La Matematizacion del Infinito.

La emergencia de la Teoria de Conjuntos en la obra de Georg Cantor

UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

DEPARTAMENTO DE FILOSOFIA

LA MATEMATIZACION DEL INFINITO

La emergencia de la Teoria de Conjuntos

en la obra de Georg Cantor

Trabajo presentado por Dª María José Frápolli Sanz para la obtención del Grado de Doctor. Realizado bajo la dirección del Prof. Dr. J.J. Acero Fernández.

Granada, 1987

Para J. M.

ABREVIATURAS

Beitrage : "Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre"

BW : Briefwechsel Cantor-Dedekind

EFM : "Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre"

GA : Gesammelte Abhandlungen

Grundlagen : "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltig keitslehre"

Mitteilungen : "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten"

Principien : "Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung"

Rezension : "Rezension der Schrift von G. Frege 'Die Grundlagen der Arithmetik"

ULP : "Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten"

INDICE

INTRODUCCION GENERAL

El propósito del presente trabajo es la investigación del surgimiento de la teoría de conjuntos y números transfinitos en la obra del matemático y filósofo alemán G. Cantor. Me propongo además enfatizar tres aspectos diferentes de este surgimiento; en primer lugar, señalar cómo aparecen los conceptos conjuntistas a partir de intereses matemáticos más tradicionales; en segundo lugar, subrayar la originalidad de los planteamientos cantorianos acerca del infinito en relación a las ideas mantenidas por la tradición filosófica occidental desde Aristóteles y en tercer lugar, estudiar las concordancias y divergencias entre Cantor y sus contemporáneos más ilustres como Dedekind, Frege y, en cierto sentido, Russell. En mi opinión, un proyecto como el que presentaré a continuación no es superfluo puesto que no abundan las monografías sobre G. Cantor y la emergencia de la teoría de números transfinitos, y porque, como expondré inmediatamente, mi trabajo aporta ciertos interes y puntos de vista nuevos a la bibliografía existente; en particular aporta un punto de vista filosófico, como trataré de dejar claro en esta Introducción.

Las monografías propiamente dichas sobre el pensamiento y la obra de G. Cantor se limitan a dos: la de Meschkowski, titulada Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Georg Cantors, y la de Dauben, cuyo título es Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite. El libro de Meschkowski tiene dos pretensiones, declaradas por el propio autor; la primera consiste en ofrecer una introducción a la teoría ingenua de conjuntos accesible al lector moderno. La segunda es investigar las relaciones entre las ideas matemáticas del autor y su biografía y personalidad. Ambos objetivos se cumplen ampliamente. No obstante, y aunque como introducción a la teoría ingenua de conjuntos y a la historia de las teorías axiomáticas, esta obra resulta muy útil, como monografía sobre el pensamiento de Cantor tiene, en mi opinión, dos carencias importantes: La primera es que no respeta en la mayor parte de la obra la terminología cantoriana ni las definiciones y explicaciones del matemático alemán; lo que es una carencia en este sentido es una ventaja en otro ya que los análisis de Meschkowski acercan los trabajos de Cantor al lector moderno, pero evidentemente no aportan un enfoque adecuado para quien quiera conocer el pensamiento original de Cantor. La segunda carencia consiste en la falta de discusiones críticas y filósoficas a lo largo de la obra. La monografía de Meschkowski es muy descriptiva y a menudo en vez de explicar los tópicos se limita a transcribir amplios textos, a veces de Cantor otras de sus contemporáneos y seguidores, en los que se trata el tema correspondiente. La ventaja de esto último estriba en que algunos de estos textos son fragmentos de cartas inéditas o de obras de difícil acceso, con lo que el libro de Meschkowski tiene un gran valor documental, pero no dice, ni lo pretende, la última palabra sobre la teoría de conjuntos cantoriana. La obra de Meschkowski da una visión muy general y elemental del pensamiento de Cantor, pocas veces hace interpretaciones filosóficas, ontologicas o epistemológicas, pero mis posibles desacuerdos con algunas de ellas serán indicados en el texto en los lugares correspodientes.

La otra monografía sobre el pensamiento de Cantor es la de J. Dauben, ya mencionada. En ella se presenta a Cantor desde un punto de vista histórico, desde la historia de la ciencia. Dauben define el objetivo de su obra como el estudio del desarrollo de un proceso mental, "la emergencia de una teoria matematica nueva" (J. Dauben, *op. cit.* p.4). Este objetivo determina el contenido y el estilo de la obra, en la que se lleva a cabo una detallada y precisa exposición de la práctica totalidad de los escritos de Cantor, con un interés especial por la exacta determinación de los momentos en los que aparecen los conceptos más importantes y en como unos conceptos se relacionan con otros. El punto de vista de Dauben es kuhniano, aunque no lo afirma explicitamente, y por ello también dirige su atención a la aparición de conceptos nuevos y originales, al impacto de estos conceptos en la comunidad científica del momento,a los problemas que Cantor tuvo con sus colegas y maestros y a la importancia de las ideas no matemáticas de Cantor para la emergencia y desarrollo de sus ideas matemáticas.

La obra de Dauben interesa además porque se encuentra reflejado con precisión y profusión de datos el ambiente matemático de finales de siglo, la influencia y el dominio que Kronecker ejercía sobre la comunidad matemática, y la repercusión de las obras que Cantor iba publicando. Se lleva a cabo además en esta monografía un estudio de la importacia que la religiosidad de los Cantor tuvo en el éxito final da la teoría de nuestro autor.

En sentido estricto, no hay más monografías. Otros autores han estudiado la obra de Cantor, entre ellos destaca por su fecundidad y profundidad I. Grattan-Guinness, al cual le debemos una sustanciosa cantidad de artículos sobre el tema. Los intereses de Grattan-Guinness son cercanos a los de Dauben en el sentido de que se concentran en los aspectos históricos de la vida y la obra de Cantor. A Grattan-Guinness le debemos el estudio y difusión de documentos inéditos acerca de la vida personal y academica de Cantor, y de aspectos poco conocidos de su biografía, en especial los relativos a la enfermedad mental que Cantor padeció a partir de 1884. Además, le debemos la publicación en 1970 del artículo de Cantor Principien einer Theorie der Ordnungstypen. Erste Mittheilung, que en su día Mittag-Leffler, editor de la revista Acta mathematica y amigo del autor, no quiso publicar.

Recientemente se ha ocupado de la teoría de conjuntos de Cantor M. Hallett, en una obra titulada Cantorian Set Theory and limitation of Size, en la que el autor dedica a este tema la mitad del trabajo, aproximadamente. Hallett no está interesado en la génesis de la teoría de conjuntos sino que toma una orientación sistemática. No expone las tesis de Cantor, sino que desarrolla una interpretación audaz del significado de la teoría de conjuntos cantoriana. La tesis que defiende Hallett consiste en que la teoría de conjuntos de Cantor posee un mecanismo de la limitación del tamaño de los conjuntos incorporado desde su origen. Esto es, mantiene que la teoría de conjuntos de Cantor es prácticamente idéntica desde que el autor tuvo los primeros atisbos de la misma hasta sus últimos escritos y que no se vió afectada por las contradicciones descubiertas a final del siglo. La obra de Hallett es muy profunda y sugerente, no obstante, en mi opinión, la tesis que la recorre no cuenta con el suficiente apoyo en los textos del autor alemán y tiene algunos puntos débiles que expondré en su momento.

