I.- Si L es una de las álgebras siguientes: A_1, B_l $(L>2)$, C_l $(l>3)$, D_l (l par>4), E_7, E_8, F_4, G_2, todo L-módulo simple de dimensión finita es autodual.

II.- Si $L=A_l$ $(l>1)$, un L-módulo simple de dimensión finita es autodual si y solo si su peso máximo es $\lambda=\Sigma a_i(\alpha_i+\alpha_{l-(i-1)})$.

III.- Si $L=D_l$ (l impar>4), un L-módulo simple de dimensión finita es autodual si y solo si su peso máximo es $\lambda=\sum_1^{l-2} a_i\alpha_i+2a_{l-1}\varepsilon_{l-1}$ con $a_i\in Z$.

IV.- Si $L=E_6$, un L-módulo simple de dimensión finita es autodual si y solo si su peso máximo es $\lambda=a_1(\alpha_1+\alpha_6)+a_2\alpha_2+a_3(\alpha_3+\alpha_5)+a_4\alpha_4$ con $a_i\in Z$.

PARRAFO 3.- ESTUDIO DE FORMAS SOBRE MODULOS SIMPLES PARA EL ALGEBRA DE LIE A_1 CON INVOLUCION

Este Párrafo no solo es un ejemplo, sino que nos servirá para demostraciones posteriores, ya que toda álgebra de Lie simple L tiene como subálgebra al álgebra tridimensional A_1 de las matrices 2x2 de traza cero. Además todo L-módulo simple de dimensión finita V se puede considerar como un A_1-módulo y por tanto considerado como tal, su estudio nos proporciona información del L-módulo V.

Sabemos por el Ejemplo del Párrafo 3 del Capítulo 2 que las únicas involuciones σ que conservan la subálgebra de Cartán $H=\langle h_\alpha\rangle$ de A_1 son $\sigma_{|H}=\pm id$.

Si V es un A_1-módulo simple tal que $\dim V=m+1<\infty$ entonces V tiene un único vector maximal (salvo múltiplos escalares no nulos) cuyo peso (llamado el peso máximo) es m. Se denota por $V(m)$ al A_1-módulo V. (17, 7.2)

TEOREMA 3.3.1.- Sea el álgebra de Lie A_1 y σ una involución definida en A_1 tal que conserva la subálgebra de Cartán $H=\langle h_\alpha \rangle$. Sea $V(m)$ un A_1-módulo simple y f una forma bilineal no degenerada e invariante, respecto a σ, definida en $V(m)$:

a) Si $\sigma(h_\alpha)=-h_\alpha$ y $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces f es simétrica

b) Si $\sigma(h_\alpha)=-h_\alpha$ y $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$, entonces si m es par, f es simétrica y si m es impar, f es antisimétrica

c) Si $\sigma(h_\alpha)=h_\alpha$ y si $\sigma(e_\alpha)=e_{-\alpha}$, $\sigma(e_{-\alpha})=e_\alpha$, entonces f es simétrica

DEMOSTRACION:

Consideremos la base ordenada $\{v_0,v_1,\dots,v_m\}$ de $V(m)$ donde v_0 es el vector de peso máximo m.

a) Como $\sigma(h_\alpha)=-h$ y $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces

$f(h_\alpha v_i,v_j)=(m-2i)f(v_i,v_j)=f(v_i,-h_\alpha v_j)=-(m-2j)f(v_i,v_j)$, es decir $2(m-(i+j))f(v_i,v_j)=0$.

Si $i+j\neq m$, entonces $f(v_i,v_j)=0$ y por tanto la matriz asociada a f respecto a la base ordenada de $V(m)$ es tal que todos sus elementos son cero excepto los de la diagonal secundaria que pueden serlos o no.

$$\begin{bmatrix} 0 & & f(v_0,v_m) \\ 0 & f(v_1,v_{m-1}) & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ f(v_m,v_0) & & 0 \end{bmatrix}$$

Veamos ahora como son los elementos de la diagonal secundaria, es es decir cuando $i+j=m$. Llamamos por comodidad de anotación en lo que sigue $f(v_i,v_j)=a_{ij}$.

$f(e_\alpha v_i,v_j)=(m-i+1)f(v_{i-1},v_j)=f(v_i,e_\alpha v_j)=(m-j+1)f(v_i,v_{j-1})$, es decir $(m-i+1)a_{i-1j}=(m-j+1)a_{ij-1}$. Como la suma de los subíndices tienen que valer m, resulta que $i-1+j=m$ y por tanto obtenemos $ma_{0m}=a_{1m-1}$; $(m-1)a_{1m-1}=2a_{2m-2}$; $(m-2)a_{2m-2}=3a_{3m-3}$ y así sucesivamente, es decir $a_{1m-1}=\binom{m}{1}a_{0m}$; $a_{2m-2}=\binom{m}{2}a_{0m}$; $a_{3m-3}=\binom{m}{3}a_{0m}$ y por inducción se obtiene $a_{im-i}=\binom{m}{i}a_{0m}$. Luego $a_{m-ii}=\binom{m}{m-i}a_{0m}$. Se tiene pues que $a_{im-i}=a_{m-ii}$ con lo que la matriz asociada a f respecto a la base ordenada de $V(m)$ es simétrica.

b) Supongamos ahora que $\sigma(h_\alpha)=-h$ y $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$, entonces como en el caso anterior obtenemos que $2(m-(i+j))f(v_i,v_j)=0$ y por tanto si $i+j\neq m$, entonces $f(v_i,v_j)=0$ y también la matriz asociada a f respecto a la base ordenada de $V(m)$ es tal que sus elementos son cero excepto los de la diagonal secundaria que pueden serlos o no. Veamos como son los elementos de la diagonal secundaria, es decir cuando $i+j=m$.

$f(e_\alpha v_i,v_j)=(m-i+1)f(v_{i-1},v_j)=f(v_i,-e_\alpha v_j)=-(m-j+1)f(v_i,v_{j-1})$, es decir $(m-i+1)a_{i-1j}=-(m-j+1)a_{ij-1}$. Por un proceso análogo al anterior obtenemos que $a_{im-i}=(-1)^m a_{m-ii}$ y por tanto si m es par la matriz, y por tanto f, sería simétrica y si m es impar, la matriz, y por tanto f, sería antisimétrica. Conclusión que coincide con (5, 8.7.5 Prop. 12). Además queda estudiada la Observación 3 de (5, 8.1.3).

c) Supongamos finalmente que $\sigma(h_\alpha)=h_\alpha$, $\sigma(e_\alpha)=e_{-\alpha}$, $\sigma(e_{-\alpha})=e_\alpha$, entonces $f(h_\alpha v_i,v_j)=(m-2i)f(v_i,v_j)=f(v_i,h_\alpha v_j)=(m-2j)f(v_i,v_j)$, es decir $2(j-i)f(v_i,v_j)=0$. Si $i\neq j$ es $f(v_i,v_j)=0$ y por tanto la matriz asociada a f respecto a la base ordenada de $V(m)$ es tal que sus elementos son cero excepto los de la diagonal principal que pueden serlos o no. Veamos como son los elementos de la diagonal principal. $f(e_\alpha v_{i+1}, v_i) = (m-(i+1)+1) f(v_i, v_i) = f(v_{i+1}, e_{-\alpha} v_i) = (i+1) f(v_{i+1}, v_{i+1})$, es decir $(m-i) a_{ii} = (i+1) a_{i+1\, i+1}$, luego $a_{i+1\, i+1} = \frac{m-i}{i+1} a_{ii}$. Por tanto

$$a_{11} = \binom{m}{1} a_{00};\quad a_{22} = \binom{m}{2} a_{00};\ \ldots;\ a_{ii} = \binom{m}{i} a_{00};\ \ldots;\ a_{mm} = \binom{m}{m} a_{00}.$$

Como $a_{00} = f(v_0, v_0)$ siendo v_0 el vector maximal de $V(m)$, siempre se puede elegir v_0 de tal manera que $a_{00} = 1$ y por tanto la matriz asociada a f respecto a la base ordenada de $V(m)$ es

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{0} & & & \\ & \binom{m}{1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \binom{m}{m} \end{vmatrix}$$

que es una matriz diagonal. Se observa que si f es antisimétrica, entonces $f=0$. Luego si $f \neq 0$, entonces f es simétrica. La traza de la matriz vale 2^m.

PARRAFO 4.- DETERMINACION DE FORMAS SOBRE UN L-MODULO SIMPLE DONDE L ES SIMPLE CON LAS INVOLUCIONES $\sigma|_H = \pm id$

Sea L un álgebra de Lie simple sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y de característica cero. Si $\sigma: L \text{--->} L$ es una involución, entonces el automorfismo $\tau = -\sigma: L \text{--->} L$ es tal que $\tau^2 = 1$. Vimos en Capítulo 2, Párrafo 3 que aplicando al grupo cíclico de orden 2 de automorfismos de L generado por τ el Teorema de Borel-Mostow

(4), se obtiene que τ deja invariante alguna subálgebra de Cartán H de L. Luego σ también deja invariante H.

Consideremos un L-módulo V. Llamemos a $V = \bigoplus_{\lambda_i \in \Lambda} V_{\lambda_i}$ a la descomposición en sus espacios peso relativos a adH. Sea f una forma bilineal no degenerada e invariante definida en V. Consideremos dos vectores v y w pertenecientes a los espacios peso V_{λ_i} V_{λ_j} respectivamente. Encontramos para todo h de H que $hv = \lambda_i(h)v$ y $hw = \lambda_j(h)w$ y por tanto

$$f(hv,w) = \lambda_i(h)f(v,w) = f(v,\sigma(h)w) = \lambda_j(\sigma(h))f(v,w) \qquad (*)$$

En este Párrafo nos vamos a restringir a involuciones $\sigma : L \dashrightarrow L$ tales que $\sigma_{|H} = -id$ ó $\sigma_{|H} = id$ vistas en Capítulo 2, Párrafo 3 como casos espaciales de involuciones, donde H es la subálgebra de Cartán de L que es dejada invariante mediante σ.

Con involuciones del primer tipo obtenemos de (*)

$$\lambda_i(h)f(v,w) = -\lambda_j(h)f(v,w) \qquad (**)$$

Con involuciones del segundo tipo (**Transposición**) obtenemos de (*)

$$\lambda_i(h)f(v,w) = \lambda_j(h)f(v,w) \qquad (***)$$

CASO $\sigma_{|H} = -id$

TEOREMA 3.4.1.- Sea L una k-álgebra de Lie simple y σ una involución definida en L tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H} = -id$. Sea V un L-módulo simple de dimensión finita de peso máximo λ y vector maximal v^+, si f es una forma bilineal no degenerada e invariante definida en V, entonces f viene caracterizada por el valor $f(v^+,u)$ siendo u cualquier vector de peso $-\lambda$.

