

TESIS DOCTORAL

Difusiones lognormales triparamétricas multivariantes con factores exógenos.



Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Eva M^a Ramos Ábalos
Granada, 2005

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Eva María Ramos Ábalos
D.L.: Gr. 914 - 2005
ISBN: 84-338-3407-x

Eva M^a Ramos Ábalos

**DIFUSIONES LOGNORMALES TRIPARAMÉTRICAS
MULTIVARIANTE CON FACTORES EXÓGENOS.**

Memoria presentada por Eva M^a Ramos
Ábalos para optar al grado de Doctor por
la Universidad de Granada.

Eva M^a Ramos Ábalos

V^oB^o
Director de tesis

Fdo. Prof. Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento al director de esta memoria, Dr. D. Ramón Gutiérrez Jáimez, por el interés y colaboración que desde el principio ha mostrado en la realización de este trabajo.

También quiero agradecer a mis amigos y compañeros, los cuales me han ofrecido su apoyo y ánimo.

Por último, dar las gracias a mi familia, por su apoyo incondicional, en especial a mi madre, por sus siempre buenos consejos.

Índice general

Prólogo	1
1. Proceso de difusión lognormal unidimensional con tres parámetros	9
1.1. Definición del modelo	9
1.2. Momentos del proceso	10
1.2.1. Función media	11
1.2.2. Función varianza	11
1.2.3. Función covarianza	12
1.3. Estimación de los parámetros	14
1.4. Simulación de la trayectoria del proceso	16
1.4.1. Simulación de la trayectoria del proceso a partir de la solución exacta de la ecuación integral de Itô	16
1.4.2. Simulación de la trayectoria del proceso a partir del algoritmo propuesto por Rao	23
1.5. Reparametrización del proceso según Wingo	30
2. Proceso de difusión lognormal bidimensional con tres parámetros y q factores exógenos	35
2.1. Definición del modelo	35
2.2. Momentos del proceso	37
2.2.1. Función media	38
2.2.2. Función varianza	39
2.2.3. Función covarianza	40
2.3. Estimación de los parámetros	41
2.4. Cálculo de la matriz de información de Fisher	45
3. Proceso de difusión lognormal bidimensional con tres parámetros con vector de factores exógenos distintos	51
3.1. Definición del modelo	51
3.2. Momentos del proceso	53
3.2.1. Función media	55

3.2.2.	Función varianza	55
3.2.3.	Función covarianza	56
3.2.4.	Estimación máximo-verosímil de los parámetros del proceso	57
4.	Proceso de difusión lognormal multidimensional con tres parámetros y q factores exógenos	67
4.1.	Definición del modelo	67
4.2.	Momentos del proceso	69
4.3.	Estimación de los parámetros	70
4.4.	Cálculo de la matriz de información de Fisher	73
4.5.	Contrastes de hipótesis	79
4.5.1.	Contrastes sobre los parámetros β	79
4.5.2.	Contrastes sobre subvectores	92
4.5.3.	Contrastes sobre independencia por bloques	93
4.5.4.	Contrastes sobre los subvectores del parámetro γ	97
5.	Aplicación a datos reales	101
5.1.	Introducción	101
5.2.	Aplicación	102
5.2.1.	Edad media al primer matrimonio en varones en España	102
5.2.2.	Edad media al primer matrimonio en mujeres en España	106
5.2.3.	Edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía	109
5.2.4.	Edad media al primer matrimonio en mujeres en Andalucía	113
5.3.	Método de optimización Simulated Annealing	116
5.3.1.	Introducción	116
5.3.2.	Descripción del método	118
5.3.3.	Aplicación del método de optimización Simulated Annealing	123
5.3.4.	Conclusiones	126
	Bibliografía	128

Prólogo

A partir del estudio de distribuciones lognormales triparamétricas, se considera el estudio original de procesos de difusión lognormales triparamétricos, multidimensionales en variable endógena y con tres parámetros (vectoriales-matriciales). En una primera etapa se estudia el caso sin factores exógenos y después se extiende al caso de existir en el modelo con conjunto de factores exógenos que afectan a todas las variables endógenas.

Se persigue disponer de un modelo lognormal multivariable de tres parámetros suficientemente amplio para cubrir importantes campos de aplicación no cubiertos por los modelos conocidos y flexible, a la vez que no homogéneo, al incluir en la tendencia funciones exógenas del tiempo. Además, con vistas a las aplicaciones, se construye la estimación máximo-verosímil a partir de muestreo discreto en base a la verosimilitud condicionada derivada de las transiciones que son soluciones de las ecuaciones de Kolmogorov correspondientes.

La importancia de la distribución lognormal triparamétrica como un modelo de probabilidad llega a ser reconocida totalmente por un amplio grupo de disciplinas científicas, como Biología, Geología, Agricultura, Estadística y Economía. Como ejemplo, **Wicksell** [60] y **Guerrieri** [21] aplicaron la distribución triparamétrica en el estudio de la distribución de la edad del primer matrimonio, usando el método de estimación directa para los parámetros de **Wicksell** [60]. En 1957, **Aitchison y Brown** [2] aplicaron todos los métodos disponibles para 65 muestras simuladas. **Royston** [50] usó este proceso para el estudio de concentraciones de anticuerpos en sangre, y **Crawford** [14] adoptó el mismo método para el estudio de la acidez de lagos. Dada la importancia de la distribución lognormal triparamétrica, un gran número de investigaciones han dirigido su atención a los problemas que rodean la estimación de los parámetros de esta distribución para muestras de datos, particularmente las dificultades teóricas y computacionales, las cuales pueden presentarse al aplicar el método de máxima verosimilitud. En respuesta a estas dificultades, aparece un considerable número de estimadores y métodos de estimación. Muchos de estos han sido analizados por ejemplo por **Aitchison y Brown** [2], **Calitz** [9], **Cohen** [11], **Hill** [36] y **Harter y Moore** [32]. **Cohen** [11] y **Harter y**

Moore [32] obtuvieron estimaciones máximo verosímiles locales, mientras que **Hill** [36] propuso estimadores Bayesianos. **Calitz** [9], por otro lado, usó procedimientos de simulación para comparar verosimilitudes, percentiles y estimadores de los momentos. Más recientemente, **Giesbrecht y Kempthorne** [19] han obtenido estimadores de máxima verosimilitud para modelos discretos, considerando intervalos agrupados, **Wingo** [58] introdujo funciones penalti y barrera para incrementar la convergencia cuando se calculan estimadores máximo verosímiles locales; **Cohen** [12],[13] y **Crow Shimizu** [15] propusieron varias modificaciones para los estimadores máximo verosímiles y de los momentos; **Lifson y Bhattacharyya** [40] usaron un método de regresión para la estimación de percentiles; **Wingo** [58] trabajó usando un algoritmo computacional para maximizar la función de verosimilitud (como una función del tercer parámetro), **Kappenman** [37] estimó los tres parámetros usando procedimientos iterativos y comparando estos resultados con los estimadores verosímiles, y **Royston** [50] estimó el parámetro umbral usando las propiedades de la mediana de la distribución lognormal y diseñó un test para un contraste de hipótesis basado en la mediana.

Una dificultad teórica importante que debe ser solventada es que la función de verosimilitud alcanza su máximo donde los parámetros toman valores inadmisibles y la función de verosimilitud será $+\infty$. Con respecto a esto, **Hill** [36] obtuvo argumentos bayesianos para justificar el uso de estimadores paramétricos, los cuales corresponden a grandes máximos locales. Además, **Heyde** [35] demostró que la distribución lognormal triparamétrica no puede ser determinada únicamente por sus momentos, los cuales presentan varios problemas concernientes a la estimación por el método de los momentos. Desde **Griffiths** [20], hasta un punto de vista no bayesiano, se ha mostrado que el método de máxima verosimilitud puede ser considerado como una aproximación al problema bastante fiable.

La principal dificultad computacional, se encuentra en el hecho de que la estimación de los parámetros complica las precauciones que tiene el obtener computacionalmente los estimadores usando métodos numéricos iterativos. Muchos de estos métodos han sido discutidos por **Cohen** [11], [12] y [13] y **Crow y Shimizu** [15], **Lambert** [39], **Harter y Moore** [32] y **Calitz** [9]. Tan pronto como estos métodos han sido empleados sin evitar la región de atracción del máximo infinito de la función de verosimilitud, se encuentran dificultades en la convergencia. Para evitar estas dificultades, **Wingo** [58] introdujo métodos de la función frontera con truncamientos móviles, para incrementar la convergencia en los estimadores de máxima verosimilitud locales.

El proceso de difusión lognormal o el lognormal biparamétrico representa un proceso de difusión importante, el cual ha sido usado con gran éxito en Economía, por

ejemplo, **Tintner y Sengupta [53]** trabajaron con procesos de difusión lognormal unidimensionales y obtuvieron resultados que han sido particularmente interesantes en predicción, por su tendencia exponencial y la simplicidad con la cual los factores exógenos afectan en la tendencia al ser introducidos. Recientemente, **Chesney y Elliott [10]**, han usado el proceso de difusión lognormal al estudiar la volatilidad de un intercambio de velocidad. La aplicación del método de máxima verosimilitud para estimar los parámetros del proceso y los coeficientes que afectan a los factores exógenos, han ayudado a resaltar la importancia de este proceso.

Con posterioridad, el caso multidimensional ha sido tratado por **Tintner y Narayanan [52]**, aplicándolo al campo de la Economía. **Tintner y Gómez [54]**, iniciaron el estudio de este proceso desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo cual hizo posible el uso de métodos de la teoría de sistemas estocásticos.

Hay dos aproximaciones diferentes a considerar en el proceso de difusión: la primera toma el proceso de difusión como solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô, y por medio de muestreo continuo se obtiene una estimación máximo verosímil del vector asociado con los factores exógenos, como describen **Brown y Hewitt [6]**, **Basawa y Prakasa Rao [5]**, **Molina [44]**, **Hermoso [34]** y **Gutiérrez, Hermoso y Molina [23]**. La segunda aproximación considera el proceso de difusión como solución de las ecuaciones de Kolmogorov y la estimación de los parámetros usando muestras discretas con el método de máxima verosimilitud, como describe **Tintner [52]**, **[53]**, **Gutiérrez, Angulo, González y Pérez [24]**, **Torres [55]** y **Arbai [4]**.

En esta tesis nos ocuparemos de este segundo aspecto, es decir, la inferencia basada en el muestreo discreto, que es la que se muestra en los cuatro primeros capítulos.

En el **primer capítulo** centraremos nuestro estudio en el proceso logarítmico normal unidimensional con tres parámetros, presentando dicho proceso desde el punto de vista de la solución de las ecuaciones de Kolmogorov. Se determinarán los momentos del proceso y se aborda la estimación de los parámetros. A partir de aquí, se plantean dos métodos para la simulación de la trayectoria del proceso:

1. Simulación de la trayectoria a partir de la solución exacta de la ecuación integral de Itô.
2. Simulación de la trayectoria a partir del algoritmo propuesto por Rao y otros, que aproxima de forma numérica la ecuación integral de Itô.

Una vez simuladas las trayectorias, se representan junto con las respectivas tendencias, es decir, función tendencia teórica, función tendencia estimada, función

tendencias condicionada teórica y función tendencia condicionada estimada.

Concluiremos este capítulo planteando una reparametrización del proceso. Es bien conocido el problema que plantea la introducción del tercer parámetro en el proceso en lo que a la estimación de los parámetros se refiere.

Para intentar solucionar los problemas que se han planteado anteriormente, se describe el algoritmo que **Wingo** [58] usó en el caso de distribución lognormal tri-paramétrica, y se plantea la misma reparametrización para el caso del proceso de difusión lognormal unidimensional con tres parámetros. Dicha transformación puede verse aproximadamente como una compresión del rango de valores sobre el cual, la función de log-verosimilitud condicionada debe ser maximizada para encontrar la estimación del parámetro umbral. Evidentemente esta compresión es computacionalmente ventajosa, pudiendo demostrarse, que maximizar la verosimilitud sobre el parámetro umbral puede requerir hasta 10 evaluaciones más de la función objetivo que cuando se maximiza utilizando la reparametrización propuesta.

En el **segundo capítulo**, centraremos nuestro estudio en el proceso logarítmico normal bidimensional con tres parámetros con factores exógenos que afecten a su tendencia. El motivo que nos lleva a la introducción de los factores exógenos, es el de la utilización de procesos estocásticos de difusión para la descripción de la tendencia continua de ciertos fenómenos dinámicos, apoyándose en su observación discreta. De esta forma, se puede introducir una explicación del comportamiento de un vector de variables en función de otro conjunto de variables independientes que afectan a aquellas, y cuya evolución en el tiempo sea conocida. Al igual que en el primer capítulo, se presenta dicho proceso desde el punto de vista de la solución de las ecuaciones de Kolmogorov. Se determinarán los momentos del proceso y se aborda la estimación de los parámetros. Además se calcula la matriz de información de Fisher.

En el **tercer capítulo**, se introduce el proceso logarítmico normal bidimensional con tres parámetros y un factor exógeno, de manera que cada componente de dicho vector exógeno afecte a la correspondiente variable endógena de la tendencia infinitesimal del proceso, usando la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov.

El modelo se desarrolla a partir del modelo básico con factores exógenos múltiples que afectan a todas las variables endógenas, desarrollado en [28] y [31]. Es obvio que el modelo propuesto aquí no puede desarrollarse como caso particular del citado, anulando los coeficientes respectivos en cada componente, por lo que es preciso un minucioso desarrollo. Para ello, se establecen las ecuaciones de Kolmogorov y la correspondiente densidad de transición bidimensional. A partir de ésta, se pro-

pone la estimación máximo verosímil de los parámetros en base a un esquema de muestreo discreto.

En el **cuarto capítulo**, desarrollamos una extensión al caso multidimensional del segundo capítulo, es decir, se define el proceso logarítmico normal multidimensional con tres parámetros con factores exógenos en la tendencia del proceso, usando la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov. Se aborda el problema de estimación de los parámetros usando máxima verosimilitud local. Se determina la matriz de información de Fisher y se estudia el problema de la resolución numérica de las ecuaciones de verosimilitud.

También se presentan los contrastes basados en la razón de verosimilitudes para los parámetros que ponderan el efecto de los factores exógenos, pudiendo contrastar la posible influencia o no de algún factor sobre el proceso. Se añade además el contraste de hipótesis sobre el tercer parámetro, así como el problema de independencia de las componentes del vector de variables endógenas.

El **quinto y último capítulo** está dedicado a una aplicación a datos reales. En una primera parte, se utiliza la metodología del proceso de difusión lognormal unidimensional triparamétrico expuesto en el primer capítulo, para el estudio de la evolución de un indicador demográfico básico como es la nupcialidad, concretamente la variable " *Edad media al primer matrimonio*", en España y Comunidad Autónoma de Andalucía. Las respectivas variables estocásticas dependientes del tiempo son:

- $X_1(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en España.
- $Y_1(t)$, edad media al primer matrimonio en mujeres en España.
- $X_2(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.
- $Y_2(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.

Para $X_1(t)$ e $Y_1(t)$ se toman los datos correspondientes al periodo de tiempo 1982-2002 para ajustar el correspondiente modelo, y para las variables $X_2(t)$ e $Y_2(t)$ se toman los datos correspondientes al periodo de tiempo 1980-2002. Los valores observados corresponden a observaciones en intervalos de tiempo iguales a un año. La fuente de datos para todas las variables ha sido el I.N.E. (Instituto Nacional de Estadística de España).

Se siguen los siguientes pasos en la metodología estadística:

1. Se toman los valores observados para los periodos 1982-2001 para $X_1(t)$ e $Y_1(t)$ y 1980-2001 para $X_2(t)$ e $Y_2(t)$ para la estimación de los parámetros, reservando

los valores observados en el año 2002 para compararlos con la correspondiente predicción por el ajuste del modelo.

2. Se calculan las estimaciones de los parámetros utilizando las expresiones obtenidas en (1.10), (1.11), (1.12). La expresión (1.12) se aproxima numéricamente usando el programa Mathematica 5.0.
3. Una vez que se han estimado los parámetros, se obtienen las funciones tendencia estimada y tendencia condicionada estimada para cada variable, representando cada una de estas funciones. Además se simulan 10 trayectorias usando los dos algoritmos descritos en el capítulo 1, y se representan junto con la media de estas trayectorias y con la tendencia estimada.

En segundo lugar, se plantea un nuevo método de optimización de la función de verosimilitud. En capítulos anteriores, se exponía la problemática existente en la estimación de los parámetros del proceso de difusión lognormal triparamétrico. La resolución de las ecuaciones de verosimilitud se lleva a cabo mediante la utilización de algún método de aproximación numérica, por ejemplo Newton-Raphson que es el utilizado en nuestro caso, lo cual genera bastantes problemas, como el hecho de que se requiere un valor inicial cercano a la solución para que se dé su convergencia. Aquí se plantea el método de optimización *Simulated Annealing*, con el que se intentará solventar algunos de los problemas planteados anteriormente. El objetivo de este método es minimizar una función objetivo. El método *Simulated Annealing* (SA) o *Sobrecalentamiento Simulado* es una técnica que ha llamado significativamente la atención en los problemas de optimización a gran escala. Tiene sus orígenes en el trabajo de **Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller y Teller** [42] para la minimización de una función sobre un conjunto finito de tamaño muy grande, aunque también puede ser aplicado a la optimización sobre un conjunto continuo (**Dufló** [16]). Varios autores como **Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi** [38] mostraron su utilidad para encontrar los óptimos globales en problemas de optimización combinatoria.

El método está basado en la analogía del principio termodinámico de la cristalización, donde primero se calienta el material al estado líquido y posteriormente se reduce la temperatura lentamente hasta que se enfría de forma que el cristal resultante sea perfecto. Un aspecto fundamental es la velocidad de decrecimiento de la temperatura ya que un enfriamiento demasiado rápido implicaría impurezas, por lo que no se alcanzaría el óptimo.

Se utilizará la reparametrización del proceso planteada en la sección 1.5, con el objeto de realizar una compresión del rango de valores sobre el cual, la función de log-verosimilitud condicionada debe ser maximizada para encontrar la estimación del parámetro umbral.

En primer lugar se describe el método y se aplica a continuación el método descrito a distintos conjuntos de datos. La aplicación se realiza primero sobre los conjuntos de datos simulados, para comprobar que el método es efectivo, y a continuación a los cuatro grupos de datos reales que se han utilizado en este mismo capítulo. Se muestran los resultados obtenidos junto con los obtenidos por el método de máxima verosimilitud permitiendo hacer una comparación de ambos.

Para el desarrollo práctico descrito, se elaboran distintos programas en Mathematica 5.0.

Por último, se plantean algunos aspectos que son fuente de estudios posteriores:

1. Considerar el proceso de difusión lognormal con tres parámetros como solución de una ecuación diferencial estocástica de Itô, haciendo uso del muestreo continuo.
2. Desarrollo de campos aleatorios triparamétricos lognormales.
3. Mejorar y depurar el método de optimización presentado, pudiendo extenderse al caso multidimensional.

Capítulo 1

Proceso de difusión lognormal unidimensional con tres parámetros

1.1. Definición del modelo

Se introduce el proceso de difusión lognormal unidimensional con tres parámetros por medio de la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov.

Sea $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov con valores en $] \gamma, +\infty[$, con trayectorias continuas casi seguramente y cuya función de densidad de transición del proceso viene dada por

$$P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x]$$

donde $x > \gamma$, $y > \gamma$ y $\gamma \in \mathbb{R}$.

Supongamos las siguientes condiciones:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} P(y, t + h/x, t) = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y - x)P(y, t + h/x, t) = A_1(x, t; \gamma) = \mu(x - \gamma)$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y - x)^2 P(y, t + h/x, t) = A_2(x, t; \gamma) = \sigma^2(x - \gamma)^2 > 0$
- Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

Utilizando el hecho de que la transformada $Z(t) = X(t) - \gamma$ es un proceso de difusión lognormal con dos parámetros, obtenemos la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov.

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2(x - \gamma)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \mu(x - \gamma) \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 (y - \gamma)^2 P}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial (y - \mu) P}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

La solución común a estas ecuaciones, con la condición inicial

$$P(y, t/x, s) = \delta(y - x)$$

es:

$$\begin{aligned} P(y, t/x, s) &= \frac{1}{(y - \gamma)\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - s)}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(t - s)} (\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - a(t - s))^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

con $a = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

Por lo tanto tenemos que:

$$X(t)/X(s) = x \rightsquigarrow \Lambda_1[\ln(x - \gamma) + a(t - s); \sigma^2(t - s)].$$

1.2. Momentos del proceso

Los momentos del proceso de difusión lognormal con tres parámetros se obtienen a partir de los momentos del proceso de difusión lognormal con dos parámetros $Z(t) = X(t) - \gamma$. Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} E [(X(t) - \gamma)^k / X(s) = x_s] &= \exp \left\{ k \ln(x_s - \gamma) + ka(t - s) + \frac{1}{2}k^2\sigma^2(t - s) \right\} \\ &= (x_s - \gamma)^k \exp \left\{ \left(ka + \frac{1}{2}k^2\sigma^2 \right) (t - s) \right\}. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$X^k(t) = (X(t) - \gamma + \gamma)^k$$

y aplicando el binomio de Newton tenemos que:

$$X^k(t) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (X(t) - \gamma)^i \gamma^{k-i}.$$

Por lo tanto,

$$E[X^k(t)/X(s) = x_s] = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (x_s - \gamma)^i \gamma^{k-i} \exp \left\{ (ia + \frac{1}{2}i^2\sigma^2)(t - s) \right\}. \quad (1.4)$$

1.2.1. Función media

Consideremos el caso particular en el que $k = 1$ en (1.4) entonces tenemos

$$\begin{aligned} E[X(t)/X(s) = x_s] &= (x_s - \gamma) \exp \left\{ (a + \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s) \right\} + \gamma = \\ &= (x_s - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - s) \right\} + \gamma. \end{aligned}$$

Así la *función media o tendencia* del proceso será:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= E \left[E[X(t)/X(t_0)] \right] \\ &= E \left[(X(t_0) - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} + \gamma \right] \\ &= E \left[(X(t_0) - \gamma) \right] \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} + \gamma. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$ obtenemos:

$$E[X(t)] = (x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} + \gamma. \quad (1.5)$$

1.2.2. Función varianza

Para el cálculo de la varianza del proceso, necesitamos calcular previamente el momento de segundo orden:

$$\begin{aligned} E[X^2(t)/X(s) = x_s] &= \gamma^2 + 2\gamma(x_s - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - s) \right\} + \\ &+ (x_s - \gamma)^2 \exp \left\{ (2\mu + \sigma^2)(t - s) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= E\left[E[X^2(t)/X(t_0)]\right] = \\ &= E\left[\gamma^2 + 2\gamma(X(t_0) - \gamma) \exp\left\{\mu(t - t_0)\right\} + \right. \\ &\quad \left. + (X(t_0) - \gamma)^2 \exp\left\{(2\mu + \sigma^2)(t - t_0)\right\}\right]. \end{aligned}$$

Utilizando la condición inicial $P[X(t_0) = x_0] = 1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} E[X^2(t)] &= \gamma^2 + 2\gamma(x_0 - \gamma) \exp\left\{\mu(t - t_0)\right\} + \\ &\quad + (x_0 - \gamma)^2 \exp\left\{(2\mu + \sigma^2)(t - t_0)\right\}. \end{aligned}$$

Luego la *función varianza* del proceso será:

$$\begin{aligned} Var[X(t)] &= E[X^2(t)] - [E[X(t)]]^2 = \\ &= \gamma^2 + 2\gamma(x_0 - \gamma) \exp\left\{\mu(t - t_0)\right\} + (x_0 - \gamma)^2 \exp\left\{(2\mu + \sigma^2)(t - t_0)\right\} - \\ &\quad - (x_0 - \gamma)^2 \exp\left\{2\mu(t - t_0)\right\} + \gamma^2 - 2\gamma(x_0 - \gamma) \exp\left\{\mu(t - t_0)\right\} = \\ &= (x_0 - \gamma)^2 \exp\left\{2\mu(t - t_0)\right\} \left[\exp\left\{\sigma^2(t - t_0)\right\} - 1\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

1.2.3. Función covarianza

La función covarianza viene dada por:

$$Cov[X(t)X(s)] = E[X(t)X(s)] - E[X(t)]E[X(s)]$$

Denotamos por $t \wedge s = \min(t, s)$ y por $t \vee s = \max(t, s)$. Entonces podemos escribir que:

$$\begin{aligned} E[X(t)X(s)] &= E\left[E\left[X(t)X(s)/X(t \wedge s)\right]\right] = \\ &= E\left[X(t \wedge s)E\left[X(t \vee s)/X(t \wedge s)\right]\right] = \\ &= E\left[X(t \wedge s)\left[(X(t \wedge s) - \gamma) \exp\left\{\mu((t \vee s) - (t \wedge s))\right\} + \gamma\right]\right] = \\ &= E\left[X(t \wedge s)\left[(X(t \wedge s) \exp\left\{\mu((t \vee s) - (t \wedge s))\right\} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} + \gamma \Big] = \\
= & E \left[X(t \wedge s)^2 \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} - \right. \\
& \left. -\gamma X(t \wedge s) \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} + \gamma X(t \wedge s) \right] = \\
= & E \left[X(t \wedge s)^2 \right] \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} - \\
& -\gamma E \left[X(t \wedge s) \right] \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} + \gamma E \left[X(t \wedge s) \right].
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
E \left[X^2(t \wedge s) \right] &= \gamma^2 + 2\gamma(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \\
& \quad + (x_0 - \gamma)^2 \exp \left\{ (2\mu + \sigma^2)((t \wedge s) - t_0) \right\}, \\
E \left[X(t \wedge s) \right] &= (x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \gamma,
\end{aligned}$$

tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(s)] &= \left[\gamma^2 + 2\gamma(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \right. \\
& \quad \left. + (x_0 - \gamma)^2 \exp \left\{ (2\mu + \sigma^2)((t \wedge s) - t_0) \right\} \right] \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} - \\
& -\gamma \left[(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \gamma \right] \exp \left\{ \mu((t \vee s) - (t \wedge s)) \right\} + \\
& +\gamma \left[(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \gamma \right].
\end{aligned}$$

Dado que

$$(t \vee s) - (t \wedge s) = ((t \vee s) - t_0) - ((t \wedge s) - t_0)$$

podemos sustituir esto en la expresión anterior, de manera que obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
E[X(t)X(s)] &= (x_0 - \gamma)\gamma \exp \left\{ \mu((t \vee s) - t_0) \right\} + \\
& \quad + (x_0 - \gamma)^2 \exp \left\{ \sigma^2((t \wedge s) - t_0) \right\} \exp \left\{ \mu((t \vee s) - t_0) + \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \\
& \quad + (x_0 - \gamma)\gamma \exp \left\{ \mu((t \wedge s) - t_0) \right\} + \gamma^2.
\end{aligned}$$

A continuación pasamos a calcular $E[X(t)]E[X(s)]$:

$$\begin{aligned}
 E[X(t)]E[X(s)] &= \left[(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} + \gamma \right] \cdot \left[(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu(s - t_0) \right\} + \gamma \right] = \\
 &= (x_0 - \gamma)^2 \exp \left\{ \mu((t - t_0) + (s - t_0)) \right\} + \gamma(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu(s - t_0) \right\} + \\
 &\quad + \gamma(x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} + \gamma^2 = \\
 &= (x_0 - \gamma)^2 \exp \left\{ \mu((t - t_0) + (s - t_0)) \right\} + \\
 &\quad + \gamma(x_0 - \gamma) \left[\exp \left\{ \mu(s - t_0) \right\} + \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} \right] + \gamma^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$Cov[X(t)X(s)] = (x_0 - \gamma)^2 \exp \left\{ \mu((t - t_0) + (s - t_0)) \right\} \left[\exp \left\{ \sigma^2((t \wedge s) - t_0) \right\} - 1 \right]. \quad (1.7)$$

1.3. Estimación de los parámetros

Se considera un muestreo discreto del proceso

$$\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n\}$$

en los instantes $\{t_1, \dots, t_n\}$, con la condición inicial $P[X(t_1) = x_1] = 1$. La función de verosimilitud será:

$$L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma) = \prod_{i=2}^n P(x_i, t_i / x_{i-1}, t_{i-1})$$

con $a = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$.

Dicha función tiende a infinito cuando γ tiende a $x_{(1)}$, donde $x_{(1)} = \inf_{0 \leq j \leq n} (x_j)$.