En el presente trabajo sostendré, en primer lugar, la existencia de dos teorías de conjuntos en los documentos de Cantor, claramente diferenciadas entre sí. La primera se encuentra en las obras que Cantor dió a la publicación durante su vida, la segunda la podemos encontrar en la correspondencia que mantuvo a partir de 1899 con Dedekind y Jourdain, fundamentalmente. El tránsito de una teoría a la otra viene provocado por el descubrimiento de contradicciones en la primera por obra de

Cantor mismo. Defiendo además la idea de que la primera teoría, que puede reconstruirse a partir de Grundlagen y Beiträge, encierra una concepción ingenua de los conjuntos en el sentido de que en ella se entiende por conjunto toda agrupación de objetos cualesquiera, sin restricciones. Contra esta idea se han pronunciado, entre otros, G. Boolos, Ch. Parsons y H. Wang, que consideran que puede rastrearse en el último delos escritos citados de Cantor una concepción iterativa de los conjuntos, y también M. Hallett quien, como ya he indicado, atribuye al matemático alemán una teoría de conjuntos con limitación de tamaño desde sus primeras obras conjuntistas. Por otra parte, el trabajo que presento a continuación pretende sacar a la luz los supuestos de ambas teorías de conjuntos, que en lo fundamental coinciden en este sentido, y esto tanto en lo que se refiere a las ideas filosóficas subyacentes como a las hipótesis más técnicas, ya propiamente conjuntistas. Los supuestos filosóficos, entre los que cabe citar la aceptación de conjuntos infinitos en acto y una concepción realista, y a veces también platónica, de la existencia de los objetos abstractos. Mantengo que Cantor es un realista contra la opinión relativamente extendida de que está cercano a las tesis formalistas en el sentido de que para él la ausencia de contradicción es condición suficiente de la existencia. El realismo y lo que podríamos llamar "actualismo" posibilitaron el surgimiento de un nuevo marco teórico a partir de unas investigaciones matemáticas menos novedosas. Las hipótesis técnicas, como la existencia de una buena ordenación para cualquier conjunto o la llamada Hipótesis del Continuo, son responsables de la dirección concreta que tomaron las teorías de conjuntos.

En lo que atañe a la relación entre los diversos tipos de infinito que aparecen en la obra de Cantor la tesis que sostengo es que en un determinado dominio, como es el de la matematica, podemos encontrarnos con infinitos potenciales y actuales, mientras que en otros dominios y en especial en las investigaciones acerca de los rasgos de la divinidad, el infinito caracteristico es el Absoluto, y estos dominios no interfieren para nada el uno con el otro. Si hasta los trabajos de Cantor se distinguia claramente el ambito del hombre y de las cosas creadas de la esfera del Creador, despues de Cantor la situación no ha cambiado sustancialmente excepto en el sentido de que entre las cosas creadas también existe un cierto tipo de infinito, el actual cuantitativo, cuya diferencia con el Absoluto sigue siendo, no obstante, eminente. Cantor procuro siempre dejar sentado que su teoria no atentaba contra el estatuto que la tradición cristiana reservaba para la Divinidad, y de hecho no atenta. Por otro lado, tampoco el Absoluto juega ningún papel en el desarrollo de sus ideas matematicas, contra la opinión de Hallett.

Finalmente he querido poner en relacion las contradicciones que Cantor descubrió en su trabajo con otras que aparecieron por la misma época y el esbozo de solucion que Cantor ofreció con lo que autores tan influyentes como Russell consideraban los requisitos minimos que cualquier solución debia cumplir.

El presente trabajo está dividido en tres capítulos que corresponden a las tres etapas por las que, en mi opinion, pasan las tesis de Cantor desde el punto de vista de la teoria de conjuntos. Las tres etapas mencionadas se suceden cronologicamente en el mismo orden en que estan los capitulos, pero el contenido de los capitulos mismos no sigue necesariamente una organizacion temporal, sino que he pretendido en ellos un tratamiento sistematico de los diferentes topicos, para subrayar la dependencia logica, y a veces sicologica en el desarrollo del pensamiento de Cantor, de unos conceptos con respecto a otros. El capitulo I se titula La prehistoria de la Teoria de Conjuntos cantoriana, en el se discuten las investigaciones del autor acerca de conceptos y problemas que, aunque no propiamente conjuntistas, provocaron o permitieron el acercamiento de Cantor a las nociones, perspectivas y discusiones que hoy englobamos bajo el epigrafe generico de Teoria de Conjuntos.

Conceptos propiamente conjuntistas no aparecen en Cantor hasta 1883, en Grundlagen. En esta obra se encuentran gran parte de las discusiones que he denominado La primera teoria de conjuntos del autor, a la cual se dedica el capitulo II de este trabajo, titulado La primera teoria de conjuntos cantoriana: Grundlagen y Beitrage. La primera teoria de Cantor se caracteriza por encerrar una concepcion ingenua de lo que es un conjunto, y por ello mismo es contradictoria. Al punto de vista ingenuo pertenecen todas las obras que el autor publico a partir de 1883, y el exponente mas claro de ello es el trabajo en dos partes, Beitrage (1895-1897), en el cual se encuentra dicho punto de vista sistematicamente expuesto y sin adornar con ropaje filosófico. Los dos supuestos filosóficos generales que soportan la primera teoria de conjuntos son la existencia de conjuntos infinitos con todos sus elementos dados de una vez y la independencia de los objetos abstractos y de las afirmaciones acerca de ellos del conocimiento y los deseos de los sujetos. Ambos supuestos son tambien en buena medida responsables de la emergencia de la primera teoria, esto es, del transito de Cantor desde investigaciones matematicas mas conservadoras a las propias de una orientacion conjuntista. Estos supuestos se tratan asi mismo en el segundo capitulo.

Como ya he indicado, la primera teoría es contradictoria. El primero que se dió cuenta de ello fue Cantor mismo, al descubrir en 1896 las contradicciones del cardinal y el ordinal máximos. A la discusión de las contradicciones se dedica una parte del capitulo III, último del presente trabajo. Además se incluye en dicho capítulo la discusión de los cambios que el matemático alemán realizó en la primera teoría a fin de conservar su consistencia. Al conjunto de estos cambios lo he denominado <u>la segunda teoría de conjuntos</u>, de la cual no hay indicios hasta 1899, de manera que la segunda parte de <u>Beitrage</u>, que por su contenido pertenece a la primera teoría, fue publicada y en parte escrita después de que su autor se hallara en posesión de las contradicciones. Los cambios que definen la segunda teoría se reducen casi por completo a la distinción entre colecciones que son conjuntos y colecciones que no lo son, y con ello la nueva teoría no pertenece ya a la concepción ingenua sino que incorpora un mecanismo para la limitación del tamaño de los conjuntos. Los escritos en los que se expone la segunda teoría son únicamente cartas del autor a otros matemáticos, no publicados hasta 1932, en que apareció parte de la correspondencia con Dedekind en la edición que hizo Zermelo de las obras de Cantor, y posteriormente, en 1971, año en que Grattan-Guinness publicó la correspondencia entre Cantor y Jourdain. Cantor mismo no elaboró ningún trabajo para dar amplia difusión a sus nuevas ideas, y por lo que se sabe, se mantuvo fiel a los principios de la segunda teoría hasta su muerte en 1918. Las diferencias entre la primera y la segunda teorías no afectan a los supuestos filosóficos ya mencionados, el actualismo y el realismo, que acompañaron las ideas conjuntistas del matemático alemán toda su vida.

Una justificación más detallada del contenido de cada uno de los capítulos de este trabajo puede encontrarse en las Introducciones que los preceden.