DEMOSTRACION:

Sean v y w vectores de V pertenecientes a los espacios peso V_{λ_i} y V_{λ_j} respectivamente, entonces de la ecuación (* *) obtenemos que $(\lambda_i(h)+\lambda_j(h))f(v,w)=0$. Luego si $f(v,w)\neq 0$, entonces $\lambda_i(h)=-\lambda_j(h)$ para todo h de H. Por tanto $\lambda_i=-\lambda_j$, es decir v y w están en espacios peso cuyo peso son opuestos. En particular si $\lambda_i\in\Lambda$, entonces $-\lambda_i\in\Lambda$.

Vamos ahora a demostrar que dos espacios peso cuyos pesos sean opuestos tienen igual dimensión. Para ello consideramos los espacios peso V_{λ_i} y $V_{-\lambda_i}$ y suponemos que $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ es una base de V_{λ_i}. Para todo $j\in\{1,2,\dots,n\}$ es $v_j\in V_{\lambda_i}$ si y solo si para todo h de H se verifica qué $h(v_j)=\lambda_i(h)v_j$ si y solo si $v_j^*\in(V_{\lambda_i})^*$. Por otro lado para todo v de V_{λ_i} es $v=\sum_{k=1}^{n} x_k v_k$. Veamos que $v_j^*\in V_{-\lambda_i}$. Para todo h de H y todo v de V es $hv_j^*(v)=v_j^*(-hv)=v_j^*(-h\sum_{k=1}^{n} x_k v_k)=v_j^*(-\sum_{k=1}^{n} x_k h v_k)=$

$=v_j^*(-\sum_{k=1}^{n} x_k\lambda_i(h)v_k)=-\lambda_i(h)v_j^*(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k)=-\lambda_i(h)v_j^*(v)$. Luego $v_j^*\in V_{-\lambda_i}$.

Es decir $\dim V_{\lambda_i}=\dim(V_{\lambda_i})^*=\dim V_{-\lambda_i}$.

Como $V=\bigoplus_{\lambda_i\in\Lambda} V_{\lambda_i}$ tomando una base de cada espacio peso, la unión de todas ellas es una base de V. Al ser λ el peso máximo de V, entonces $\dim V_\lambda=1=\dim V_{-\lambda}$ por lo anteriormente visto.

Sea $V=V_\lambda\oplus V_{\lambda_1}\oplus\dots\oplus V_{-\lambda_1}\oplus V_{-\lambda}$ con $B_{V_\lambda}=\{v^+\}$; $B_{V_{\lambda_1}}=\{v_{11},\dots,v_{1t}\}$;...; $B_{V_{-\lambda_1}}=\{v'_{11},\dots,v'_{1t}\}$; $B_{V_{-\lambda}}=\{u\}$ bases respectivas. Hemos visto que si

$f(v,w)\neq 0$, entonces los vectores v y w están en espacios peso cuyos pesos son opuestos. Por tanto la matriz asociada a f respecto a la base $B_V = B_{V_\lambda} \cup B_{V_{\lambda_1}} \cup \ldots \cup B_{V_{-\lambda_1}} \cup B_{V_{-\lambda}}$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} & & & \begin{matrix} f(v^+,u) \\ 1\times 1 \end{matrix} \\ & & \begin{matrix} f(v_{1s},v'_{1r}) \\ t\times t \end{matrix} & \\ & \cdots & & \\ & \begin{matrix} f(v'_{1s},v_{1r}) \\ t\times t \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} f(u,v^+) \\ 1\times 1 \end{matrix} & & & \end{pmatrix}$$

Consideremos la descomposición de L en espacios raices relativa a H, $L = H \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha} \oplus \ldots \oplus L_\gamma \oplus L_{-\gamma}$. Recordemos que $\dim L_\alpha = 1$ para toda raiz α y que $[L_\alpha, L_{-\alpha}]$ es un espacio 1-dimensional de H. Fijemos un vector $x_\alpha \in L_\alpha$ y sea $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ de manera que $\{x_\alpha, y_\alpha, [x_\alpha\ y_\alpha] = h_\alpha\}$ sea la base estandar de $Sl_2(K)$ (17, Pág.37).

Por ser V un L-módulo simple, es estandar cíclico, es decir $V = U(L)v^+$ y V está engendrado por los vectores $y_{\beta_1}^{i_1} . y_{\beta_2}^{i_2} \ldots y_{\beta_m}^{i_m} v^+$ siendo $\Phi^+ = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m\}$ el conjunto de raices positivas del conjunto de raices Φ de L y $i_j \in Z^+$ (17, Pág.108).

Sean v y w dos vectores cualesquiera pertenecientes a espacios peso con peso opuesto respectivamente, por ser $v \in V$ entonces

$v=y_{\beta_1}^{i_1}\dots y_{\beta_m}^{i_m}v^+$ y por tanto $f(v,w)=f(y_{\beta_1}^{i_1}\dots y_{\beta_m}^{i_m}v^+,w)=$

$=f(v^+,\sigma(y_{\beta_m}^{i_m})\dots\sigma(y_{\beta_1}^{i_1})w)$. Si $f(v,w)\neq 0$, entonces $\sigma(y_{\beta_m}^{i_m})\dots\sigma(y_{\beta_1}^{i_1})w$

pertenece al espacio peso $V_{-\lambda}=Ku$, es decir $\sigma(y_{\beta_m}^{i_m})\dots\sigma(y_{\beta_1}^{i_1})w=cu$

con $c\in K$. Llegamos a que $f(v,w)=cf(v^+,u)$.

Por tanto observando la matriz asociada a f respecto a la base B_V se tiene que la primera caja consta del valor $f(v^+,u)$ y las demás cajas, cuyo orden dependen de la dimensión de los espacios peso correspondientes, son tales que los elementos de dichas submatrices serán siempre proporcionales a $f(v^+,u)\in K$. La forma (V,f) donde V es un L-módulo simple de dimensión finita de peso máximo λ y vector maximal v^+ viene caracterizada por el elemento $f(v^+,u)\in K$ donde u es cualquier vector del espacio peso $V_{-\lambda}$.

PROPOSICION 3.4.2.- Sea L una K-álgebra de Lie simple y σ una involucion definida en L tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$. Si V es un L-módulo simple de dimensión finita y peso máximo λ , entonces cualquier par de formas bilineales no degeneradas e invariantes, respecto a la involución σ, definidas en V son proporcionales.

DEMOSTRACION:

Sean f_1 y f_2 dos formas bilineales no degeneradas e invariantes respecto a la involución σ definidas en V. Entonces por el Teorema anterior, $f_1(v^+,u)=a_1\neq 0$ y $f_2(v^+,u)=a_2\neq 0$ siendo $V_\lambda=\langle v^+\rangle$ y $V_{-\lambda}=\langle u\rangle$. Por tanto $f_2(v^+,u)=(a_2/a_1)f_1(v^+,u)$. Consideremos dos espacios peso V_{λ_i} y $V_{-\lambda_i}$ y sean $v\in V_{\lambda_i}$; $w\in V_{-\lambda_i}$ tales que $f_1(v,w)\neq 0$, entonces $f_1(v,w)=f_1(v^+,aw)\neq 0$ donde $a\in U(L)$ con lo que $aw\in V_{-\lambda}$ y por tanto $aw=k_1u$, es decir $f_1(v,w)=f_1(v^+,k_1u)=k_1f_1(v^+,u)=k_1a_1$ con $k_1\in K^*$. Por otro lado $f_2(v,w)=f_2(v^+,aw)=f_2(v^+,k_1u)=k_1f_2(v^+,u)=$ $=k_1(a_2/a_1)f_1(v^+,u)=(a_2/a_1)k_1f_1(v^+,u)=(a_2/a_1)f_1(v,w)$. Por lo tanto $f_2=(a_2/a_1)f_1$.

Gracias a los resultados obtenidos con las involuciones en A_1 del Párrafo anterior y al resultado del Teorema 3.4.1, podemos adaptar la demostración de (5, 8.7.5) hecha para la involución el Opuesto al caso de la involución σ tal que $\sigma_{|H}=-id$ y $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$ para toda raiz α perteneciente a la base Δ del sistema de raices Φ relativa a H.

TEOREMA 3.4.3.- Sea L una K-álgebra de Lie simple y σ una involucion definida en L tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$. Consideremos la descomposición $L=H\oplus L_\alpha\oplus L_{-\alpha}\oplus\ldots\oplus L_\gamma\oplus L_{-\gamma}$ de L en espacios raices relativa a H. Sean V un L-módulo simple de dimensión finita y peso máximo λ, B_σ el espacio vectorial de las formas bilineales invariantes, respecto a la involución σ, definidas en V y m el entero $\sum_{\alpha\in\Phi^+}\lambda(h_\alpha)$. Consideremos ω_o el elemento del grupo de Weyl tal que $\omega_o(\Delta)=-\Delta$, siendo Δ la base del sistema de raices Φ relativa a H. Si $\omega_o(\lambda)=-\lambda$, entonces $\dim B_\sigma=1$ y todo elemento no nulo de B_σ es no degenerado. Además si para toda α de Δ es $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, siendo $L_\alpha=<e_\alpha>$, entonces todo elemento de B_σ es simétrico. Sin embargo

si para toda α de Δ es $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$ (involución el Opuesto), entonces si m es par, todo elemento de B_σ es simétrico y si m es impar, todo elemento de B_σ es antisimétrico.

DEMOSTRACION:

Si $\omega_0(\lambda)=-\lambda$, entonces por Teorema 3.2.1 V es isomorfo a V^*_σ y por tanto el espacio vectorial B_σ es isomorfo a $Hom_L(V,V^*_\sigma)$ y por tanto a $Hom_L(V,V)$ que es de dimensión 1. Luego $\dim B_\sigma=1$. Sea f un elemento no nulo de B_σ, entonces vendrá asociado un L-homomorfismo $\varphi: V \dashrightarrow V^*_\sigma$ definido por $\varphi(x)(y)=f(x,y)$. Como V es simple, y por tanto V^*_σ, entonces $Ker\,\varphi=0$ ó V. Si $Ker\varphi=V$, entonces $\varphi=0$ y por tanto $f=0$, contradicción. Luego $Ker\varphi=0$ con lo que φ es inyectivo y por ser $\dim V=\dim V^*_\sigma$, resulta que φ es L-isomorfismo y f es pues no degenerada.