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma) &= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n-1}{2}} \prod_{i=2}^n \frac{1}{(x_i - \gamma)(t_i - t_{i-1})^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} \times \right. \\
 &\quad \left. \times [\ln(x_i - \gamma) - \ln(x_{i-1} - \gamma) - a(t_i - t_{i-1})]^2 \right\}. \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Se calcula el logaritmo de (1.8) obteniendo:

$$\begin{aligned} \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)] &= -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=2}^n \ln(x_i - \gamma) - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \ln(t_i - t_{i-1}) - \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} [\ln(x_i - \gamma) - \ln(x_{i-1} - \gamma) - a(t_i - t_{i-1})]^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Y las derivadas respecto a los parámetros a , σ^2 y γ son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]}{\partial a} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n [\ln(x_i - \gamma) - \ln(x_{i-1} - \gamma) - a(t_i - t_{i-1})] \\ \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]}{\partial \sigma^2} &= -\frac{(n-1)}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=2}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} [\ln(x_i - \gamma) - \ln(x_{i-1} - \gamma) - \\ &\quad - a(t_i - t_{i-1})]^2 \\ \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]}{\partial \gamma} &= \sum_{i=2}^n \frac{1}{(x_i - \gamma)} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_i - \gamma)(x_{i-1} - \gamma)(t_i - t_{i-1})} \times \\ &\quad \times [\ln(x_i - \gamma) - \ln(x_{i-1} - \gamma) - a(t_i - t_{i-1})]. \end{aligned}$$

Los estimadores determinados por el método de máxima verosimilitud local se obtienen igualando a cero cada una de las expresiones anteriores, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]}{\partial a} &= 0 \\ \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]}{\partial \sigma^2} &= 0 \\ \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]}{\partial \gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{t_n - t_1} \sum_{i=2}^n [\ln(x_i - \hat{\gamma}) - \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma})], \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{[\ln(x_i - \hat{\gamma}) - \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma}) - \hat{a}(t_i - t_{i-1})]^2}{t_i - t_{i-1}}, \end{aligned}$$

y realizando cálculos sobre la tercera ecuación obtenemos la siguiente expresión que nos proporcionará un estimador para el tercer parámetro:

$$\sum_{i=2}^n \frac{\hat{\sigma}^2}{(x_i - \hat{\gamma})} - \sum_{i=2}^n \frac{(x_i - x_{i-1})[\ln(x_i - \hat{\gamma}) \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma})]}{(x_i - \hat{\gamma})(x_{i-1} - \hat{\gamma})(t_i - t_{i-1})} = \hat{a} \left(\frac{1}{x_n - \hat{\gamma}} - \frac{1}{x_1 - \hat{\gamma}} \right).$$

Finalmente obtenemos las siguientes expresiones de los estimadores,

$$\hat{a} = \frac{[\ln(x_n - \hat{\gamma}) - \ln(x_1 - \hat{\gamma})]}{t_n - t_1}, \quad (1.10)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\left[\ln(x_i - \hat{\gamma}) - \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma}) - \frac{[\ln(x_n - \hat{\gamma}) - \ln(x_1 - \hat{\gamma})]}{t_n - t_1} (t_i - t_{i-1}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}} \quad (1.11)$$

y

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{\gamma}) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n \frac{\left[\ln(x_i - \hat{\gamma}) - \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma}) - \frac{[\ln(x_n - \hat{\gamma}) - \ln(x_1 - \hat{\gamma})]}{t_n - t_1} (t_i - t_{i-1}) \right]^2}{t_i - t_{i-1}} \times \\ &\times \sum_{i=2}^n \frac{1}{(x_i - \hat{\gamma})} - \sum_{i=2}^n \frac{(x_i - x_{i-1})[\ln(x_i - \hat{\gamma}) - \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma})]}{(x_i - \hat{\gamma})(x_{i-1} - \hat{\gamma})(t_i - t_{i-1})} + \\ &+ \frac{\ln(x_n - \hat{\gamma}) - \ln(x_1 - \hat{\gamma})}{t_n - t_1} \cdot \frac{x_n - x_1}{(x_n - \hat{\gamma})(x_1 - \hat{\gamma})}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $\lambda(\hat{\gamma}) = 0$ y $\gamma < x_{(1)}$.

1.4. Simulación de la trayectoria del proceso

Para la simulación de una trayectoria del proceso de difusión lognormal triparamétrico considerado, se utilizan dos métodos: simulación basada en la solución exacta de la ecuación diferencial estocástica (E.D.E) de Itô y simulación basada en el algoritmo propuesto por Rao y otros, que aproxima de forma numérica la ecuación integral de Itô.

1.4.1. Simulación de la trayectoria del proceso a partir de la solución exacta de la ecuación integral de Itô

La ecuación diferencial estocástica (E.D.E) de Itô correspondiente al proceso definido en (1.1) viene dada por:

$$dX(t) = \mu(X(t) - \gamma)dt + \sigma(X(t) - \gamma)dW(t) \quad (1.13)$$

con $X(t_0) = x_0$, $\sigma > 0$ y siendo $W(t)$ es el proceso de Wiener con incrementos independientes $W(t) - W(s)$ distribuidos según $\mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$ para $t > s$.

La E.D.E. posee una única solución continua en el intervalo $[t_0, T]$, que corresponde al proceso de difusión lognormal triparamétrico, cuya expresión explícita puede obtenerse mediante la formula de Itô [17] aplicada a la transformación:

$$f(X(t)) = \ln(X(t) - \gamma).$$

Por lo tanto,

$$dY(t) = \left\{ \mu \frac{(X(t) - \gamma)}{(X(t) - \gamma)} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{(X(t) - \gamma)^2}{(X(t) - \gamma)^2} \right\} dt + \sigma \frac{(X(t) - \gamma)}{(X(t) - \gamma)} dW(t). \quad (1.14)$$

Simplificando (1.14) llegamos a:

$$dY(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t); \quad Y(t_0) = \ln(X(t_0) - \gamma). \quad (1.15)$$

Por integración tenemos que:

$$Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) ds + \int_{t_0}^t \sigma dW(s), \quad (1.16)$$

por lo que,

$$Y(t) = Y(t_0) + (t - t_0) \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \sigma(W(t) - W(t_0)). \quad (1.17)$$

Como $Y(t) = \ln(X(t) - \gamma)$, entonces $X(t) = \gamma + e^{Y(t)}$, y sustituyendo en (1.17) este último resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} X(t) &= \gamma + \exp \left\{ \ln(x_0 - \gamma) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right\} = \\ &= \gamma + (x_0 - \gamma) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0)) \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

A partir de esta solución explícita de la E.D.E. de Itô se pueden obtener trayectorias del proceso discretizando el intervalo de tiempo $[t_0, T]$. Utilizando la condición

inicial $W(t_0) = 0$, tenemos que $W(t) - W(t_0) = W(t)$, quedando finalmente

$$X(t) = \gamma + (x_0 - \gamma) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t - t_0) + \sigma W(t) \right\}. \quad (1.19)$$

De esta forma pueden simularse trayectorias del proceso, teniendo en cuenta que el proceso Wiener se obtiene como suma de distribuciones $\mathcal{N}(0, h)$, siendo $h = t_i - t_{i-1}$. Considerando este resultado, se simula una trayectoria utilizando el programa Mathematica para los siguientes valores:

Simulación					
n= n° de datos simulados	$h = t_i - t_{i-1}$	Valor inicial	γ	σ	μ
25	1	1.22139	1	0.0001	0.2

Cuadro 1.1: Valores utilizados en la simulación.

Los datos obtenidos se muestran Tabla 1.3. A partir de la muestra simulada del proceso, se estiman los parámetros por máxima verosimilitud, y para ello se utiliza el método de aproximación no lineal Newton-Raphson para aproximar el valor de $\hat{\gamma}$. Para ello se utiliza una implementación con el programa Mathematica. Dicho método arroja los resultados que se muestran en la Tabla 1.2. La Figura 1.1 muestra la trayectoria simulada.

Estimación			
$\hat{\gamma}$	\hat{a}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
1.00006	0.200005835	0.200005838	0.000080467

Cuadro 1.2: Estimación de los parámetros.

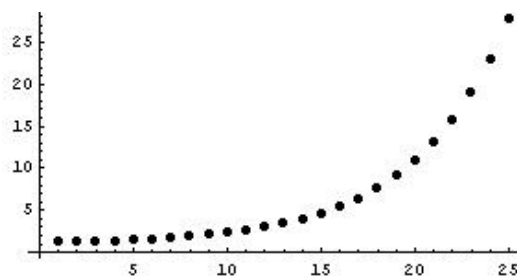


Figura 1.1: Trayectoria simulada.

t_i	x_i
0	1.2213810762975505
1	1.2703844469030483
2	1.3302267807124066
3	1.4033602238321520
4	1.4926288478731170
5	1.6017013304827845
6	1.7348680633748463
7	1.8975838496361814
8	2.0963110647705605
9	2.3388676032696374
10	2.6356415186095620
11	2.9978614835721040
12	3.4402968372897330
13	3.9802024745163120
14	4.6401111950970480
15	5.4455821534359770
16	6.4299676104081210
17	7.6316988419955660
18	9.1002864706141630
19	10.892282914944008
20	13.082678496121480
21	15.758468756447023
22	19.025878283410396
23	23.018575484306990
24	27.896611886223308

Cuadro 1.3: Valores simulados según Tabla 5.13.

A partir de aquí, podemos calcular la función media estimada y la función media condicionada estimada y compararlas con las respectivas funciones teóricas.

La **función media** viene dada por la siguiente expresión:

$$E[X(t)] = (x_0 - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - t_0) \right\} + \gamma \quad (1.20)$$

que en nuestro caso queda de la siguiente forma:

$$E[X(t)] = (x_0 - 1) \exp \left\{ 0,2(t - t_0) \right\} + 1.$$

En la Figura 1.2 se representa gráficamente la función media.

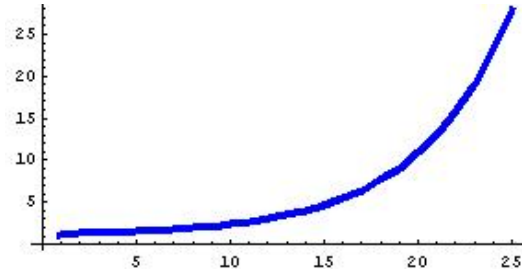


Figura 1.2: Función media.

Podemos representar conjuntamente la función media junto con los datos simulados como se muestra en la Figura 1.3.

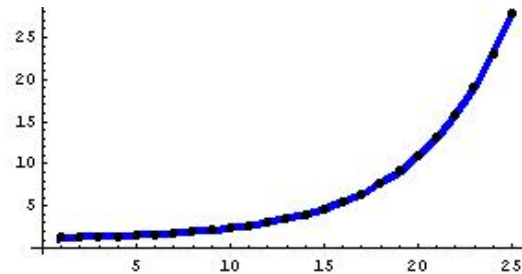


Figura 1.3: Función media y datos simulados.

Podemos observar como los datos se ajustan perfectamente a la tendencia, como era de esperar.

La **función media estimada** se obtiene por el teorema de Zenha, reemplazando los parámetros por los estimadores en la expresión (1.20), así tenemos:

$$\widehat{E}[X(t)] = (x_0 - \hat{\gamma}) \exp \left\{ \hat{\mu}(t - t_0) \right\} + \hat{\gamma} \quad (1.21)$$

y para nuestros datos

$$\widehat{E}[X(t)] = (x_0 - 1,00006) \exp \left\{ 0,200005838(t - t_0) \right\} + 1,00006.$$

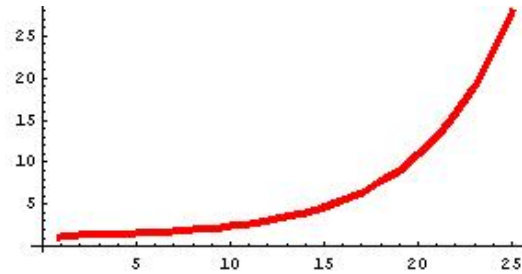


Figura 1.4: Función tendencia estimada.

Representando conjuntamente la función media estimada junto con los datos simulados obtenemos la Figura 1.5.

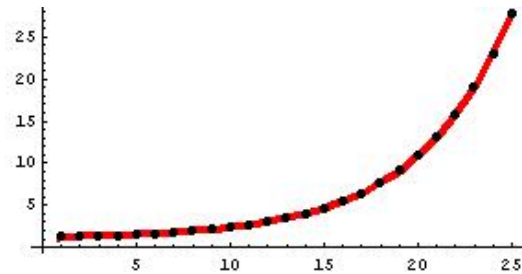


Figura 1.5: Función media estimada y datos simulados.

La **función media condicionada** viene dada por la siguiente expresión:

$$E[X(t)/X(s) = x_s] = (x_s - \gamma) \exp \left\{ \mu(t - s) \right\} + \gamma \quad (1.22)$$

que en nuestro caso queda como:

$$E[X(t)/X(s) = x_s] = (x_s - 1) \exp \left\{ 0,2(t - s) \right\} + 1$$

Podemos representar gráficamente la expresión anterior como se muestra en la Figura 5.9.

La Figura 1.7 muestra conjuntamente la función media condicionada junto con los datos simulados. Aquí volvemos a comprobar como los datos simulados se ajustan perfectamente a la función.

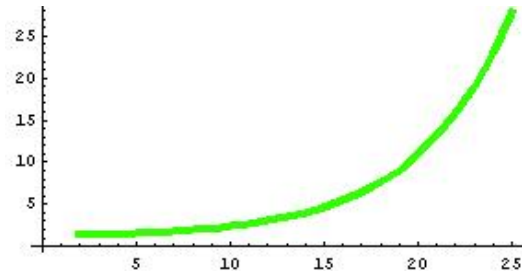


Figura 1.6: Función media condicionada.

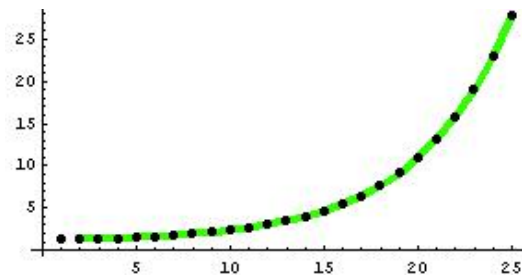


Figura 1.7: Función media condicionada y datos simulados.

Aplicando el teorema de Zehna, la función media condicionada estimada del proceso se obtiene mediante la expresión

$$\widehat{E}[X(t)/X(s) = x_s] = (x_s - \hat{\gamma}) \exp \left\{ \hat{\mu}(t - s) \right\} + \hat{\gamma}$$

y para nuestros datos obtenemos la siguiente expresión que representamos en la Figura 1.8:

$$\widehat{E}[X(t)/X(s) = x_s] = (x_s - 1,00006) \exp \left\{ 0,200005838(t - s) \right\} + 1,00006$$

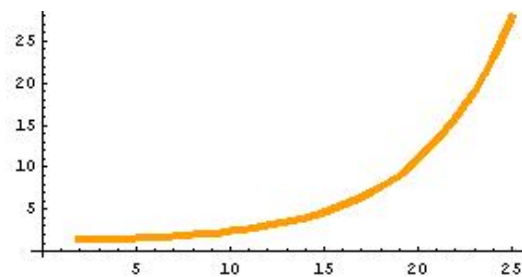


Figura 1.8: Función media condicionada estimada.

La Figura 1.9 muestra conjuntamente la función media condicionada estimada junto con los datos simulados, que vuelve a reflejar el ajuste perfecto de los datos a la función.

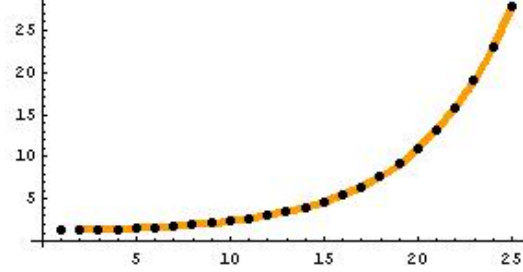


Figura 1.9: Función media condicionada estimada y datos simulados.

1.4.2. Simulación de la trayectoria del proceso a partir del algoritmo propuesto por Rao

Se parte de la ecuación integral de Itô

$$x(t, \omega) = x_u(\omega) + \int_u^t a(s, x(s, \omega)) ds + \int_u^t b(s, x(s, \omega)) dW(s) \quad (1.23)$$

donde $W(t)$ es el proceso de Wiener. Dicha ecuación es la forma integral de la ecuación diferencial estocástica de Itô,

$$dx(t, \omega) = a(t, x(t, \omega)) dt + b(t, x(t, \omega)) dW(t) \quad (1.24)$$

con la condición inicial $x(u, \omega) = x_u(\omega)$.

A las funciones a y b se les impone que tengan derivadas parciales sucesivas continuas hasta el tercer orden en el intervalo considerado. Dividiendo dicho intervalo en intervalos de amplitud h , $u = t_1 < t_2 < \dots < t_n = v$ con $h = t_{i+1} - t_i$, se puede discretizar la ecuación integral en la forma

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} a(t, x) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} b(t, x) dW(t); \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (1.25)$$

A continuación se desarrollan por Taylor, sobre el punto (t_n, x_n) donde $x_n = x(t_n)$ hasta un cierto orden (dependiendo del orden deseado de error) y se evalúan las integrales resultantes.

En concreto en este algoritmo propuesto se desarrolla la función $a(t, x)$ hasta el segundo orden, mientras que para la función $b(t, x)$ el desarrollo es hasta el tercer orden.

La ecuación iterativa en la que se basa el algoritmo es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} = & X_n + a_n h + b_n Z_{1n} + \frac{1}{2} h^2 \left(at_n + a_{x_n} a_n - \frac{1}{2} a_{x_n} b_{x_n} b_n \right) + \\
 & + Z_{2n} \left(a_{x_n} b_n - b_{t_n} - b_{x_n} a_n + \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n \right) + \frac{1}{2} (Z_{1n}^2 - h) b_{x_n} b_n + \\
 & + Z_{1n} h \left(b_{t_n} + b_{x_n} a_n - \frac{1}{2} b_{x_n}^2 b_n \right) + Z_{3n} b_{x_n} a_{x_n} b_n + \\
 & + \frac{1}{2} (Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}) (a_{x_n} b_{x_n} b_n + a_{x_n x_n} b_n^2) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n} \right) (b_{x_n x_n} b_n^2 + b_{x_n}^2 b_n) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 + Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) \left(b_{t_n x_n} b_n + b_{x_n x_n} a_n b_n - \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 - Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) \left(b_{x_n}^2 a_n + b_{x_n} b_{t_n} - \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} Z_{1n}^4 - 3 Z_{1n} Z_{2n} + 3 Z_{3n} \right) \left(\frac{1}{6} b_{x_n x_n x_n} b_n^3 + \frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 \right) + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n} \right) \left(\frac{1}{2} b_{x_n x_n} b_{x_n} b_n^2 + \frac{1}{2} b_{x_n}^3 b_n \right)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_n &= a(x_n, t_n), & a_{t_n} &= \frac{\partial a}{\partial t}(x_n, t_n), & a_{x_n} &= \frac{\partial a}{\partial x}(x_n, t_n), \\
 b_n &= b(x_n, t_n), & b_{t_n} &= \frac{\partial b}{\partial t}(x_n, t_n), & b_{x_n} &= \frac{\partial b}{\partial x}(x_n, t_n), \\
 b_{x_n x_n} &= \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}(x_n, t_n), & b_{x_n x_n x_n} &= \frac{\partial^3 b}{\partial x^3}(x_n, t_n).
 \end{aligned}$$

Se puede probar que:

$$(Z_{1n}, Z_{2n}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \Sigma), \quad \mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} h & h^2/2 \\ h^2/2 & h^3/3 \end{pmatrix} \text{ y } \quad Z_{3n} \cong \mathcal{N}(0, h^4/12),$$

para valores de h pequeños.

Recordemos que los momentos infinitesimales del proceso que ahora tratamos son:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \mu(x - \gamma) \\ A_2(x) &= \sigma^2(x - \gamma)^2, \end{aligned}$$

obteniéndose:

$$a_n = \mu(x_n - \gamma), \quad b_n = \sigma(x_n - \gamma), \quad a_{x_n} = \mu \quad \text{y} \quad b_{x_n} = \sigma$$

siendo el resto de las parciales son nulas.

Por lo tanto el algoritmo quedaría en este caso:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (X_n - \gamma) \left[1 + \mu h + \sigma Z_{1n} + \frac{h^2}{2} \mu \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) + \right. \\ &\quad + \frac{\sigma^3}{2} Z_{2n} + \frac{\sigma^2}{2} (Z_{1n}^2 - h) + \sigma \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) Z_{1n} h + \\ &\quad + \sigma^2 \mu Z_{3n} + \mu \frac{\sigma^2}{2} (Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n}) + \frac{\sigma^3}{2} \left(\frac{1}{3} Z_{1n}^3 - Z_{2n} \right) + \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{2} \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left(Z_{1n}^2 h - \frac{1}{2} h^2 - Z_{3n} - Z_{1n} Z_{2n} \right) + \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sigma^2}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{6} Z_{1n}^4 - Z_{1n} Z_{2n} - Z_{3n} \right) \right] + \gamma. \end{aligned}$$

Y simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (X_n - \gamma) \left[1 + \mu h - \frac{\sigma^2}{2} h + \sigma Z_{1n} + \frac{\sigma^2}{2} Z_{1n}^2 + \frac{\sigma^3}{6} Z_{1n}^3 + \frac{\sigma^4}{24} Z_{1n}^4 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) h \left(\frac{\mu h}{2} - \frac{\sigma^4}{4} h + \sigma Z_{1n} + \frac{\sigma^2}{2} Z_{1n}^2 \right) \right] + \gamma. \end{aligned} \quad (1.26)$$

De esta forma pueden simularse trayectorias del proceso, teniendo en cuenta que el proceso Wiener se obtiene como suma de distribuciones $\mathcal{N}(0, h)$, con $h = t_i - t_{i-1}$. Considerando este resultado, se simula una trayectoria utilizando el programa Mathematica para los siguientes valores:

Simulación					
n= n° de datos simulados	$h = t_i - t_{i-1}$	Valor inicial	γ	σ	μ
25	1	1.22139	1	0.0001	0.2

Cuadro 1.4: Valores utilizados en la simulación.

Los datos obtenidos se muestran Tabla 1.6. A partir de la muestra simulada del proceso, se estiman los parámetros por máxima verosimilitud, y para ello se utiliza el método de aproximación no lineal Newton-Raphson para aproximar el valor de $\hat{\gamma}$. Para ello se utiliza una implementación con el programa Mathematica. Dicho método arroja los resultados que se muestran en la Tabla 1.5. Puede comprobarse, como las estimaciones de los parámetros del proceso obtenidas para los datos simulados por el método que nos ocupa, no son tan próximas a los valores de los parámetros de los que partíamos, lo que nos está indicando, que este método de simulación no es tan bueno como el expuesto en la sección anterior, lo cual puede explicarse, ya que este método se obtiene a partir de una aproximación numérica de la ecuación integral de Itô, mientras que el método anterior se basa en la solución exacta de la ecuación diferencial estocástica (E.D.E) de Itô.

Estimación			
$\hat{\gamma}$	\hat{a}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
0.99987	0.198815559	0.198815563	0.0000895

Cuadro 1.5: Estimación de los parámetros.

La Figura 1.10 muestra la trayectoria simulada.

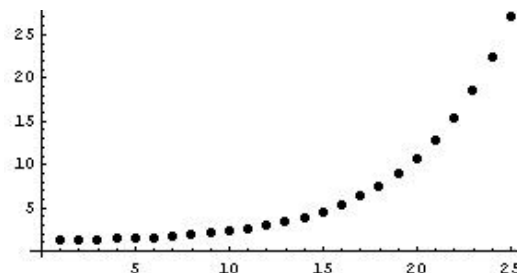


Figura 1.10: Trayectoria simulada.

t_i	x_i
0	1.2213885188953788
1	1.2701291644304429
2	1.3295510384027700
3	1.4021104895422550
4	1.4905837300465950
5	1.5985398099562240
6	1.7301453495758770
7	1.8907555006225456
8	2.0867135129769440
9	2.3257956702602147
10	2.6171919665737740
11	2.9727502758970994
12	3.4067926083559414
13	3.9356983782007330
14	4.5811984552913490
15	5.3688158736817600
16	6.3301351303705350
17	7.5022947295694890
18	8.9317243741296050
19	10.6782448503976470
20	12.8075809437550920
21	15.4066933129440900
22	18.5761997254920960
23	22.4425949982277860
24	27.1621717171008400

Cuadro 1.6: Valores simulados según Tabla 1.3.

Al igual que antes, podemos calcular la función media y la función media condicionada estimada y compararlas con las respectivas funciones teóricas que se han representado anteriormente.

Se representa la función media conjuntamente con los datos simulados. Esto se muestra en la Figura 1.11. Puede comprobarse, como en todos los casos, los datos simulados se ajustan perfectamente a la función tendencia representada en cada caso.

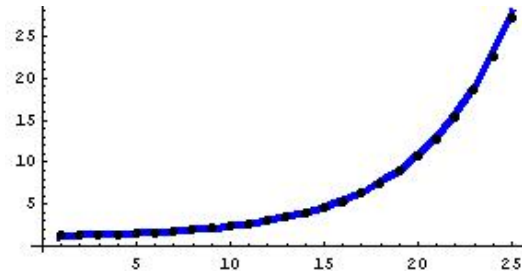


Figura 1.11: Función media y datos simulados.

La función media estimada en este caso es:

$$\widehat{E}[X(t)] = (x_0 - 0,99987) \exp \left\{ 0,198815564(t - t_0) \right\} + 0,99987.$$

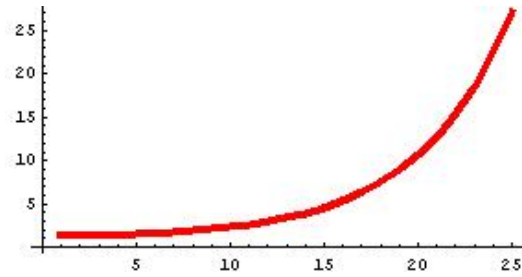


Figura 1.12: Función media estimada.

Representando conjuntamente la tendencia estimada junto con los datos simulados obtenemos el siguiente gráfico:

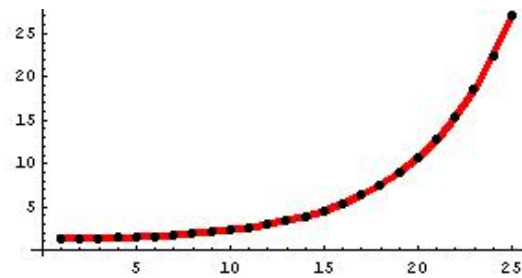


Figura 1.13: Función media estimada y datos simulados.

Se representa la función tendencia condicionada junto con los datos simulados

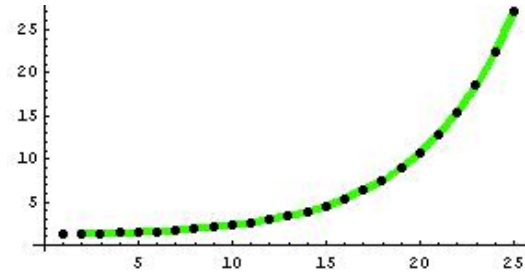


Figura 1.14: Tendencia condicionada y datos simulados.

La función media condicionada estimada para nuestros datos es:

$$\widehat{E}[X(t)/X(s) = x_s] = (x_s - 0,99987) \exp \left\{ 0,198815564(t - s) \right\} + 0,99987.$$

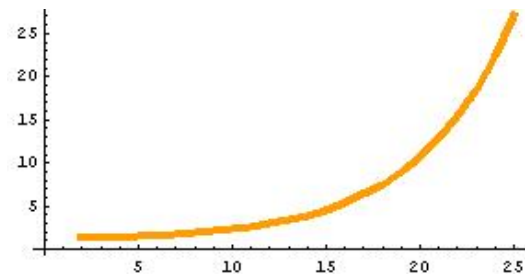


Figura 1.15: Función media condicionada.

Finalmente se representa la función media condicionada estimada junto con los datos simulados,

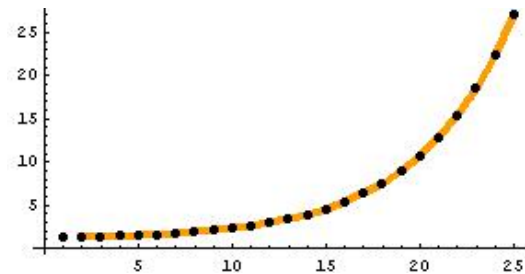


Figura 1.16: Función media condicionada estimada y datos simulados.

1.5. Reparametrización del proceso según Wingo

Es bien conocido el problema que plantea la introducción del tercer parámetro en el proceso en lo que a la estimación de los parámetros se refiere.

La principal dificultad teórica es que la función de verosimilitud alcanza máximos globales en puntos donde los parámetros toman valores inadmisibles y donde el valor máximo global de la función de verosimilitud es $+\infty$.

La principal dificultad computacional la encontramos en que los métodos numéricos iterativos que se usan para la estimación máximo verosímil, deben tratarse con extremo cuidado, ya que estos métodos no evitan la región de atracción del máximo infinito de la función de verosimilitud, por lo que aparecerán problemas de convergencia. Es decir, al intentar encontrar una solución para la ecuación (1.4) por algún método de aproximación numérica, y dado que la estimación inicial de γ no está lo suficientemente cerca de la solución, dicho método convergerá hacia la solución degenerada $\gamma = -\infty$. Por lo tanto, se necesita un algoritmo que sea a la vez computacionalmente eficiente y seguramente convergente. Para intentar resolver este problema computacional, Wingo [58], para el caso de la distribución lognormal triparamétrica, propuso un algoritmo computacional basado en la reparametrización de la función de verosimilitud, usando una transformación paramétrica que reduce el intervalo de la recta real sobre la cual se encuentran muchos máximos locales finitos de la función de log-verosimilitud. Dicha función se maximiza globalmente mediante métodos numéricos en el intervalo reducido encontrado. El extremo superior del intervalo de búsqueda puede elegirse en función de la precisión de los datos observados.

A continuación se describe el algoritmo que Wingo usó, y se plantea la misma reparametrización para el caso del proceso de difusión lognormal unidimensional con tres parámetros.

Consideramos la siguiente transformación:

$$\gamma(\theta) = x_1 - \exp(-\theta), \quad] - \infty, +\infty[\quad (1.27)$$

con x_1 el mínimo de los valores de la muestra.

Está claro que $\gamma \longrightarrow x_1$ cuando $\theta \longrightarrow +\infty$ y que $\gamma \longrightarrow -\infty$ cuando $\theta \longrightarrow -\infty$. Esta transformación se sustituye en la función de log-verosimilitud

$$\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)],$$

obteniendo

$$\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma(\theta))],$$

que denotaremos por

$$\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \theta)].$$

El algoritmo computacional es simple:

1. Maximizar globalmente $\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \theta)]$ en un intervalo compacto de la recta real, para obtener un máximo global $\hat{\theta}$.
2. El estimador máximo verosímil local, $\hat{\gamma}$, se calcula entonces a través de

$$\hat{\gamma}(\theta) = x_1 - \exp(-\hat{\theta}). \quad (1.28)$$

3. Los estimadores máximo verosímiles restantes se calculan sustituyendo el valor $\hat{\gamma}$ en las ecuaciones (1.1) y (1.2).

La transformación (1.27) puede verse aproximadamente como una compresión del rango de valores sobre el cual, la función de log-verosimilitud condicionada debe ser maximizada para encontrar $\hat{\gamma}$. Evidentemente esta compresión es computacionalmente ventajosa, pudiendo demostrarse, que maximizar $\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)]$ sobre γ puede requerir hasta 10 evaluaciones más de la función objetivo que cuando se maximiza sobre θ .

En los datos numéricos que Wingo presenta en su artículo [58], el intervalo búsqueda elegido para θ ha sido $[-10, 10]$. Esta elección del rango de búsqueda de θ tiene la ventaja de ser bastante amplio para cubrir la porción en la que se puede encontrar el verdadero valor del parámetro umbral γ , y bastante pequeño como para excluir al máximo infinito de la función de log-verosimilitud que se da en $\theta = +\infty$. Dicho intervalo correspondería aproximadamente al intervalo $[-20,000; x_1 - \epsilon]$ en γ -espacio, donde $\epsilon \simeq 4 \times 10^{-5}$, elección que puede servir para la mayoría de las muestras que se pueden encontrar en la práctica.