He trabajado las obras de Cantor en la edición que hizo Zermelo en 1932, en la reimpresión de 1966 y se citaran por esta edición, excepto naturalmente Principien, inédita hasta 1970. En la edición de Zermelo se encuentran tambien, ademas de las anotaciones del editor, una biografía de Cantor realizada por A. Fraenkel y algunas cartas de Cantor a Dedekind de 1899.

Las ediciones del resto de las obras que he utilizado para la preparación del presente trabajo corresponden a las que se relacionan en la bibliografía. Las citas textuales se ofrecen siempre en castellano, en traducción realizada por mí, excepto las de Aristóteles, aunque a veces en nota se da el texto original cuando la importancia o dificultad del tema así lo aconsejan.

Por ultimo quiero agradecer al Prof. Juan J. Acero Fernández su ayuda y sus consejos, sin los cuales este trabajo tendría más defectos de los seguramente encierra. A los Prof. I. Grattan-Guinness y J. Dauben la amabilidad con la que han atendido mis peticiones y la celeridad con la que me han enviado los resultados de sus propias investigaciones. Al Prof. Tomas Calvo Martínez las traducciones de los textos de Aristóteles . A Marith Friege su ayuda inestimable a la hora de obtener documentación bibliográfica, que de otra manera no hubiera sido posible consultar. Y en otro orden de cosas quiero agradecer a mi familia la paciencia que han tenido conmigo durante estos últimos años.

CAPITULO I:

LA PREHISTORIA DE LA TEORIA DE CONJUNTOS CANTORIANA

0. Introducción

El tipo de discusiones que Cantor lleva a cabo en sus obras mas importantes, entre las que destacan Grundlagen(1883) y Beitrage (1895-97), pueden englobarse justificadamente bajo el epigrafe de Teoria de Conjuntos. La razon de esta denominacion estriba en que la nocion de conjunto es basica en su pensamiento y sobre ella se definen otras de gran transcendencia e interés, como las de número cardinal y numero ordinal, que pueden aplicarse tanto a conjuntos finitos como infinitos. No obstante, Cantor no se ocupó en sus primeros trabajos de la teoria de conjuntos sino de temas matematicos más tradicionales. Acerca de estos mostró una gran independencia de pensamiento y un fuerte espiritu innovador que le hicieron derivar la teoria de conjuntos de otras investigaciones que aparentemente nada tenian que ver con ella. Al tránsito del análisis y otras areas matematicas relacionadas a la teoria de conjuntos transfinitos en la obra cantoriana está dedicado el capitulo I del presente trabajo.

Cantor comenzó su actividad cientifica trabajando sobre series trigonometricas y para ello consideró necesario ofrecer una definicion de numeros reales distinta de las que circulaban en su epoca. En realidad, lo que Cantor define de manera nueva es el concepto de numero irracional. No se dedica al estudio de los numeros racionales por ser estos ya de sobra conocidos y no encontrar en la teoria de numeros racionales heredada ningun motivo de desconfianza. Como es sabido, el dominio de los numeros racionales junto con el de los irracionales componen el dominio de los numeros reales: el §1 de este primer capitulo está dedicado a la caracterización que del dominio de los numeros reales aparece en la obra de Cantor y a las diferencias en el tratamiento del tema que separan el enfoque cantoriano de otros enfoques contemporaneos a él. El §2 está dedicado a la teoria de los conjuntos de puntos. Cantor supone que los numeros reales y los puntos de una linea forman dominios estructuralmente identicos, aunque conceptualmente indendientes, y que los resultados que se prueben en cualquier dominio referido a las relaciones de los elementos que los componen entre si, tienen contrapartidas similares que pueden probarse en el otro dominio. Ambos se hallan, por tanto, muy relacionados, sin que esto signifique que sea licito que las demostraciones en un dominio utilicen conceptos o argumentos propios del otro. En el §2 se definen los conceptos topologicos de entorno de un punto, punto de acumulación y derivada de un conjunto de puntos. Esta ultima noción contribuirá decisivamente a la definicion de continuo, en el punto 2.2. Se introduce así mismo el concepto de derivada de orden infinito, en el punto 2.1, y se define una sucesión infinita de derivadas de orden infinito que llevaran posteriormente a Cantor al concepto de numero ordinal transfinito.

Cantor prueba, ademas, que entre los conjuntos de puntos infinitos puede haber diferencias de tamaño, esto es, que no todos los conjuntos infinitos de puntos tienen la misma cantidad de elementos. Entre los conjuntos infinitos de números ocurre algo equivalente, no todos son iguales. En concreto, Cantor demuestra que hay más números reales que algebraicos y más reales que naturales. Esta cuestión se estudia en el punto 2.3 y en el §3. El descubrimiento de los distintos tamaños de infinito constituye el origen del concepto de potencia o, lo que es lo mismo, del concepto de número cardinal finito y transfinito. Las distintas versiones de la definición de potencia se discuten en el §4 así como las críticas más significativas a las mismas.

Los trabajos más destacables de Cantor en los que se tratan los tópicos que he incluido en este capítulo son los siguientes:

1. "Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen" (Itr), de 1872. En este artículo se trata la extensión del dominio de los números reales mediante la definición de series de números racionales con un límite. En Itr se pone de manifiesto el interés especial que Cantor tiene por el rigor lógico de las definiciones. Se esteblece, así mismo, el paralelo entre las investigaciones sobre números reales y las que versan sobre los puntos de una recta, destacándose con claridad la independencia mutua de ambos tipos de investigaciones. El objetivo declarado del trabajo es la prueba de un teorema sobre series trigonométricas que no tiene un especial interés para el desarrollo de la teoría de conjuntos y números transfinitos.

2. "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" ("Ueber eine Eigenschaft..."), de 1874. En este articulo se prueba que en cualquier intervalo de numeros reales existe un número infinito de números transcendentes. Esta afirmación tiene dos partes: la primera proclama que existen numeros transcendentes, y la segunda indica que hay mas transcendentes que algebraicos, y puesto que hay tantos algebraicos como naturales, se afirma que hay mas números transcendentes que naturales. A efectos del presente trabajo el interés de "Ueber eine Eigenschaft..." es tambien doble. En primer se pone de manifiesto en él una nueva actitud hacia los teoremas de existencia, puesto que se acepta que una prueba por reducción al absurdo, esto es, no constructiva, es una demostración adecuada de la existencia de los objetos abstractos. En segundo lugar, el articulo indica que ya en 1874 cree Cantor que hay, al menos, dos tamaños distintos para conjuntos infinitos.

3. "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre"(BM), de 1878. El objetivo del artículo es la prueba de que los continuos de mas de una dimensión , es decir, planos, volúmenes e hipercubos, pueden coordinarse biunívocamente con el continuo unidimensional. En terminos de puntos esto significa que hay tantos puntos en una linea como en una extensión de cualquier número finito de dimensiones. El contenido de este articulo en lo concerniente a la coordinación entre lineas y planos es idéntico a lo que aparece en la correpondencia de Cantor con Dedekind sobre el tema. Tambien se encuentra en BM la primera definición de potencia y la primera formulación de lo que se

ha llamado la <u>Hipótesis del Continuo</u> o <u>Hipótesis de Cantor</u>: que no hay tamaño intermedio entre le que tiene el conjunto de los números naturales y el que tiene el conjunto de los números reales, o dicho de otro modo, que todo conjunto infinito de números reales o es equivalente al conjunto de los números naturales o es equivalente al conjunto de los numeros reales mismo.