Si consideramos ahora la forma bilineal $f_1(x,y)=f(y,x)$ $\forall x,y \in V$, que claramente es σ-invariante, entonces por Proposición anterior existe un k de K tal que $f_1(x,y)=kf(x,y)$ con lo que $f(y,x)=$ $=f_1(x,y)=kf(x,y)=kf_1(y,x)=k^2f(y,x)$ es decir $k^2=1$ y $k=\pm 1$. Por lo tanto f es simétrica o antisimétrica. Según Teorema 3.4.1 f viene caracterizada por el valor $f(v^+,u)$ donde $V_\lambda=\langle v^+\rangle$ y $V_{-\lambda}=\langle u\rangle$, resultando pues que V_λ y $V_{-\lambda}$ son no ortogonales respecto a f.

Consideremos en L el elemento $h^0=\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha$, se tiene que $h^0=\sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha h_\alpha$, donde los a_α son enteros ≥ 1. Sean $(b_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, $(c_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ familias de escalares tales que $b_\alpha c_\alpha=a_\alpha$ $\forall\alpha\in\Delta$. Pongamos $x=\sum_{\alpha\in\Delta} b_\alpha e_\alpha$, $y=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha e_{-\alpha}$, entonces tenemos que $[h^0\ x]=2x$, $[h^0\ y]=-2y$, $[x\ y]=-h^0$; por tanto el espacio vectorial S engendrado por $\{x, y, h^0\}$ es una subálgebra de L y además es un álgebra de Lie isomorfa a A_1. Observamos que la involución σ restringida a S es tal que $\sigma(S)\subset S$ en los casos considerados en la hipótesis. Consideramos V como un S-módulo, entonces los elementos de V_{λ_i} son de peso $\lambda_i(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)$ de tal manera que si λ_j es tal que $V_{\lambda_j}\neq 0$ y λ_j es distinto de λ y $-\lambda$, entonces $-\lambda<\lambda_j<\lambda$ y por tanto se tiene que $-m=-\lambda(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)<\lambda_j(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)<\lambda(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)=m$. Sea G la componente isotípica de tipo V(m) del S-módulo V. Resulta que G es de longitud 1 y contiene a V_λ y a $V_{-\lambda}$ de tal manera que como V_λ y $V_{-\lambda}$ eran no ortogonales respecto a f, resultará que la restricción de f a G es no nula y por tanto f es una forma definida en el S-módulo simple G donde S es un álgebra de Lie isomorfa a A_1. Aplicamos ahora el Teorema 3.3.1. En el caso de que la involución σ sea tal que $\forall\alpha\in\Delta$, $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces la restricción de f a G será simétrica con lo que todo elemento de B_σ será simétrico. En el caso de que la involución sea el Opuesto, entonces si m es par la restricción de f a G es simétrica y por tanto todo elemento de B_σ será simétrico; si m es impar, la restricción de f a G será antisimétrica y por tanto todo elemento de B_σ será antisimétrico.

CASO $\sigma_{|H}=id$ (Involución Transposición)

TEOREMA 3.4.4.- Sea L una K-álgebra de Lie simple y σ una involución Transposición definida en L. Sea V un L-módulo simple de dimensión finita de peso máximo λ y vector maximal v^+, si f es una forma bilineal no degenerada e invariante definida en V, entonces f viene caracterizada por el valor $f(v^+,v^+)$.

DEMOSTRACION:

Sean v y w vectores de V pertenecientes a los espacios peso V_{λ_i} y V_{λ_j} respectivamente, entonces de la ecuación (* * *) obtenemos que $(\lambda_i(h)-\lambda_j(h))f(v,w)=0$. Luego si $f(v,w)\neq 0$, se llega a que $\lambda_i(h)=\lambda_j(h)$ para todo h de H. Por tanto $\lambda_i=\lambda_j$, es decir v y w están en el mismo espacio peso.

Como $V=\bigoplus_{\lambda_i\in\Lambda} V_{\lambda_i}$, tomando una base de cada espacio peso, la unión de todas ellas es una base de V. Al ser λ el peso máximo de V, entonces el espacio peso V_λ es tal que $\dim V_\lambda=1$.

Sea $V=V_\lambda\oplus V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_r}$ con bases respectivas $B_{V_\lambda}=\{v^+\}$ $B_{V_{\lambda_1}}=\{v_{11},\ldots,v_{1t}\};\ldots;\ B_{V_{\lambda_r}}=\{v_{r1},\ldots,v_{rm}\}$.

Puesto que si $\lambda_i\neq\lambda_j$ es $f(v_{is},v_{jn})=0$, entonces la matriz asociada a f respecto a la base $B_V=B_{V_\lambda}\cup B_{V_{\lambda_1}}\cup\ldots\cup B_{V_{\lambda_r}}$ es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \underset{1\times 1}{f(v^+,v^+)} & & & \\ & \underset{t\times t}{f(v_{1s},v_{1n})} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underset{m\times m}{f(v_{rs},v_{rn})} \end{pmatrix}$$

Sean v y w dos vectores cualesquiera pertenecientes al mismo espacio peso. Por ser $v\in V$ entonces $v=y_{\beta_1}^{i_1}\cdot y_{\beta_2}^{i_2}\ldots y_{\beta_m}^{1_m}v^+$ y por tanto $f(v,w)=f(y_{\beta_1}^{i_1}\cdot y_{\beta_2}^{i_2}\ldots y_{\beta_m}^{i_m}v^+,w)=f(v^+,\ \sigma(y_{\beta_m}^{i_m})\ldots\ \sigma(y_{\beta_2}^{i_2}).\ \sigma(y_{\beta_1}^{i_1})w)$.

Si $f(v,w)\neq 0$ entonces $\sigma(y_{\beta_m}^{i_m})\ldots\sigma(y_{\beta_2}^{i_2}).\sigma(y_{\beta_1}^{i_1})w$ pertenece al espacio peso $V_\lambda=Kv^+$ por lo visto anteriormente, es decir, $\sigma(y_{\beta_m}^{i_m})\ldots\sigma(y_{\beta_1}^{i_1})w$ es proporcional a v^+. Llegamos a que $f(v,w)=cf(v^+,v^+)$ con $c\in K$.

Por tanto observando la matriz asociada a f respecto a la base B_V se tiene que la primera caja consta del valor $f(v^+,v^+)$ y las demás cajas, cuyo orden dependen de la dimensión de los espacios peso correspondiente, son tales que los elementos de dichas submatrices serán siempre proporcionales a $f(v^+,v^+)\in K$. La forma (V,f) donde V es un L-módulo simple de dimensión finita de peso máximo λ y vector maximal v^+ viene caracterizada por el elemento $f(v^+,v^+)\in K$. Observemos que si f es antisimétrica, $f(v^+,v^+)=0$. Consecuentemente $W_{-1}(L)=\phi$ si se considera definida en L una involución Transposición.

PROPOSICION 3.4.5.- Sea L una K-álgebra de Lie simple y σ una involución Transposición definida en L. Si V es un L-módulo simple de dimensión finita y peso máximo λ , entonces cualquier par de formas bilineales no degeneradas e invariantes, respecto a la involución σ, definidas en V son proporcionales y todas ellas son simétricas.

DEMOSTRACION:

Sean f_1 y f_2 dos formas bilineales no degeneradas e invariantes respecto a la involución σ definidas en V. Entonces por el Teorema anterior, $f_1(v^+,v^+)=a_1\neq 0$ y $f_2(v^+,v^+)=a_2\neq 0$ siendo $V_\lambda=\langle v^+\rangle$. Por tanto $f_2(v^+,v^+)=(a_2/a_1)f_1(v^+,v^+)$. Si consideramos un espacio peso cualquiera V_{λ_i} y si $v,w\in V_{\lambda_i}$ son tales que $f_1(v,w)\neq 0$, entonces se tiene $f_1=(v,w)=f_1(v^+,aw)\neq 0$ con $a\in U(L)$ con lo que $aw\in V_\lambda$ y por tanto

$aw=k_1v^+$, es decir $f_1(v,w)=f_1(v^+,aw)=f_1(v^+,k_1v^+)=k_1f_1(v^+,v^+)=k_1a_1$ con $k_1\in K^*$. Por otro lado $f_2(v,w)=f_2(v^+,aw)=f_2(v^+,k_1v^+)=k_1f_2(v^+,v^+)=$ $=k_1(a_2/a_1)f_1(v^+,v^+)=(a_2/a_1)k_1f_1(v^+,v^+)=(a_2/a_1)f_1(v,w)$. Luego $f_2=(a_2/a_1)f_1$.

Consideremos $f:V\times V\text{--->}K$ una forma bilineal no degenerada e invariante. La forma f se descompone como $f=f_s+f_a$ donde f_s y f_a son formas bilineales simétricas y antisimétricas, respectivamente, y ambas invariantes. Teniendo en cuenta otra vez el Teorema anterior, cualquier forma viene caracterizada por el valor $f(v^+,v^+)\in K$. Luego $f(v^+,v^+)=f_s(v^+,v^+)$ por ser $f_a(v^+,v^+)=0$ y por tanto $f=f_s$.

Gracias otra vez a los resultados obtenidos con las involuciones en $\mathbf{A}_1$ del Párrafo anterior y al resultado del Teorema 3.4.4, podemos adaptar la demostración de (5, 8.7.5) hecha para la involución el Opuesto al caso de la involución Transposición.

PROPOSICION 3.4.6.- Sea L una K-álgebra de Lie simple y σ una involución Transposición definida en L. Si V es un L-módulo simple de dimensión finita de peso máximo λ y B_σ es el espacio vectorial de las formas bilineales invariantes, respecto a la involución σ, definidas en V, entonces B_σ es de dimensión 1 y todo elemento no nulo de B_σ es no degenerado y simétrico.

DEMOSTRACION:

Sea $f\in B_\sigma$, por Teorema 3.2.6 todo L-módulo simple es autodual, entonces V es isomorfo a V^*_σ y por tanto si $f\neq 0$, f es no degenerada.