A veces es deseable expresar el extremo derecho del intervalo de búsqueda para θ como función de la precisión de los datos. Por ejemplo, si cada una de las observaciones x_i están ajustadas a tres decimales y la función de log-verosimilitud tiene que ser maximizada sobre el intervalo $[-20,000, x_1 - \epsilon]$ de γ , no se puede elegir $\epsilon < 10^{-3}$, puesto que la probabilidad de que el máximo finito de la función de log-verosimilitud para γ pertenezca al intervalo $x_1 - \epsilon < \gamma < x_1$ para $\epsilon < 10^{-3}$ es extremadamente remota. Para reflejar la precisión de los datos podemos elegir $\epsilon < 10^{-d}$ o $\epsilon = |x_1| \times 10^{-10}$, donde $d \geq 1$, es el número de dígitos decimales de precisión en los datos. El correspondiente límite superior del intervalo de búsqueda para θ puede ser $\theta = -\ln(10^{-d})$ o $\theta = -\ln(|x_1| \times 10^{-10})$.

Aplicando esta transformación a nuestro proceso, la función de log-verosimilitud quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \theta)] &= -\frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=2}^n \ln(x_i - [x_1 - \exp(-\theta)]) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \ln(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=2}^n \frac{1}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} \times \\ &\quad \times \left[\ln(x_i - [x_1 - \exp(-\theta)]) - \ln(x_{i-1} - [x_1 - \exp(-\theta)]) - \right. \\ &\quad \left. - a(t_i - t_{i-1}) \right]^2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Derivando esta ecuación respecto al tercer parámetro tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \theta)]}{\partial \theta} &= \sum_{i=2}^n \frac{e^{-\theta}}{(x_i - \gamma(\theta))} - \\ &\quad - \sum_{i=2}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{\sigma^2(x_i - \gamma(\theta))(x_{i-1} - \gamma(\theta))(t_i - t_{i-1})} \times \quad (1.30) \\ &\quad \times \left[\ln(x_i - \gamma(\theta)) - \ln(x_{i-1} - \gamma(\theta)) - a(t_i - t_{i-1}) \right] \end{aligned}$$

con $\gamma(\theta) = x_1 - \exp(-\theta)$.

Igualando a cero la expresión anterior y realizando algunos cálculos obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} & \hat{a} \left(\frac{1}{(x_n - \hat{\gamma}(\theta))} - \frac{1}{(x_1 - \hat{\gamma}(\theta))} \right) = \\ & = \sum_{i=2}^n \frac{e^{-\theta \hat{\sigma}^2}}{(x_i - \hat{\gamma}(\theta))} - \sum_{i=2}^n \frac{(x_i - x_{i-1}) \left[\ln(x_i - \hat{\gamma}(\theta)) \ln(x_{i-1} - \hat{\gamma}(\theta)) \right]}{(x_i - \hat{\gamma}(\theta))(x_{i-1} - \hat{\gamma}(\theta))(t_i - t_{i-1})} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Esta expresión nos proporciona un estimador para θ . Sustituyendo esta expresión en las otras ecuaciones de verosimilitud, obtendremos los estimadores para el resto de parámetros, como ya se describía anteriormente.

Capítulo 2

Proceso de difusión lognormal bidimensional con tres parámetros y q factores exógenos

2.1. Definición del modelo

Se introduce el proceso de difusión lognormal bidimensional con tres parámetros, y q factores exógenos, usando la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov.

Sea $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)'$ un vector bidimensional, y consideramos $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$, un proceso de Markov con valores en $\prod_{i=1}^2]\gamma_i, +\infty[$, con trayectorias continuas casi seguramente y con probabilidad de transición dada por

$$P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x],$$

con $X(t) = (X_1(t), X_2(t))'$ y $X(s) = (X_1(s), X_2(s))'$; y x e y son vectores bidimensionales.

Supongamos las siguientes condiciones:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} P(dy, t+h/x, t) = 0$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)P(dy, t+h/x, t) = f(x, t) = \begin{pmatrix} \left(f_{10} + \sum_{l=1}^q f_{1l} F_l(t) \right) (x_1 - \gamma_1) \\ \left(f_{20} + \sum_{l=1}^q f_{2l} F_l(t) \right) (x_2 - \gamma_2) \end{pmatrix}$

donde F_l , $l = 1, \dots, q$, son funciones continuas sobre $[t_0, T]$.

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)' P(dy, t+h/x, t) = (y-x)B(y-x)'$$

con B una matriz simétrica definida no negativa con elementos $b_{ii} > 0$.

- Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

Utilizando el hecho de que la transformada $Z(t) = X(t) - \gamma$ es un proceso de difusión lognormal con dos parámetros y q factores exógenos, obtenemos la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov correspondiente a la difusión caracterizada por las condiciones expuestas anteriormente.

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}(x_i - \gamma_i)(x_j - \gamma_j) \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 \left(f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) (x_i - \gamma_i) \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 b_{ij} \frac{\partial^2 [(y_i - \gamma_i)(y_j - \gamma_j)P]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^2 \left(f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il} F_l(t) \right) \frac{\partial [(y_i - \gamma_i)P]}{\partial y_i} = 0, \quad (2.2)$$

donde $x = (x_1, x_2)'$ e $y = (y_1, y_2)'$ tal que $x_i > \gamma_i$ e $y_i > \gamma_i$ para $i = 1, 2$ y $P = P(y, t/x, s)$ es la función de densidad de transición.

La solución común de estas ecuaciones, bajo la condición inicial

$$P(y, t/x, s) = \delta(y - x)$$

tiene la siguiente expresión

$$P(y, t/x, s) = \left[\left(\prod_{i=1}^2 (y_i - \gamma_i) \right) (2\pi)(t-s)|B|^{1/2} \right]^{-1} \times \exp \left\{ -\frac{Q}{2(t-s)} \right\} \quad (2.3)$$

donde Q es la forma cuadrática:

$$Q = \left(\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - \beta_0(t-s) - \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right)' \times \\ \times B^{-1} \left(\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - \beta_0(t-s) - \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right)$$

con $\beta_0 = (f_{10} - \frac{1}{2}b_{11}, f_{20} - \frac{1}{2}b_{22})' = f_0 - \frac{1}{2}diag(B)$ y $\beta_l = (f_{1l}, f_{2l})'$, $l = 1, \dots, q$.

2.2. Momentos del proceso

Los momentos del proceso de difusión lognormal con tres parámetros y q factores exógenos son dados a partir de los momentos del proceso de difusión lognormal con dos parámetros y con q factores exógenos $Z(t) = X(t) - \gamma$.

Por lo tanto, dado $X(s) = x_s = (x_{1s}, x_{2s})'$,

$$E[e^{\sigma' \ln(Z(t))}] = \exp \left\{ \sigma' \left(\ln(x_s - \gamma) + \beta_0(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2}(t-s)\sigma' B \sigma \right\} \quad (2.4)$$

con $\sigma' = (r_1, r_2)$, ya que

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_2 \left(\ln(x_s - \gamma) + \beta_0(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau; (t-s)B \right)$$

donde:

- $x_s = (x_{s1}, x_{s2})'$
- $\beta_0 = (f_{10} - \frac{1}{2}b_{11}, f_{20} - \frac{1}{2}b_{22})'$
- $\beta_l = (f_{1l}, f_{2l})'$, $l = 1, \dots, q$
- $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

Considerando todo lo anterior tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
E[(X(t) - \gamma)^r / X(s) = x_s] &= \\
&= \exp \left\{ r_1 \left(\ln(x_{1s} - \gamma_1) + (f_{10} - \frac{1}{2}b_{11})(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \right. \\
&\quad + r_2 \left(\ln(x_{2s} - \gamma_2) + (f_{20} - \frac{1}{2}b_{22})(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(t-s) \left(r_1^2 b_{11} + r_2^2 b_{22} + 2r_1 r_2 b_{12} \right) \right\} = \\
&= (x_{1s} - \gamma_1)^{r_1} (x_{2s} - \gamma_2)^{r_2} \exp \left\{ r_1 \left((f_{10} - \frac{1}{2}b_{11})(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \right. \\
&\quad + r_2 \left((f_{20} - \frac{1}{2}b_{22})(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(t-s) \left(r_1^2 b_{11} + r_2^2 b_{22} + 2r_1 r_2 b_{12} \right) \right\}. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Y de aquí obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
E[X^r(t) / X(s) = x_s] &= \sum_{p=0}^{r_1} \sum_{m=0}^{r_2} \binom{r_1}{p} (x_{1s} - \gamma_1)^p \gamma_1^{r_1-p} \binom{r_2}{m} (x_{2s} - \gamma_2)^m \gamma_2^{r_2-m} \times \\
&\quad \times \exp \left\{ p \left((f_{10} - \frac{1}{2}b_{11})(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \right. \\
&\quad + m \left((f_{20} - \frac{1}{2}b_{22})(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(t-s) \left(p^2 b_{11} + m^2 b_{22} + 2pm b_{12} \right) \right\}. \tag{2.6}
\end{aligned}$$

2.2.1. Función media

Para calcular la función media de la primera variable, se considera el caso particular en el que $\sigma' = (1, 0)$, y lo aplicamos en (2.6) obteniendo la siguiente expresión:

$$E[X_1(t) / X(s) = x_s] = \gamma_1 (x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ f_{10}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \tag{2.7}$$

Razonando de la misma forma pero en este caso se considera $\sigma' = (0, 1)$, se obtiene la media de la segunda variable:

$$E[X_2(t)/X(s) = x_s] = \gamma_2(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ f_{20}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.8)$$

2.2.2. Función varianza

Se calcula previamente el momento de segundo orden. Para la primera variable se considera $\sigma' = (2, 0)$ en (2.4):

$$\begin{aligned} E[X_1^2(t)/X(s) = x_s] &= \gamma_1^2 + 2\gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ f_{10}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} + \\ &+ (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ (2f_{10} + b_{11})(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Var[X_1(t)/X(s) = x_s] &= \gamma_1^2 + 2\gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ f_{10}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} + \\ &+ (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ (2f_{10} + b_{11})(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} - \\ &- \gamma_1^2 - (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ 2f_{10}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} - \\ &- 2\gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ f_{10}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Luego la *función varianza* de la primera variable del proceso será:

$$\begin{aligned} Var[X_1(t)/X(s) = x_s] &= (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ 2f_{10}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} \times \\ &\times \left[\exp \{ b_{11}(t-s) \} - 1 \right]. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Y análogamente se obtiene la *función varianza* de la segunda variable del proceso,

$$\begin{aligned} \text{Var}[X_2(t)/X(s) = x_s] &= (x_{2s} - \gamma_2)^2 \exp \left\{ 2f_{20}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} \times \\ &\times \left[\exp \{ b_{22}(t-s) \} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.2.3. Función covarianza

La función covarianza viene dada por:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\ &= E[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] - E[X_1(t)/X(s) = x_s]E[X_2(t)/X(s) = x_s], \end{aligned}$$

por lo tanto, consideramos $\sigma' = (1, 1)$ en (2.4) para calcular

$$E[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s]$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} E[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\ &= \gamma_1\gamma_2 + (x_{1s} - \gamma_1)(x_{2s} - \gamma_2) \times \\ &\times \exp \left\{ \left(f_{10} + f_{20} + b_{12} \right)(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} + \\ &+ \gamma_1(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ f_{20}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} + \\ &+ \gamma_2(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ f_{10}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

A continuación se calcula el producto de las dos esperanzas, obteniendo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 E[X_1(t)/X(s) = x_s]E[X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\
 &= \gamma_1\gamma_2 + (x_{1s} - \gamma_1)(x_{2s} - \gamma_2) \times \\
 &\quad \times \exp \left\{ (f_{10} + f_{20})(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} + \\
 &\quad + \gamma_1(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ f_{20}(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} + \\
 &\quad + \gamma_2(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ f_{10}(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\}
 \end{aligned}$$

, entonces:

$$\begin{aligned}
 Cov[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\
 &= (x_{1s} - \gamma_1)(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ (f_{10} + f_{20})(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_{1l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau + \sum_{l=1}^q \beta_{2l} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} \times \\
 &\quad \cdot \left[\exp \{ b_{12}(t - s) \} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.3. Estimación de los parámetros

Se considera un muestreo discreto del proceso

$$\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n\}$$

en los instantes $\{t_1, \dots, t_n\}$, con

$$X(t_\alpha) = (X(t_{\alpha,1}), X(t_{\alpha,2}))'$$

y

$$x_{t_\alpha} = (x_{t_{\alpha,1}}, x_{t_{\alpha,2}})'$$

Bajo la condición $P[X(t_1) = x_1] = 1$, la función de verosimilitud asociada al proceso será:

$$\begin{aligned}
 L(x_1, \dots, x_n, \beta, B, \gamma) &= (2\pi)^{-(n-1)} |B|^{-\frac{(n-1)}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left(\prod_{i=1}^2 (x_{\alpha i} - \gamma_i)^{-1} \right) \times \\
 &\quad \times (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde

$$u_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} \left(t_\alpha - t_{\alpha-1}, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_q(\tau) d\tau \right)'$$

y

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma)).$$

Tenemos en cuenta que cuando γ tiende a $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})'$, donde $x_i^{(1)} = \inf_{1 \leq \alpha \leq n} (x_{\alpha i})$ para $i = 1, 2$, la función de verosimilitud tiende a infinito; por lo tanto, vamos a intentar obtener los estimadores de máxima verosimilitud local, L.M.L.E.

Sustituyendo x_α por v_α en (2.12) obtenemos:

$$L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-(n-1)} |B|^{-\frac{(n-1)}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} \quad (2.13)$$

Calculando el logaritmo de (2.13) se obtiene la función de log-verosimilitud:

$$\begin{aligned} \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= -(n-1) \ln(2\pi) - \frac{(n-1)}{2} \ln(|B|) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' |B|^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

A continuación se calcula la diferencial de (2.14) y obtenemos:

$$\begin{aligned} d \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} \text{tr} [B^{-1} (dB)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\alpha=2}^n [-(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (dB) B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) - \\ &\quad - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (d\beta) u_\alpha - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha (d\gamma)] \end{aligned} \quad (2.15)$$

donde

$$W_\alpha = -\frac{dv_\alpha}{d\gamma} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha,1}-\gamma_1} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1}-\gamma_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{\alpha,2}-\gamma_2} - \frac{1}{x_{\alpha-1,2}-\gamma_2} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$d \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) = -\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left[\sum_{\alpha=2}^n (B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' - I_2) \right] \times \right. \\ \left. \times B^{-1}(dB) + 2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta) u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} \right\} + \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha (d\gamma)$$

entonces

$$d \ln L(v_1, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) = \\ = \frac{1}{2} \text{Vec} \left[B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n ((v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} - I_2) \right]' d \text{Vec}(B) + \\ + \text{Vec} \left[B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u_\alpha' \right]' d \text{Vec}(\beta) + \\ + \left[\sum_{\alpha=2}^n W_\alpha B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right] d\gamma.$$

Igualando a cero la diferencial obtenemos:

$$\hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) u_\alpha' = 0 \\ \hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=2}^n \left\{ \left[(\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)(\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)' \hat{B}^{-1} \right] - I_2 \right\} = 0 \\ \sum_{\alpha=2}^n \hat{W}_\alpha \hat{B}^{-1} (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) = 0$$

resultando finalmente:

$$\hat{\beta} = \sum_{\alpha=2}^n \hat{v}_\alpha u_\alpha' \left[\sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha' \right]^{-1} \\ \hat{B} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)(\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)' \quad (2.16) \\ \sum_{\alpha=2}^n \hat{W}_\alpha \hat{B}^{-1} (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) = 0$$

donde

$$u_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} \left(t_\alpha - t_{\alpha-1}, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_q(\tau) d\tau \right)'$$

$$\hat{v}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\ln(x_\alpha - \hat{\gamma}) - \ln(x_{\alpha-1} - \hat{\gamma}))$$

$$\widehat{W}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha,1} - \hat{\gamma}_1} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1} - \hat{\gamma}_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{\alpha,2} - \hat{\gamma}_2} - \frac{1}{x_{\alpha-1,2} - \hat{\gamma}_2} \end{pmatrix}$$

y

$$\hat{\gamma}_i < x_i^{(1)} = \inf_{1 \leq \alpha \leq n} (x_{\alpha i}), \quad i = 1, 2.$$

La resolución de esta ecuación no puede hacerse mediante un método directo, por lo tanto consideramos:

$$\hat{\beta}(\gamma) = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha u'_\alpha \left[\sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u'_\alpha \right]^{-1} \quad (2.17)$$

$$\hat{B}(\gamma) = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}(\gamma) u_\alpha) (v_\alpha - \hat{\beta}(\gamma) u_\alpha)' \quad (2.18)$$

$$\lambda(\hat{\beta}(\gamma), \hat{B}(\gamma), \gamma) = \sum_{\alpha=2}^n W_\alpha \hat{B}^{-1}(\gamma) (v_\alpha - \hat{\beta}(\gamma) u_\alpha) \quad (2.19)$$

con

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma)).$$

Finalmente obtenemos una aproximación de los estimadores $\hat{\beta}$, \hat{B} y $\hat{\gamma}$, resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales con algún método de aproximación no lineal como el método de Newton-Raphson, el método de la aproximación a Newton con derivadas fijas, ó el método Scoring de Fisher.

2.4. Cálculo de la matriz de información de Fisher

Partimos de la primera derivada de la función de log-verosimilitud:

$$\begin{aligned}
 d \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} \text{tr}[B^{-1}(dB)] - \\
 &\quad -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\alpha=2}^n [-(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha) - \\
 &\quad -2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(d\beta) u_\alpha - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha(d\gamma)].
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

A partir de aquí, podemos calcular la segunda diferencial de la función de log-verosimilitud. Para ello se calculan las derivadas para cada uno de los sumandos de la primera derivada respecto a los tres parámetros, resultándonos las expresiones que a continuación se muestran.

$$\begin{aligned}
 d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (n-1) B^{-1}(dB) B^{-1}(dB) - \right. \\
 &\quad -2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1}(dB) B^{-1} - \\
 &\quad -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta) u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1} - \\
 &\quad -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta u_\alpha)' B^{-1}(d\beta) u_\alpha - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1}(d\beta) u_\alpha - \\
 &\quad -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha(d\gamma) - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1} W_\alpha(d\gamma) - \\
 &\quad -2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1} W_\alpha(d\gamma) - 2 \sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha d\gamma)' B^{-1}(d\beta) u_\alpha - \\
 &\quad \left. -2 \sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha d\gamma)' B^{-1} W_\alpha(d\gamma) + 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(I_2 \otimes (d\gamma)') \tilde{W}_\alpha(d\gamma) \right\}.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ B^{-1}(dB) B^{-1}(dB) B^{-1} \times \right. \\
 &\quad \times \left((n-1) B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -4B^{-1}(dB)B^{-1}(d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})' - 2B^{-1}(d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}u_{\alpha}'(d\beta)' - \\
 & -4 \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}'(d\beta)'B^{-1}W_{\alpha}(d\gamma) - 4 \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'B^{-1}(dB)B^{-1}W_{\alpha}(d\gamma) - \\
 & -2(d\gamma)' \sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha}B^{-1}W_{\alpha}(d\gamma) + 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'B^{-1}(I_2 \otimes (d\gamma)')\tilde{W}_{\alpha}(d\gamma) \Big\},
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

donde $\tilde{W}_{\alpha} = \frac{\partial W_{\alpha}}{\partial \gamma} = W_{\alpha,2} \otimes I_{2,1}$ tal que:

$$W_{\alpha,2} = (t_{\alpha} - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_{\alpha,1}-\gamma_1)^2} - \frac{1}{(x_{\alpha-1,1}-\gamma_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x_{\alpha,2}-\gamma_2)^2} - \frac{1}{(x_{\alpha-1,2}-\gamma_2)^2} \end{pmatrix}$$

con

$$I_{2,1} = (1, 0)' \in \mathbb{R}^2$$

además, utilizando los resultados de Magnus y Neudecker [41] tendremos que

$$\begin{aligned}
 (I_2 \otimes d\gamma)B^{-1}(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha}) &= (I_2 \otimes d\gamma)Vec(B^{-1}(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})) = \\
 &= (I_2 \otimes d\gamma)Vec((v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'B^{-1}) = \\
 &= Vec[d\gamma(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'B^{-1}].
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Teniendo en cuenta (2.22), podemos escribir (2.21) como:

$$\begin{aligned}
 d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= \frac{1}{2}Vec(B^{-1}(dB)B^{-1})' \times \\
 & \times Vec \left((dB)B^{-1} \left\{ (n-1)B - 2 \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})' \right] \right\} \right) - \\
 & - 2Vec(B^{-1}(dB)B^{-1})' Vec \left((d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})' \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -Vec((d\beta)'B^{-1})' Vec\left(\sum_{\alpha=2}^n u_{\alpha}u'_{\alpha}(d\beta)'\right) - 2\sum_{\alpha=2}^n u'_{\alpha}(d\beta)'B^{-1}W_{\alpha}(d\gamma) - \\
& -2Vec(B^{-1}(dB)B^{-1})' Vec\left(\sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha}(d\gamma)(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'\right) - \\
& -(d\gamma)'\left(\sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha}B^{-1}W_{\alpha}\right)(d\gamma) + \sum_{\alpha=2}^n Vec(d\gamma(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'B^{-1})'\tilde{W}_{\alpha}(d\gamma)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

como

$$Vec(B^{-1}(dB)B^{-1}) = dv(B)'D'_2(B \otimes B)^{-1}$$

entonces la expresión (2.23) se transformaría en

$$\begin{aligned}
d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) &= \frac{1}{2}dv(B)'D'_2(B \otimes B)^{-1} \times \\
& \times \left[\left\{ (n-1)B - 2 \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})' \right] B^{-1} \otimes I_2 \right\} D_2 dv(B) \right] - \\
& -2dv(B)'D'_2(B \otimes B)^{-1} \left(\sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})u'_{\alpha} \otimes I_2 \right) dVec(\beta) - \\
& -dVec(\beta)'I_{(2,q+1)}(B^{-1} \otimes I_{q+1})(I_2 \otimes A)I_{(q+1,2)}dVec(\beta) - \\
& -2Vec(\beta)' \sum_{\alpha=2}^n (u_{\alpha} \otimes I_2)B^{-1}W_{\alpha}(d\gamma) - \\
& -2dv(B)'D'_2(B \otimes B)^{-1} \sum_{\alpha=2}^n [(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha}) \otimes I_2] W_{\alpha}(d\gamma) - \\
& -(d\gamma)'\left(\sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha}B^{-1}W_{\alpha}\right)(d\gamma) + (d\gamma)'\sum_{\alpha=2}^n [(v_{\alpha} - \beta u_{\alpha})'B^{-1} \otimes I_2] \tilde{W}_{\alpha}(d\gamma)
\end{aligned}$$

Tenemos en cuenta además que

$$\begin{aligned}
 [(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} \otimes I_2] \tilde{W}_\alpha &= [(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} \otimes I_2] (W_{\alpha,2} \otimes I_{2,1}) = \\
 &= [(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_{\alpha,2}] \otimes I_{2,1} = \\
 &= I_{2,1} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_{\alpha,2}.
 \end{aligned}$$

Se calculan a continuación las parciales segundas respecto a los parámetros.

- Parcial respecto a $Vec(\beta)$ dos veces:

$$F_1 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial Vec(\beta) \partial Vec(\beta)'} = -I_{(2,q+1)} (B^{-1} \otimes A) I_{(q+1,2)}.$$

Utilizando las propiedades de las matrices de permutación obtenemos:

$$F_1 = -(A \otimes B^{-1}). \quad (2.24)$$

- Parcial respecto a $v(B)$ y $Vec(\beta)'$:

$$F_2 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial v(B) \partial Vec(\beta)'} = -D_2'(B \otimes B)^{-1} \left(\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u_\alpha' \otimes I_2 \right). \quad (2.25)$$

- Parcial respecto a $v(B)$ dos veces:

$$F_3 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial v(B) \partial v(B)'} = \frac{1}{2} (S + S')$$

donde

$$S = \frac{1}{2} D_2'(B \otimes B)^{-1} \left[\left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \otimes I_2 \right] D_2.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 F_3 &= \frac{1}{4} D_2' \left\{ (B \otimes B)^{-1} \left[\left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \otimes I_2 \right] \right\} + \\
 &+ \left[B^{-1} \left((n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) \otimes I_2 \right] (B \otimes B)^{-1} \left\{ \right\} D_2. \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

- Parcial respecto a $Vec(\beta)$ y γ' :

$$F_4 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial Vec(\beta) \partial \gamma'} = - \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_2) B^{-1} W_\alpha. \quad (2.27)$$

- Parcial respecto a $v(B)$ y γ' :

$$\begin{aligned} F_5 &= \frac{\partial^2 \ln L}{\partial v(B) \partial \gamma'} = -D'_2(B \otimes B)^{-1} \left[\sum_{\alpha=2}^n \left((v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes I_2 \right) W_\alpha \right] = \\ &= -D'_2(B \otimes B)^{-1} \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes W_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

- Parcial respecto a γ dos veces:

$$F_6 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma \partial \gamma'} = - \sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha B^{-1} W_\alpha) + \sum_{\alpha=2}^n I_{2,1} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_{\alpha,2}. \quad (2.29)$$

Por lo tanto, la matriz hessiana será:

$$H = \begin{pmatrix} F_1 & F'_2 & F_4 \\ F_2 & F_3 & F_5 \\ F'_4 & F'_5 & F_6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora los valores esperados de las submatrices anteriores:

$$E[F_1] = -(A \otimes B^{-1})$$

$$E[F_2] = -D'_2(B \otimes B)^{-1} E \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u'_\alpha \otimes I_2 \right] = 0$$

$$\begin{aligned} E[F_3] &= \frac{1}{4} D'_2 \{ (B \otimes B)^{-1} ((n-1)B) + B^{-1} (n-1)B (B \otimes B)^{-1} \} D_2 = \\ &= -\frac{n-1}{2} D'_2(B \otimes B)^{-1} D_2 \end{aligned}$$

$$E[F_4] = -E \left[\sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_2) B^{-1} W_\alpha \right] = - \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_2) B^{-1} E[W_\alpha]$$

$$\begin{aligned}
 E[F_5] &= -E \left[D_2'(B \otimes B)^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes W_\alpha \right] = 0 \\
 E[F_6] &= -E \left[\sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha B^{-1} W_\alpha) + \sum_{\alpha=2}^n I_{2,1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_{\alpha,2} \right] = \\
 &\quad - \sum_{\alpha=2}^n E [W_\alpha B^{-1} W_\alpha] .
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Proceso de difusión lognormal bidimensional con tres parámetros con vector de factores exógenos distintos

3.1. Definición del modelo

Se introduce el proceso de difusión lognormal con tres parámetros bidimensional y un factor exógeno, de manera que cada componente de dicho vector exógeno afecte a la correspondiente variable endógena de la tendencia infinitesimal del proceso, usando la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov.

Sea $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)'$ un vector bidimensional y consideramos $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$, un proceso de Markov con valores en $\prod_{i=1}^2]\gamma_i, +\infty[$, con trayectorias continuas casi seguramente y con probabilidad de transición dada por

$$P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x],$$

con $X(t) = (X_1(t), X_2(t))'$ y $X(s) = (X_1(s), X_2(s))'$; y x e y son vectores bidimensionales.

Supongamos las siguientes condiciones:

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} P(dy, t+h/x, t) = 0$$

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)P(dy, t+h/x, t) = b(x, t) = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \phi_1 g_1(t))(x_1 - \gamma_1) \\ (\alpha_2 + \phi_2 g_2(t))(x_2 - \gamma_2) \end{pmatrix}$$

donde para $i = 1, 2$, $g_i(t)$ es una función continua en $[t_0, T]$.

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)'P(dy, t+h/x, t) = (y-x)A(y-x)'$$

con A una matriz simétrica definida no negativa con elementos $a_{ii} > 0$.

- Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

Utilizando el hecho de que la transformada $Z(t) = X(t) - \gamma$ es un proceso de difusión lognormal con dos parámetros, obtenemos la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov correspondiente a la difusión caracterizada por las condiciones expuestas anteriormente.

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}(x_i - \gamma_i)(x_j - \gamma_j) \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^2 (\alpha_i + \phi_i g_i(t))(x_i - \gamma_i) \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad (3.1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 [(y_i - \gamma_i)(y_j - \gamma_j)P]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^2 (\alpha_i + \phi_i g_i(t)) \frac{\partial [(y_i - \gamma_i)P]}{\partial y_i} = 0 \quad (3.2)$$

donde $x = (x_1, x_2)'$ e $y = (y_1, y_2)'$ tal que $x_i > \gamma_i$ e $y_i > \gamma_i$ para todo $i = 1, 2$ y $P = P(y, t/x, s)$ es la función de densidad de transición.

La solución común de estas ecuaciones, bajo la condición inicial

$$P(y, t/x, s) = \delta(y - x)$$

tiene la siguiente expresión

$$P(y, t/x, s) = \left[\left(\prod_{i=1}^2 (y_i - \gamma_i) \right) (2\pi)(t-s)|A|^{1/2} \right]^{-1} \times \exp \left\{ -\frac{Q}{2(t-s)} \right\} \quad (3.3)$$

donde Q es la forma cuadrática:

$$Q = C' A^{-1} C$$

siendo $C = (\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - \beta(t - s) - \Gamma G(t; s))$, con

- $\beta = (\alpha_1 - \frac{1}{2}a_{11}, \alpha_2 - \frac{1}{2}a_{22})' = \alpha - \frac{1}{2}diag(A)$
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)'$
- $G(t; s) = \left(\int_s^t g_1(\tau) d\tau; \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right)$
- $\Gamma = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}$
- $x = (x_1; x_2)'$ e $y = (y_1; y_2)'$

Notamos:

- $B = (\beta; \Gamma) = \left(\begin{array}{c|cc} \beta_1 & \phi_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \phi_2 \end{array} \right)$
- $\bar{v}_{t,s} = \begin{pmatrix} t - s \\ G(t; s) \end{pmatrix}$

En términos de B y $\bar{v}_{t,s}$ la densidad de transición tiene la siguiente expresión:

$$P(y, t/x, s) = \left[\left(\prod_{i=1}^2 (y_i - \gamma_i) \right) (2\pi)(t - s) |A|^{1/2} \right]^{-1} \times \exp \left\{ - \frac{Q}{2(t - s)} \right\} \quad (3.4)$$

donde Q es la forma cuadrática:

$$Q = (\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - B\bar{v}_{t,s})' A^{-1} (\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - B\bar{v}_{t,s})$$

3.2. Momentos del proceso

Los momentos del proceso de difusión lognormal con tres parámetros son dados a partir de los momentos del proceso de difusión lognormal con dos parámetros $Z(t) = X(t) - \gamma$.