4. "Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten"(<u>ULP</u>), de 1879-84. En realidad <u>ULP</u> es una serie de seis articulos: <u>ULP</u> I (1879), <u>ULP</u> II (1880), <u>ULP</u> III (1882), <u>ULP</u> IV (1883), <u>ULP</u> V (1883) y <u>ULP</u> VI (1884), que a excepcion de <u>ULP</u> V, al que se conoce por <u>Grundlagen</u>, se dedican al tema de los conjuntos de puntos. <u>Grundlagen</u> se tratará en el capítulo II del presente trabajo. El resto de los artículos de la serie <u>ULP</u> tienen como objetivo la definición de las características de los conjuntos de puntos y están orientados hacia la definicion del continuo lineal.

1. Los numeros reales

Cantor comenzó su carrera docente en la Universidad de Halle. El matematico alemán Heine, colega de Cantor en esta universidad, le animo a ocuparse de la representación de las funciones mediante series trigonometricas. Para llevar a cabo la tarea y como herramienta previa de la prueba de la unicidad de la representacion de tales funciones, abordó Cantor el tema de la definicion de los numeros reales, presentando una caracterizacion rigurosa de los números irracionales sobre la base de los números racionales. La definición aparece en Itr (1872) y es la siguiente:

Simbolicemos por A el dominio de los números racionales. Supongamos ahora que una colección infinita de tales números

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

está ordenada mediante una determinada relación, de manera que, a medida que n aumenta, la diferencia entre dos elementos cualesquiera de la colección ordenada se haga cada vez más pequeña. Estrictamente hablando, supongamos que pueda existir un número racional positivo ϵ, tal que, a partir de un determinado n en adelante

$$|a_{n+m} - a_n| < \epsilon$$

siendo **m** un entero positivo arbitrario. Cantor dice de las colecciones con la propiedad que acabamos de enunciar que tienen un límite determinado, **b**.

Si una serie como (1) tiene un límite **b**, series diferentes con la misma propiedad también tendrán límites **b'**, **b''** etc. que pueden ser idénticos o no a **b**. Si al dominio A de los números racionales se le añaden los límites de todas las series como (1) se obtiene una extensión de A, que Cantor simboliza por B. Esta extensión constituye ahora el dominio de los números reales, que el autor ha caracterizado sobre los racionales.

Los elementos del domino extendido B no son, en principio, del mismo tipo que aquellos que componen el dominio A, desde un punto de vista ontológico. Mientras que los números racionales <u>son</u> números y existen como tales, Cantor afirma que la expresión "tener un límite determinado, **b**" no significa que existan objetos tales como límites, sino que es meramente otra forma de enunciar la propiedad mencionada en relación a una sucesión de números racionales.

Cada límite está determinado por la colección de racionales utilizados en su definición, y las afirmaciones que se hagan acerca de las posibles relaciones entre límites no serán mas que abreviaturas de afirmaciones acerca de las colecciones de racionales a las que están ligados. Estos límites, y en consecuencia las sucesiones de racionales como (1), son, en opinión de Cantor, comparables. Esto es, entre dos cualesquiera de ellos, **b** y **b'**, sólo puede ocurrir una de las tres relaciones siguientes

$$b = b' \quad , \quad b < b' \quad , \quad b > b' \quad .$$

Hablando en términos de colecciones ordenadas de racionales, si b es el límite de

$$a_1, a_2, \ldots , a_n, \ldots$$

y b' el límite de

$$a_1', a_2', \ldots , a_n', \ldots$$

las relaciones mencionadas significarán lo siguiente: decir que

$$b = b'$$

equivale a decir que la diferencia

$$a_n - a_n'$$

se irá haciendo tan pequeña como se quiera al aumentar n. Si

$$b < b'$$

entonces la diferencia

$$a_n - a_n'$$

permanecera mayor que un determinado racional positivo ϵ, a partir de un cierto **n** en adelante. En el tercer caso,

$$b > b'$$

lo que se quiere decir es que la diferencia entre **a_n** y **a'_n** es siempre menor que un racional negativo determinado, $-\epsilon$, a partir de un cierto **n**. En epocas posteriores[1] denomina a las colecciones de racionales caracterizadas anteriormente <u>series fundamentales</u>, y las define como sucesiones

$$a_1, a_2, \ldots , a_n, \ldots$$

que cumplen la propiedad de que

$$\text{Lim } (a_{n+m} - a_n) = 0$$

Esta definicion no añade nada a la introducida en <u>Itr</u>, pero la forma de expresión es mas precisa. Las series fundamentales se simbolizan por (a_n).

1.1 <u>La caracterización precantoriana de los numeros reales</u>

El hecho de que Cantor sintiera la necesidad de afrontar la definicion de los numeros reales es señal de que no estaba satisfecho con las definiciones que circulaban en su epoca. Entre estas destaca la del matemático francés Cauchy, que puede considerarse como protptipo del estilo de introduccion de los numeros irracionales en el analisis anterior a los trabajos de Cantor. Cauchy en su Cours d'analyse de 1821, se expresa de la siguiente manera:

> "Así un numero irracional es el limite de varias fracciones que proporcionan valores cada vez mas aproximados a el."

y define "límite" a como la suma de una colección infinita de racionales

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{2}$$

que cumple la propiedad de que la suma de un número finito cualquiera de elementos de (2) se acerca infinitamente al limite a conforme crece n.

El defecto que Cantor encuentra en la introduccion de racionales característica del analisis precantoriano es que se supone que la suma de una sucesion como (2) existe sin haber investigado si hay algun valor que pueda identificarse con el resultado de la suma. Esto es, para poder decir que el resultado de una suma es un valor determinado b se requiere que este definido el ambito de valores al que pertenece b, para poder aislar un elemento de tal ambito como el resultado de la suma en cuestion. En este sentido, Cantor consideraba que las definiciones de irracionales de su época eran circulares puesto que suponían la existencia de lo que ellas pretendían definir. Dicho de otro modo: si se considera el texto anteriormente citado como una definición de número irracional, lo que se viene a decir es que un número irracional se identifica con el límite de una sucesión de racinales que satisfacen determinadas condiciones. Esto es, suponiendo que los límites estén dados previamente, la caracterización de Cauchy indica que los números irracionales no son más que un tipo de entidades, los límites, de las que ya disponíamos de antemano. Pero el problema que se plantea es precisamente que los objetos a los que se asimilan los irracionales no han sido tratados con anterioridad a la introducción de éstos por lo que en la definición se está presuponiendo su existencia sin haberla justificado.

El procedimiento adecuado, y que Cantor lleva a cabo, consiste en caracterizar desde el principio el dominio completo de los números reales, y distinguiendo racionales e irracionales respecto a sus estatutos ontológicos respectivos.

A pesar de lo dicho, no está claro si Cauchy mismo cometió el error de presuponer la existencia de los límites. Algunos autores, como Grattan-Guinness[3] afirman que Cauchy consideraba el texto citado como una definición de número irracional. Otros, como por ejemplo Jourdain[4] suponen que Cauchy no cometió el error del que aquí se le está acusando. No obstante, cometiera o no Cauchy este error, subsiste la diferencia entre los puntos de vista de éste y de Cantor. Si los textos de Cauchy encierran el círculo lógico al que estamos haciendo referencia, Cantor tiene el merito de proporcionar un metodo irreprochable, desde el punto de vista logico. Si Cauchy es inocente, en los textos de éste no hay ya un error pero si una laguna puesto que no hay una definición precisa de los números irracionales, cosa que Cantor consideró imprescindible. En cualquier caso, y dejando de lado a Cauchy, el error de presuponer la existencia de los limites y los números irracionales sin haber investigado la cuestión era habitual entre los matematicos del siglo pasado y Cantor creyó necesario dar un tratamiento distinto a la concepción de los irracionales dominante.