Al ser V isomorfo a V^*_σ, entonces el espacio vectorial B_σ

es isomorfo a $\mathrm{Hom}_L(V,V_\sigma^*)$ y por tanto isomorfo a $\mathrm{Hom}_L(V,V)$ que es de dimensión 1. Luego $\dim B_\sigma = 1$. Supongamos f no nulo de B_σ y consideremos la forma bilineal $f_1(x,y)=f(y,x)$, $\forall x,y\in V$, que claramente es invariante respecto a σ, entonces por Proposición anterior existe un $c\in K$ tal que $\forall x,y\in V$ se tiene $f_1(x,y)=cf(x,y)$. Entonces $f(y,x)=f_1(x,y)=$ $=cf(x,y)=cf_1(y,x)=c^2f(y,x)$ es decir $c=\pm 1$ y por tanto toda forma no nula de B_σ es simétrica o antisimétrica. Por Teorema 3.4.4 f viene caracterizada por el valor $f(v^+,v^+)$ siendo $V_\lambda = \langle v^+\rangle$, luego $V_\lambda \cap V_\lambda^\perp = \{0\}$ respecto a f. Consideremos en L el elemento $h^0 = \sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha$, se tiene que $h^0 = \sum_{\alpha\in\Delta} a_\alpha h_\alpha$ donde los a_α son enteros $\geqslant 1$. Sean $(b_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, $(c_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$, familias de escalares tales que $b_\alpha c_\alpha = a_\alpha$ $\forall\alpha\in\Delta$. Pongamos $x=\sum_{\alpha\in\Delta} b_\alpha e_\alpha$, $y=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha e_{-\alpha}$, entonces tenemos que $[h^0\ x]=2x$, $[h^0\ y]=-2y$, $[x\ y]=-h^0$, por tanto el espacio vectorial S engendrado por $\{x,y,h^0\}$ es una subálgebra de L y además es un álgebra de Lie isomorfa a A_1. Observamos que la involución Transposición σ es tal que $\sigma(h^0)=h^0$, $\sigma(x)=y$. Consideramos V como un S-módulo, entonces los elementos de V_{λ_i} son de peso $\lambda_i(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)$ de tal manera que si λ_j es tal que $V_{\lambda_j}\neq 0$ y $\lambda_j\neq\lambda$, se tiene que $\lambda_j<\lambda$ y por tanto $\lambda_j(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)<\lambda(\sum_{\alpha\in\Phi^+} h_\alpha)=m$. Sea G la componente isotípica de tipo $V(m)$ del S-módulo V, entonces G contiene a V_λ de tal manera que como $V_\lambda\cap V_\lambda^\perp=\{0\}$ respecto a f, se tiene que la restricción de f a G es no nula y por tanto f es una forma definida en el S-módulo simple G. Aplicamos ahora el Teorema 3.3.1 y puesto que $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=e_{-\alpha}$, entonces la restricción de f a G será simétrica con lo que todo elemento de B_σ es simétrico.

PARRAFO 5.- ESTUDIO DE LAS COMPONENTES ISOTIPICAS DEL GRUPO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE SIMPLE CON INVOLUCIONES $\sigma|_H = \pm id$

En el Párrafo 1 de este Capítulo hemos descompuesto el grupo de Witt de un álgebra de Lie simple en suma directa de subgrupos, sus componentes isotípicas, $W_\varepsilon(L)=\oplus_N W_\varepsilon(L)_N$ donde N recorre todos los L-módulos simples autoduales.

En el Párrafo 2 hemos detectado, para cada involución $\sigma|_H=\pm id$, los L-módulos simples autoduales respecto a σ.

En el Párrafo 3 hemos determinado las formas sobre módulos simples para el álgebra de Lie A_1 con involución.

En el Párrafo 4 determinamos las formas sobre L-módulos simples donde L es un álgebra de Lie simple con involuciones $\sigma|_H=\pm id$.

En este Párrafo vamos a estudiar las componentes isotípicas $W_\varepsilon(L)_N$ donde L es un álgebra de Lie simple con involuciones $\sigma|_H=\pm id$ y N es un L-módulo simple autodual respecto a las involuciones consideradas. Llamaremos λ_0 al peso máximo de N y el número m será $\sum_{\alpha\in\Phi^+} \lambda_0(h_\alpha)$. Sea entonces (V,f) una ε-forma isotípica de tipo N y por tanto $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_r$ con $r\geqslant 1$ y $V_1\simeq N$ para todo $i=1,2,\ldots,r$.

Veamos primeramente para el caso general el siguiente

LEMA 3.5.1.- Sea L una K-álgebra de Lie simple con involución σ arbitraria y (V,f) una ε-forma donde V es un L-módulo isotípico. Consideremos una descomposición $V=V_1\oplus\ldots\oplus V_r$ de V donde

los V_i son L-módulos simples e isomorfos entre si. Si para cada i,j llamamos $f_{ij}: V_i \times V_j \dashrightarrow K$ la aplicación deducida de f, entonces existe una base de V de tal manera que la submatriz correspondiente a f_{ij} de la matriz asociada a f respecto a esta base es la matriz asociada a una forma bilineal invariante sobre V_i.

DEMOSTRACION:

Sea φ un L-isomorfismo de V_i en V_j. Tomemos una base arbitraria $\{b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ en V_j. Llamemos $a_k = \varphi^{-1}(b_k)$ para todo $k=1,2,\ldots,s$. Claramente $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ es una base de V_i. En las otras componentes simples tomemos bases arbitrarias. La unión de todas estas bases es una base de V. Sea A la matriz asociada a f respecto a la base de V

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{ir} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rj} & \cdots & A_{rr} \end{bmatrix}$$

La submatriz A_{ij} correspondiente a la aplicación $f_{ij}: V_i \times V_j \dashrightarrow K$ es la matriz asociada a una cierta forma bilineal invariante $g: V_i \times V_i \dashrightarrow K$ definida como $g(x,y) = f_{ij}(x, \varphi(y))$ donde $x,y \in V_i$. En efecto, claramente g es bilineal. Comprobemos que es invariante. Para todo a de L se tiene $g(ax,y) = f_{ij}(ax, \varphi(y)) = f(ax, \varphi(y)) = f(x, \sigma(a)\varphi(y)) = f(x, \varphi(\sigma(a)y)) = f_{ij}(x, \varphi(\sigma(a)y)) = g(x, \sigma(a)y)$.

La matriz asociada a g respecto a la base $\{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$ de V_i es precisamente A_{ij} pues $g(a_m, a_n) = f_{ij}(a_m, \varphi(a_n)) = f_{ij}(a_m, b_n)$ que es el elemento de lugar (m,n) de A_{ij}.

CASO $\sigma_{|H}=-id$

Supongamos definida en L la involución $\sigma_{|H}=-id$ y comenzamos estudiando los casos $r=1$ y $r=2$ y con ello resolveremos el caso general para el número de componentes r de V cuando la involución sea una de estos dos tipos:

a) Que $\forall\alpha\in\Delta$, sea $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$

b) Que $\forall\alpha\in\Delta$, sea $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$ (involución el Opuesto)

Sea $r=1$, entonces

TEOREMA 3.5.2.- Sean L un álgebra de Lie simple con involución σ tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$ y N un L-módulo simple autodual. Entonces:

a) Si σ es tal que $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces hay solo una +1-forma isotípica (V,f) de tipo N con V simple (necesariamente no neutra).

b) Si σ es tal que $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$, entonces hay solo una +1-forma isotípica (V,f) de tipo N con V simple (necesariamente no neutra) si y solo si m es par.

DEMOSTRACION:

La existencia está asegurada ya que por ser N autodual existe un isomorfismo $\varphi:N\dashrightarrow N^*_\sigma$. Por Proposición 3.1.3 existe la ε-forma no neutra (N,f_N^φ). Según Teorema 3.4.3, (N,f_N^φ) es una +1-forma no neutra, independientemente de m.

Probemos la unicidad. Para ello supongamos que existen dos +1-formas (V,f) y (W,g) isotípicas de tipo N con V y W simples.

Considero los L-isomorfismos $\varphi_1: N \dashrightarrow V$; $\varphi_2: N \dashrightarrow W$. A partir de la forma bilineal f definimos $\bar{f}: N\times N \dashrightarrow K$ tal que $\bar{f}(x,y)=f(\varphi_1(x),\varphi_1(y))$ y de esta manera $(V,f)\simeq(N,\bar{f})$. A partir de g definimos $\bar{g}: N\times N \dashrightarrow K$ tal que $\bar{g}(x,y)=g(\varphi_2(x),\varphi_2(y))$ y $(W,g)\simeq(N,\bar{g})$. Por Proposición 3.4.2 $\bar{f}=c\bar{g}$ con $c\in K$. Nos preguntamos si $(N,\bar{f})\sim(N,\bar{g})$. Sea la descomposición $N=N_{\lambda_0}\oplus N_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus N_{\lambda_r}$ de N en espacios peso relativa a adH y tomemos bases en cada espacio peso que las denotaremos por: $B_{N_{\lambda_0}}=\{v_{00}\}$;

$B_{N_{\lambda_1}}=\{v_{11},\ldots,v_{1t}\}$; $B_{N_{\lambda_2}}=\{v_{21},\ldots,v_{2s}\};\ldots;$ $B_{N_{\lambda_r}}=\{v_{r1},\ldots,v_{rn}\}$.

Entonces $B_N=B_{N_{\lambda_0}}\cup B_{N_{\lambda_1}}\cup\ldots\cup B_{N_{\lambda_r}}$ es una base de N. Consideremos las matrices asociadas a $\bar{f}$ y $\bar{g}$ respecto a B_N y sean respectivamente F y G. Al ser $\bar{f}=c\bar{g}$, entonces $F=cG$.

Consideremos la +1-forma $(N\oplus N,\bar{f}-\bar{g})$ y veamos que es neutra. Para ello tomemos el K-espacio vectorial M con base $B_M=\{(v_{00}/\sqrt{c},v_{00}),$ $(v_{11}/\sqrt{c},v_{11}),\ldots,(v_{1t}/\sqrt{c},v_{1t}),(v_{21}/\sqrt{c},v_{21}),\ldots,(v_{rn}/\sqrt{c},v_{rn})\}$. Tenemos que $2\dim M=\dim(N\oplus N)$. Comprobemos que M es un L-submódulo de $N\oplus N$. Consideremos la descomposición $L=H\oplus L_\alpha\oplus L_{-\alpha}\oplus\ldots\oplus L_\gamma\oplus L_{-\gamma}$ de L en espacios raices relativa a la subálgebra de Cartán H. Sea a un elemento arbitrario de L, escribamos $a=h+t_\alpha+t_{-\alpha}\ \ldots+t_\gamma+t_{-\gamma}$ donde $h\in H$ y $t_\alpha\in L_\alpha$, Entonces para todo $(v_{ij}/\sqrt{c},v_{ij})\in B_M$ encontramos que

$$a(v_{ij}/\sqrt{c},v_{ij})=(a(v_{ij}/\sqrt{c}),av_{ij})=((h+t_\alpha+\ldots+t_{-\gamma})(v_{ij}/\sqrt{c}),(h+t_\alpha+\ldots+t_{-\gamma})v_{ij})=$$

$$=((1/\sqrt{c})(hv_{ij}+t_\alpha v_{ij}+\ldots+t_{-\gamma}v_{ij}),hv_{ij}+t_\alpha v_{ij}+\ldots+t_{-\gamma}v_{ij})=$$

$$=((1/\sqrt{c})hv_{ij},hv_{ij})+((1/\sqrt{c})t_\alpha v_{ij},t_\alpha v_{ij})+\ldots+((1/\sqrt{c})t_{-\gamma}v_{ij},t_{-\gamma}v_{ij})=(*)$$

Como v_{ij} pertenece al espacio peso N_{λ_i}, entonces $hv_{ij}=\lambda_i(h)v_{ij}\in N_{\lambda_i}$.