Por lo tanto, dado $X(s) = x_s = (x_{1s}, x_{2s})'$,

$$E[e^{\sigma' \ln(Z(t))}] = \exp \left\{ \sigma' \left(\ln(x_s - \gamma) + \beta(t-s) + \Gamma G(t; s) \right) + \frac{1}{2}(t-s)\sigma' A \sigma \right\} \quad (3.5)$$

con $\sigma' = (r_1, r_2)$, ya que

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_2 \left(\ln(x_s - \gamma) + \beta(t-s) + \Gamma G(t; s) \right); (t-s)A$$

donde:

- $x_s = (x_{s1}, x_{s2})'$
- $\beta = (\alpha_1 - \frac{1}{2}a_{11}, \alpha_2 - \frac{1}{2}a_{22})'$
- $\Gamma = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
- $G(t; s) = \left(\int_s^t g_1(\tau) d\tau; \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right)$.

Por lo tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} E[(X(t) - \gamma)^r / X(s) = x_s] &= \\ &= \exp \left\{ r_1 \left(\ln(x_{1s} - \gamma_1) + (\alpha_1 - \frac{1}{2}a_{11})(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + r_2 \left(\ln(x_{2s} - \gamma_2) + (\alpha_2 - \frac{1}{2}a_{22})(t-s) + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(t-s) \left(r_1^2 a_{11} + r_2^2 a_{22} + 2r_1 r_2 a_{12} \right) \right\} = \\ &= (x_{1s} - \gamma_1)^{r_1} (x_{2s} - \gamma_2)^{r_2} \exp \left\{ r_1 \left((\alpha_1 - \frac{1}{2}a_{11})(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_2 \left((\alpha_2 - \frac{1}{2}a_{22})(t-s) + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(t-s) \left(r_1^2 a_{11} + r_2^2 a_{22} + 2r_1 r_2 a_{12} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Y de aquí obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
E[X^r(t)/X(s) = x_s] &= \sum_{p=0}^{r_1} \sum_{m=0}^{r_2} \binom{r_1}{p} (x_{1s} - \gamma_1)^p \gamma_1^{r_1-p} \binom{r_2}{m} (x_{2s} - \gamma_2)^m \gamma_2^{r_2-m} \times \\
&\times \exp \left\{ p \left((\alpha_1 - \frac{1}{2}a_{11})(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right) + \right. \\
&+ m \left((\alpha_2 - \frac{1}{2}a_{22})(t-s) + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right) + \\
&\left. + \frac{1}{2}(t-s) \left(p^2 a_{11} + m^2 a_{22} + 2pma_{12} \right) \right\}. \quad (3.7)
\end{aligned}$$

3.2.1. Función media

Para calcular la función media de la primera variable, se considera el caso particular en el que $\sigma' = (1, 0)$, y lo aplicamos en (3.7) obteniendo la siguiente expresión:

$$E[X_1(t)/X(s) = x_s] = \gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ \alpha_1(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.8)$$

Razonando de la misma forma pero en este caso considerando $\sigma' = (0, 1)$, se obtiene la media de la segunda variable:

$$E[X_2(t)/X(s) = x_s] = \gamma_2(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ \alpha_2(t-s) + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right\}. \quad (3.9)$$

3.2.2. Función varianza

Para el cálculo de la varianza del proceso, necesitamos calcular previamente el momento de segundo orden. Se calcula en primer lugar para la primera variable, por ello consideramos $\sigma' = (2, 0)$ en (3.7):

$$\begin{aligned}
E[X_1^2(t)/X(s) = x_s] &= \gamma_1^2 + 2\gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ \alpha_1(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\} + \\
&+ (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ (2\alpha_1 + a_{11})(t-s) + 2\phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 Var[X_1(t)/X(s) = x_s] &= \gamma_1^2 + 2\gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ \alpha_1(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\} + \\
 &\quad + (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ (2\alpha_1 + a_{11})(t-s) + 2\phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\} - \\
 &\quad - (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ (2\alpha_1 + a_{11})(t-s) + 2\phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\} - \\
 &\quad - \gamma_1^2 - 2\gamma_1(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ \alpha_1(t-s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

Luego la *función varianza* de la primera variable del proceso será:

$$\begin{aligned}
 Var[X_1(t)/X(s) = x_s] &= (x_{1s} - \gamma_1)^2 \exp \left\{ 2\alpha_1(t-s) + 2\phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\} \times \\
 &\quad \times \left[\exp \{ a_{11}(t-s) \} - 1 \right]. \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Y análogamente se obtiene la *función varianza* de la segunda variable del proceso,

$$\begin{aligned}
 Var[X_2(t)/X(s) = x_s] &= (x_{2s} - \gamma_2)^2 \exp \left\{ 2\alpha_2(t-s) + 2\phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right\} \times \\
 &\quad \times \left[\exp \{ a_{22}(t-s) \} - 1 \right]. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

3.2.3. Función covarianza

La función covarianza viene dada por:

$$\begin{aligned}
 Cov[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\
 &= E[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] - E[X_1(t)/X(s) = x_s]E[X_2(t)/X(s) = x_s]
 \end{aligned}$$

por lo tanto, consideramos $\sigma' = (1, 1)$ en (3.7) para calcular

$$E[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s],$$

obteniendo:

$$\begin{aligned}
E[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] &= \gamma_1\gamma_2 + (x_{1s} - \gamma_1)(x_{2s} - \gamma_2) \times \\
&\times \exp \left\{ \left(\alpha_1 + \alpha_2 + a_{12} \right) (t - s) + \right. \\
&+ \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \left. \right\} + \\
&+ \gamma_1(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ \alpha_2(t - s) + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right\} + \\
&+ \gamma_2(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ \alpha_1(t - s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
E[X_1(t)/X(s) = x_s]E[X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\
&= \gamma_1\gamma_2 + (x_{1s} - \gamma_1)(x_{2s} - \gamma_2) \times \\
&\times \exp \left\{ \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right) (t - s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right\} + \\
&+ \gamma_1(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ \alpha_2(t - s) + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right\} + \\
&+ \gamma_2(x_{1s} - \gamma_1) \exp \left\{ \alpha_1(t - s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau \right\}.
\end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
Cov[X_1(t)X_2(t)/X(s) = x_s] &= \\
&= (x_{1s} - \gamma_1)(x_{2s} - \gamma_2) \exp \left\{ \left(\alpha_1 + \alpha_2 \right) (t - s) + \phi_1 \int_s^t g_1(\tau) d\tau + \phi_2 \int_s^t g_2(\tau) d\tau \right\} \times \\
&\times \left[\exp \left\{ a_{12}(t - s) \right\} - 1 \right] \tag{3.12}
\end{aligned}$$

3.2.4. Estimación máximo-verosímil de los parámetros del proceso

En términos matriciales, los parámetros a estimar son A , B y γ . Se presenta un problema en la matriz B , ya que contiene ceros estructurales. Para eliminar esa dificultad en el cálculo de los estimadores es preciso introducir una matriz paramétrica que no contenga ceros.

Consideremos:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = (\beta; \Phi) = \begin{pmatrix} \beta_1 & \phi_1 \\ \beta_2 & \phi_2 \end{pmatrix}$$

de tal manera que Δ contiene todos los parámetros no nulos de la matriz B y no contiene ceros estructurales.

Es interesante obtener una relación entre las matrices B y Δ que será utilizada en el cálculo de los estimadores. Puede probarse que:

$$B = \sum_{j=1}^2 E_{jj} \Delta H'_j, \quad (3.13)$$

Partimos de

$$Vec(B) = \begin{pmatrix} \beta \\ Vec(\Gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D'_{i2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{i2} \end{pmatrix} Vec(\Delta)$$

donde

$$D_{i2} = \sum_{j=1}^2 u_j \otimes E_{jj}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{i2} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^2 (e_1; e_{j+1}) \otimes E_{jj}$$

llamando H_j a $(e_1; e_{j+1})$ nos queda:

$$Vec(B) = \sum_{j=1}^2 (H_j \otimes E_{jj}) Vec(\Delta) = \sum_{j=1}^2 Vec(E_{jj} \Delta H'_j) = Vec \left(\sum_{j=1}^2 E_{jj} \Delta H'_j \right).$$

Lo que prueba la relación antes dada.

Por otra parte, sea $L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & D_{i2} \end{pmatrix}$. Esta matriz por cajas es de dimensiones (2×2) para las dos de la primera filas y $(2^2 \times 2)$ para las de la segunda fila, y tiene rango completo por columnas, por lo que:

$$L_g = (L'L)^{-1} L' = L'$$

y L se puede expresar como:

$$L = \left(\begin{array}{c|c} \sum_{j=1}^2 E_{jj} & 0 \\ \hline 0 & \sum_{j=1}^2 u_j \otimes E_{jj} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & u_j \end{array} \right) \otimes E_{jj} = \sum_{j=1}^2 H_j \otimes E_{jj}.$$

Pasamos a estimar por máxima verosimilitud los parámetros del proceso de difusión, lo cual se hace en procesos markovianos a través de las densidades de transición. En primer lugar se observa el proceso por un muestreo discreto en los tiempos t_1, t_2, \dots, t_n obteniendo una muestra $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de valores del proceso en dichos tiempos. El proceso es bidimensional, por lo tanto, $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ son vectores bidimensionales:

$$X(t_1) = \begin{pmatrix} X(t_1)_1 \\ X(t_1)_2 \end{pmatrix}, \dots, X(t_n) = \begin{pmatrix} X(t_n)_1 \\ X(t_n)_2 \end{pmatrix}$$

notándolos por x_1, x_2, \dots, x_n y en general x_α para $\alpha = 1, \dots, n$, con x_α el vector bidimensional de valores observados.

Se consideran los valores de la densidad de transición del proceso entre cada dos tiempos consecutivos, suponiendo $P[X(t_1) = x_1] = 1$, la función de verosimilitud condicionada toma la forma:

$$L(x_1, \dots, x_n; B, A, \gamma) = P[X(t_1) = x_1] \times \tag{3.14}$$

$$\times P[X(t_2) = x_2 / X(t_1) = x_1] \times \dots \times \tag{3.15}$$

$$\times P[X(t_n) = x_n / X(t_{n-1}) = x_{n-1}] =$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{\alpha=1}^n \left[\left(\prod_{i=1}^2 (x_{\alpha i} - \gamma_i) (2\pi) (t_\alpha - t_{\alpha-1}) |A|^{1/2} \right) \right]^{-1} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(t_\alpha - t_{\alpha-1})} [\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma) - B\Gamma \bar{v}_\alpha]' \times \right. \\ &\left. \times A^{-1} [\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma) - B\Gamma \bar{v}_\alpha] \right\}. \tag{3.16} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$P[X(t_\alpha) = x_\alpha / X(t_{\alpha-1}) = x_{\alpha-1}]$$

se obtiene de

$$P[X(t) = y / X(s) = x],$$

con $t \rightarrow t_\alpha$, $s \rightarrow t_{\alpha-1}$, $y \rightarrow x_\alpha$, $x \rightarrow x_{\alpha-1}$, y además $\bar{v}_\alpha = \bar{v}_{\alpha, \alpha-1}$ siendo $x_{\alpha i}$ la i -ésima componente de

$$x_\alpha = \begin{pmatrix} x_{\alpha 1} \\ x_{\alpha 2} \end{pmatrix}.$$

La expresión (3.16) puede a su vez escribirse así:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; B, A, \gamma) &= (2\pi)^{-(n-1)} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left[\left(\prod_{i=1}^2 (x_{\alpha i} - \gamma_i)^{-1} (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1} \right) \right] \times \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} [\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma) - B\Gamma \bar{v}_\alpha]' \times \right. \\ &\quad \left. \times A^{-1} [\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma) - B\Gamma \bar{v}_\alpha] \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

siendo $v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} \bar{v}_\alpha$ para $\alpha = 2, \dots, n$.

Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \\ z_2 &= (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{1/2} (\ln(x_2 - \gamma_2) - \ln(x_1 - \gamma_1)) \\ &\vdots \\ z_n &= (t_n - t_{n-1})^{1/2} (\ln(x_n - \gamma_n) - \ln(x_{n-1} - \gamma_{n-1})). \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del cambio de variable:

$$L(x_1, \dots, x_n; B, A, \gamma) \Rightarrow L(z_1, \dots, z_n; B, A, \gamma).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
L(z_1, \dots, z_n; B, A, \gamma) &= (2\pi)^{-(n-1)} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) \right] = \\
&= (2\pi)^{-(n-1)} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\alpha=2}^n A^{-1} (z_\alpha - Bv_\alpha) (z_\alpha - Bv_\alpha)' \right\} = \\
&= (2\pi)^{-(n-1)} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} \left[A^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha) (z_\alpha - Bv_\alpha)' \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Tenemos que

$$\sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha) (z_\alpha - Bv_\alpha)' = (Z - Bv)(Z - Bv)'$$

con $Z = (z_2, \dots, z_n)$ de dimensión $2 \times (n-1)$ y $v = (v_2, \dots, v_n)$ de dimensión $3 \times (n-1)$, por lo tanto,

$$L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) = (2\pi)^{-(n-1)} |A|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \text{tr} [A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'] \right\}. \tag{3.19}$$

La función de log-verosimilitud tendrá la siguiente expresión:

$$\ln L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) = -(n-1) \ln(2\pi) - \frac{(n-1)}{2} \ln(|A|) - \frac{1}{2} \text{tr} [A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)']. \tag{3.20}$$

El siguiente paso será diferenciar (3.20) respecto a B , A y γ .

$$\begin{aligned}
d \ln L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} \text{tr} [A^{-1} (dA)] - \\
&\quad -\frac{1}{2} [-A^{-1} (dA) A^{-1} (Z - Bv)(Z - Bv)'] - \\
&\quad -\frac{1}{2} \text{tr} [-A^{-1} (dB) v (Z - Bv)' - A^{-1} (Z - Bv) v' (dB)'] - \\
&\quad -\frac{1}{2} \text{tr} \left[\sum_{\alpha=2}^n -2(z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} W_\alpha (d\gamma) \right],
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde

$$W_\alpha = -\frac{dz_\alpha}{d\gamma} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha,1-\gamma_1}} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1-\gamma_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{\alpha,2-\gamma_2}} - \frac{1}{x_{\alpha-1,2-\gamma_2}} \end{pmatrix}.$$

Estas expresiones se han obtenido teniendo en cuenta las siguientes reglas de derivación:

1. $d_A \ln |A| = \text{tr}[A^{-1}(dA)]$
2. $d_A \text{tr}[A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)'] = \text{tr}[-A^{-1}(dA)A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)']$
3. $d_B \text{tr}[A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)'] =$
 $= \text{tr}[-A^{-1}(dB)v(Z - Bv)'] + \text{tr}[-A^{-1}(Z - Bv)v'(dB)']$
4. $d_\gamma \text{tr}[A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)'] =$

$$\begin{aligned}
 &= d_\gamma \text{tr} \left[A^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)(z_\alpha - Bv_\alpha)' \right] = \\
 &= d_\gamma \text{tr} \left[\sum_{\alpha=2}^n A^{-1}(z_\alpha - Bv_\alpha)(z_\alpha - Bv_\alpha)' \right] = \\
 &= d_\gamma \text{tr} \left[\sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1}(z_\alpha - Bv_\alpha) \right] = \\
 &= \text{tr} \left[-2 \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} W_\alpha(d\gamma) \right].
 \end{aligned}$$

Tendremos entonces:

$$\begin{aligned}
 d \ln L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) &= \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}[A^{-1}(dA)A^{-1}(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A^{-1}(dA)] + \\
 &+ \frac{1}{2} \text{tr}[2v(Z - Bv)'A^{-1}(dB)] + \frac{1}{2} \text{tr} \left[2 \sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} W_\alpha(d\gamma) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \text{tr}[A^{-1}(dA)A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A]] + \\
 &+ \text{tr}[v(Z - Bv)'A^{-1}(dB)] + \text{tr} \left[\sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} W_\alpha(d\gamma) \right].
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Utilizando la propiedad $\text{tr}(CD) = \text{tr}(DC)$ en la expresión (3.22), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 d \ln L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) &= \frac{1}{2} \text{tr}[A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n-1)A]A^{-1}(dA)] + \\
 &+ \text{tr}[v(Z - Bv)'A^{-1}(dB)] + \text{tr} \left[\sum_{\alpha=2}^n (z_\alpha - Bv_\alpha)' A^{-1} W_\alpha(d\gamma) \right].
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $tr(CD) = Vec'(C')Vec(D)$, la expresión (3.22) nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
d \ln L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) &= \\
&= \frac{1}{2} Vec'[(A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A]A^{-1}(dA))'] dVec(A) + \\
&\quad + Vec'[A^{-1}(Z - Bv)v'] dVec(B) + \sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha} A^{-1}(z_{\alpha} - Bv_{\alpha})(d\gamma).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Como $Vec(B) = LVec(\Gamma)$ con $L = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & D_{i2} \end{array} \right)$:

$$\begin{aligned}
d \ln L(z_2, \dots, z_n; B, A, \gamma) &= \\
&= \frac{1}{2} Vec'[(A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A]A^{-1}(dA))'] dVec(A) + \\
&\quad + Vec'[A^{-1}(Z - Bv)v'] L dVec(\Delta) + \sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha} A^{-1}(z_{\alpha} - Bv_{\alpha})(d\gamma)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Igualando a 0 la diferencial (3.24):

- (1) $Vec'[(A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A]A^{-1}(dA))'] dVec(A) = 0$
- (2) $Vec'[A^{-1}(Z - Bv)v'] L dVec(\Delta) = 0$
- (3) $\sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha} A^{-1}(z_{\alpha} - Bv_{\alpha})(d\gamma) = 0$

Analizamos en primer lugar la expresión (1):

$$\begin{aligned}
A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)' - (n - 1)A]A^{-1} &= 0 \\
A^{-1}[(Z - Bv)(Z - Bv)'A^{-1} - (n - 1)I_k] &= 0 \\
(Z - Bv)(Z - Bv)' &= (n - 1)A
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{n - 1} (Z - Bv)(Z - Bv)'$$

Analizamos a continuación la expresión (2):

$$Vec'[A^{-1}(Z - Bv)v']L = 0 \Rightarrow L'Vec[A^{-1}(Z - Bv)v'] = 0$$

Sustituyendo L' por su expresión obtenemos:

$$\sum_{j=1}^2 (H_j \otimes E_{jj}) Vec(A^{-1}(Z - Bv)v') = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^2 Vec[E_{jj}(A^{-1}(Z - Bv)v')H_j] = 0$$

Lo que implica:

$$Vec\left[\sum_{j=1}^2 E_{jj}(A^{-1}(Z - Bv)v')H_j\right] = 0$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 E_{jj}A^{-1}Zv'H_j &= \sum_{j=1}^2 E_{jj}A^{-1}Bvv'H_j \\ E_{ll} \sum_{j=1}^2 E_{jj}A^{-1}Zv'H_j &= E_{ll} \sum_{j=1}^2 E_{jj}A^{-1}Bvv'H_j \end{aligned}$$

y sólo queda el sumando de $j=1$, por las propiedades de $E_{ll}E_{jj}$. Por tanto,

$$E_{ll}A^{-1}Zv'H_l = E_{ll}A^{-1}Bvv'H_l; \quad l = 1, 2$$

Teniendo en cuenta la relación dada antes entre B y Δ

$$B = \sum_{n=1}^2 E_{nn}\Delta H'_n$$

se tiene:

$$E_{ll}A^{-1} \left(\sum_{n=1}^2 E_{nn} \right) Zv'H_l = E_{ll}A^{-1} \left(\sum_{n=1}^2 E_{nn}\Delta H'_n \right) vv'H_l; \quad l = 1, 2.$$

lo que implica

$$\sum_{n=1}^2 u_l u'_l A^{-1} u_n u'_n Zv'H_l = \sum_{n=1}^2 u_l u'_l A^{-1} u_n u'_n \Delta H'_n vv'H_l; \quad l = 1, 2,$$

de donde

$$\sum_{n=1}^2 a'_{ln} E_{ln} Z v' H_l = \sum_{n=1}^2 a'_{ln} E_{ln} \Delta H'_n v v' H_l$$

es decir

$$a'_{ll} E_{ll} Z v' H_l = a'_{ll} E_{ll} \Delta H'_l v v' H_l$$

con $H'_l v v' H_l$ es 2×2 y de rango completo.

Por tanto, se verifica:

$$E_{ll} Z v' H_l (H'_l v v' H_l)^{-1} = E_{ll} \Delta \Rightarrow u'_l E_{ll} Z v' H_l (H'_l v v' H_l)^{-1} = u'_l E_{ll} \Delta.$$

Considerando todos los $l = 1, \dots, 2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta} &= \sum_{l=1}^2 E_{ll} Z v' H_l (H'_l v v' H_l)^{-1} \\ \widehat{\Delta}' &= \sum_{l=1}^2 (H'_l v v' H_l)^{-1} H'_l v Z' E'_{ll} \\ \text{Vec}(\widehat{\Delta}') &= \sum_{l=1}^2 [E_{ll} \otimes (H'_l v v' H_l)^{-1} H'_l v] \text{Vec}(Z') \end{aligned}$$

En definitiva los estimadores de máxima-verosimilitud calculados son:

$$\widehat{A} = \frac{1}{n-1} (Z - Bv)(Z - Bv)' \quad (3.25)$$

$$\text{Vec}(\widehat{\Delta}') = \sum_{l=1}^2 [E_{ll} \otimes (H'_l v v' H_l)^{-1} H'_l v] \text{Vec}(Z') \quad (3.26)$$

$$\sum_{\alpha=2}^n \widehat{W}_\alpha \widehat{A}^{-1} (\widehat{z}_\alpha - \widehat{B}v_\alpha) = 0 \quad (3.27)$$

donde

$$\widehat{z}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\ln(x_\alpha - \widehat{\gamma}) - \ln(x_{\alpha-1} - \widehat{\gamma}))$$

y

$$\widehat{W}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha,1} - \widehat{\gamma}_1} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1} - \widehat{\gamma}_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_{\alpha,2} - \widehat{\gamma}_2} - \frac{1}{x_{\alpha-1,2} - \widehat{\gamma}_2} \end{pmatrix}.$$

Capítulo 4

Proceso de difusión lognormal multidimensional con tres parámetros y q factores exógenos

4.1. Definición del modelo

Se introduce el proceso de difusión lognormal con tres parámetros, y q factores exógenos, usando la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov.

Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)'$ un vector k -dimensional y consideramos $\{X(t), t_0 \leq t \leq T\}$ un proceso de Markov con valores en $\prod_{i=1}^k]\gamma_i, +\infty[$, con trayectorias continuas casi seguramente y con probabilidad de transición dada por

$$P(y, t/x, s) = P[X(t) = y/X(s) = x]$$

con $X(t) = (X_1(t), \dots, X_k(t))'$ y $X(s) = (X_1(s), \dots, X_k(s))'$; y x e y son vectores k -dimensionales.

Supongamos las siguientes condiciones:

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| > \epsilon} P(dy, t+h/x, t) = 0$$

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)P(dy, t+h/x, t) = f(x, t) = \begin{pmatrix} \left(f_{10} + \sum_{j=1}^q f_{1j}F_j(t) \right) (x_1 - \gamma_1) \\ \vdots \\ \left(f_{k0} + \sum_{j=1}^q f_{kj}F_j(t) \right) (x_k - \gamma_k) \end{pmatrix}$$

donde F_j , $j = 1, \dots, q$, son funciones continuas sobre $[t_0, T]$.

$$\blacksquare \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)(y-x)'P(dy, t+h/x, t) = (y-x)B(y-x)'$$

con B una matriz simétrica definida no negativa con elementos $b_{ii} > 0$.

- Los momentos infinitesimales de orden superior son nulos.

Utilizando el hecho de que la transformada $Z(t) = X(t) - \gamma$ es un proceso de difusión lognormal con dos parámetros y q factores exógenos, obtenemos la ecuación adelantada y atrasada de Kolmogorov correspondiente a la difusión caracterizada por las condiciones expuestas anteriormente.

$$\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k b_{ij}(x_i - \gamma_i)(x_j - \gamma_j) \frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^k \left(f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il}F_l(t) \right) (x_i - \gamma_i) \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad (4.1)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k b_{ij} \frac{\partial^2 [(y_i - \gamma_i)(y_j - \gamma_j)P]}{\partial y_i \partial y_j} - \sum_{i=1}^k \left(f_{i0} + \sum_{l=1}^q f_{il}F_l(t) \right) \frac{\partial [(y_i - \gamma_i)P]}{\partial y_i} = 0 \quad (4.2)$$

donde $x = (x_1, \dots, x_k)'$ e $y = (y_1, \dots, y_k)'$ tal que $x_i > \gamma_i$ e $y_i > \gamma_i$ para todo $i = 1, \dots, k$ y $P = P(y, t/x, s)$ es la función de densidad de transición.

La solución común de estas ecuaciones, bajo la condición inicial

$$P(y, t/x, s) = \delta(y - x)$$

tiene la siguiente expresión

$$P(y, t/x, s) = \left[\left(\prod_{i=1}^k (y_i - \gamma_i) \right) (2\pi)^{k/2} (t-s)^{k/2} |B|^{1/2} \right]^{-1} \times \exp \left\{ -\frac{Q}{2(t-s)} \right\} \quad (4.3)$$

donde Q es la forma cuadrática:

$$Q = \left(\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - \beta_0(t - s) - \sum_{i=1}^k \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau \right)' \times \\ \times B^{-1} \left(\ln(y - \gamma) - \ln(x - \gamma) - \beta_0(t - s) - \sum_{i=1}^k \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau \right)$$

con

$$\beta_0 = (f_{10} - \frac{1}{2}b_{11}, \dots, f_{k0} - \frac{1}{2}b_{kk})' = f_0 - \frac{1}{2}diag(B) \text{ y} \\ \beta_i = (f_{1i}, \dots, f_{ki})', \quad i = 1, \dots, q.$$

4.2. Momentos del proceso

Los momentos del proceso de difusión lognormal con tres parámetros y q factores exógenos son dados a partir de los momentos del proceso de difusión lognormal con dos parámetros con q factores exógenos $Z(t) = X(t) - \gamma$.

Por lo tanto, dado $X(s) = x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ks})'$,

$$E[e^{\sigma' \ln(Z(t))}] = \exp \left\{ \sigma' \left(\ln(x_s - \gamma) + \beta_0(t - s) + \sum_{i=1}^q \beta_i \int_s^t F_i(\tau) d\tau \right) + \frac{1}{2}(t - s)\sigma' B \sigma \right\} \quad (4.4)$$

con $\sigma' = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, ya que:

$$X(t)/X(s) = x_s \rightsquigarrow \Lambda_k \left(\ln(x_s - \gamma) + \beta_0(t - s) + \sum_{l=1}^q \beta_l \int_s^t F_l(\tau) d\tau; (t - s)B \right).$$

A partir de aquí será fácil el cálculo de la media y las varianzas-covarianzas de las variables endógenas, lo cual será de gran utilidad a la hora de estimar la tendencia del proceso y la dispersión de tal estimación.

Para $i = 1, \dots, k$,

$$E[X_i(t)] = \gamma_i + (x_{is} - \gamma_i) \exp \left\{ f_{i0}(t - s) + \sum_{i=1}^q \beta_{ij} \int_s^t F_j(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.5)$$

$$\text{Var}[X_i(t)] = (x_{is} - \gamma_i)^2 \exp \left\{ 2f_{i0}(t-s) + 2 \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} \left[\exp \{b_{ii}(t-s)\} - 1 \right]. \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X_i(t), X_j(t)] &= (x_{is} - \gamma_i)(x_{js} - \gamma_j) \exp \left\{ f_{i0}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{il} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} = \\ &= \exp \left\{ f_{j0}(t-s) + \sum_{l=1}^q \beta_{jl} \int_s^t F_l(\tau) d\tau \right\} \left[\exp \{b_{ij}(t-s)\} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.3. Estimación de los parámetros

Se considera un muestreo discreto del proceso

$$\{X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n\}$$

en los instantes $\{t_1, \dots, t_n\}$, con

$$X(t_\alpha) = (X(t_{\alpha,1}), \dots, X(t_{\alpha,k}))'$$

y

$$x_{t_\alpha} = (x_{t_{\alpha,1}}, \dots, x_{t_{\alpha,k}})'$$

Bajo la condición $P[X(t_1) = x_1] = 1$, la función de verosimilitud asociada al proceso será:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \beta, B, \gamma) &= (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{(n-1)}{2}} \prod_{\alpha=2}^n \left(\prod_{i=1}^k (x_{\alpha i} - \gamma_i)^{-1} \right) \times \\ &\quad \times (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{k}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

$$u_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} \left(t_\alpha - t_{\alpha-1}, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_q(\tau) d\tau \right)'$$

y

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2}(\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma))$$

Teniendo en cuenta que cuando γ tiende a $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(1)})'$, donde

$$x_i^{(1)} = \inf_{1 \leq \alpha \leq n} (x_{\alpha i})$$

para $i = 1, \dots, k$, la función de verosimilitud tiende a infinito. Vamos a intentar obtener los estimadores de máxima verosimilitud local, L.M.L.E.