1.2 Cauchy y Cantor: dos actitudes diferentes frente al análisis

Cantor pertenece, desde sus primeros trabajos, a la tradición matemática surgida durante el siglo XIX que tenia como uno de sus objetivos principales la rigorización del cálculo a traves de las definiciones precisas de los conceptos utilizados en él, teniendo especial cuidado en evitar las apoyaturas geometricas tan frecuentes en el análisis anterior. Por ello, Cantor es, sin lugar a dudas, un "conceptualista" en el sentido que Coffa[6] da al termino. De acuerdo con Coffa, la pretensión de los autores que componen el bando conceptualista es, entre otras, mostrar que los enunciados matematicos pueden fundamentarse sin necesidad de echar mano de la intuición kantiana de lo sensible. Este rechazo de la intuición como metodo de prueba inexcusable de las proposiciones del calculo lleva aparejado un cambio de perspectiva que se refleja en un cambio mismo de los problemas que deben ser resueltos. Tal cambio queda ilustrado por el diferente trato que dan a los números reales Cauchy y Cantor. Si el primero de ellos queda satisfecho con el tratamiento que se da en su <u>Cours d'analyse</u> de los límites e irracionales no es mas porque está pensando en términos de puntos de una recta mas que en números. Este es el sentido del siguiente texto de Jourdain:

> "Parece, sin duda, evidente a la 'intuición' que, si colocamos las longitudes s_n, s_{n+1}, ... , para las que se satisface la condición (4), sobre una línea recta, que una longitud 'límite' s (conmensurable o inconmensurable) existe; y, sobre esta base, parece que estamos justificados al calificar la teoría de Cauchy del número real como geométrica."[6]

La condición (4) de la que se habla en el texto es la que Cauchy utiliza en la definición de límites, esto es, que la suma de una colección finita cualquiera de elementos de una sucesión de racionales como (2) se aproxime indefinidamente a un valor s a medida que n aumenta. De acuerdo con Jourdain, pues, si se supone conocida la estructura de la recta real, la concepción de Cauchy de los números reales es evidente[7]. Otra cosa muy distinta ocurre si se pretende fundamentar la noción de número irracional con independencia de consideraciones geométricas. En esta situación se encuentra Cantor. Cuando no se dispone como dato de la configuración de los puntos de una línea, la justificación de la existencia de los límites desaparece. Por esta razon, Cantor no supone sin mas que tengan existencia al margen de las colecciones de racionales sobre las que se definen, y considera una peticion de principio las introducciones habituales del estilo de la Cauchy.

1.3 La existencia de los números irracionales

Como ya he indicado, Cantor trata de los números irracionales fundamentalmente en dos trabajos, uno de 1872 y otro de 1883. Aunque la forma de la definición no ha cambiado de una fecha a otra, algo muy importante se ha transformado en los más de diez años que separan ambos artículos: la concepción cantoriana del estatuto ontológico de este tipo de números. En ItR no hay compromiso alguno con la existencia de límites y números irracionales. Explícitamente se afirma que no hay cosas tales como límites. Estos últimos se introducen como abreviaturas útiles de sucesiones de números racionales que satisfacen determinadas características, pero no tienen referencia alguna fuera de la propia teoría en la que son simplemente signos auxiliares. Pero ya en ItR deja claro Cantor que los límites estan determinados completamente por las colecciones sobre las que se definen y que puede decirse siempre si dos límites son iguales o no, y en este caso cual es mayor y cual menor. Tambien aparecen en ItR definiciones de las relaciones de mayor y menor entre un racional y un limite. La posibilidad de establecer relaciones precisas de los limites entre si y de estos con entidades ya existentes --como los numeros racionales-- va haciendo que Cantor caiga en la cuenta de que no hay razones para negar a los irracionales el estatuto ontologico de existentes. La actitud cantoriana de 1872 respecto de la existencia de los limites y numeros irracionales puede calificarse de formalista. Esta actitud formalista se extiende hasta finales de 1882, y en 1883 en Grundlagen ha desaparecido por completo. En esta ultima obra puede leerse:

> "Los numeros irracionales, mediante la constitución dada a traves de la definición, tienen en nuestro espiritu una realidad tan determinada como los racionales, la misma que los números enteros racionales."[8]

Desde 1883 en adelante, los números irracionales adquieren el estatuto de verdaderos números. Tienen el mismo grado de realidad que los numeros racionales utilizados para definirlos. El proceso por el que Cantor descubre y decide que un termino tecnico no es un mero signo sin referente es el siguiente: en un primer momento se define un termino sin que se prejuzgue la existencia de su objeto. A continuacion se comprueba si tal termino esta lo suficientemente determinado como para distinguirlo claramente de los demas conceptos de la teoria en la que se ha introducido y para fijar sus relaciones dentro de la misma. Cuando la nocion en cuestion demuestra que puede comportarse como las nociones ya disponibles no hay razón para considerarla como algo diferente y entra a formar parte del sistema teórico de que se trate, al mismo nivel ontológico que el resto de las nociones. En el caso concreto de los límites y los números irracionales, estos consiguen el estatuto de los números ya definidos --los racionales y los enteros-- cualquiera que sea éste.

En Grundlagen se expone una concepción de los objetos matemáticos --y por tanto de los números irracionales-- que conlleva la aceptación de la existencia autónoma de éstos con independencia de que sean pensados por alguien o no, por lo que propongo que se denomine al periodo de la obra cantoriana que va desde 1883 en adelante etapa realista respecto de los números irracionales, en contraposición a una etapa formalista que comprendería los trabajos realizados entre 1872 y 1882. De la concepción de la existencia de los objetos abstractos que manifiesta Cantor a lo largo de su obra nos ocuparemos en capítulo siguiente.

1.4 Definiciones de irracionales de Weierstrass y Dedekind. Críticas a las mismas

En opinión de Cantor, las definiciones de los irracionales llevadas a cabo por Weierstrass y Dedekind son enteramente satisfactorias desde un punto de vista lógico. Ni una ni otra contienen errores como era el caso de la de Cauchy, y Cantor señala que Weierstrass fue el primer matematico que evitó suponer la existencia de los irracionales antes de definir los numeros reales.

Las críticas de Cantor a las teorías de irracionales de Weierstrass y Dedekind no hacen referencia a la falta de rigor lógico de éstas, sino que consisten mas bien en consideraciones sobre la elegancia y alcance de las definiciones.

El método de Weierstrass se asemeja al de Cauchy, excepto en que no aparece en él la circularidad de la que Cantor acusaba a la mayoría de las definiciones anteriores a la suya. Weierstrass adscribe un número <u>b</u> a una colección infinita de racionales, (α_ν), del tipo de (2), que cumpla la condición de que la suma de un número finito cualquiera de racionales (α_ν) no sobrepasa nunca este valor determinado <u>b</u>. La suma de un numero finito cualquiera de racionales es un número racional y se parte ya de que éstos existen. Por lo tanto no puede criticarse la definición de Weierstrass sobre la base de que tal suma no puede existir, o al menos, que no está definida. Si Weierstrass hubiera considerado a los irracionales como <u>la</u> suma de todos los elementos de (α_ν) hubiera presupuesto, como Cauchy, que dicha suma existe antes de haberla definido. Con todo, Cantor rechaza el enfoque de Weierstrass porque este enfoque limita la definición de irracionales al ámbito de los números finitos. En efecto, Cantor introduce esta crítica en <u>Grundlagen</u>, obra en la que por primera vez se habla de numeros transfinitos. Entre las peculiaridades que las operaciones aritmeticas tienen cuando se trata de este tipo de numeros destaca el hecho de que la suma no satisface la propiedad conmutativa, i.e., que entre los números transfinitos el orden de los sumandos si altera el resultado de la suma. Como la definición de Weierstrass hace referencia a la suma y esta no se comporta de la misma manera entre números finitos que entre números transfinitos, la definición no admitiría sin mas una extensión que abarcase a estos últimos. Dicho de otro modo, para las matemáticas precantorianas el enfoque de Weierstrass es irreprochable, aunque no lo suficientemente potente como para resistir la transposición que Cantor pretende llevar a cabo.