Además $t_\alpha v_{ij}=\mu_1 v_{k1}+\mu_2 v_{k2}+\dots+\mu_l v_{kl}$ siendo $\{v_{k1},v_{k2},\dots,v_{kl}\}$ la base tomada en el espacio peso $N_{\lambda_i-\alpha}$. Por tanto (*) sería una combinación lineal de los elementos de B_M con lo que M es un L-submódulo de $N\oplus N$. Veamos que $(\bar{f}-\bar{g})_{|M\times M}=0$. En efecto, $(\bar{f}-\bar{g})((v_{ij}/\sqrt{c},v_{ij}),(v_{pq}/\sqrt{c},v_{pq}))=$ $=\bar{f}(v_{ij}/\sqrt{c},v_{pq}/\sqrt{c})-\bar{g}(v_{ij},v_{pq})=(1/c)c\bar{g}(v_{ij},v_{pq})-\bar{g}(v_{ij},v_{pq})=0$. Por tanto M es un metabolizador de $(N\oplus N,\bar{f}-\bar{g})$, de donde $(N\oplus N,\bar{f}-\bar{g})$ es una +1-forma neutra. Luego $(N,\bar{f})\sim(N,\bar{g})$. Por tanto solo hay una +1-forma isotípica de tipo N la cual es necesariamente no neutra por ser N simple.

<u>NOTA</u>

Por el Teorema anterior todas las formas naturales f_N^φ que lleva el L-módulo simple autodual N (Confrontar Proposición 3.1.3) son equivalentes. Además ellas son las formas a las que se refiere el enunciado del Teorema anterior. La llamaremos f_N.

Estudiamos a continuación el caso $r=2$

TEOREMA 3.5.3.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$ y N un L-módulo simple autodual. Entonces

a) Si σ es tal que $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces toda +1-forma (V,f) isotípica de tipo N con $V=V_1\oplus V_2$ es neutra.

b) Si σ es tal que $\forall\alpha\in\Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$ y m es par, entonces toda +1-forma (V,f) isotípica de tipo N con $V=V_1\oplus V_2$ es neutra.

DEMOSTRACION:

Tomemos una base $B_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_r\}$ de V_1 formada por vectores peso de los espacios peso donde v_1 es de peso máximo λ_0 y v_r de peso mínimo $-\lambda_0$. Sea $\varphi_1:V_1 \dashrightarrow V_2$ un L-isomorfismo. Consideremos la base de V_2 siguiente $B_2=\{\varphi_1(v_1),\ldots,\varphi_1(v_r)\}$. Notemos que V_1 y V_2 tienen el mismo conjunto de pesos y los correspondientes espacios peso tienen la misma dimensión; además φ_1 conserva los espacios peso, pues si $v_j \in B_1$ es de peso α, entonces $\varphi_1(v_j)\in B_2$ también es de peso α. En efecto, $h\,\varphi_1(v_j)=\varphi_1(hv_j)=\varphi_1(\alpha(h)v_j)=\alpha(h)\,\varphi_1(v_j)$. Escribamos $\varphi_1(v_i)=w_i$. Tenemos que $B_2=\{w_1,w_2,\ldots,w_r\}$ donde w_1 es de peso máximo y w_r es de peso mínimo. Es evidente que $\{v_1,\ldots,v_r,w_1,\ldots,w_r\}$ es una base de V. La aplicación $f_{11}:V_1 \times V_1 \dashrightarrow K$ deducida de f es una forma bilineal +1-simétrica invariante sobre el L-módulo V_1. Si $f_{11}=0$, entonces la +1-forma (V,f) es neutra pues V_1 es claramente un metabolizador. Por tanto podemos suponer $f_{11}\neq 0$ y por Teorema 3.4.1 se deduce que $f(v_1,v_r)\neq 0$ y podemos elegir v_1 y v_r de forma que $f(v_1,v_r)=1$. Análogamente podemos suponer que la aplicación $f_{22}:V_2 \times V_2 \dashrightarrow K$ restricción de f, es no nula y otra vez por Teorema 3.4.1 tenemos que $f(w_1,w_r)\neq 0$. Llamemos $f(w_1,w_r)=\mu$. Tomemos ahora la matriz

$$f_{12}=\begin{pmatrix} f(v_1,w_1) & \ldots & f(v_1,w_r) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ f(v_r,w_1) & \ldots & f(v_r,w_r) \end{pmatrix}$$

Si $f_{12}=0$, entonces veamos que la +1-forma (V,f) es neutra. Consideremos el subespacio vectorial M de V con base $B_M=\{v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1, v_2-(\sqrt{-1/\mu})w_2,\ldots,v_r-(\sqrt{-1/\mu})w_r\}$. Tenemos que $2\dim M=\dim V$. Comprobemos que M es un L-submódulo de V. Consideremos la descomposición $L=H\oplus L_\alpha\oplus L_{-\alpha}\oplus\ldots\oplus L_\gamma\oplus L_{-\gamma}$ de L en espacios raices relativa a la subálgebra de Cartán H. Consideremos a un elemento arbitrario de L, escribamos $a=h+t_\alpha+t_{-\alpha}+\ldots+t_\gamma+t_{-\alpha}$ donde $h\in H$ y $t_\alpha\in L_\alpha$. Entonces para todo elemento $v_i-(\sqrt{-1/\mu})w_i\in B_M$ se verifica que

$$a(v_i-(\sqrt{-1/\mu})w_i)=(h+t_\alpha+t_{-\alpha}+\ldots+t_\gamma+t_{-\gamma})v_i-(\sqrt{-1/\mu})(h+t_\alpha+t_{-\alpha}+\ldots+t_\gamma+t_{-\gamma})w_i.$$

Supongamos que v_i pertenece al espacio peso $V_{1_{\lambda_i}}$, análogamente w_i pertenecerá al espacio peso $V_{2_{\lambda_i}}$. Resulta que $hv_i=\lambda_i(h)v_i\in V_{1_{\lambda_i}}$. Además $t_\alpha v_i$ pertenece al espacio peso $V_{1_{\lambda_i-\alpha}}$ y por tanto será una combinación lineal de la base tomada en dicho espacio peso y así sucesivamente. Análogamente sucedería con w_i, es decir $t_\alpha w_i$ pertenecerá al espacio peso $V_{2_{\lambda_i-\alpha}}=\varphi_1(V_{1_{\lambda_i-\alpha}})$ y tendría igual combinación lineal que para $t_\alpha v_i$ pero respecto a la base tomada en dicho espacio peso. Es decir $a(v_i-(\sqrt{-1/\mu})w_i)$ sería una combinación lineal de los elementos de B_M y por tanto pertenece a M con lo que M es un L-submódulo de V. Calculemos $f(v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1,v_r-(\sqrt{-1/\mu})w_r)=f(v_1,v_r)-(\sqrt{-1/\mu})f(v_1,w_r)-(\sqrt{-1/\mu})f(w_1,v_r)+$ $+(-1/\mu)f(w_1,w_r)=f(v_1,v_r)-(1/\mu)f(w_1,w_r)=1-(1/\mu)\mu=0$. Hemos tenido en cuenta que para las involuciones consideradas en la hipótesis y por Teorema 3.4.3, f es simétrica, luego $f(w_1,v_r)=f(v_r,w_1)=0$. Ahora consideramos la aplicación $f_{|M}:M\times M\text{--->}K$, tenemos que $f_{|M}$ es una forma bilineal simétrica e invariante sobre M. Como M es un L-módulo simple con $v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1$ como vector de peso máximo, con $v_r-(\sqrt{-1/\mu})w_r$ como vector de peso mínimo y $h(v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1)=\lambda_0(h)(v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1)$, se tiene que $M \simeq N$ por tener iguales la dimensión y el peso máximo. Al ser $f(v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1, v_r-(\sqrt{-1/\mu})w_r)=0$, se deduce del Teorema 3.4.1 que $f_{|M}=0$. Por tanto M es un metabolizador de (V,f) y ésta es neutra. Podemos luego suponer que $f_{12}\neq 0$. Teniendo en cuenta la elección de la base de V y la demostración del Lema 3.5.1, deducimos que f_{12} es la matriz de la forma bilineal invariante $g: V_1 \times V_1 \dashrightarrow K$ definida como $g(x,y)=f_{12}(x,\varphi_1(y))$, donde $x,y \in V_1$, respecto a la base B_1. Considerando la Proposición 3.4.2 existe un $\delta \in K^*$ tal que $\delta f_{11}=f_{12}$. Tomemos ahora el subespacio vectorial P de V con base

$$B_P=\{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1,\dots,(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_r+w_r\}$$

Tenemos que $2\dim P=\dim V$. Se comprueba que P es un L-submódulo de V. Calculemos $f((-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1,(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_r+w_r)=(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})^2 f(v_1,v_r)+$ $+(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})f(v_1,w_r)+(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})f(w_1,v_r)+f(w_1,w_r)=0$. Hemos tenido en cuenta que: $f(v_1,v_r)=1$; $f(w_1,w_r)=\mu$; $f(v_1,w_r)=f_{12}(v_1,w_r)=f_{12}(v_1,\varphi_1(v_r))=$ $=g(v_1,v_r)=\delta f_{11}(v_1,v_r)=\delta$. Según la hipótesis y aplicando el Teorema 3.4.3, f es simétrica, luego $f(w_1,v_r)=f(v_r,w_1)=f_{12}(v_r,\varphi_1(v_1))=g(v_r,v_1)=\delta f_{11}(v_r,v_1)=$ $=\delta f_{11}(v_1,v_r)=\delta$. Como P es un L-módulo simple con $(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1$ como vector de peso máximo y con $(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_r+w_r$ como vector de peso mínimo y $f_{|P}$ es una forma bilineal invariante sobre P, deducimos del Teorema 3.4.1 que $f_{|P}=0$. Por tanto P es un metabolizador para (V,f). Consecuentemente (V,f) es neutra.