Sustituyendo x_α por v_α obtenemos:

$$L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |B|^{-\frac{(n-1)}{2}} \cdot \prod_{\alpha=2}^n \exp \left\{ -\frac{1}{2} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}. \quad (4.9)$$

Calculando el logaritmo de (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} k \ln(2\pi) - \frac{(n-1)}{2} \ln(|B|) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' |B|^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

A continuación se calcula la diferencial de (4.10) y obtenemos:

$$\begin{aligned} d \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} \text{tr}[B^{-1}(dB)] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\alpha=2}^n [-(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha) - \\ &\quad - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(d\beta) u_\alpha - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha(d\gamma)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde

$$W_\alpha = -\frac{dv_\alpha}{d\gamma} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha,1}-\gamma_1} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1}-\gamma_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_{\alpha,k}-\gamma_k} - \frac{1}{x_{\alpha-1,k}-\gamma_k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$d \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = -\frac{1}{2} \text{tr} \left\{ \left[\sum_{\alpha=2}^n (B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' - I_k) \right] \times \right. \\ \left. \times B^{-1}(dB) + 2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta) u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} \right\} + \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha (d\gamma),$$

entonces

$$d \ln L(v_1, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = \frac{1}{2} \text{Vec} \left[B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n ((v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} - I_k) \right]' d \text{Vec}(B) + \\ + \text{Vec} \left[B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u_\alpha' \right]' d \text{Vec}(\beta) + \\ + \left[\sum_{\alpha=2}^n W_\alpha B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right] d\gamma.$$

Igualando a cero la diferencial obtenemos:

$$\hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) u_\alpha' = 0 \\ \hat{B}^{-1} \sum_{\alpha=2}^n \left\{ \left[(\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)(\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)' \hat{B}^{-1} \right] - I_k \right\} = 0 \\ \sum_{\alpha=2}^n \hat{W}_\alpha \hat{B}^{-1} (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) = 0$$

resultando finalmente:

$$\hat{\beta} = \sum_{\alpha=2}^n \hat{v}_\alpha u_\alpha' \left[\sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha' \right]^{-1} \\ \hat{B} = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)(\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)' \quad (4.12) \\ \sum_{\alpha=2}^n \hat{W}_\alpha \hat{B}^{-1} (\hat{v}_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha) = 0$$

donde

$$u_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-\frac{1}{2}} \left(t_\alpha - t_{\alpha-1}, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_1(\tau) d\tau, \dots, \int_{t_{\alpha-1}}^{t_\alpha} F_q(\tau) d\tau \right)'$$

$$\hat{v}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2}(\ln(x_\alpha - \hat{\gamma}) - \ln(x_{\alpha-1} - \hat{\gamma}))$$

$$\hat{W}_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha 1} - \hat{\gamma}_1} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1} - \hat{\gamma}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{x_{\alpha k} - \hat{\gamma}_k} - \frac{1}{x_{\alpha-1,k} - \hat{\gamma}_k} \end{pmatrix}$$

y

$$\hat{\gamma}_i < x_i^{(1)} = \inf_{1 \leq \alpha \leq n} (x_{\alpha i}), \quad i = 1, \dots, k.$$

La resolución de esta ecuación no puede hacerse mediante un método directo, por lo tanto, consideramos:

$$\hat{\beta}(\gamma) = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha u'_\alpha \left[\sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u'_\alpha \right]^{-1} \quad (4.13)$$

$$\hat{B}(\gamma) = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}(\gamma) u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}(\gamma) u_\alpha)' \quad (4.14)$$

$$\lambda(\hat{\beta}(\gamma), \hat{B}(\gamma), \gamma) = \sum_{\alpha=2}^n W_\alpha \hat{B}^{-1}(\gamma)(v_\alpha - \hat{\beta}(\gamma) u_\alpha) \quad (4.15)$$

con

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2}(\ln(x_\alpha - \gamma) - \ln(x_{\alpha-1} - \gamma)).$$

Finalmente obtenemos una aproximación de los estimadores $\hat{\beta}$, \hat{B} y $\hat{\gamma}$ y resolviendo el sistema de ecuaciones no lineales con algún método de aproximación no lineal como el método de Newton-Raphson, el método de la aproximación a Newton con derivadas fijas, ó el método Scoring de Fisher.

4.4. Cálculo de la matriz de información de Fisher

Partimos de la primera derivada de la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned} d \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) &= -\frac{(n-1)}{2} \text{tr}[B^{-1}(dB)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{\alpha=2}^n [-(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB) B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha) \\ &\quad - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(d\beta) u_\alpha - 2(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_\alpha(d\gamma)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

A partir de aquí, podemos calcular la segunda diferencial del logaritmo de la función de verosimilitud. Para ello se calculan las derivadas para cada uno de los sumandos de la primera derivada respecto a los tres parámetros, resultándonos las expresiones que a continuación se muestran.

$$\begin{aligned}
 d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ (n-1)B^{-1}(dB)B^{-1}(dB) - \right. \\
 & -2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB)B^{-1}(dB)B^{-1} - \\
 & -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta)u_\alpha(v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB)B^{-1} - \\
 & -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta u_\alpha)' B^{-1}(d\beta)u_\alpha - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB)B^{-1}(d\beta)u_\alpha - \\
 & -2 \sum_{\alpha=2}^n (d\beta u_\alpha)' B^{-1}W_\alpha(d\gamma) - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB)B^{-1}W_\alpha(d\gamma) - \\
 & -2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB)B^{-1}W_\alpha(d\gamma) - 2 \sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha d\gamma)' B^{-1}(d\beta)u_\alpha - \\
 & \left. -2 \sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha d\gamma)' B^{-1}W_\alpha(d\gamma) + 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(I_k \otimes (d\gamma)') \tilde{W}_\alpha(d\gamma) \right\}.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = & \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ B^{-1}(dB)B^{-1}(dB)B^{-1} \times \right. \\
 & \times \left((n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) - \\
 & -4B^{-1}(dB)B^{-1}(d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha(v_\alpha - \beta u_\alpha)' - 2B^{-1}(d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha'(d\beta)' - \\
 & -4 \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha'(d\beta)' B^{-1}W_\alpha(d\gamma) - 4 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(dB)B^{-1}W_\alpha(d\gamma) - \\
 & \left. -2(d\gamma)' \sum_{\alpha=2}^n W_\alpha B^{-1}W_\alpha(d\gamma) + 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1}(I_k \otimes (d\gamma)') \tilde{W}_\alpha(d\gamma) \right\} \\
 & (4.17)
 \end{aligned}$$

donde $\tilde{W}_\alpha = \frac{\partial W_\alpha}{\partial \gamma} = W_{\alpha,2} \otimes I_{k,1}$ tal que:

$$W_{\alpha,2} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{(x_{\alpha,1}-\gamma_1)^2} - \frac{1}{(x_{\alpha-1,1}-\gamma_1)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{(x_{\alpha,k}-\gamma_k)^2} - \frac{1}{(x_{\alpha-1,k}-\gamma_k)^2} \end{pmatrix}$$

con

$$I_{k,1} = (1, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^k$$

además, utilizando los resultados de Magnus y Neudecker [41] tendremos

$$\begin{aligned} (I_k \otimes d\gamma)B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha) &= (I_k \otimes d\gamma)Vec(B^{-1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)) = \\ &= (I_k \otimes d\gamma)Vec((v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1}) = \\ &= Vec[d\gamma(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1}]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Teniendo en cuenta (4.18), podemos escribir (4.17) como:

$$\begin{aligned} d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) &= \frac{1}{2} Vec(B^{-1}(dB)B^{-1})' \times \\ &\times Vec \left((dB)B^{-1} \left\{ (n-1)B - 2 \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right] \right\} \right) - \\ &- 2 Vec(B^{-1}(dB)B^{-1})' Vec \left((d\beta) \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha (v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) - \\ &- Vec((d\beta)'B^{-1})' Vec \left(\sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha' (d\beta)' \right) - 2 \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha' (d\beta)' B^{-1} W_\alpha (d\gamma) - \\ &- 2 Vec(B^{-1}(dB)B^{-1})' Vec \left(\sum_{\alpha=2}^n W_\alpha (d\gamma) (v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) - \\ &- (d\gamma)' \left(\sum_{\alpha=2}^n W_\alpha B^{-1} W_\alpha \right) (d\gamma) + \sum_{\alpha=2}^n Vec(d\gamma(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1})' \tilde{W}_\alpha (d\gamma) \end{aligned} \quad (4.19)$$

como

$$Vec(B^{-1}(dB)B^{-1}) = dv(B)'D'_k(B \otimes B)^{-1}$$

entonces la expresión (4.19) se transformaría en

$$\begin{aligned} d^2 \ln L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) &= \frac{1}{2} dv(B)'D'_k(B \otimes B)^{-1} \times \\ &\times \left[\left\{ (n-1)B - 2 \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right] B^{-1} \otimes I_k \right\} D_k dv(B) \right] - \\ &- 2dv(B)'D'_k(B \otimes B)^{-1} \left(\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)u'_\alpha \otimes I_k \right) dVec(\beta) - \\ &- dVec(\beta)'I_{(k,q+1)}(B^{-1} \otimes I_{q+1})(I_k \otimes A)I_{(q+1,k)}dVec(\beta) - \\ &- 2Vec(\beta)' \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_k)B^{-1}W_\alpha(d\gamma) - \\ &- 2dv(B)'D'_k(B \otimes B)^{-1} \sum_{\alpha=2}^n [(v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes I_k] W_\alpha(d\gamma) - \\ &- (d\gamma)' \left(\sum_{\alpha=2}^n W_\alpha B^{-1}W_\alpha \right) (d\gamma) + (d\gamma)' \sum_{\alpha=2}^n [(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1} \otimes I_k] \tilde{W}_\alpha(d\gamma) \end{aligned}$$

Considerando además que

$$\begin{aligned} [(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1} \otimes I_k] \tilde{W}_\alpha &= [(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1} \otimes I_k] (W_{\alpha,2} \otimes I_{k,1}) = \\ &= [(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1}W_{\alpha,2}] \otimes I_{k,1} = \\ &= I_{k,1}(v_\alpha - \beta u_\alpha)'B^{-1}W_{\alpha,2}. \end{aligned}$$

Se calculan a continuación las parciales segundas respecto a los parámetros.

- Parcial respecto a $Vec(\beta)$ dos veces:

$$F_1 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial Vec(\beta) \partial Vec(\beta)'} = -I_{(k,q+1)}(B^{-1} \otimes A)I_{(q+1,k)}.$$

Utilizando las propiedades de las matrices de permutación obtenemos:

$$F_1 = -(A \otimes B^{-1}). \quad (4.20)$$

- Parcial respecto a $v(B)$ y $Vec(\beta)'$:

$$F_2 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial v(B) \partial Vec(\beta)'} = -D'_k(B \otimes B)^{-1} \left(\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u'_\alpha \otimes I_k \right). \quad (4.21)$$

- Parcial respecto a $v(B)$ dos veces:

$$F_3 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial v(B) \partial v(B)'} = \frac{1}{2}(S + S')$$

donde

$$S = \frac{1}{2} D'_k(B \otimes B)^{-1} \left[\left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \otimes I_k \right] D_k.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_3 &= \frac{1}{4} D'_k \left\{ (B \otimes B)^{-1} \left[\left\{ (n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right\} B^{-1} \otimes I_k \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[B^{-1} \left((n-1)B - 2 \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)(v_\alpha - \beta u_\alpha)' \right) \otimes I_k \right] (B \otimes B)^{-1} \right\} D_k. \end{aligned} \quad (4.22)$$

- Parcial respecto a $Vec(\beta)$ y γ' :

$$F_4 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial Vec(\beta) \partial \gamma'} = - \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) B^{-1} W_\alpha. \quad (4.23)$$

- Parcial respecto a $v(B)$ y γ' :

$$\begin{aligned} F_5 &= F_5 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial v(B) \partial \gamma'} = -D'_k(B \otimes B)^{-1} \left[\sum_{\alpha=2}^n \left((v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes I_k \right) W_\alpha \right] \\ &= -D'_k(B \otimes B)^{-1} \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes W_\alpha \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

- Parcial respecto a γ dos veces:

$$F_6 = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \gamma \partial \gamma'} = - \sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha B^{-1} W_\alpha) + \sum_{\alpha=2}^n I_{k,1} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_{\alpha,2}. \quad (4.25)$$

Por lo tanto, la matriz hessiana será:

$$H = \begin{pmatrix} F_1 & F_2' & F_4 \\ F_2 & F_3 & F_5 \\ F_4' & F_5' & F_6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora los valores esperados de las submatrices anteriores:

$$E[F_1] = -(A \otimes B^{-1})$$

$$E[F_2] = -D_k'(B \otimes B)^{-1} E \left[\sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) u_\alpha' \otimes I_k \right] = 0$$

$$\begin{aligned} E[F_3] &= \frac{1}{4} D_k' \{ (B \otimes B)^{-1} ((n-1)B) + B^{-1} (n-1)B (B \otimes B)^{-1} \} D_k = \\ &= -\frac{n-1}{2} D_k' (B \otimes B)^{-1} D_k \end{aligned}$$

$$E[F_4] = -E \left[\sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) B^{-1} W_\alpha \right] = - \sum_{\alpha=2}^n (u_\alpha \otimes I_k) B^{-1} E[W_\alpha]$$

$$E[F_5] = -E \left[D_k' (B \otimes B)^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha) \otimes W_\alpha \right] = 0$$

$$\begin{aligned} E[F_6] &= -E \left[\sum_{\alpha=2}^n (W_\alpha B^{-1} W_\alpha) + \sum_{\alpha=2}^n I_{k,1} (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} W_{\alpha,2} \right] = \\ &= - \sum_{\alpha=2}^n E [W_\alpha B^{-1} W_\alpha]. \end{aligned}$$

4.5. Contrastes de hipótesis

Nos planteamos algunos posibles contrastes que intervienen en el proceso estocástico lognormal con tres parámetros y q factores exógenos:

1. Contrastar que algún parámetro β_i , $i = 0, \dots, q$ sea igual a un vector determinado, en particular al vector cero, lo cual significaría que el vector exógeno asociado al parámetro β_i , no influye, de forma individual en el proceso.
2. Contrastar si algún subconjunto de parámetros es cero, con lo cual determinaríamos si los factores exógenos asociados a esos parámetros no influyen de forma conjunta en el proceso.
3. Contrastar si algunas componentes determinadas de los vectores son nulas, en cuyo caso se vería cuales de las componentes del proceso se ven realmente alteradas por la aparición de factores exógenos en él.
4. Contrastar la posible independencia entre algunas de las componentes del vector para comprobar las interrelaciones entre las variables del proceso.
5. Contrastar si algunas componentes determinadas del parámetro umbral es igual a un vector determinado, en particular si el vector umbral es cero, lo cual significa que se puede aproximar el proceso a un proceso estocástico lognormal con dos parámetros.

4.5.1. Contrastes sobre los parámetros β

Particionemos la matriz β como $\beta = (\mathcal{B}_1 | \mathcal{B}_2)$, donde \mathcal{B}_1 es de dimensión $k \times q_1$ y \mathcal{B}_2 es de dimensión $k \times q_2$, con $q_1 + q_2 = q + 1 = \bar{q}$.

Lo primero que haremos será contrastar la hipótesis

$$H_0 : \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^*$$

donde \mathcal{B}_1^* es una matriz fija de dimensión $k \times q_1$.

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula serán:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\mathcal{B}, B, \gamma) / B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k + \frac{k(k+1)}{2} + k} \\ \omega &= \{(\mathcal{B}, B, \gamma) / \mathcal{B} = \mathcal{B}_1, B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{q_2k + \frac{k(k+1)}{2} + k} \end{aligned}$$

De una parte sabemos que, bajo la hipótesis alternativa:

$$\hat{B}_\Omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)'$$

$$\hat{\beta}_\Omega = CA^{-1}$$

donde

$$A = \sum_{\alpha=2}^n u_\alpha u_\alpha'$$

y

$$C = \sum_{\alpha=2}^n v_\alpha u_\alpha'$$

de donde se obtiene:

$$\max_{\Omega} L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\hat{B}_\Omega|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}}.$$

Vamos a obtener ahora los estimadores para la hipótesis nula, es decir, \hat{B}_ω , $\hat{\mathcal{B}}_{2\omega}$ y $\hat{\gamma}_\omega$. Se considera el siguiente cambio de variable:

$$y_\alpha = v_\alpha - \mathcal{B}_1^* u_\alpha^1$$

donde $u'_\alpha = (u_\alpha^1, u_\alpha^2)$, tal que u_α^1 es un vector de dimensión q_1 y u_α^2 es de dimensión q_2 .

Notemos que $y_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}_k(\mathcal{B}_2 u_\alpha^2, B)$, con lo que es inmediato obtener los estimadores máximo verosímiles bajo la hipótesis nula:

$$\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} = \sum_{\alpha=2}^n \hat{y}_\alpha u_\alpha^{2'} A_{22}^{-1}$$

$$\hat{B}_\omega = \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (\hat{y}_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_\alpha^2)(\hat{y}_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_\alpha^2)'$$

$$\sum_{\alpha=2}^n \widehat{W}_\alpha \hat{B}_\omega^{-1} (\hat{y}_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_\alpha^2) = 0$$

donde

$$\hat{y}_\alpha = \hat{v}_\alpha - \mathcal{B}_1^* u_\alpha^1$$

con

$$\hat{v}_\alpha = t_\alpha - t_{\alpha-1}^{-1/2} (\ln(x_\alpha - \hat{\gamma}_\omega) - \ln(x_{\alpha-1} - \hat{\gamma}_\omega))$$

y

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, como

$$\sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} u_{\alpha}^{2'} A_{22}^{-1} = \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \mathcal{B}_1^* u_{\alpha}^1) u_{\alpha}^{2'} A_{22}^{-1} = \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} u_{\alpha}^{2'} - \mathcal{B}_1^* u_{\alpha}^1 u_{\alpha}^{2'}) A_{22}^{-1} = (C_2 - \mathcal{B}_1^* A_{12}) A_{22}^{-1}$$

se tiene

$$\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} = (C_2 - \mathcal{B}_1^* A_{12}) A_{22}^{-1}$$

y como

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=2}^n (y_{\alpha} - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_{\alpha}^2) (y_{\alpha} - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_{\alpha}^2)' &= \\ &= \sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} y_{\alpha}' + \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} A_{22} \hat{\mathcal{B}}_{2\omega}' - \sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} (\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_{\alpha}^2)' - \sum_{\alpha=2}^n \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_{\alpha}^2 y_{\alpha}' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n y_{\alpha} y_{\alpha}' + \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} A_{22} \hat{\mathcal{B}}_{2\omega}' - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} A_{22} \hat{\mathcal{B}}_{2\omega}' - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} A_{22} \hat{\mathcal{B}}_{2\omega}' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \mathcal{B}_1^* u_{\alpha}^1) (v_{\alpha} - \mathcal{B}_1^* u_{\alpha}^1)' - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} A_{22} \hat{\mathcal{B}}_{2\omega}' \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} (n-1) \hat{B}_{\omega} &= \sum_{\alpha=2}^n (y_{\alpha} - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_{\alpha}^2) (y_{\alpha} - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} u_{\alpha}^2)' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha} - \mathcal{B}_1^* u_{\alpha}^1) (v_{\alpha} - \mathcal{B}_1^* u_{\alpha}^1)' - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} A_{22} \hat{\mathcal{B}}_{2\omega}', \end{aligned} \quad (4.26)$$

de donde

$$\max_{\Omega} L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\hat{B}_{\omega}|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}}.$$

Por lo tanto, el criterio de razón de verosimilitudes para contrastar la hipótesis

$$H_0 : \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^*$$

es

$$\Lambda = \frac{\max_{\omega} L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma)}{\max_{\Omega} L(v_2, \dots, v_n, \beta, B, \gamma)} = \frac{|\hat{B}_{\omega}|^{-\frac{n-1}{2}}}{|\hat{B}_{\omega}|^{-\frac{n-1}{2}}}.$$

Invarianza del criterio

El criterio anterior posee una importante propiedad de invarianza frente a transformaciones del tipo $v_\alpha^* = Dv_\alpha$, donde D es una matriz cuadrada no singular.

Esta propiedad se deduce fácilmente de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}^* &= DCA^{-1} = D\hat{\beta} \\ \hat{B}_\Omega^* &= D\hat{B}_\Omega D' \\ \hat{\beta}_{2\omega}^* &= D\hat{\beta}_{2\omega} \\ \hat{B}_\omega^* &= D\hat{B}_\omega D'\end{aligned}$$

justificando esto el hecho de haber trabajado con v_α en vez de con x_α .

Distribución del criterio

Para hallar la distribución del criterio anterior hemos de dar previamente una serie de pasos:

a) Tenemos:

$$\hat{\beta}_\Omega = CA^{-1} \Leftrightarrow \hat{\beta}_\Omega A = C \Leftrightarrow \left(\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} | \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} \right) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = (C_1 | C_2).$$

De donde se deduce:

$$\begin{aligned}C_1 &= \hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} A_{11} + \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} A_{21} \\ C_2 &= \hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} A_{12} + \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} A_{22}\end{aligned}$$

y en particular

$$\hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} = C_2 A_{22}^{-1} - \hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} A_{12} A_{22}^{-1}.$$

b)

$$\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} = (C_2 - \mathcal{B}_1^* A_{12}) A_{22}^{-1} - (C_2 - \hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} A_{12}) A_{22}^{-1} = (\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*) A_{12} A_{22}^{-1}.$$

c) Llamando

$$V = (v_2, \dots, v_n), \quad U_1 = (u_2^1, \dots, u_n^1), \quad U_2 = (u_2^2, \dots, u_n^2), \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

se tiene $A = UU'$.

d)

$$\begin{aligned}
[V - \beta U] &= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + [\hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U - \mathcal{B} U] = \\
&= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + (\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega}, \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega}) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} - (\mathcal{B}_1^*, \mathcal{B}_2) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \\
&= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + [\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} U_1 + \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} U_2] - [\mathcal{B}_1^* U_1 + \mathcal{B}_2 U_2] = \\
&= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + [\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*] U_1 + [\hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} - \mathcal{B}_2] U_2 = \\
&= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + [\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*] U_1 + [\hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} - \mathcal{B}_2 + \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} - \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega}] U_2 = \\
&= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + [\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*] U_1 - [\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \hat{\mathcal{B}}_{2\Omega}] U_2 + [\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \mathcal{B}_2] U_2 = \\
&= [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] + [\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \mathcal{B}_2] U_2 - [\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2].
\end{aligned}$$

e) Por otro lado tenemos:

$$\begin{aligned}
[V - \beta U] - [\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \mathcal{B}_2] U_2 &= [V - \mathcal{B}_1^* U_1 - \mathcal{B}_2 U_2] - [\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \mathcal{B}_2] U_2 = \\
&= [V - \mathcal{B}_1^* U_1 - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} U_2].
\end{aligned}$$

Además restando $[\hat{\mathcal{B}}_{2\omega} - \mathcal{B}_2] U_2$ a ambos miembros de la expresión obtenida en d), se tiene:

$$[V - \mathcal{B}_1^* U_1 - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} U_2] = [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] - [\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^*] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2].$$

f) Por último se tiene:

$$\begin{aligned}
&[U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2]' = \\
&= A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21} + A_{12} A_{22}^{-1} A_{22} A_{22}^{-1} A_{21} = A_{11,2}
\end{aligned}$$

$$[V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] [U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2]' = 0, \text{ puesto que } [V - \hat{\mathcal{B}}_{\Omega} U] U' = 0.$$

Tras estos cálculos se tiene:

$$\begin{aligned}
 (n-1)\hat{B}_\omega &= \left[V - \mathcal{B}_1^* U_1 - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} U_2 \right] \left[V - \mathcal{B}_1^* U_1 - \hat{\mathcal{B}}_{2\omega} U_2 \right]' = \\
 &= \left(\left[V - \hat{\mathcal{B}}_\Omega U \right] - \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right] \left[U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2 \right] \right) \times \\
 &\times \left(\left[V - \hat{\mathcal{B}}_\Omega U \right] - \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right] \left[U_1 - A_{12} A_{22}^{-1} U_2 \right] \right)' = \\
 &= (n-1)\hat{B}_\Omega + \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right] A_{11,2} \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right]'.
 \end{aligned}$$

Con ello el criterio queda en la forma siguiente:

$$\Lambda = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|^{\frac{n-1}{2}}}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right] A_{11,2} \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right]'|^{\frac{n-1}{2}}}$$

Por lo tanto, queda conocer la distribución de la matriz

$$\left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right] A_{11,2} \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right]'$$

Se puede demostrar que dicha matriz se distribuye según una Wishart $W_k[q_1; B]$, siendo además su distribución independiente de la de \hat{B}_ω .

Así se tiene que la distribución del criterio

$$\Lambda^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right] A_{11,2} \left[\hat{\mathcal{B}}_{1\Omega} - \mathcal{B}_1^* \right]'|} \quad (4.27)$$

es la misma que la de

$$\mathcal{U}_{k,q_1,n-1-\bar{q}} = \frac{|G|}{|G+H|}$$

donde G y H son dos matrices independientes y distribuidas, respectivamente, según distribuciones de Wishart $W_k(n-1-\bar{q}, B)$ y $W_k(q_1, B)$.

Tenemos una situación parecida en el contraste:

$$H_0 : \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2^*$$

donde \mathcal{B}_2^* es una matriz fija de dimensiones $k \times q_2$. El caso en el que estaremos interesados es aquel en que la matriz \mathcal{B}_2^* es la idénticamente nula.

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula son, respectivamente:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(\mathcal{B}, B, \gamma)/B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k + \frac{k(k+1)}{2} + k} \\ \omega &= \{(\mathcal{B}, B, \gamma)/\mathcal{B} = \mathcal{B}_2, B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{q_1 k + \frac{k(k+1)}{2} + k}\end{aligned}$$

Repetiendo el proceso anterior, tomando:

$$y_\alpha = v_\alpha - \mathcal{B}_1^* u_\alpha^2$$

tendremos

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{B}}_{1\omega} &= (C_1 - \mathcal{B}_1^* A_{21}) A_{11}^{-1} \\ (n-1) \hat{B}_\omega &= \sum_{\alpha=2}^n \left(y_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_{1\omega} u_\alpha^1 \right) \left(y_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_{1\omega} u_\alpha^1 \right)' = \\ &= \sum_{\alpha=2}^n \left(v_\alpha - \mathcal{B}_2^* u_\alpha^2 \right) \left(v_\alpha - \mathcal{B}_2^* u_\alpha^2 \right)' - \hat{\mathcal{B}}_{1\omega} A_{11} \hat{\mathcal{B}}_{1\omega}'.\end{aligned}$$

Por lo que el criterio de razón de verosimilitudes para este caso vendría dado por:

$$\Lambda^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + [\hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} - \mathcal{B}_2^*] A_{22,1} [\hat{\mathcal{B}}_{2\Omega} - \mathcal{B}_2^*]'|}$$

que posee la misma distribución que:

$$\mathcal{U}_{k, q_2, n-1-\bar{q}} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (4.28)$$

donde G y H son dos matrices independientes y distribuidas, respectivamente, según distribuciones de Wishart $W_k(n-1-\bar{q}, B)$ y $W_k(q_2, B)$.

Momentos del criterio

En el apéndice A de [55] puede observarse que los momentos de orden h del estadístico $\mathcal{U}_{k,m,n}$ vienen dados por:

$$E [\mathcal{U}_{k,m,n}^h] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma \left[\frac{n+m-i+1}{2} \right] \Gamma \left[\frac{n-i+1}{2} + h \right]}{\Gamma \left[\frac{n-i+1}{2} \right] \Gamma \left[\frac{n+m-i+1}{2} + h \right]}$$

por lo tanto, tomando $m = q_1$ y $n = n - \bar{q} - 1$, tendremos:

$$E [\Lambda^h] = E \left[\mathcal{U}_{k, q_1, n-\bar{q}-1}^{\frac{n-1}{2}h} \right] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma \left[\frac{n-q_2-i}{2} \right] \Gamma \left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2} \right]}{\Gamma \left[\frac{n-\bar{q}-i}{2} \right] \Gamma \left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-i+1}{2} \right]}.$$

Algunos contrastes de interés

Contraste $H_0 : \beta_0 = 0$

Este contraste es un caso particular del estudiado en el apartado anterior con $\mathcal{B}_1^* = 0$ y $q_1 = 1$.

Por lo tanto el criterio de razón de verosimilitudes adopta la forma:

$$\Lambda_0^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \hat{\beta}_{0\Omega}A_{11,2}\hat{\beta}'_{0\Omega}|} \quad (4.29)$$

donde

- $\hat{B}_\Omega = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta} \cdot u_\alpha) (v_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)'$.
- $\hat{\beta}_{0\Omega}$ es la primera columna de la matriz $\hat{\beta} = CA^{-1}$.
- $A_{11,2} = A_{11} - A_{22}^{-1}A_{21}$.

La distribución de (4.29) se obtiene de la anterior (4.27)

$$\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^0 = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (4.30)$$

donde G y H son dos matrices independientes y distribuidas, respectivamente, según sendas distribuciones de Wishart, $W_k(n-\bar{q}-1, B)$ y $W_k(1, B)$.

Contraste $H_0 : \beta_i = 0 \ (i = 0, \dots, q)$

Este contraste puede ser expresado también en la forma

$$H_0 : \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1^*$$

Para ello hemos de reordenar la matriz de los parámetros, teniendo ahora

$$\beta = (\beta_i, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_0, \beta_{i+1}, \dots, \beta_q)$$

surgiendo el vector \tilde{u}_α como:

$$\tilde{u}_\alpha = (F_{i\alpha}, F_{1\alpha}, \dots, F_{i-1\alpha}, (t_{\alpha-1} - t_\alpha), F_{i+1\alpha}, \dots, F_{q\alpha})'$$

vector que puede expresarse como $\tilde{U}_\alpha = T_1 u_\alpha$, donde la matriz T_1 es la matriz de permutación siguiente:

$$T_i = \begin{pmatrix} e'_i \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_{i-1} \\ e'_0 \\ e'_{i+1} \\ \vdots \\ e'_q \end{pmatrix}$$

y $e_j = (0, \dots, \overset{(j+1)}{1}, \dots, 0)'$, $j = 0, \dots, q$.

El criterio de razón de verosimilitudes adopta la siguiente forma:

$$\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)} = \Lambda_i^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \hat{\beta}_{i\Omega}\tilde{A}_{11,2}\hat{\beta}'_{i\Omega}|} \quad (4.31)$$

donde:

- $\hat{B}_\Omega = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta} \cdot u_\alpha) (v_\alpha - \hat{\beta} u_\alpha)'$
- $\hat{\beta}_{i\Omega}$ es la $(i+1)$ -ésima columna de la matriz $\hat{\beta} = CA^{-1}$.
- $\tilde{A}_{11,2}$ se obtiene de la matriz $T_i A T'_i$,

siendo la distribución de (4.31) la misma que la de (4.30).

Contraste $H_0 : \beta_{i1} = \beta_{i2} = \dots = \beta_{ih} = 0$

En este caso deseamos contrastar si una parte de la matriz paramétrica β es igual a cero. Concretamente, sea $\{i_1, \dots, i_h\} \subseteq \{0, \dots, q\}$.