El método de Dedekind se fundamenta en el conocido procedimiento de las cortaduras, expuesto por éste en su ensayo "Stetigkeit und irrationale Zahlen", y que consiste básicamente en lo siguiente:[9]

Todo número racional divide a la serie completa de los racionales, R, en dos series infinitas. Todo racional a produce un <u>corte</u> en R, que Dedekind simboliza por (A_1, A_2), que tiene dos propiedades:

i) Todo número de A_1 es menor que todo número de A_2.

ii) Siempre que ocurre que o la primera clase tiene un último término o la segunda un primer término.

Todo racional corta R en dos porciones de estas características, pero no todo corte (A_1, A_2), siendo A_1 y A_2 colecciones infinitas, está producido por un racional. En efecto, si dividimos R suponiendo que a A_1 pertenecen aquellos números cuyo cuadrado sea menor que dos y a A_2 aquellos números cuyo cuadrado sea mayor que dos, entonces todo A_1 es menor que todo A_2 pero no hay ningún racional que cause la división. Esto es, ni A_1 tiene término superior ni A_2 término inferior y, sin embargo, todo racional está o en A_1 o en A_2 de acuerdo con la hipótesis. ¿Qué ocurre en una situación así? Dedekind postula, entonces, la existencia de un número y sólo uno que produce la división. Este número es distinto de todos los racionales, es un número de un nuevo tipo: un irracional. Y cada uno de estos números queda completamente definido por medio del corte correspondiente.

El defecto que Cantor encuentra al enfoque de Dedekind es simplemente que es poco natural, esto es, que no es habitual en el análisis introducir los irracionales mediante cortaduras. Cantor supone que es más acorde con la práctica normal de los matemáticos relacionar la definición de números irracionales con series fundamentales, como él mismo hace.

De hecho, según se ha dicho, las críticas de Cantor a Weierstrass y Dedekind no descalifican los métodos de éstos. Mal podría tener en cuenta Weierstrass números infinitos si aún no eran conocidos cuando publicó sus trabajos, y en cuanto a Dedekind, los comentarios de Cantor no pueden considerarse una crítica seria. Ambos autores influyeron mucho en Cantor, y este último mostró siempre un gran respeto por estos dos matemáticos alemanes.

2. Teoría de los conjuntos de puntos

En Itr (1872) Cantor introduce y define tres conceptos que posteriormente serán de primordial importancia para el desarrollo de la teoría de los conjuntos de puntos y, a través de esta, para el descubrimiento y definición de los números transfinitos. Estos tres conceptos son entorno de un punto, punto de acumulación y derivada de un conjunto de puntos. Cantor entiende por estas nociones lo siguiente:

Un entorno de un punto p (Umgebung eines Punktes) es cualquier intervalo de puntos en cuyo interior se encuentre p. Un punto de acumulación (Häufungspunkt o también Grenzpunkt) de un conjunto P es aquél punto cualquiera de cuyos entornos contiene un conjunto infinito de puntos de P. Un punto de acumulación de un conjunto P puede pertenecer o no a P.

El conjunto de puntos de acumulación de un determinado conjunto de puntos P constituye lo que Cantor llama la primera derivada de P, que el autor simboliza en Itr por P' y en otros artículos posteriores por $P^{(1)}$. En el caso de que P tenga un número infinito de puntos de acumulación, esto es, si $P^{(1)}$ consiste en un conjunto infinito de puntos, puede definirse también la primera derivada de $P^{(1)}$, o, lo que es lo mismo, la segunda derivada de P, simbolizada en el artículo mencionado por P'' y luego por $P^{(2)}$. La segunda derivada de P se definirá como el conjunto de puntos de acumulación de $P^{(1)}$. El procedimiento utilizado para definir las derivadas primera y segunda de un conjunto de puntos puede continuarse indefinidamente, aunque en 1872 todavía no habla Cantor de una iteración infinita del procedimiento de la derivación.

Es posible que la n-ésima derivada de P, $P^{(n)}$, contenga únicamente un número finito de puntos. En este caso $P^{(n)}$ no tendrá primera derivada, y no existirá la n+1-ésima derivada de P. A los conjuntos para los que el proceso de derivación acaba tras un número finito de pasos los llama Cantor conjuntos _de tipo n_ (_von den n^{ten} Art_) donde _n_ puede ser cualquier entero finito. Dicho de otro modo, conjuntos de tipo _n_, para algún _n_, serán todos aquellos que tengan sólo un número finito de derivadas. Así si un conjunto tiene derivada primera y segunda pero no tercera será de tipo dos. Si tiene también tercera pero no cuarta será de tipo tres y así sucesivamente.

La paternidad del concepto de _punto de acumulación_ tal como se ha definido más arriba suele atribuirse a Cantor. Así lo hace Bourbaki[10]. Meschkowski[11] sospecha que, aunque Cantor fue el primer autor que publicó una definición del mismo, la idea provenía probablemente de Weierstrass. Lo cierto es que Bourbaki y Meschkowski tienen razón en el sentido de que con tal nombre, "punto de acumulación", no aparece hasta nuestro autor, pero el concepto es anterior a Cantor y fue definido por primera vez por Bolzano. Este último utiliza el concepto en _Paradoxien des Unendlichen_ para definir el continuo. En el §39 de esta obra afirma Bolzano que, en un continuo, todo punto tiene un vecino en cualquier intervalo en el que se encuentre por pequeño que éste sea, lo que traducido a la terminología cantoriana quiere decir que en un continuo todo punto es un punto de acumulacion. El concepto que se contrapone a punto de acumulacion es el de punto aislado, que es aquel punto para el que puede encontrarse un intervalo que lo contenga en el que no haya otros puntos. Bolzano y Cantor[12] definen punto aislado exactamente de la misma manera y esto sugiere con fuerza que tambien estan manejando el mismo concepto de punto de acumulación aunque difieran en la terminología.

Las investigaciones acerca de los conjuntos de puntos que Cantor lleva a cabo pueden extrapolarse al ambito de los números reales. Esta extrapolación la permite Cantor expresamente: sabemos que los numeros irracionales han sido definidos con frecuencia como límites de series de otros números, a saber, de números racionales. El mismo Cantor lo hizo así y, aunque no utilizó expresiones derivadas de intuiciones geométricas, como "ir a un límite" o "distancia al límite", aceptó que tanto los números irracionales como los racionales y las afirmaciones derivadas de las investigaciones en ambos dominios tenían evidentes contrapartidas geometricas. Estas contrapartidas están contempladas en la obra de Cantor y éste trabajó mas a menudo con puntos que con numeros porque consideraba mas fácil el trabajo con figuras espaciales que con puros conceptos sin representacion. No obstante, se encargo de subrayar que las investigaciones con puntos son independientes de las que utilizan numeros y que pueden fundamentarse ambos dominios, el de los puntos espaciales y el de los numeros reales, sin hacer referencia el uno al otro. Tampoco se le oculto que la identificacion metodologica de puntos y numeros no es algo que pueda probarse, sino que depende de una decision en cierto sentido arbitraria el suponer que entre los puntos de un segmento de recta y el conjunto de los numeros reales puede definirse una relación biunivoca. Una vez tomada esta decisión, si decimos que un segmento de recta es una magnitud continua, tambien podemos decir que los numeros reales forman una sucesion continua. El término "continuo" no tiene aquí un significado preciso, sino puramente intuitivo, como era el caso entre los matemáticos precantorianos.