NOTA

Hemos visto en la demostración que si (V,f) es una +1-forma con $V=V_1\oplus V_2$ donde los V_i son L-módulos simples isomorfos, entonces en las bases del Teorema la matriz coordenada de f es del tipo

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \delta A \\ \hline \delta A & \mu A \end{array}\right] \quad \text{donde } A = \left[\begin{array}{c|c} 0 & f(v_1,v_r) \\ \hline & 0 \end{array}\right] \text{ del Teorema 3.4.1}$$

Esto da un método de construcción de +1-formas isotípicas con módulo soporte descompuesto en dos sumandos simples. Ahora tomamos un metabolizador M. Por el Teorema de Weyl podemos poner $V=M\oplus S$ para algún submódulo S. Luego f tiene una matriz del tipo $\left[\begin{array}{c|c} 0 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array}\right]$

Veamos el caso general para el número de componentes r de V

TEOREMA 3.5.4.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$ y N un L-módulo simple autodual. Sea (V,f) una +1-forma anisótropa e isotípica de tipo N. Entonces:

a) Si σ es tal que $\forall \alpha \in \Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$, entonces $V\simeq N$

b) Si σ es tal que $\forall \alpha \in \Delta$ es $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$, entonces $V\simeq N$ si y solo si m es par

DEMOSTRACION:

Cuando considere la involución σ del apartado b), es decir el Opuesto, supongo que m es par, y por tanto para esta involución como para la involución del apartado a) veamos que $V\simeq N$. En efecto: $V=V_1\oplus V_2\oplus\ldots\oplus V_r$ donde los V_i son L-módulos simples. Supongamos $r>1$. Consideremos la restricción $\bar{f}$ de f a $W=V_1\oplus V_2$. Tenemos que $(W,\bar{f})$ es una +1-forma por ser (V,f) anisótropa. Además $(W,\bar{f})$ es anisótropa por serlo (V,f). Como $W=V_1\oplus V_2$ y $V_1\simeq V_2$, por el Teorema anterior $(W,\bar{f})$ es neutra lo cual es una contradicción. Por tanto $r=1$ y así $V\simeq N$.

Consideremos ahora la involución el Opuesto y sea $V \simeq N$, entonces (V,f) es una $+1$-forma con V simple y por Teorema 3.4.3 se deduce que m tiene que ser par.

Hemos estudiado hasta ahora, en el apartado de involuciones $\sigma_{|H}=-id$, paralelamente las dos involuciones siguientes:

a) Involución σ tal que $\forall \alpha \in \Delta$, sea $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$

b) Involución σ tal que $\forall \alpha \in \Delta$, sea $\sigma(e_\alpha)=-e_\alpha$ (Opuesto)

lo cual nos permite obtener el resultado final del grupo de Witt de un álgebra de Lie simple con cada una de las involuciones anteriores.

TEOREMA 3.5.5.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$ y tal que $\forall \alpha \in \Delta$, $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$. Consideremos el grupo de Witt de L respecto de la involución σ. Entonces $W_{+1}(L)=\oplus_N W_{+1}(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales, además para un tal N se tiene que $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$. El conjunto $B=\{[(N,f_N)]/N=$L-módulo simple autodual, $f_N=$forma natural sobre N $\}$ es una base de $W_{+1}(L)$. El cardinal de B es igual al número de L-módulos simples autoduales.

DEMOSTRACION:

Hemos visto en Corolario de Proposición 3.1.2 que para todo L-módulo simple N que no sea autodual, es $W_{+1}(L)_N=\phi$. Según Teorema 3.1.9 se tiene que $W_{+1}(L)=\oplus_N W_{+1}(L)_N$ donde N recorre todos los L-módulos simples autoduales. Veamos que $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$ para todo L-módulo N autodual. En efecto, se C un elemento de $W_{+1}(L)_N$

distinto del cero. Por definición de $W_{+1}(L)_N$ tenemos que en C hay $+1$-formas isotípicas de tipo N. Según Teorema 3.1.6 en C hay una $+1$-forma anisótropa e isotípica, llamémosle (V,f). Por el Teorema anterior V debe ser isomorfo a N. Por Teorema 3.5.2 tenemos que todas las $+1$-formas no neutras sobre N son equivalentes. Deducimos entonces que $W_{+1}(L)_N$ tiene a lo sumo dos elementos, pues a lo sumo hay una $+1$-forma anisótropa e isotípica. Finalmente por Teorema 3.4.3 tenemos que existen formas bilineales simétricas invariantes, con la involución σ, no nulas sobre N. Como N es simple, deben ser no degeneradas y por tanto $+1$-formas anisótropas. Por tanto $W_{+1}(L)_N$ es un grupo de dos elementos, es decir $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$.

TEOREMA 3.5.6.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ tal que si H es una subálgebra de Cartán dejada invariante por σ, sea $\sigma_{|H}=-id$ y tal que $\forall \alpha \in \Delta$, $\sigma(e_\alpha)=e_\alpha$. Entonces $W_{-1}(L)=\emptyset$.

DEMOSTRACION:

Trivial teniendo en cuenta el Teorema 3.4.3.

TEOREMA 3.5.7.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ el Opuesto. Consideremos el grupo de Witt de L respecto a la involución σ. Entonces $W_{+1}(L)=\bigoplus_N W_{+1}(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales para los que el número $m=\sum_{\alpha\in\Phi^+}\lambda_0(h_\alpha)$ es par donde λ_0 es el peso máximo de N. Además se tiene que $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$ para un tal N. El conjunto $B=\{[(N,f_N)]/N=L$-módulo simple autodual con m par, f_N=forma natural sobre N$\}$ es una base de $W_{+1}(L)$. El cardinal

de B es igual al número de L-módulos simples autoduales con m par.

DEMOSTRACION:

Hemos visto que $W_{+1}(L)_N = \phi$ para todo L-módulo N que no sea autodual. Por Teorema 3.4.3, $W_{+1}(L)_N = \phi$ para todo L-módulo N autodual para el cual m es impar. Teniendo en cuenta el Teorema 3.1.9, $W_{+1}(L) = \oplus_N W_{+1}(L)_N$ donde N recorre los demás L-módulos simples autoduales. Veamos que $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$, para todo L-módulo N autodual con m par. En efecto, sea C un elemento de $W_{+1}(L)_N$ distinto del cero. Por definición de $W_{+1}(L)_N$ tenemos que en C hay +1-formas isotípicas de tipo N. Por Teorema 3.1.6 en C hay una +1-forma anisótropa e isotípica, llamémosle (V,f). Por el Teorema 3.5.4 V debe ser isomorfo a N. Por Teorema 3.5.2 tenemos que todas las +1-formas no neutras sobre N son equivalentes. Deducimos entonces que $W_{+1}(L)_N$ tiene a lo sumo dos elementos, pues a lo sumo hay una +1-forma anisótropa e isotípica. Finalmente por Teorema 3.4.3 tenemos que existen formas bilineales simétricas invariantes, con la involución el Opuesto, no nula sobre N. Como N es simple deben ser no degeneradas y por tanto +1-formas anisótropas. Por tanto $W_{+1}(L)_N$ es un grupo de dos elementos, es decir $W_{+1}(L)_N$ Z/2Z.

El caso $W_{-1}(L)$ con L simple dotada de la involución el Opuesto transcurre análogo a lo anterior, solo hay que cambiar par por impar y se obtiene el siguiente

TEOREMA 3.5.8.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ el Opuesto. Consideremos el grupo de Witt de L respecto a la involución σ. Entonces $W_{-1}(L)=\bigoplus_{N} W_{-1}(L)_N$ recorriendo N los L-módulos simples autoduales para los que el número $m=\sum_{\alpha\in\Phi^+} \lambda_0(h_\alpha)$ es impar donde λ_0 es el peso máximo de N. Además para un tal N se tiene que $W_{-1}(L)_N \simeq Z/2Z$. El conjunto $B=\{[(N,f_N)]/N=$L-módulo simple autodual con m impar, f_N=forma natural sobre N $\}$ es una base de $W_{-1}(L)$. El cardinal de B es igual al número de L-módulos simples autoduales con m impar.

CASO $\sigma_{|H}=id$ (Involución Transposición)

Supongamos ahora la involución Transposición definida en L y comenzamos también estudiando los casos $r=1$ y $r=2$ y con ello resolveremos el caso general para el número de componentes r de V.

TEOREMA 3.5.9.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución σ =Transposición y N un L-módulo simple de dimensión finita. Entonces hay solo una +1-forma (V,f) isotípica de tipo N con V simple (necesariamente no neutra).

DEMOSTRACION:

La existencia está asegurada pues según Teorema 3.2.5 todo L-módulo simple N es autodual, si $\varphi: N \dashrightarrow N_\sigma^*$ es un isomorfismo, entonces por Proposición 3.1.3, existe la ε-forma no neutra (N,f_N^φ) y teniendo en cuenta la Proposición 3.4.5 (N,f_N^φ) es una +1-forma no neutra.

Veamos la unicidad. Supongamos que existen dos +1-formas (V,f) y (W,g) isotípicas de tipo N con V y W simples. Considero los L-isomorfismos $\varphi_1:N\dashrightarrow V$; $\varphi_2:N\dashrightarrow W$. A partir de la forma bilineal f definimos la forma $\bar{f}:N\times N\dashrightarrow K$ tal que $\bar{f}(x,y)=f(\varphi_1(x),\varphi_1(y))$ y de esta manera se tiene $(V,f)\simeq(N,\bar{f})$. A partir de g definimos la forma $\bar{g}:N\times N\dashrightarrow K$ tal que $\bar{g}(x,y)=g(\varphi_2(x),\varphi_2(y))$ y $(W,g)\simeq(N,\bar{g})$. Por Proposición 3.4.5 $\bar{f}=c\bar{g}$ con $c\in K$. Nos preguntamos si $(N,\bar{f})\sim(N,\bar{g})$. Consideremos la descomposición $N=N_{\lambda_0}\oplus N_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus N_{\lambda_r}$ de N en espacios peso relativa a adH y tomemos bases en cada espacio peso que las denotaremos por

$B_{N_{\lambda_0}}=\{v_{00}\}$; $B_{N_{\lambda_1}}=\{v_{11},\ldots,v_{1t}\}$;...; $B_{N_{\lambda_r}}=\{v_{r1},\ldots,v_{rn}\}$. Entonces es

$B_N=B_{N_{\lambda_0}}\cup B_{N_{\lambda_1}}\cup\ldots\cup B_{N_{\lambda_r}}$ una base de N. Consideremos las matrices asociadas a $\bar{f}$ y $\bar{g}$ respecto a B_N y sean respectivamente F y G. Al ser $\bar{f}=c\bar{g}$, entonces $F=cG$. Consideremos la +1-forma $(N\oplus N,\bar{f}-\bar{g})$ y veamos que es neutra. Para ello tomamos el K-espacio vectorial M con base

$B_M=\{(v_{00}/\sqrt{c},v_{00}),(v_{11}/\sqrt{c},v_{11}),\ldots,(v_{1t}/\sqrt{c},v_{1t}),\ldots,(v_{rn}/\sqrt{c},v_{rn})$.