En primer lugar, se reorganiza la matriz de parámetros:

$$\beta = (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots, \beta_{i_h}, |\beta_{i_{h+1}}, \dots, \beta_{i_q})$$

donde $\{i_{h+1}, \dots, i_q\} = \{0, \dots, q\} - \{i_1, \dots, i_h\}$, surgiendo el vector $\tilde{u}_\alpha = T_{i_1, \dots, i_h} u_\alpha$,

donde la matriz T_{i_1, \dots, i_h} es la siguiente matriz de permutación:

$$T_{\{i_1, \dots, i_h\}} = \begin{pmatrix} e'_{i_1} \\ e'_{i_2} \\ \vdots \\ e'_{i_h} \\ e'_{i_{h+1}} \\ \vdots \\ e'_{i_q} \end{pmatrix}.$$

Obtenemos entonces el siguiente cociente de la razón de verosimilitudes:

$$\mathcal{U}_{k, h, n-\bar{q}-1}^{\{i_1, \dots, i_h\}} = \Lambda_{\{i_1, \dots, i_h\}}^{\frac{2}{n-1}} = \frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{|(n-1)\hat{B}_\Omega + \hat{\beta}_{\{i_1, \dots, i_h\}\Omega} \tilde{A}_{11,2} \hat{\beta}'_{\{i_1, \dots, i_h\}\Omega}|} = \frac{|G|}{|G+H|} \quad (4.32)$$

donde:

- $\hat{B}_\Omega = \frac{1}{(n-1)} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha) (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)'$.
- $\hat{\beta}_{\{i_1, \dots, i_h\}\Omega}$ son las columnas $\{i_1, \dots, i_h\}$ de la matriz $\hat{\beta} = CA^{-1}$.
- $\tilde{A}_{11,2}$ se obtiene de la matriz $T_{\{i_1, \dots, i_h\}} AT'_{\{i_1, \dots, i_h\}}$,

y G y H son dos matrices aleatorias independientes distribuidas, respectivamente, según sendas distribuciones de Wishart $W_k(n-\bar{q}-1, B)$ y $W_k(h, B)$.

Distribuciones exactas

Como en el caso del proceso estocástico lognormal con dos parámetros y q factores exógenos, se pueden obtener algunas distribuciones exactas para el anterior criterio. Se pueden considerar algunos casos particulares:

Caso $q_1 = 1$

En este caso se tiene:

$$\frac{1 - \mathcal{U}_{k, 1, n-\bar{q}-1}^{(i)}}{\mathcal{U}_{k, 1, n-\bar{q}-1}^{(i)}} \frac{n - \bar{q} - k}{k} \rightsquigarrow F_{k, n-\bar{q}-k}$$

de donde se deduce la siguiente región crítica:

$$\begin{aligned} \Lambda_i < \Lambda_i(\varepsilon) &\Leftrightarrow \Lambda_i^{\frac{2}{n-1}} < \Lambda_i^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)} < \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}(\varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}}{\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}} \frac{n - \bar{q} - k}{k} > \frac{1 - \mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}(\varepsilon)}{\mathcal{U}_{k,1,n-\bar{q}-1}^{(i)}(\varepsilon)} \frac{n - \bar{q} - k}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_{k,n-\bar{q}-k} > F_{k,n-\bar{q}-k}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Caso $q_1 = 2$

Este caso procede del contraste

$$H_0 : \beta_{i_1} = \beta_{i_2} = \dots = \beta_{i_h} = 0$$

con $h = 2$ y $(i_1, i_2) \subseteq (0, \dots, q)$.

Es conocido (ver apéndice A de [55]) que:

$$\frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n}}} \frac{n - k + 1}{k} \rightsquigarrow F_{2k,2(n-k+1)}$$

por lo que se tiene en este caso:

$$\frac{1 - \sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}}{\sqrt{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}} \frac{n - k - \bar{q}}{k} \rightsquigarrow F_{2k,2(n-k-\bar{q})}.$$

Con ello:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\{i_1, i_2\}} < \Lambda_{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon) &\Leftrightarrow \Lambda_{\{i_1, i_2\}}^{\frac{2}{n-1}} < \Lambda_{\{i_1, i_2\}}^{\frac{2}{n-1}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}} < \mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - \mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}}{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}} \frac{n - \bar{q} - k}{k} > \frac{1 - \mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon)}{\mathcal{U}_{k,2,n-\bar{q}-1}^{\{i_1, i_2\}}(\varepsilon)} \frac{n - \bar{q} - k}{k} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_{2k,2(n-\bar{q}-k)} > F_{2k,2(n-\bar{q}-k)}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Distribución asintótica

En el apartado de momentos del criterio se han obtenido las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 E[\Lambda^h] &= E\left[\mathcal{U}_{k,q_1,n-\bar{q}-1}^{\frac{n-1}{2}h}\right] = \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n-q_2-i}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-\bar{q}-i}{2}\right] \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-i+1}{2}\right]} = \\
 &= \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma\left[\frac{n-q_2-i}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{n-\bar{q}-i}{2}\right]} \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\prod_{i=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-i+1}{2}\right]} = \\
 &= K \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-\bar{q}-i+1}{2}\right]}{\prod_{j=1}^k \Gamma\left[\frac{(n-1)(1+h)-q_2-j+1}{2}\right]}.
 \end{aligned}$$

Con estos criterios se puede aplicar el desarrollo asintótico de la distribución del criterio de la razón de verosimilitudes para hipótesis lineales (ver apéndice B de [55]).

En dicho desarrollo tenemos:

$a = k$	$b = k$	$x_i = y_j = \frac{n-1}{2}$	$\epsilon_i = \delta_j = (1-\rho)^{\frac{n-1}{2}}$
$\xi_i = -\frac{\bar{q}+i-1}{2}$	$i = (1, \dots, k)$	$\eta_j = -\frac{q_2+j-1}{2}$	$j = (j, \dots, k)$

Por una parte, los grados de libertad vienen dados por:

$$f = -2 \left[\sum_{i=1}^a \xi_i - \sum_{j=1}^b \eta_j - \frac{1}{2}(a-b) \right]$$

y en nuestro caso tenemos:

$$f = -2 \left[\sum_{i=1}^k -\frac{\bar{q}+i-1}{2} - \sum_{i=1}^k -\frac{q_2+j-1}{2}(a-b) \right].$$

Calculamos ahora ω_1 y ω_2 , que vienen dados por:

$$\omega_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)} \left[\sum_{k=1}^a \frac{B_{r+1}(\epsilon_k + \xi_i)}{(\rho x_k)^r} - \sum_{j=1}^b \frac{B_{r+1}(\delta_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^r} \right].$$

Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^k \frac{B_2(\epsilon_i + \xi_i)}{\rho x_i} - \sum_{j=1}^k \frac{B_2(\delta_j + \eta_j)}{\rho y_j} \right] = \\ &= \frac{1}{\rho(n-1)} \left[\sum_{i=1}^k B_2 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^k B_2 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) \right]\end{aligned}$$

con

$$B_2(h) = h^2 - h + \frac{1}{6}.$$

Haciendo operaciones se tiene que:

$$\begin{aligned}B_2 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - B_2 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) &= \\ &= \frac{q_1}{4} [q_1 + 2i + 2q_2 - 2(1-\rho)(n-1)]\end{aligned}$$

y así:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k B_2 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \sum_{j=1}^k B_2 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_2 + j - 1)}{2} \right) &= \\ &= \frac{kq_1}{4} [q_1 + 2q_2 - 2(1-\rho)(n-1) + k + 1].\end{aligned}$$

Con ello:

$$\omega_1 = \frac{kq_1}{4\rho(n-1)} [q_1 + 2q_2 - 2(1-\rho)(n-1) + k + 1].$$

Tomando $\omega_1 = 0$ con el objetivo de acortar el desarrollo asintótico, nos queda entonces:

$$\rho = \frac{\gamma_1}{n-1} \text{ donde } \gamma_1 = n - q_2 - \frac{1}{2}[q_1 + k + 3]$$

y

$$\omega_2 = -\frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^k \frac{B_3(\epsilon_i + \xi_i)}{(\rho x_i)^2} - \sum_{j=1}^k \frac{B_3(\delta_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^2} \right]$$

que en este caso queda como:

$$- \frac{2}{3\rho^2(n-1)^2} \left[\sum_{i=1}^k B_3 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) - \sum_{j=1}^k B_3 \left(\frac{(1-\rho)(n-1) - (q_1 + q_2 + i - 1)}{2} \right) \right]$$

con

$$B_3(h) = h^3 - \frac{3}{2}h^2 + \frac{1}{2}h.$$

Quedándonos:

$$\omega_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2}$$

donde

$$\gamma_2 = \frac{kq_1[k^2 + q_1^2 - 5]}{48}.$$

Por lo tanto, como $\mathcal{U}_{k,q_1,n-\bar{q}-1} = \Lambda^{\frac{2}{n-1}}$ se tiene:

$$\begin{aligned} P[-2\rho \log \Lambda \leq z] &= P \left[-2 \frac{\gamma_1}{n-1} \log \Lambda \leq z \right] = \\ &= P \left[-\gamma_1 \log \Lambda^{\frac{2}{n-1}} \leq z \right] = P \left[-\gamma_1 \log \mathcal{U}_{k,q_1,n-\bar{q}-1} \leq z \right] = \\ &= P \left[\chi_{kq_1}^2 \leq z \right] + \frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} \left[P \left[\chi_{kq_1+4}^2 \leq z \right] - P \left[\chi_{kq_1}^2 \leq z \right] \right] + \theta(n^{-4}). \end{aligned}$$

4.5.2. Contrastes sobre subvectores

Se considera ahora el hecho de si algún subvector de los vectores paramétricos es nulo. Para ello se toma una matriz D_l de dimensiones $l \times k$ con $rg(D_l) = l < k$, tal que $Z_t = D_l V_t$, verificándose que:

$$Z_t \rightsquigarrow N_l(\Delta U_t, \Phi)$$

donde $\Delta = D_l \beta$ y $\Phi = D_l \hat{B} D_l'$, entonces:

$$\hat{\Delta} = D_l \hat{\beta} \text{ y } \hat{\Phi} = D_l \hat{B} D_l'.$$

Estaremos interesados en matrices D_l que estén compuestas por unos y ceros de tal forma que Z_t no sea más que el vector U_t reducido en su dimensionalidad. Tendremos

entonces:

$$D_l = \begin{pmatrix} e'_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e'_{\sigma(l)} \end{pmatrix}$$

donde σ es una permutación sobre $\{1, \dots, k\}$, ($\sigma \in S_k$), tal que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$ y

$$e'_{\sigma(i)} = (0, \dots, \overset{(i)}{1}, \dots, 0), i = 1, \dots, l.$$

Entonces si $\beta = (\beta_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, tenemos que

$$\Delta = (\beta_{\sigma(i)j}) \text{ y } \phi = (b_{\sigma(i)j}).$$

Sea $\Delta = (\Delta_1 | \Delta_2) = (\beta_0^l | \beta_1^l | \dots | \beta_q^l)$, donde $\beta_i^l = D_l \beta_i$.

Por ejemplo, si $\Delta_1 = \beta_1^l$, entonces, contrastar $\Delta_1 = 0$ es equivalente a contrastar que un cierto subvector de β_i es nulo.

Para contrastar que una parte de los vectores paramétricos β es nulo, tenemos que tomar $\Delta_1 = (\beta_{i_1}^l | \dots | \beta_{i_h}^l)$, y contrastar $\Delta_1 = 0$.

Notaremos que este tipo de estudio sobre subvectores de los vectores paramétricos se transforma en un caso particular del visto con anterioridad, donde se reduce solamente la dimensionalidad del espacio paramétrico considerado. Además, una vez conocidos los parámetros β y B se puede determinar el tercer parámetro γ .

4.5.3. Contrastes sobre independencia por bloques

Partimos del vector k -dimensional:

$$V_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{N}_k[\beta u_\alpha, B]$$

y consideramos en él la siguiente partición:

$$V_\alpha = (V_\alpha^1, V_\alpha^2, \dots, V_\alpha^m),$$

donde los subvectores V_α^i son de dimensiones p_i , $i = 1, \dots, m$ con $\sum_{i=1}^m p_i = k$, lo que lleva a las siguientes particiones en los parámetros β , B y γ :

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix},$$

con β^i de dimensión $p_i \times \bar{q}$, $i = 1, \dots, m$.

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{pmatrix},$$

con B_{ij} de dimensión $p_i \times p_j$, $i, j = 1, \dots, m$ y,

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \vdots \\ \gamma^m \end{pmatrix}$$

con $\gamma^i \in \mathbb{R}^{p_i}$ para todo $i, j = 1, \dots, m$.

Con todo ello se tiene:

$$V_\alpha^i \rightsquigarrow \mathcal{N}_k[\beta^i u_\alpha; B_{ii}], \quad i = 1, \dots, m$$

En este caso estamos interesados en contrastar la independencia de los m bloques en los que se ha descompuesto el vector V_α , lo cual lleva a la hipótesis nula:

$$H_0 : B_{ij} = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, m).$$

Sabemos que bajo la hipótesis alternativa la función de verosimilitud conjunta es:

$$L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}k} |B|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \beta u_\alpha)' B^{-1} (v_\alpha - \beta u_\alpha) \right\}$$

mientras que bajo la hipótesis nula es:

$$\begin{aligned} L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) &= \prod_{i=1}^n L(v_2^i, \dots, v_n^i; \beta^i, B_{ii}, \gamma^i) = \\ &= \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}p_i} |B_{ii}|^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha^i - \beta^i u_\alpha)' B_{ii}^{-1} (v_\alpha^i - \beta^i u_\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula son:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(\beta, B, \gamma) : B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k + k \frac{(k+1)}{2} + k} \\ \omega &= \{(\beta, B_{11}, \dots, B_{mm}, \gamma) : B_{ii} > 0, i = 1, \dots, m\} \subset \mathbb{R}^{\bar{q}k + \frac{k+(p_1^2 + \dots + p_m^2)}{2} + k}. \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis alternativa los estimadores asociados máximo verosímiles son:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\Omega &= CA^{-1} \\ \hat{B}_\Omega &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)' \\ \sum_{\alpha=2}^n W_\alpha \hat{B}_\Omega^{-1} (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha) &= 0\end{aligned}$$

con

$$v_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} (\ln(x_\alpha - \hat{\gamma}) - \ln(x_{\alpha-1} - \hat{\gamma}))$$

y

$$W_\alpha = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_{\alpha,1} - \hat{\gamma}_{1\Omega}} - \frac{1}{x_{\alpha-1,1} - \hat{\gamma}_{1\Omega}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{x_{\alpha,k} - \hat{\gamma}_{k\Omega}} - \frac{1}{x_{\alpha-1,k} - \hat{\gamma}_{k\Omega}} \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene

$$\max_{\Omega} L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}k} |\hat{B}_\Omega|^{-\frac{(n-1)}{2}} e^{-\frac{(n-1)}{2}k}.$$

Bajo la hipótesis nula, si descomponemos también la matriz C en la forma:

$$C = \begin{pmatrix} C^1 \\ C^2 \\ \vdots \\ C^m \end{pmatrix},$$

con C^i de dimensión $p_i \times \bar{q}$, $i = 1, \dots, m$, y la matriz W_α en la forma:

$$W_\alpha = \begin{pmatrix} W_{\alpha 11} & W_{\alpha 12} & \dots & W_{\alpha 1m} \\ W_{\alpha 21} & W_{\alpha 22} & \dots & W_{\alpha 2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{\alpha m1} & W_{\alpha m2} & \dots & W_{\alpha mm} \end{pmatrix},$$

con $W_{\alpha ij}$ de dimensión $p_i \times p_j$ donde $W_{\alpha ij} = 0$ si $i \neq j$.

Pueden obtenerse los siguientes estimadores máximo verosímiles, que son:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\omega^i &= C^i A^{-1} \\ \hat{B}_{\omega ii} &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha^i - \hat{\beta}_\omega^i u_\alpha)(v_\alpha^i - \hat{\beta}_\omega^i u_\alpha)' \\ \sum_{\alpha=2}^n W_{\alpha ii} \hat{B}_{\omega ii}^{-1} (v_\alpha^i - \hat{\beta}_\omega^i u_\alpha) &= 0\end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, m$, de donde se obtiene:

$$\max_{\omega} L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}k} \prod_{i=1}^m |\hat{B}_{\omega ii}|^{-\frac{(n-1)}{2}} e^{-\frac{(n-1)}{2} p_i},$$

y el criterio de la razón de verosimilitudes para este contraste es:

$$\Lambda = \left[\frac{|(n-1)\hat{B}_\Omega|}{\prod_{i=1}^m |(n-1)\hat{B}_{\omega ii}|} \right]^{\frac{(n-1)}{2}}$$

donde $(n-1)\hat{B}_\Omega \rightsquigarrow W_k(n-\bar{q}-1; B)$ y $(n-1)\hat{B}_{\omega ii} \rightsquigarrow W_{p_i}(n-\bar{q}-1; B_{ii})$.

Distribución y momentos del criterio

Utilizando los resultados obtenidos anteriormente, la distribución del criterio para contrastar la hipótesis nula

$$H_0 : B_{ij} = 0 \quad (i \neq j, i, j = 1, \dots, m)$$

es

$$\prod_{i=2}^m \mathcal{U}_{p_i, \bar{p}_i, n-\bar{q}-\bar{p}_i-1} = \prod_{i=2}^m \prod_{j=1}^{p_i} X_{ij}$$

donde

$$X_{ij} \rightsquigarrow \beta \left(\frac{n-\bar{q}-\bar{p}_i-j}{2}, \frac{\bar{p}_i}{2} \right)$$

tal que $\bar{p}_i = p_1 + \dots + p_{i-1}$.

Así los momentos de orden h del criterio son:

$$\begin{aligned}
 E[\Lambda^h] &= \frac{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma \left[\frac{1}{2}(n-j-q-1) \right] \prod_{i=1}^k \Gamma \left[\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-i) \right]}{\prod_{i=1}^k \Gamma \left[\frac{1}{2}(n-i-q-1) \right] \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma \left[\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j) \right]} = \\
 &= K \frac{\prod_{i=1}^k \Gamma \left[\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-i) \right]}{\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma \left[\frac{1}{2}((n-1)(1+h)-q-j) \right]}
 \end{aligned}$$

tal que $\bar{p}_1 = 0$.

4.5.4. Contrastes sobre los subvectores del parámetro γ

Particionemos el vector γ como

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

donde γ_1 es un vector de dimensión k_1 y γ_2 es de dimensión k_2 , con $k_1 + k_2 = k$.

Comencemos con un caso genérico, contrastando la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_1^*$$

donde γ_1^* es un vector fijo de dimensión k_1 , siendo el caso en el que γ_1^* sea el vector idénticamente nulo aquel en el cual estaremos más interesados.

Las regiones del espacio asociadas a la hipótesis alternativa y nula serán:

$$\begin{aligned}
 \Omega &= \{(\beta, B, \gamma) : B > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{\bar{q}k+k\frac{(k+1)}{2}+k} \\
 \omega &= \{(\beta, B, \gamma) : \gamma_1 = \gamma_1^*, B > 0\} \subset \mathbb{R}^{\bar{q}k+k\frac{(k+1)}{2}+k_2}
 \end{aligned}$$

Bajo la hipótesis alternativa los estimadores máximo verosímiles son determina-

dos a partir de:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\Omega &= CA^{-1} \\ \hat{B}_\Omega &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)(v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha)' \\ \sum_{\alpha=2}^n W_\alpha \hat{B}_\Omega^{-1} (v_\alpha - \hat{\beta}u_\alpha) &= 0\end{aligned}$$

de donde tendremos

$$\max_{\Omega} L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\hat{B}_\Omega|^{-\frac{(n-1)k}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}}.$$

Bajo la hipótesis nula tendremos

$$\begin{aligned}d \ln[L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma_2)] &= \frac{1}{2} \text{Vec} \left[B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n ((v_{\alpha\omega} - \beta u_\alpha)(v_{\alpha\omega} - \beta u_\alpha)' B^{-1} - I_k) \right]' \times \\ &\times d \text{Vec}(B) + \text{Vec} \left[B^{-1} \sum_{\alpha=2}^n (v_{\alpha\omega} - \beta u_\alpha) u_\alpha' \right]' d \text{Vec}(\beta) + \\ &+ \left[\sum_{\alpha=2}^n (O_{k_2 \times k_1} W_\alpha^2) B^{-1} (v_{\alpha\omega} - \beta u_\alpha) \right] d\gamma_2.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_\omega &= \sum_{\alpha=2}^n \hat{v}_{\alpha\omega} u_\alpha' A^{-1} \\ \hat{B}_\omega &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (\hat{v}_{\alpha\omega} - \hat{\beta}_\omega u_\alpha)(\hat{v}_{\alpha\omega} - \hat{\beta}_\omega u_\alpha)' \\ \sum_{\alpha=2}^n (O_{k_2 \times k_1} W_\alpha^2) \hat{B}_\omega^{-1} (\hat{v}_{\alpha\omega} - \hat{\beta}_\omega u_\alpha) &= 0\end{aligned} \tag{4.33}$$

donde

$$W_\alpha = \begin{pmatrix} W_\alpha^1 & O_{k_1 \times k_2} \\ O_{k_2 \times k_1} & W_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

siendo W_α^i una matriz de dimensión $k_i \times k_i$ para $i = 1, 2$ y

$$\hat{v}_{\alpha\omega} = (t_\alpha - t_{\alpha-1})^{-1/2} \begin{pmatrix} \ln(x_\alpha^1 - \gamma_1^*) - \ln(x_{\alpha-1}^1 - \gamma_1^*) \\ \ln(x_\alpha^2 - \hat{\gamma}_{\omega 2}) - \ln(x_{\alpha-1}^2 - \hat{\gamma}_{\omega 2}) \end{pmatrix}$$

siendo la ecuación (4.6) equivalente a:

$$\sum_{\alpha=2}^n \begin{pmatrix} O_{k_1 \times k_2} & 0 \\ 0 & O_{k_2 \times k_1} \end{pmatrix} \hat{B}_\omega^{-1} (\hat{v}_{\alpha\omega} - \hat{\beta}_\omega u_\alpha) = 0$$

de donde se obtiene

$$\max_{\omega} L(v_2, \dots, v_n; \beta, B, \gamma) = (2\pi)^{-\frac{(n-1)k}{2}} |\hat{B}_\omega|^{-\frac{(n-1)k}{2}} e^{-\frac{(n-1)k}{2}},$$

con ello el criterio queda de la siguiente forma:

$$\Lambda = \frac{|\hat{B}_\Omega|^{\frac{n-1}{2}}}{|\hat{B}_\omega|^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Caso general

$$H_0 : \gamma_{i1} = \gamma_{i1}^*, \dots, \gamma_{ih} = \gamma_{ih}^*$$

En este caso deseamos contrastar una parte del vector paramétrico γ .

Primero se reordena el vector γ :

$$\gamma^\sigma = (\gamma_{\sigma(1)}, \gamma_{\sigma(2)}, \dots, \gamma_{\sigma(h)}, \gamma_{\sigma(h+1)}, \dots, \gamma_{\sigma(k)})'$$

$$\gamma^\sigma = T_\sigma \gamma$$

donde T_σ es la matriz de permutación

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} e'_{\sigma(1)} \\ e'_{\sigma(2)} \\ \vdots \\ e'_{\sigma(k)} \end{pmatrix},$$

con $e'_{\sigma(i)} = (0, \dots, 0, \overset{(\sigma(i))}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

Sea $v_\alpha^\sigma = T_\sigma v_\alpha$, por lo tanto

$$v_\alpha^\sigma \rightsquigarrow \mathcal{N}_k(T_\sigma \beta u_\alpha, T_\sigma B T_\sigma')$$

con ello se obtiene:

$$\hat{\beta}_\Omega^\sigma = T_\sigma \hat{\beta}_\Omega$$

y

$$\hat{B}_\Omega^\sigma = T_\sigma \hat{B}_\Omega T_\sigma'$$

entonces

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_\omega^\sigma &= \sum_{\alpha=2}^n T_\sigma v_{\alpha\omega} (T_\sigma u_\alpha)' \left[\sum_{\alpha=2}^n T_\sigma u_\alpha (T_\sigma u_\alpha)' \right]^{-1} = T_\sigma \hat{\beta}_\omega T_\sigma^{-1}, \\ \hat{B}_\omega^\sigma &= \frac{1}{n-1} \sum_{\alpha=2}^n (T_\sigma v_{\alpha\omega} - T_\sigma \hat{\beta}_\omega u_\alpha) (T_\sigma v_{\alpha\omega} - T_\sigma \hat{\beta}_\omega u_\alpha)' = T_\sigma \hat{B}_\omega T_\sigma' \end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de razón de verosimilitudes para contrastar la hipótesis

$$H_0 : \gamma_{i1} = \gamma_{i1}^*, \dots, \gamma_{ih} = \gamma_{ih}^*$$

es

$$\Lambda = \frac{|\hat{B}_\Omega|^{n-1}}{|\hat{B}_\omega|^{n-1}} = \frac{|T_\sigma \hat{B}_\Omega T_\sigma'|^{n-1}}{|T_\sigma \hat{B}_\omega T_\sigma'|^{n-1}} = \frac{|\hat{B}_\Omega^\sigma|^{n-1}}{|\hat{B}_\omega^\sigma|^{n-1}}.$$

Capítulo 5

Aplicación a datos reales

5.1. Introducción

Se utiliza la metodología del proceso de difusión lognormal unidimensional tri-paramétrico expuesto en el capítulo 1 de esta tesis, para el estudio de la evolución de un indicador demográfico básico como es la nupcialidad, concretamente la variable “*Edad media al primer matrimonio*”, en España y Comunidad Autónoma de Andalucía. Las respectivas variables estocásticas dependientes del tiempo son:

- $X_1(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en España.
- $Y_1(t)$, edad media al primer matrimonio en mujeres en España.
- $X_2(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.
- $Y_2(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.

Para $X_1(t)$ e $Y_1(t)$ se toman los datos correspondientes al periodo de tiempo 1982-2002 para ajustar el correspondiente modelo, y para las variables $X_2(t)$ e $Y_2(t)$ se toman los datos correspondientes al periodo de tiempo 1980-2002. Los valores observados corresponden a observaciones en intervalos de tiempo iguales a un año. La fuente de datos para todas las variables ha sido el I.N.E. (Instituto Nacional de Estadística de España).

Se siguen los siguientes pasos en la metodología estadística:

1. Se toman los valores observados para los periodos 1982-2001 para $X_1(t)$ e $Y_1(t)$ y 1980-2001 para $X_2(t)$ e $Y_2(t)$ para la estimación de los parámetros, reservando los valores observados en el año 2002 para compararlos con la correspondiente predicción por el ajuste del modelo.

2. Se calculan las estimaciones de los parámetros utilizando las expresiones obtenidas en (1.10), (1.11), (1.12). La expresión (1.12) se aproxima numéricamente usando el programa Mathematica 5.0.
3. Una vez que se han estimado los parámetros, se obtienen las funciones tendencia estimada y tendencia condicionada estimada para cada variable, representando cada una de estas funciones. Además se simulan 10 trayectorias usando los dos algoritmos descritos en el capítulo 1, representándose junto con la media de estas trayectorias y con la tendencia estimada.

5.2. Aplicación

5.2.1. Edad media al primer matrimonio en varones en España

En la Tabla 5.1 se muestran los valores observados de $X_1(t)$ y los valores de las funciones tendencia estimada y tendencia condicionada estimada.

La estimación máximo verosímil de los parámetros se muestra en la Tabla 5.2.

La Figura 5.1 muestra el ajuste y la predicción para $X_1(t)$ usando la función tendencia estimada.

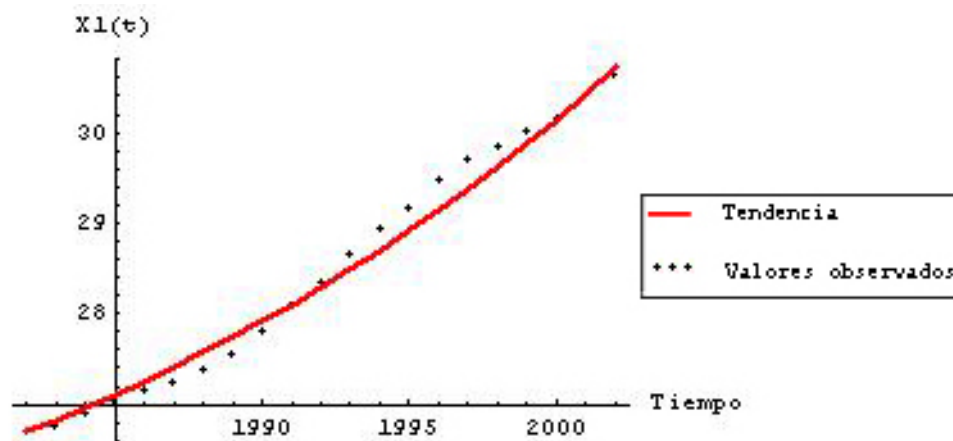


Figura 5.1: Ajuste y predicción para $X_1(t)$ usando la función tendencia estimada.

<i>Años</i>	$X_1(t)$	<i>Tendencia</i>	<i>Tendencia Condicionada</i>
1982	26.7	26.7000	26.7000
1983	26.76	26.8303	26.8303
1984	26.9	26.9662	26.8929
1985	27.03	27.1079	27.0389
1986	27.15	27.2559	27.1745
1987	27.23	27.4102	27.2997
1988	27.39	27.5712	27.3832
1989	27.56	27.7392	27.5501
1990	27.81	27.9144	27.7275
1991	28.09	28.0972	27.9883
1992	28.35	28.2880	28.2804
1993	28.66	28.4870	28.5517
1994	28.92	28.6946	28.8751
1995	29.16	28.9112	29.1464
1996	29.46	29.1372	29.3968
1997	29.69	29.3730	29.7097
1998	29.85	29.6190	29.9497
1999	30.01	29.8756	30.1166
2000	30.16	30.1433	30.2836
2001	30.41	30.4227	30.4400
<i>Predicción</i>			
2002	30.63	30.7141	30.7009

Cuadro 5.1: Valores observados, tendencias estimadas y valor predicho para $X_1(t)$.

$\hat{\gamma}$	\hat{a}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
23.6911	0.042282	0.042381	0.0140717

Cuadro 5.2: Estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso $X_1(t)$.