La similitud estructural entre puntos y numeros reales puede comprobarse en una dirección pero no en la otra, esto es, puede determinarse un metodo para hacer corresponder a cada punto de una recta un número real y sólo uno, pero no puede garantizarse que para cada número real haya un punto de la recta con el que pueda emparejarse. En este último caso se hace necesario postular la existencia de tal correspondencia, y en este sentido he hablado anteriormente de una _decisión_ que no puede fundamentarse.

El metodo que Cantor propone para asignar un numero real a cada punto de la linea recta es el siguiente: en primer lugar se fija una unidad de medida y a continuacion se precisa la distancia de cada uno de los puntos de la linea a un punto previmente señalado, al que se llama "cero" habitualmente, y se indica si esa distancia es positiva o negativa, según que cada punto este a la izquierda o a la derecha del cero. La distancia de los puntos de la linea respecto del cero vendra dada mediante números que haran referencia a la unidad de medida. Esta distancia podrá, a veces, determinarse mediante un número racional. Cuando tal determinación no es posible, se hace corresponder al punto en cuestión un número irracional, un número que pertenece al dominio B anteriormente caracterizado. Así, cada punto de la línea se halla unívocamente relacionado con un número real. Sin embargo, no sabemos si puede haber números reales que no estén emparejados con punto alguno de la recta. Cantor no contempla la posibilidad de que tales números existan y para garantizar el paralelismo entre números y puntos introduce un axioma, que puede expresarse como sigue:

> A todo número real le corresponde un punto, y sólo uno, de la recta, cuya distancia del punto de origen 0 viene dada por ese número.[13]

Naturalmente, Cantor no pretende probar esta afirmación puesto que cree que no es posible una demostración de la misma. La superposición de los números reales y los puntos de una recta dependen de un axioma a favor del cual sólo tenemos una evidencia intuitiva, y Cantor es consciente de que no puede llegarse más allá en la fundamentación del mismo.

2.1 Derivadas de orden infinito

Hemos visto ya que algunos conjuntos de puntos sólo admiten un número finito de derivadas. Estos conjuntos dan lugar a un conjunto derivado finito de puntos tras la iteración n veces del procedimiento de la derivación, siendo n un numero natural finito.

No obstante, hay conjuntos de puntos que se comportan de forma diferente. Puede ocurrir que para un conjunto P no haya ningún número natural n para el que $P^{(n)}$ sea vacio, en la notación cantoriana

$$P^{(n)} \equiv 0$$

Esto es, que para el conjunto P, toda derivada $P^{(n)}$ tiene a su vez una derivada. A los conjuntos con esta peculiaridad los llama Cantor <u>conjuntos del segundo género</u> (<u>Punktmenge der zweiten Gattung</u>); a los conjuntos de tipo n, para algún n, los llama <u>conjuntos del primer género</u> (<u>Punktmenge der ersten Gattung</u>).

Un conjunto del segundo género tiene infinitas derivadas, puesto que tiene todas las derivadas de orden finito. Para los conjuntos del segundo género ninguna derivada $P^{(n)}$ es vacia. En el sistema cantoriano estos conjuntos tienen ademas <u>derivadas de orden infinito</u>. ¿Cómo pueden definirse estas últimas?. Suponiendo que P tenga todas las derivadas finitas,

$$P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots, P^{(n)}, \ldots$$

Cantor define su primera derivada infinita[4], $P^{(\omega)}$, como la intersección de todas las derivadas finitas, en su notación

$$P^{(\omega)} \equiv D(P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots , P^{(n)}, \ldots)$$

donde la "D" hace referencia a la palabra alemana "Durchschnitt" que significa "intersección". Naturalmente, para que un conjunto P tenga una derivada infinita siempre que tenga todas las finitas es necesario garantizar que todas las derivadas finitas tienen, al menos un punto en común. Cantor supone que esto es así aunque no explica la razón ni prueba dicha suposición. La explicación intuitiva es la siguiente:

La unión de un conjunto P con su primera derivada $P^{(1)}$ da lugar a un conjunto que contiene todos los puntos de acumulación de P y con ello puede decirse que se ha "completado" el conjunto P. Todos los puntos de $P^{(1)}$ son puntos de acumulación, tienen en su entorno infinitos puntos de P, pero los puntos de acumulación de $P^{(1)}$, que forman $P^{(2)}$, teniendo en su entorno infinitos puntos de $P^{(1)}$ cada uno de los cuales es un punto de acumulación de P, tendrán también infinitos puntos de P, con lo que también serán puntos de acumulación de P. Esto significa que pertenecen a $P^{(1)}$, al estar $P^{(1)}$ formada por <u>todos</u> los puntos de acumulación de P, y así sucesivamente. Esto último es sólo una aproximación informal, pero ni siquiera alguna explicación de este tipo aparece en la obra de Cantor. Jourdain escribe a Cantor en 1905:

"¿Podría decirme en qué lugar de sus trabajos prueba usted el teorema general:
Si los conjuntos P_1, P_2, ... , P_ν, ... son cerrados, y cada $P_{\nu+1}$ es una parte de P_ν, entonces hay siempre puntos que pertenecen a todos los P_ν?"[15]

Como veremos más adelante, un conjunto cerrado es aquél que contiene a su primera derivada. De acuerdo con la explicación intuitiva que he dado anteriormente, todas las derivadas de un conjunto de puntos contienen a su primera derivada -- y a todas las demás -- con lo que cada $P^{(n+1)}$ es una parte de $P^{(n)}$. Lo que Jourdain pregunta es cómo probar que en estas condiciones $P^{(\omega)}$. Cantor no respondió[16].

Volviendo a las derivadas de orden infinito, en la teoría de Cantor $P^{(\omega)}$ es la primera derivada de orden infinito de un conjunto P del segundo género, y $P^{(\omega)}$ es el conjunto delos puntos que pertenecen a todas las derivadas $P^{(n)}$ de P, siendo **n** un número finito. Aunque Cantor no era consciente de ello, la existencia de $P^{(\omega)}$ en todo conjunto del segundo género precisa del Axioma de Elección.

En cuanto a la concepción del infinito que ya Cantor comienza a manejar, lo que en la definición

$$P^{(\omega)} = D(P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots , P^{(n)}, \ldots)$$

llama la atención es que los puntos suspensivos tras $P^{(n)}$ tienen un significado mas fuerte de lo que era habitual en la época de Cantor. No significan aquí que la serie <u>puede</u> seguirse indefinidamente, sino que <u>de hecho</u> continua infinitamente. No se hace referencia a una serie potencialmente infinita de derivadas de P. Por el contrario, se utiliza el conjunto infinito en acto de todas sus derivadas para definir $P^{(\omega)}$. Claramente se evidencia en esta definición uno de los rasgos que J. de Lorenzo[17] ha señalado como características de los que él llama <u>la ruptura cantoriana</u>, y que en este caso se trata de aceptación aproblemática del infinito actual. En efecto, ningún comentario, ninguna justificación de tal introducción precede al desarrollo de las derivadas de orden infinito que estamos considerando.