Como en Teorema 3.5.2, se demuestra que M es un L-módulo simple con vector de peso máximo $(v_{00}/\sqrt{c},v_{00})$ y con peso máximo λ_0 pues $h(v_{00}/\sqrt{c},v_{00})=\lambda_0(h)(v_{00}/\sqrt{c},v_{00})$. Además M es un metabolizador de $(N\oplus N,\bar{f}-\bar{g})$ pues $2\dim M=\dim(N\oplus N)$ y $(\bar{f}-\bar{g})_{|M}=0$ pues al ser M simple, $(\bar{f}-\bar{g})_{|M}$ viene caracterizada según Teorema 3.4.4 por el valor

$(\bar{f}-\bar{g})((v_{00}/\sqrt{c},v_{00}),(v_{00}/\sqrt{c},v_{00}))=(1/c)\bar{f}(v_{00},v_{00})-\bar{g}(v_{00},v_{00})=$

$=(1/c)c\bar{g}(v_{00},v_{00})-\bar{g}(v_{00},v_{00})=0$. Luego $(N,\bar{f})\sim(N,\bar{g})$, y por tanto $(V,f)\sim(W,g)$. Quiere esto decir que solo hay una +1-forma isotípica de tipo N, la cual es necesariamente no neutra, por ser N simple.

NOTA

Por el Teorema anterior todas las formas naturales f_N^{φ} que lleva el L-módulo simple N (Ver Proposición 3.1.3) son equivalentes y es la forma a la que se refiere el enunciado del Teorema anterior. La llamamos f_N.

Estudiamos a continuación el caso $r=2$

TEOREMA 3.5.10.-Sea L un álgebra de Lie simple con involución Transposición y N un L-módulo simple de dimensión finita, entonces toda +1-forma (V,f) isotípica de tipo N con $V=V_1 \oplus V_2$ es neutra.

DEMOSTRACION:

Tomemos una base de V_1 formada por vectores peso de los espacios peso $B_1=\{v_1,v_2,\dots,v_r\}$ donde v_1 es de peso máximo λ_0. Sea $\varphi_1:V_1 \dashrightarrow V_2$ un L-isomorfismo. Consideremos la base B_2 de V_2 siguiente $B_2=\{\varphi_1(v_1),\varphi_1(v_2),\dots,\varphi_1(v_r)\}$. Hay que notar que V_1 y V_2 tienen el mismo conjunto de pesos y los correspondientes espacios peso tienen la misma dimensión, además φ_1 conserva los espacios peso. Escribamos $\varphi_1(v_i)=w_i$, entonces $B_2=\{w_1,\dots,w_r\}$ donde w_1 es de peso máximo λ_0. Es evidente que $\{v_1,\dots,v_r,w_1,\dots,w_r\}$ es una base de V.

La aplicación $f_{11}:V_1 \times V_1 \dashrightarrow K$ deducida de f es una forma bilineal +1-simétrica invariante sobre el L-módulo V_1. Si $f_{11}=0$, entonces la +1-forma (V,f) es neutra pues V_1 es claramente un metabolizador. Por tanto supongamos $f_{11}\neq 0$ y por Teorema 3.4.4 se deduce que $f(v_1,v_1)\neq 0$ y podemos elegir el vector v_1 de forma que $f(v_1,v_1)=1$. Análogamente podemos suponer que la aplicación $f_{22}:V_2 \times V_2 \dashrightarrow K$ restricción de f es no nula y otra vez por Teorema 3.4.4 tenemos que $f(w_1,w_1)\neq 0$. Llamemos $f(w_1,w_1)=\mu$. Tomemos ahora la matriz

$$f_{12}=\begin{bmatrix} f(v_1,w_1)\ldots & f(v_1,w_r) \\ \ldots & \ldots \\ f(v_r,w_1)\ldots & f(v_r,w_r) \end{bmatrix}$$

Si $f_{12}=0$, entonces veamos que la +1-forma (V,f) es neutra. Consideremos el subespacio vectorial M de V con base B_M $\{v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1, v_2-(\sqrt{-1/\mu})w_2,\ldots,v_r-(\sqrt{-1/\mu})w_r\}$. Se tiene que $2\dim M=\dim V$. Igual que en Teorema 3.5.3 se tiene que M es un L-submódulo de V. Calculemos $f(v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1, v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1)=f(v_1,v_1)-$ $-(\sqrt{-1/\mu})f(v_1,w_1)-(\sqrt{-1/\mu})f(w_1,v_1)-(1/\mu)f(w_1,w_1)=1-(1/\mu)\mu=0$. Si consideramos la aplicación $f_{|M}:M\times M \dashrightarrow K$ tenemos que $f_{|M}$ es una forma bilineal simétrica invariante sobre M, donde M es un L-módulo simple con $v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1$ como vector maximal siendo λ_0 el peso máximo de M. Notar que $M\simeq N$. Al ser $f(v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1, v_1-(\sqrt{-1/\mu})w_1)=0$ deducimos otra vez por Teorema 3.4.4 que $f_{|M}=0$ y por tanto M es un metabolizador de (V,f) y ésta sería neutra.

Podemos luego suponer que $f_{12}\neq 0$. Teniendo en cuenta la elección de la base de V y la demostración del Lema 3.5.1 deducimos que f_{12} es la matriz coordenada de la forma bilineal invariante $g:V_1\times V_1 \dashrightarrow K$ definida como $g(x,y)=f_{12}(x,\varphi_1(y))$, donde $x,y\in V_1$, en la base B_1. Aplicando la

Proposición 3.4.5 tenemos que $\delta f_{11}=f_{12}$ con algún $\delta\in K^{*}$. Tomemos ahora el subespacio vectorial P de V con base $B_P=\{(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1,\dots,(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_r+w_r\}$. Tenemos que $2\dim P=\dim V$. Se comprueba que P es un L-submódulo de V. Calculemos

$f((-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1,(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1)=(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})^2 f(v_1,v_1)+$

$+(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})f(v_1,w_1)+(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})f(w_1,v_1)+f(w_1,w_1)=(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})^2+$

$+2\delta(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})+\mu=0$. Hemos tenido en cuenta que:

$f(v_1,v_1)=1$; $f(w_1,w_1)=\mu$; $f(v_1,w_1)=f_{12}(v_1,w_1)=f_{12}(v_1,\varphi_1(v_1))=g(v_1,v_1)=$

$=\delta f_{11}(v_1,v_1)=f(w_1,v_1)=\delta$. Ahora como P es un L-módulo simple con $(-\delta+\sqrt{\delta^2-\mu})v_1+w_1$ como vector de peso máximo y $f_{|P}$ es una forma bilineal invariante sobre P, por Teorema 3.4.4 se tiene que $f_{|P}=0$. Luego P es un metabolizador de (V,f). Consecuentemente (V,f) es neutra.

NOTA

Hemos visto en la demostración que si (V,f) es una +1-forma con $V=V_1\oplus V_2$ donde los V_i son L-módulos simples isomorfos, entonces en las bases del Teorema la matriz coordenada de f es del tipo

$$\begin{pmatrix} A & \delta A \\ \delta A & \mu A \end{pmatrix} \quad \text{donde } A=\left(\begin{array}{c|c} f(v_1,v_1) & 0 \\ \hline 0 & \ddots \end{array}\right) \text{ del Teorema 3.4.4}$$

Esto da un método de construcción de +1-formas isotípicas con módulo soporte descompuesto en dos sumandos simples. Ahora tomamos un metabolizador M y por Teorema de Weyl $V=M\oplus S$ para algún submódulo S. Luego f tiene una matriz del tipo $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array}\right)$

Veamos el caso general para el número de componentes r de V

TEOREMA 3.5.11.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución Transposición y N un L-módulo simple de dimensión finita. Si (V,f) es una +1-forma anisótropa e isotípica de tipo N, entonces $V \simeq N$.

DEMOSTRACION:

Análoga a la del Teorema 3.5.4

TEOREMA 3.5.12.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución Transposicion y N un L-módulo simple de dimensión finita, entonces $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$. El conjunto $B=\{[(N,f_N)]/N=L\text{-módulo simple}, f_N=\text{forma natural sobre } N\}$ es una base de $W_{+1}(L)$.

DEMOSTRACION:

Sea C un elemento de $W_{+1}(L)_N$ distinto del cero. Por definición de $W_{+1}(L)_N$ tenemos que en C hay +1-formas isotípicas de tipo N. Por Teorema 3.1.6 en C hay una +1-forma anisótropa e isotípica, llamémosle (V,f). Por el Teorema anterior V debe ser isomorfo a N. Por Teorema 3.5.9 tenemos que todas las +1-formas no neutras sobre N son equivalentes. Deducimos entonces que $W_{+1}(L)_N$ tiene a lo sumo dos elementos, pues a lo sumo hay una +1-forma anisótropa e isotípica. Finalmente por Proposición 3.4.5 tenemos que existen formas bilineales simétricas invariantes, con la involución Transposición, no nulas sobre N. Como N es simple deben ser no degeneradas y por tanto +1-formas anisótropas. Por tanto $W_{+1}(L)_N$ es un grupo de dos elementos, es decir $W_{+1}(L)_N \simeq Z/2Z$.

TEOREMA 3.5.13.- Sea L un álgebra de Lie simple con involución Transposición, entonces $W_{-1}(L)=\emptyset$.

DEMOSTRACION:

Trivial teniendo en cuenta la Proposición 3.4.5.

CAPITULO 4 : PRODUCTO KRONECKER DE ϵ-FORMAS

CAPITULO 4.- PRODUCTO KRONECKER DE ε-FORMAS

ANILLO DE WITT DE UN ALGEBRA DE LIE CON INVOLUCION

Partiendo de un álgebra de Lie finito dimensional sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado de característica cero, y provista de una involución, vamos a definir el producto Kronecker de ε-formas y construir el anillo de Witt.

DEFINICION 4.1.- Sean (V_1,f_1) y (V_2,f_2) dos ε-formas, se puede construir la ε-forma (V,f) donde $V=V_1\otimes V_2$ y f se define como

$$f((x_1\otimes y_1),(x_2\otimes y_2))=f_1(x_1,x_2).f_2(y_1,y_2)$$

$$x_i\in V_1,\ y_i\in V_2$$

Se expresa como $(V,f)=(V_1,f_1)\otimes(V_2,f_2)=(V_1\otimes V_2,f_1\otimes f_2)$.