La Figura 5.2 muestra el ajuste y la predicción para $X_1(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

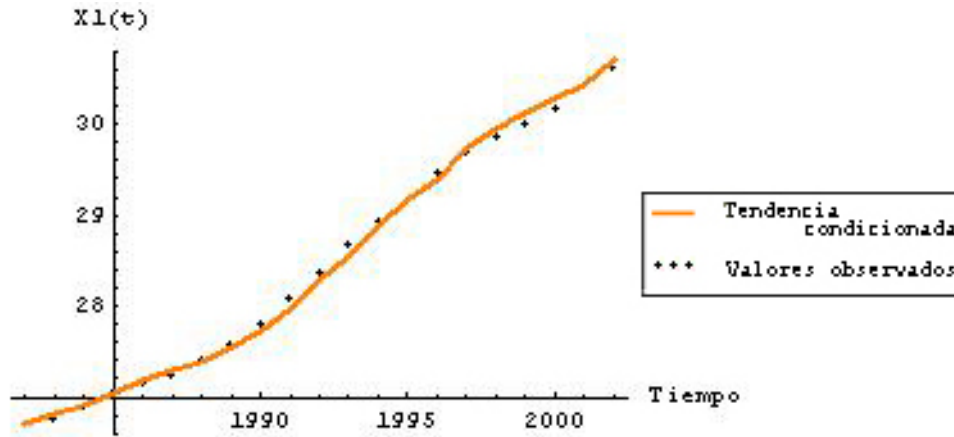


Figura 5.2: Ajuste y predicción para $X_1(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

A continuación se simulan 10 trayectorias (n) tomando como valores para γ , μ y σ los obtenidos mediante la estimación máximo-verosímil usando los datos reales correspondientes a la “*Edad media al primer matrimonio en varones en España*”. Para cada trayectoria se generan 202 datos (n_1), considerando los instantes de tiempo

$$t_i = (i - 1)h, \quad i = 0, \dots, 201.$$

Como valor inicial se toma el primer valor observado que en este caso:

$$x_0 = 26,70$$

Simulación						
n	n_1	h	x_0	γ	μ	σ
10	202	0.1	26.70	23.6911	0.042381	0.0140717

Cuadro 5.3: Valores utilizados en la simulación.

La simulación se realiza por los dos métodos expuestos en el capítulo 1, en primer lugar a partir del algoritmo propuesto por Rao (ver (1.26)) como se muestra en la Figura 5.3 y en segundo lugar utilizando el método de simulación a partir de la ecuación integral de Itô (ver (1.19)), mostrándose los resultados en la Figura 5.4. En ambas figuras se representan dichas trayectorias junto con la media de estas y la función tendencia estimada considerando los parámetros expuestos anteriormente.

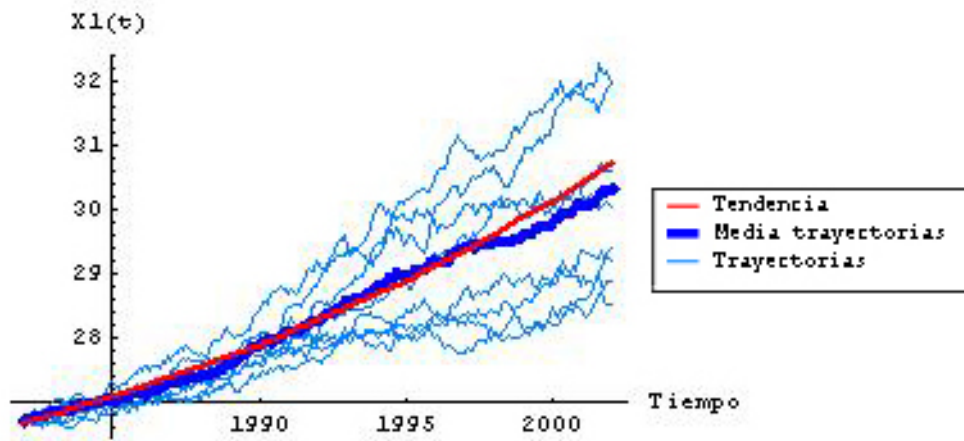


Figura 5.3: Varias trayectorias $X_1(t)$ usando algoritmo de Rao, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

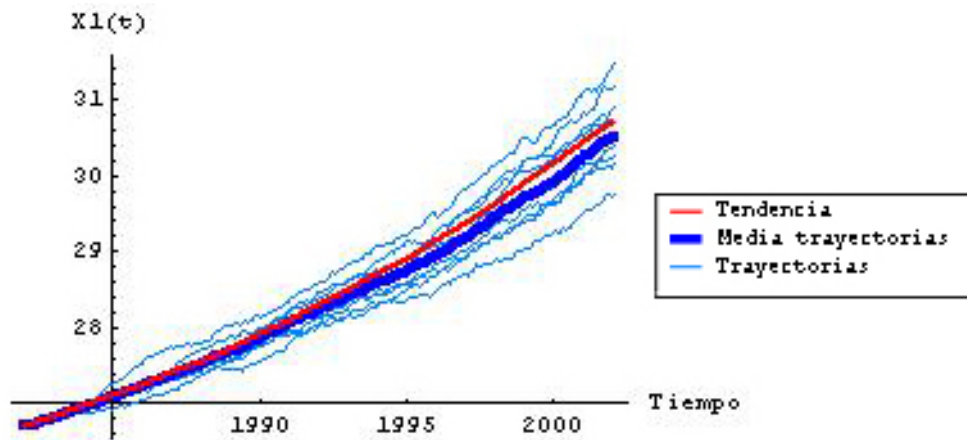


Figura 5.4: Varias trayectorias $X_1(t)$ usando ecuación integral de Itô, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

5.2.2. Edad media al primer matrimonio en mujeres en España

En la Tabla 5.4 se muestran los valores observados de $Y_1(t)$ y los valores de las funciones tendencia y tendencia condicionada estimadas. La estimación máximo verosímil de los parámetros se muestra en la Tabla 5.5.

<i>Años</i>	$Y_1(t)$	<i>Tendencia</i>	<i>Tendencia Condicionada</i>
1982	24.48	24.4800	24.4800
1983	24.62	24.6151	24.6151
1984	24.71	24.7563	24.7614
1985	24.79	24.9038	24.8554
1986	24.88	25.0580	24.9391
1987	24.97	25.2191	25.0331
1988	25.13	25.3875	25.1272
1989	25.34	25.5635	25.2944
1990	25.60	25.7473	25.5138
1991	25.94	25.9395	25.7855
1992	26.22	26.1404	26.1409
1993	26.54	26.3503	26.4335
1994	26.86	26.5696	26.7679
1995	27.10	26.7988	27.1023
1996	27.40	27.0384	27.3531
1997	27.62	27.2887	27.6666
1998	27.79	27.5504	27.8965
1999	27.95	27.8238	28.0742
2000	28.12	28.1095	28.2414
2001	28.39	28.4081	28.4191
<i>Predicción</i>			
2002	28.59	28.7201	28.7012

Cuadro 5.4: Valores observados, tendencias estimadas y valor predicho para $Y_1(t)$.

$\hat{\gamma}$	\hat{a}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
21.4815	0.0439282	0.0440658	0.0165907

Cuadro 5.5: Estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso $Y_1(t)$.

La Figura 5.5 muestra el ajuste y la predicción para $Y_1(t)$ usando la función tendencia estimada.

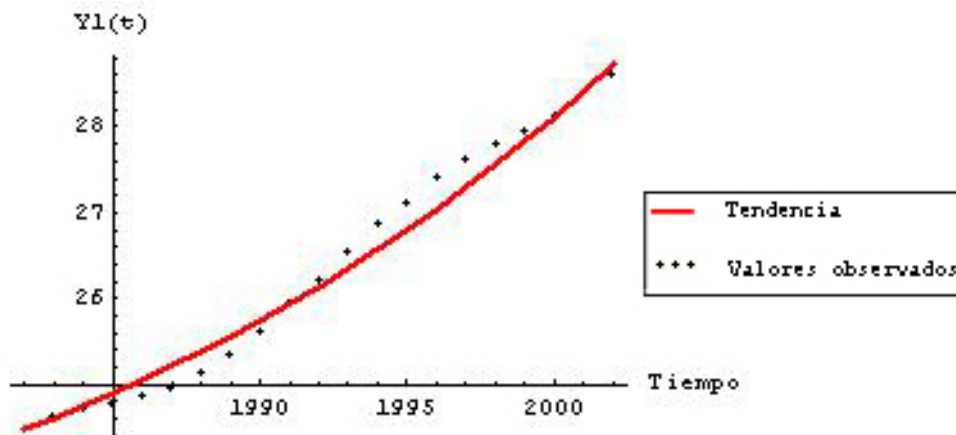


Figura 5.5: Ajuste y predicción para $Y_1(t)$ usando la función tendencia estimada.

La Figura 5.6 muestra el ajuste y la predicción para $Y_1(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

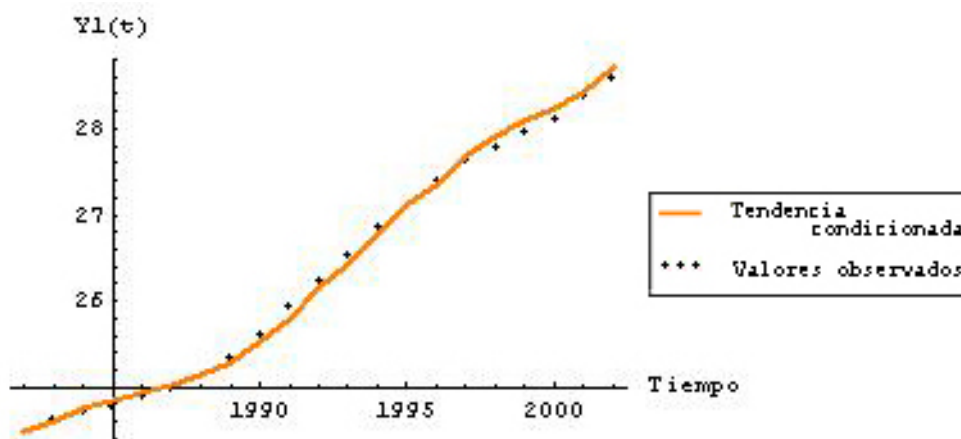


Figura 5.6: Ajuste y predicción para $Y_1(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

A continuación se simulan 10 trayectorias (n) tomando como valores para γ , μ y σ los obtenidos mediante la estimación máximo-verosímil usando los datos reales correspondientes a la “*Edad media al primer matrimonio en mujeres en España*”. Para cada trayectoria se generan 202 datos (n_1), considerando los instantes de tiempo

$$t_i = (i - 1)h, \quad i = 0, \dots, 201.$$

Como valor inicial se toma el primer valor observado que en este caso es:

$$x_0 = 24,48$$

Simulación						
n	n_1	h	x_0	γ	μ	σ
10	202	0.1	24.48	21.4815	0.0440658	0.0165907

Cuadro 5.6: Valores utilizados en la simulación.

La simulación se realiza por los dos métodos expuestos en el capítulo 1, en primer lugar a partir del algoritmo propuesto por Rao (ver 1.26) como se muestra en la Figura 5.7 y en segundo lugar utilizando el método de simulación a partir de la ecuación integral de Itô (ver 1.19), mostrándose los resultados en la Figura 5.8. En ambas figuras se representan dichas trayectorias junto con la media de estas y la función tendencia estimada considerando los parámetros expuestos anteriormente.

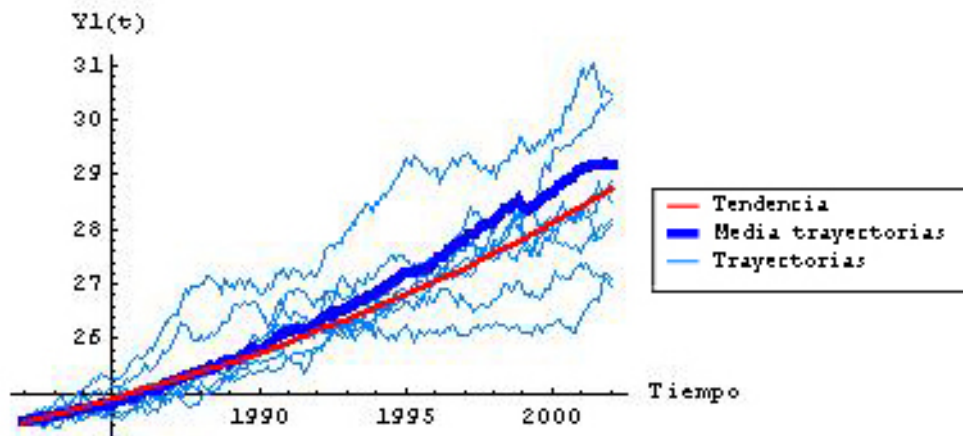


Figura 5.7: Varias trayectorias $Y_1(t)$ usando algoritmo de Rao, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

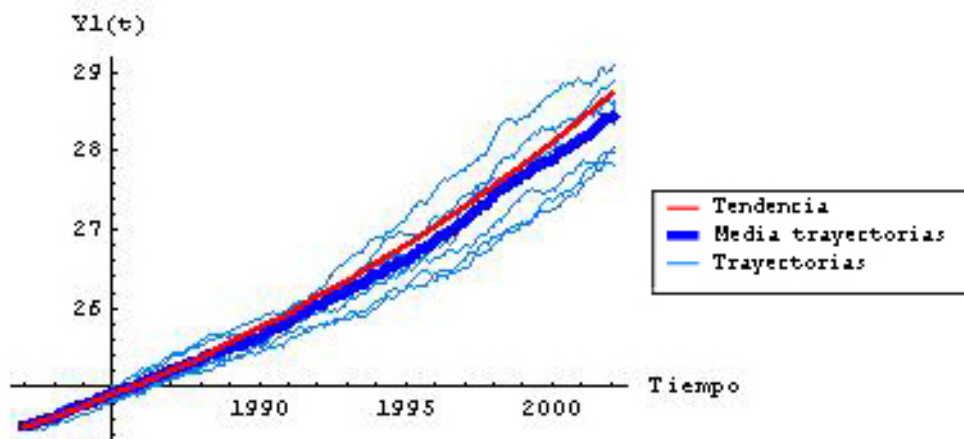


Figura 5.8: Varias trayectorias $Y_1(t)$ usando ecuación integral de Itô, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

5.2.3. Edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía

En la Tabla 5.7 se muestran los valores observados de $X_2(t)$ y los valores de las funciones tendencia y tendencia condicionada estimadas. La estimación máximo verosímil de los parámetros se muestra en la Tabla 5.8.

La Figura 5.9 muestra el ajuste y la predicción para $X_2(t)$ usando la función tendencia estimada.

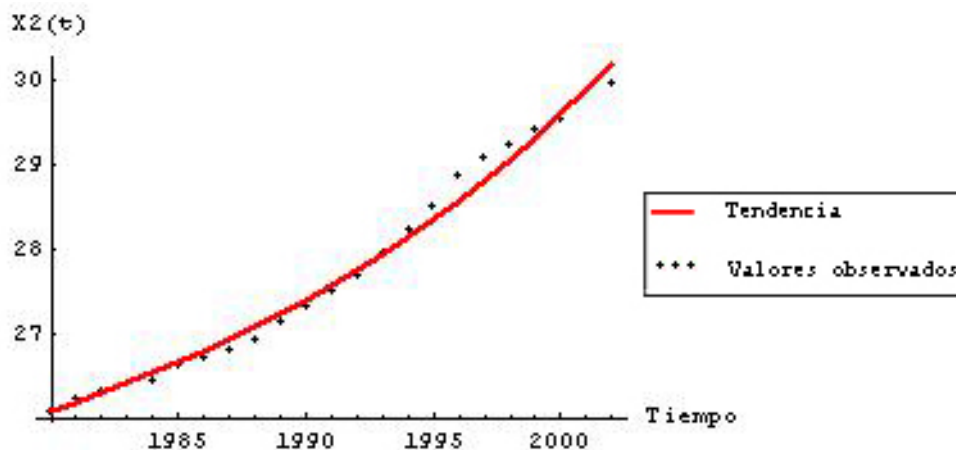


Figura 5.9: Ajuste y predicción para $X_2(t)$ usando la función tendencia estimada.

<i>Años</i>	$X_2(t)$	<i>Tendencia</i>	<i>Tendencia Condicionada</i>
1980	26.08	26.0800	26.0800
1981	26.22	26.1838	26.1825
1982	26.33	26.2926	26.3299
1983	26.41	26.4066	26.4458
1984	26.45	26.5259	26.5300
1985	26.61	26.6509	26.5721
1986	26.72	26.7818	26.7406
1987	26.80	26.9190	26.8565
1988	26.93	27.0627	26.9407
1989	27.13	27.2131	27.0776
1990	27.32	27.3707	27.2882
1991	27.51	27.5358	27.4883
1992	27.69	27.7088	27.6884
1993	27.97	27.8899	27.8779
1994	28.24	28.0796	28.1728
1995	28.50	28.2784	28.4571
1996	28.87	28.4865	28.7309
1997	29.09	28.7045	29.1205
1998	29.24	28.9329	29.3522
1999	29.42	29.1721	29.5101
2000	29.54	29.4227	29.6997
2001	29.85	29.6852	29.8260
<i>Predicción</i>			
2002	29.94	29.9601	30.1525

Cuadro 5.7: Valores observados, tendencias estimadas y valor predicho para $X_2(t)$.

$\hat{\gamma}$	\hat{a}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
24.1474	0.051526	0.0516807	0.0175877

Cuadro 5.8: Estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso $X_2(t)$.

La Figura 5.10 muestra el ajuste y la predicción para $X_2(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

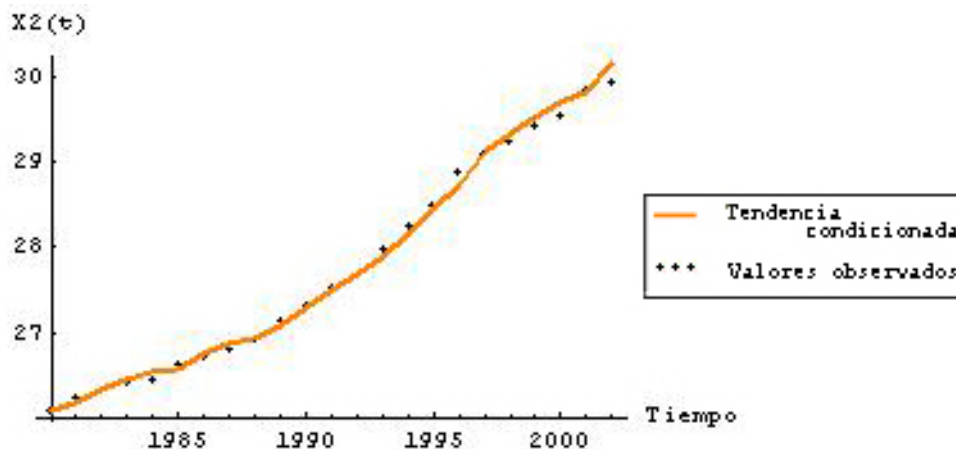


Figura 5.10: Ajuste y predicción para $X_2(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

A continuación se simulan 10 trayectorias (n), tomando como valores para γ , μ y σ los obtenidos mediante la estimación máximo-verosímil usando los datos reales correspondientes a la “*Edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía*”. Para cada trayectoria se generan 222 datos (n_1), considerando los instantes de tiempo

$$t_i = (i - 1)h, \quad i = 0, \dots, 221.$$

Como valor inicial se toma el primer valor observado que en este caso es:

$$x_0 = 26,08$$

Simulación						
n	n_1	h	x_0	γ	μ	σ
10	222	0.1	26.08	24.1474	0.0516807	0.0175877

Cuadro 5.9: Valores utilizados en la simulación.

La simulación se realiza por los dos métodos expuestos en el capítulo 1, en primer lugar a partir del algoritmo propuesto por Rao (ver 1.26) como se muestra en la Figura 5.11 y en segundo lugar utilizando el método de simulación a partir de la ecuación integral de Itô (ver 1.19), mostrándose los resultados en la Figura 5.12. En ambas figuras se representan dichas trayectorias junto con la media de estas y la función tendencia estimada considerando los parámetros expuestos anteriormente.

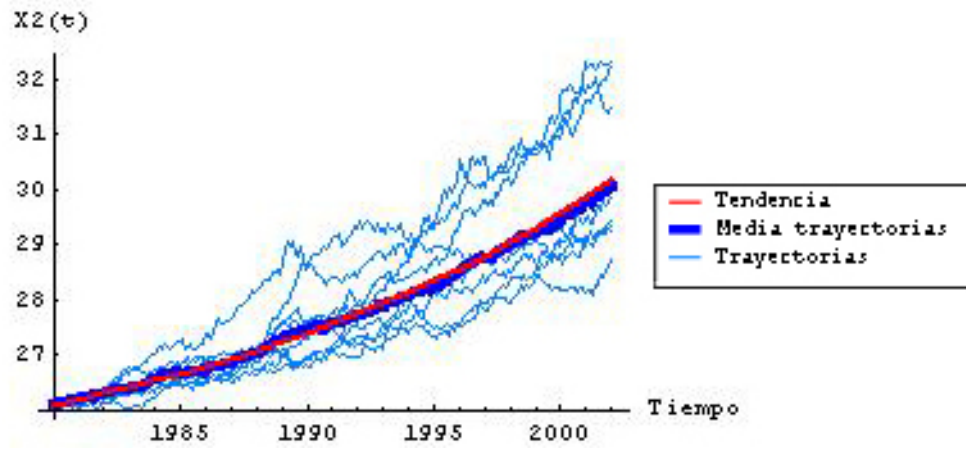


Figura 5.11: Varias trayectorias $X_2(t)$ usando algoritmo de Rao, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

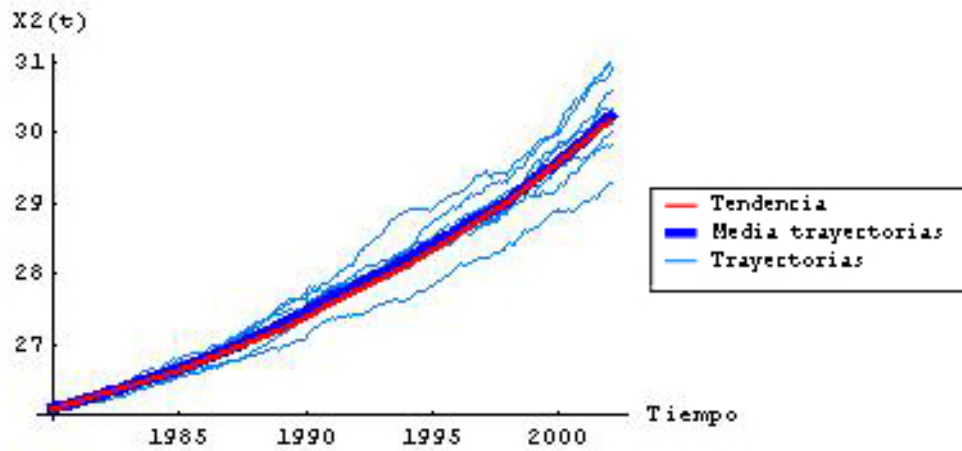


Figura 5.12: Varias trayectorias $X_2(t)$ usando ecuación integral de Itô, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

5.2.4. Edad media al primer matrimonio en mujeres en Andalucía

En la Tabla 5.10 se muestran los valores observados de $Y_2(t)$ y los valores de las funciones tendencia y tendencia condicionada estimadas. La estimación máximo verosímil de los parámetros se muestra en la Tabla 5.11.

<i>Años</i>	$Y_2(t)$	<i>Tendencia</i>	<i>Tendencia Condicionada</i>
1980	23.69	23.6900	23.6900
1981	23.76	23.8587	23.8587
1982	24.05	24.0303	23.9299
1983	24.26	24.2047	24.2247
1984	24.24	24.3820	24.4382
1985	24.37	24.5622	24.4179
1986	24.43	24.7454	24.5500
1987	24.52	24.9317	24.6110
1988	24.62	25.1211	24.7025
1989	24.9	25.3137	24.8042
1990	25.1	25.5095	25.0889
1991	25.36	25.7085	25.2922
1992	25.61	25.9108	25.5565
1993	25.89	26.1165	25.8107
1994	26.3	26.3256	26.0954
1995	26.49	26.5382	26.5122
1996	26.84	26.7544	26.7053
1997	27.06	26.9741	27.0612
1998	27.28	27.1975	27.2848
1999	27.49	27.4246	27.5085
2000	27.62	27.6555	27.7220
2001	27.88	27.8903	27.8541
<i>Predicción</i>			
2002	28.05	28.1289	28.1185

Cuadro 5.10: Valores observados, tendencias estimadas y valor predicho para $Y_2(t)$.

$\hat{\gamma}$	\hat{a}	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
13.5541	0.0164755	0.0165096	0.00825442

Cuadro 5.11: Estimación máximo verosímil de los parámetros del proceso $Y_2(t)$.

La Figura 5.13 muestra el ajuste y la predicción para $Y_2(t)$ usando la función tendencia estimada.

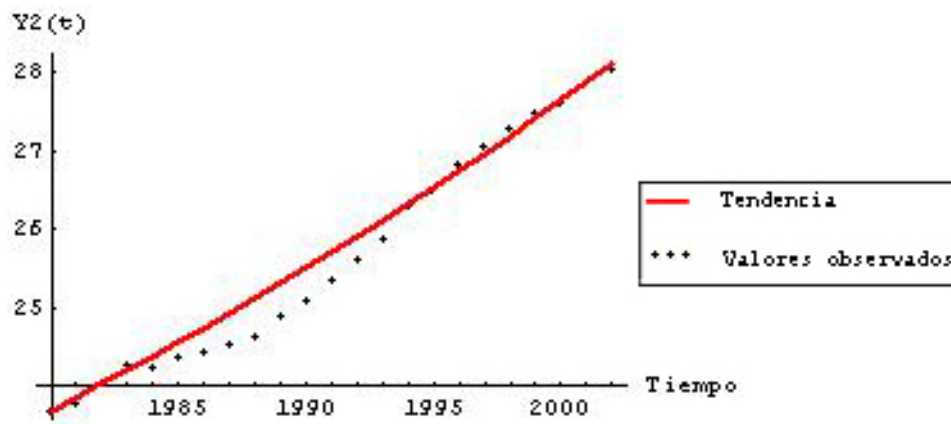


Figura 5.13: Ajuste y predicción para $Y_2(t)$ usando la función tendencia estimada.

La Figura 5.14 muestra el ajuste y la predicción para $Y_2(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

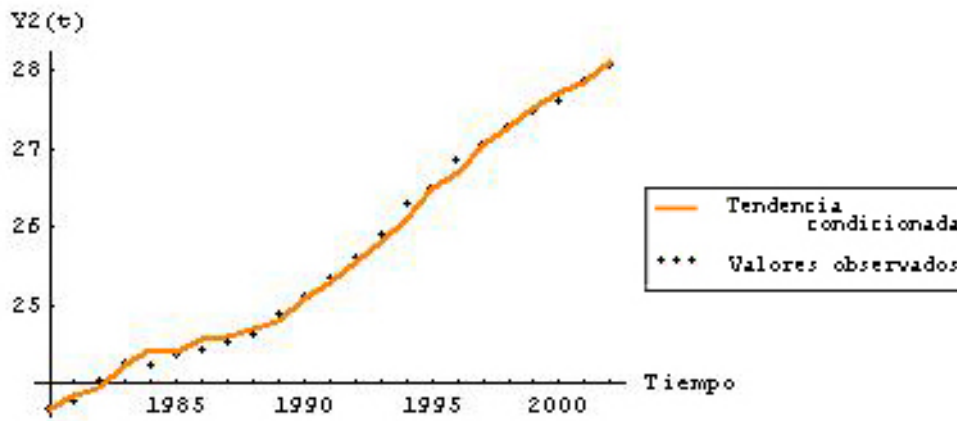


Figura 5.14: Ajuste y predicción para $Y_2(t)$ usando la función tendencia condicionada estimada.

A continuación se simulan 10 trayectorias (n), tomando como valores para γ , μ y σ los obtenidos mediante la estimación máximo-verosímil usando los datos reales correspondientes a la “*Edad media al primer matrimonio en mujeres en Andalucía*”. Para cada trayectoria se generan 222 datos (n_1), considerando los instantes de tiempo

$$t_i = (i - 1)h, \quad i = 0, \dots, 221.$$

Como valor inicial se toma el primer valor observado que en este caso es:

$$x_0 = 23,69$$

Simulación						
n	n_1	h	x_0	γ	μ	σ
10	222	0.1	23.69	13.5541	0.0165096	0.00825442

Cuadro 5.12: Valores utilizados en la simulación.

La simulación se realiza por los dos métodos expuestos en el capítulo 1, en primer lugar a partir del algoritmo propuesto por Rao (ver 1.26) como se muestra en la Figura 5.15 y en segundo lugar utilizando el método de simulación a partir de la ecuación integral de Itô (ver 1.19), mostrándose los resultados en la Figura 5.16. En ambas figuras se representan dichas trayectorias junto con la media de estas y la función tendencia estimada considerando los parámetros expuestos anteriormente.

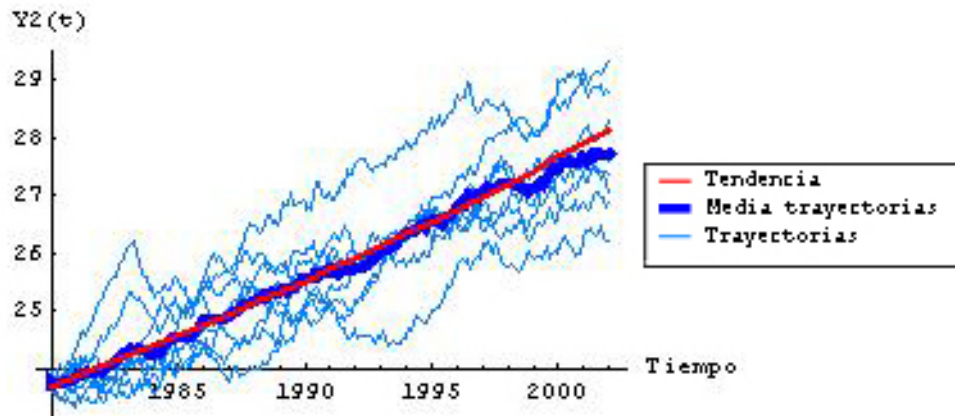


Figura 5.15: Varias trayectorias $Y_2(t)$ usando algoritmo de Rao, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

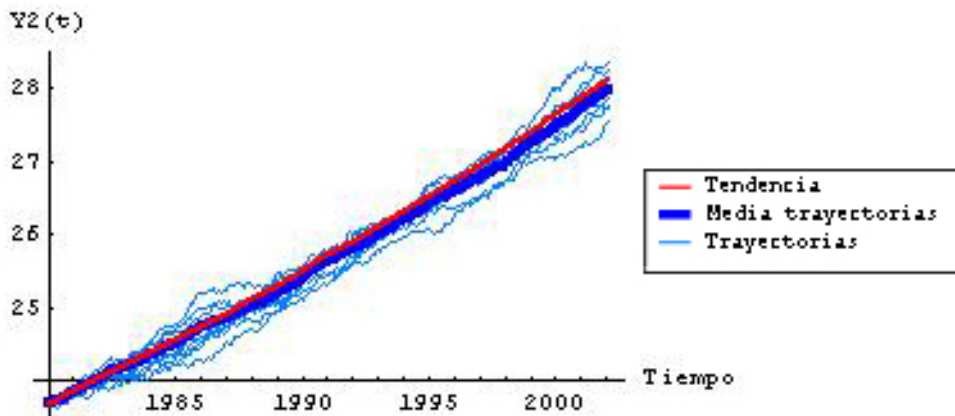


Figura 5.16: Varias trayectorias $Y_2(t)$ usando ecuación integral de Itô, media de las trayectorias y función tendencia estimada.