PROPOSICION 4.2.- El producto Kronecker de cualquier ε-forma por una ε-forma neutra es una ε-forma neutra.

DEMOSTRACION:

Sea (V,f) una ε-forma cualquiera y (N,g) una ε-forma neutra, entonces tendrá un metabolizador y sea éste N_0 verificándose que $N_0=N_0^{\perp}$ y $2\dim N_0=\dim N$. Considero la ε-forma $(V,f)\otimes(N,g)$ donde $(f\otimes g)(x\otimes u,y\otimes v)=f(x,y).g(u,v)$ siendo $x,y\in V$; $u,v\in N$. Veamos que es neutra la ε-forma $(V,f)\otimes(N,g)=(V\otimes N,f\otimes g)$, para ello considero el L-submódulo $V\otimes N_0$ de $V\otimes N$ y sea $y\otimes v$ cualquier elemento de $V\otimes N_0$, entonces para todo $x\otimes u$ de $V\otimes N_0$ es $(f\otimes g)(x\otimes u,y\otimes v)=f(x,y).g(u,v)=0$ pues $g(u,v)=0$. Luego $V\otimes N_0\subset(V\otimes N_0)^{\perp}$. Como f es no degenerada no existe ningún $x\neq 0$ de V tal que para todo y de V sea $f(x,y)=0$. Luego para que $g(u,v)=0$ para todo v de N_0 es necesario que $u\in N_0^{\perp}=N_0$. Por tanto $(V\otimes N_0)^{\perp}\subset V\otimes N_0$ y por la doble inclusión $(V\otimes N_0)^{\perp}=V\otimes N_0$. Además $2\dim(V\otimes N_0)=2\dim V.\dim N_0=\dim V.2\dim N_0=\dim V.\dim N=\dim(V\otimes N)$.

Luego $(V,f)\otimes(N,g)=(V\otimes N,f\otimes g)$ es una ε-forma neutra.

LEMA 4.3.- La relación de equivalencia del Lema 1.1.15 es compatible con el producto Kronecker de ε-formas.

DEMOSTRACION:

Si $(V,f)\sim(V',g)$, existen (X,f_1), (Y,g_1) ε-formas neutras tal que $(V,f)\perp(X,f_1)\simeq(V',g)\perp(Y,g_1)$.

Si $(U,h)\sim(U',t)$, existen (M,h_1), (N,t_1) ε-formas neutras tal que $(U,h)\perp(M,h_1)\simeq(U',t)\perp(N,t_1)$.

Entonces:

$$((V,f)\perp(X,f_1))\otimes((U,h)\perp(M,h_1))\simeq((V',g)\perp(Y,g_1))\otimes((U',t)\perp(N,t_1))$$

Teniendo en cuenta la propiedad distrubutiva de $\otimes$ respecto a $\perp$ y puesto que la suma ortogonal de dos ε-formas neutras es una ε-forma neutra y el producto de Kronecker de una ε-forma por una ε-forma neutra es una ε-forma neutra, resulta que $(V,f)\otimes(U,h)\ (V',g)\otimes(U',t)$.

LEMA 4.4.- El conjunto cociente de clases de forma simétricas equivalentes, $\dfrac{X_{+1}(L)}{\sim}=W_{+1}(L)$ con la suma ortogonal de formas y el producto de Kronecker de formas es un anillo llamado anillo de Witt de formas simétricas.

DEMOSTRACION: Trivial.

LEMA 4.5.- El conjunto cociente de clases de formas ε-simétricas equivalentes **$\dfrac{X_{\varepsilon}(L)}{\sim}=W(L)$ con la suma ortogonal de** ε-formas **y el producto de Kronecker de ε-formas es un anillo llamado** anillo de **Witt**.

DEMOSTRACION: Trivial.

LEMA 4.6.- Sean (V_1,f) una ε-forma tal que V_1 es un L-módulo trivial de dimensión 1 y (V,g) una ε-forma arbitraria, entonces $(V_1,f)\otimes(V,g)=(V,g)$.

DEMOSTRACION:

Sea $\{x\}$ una base de V_1 tal que $f(x,x)=1$, y ésto existe por ser f una forma bilineal no degenerada y K un cuerpo algebraicamente cerrado. Defino la aplicacion $\varphi: V_1\otimes V \dashrightarrow V$ tal que para todo y de V sea $\varphi(x\otimes y)=y$. La aplicacion φ es un isomorfismo de K-espacios vectoriales. Para todo a de L es $\varphi(a(x\otimes y)) = \varphi((ax)\otimes y + x\otimes(ay)) = \varphi(x\otimes(ay)) = ay$, y por tanto φ es un isomorfismo de L-módulos. Por otro lado $(f\otimes g)((x\otimes y_1),(x\otimes y_2)) = f(x,x).g(y_1,y_2) = g(y_1,y_2)$. Luego es φ un isomorfismo de ε-formas.

COROLARIO 1.- $[(V_1,f)]\otimes[(V,g)]=[(V,g)]$.

Como $W_{+1}(L)=H_{+1}(L)\oplus G_{+1}(L)$

COROLARIO 2.- $G_{+1}(L)$ **es el anillo primo de** $W_{+1}(L)$.

LEMA 4.7.- $H_{+1}(L)$ **es un ideal de** $W_{+1}(L)$.

DEMOSTRACION: Trivial.

COROLARIO.- $H_{+1}(L)$ **es un ideal maximal de** $W_{+1}(L)$.

Como $W(L)=W_{+1}(L)\oplus W_{-1}(L)=G_{+1}(L)\oplus H_{+1}(L)\oplus W_{-1}(L)$

LEMA 4.8.- $G_{+1}(L)$ **es el anillo primo de** $W(L)$ **siendo** $H_{+1}(L)\oplus W_{-1}(L)$ **un ideal maximal de** $W(L)$.

DEMOSTRACION: Trivial como consecuencia de los Lemas y Corolarios anteriores.

BIBLIOGRAFIA

1 .- Arf, C. Untersuchungen über quadratische formen in körpern der characteristic 2. **J. Reine Angew. Math. 183. 148-167. 1.941.**

2 .- Artin, E. Algèbre Géométrique. **Gauthier-Villars. 1.962.**

3 .- Bak, A. On modules with quadratic forms. **Lecture Notes in Mathematics, nº 108, Springer-Verlag, Berlin-New York. 1.969.**

4 .- Borel, A. and Mostow, G. D. On semi-simple authomorphisms of Lie algebras. **Ann. of Math. 3. 389-405. 1.955**

5 .- Bourbaki, N. Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Eléments de Mathématique. **Hermann 1.975.**

6 .- Cassels, J. W. S. Rational Quadratic Forms. **Academic Press. 1.978.**

7 .- Cibils, C. Groupe de Witt d'une algèbre avec involution. **L'Enseignement Mathématique. t. 29. pp. 27-43. 1.983.**

8 .- Cohn, P. M. Algebra. **John Wiley and Sons. 1.977.**

9 .- Deheuvels, R. Formes quadratiques et groupes classiques. **Presses Universitaires de France. 1.981.**

10.- Dieudonné, J. A. and Carrell, J. B. Invariant theory old and new. **Academic Press. 1.971.**

11.- Dieudonné, J. A. La Géométrie des Groupes Classiques. **Springer-Verlag. 1.971.**

12.- Fröhlich, A. and McEvett, A. M. Forms over rings with involution. **Journal of Algebra. 12. 79-104. 1.969.**

13.- Fröhlich, A. Hermitian and quadratic forms over rings with involution **Quaterly J. Math. Oxford. 20. 297-317. 1.969.**

14.- **Gray, M.** A radical approach to algebra. **Addison-Wesley. 1.970.**

15.- **Hochschild, G.** La structure des groupes de Lie. **Dunod. 1.968.**

16.- **Hochschild, G.** Basic theory of algebraic groups and Lie algebras. **Springer-Verlag. 1.981.**

17.- **Humphreys, J. E.** Introduction to Lie Algebras and representation theory. **Springer-Verlag. 1.972.**

18.- **Jacobson, N.** Lie Algebras. **Dover Publications, Inc. 1.962.**

19.- **Knebusch, M.; Rosenberg, A.; Ware, R.** Structure of Witt rings, quotients of abelian groups rings, and orderings of fields. **Bulletin of the American Mathematical Society. 77. Nº 2. 205-210. 1.971.**

20.- **Knebusch, M.; Rosenberg, A.; Ware, R.** Structure of Witt rings and quotients of abelian group rings. **Amer. J. Math. 44. 119-155. 1.972.**

21.- **Lam, T. Y.** The algebraic theory of quadratic forms. **Mathematics Lecture Note Series. Benjamin. 1.973.**

22.- **Lang, S.** Algebra. **Aguilar. 1.971.**

23.- **Larotonda, A.; Micali, A.; Villamayor, O. E.** Sur le groupe de Witt. **Instituto Nazionale di Alta Matematica. Symposia Mathematica. Volume XI. 211-219. 1.973.**

24.- **Marshall, M.** Abstract Witt Rings. **Queen's papers in pure and applied Mathematics. Nº 57. 1.980.**

25.- **Mc Evett, A. M.** Forms over semisimple algebras with involution. **Journal of Algebra. 12. 105-113. 1.969.**

26.- **Micali, A.; Revoy, Ph.** Modules quadratiques. **Bull. Soc. Math. France. Mémoire 63. pp. 144. 1.979.**

27.- **Milnor, J.; Husemoller, D.** Symmetric bilinear forms. **Springer-Verlag 1.973.**

28.- **O'Meara, O. T.** Introduction to quadratic forms. **Springer-Verlag. 1.973.**

29.- **Quebbemann, H. G.; Scharlau, W.; Schulte, M.** Quadratic and Hermitian forms in additive and abelian categories. **Journal of Algebra. 59. 264-289. 1.979.**

30.- **Schafer, R. D.** An introduction to nonassociative algebras. **Academic Press. 1.966.**

31.- **Scharlau, W.** Quadratic forms. **Queen's papers in pure and applied Mathematics. Nº 22. 1.969.**

32.- **Serre, J. P.** Lie algebras and Lie groups. **Lectures given at Harvard University. 1.965.**

33.- **Stewart, I.** Lie algebras. **Springer-Verlag. 1.970.**

34.- **Snapper, E.; Troyer, R. J.** Metric Affine Geometry. **Academic Press. 1.971.**

35.- **Witt, E.** Theorie der quadratischen formen in beliebigen körpern. **J. Reine Angew. Math. 176. 31-44. 1.937.**