5.3. Método de optimización Simulated Annealing

5.3.1. Introducción

En capítulos anteriores se ha planteado la problemática existente en la estimación de los parámetros del proceso de difusión lognormal triparamétrico. La resolución de las ecuaciones de verosimilitud se lleva a cabo mediante la utilización de algún método de aproximación numérica, por ejemplo Newton-Raphson que es el utiliza-

do en nuestro caso, lo cual genera bastantes problemas, como el hecho de que se requiere un valor inicial cercano a la solución para que se de su convergencia. Se plantea a continuación el método de optimización *Simulated Annealing*, con el que se intentará solventar algunos de los problemas planteados anteriormente. El objetivo de este método es minimizar una función objetivo. En nuestro caso, la función que se minimizará será:

$$-\ln L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)$$

con $a = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, siendo $L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)$ la función de verosimilitud obtenida en el capítulo 1 (sección 1.3).

Se utilizará la reparametrización del proceso planteada en la sección 1.5, con el objeto de realizar una compresión del rango de valores sobre el cual, la función de log-verosimilitud condicionada debe ser maximizada para encontrar $\hat{\gamma}$.

En primer lugar se describe el método y se aplicará a la estimación del proceso de difusión lognormal unidimensional triparamétrico expuesto en el capítulo 1 de esta tesis.

Se estiman los parámetros del proceso utilizando este método para los siguientes conjuntos de datos:

- Datos generados mediante el método de simulación a partir de la solución exacta de la ecuación integral de Itô (subsección 1.4.1).
- Datos generados mediante el método de simulación a partir del algoritmo propuesto por Rao (subsección 1.4.2).
- $X_1(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en España.
- $Y_1(t)$, edad media al primer matrimonio en mujeres en España.
- $X_2(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.
- $Y_2(t)$, edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.

Para comprobar la efectividad de los resultados obtenidos con este método, se compararan estos con los estimadores máximo verosímiles que se han calculado para cada uno de los conjuntos de datos que se van a considerar.

5.3.2. Descripción del método

El método *Simulated Annealing* (SA) o *Sobrecalentamiento Simulado* es una técnica que ha llamado significativamente la atención en los problemas de optimización a gran escala. Tiene sus orígenes en el trabajo de Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller y Teller [42] para la minimización de una función sobre un conjunto finito de tamaño muy grande, aunque también puede ser aplicado a la optimización sobre un conjunto continuo (Duflo [16]). Varios autores como Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi [38] mostraron su utilidad para encontrar los óptimos globales en problemas de optimización combinatoria.

El método está basado en la analogía del principio termodinámico de la cristalización, donde primero se calienta el material al estado líquido y posteriormente se reduce la temperatura lentamente hasta que se enfría de forma que el cristal resultante sea perfecto. Un aspecto fundamental es la velocidad de decrecimiento de la temperatura ya que un enfriamiento demasiado rápido implicaría impurezas por lo que no se alcanzaría el óptimo.

El problema que nos planteamos es

$$\max_{\theta \in \Theta} h(\theta) \quad (5.1)$$

o lo que es lo mismo

$$\min_{\theta \in \Theta} -h(\theta) \quad (5.2)$$

La utilización de métodos numéricos determinísticos implicarían el tener en cuenta las propiedades analíticas de la función principal. La utilización de una aproximación mediante *Simulated Annealing* se centra más en h desde un punto de vista más probabilístico que analítico.

Los métodos numéricos han sido los más utilizados, aunque los métodos de simulación han ganado en atractivo debido a la relación de contracción en la regularidad del dominio Θ y en la función h . Por supuesto, puede existir una aproximación numérica alternativa que proporcione una solución exacta de (5.2), algo que raramente se obtiene mediante un algoritmo estocástico, pero la simulación tiene la ventaja de saltarse los primeros pasos del mecanismo de un algoritmo y de estudiar si h verifica algunas condiciones de regularidad. Esto es particularmente cierto cuando el cálculo de h es muy complicado.

La idea fundamental del método es que un cambio de escala, llamado temperatura, permite movimientos más rápidos en la superficie de la función h a maximizar, cuyo negativo es denominado energía. El estado óptimo será por tanto alcanzado si

T disminuye de manera lenta y bien controlada. El cambio en la escala parcial evita la atracción de máximos locales. Dado el parámetro temperatura, $T > 0$, se genera una muestra $\theta_1^T, \theta_2^T, \dots$ de una distribución

$$\pi(\theta) \propto \exp(h(\theta)/T)$$

que puede ser usada para llegar a una aproximación del máximo de h . Como T decrece hacia 0, los valores simulados para esta distribución llegan a estar concentrados en un entorno cada vez más pequeño del máximo local de h .

Para simular la evolución de un sistema físico, Metropolis, Rosembluth, Rosembluth, Teller y Teller [42] introdujeron un método iterativo conocido como *regla de aceptación de Metropolis*, que provoca un cambio del estado actual del sistema en los siguientes términos:

- Si la energía del sistema S disminuye, se acepta la modificación.
- Si la energía aumenta en ΔS , la modificación puede ser aceptada con probabilidad $\exp\{-\Delta S/T\}$, donde T es la temperatura.

Es decir, comenzando en θ_0 , se genera ζ de una distribución uniforme en el entorno $v(\theta_0)$ de θ_0 (que llamaremos vecindario), o de forma más general, a partir de una distribución con densidad $g(|\zeta - \theta_0|)$, generándose el nuevo valor θ de la siguiente forma:

$$\theta_1 = \begin{cases} \zeta & \text{con probabilidad } \rho = \exp(\Delta h/T) \wedge 1 \\ \theta_0 & \text{con probabilidad } 1 - \rho, \end{cases}$$

donde $\Delta h = h(\zeta) - h(\theta_0)$.

Por tanto, si $h(\zeta) \geq h(\theta_0)$, ζ es aceptado con probabilidad 1 (es decir, θ_0 se sustituye por ζ en todos los casos). Por otro lado, si $h(\zeta) < h(\theta_0)$, ζ podría ser aceptado con probabilidad $\rho \neq 0$, en este caso θ_0 se sustituye por ζ . Esta propiedad permite al algoritmo escapar de la atracción de θ_0 , si θ_0 es un máximo local de h , con una probabilidad que depende de la elección de la escala de T , comparada con el rango de la densidad g . Este método es de hecho el *algoritmo Metropolis*, el cual simula la densidad proporcional a $\exp\{h(\theta)/T\}$, como la distribución límite de la cadena $\theta_0, \theta_1, \dots$

La determinación del parámetro temperatura ha sido estudiado desde el punto de vista práctico por diversos autores como Geman y Geman [18], Mitra, Romeo y Sangiovani-Vicentelli [43], Van Laarhoven y Aarts [56] y Aarts y Korst [1] entre

otros. Aarts y Korst [1] ofrecen una demostración en el contexto de las cadenas de Markov, donde el método SA encuentra asintóticamente un óptimo global. La demostración de la existencia de una distribución estacionaria asociada a la cadena de Markov se establece modelizando una cadena de Markov ergódica y aperiódica, mediante un recorrido aleatorio. Hájek [33] muestra las condiciones sobre T para la convergencia a un óptimo global del algoritmo SA sobre espacios finitos, Winkler [59] extiende la demostración de Hájek [33] y Andrieu y Doucet [3] ofrecen una demostración de la convergencia del algoritmo SA en el contexto de los modelos de Markov.

En la práctica, el parámetro de control se disminuye por niveles, generando una sucesión de estados, permitiendo al sistema aproximar el equilibrio para cada nivel. El algoritmo se detiene para un valor pequeño de T , de manera que prácticamente ninguna nueva generación es aceptada. Por lo tanto, se elige como solución del problema el estado que optimiza la función objetivo entre los estados de la sucesión generada.

En varios estudios realizados, se garantiza la convergencia asintótica de SA, pero en la práctica se debe implementar el algoritmo en tiempo finito. Para ello se define una sucesión finita de cadenas de Markov truncadas, asociadas a los valores de decrecientes de la temperatura.

Es necesario fijar unos determinados valores iniciales para la generación de las cadenas de Markov y para obtener valores satisfactorios:

1. Valor inicial de parámetro *Temperatura*: T_0 .
2. Valor final del parámetro *Temperatura*: T_f .
3. Ley de decrecimiento del parámetro *Temperatura*.
4. Longitud de truncamiento de las cadenas de Markov: L .

La ley de decrecimiento de la *Temperatura* T_k , donde k es el número de la iteración, esta relacionado a la longitud de la cadena de Markov de los niveles asociados a T_k , y es necesario encontrar un equilibrio entre ambas. Este equilibrio se alcanza cuando la distribución de probabilidad asociada a la k -ésima cadena de Markov, después de L_k transiciones, está cerca de la distribución estacionaria asociada a esta cadena. En la práctica se hacen pequeñas disminuciones de T_k con el fin de evitar cadenas demasiado largas.

Las condiciones que garantizan la convergencia del método, tal y como se presenta en Aarts y Korst [1], cuando la regla de aceptación de Metropolis se utiliza son:

- La conexidad entre estados.
- Todos los vecindarios tienen el mismo cardinal y en un vecindario todos los estados tienen la misma probabilidad de ser generados.
- Reversibilidad entre los estados.

Teniendo en cuenta todo lo expuesto anteriormente, el algoritmo SA quedaría de la siguiente forma:

1. Simular ζ de una distribución instrumental con densidad $g(|\zeta - \theta_i|)$.
2. Aceptar $\theta_{i+1} = \zeta$ con probabilidad $\rho_i = \exp\{\Delta h_i/T_i\} \wedge 1$.
En otro caso tomar $\theta_{i+1} = \theta_i$.
3. Actualizar T_i con $T_i + 1$.

La Figura 5.17 muestra esquemáticamente la dinámica del método.

ALGORITMO SA

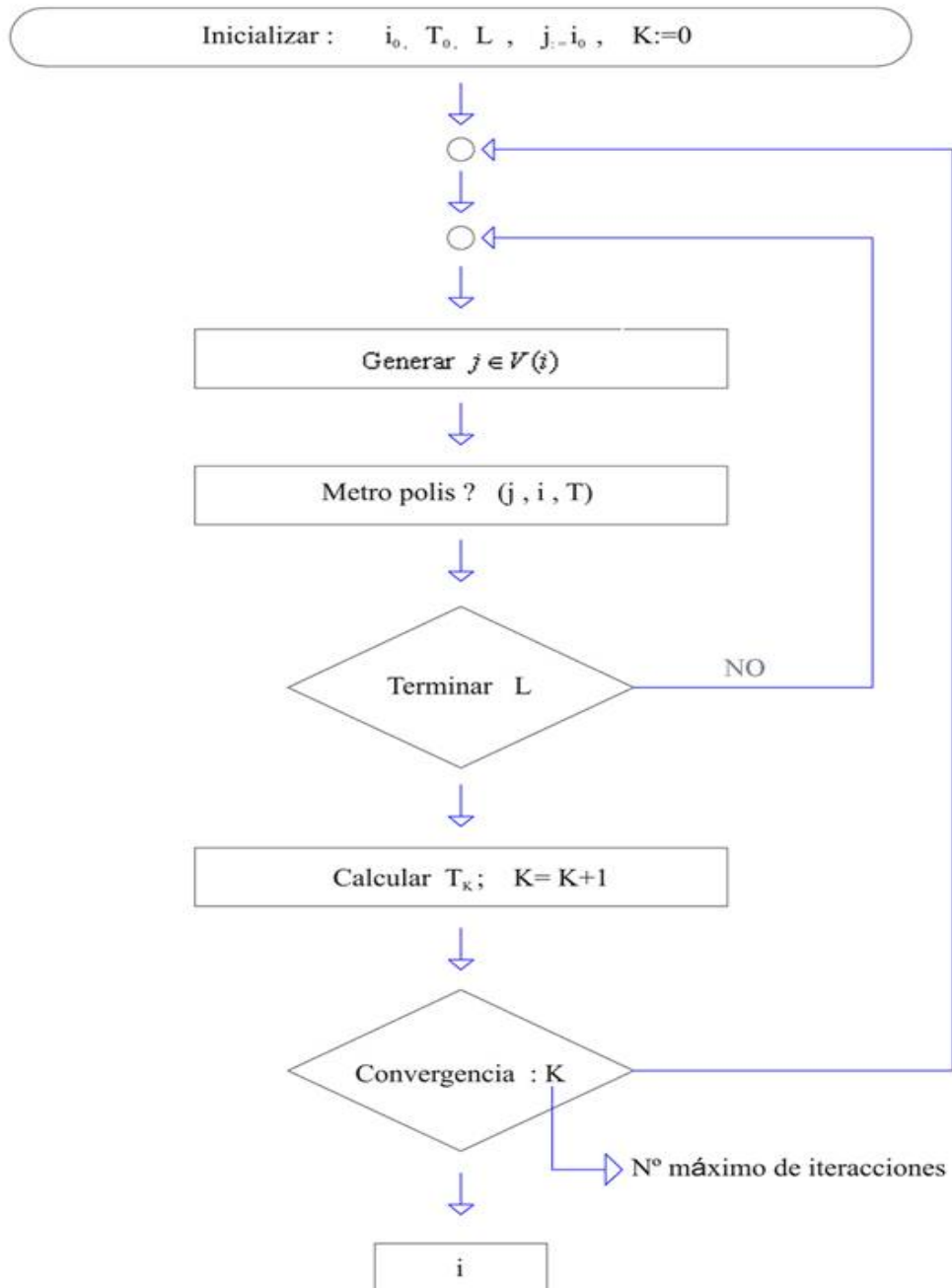


Figura 5.17: Algoritmo SA.

5.3.3. Aplicación del método de optimización Simulated Annealing

Como se ha indicado anteriormente, se aplica a continuación el método descrito a distintos conjuntos de datos. En primer lugar a los conjuntos de datos simulados, para comprobar que el método es efectivo, y a continuación a los cuatro grupos de datos reales que se han utilizado en este mismo capítulo. Se muestran los resultados obtenidos utilizando Simulated Annealing (**S.A.**), junto con los obtenidos por el método de máxima verosimilitud (**E.M.V.**).

La función a minimizar en el caso que nos ocupa será:

$$\begin{aligned}
 -\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \gamma)] &= \frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \sum_{i=2}^n \ln(x_i - \gamma) + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \ln(t_i - t_{i-1}) + \\
 &+ \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n \frac{1}{(t_i - t_{i-1})} \times \\
 &\times [\ln(x_i - \gamma) - \ln(x_{i-1} - \gamma) - a(t_i - t_{i-1})]^2
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Aplicando la reparametrización propuesta por Wingo [58] en la función anterior obtendríamos:

$$\begin{aligned}
 -\ln[L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma^2, \theta)] &= \frac{n-1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) + \sum_{i=2}^n \ln(x_i - [x_1 - \exp(-\theta)]) + \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n \ln(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2\sigma^2(t_i - t_{i-1})} \times \\
 &\times \left[\ln(x_i - [x_1 - \exp(-\theta)]) - \ln(x_{i-1} - [x_1 - \exp(-\theta)]) - \right. \\
 &\left. - a(t_i - t_{i-1}) \right]^2
 \end{aligned}$$

con x_1 el mínimo de los valores de la muestra.

A continuación se determinarán todos los valores iniciales que requiere el algoritmo y la ley de decrecimiento de la temperatura. En el caso que nos ocupa, se determina siguiendo la siguiente expresión:

$$T_i = \frac{T_0}{i+1}$$

siendo T_0 la temperatura inicial fijada. Esta ley nos asegura que el enfriamiento es lo suficientemente lento como para alcanzar el óptimo.

Se plantea el problema de elegir el nuevo vecino, es decir, de que forma elegimos un nuevo valor de los parámetros. Para ello se genera un valor de una uniforme, que se suma al antiguo valor del parámetro siempre que el nuevo valor se encuentre en un entorno adecuado de posibles valores de los parámetros. Para ello, hay que decidir que entorno es admisible para cada parámetro. En este caso, se utilizan diversos procedimientos gráficos a partir de las ecuaciones de verosimilitud, de manera que nos permite acotar los posibles valores óptimos de los parámetros.

A continuación se muestran, como ya se ha comentado anteriormente, los resultados obtenidos utilizando dicho método. Recordamos que se realizaba la simulación de 25 datos considerando los parámetros que se muestran en la Tabla 5.13.

Simulación		
γ	μ	σ
1	0.2	0.0001

Cuadro 5.13: Valores utilizados en la simulación.

Datos generados mediante el método de simulación a partir de la solución exacta de la ecuación integral de Itô

La Tabla 5.14 muestra los valores obtenidos para los parámetros del proceso utilizando Estimación Máximo Verosímil (**E.M.V.**) y optimización mediante Simulated Annealing (**S.A.**)

Método	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
E.M.V.	1.00006	0.200005838	0.000080467
S.A.	1.00483	0.214715294	0.000908268

Cuadro 5.14: Estimación de los parámetros datos simulados a partir de la solución exacta de Itô.

Como puede observarse, la estimación máximo verosímil ofrece unos resultados algo mejores que el método propuesto, aunque esta diferencia es mínima.

Datos generados mediante el método de simulación a partir del algoritmo propuesto por Rao

La Tabla 5.15 muestra los resultados obtenidos estimando los parámetros del proceso utilizando los dos métodos mencionados anteriormente.

Método	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
E.M.V.	0.99987	0.198815563	0.0000895
S.A.	1.01499	0.205681243	0.0009925

Cuadro 5.15: Estimación de los parámetros datos simulados a partir del algoritmo propuesto por Rao.

Para este conjunto de datos, puede observarse que ambos métodos presentan unos resultados semejantes, aunque en el caso del valor de $\hat{\sigma}$, el método **S.A.** nos ofrece una mejor estimación.

Podemos añadir, que estas diferencias en los estimadores podrían reducirse posiblemente tras ajustar la precisión y el número de iteraciones en el algoritmo **S.A.**

Es evidente, tras estos resultados, que el algoritmo **S.A.** es un buen método de estimación que puede eliminar muchas de las dificultades que se encuentran en la estimación máximo verosímil. Es por ello, por lo que pasamos a estimar los parámetros para las cuatro variables consideradas anteriormente, mostrándose los resultados en las siguientes tablas.

Edad media al primer al matrimonio de varones en España.

Método	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
E.M.V.	23.6911	0.042381	0.0140717
S.A.	23.3911	0.027979	0.0007018

Cuadro 5.16: Estimación de los parámetros del proceso $X_1(t)$.

Edad media al primer matrimonio en mujeres en España.

Método	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
E.M.V.	21.4815	0.0440658	0.0165907
S.A.	21.4809	0.0157678	0.0007178

Cuadro 5.17: Estimación de los parámetros del proceso $Y_1(t)$.**Edad media al primer matrimonio en varones en Andalucía.**

Método	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
E.M.V.	24.1474	0.0516807	0.0175877
S.A.	24.0744	0.0027218	0.0008643

Cuadro 5.18: Estimación de los parámetros del proceso $X_2(t)$.**Edad media al primer matrimonio en mujeres en Andalucía.**

Método	$\hat{\gamma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
E.M.V.	13.5541	0.0165096	0.00825442
S.A.	13.2081	0.0105934	0.00034225

Cuadro 5.19: Estimación de los parámetros del proceso $Y_2(t)$.**5.3.4. Conclusiones**

Aunque el método que se propone se encuentra aún en fase de depuración, los resultados obtenidos hacen pensar que es una buena alternativa a los métodos existentes, ya que tanto su base teórica como su implementación o adaptación a cualquier tipo de problema resulta mucho más sencilla.

Se puede añadir también, que la mayoría de los métodos existentes dependen en gran medida de la solución de partida. En este caso, si los largos de la cadena de Markov generadas son lo suficientemente largos, este método no depende de la

solución inicial, aunque eso implicaría el empleo de más tiempo de búsqueda de la solución.

Bibliografía

- [1] Aarts, E., Korst, J. (1989): *Simulated Annealing and Boltzmann machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing*. Monte Carlo Statistical Methods, Wiley, Chichester, UK.
- [2] Aitchison, J. & Brown, J.A.C.(1980): *The lognormal distribution*. Cambridge University Press.
- [3] Andrieu, C. y Doucet, A. (1998): Simulated annealing for bayesian estimation of hidden markov models. Tr 317, Department of Engineering, University of Cambridge.
- [4] Arbai, A. (1994): Procesos estocásticos lognormales triparamétricos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [5] Basawa, I.V. & Prasaka Rao, B.L.S. (1980): *Statistical Inference for Stochastic Processes*. Academic Press.
- [6] Brown, B.M. & Hewitt, J.I. (1975): Asymptotic likelihood theory for diffusion process. *Theory Probab.Its Appl.*, **2**, 373-377.
- [7] Buchanan, I. & Leduc, R. (1994): Probabilistic Design of multi-stage rotating biological contactors. In K.W. Hipel and Liping Fand editors. *Stochastic and Statistical Methods in Hidrology and Environmental Engineering.*, **4** , 113-125.
- [8] Casella, P.R., Robert, C.P. (1999): *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer Verlag, New York, United States of America.
- [9] Calitz, F. (1973): Maximun likelihood estimation of the three-parameter log-normal distribution a reconsideration. *Austral, J. Statist.*, **15**, 185-190.
- [10] Chesney, M & Elliot, R.J. (1993): *Estimating the volatility of an exchange rate*. Applied Stochastic Model and Data Analysis.
- [11] Cohen, A.C. (1951): Estimating parameters of logaritmic-normal distributions by maximum likelihood. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **46**, 206-212.

-
- [12] Cohen, A.C. & Witten, B.J. (1980): Estimation in the three-parameter lognormal distribution. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **75**, 399-404.
- [13] Cohen, A.C., Witten, B.J. and Ding, Y. (1985): Modified moment estimation for the three-parameter lognormal distribution. *J. Qual. Tech.* **17**, 92-99.
- [14] Crawford S.L. (1994): An application of the laplace method to finite mixture distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **89(425)**, 259-267.
- [15] Crow, E.L. & Shimizu, K. (1988): *Lognormal Distribution Theory and Applications*. Marcel Dekker Ed.
- [16] Duflo, M. (1996): *Random Iterative Models. Applications of Mathematics. I*, volumen 34. Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Gardiner, C.W. (1990): *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and natural sciences*, 2nd edn. Springer Verlag, Berlin, Germany.
- [18] Geman, S. y Geman, D. (1984): Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images. *IEEE Trajsactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6**, 721-741.
- [19] Giesbrecht, F. & Kempthorne, O. (1976): Maximum likelihood estimation in the three-parameter lognormal distribution. *J. Roy. Statist. Soc.*, **B(38)**, 257-264.
- [20] Griffiths, D.A. (1980): Interval estimation for the three-parameter lognormal distribution via the likelihood function. *Applied Statis.*, **29**, 58-68.
- [21] Guerrieri, G.(1969-1970): Sopra un nuovo metodo concernente la determinazione dei parametri della distribuzione lognormale e della distribuzioni pear-siane del III e del vee tipo. *J. Annali dell'instituto di statistica della universita di BARI*, 53-110.
- [22] Guyon, X. (1995): *Random Fields on a Network. Modeling, Statistics, and Applications*. Springer Verlag, New York, United States of America.
- [23] Gutiérrez, R., Hermoso, A. and Molina, M. (1984): Test de razón de verosimilitudes para contrastes de hipótesis sobre el coeficiente tendencia en procesos logarítmicos-normales multidimensionales con factores exógenos. *Cuadernos de Estadística*, **7-8**, 129-136.
- [24] Gutiérrez, R.; Angulo, J.M.; González, A. and Pérez, R. (1991a): Inference in lognormal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, **7**, 295-316.

- [25] Gutiérrez, R.; González, A. and Torres, F. (1997b): Estimation in multivariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Applied Statistics*, (JRSC), **46**(1), 140-146.
- [26] Gutiérrez, R.; Román, P. and Torres, F. (1999): Inference and first-passage-time for the lognormal diffusion process with exogenous factors. Application to modelling in economics. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **15** (4), 325-332.
- [27] Gutiérrez, R.; Román, P. y Torres, F. (2001): Inference on some parametric functions in the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Test*, **10**, (2), 357-373.
- [28] Gutiérrez, R.; Gutiérrez-Sánchez,R. (2003a): Modelo de difusión lognormal multivariante con vector de factores exógenos. *Comunicación presentada en el 27º Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Lerida
- [29] Gutiérrez, R.; Gutiérrez-Sánchez,R.; Ramos,E.; Román,P.; Torres, F. (2003b): Modelo de difusión lognormal para la descripción y predicción del precio de la vivienda. *Comunicación presentada en el 27º Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*. Lerida
- [30] Gutiérrez, R.; Román, P.; Romero,D. y Torres, F. (2003): Forecasting for the univariate lognormal diffusion process with exogenous factors. *Cybernetics and Systems*, **34**, 709-724.
- [31] Gutiérrez, R., Gutiérrez-Sánchez, R., Ramos, E. (2004): Inference in tri-parameter lognormal multidimensional diffusion processes with exogenous factors. *Proceedings of the 17 European Meeting on Cybernetics and Systems Research*, **1**,157-162. Viena.
- [32] Harter, H.L. & Moore, A.H. (1966): Local-maximum likelihood estimation of the parameters of three-parameter lognormal populations from complete and censored samples. *J. Amer. Statis. Assoc.*, **61**, 842-851.
- [33] Hájek, B. (1988): Cooling schedules for optimal annealing. *Mathematics of Operations Research*, **13**, 311-329.
- [34] Hermoso, A. (1984): Test de hipótesis sobre el coeficiente tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico-normal con factores exógenos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [35] Heyde, C.C. (1963): On a property of the lognormal distribution. *J.R. Statis. Soc.*, **B(25)**, 392-393.

-
- [36] Hill, B.M. (1963): The three-parameter lognormal distribution and Bayesian analysis of a point-source epidemic. *J. Amer. Statis. Assoc.*, **58**, 72-84.
- [37] Kappenman, R.F. (1985): Estimation for the three-parametr Weibull, lognormal, and gamma distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, **3**, 11-23.
- [38] Kirkpatrick, S., Gelatt, D. y Vecchi, M.P. (1983): *Optimization by simulated annealing*. Science, **220**, 671-680.
- [39] Lambert, J.A. (1964): Estimation of parameter in the three-parameter lognormal distribution. *Australian Journal of Statistics*, **6**, 29-32.
- [40] Lifson, D.P. & Bhattacharyya, B.B. (1983): Quantile regression method and its application to estimate the parameters of lognormal and other distributions. *Contributions to Statistics*, 313-327.
- [41] Magnus, J.R. & Neudecker, H. (1988): *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. John Wiley & Sons.
- [42] Metropolis, N.A., Rosenbluth, M., Rosenbluth, A., Teller, A. y Teller, E. (1953): Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 1087-1092.
- [43] Mitra, D., Romeo, F. y Sangiovanni-Vincentelli, A. (1986): Convergence and finite-time behavior of simulated annealing. *Advances in Applied Probability*, **18**, 747-771.
- [44] Molina, M. (1984): Estimación del coeficiente tendencia de un proceso de difusión multidimensional. Aplicación al proceso logarítmico normal con factores exógenos. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [45] Murillo, A. (2004): Representación de asociaciones mediante MDS y su tratamiento computacional. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.
- [46] Nel, D.G. (1980): On matrix differentiation in statistics. *South African Journal of Statistics*, **14**, 137-193.
- [47] Prakasa Rao BSL. (1999): *Statistical inference for diffusion type process*. Ed. Arnold.
- [48] Rao, N.J., Borwankar, J.D. and Ramkrishma, D. (1974): Numerical solution of Itô Integral Equations, *SIAM J. Control*, **12**(1), 124-139.
- [49] Rogers, S. (1980): Matrix Derivatives. *Lecture notes in Statistics*, Vol.2.

- [50] Royston, P. (1992): Estimation, reference ranges and goodness of fit for the three-parameter lognormal distribution. *Statistics in medicine*, **11**, 897-912, John Wiley & Sons.
- [51] Small, M.J., Sutton, M.C., and Milke, M.V. (1988): Parametric Distributions of Regional Lake Chemistry: Fitted and Derived. *Environmental Science Technology*, **22**, 196-204.
- [52] Tintner, G. & Narayanan, R. (1966): A multidimensional stochastic process for the explanation of economic development. *Metrika*, **11**, 85-90.
- [53] Tintner, G. & Sengupta, J.K. (1972): *Stochastics Economics*. Academic Press.
- [54] Tintner, G. & Gómez, G.L. (1979): Aplicación de los procesos de difusión a la planificación del desarrollo económico. Un ejemplo ilustrativo (Colombia). *Trabajos de Estadística*, **30(2)**, 33-55.
- [55] Torres, F. (1993): Aportaciones al estudio de difusiones estocásticas no homogéneas. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- [56] Van Laarhoven, P.J. y Aarts, E.H.L. (1987): *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Reidel, D. Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands.
- [57] Wingo, D.R. (1976): Moving truncations barrier-function methods for estimation in three-parameter lognormal models. *Communications in Statistics Simulation and Computation*, **B5(1)**, 65-80.
- [58] Wingo, D.R. (1984): Fitting three-parameter lognormal models by numerical global optimization-an improved algorithm. *Computational Statistics & Data Analysis*, **2**, 13-25.
- [59] Winkler, G. (1995): *Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag, New York, United States of America.
- [60] Wicksell, S.D. (1917): On logarithmic correlation with an application to the distribution of ages at first marriage. *Meddelande fran lunds Astronomiska Observatorium*, **84**.