Una vez que hemos obtenido $P^{(\omega)}$ de esta manera no hay razón para detener el proceso. Tiene sentido, entonces, hablar de la primera derivada de $P^{(\omega)}$, que Cantor simboliza por $P^{(\omega+1)}$, de la segunda derivada $P^{(\omega+2)}$, y de todas las $P^{(\omega+n)}$, donde n es un número natural. De nuevo puede ocurrir que ninguna de las $P^{(\omega+n)}$ sea vacía, con lo que habrá una intersección de todas ellas -- supuesto el Axioma de Elección -- que define una nueva derivada de P, $P^{(2\omega)}$:

$$P^{(2\omega)} = D(P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, P^{(\omega+3)}, \ldots , P^{(\omega+n)}, \ldots)$$

De esta manera puede continuarse el proceso sin limitación, primero las $P^{(n)}$, luego las $P^{(\omega+n)}$, luego las $P^{(n\omega+n)}$, luego $P^{(\omega^n)}$, $P^{(\omega^\omega)}$, $P^{(\omega^{n\omega})}$, $P^{(\omega^{\omega^n})}$, $P^{(\omega^{\omega^\omega})}$, etc.[18]

De lo dicho hasta el momento se sigue que toda derivada de un conjunto de puntos P se define con precisión bien como el conjunto de los puntos de acumulación de un conjunto concreto, bien como la intersección de una serie infinita de derivadas.

Cantor hace hincapié en la ausencia de arbitrariedad en la introducción de las derivadas de orden infinito, de modo que los símbolos de infinitud utilizados: "ω", "$\omega+1$", "2ω", "ω ", etc. hacen referencia a lugares precisos en una ordenación.

2.2 Definición de continuo lineal

A Cantor le debemos la primera definición precisa del concepto "conjunto continuo de puntos". No fue, sin embargo, el primer matematico que se encaró con la tarea de liberar el concepto de continuo de las intuiciones más o menos confusas, a veces casi místicas, que le acompañaban hasta el siglo pasado. Bolzano, en Paradoxien des Unendlichen, y Dedekind, en "Stetigkeit und irrationale Zahlen",se propusieron objetivos similares, a saber la precisa caracterización matematica del fenomeno de la continuidad de la línea y su contrapartida analítica: la ausencia de huecos en el conjunto de los numeros reales, aunque ni uno no otro logró, en opinión de Cantor, mas que una aproximación parcial al concepto.

La definición cantoriana depende de la teoria de las derivadas de conjuntos de puntos, y fue profundizando en esta como el autor consiguió acuñar por primera vez algunos conceptos topológicos, como los de "conjunto cerrado" y "conjunto denso en sí", que no sólo le permitieron abordar el tema del continuo, sino que todavia hoy se conservan con el mismo sentido que Cantor les dió. Las definiciones son estas:

Un conjunto es *cerrado* si contiene a su primera derivada. En la notación del autor, P es un conjunto cerrado si

$$D(P,\ P^{(1)}) \equiv P^{(1)}$$

es decir, si la intersección de P y su primera derivada es idéntica a esta última.

Un conjunto es *denso en sí* si está contenido en su primera derivada, es decir, P es denso en sí si

$$D(P,\ P^{(1)}) \equiv P$$

Dicho de otro modo, si la intersección de P y su primera derivada es P mismo[19].

Un conjunto P puede ser, a la vez, cerrado y denso en sí. De las definiciones anteriores se sigue que en este caso P coincidirá con su primera derivada

$$P \equiv P^{(1)}.$$

Cuando esto ocurre se le llama a P *conjunto perfecto*[20].

Cantor llegó a la conclusión de que todos los *continua* eran conjuntos perfectos pero que la conversa no era cierta. Así, la perfección es una condición necesaria de la continuidad aunque no una condición suficiente. En opinión de nuestro autor, tanto Bolzano como Dedekind habían caracterizado a lo sumo conjuntos perfectos. Faltaba aún otro rasgo para determinar la continuidad, rasgo al que Cantor llamó *coherencia* (*Zusammenhang*) y que definió de la siguiente manera:

Un conjunto de puntos T es *coherente* si, para cualesquiera dos puntos, *t* y *t'*, y un número racional ϵ tan pequeño como se quiera, hay siempre un número finito de puntos $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n$ de T tales que las distancias

$$tt_1,\ t_1t_2,\ t_2t_3,\ \ldots,\ t_nt'$$

son siempre menores que ϵ.

Con este instrumental a mano, Cantor definio entonces los conjuntos continuos como aquellos que cumplian a la vez las condiciones de ser perfectos y coherentes[21].

2.2.1. La definición de continuidad de Dedekind

En "Stetigkeit und irrationale Zahlen" Dedekind atribuye la continuidad de la linea recta al hecho de que satisface el siguiente principio:

> "Si todos los puntos de la linea recta se dividen en dos clases de tal modo que todo punto de la primera clase se encuentre a la izquierda de todo punto de la segunda clase, entonces existe un punto y sólo uno que produce esta división de todos los puntos en dos clases, este corte de la línea recta en dos porciones."[22]

La característica que el principio recoge como esencia de la continuidad espacial le sugiere a Dedekind que la continuidad de los numeros reales debe descansar en alguna propiedad parecida. Esa propiedad consiste, en opinión de Dedekind, en que cualquier division del conjunto de los números reales da lugar a dos clases, A_1 y A_2, de modo que todos los numeros de A_1 son menores que todos los de A_2 y o bien A_1 tiene último termino o bien A_2 tiene primer termino, siendo la disyuncion exclusiva[23]. Como no todas las divisiones de este tipo estan producidas por numeros racionales, esta estrategia sirve a Dedekind para su propósito de definir los numeros racionales, propósito que consigue sin que Cantor encuentre ninguna objecion a su forma de proceder. Pero nuestro problema ahora es otro: ¿Qué ocurre con la continuidad? ¿Son todos los conjuntos que admiten divisiones de este tipo conjuntos continuos?. La respuesta es negativa. Cantor critica a Dedekind que la característica por este señalada no se aplica sólo a conjuntos continuos sino que abarca a cualquier conjunto perfecto. Esto es, en opinión de Cantor la definición de Dedekind es demasiado amplia, y en ella caben más conjuntos que los en principio deseados[24]

Lo que faltaba a la definición de Dedekind es el concepto de coherencia, que Cantor introdujo por primera vez como rasgo definitorio de la continuidad. Así, de acuerdo con las tesis de Dedekind, si a un conjunto B, continuo en su acepción del término, se le añade otro conjunto C también continuo en su acepción, de modo que todo elemento de B preceda a todo elemento de C, y que B no tenga último elemento pero C tenga un primer elemento, el conjunto resultante de yuxtaponer C tras B, BC, es continuo según Dedekind pero no según Cantor. Supongamos que colocamos el conjunto R de los numeros reales dos veces, una detrás de la otra, la primera vez utilizando los signos habituales y la segunda añadiendo un trazo "'" a cada signo. Simbolicemos el segundo conjunto por R'. El resultado de la yuxtaposición

RR'

es un conjunto que no es coherente, en la terminología de Cantor y que no es continuo desde un punto de vista intuitivo puesto que entre los miembros de R y los R' hay un hiato que no puede traspasarse. Este conjunto es, no obstante, continuo de acuerdo con la definición de Dedekind.

2.2.2. La definición de continuidad de Bolzano

El tratamiento que da Bolzano a la continuidad se encuentra en el §39 de su obra Paradoxien des Unendlichen[25]. La tesis de Bolzano puede formularse de la siguiente manera:

> Un conjunto de puntos es continuo si, y sólo si, todos sus puntos son puntos de acumulación, esto es, si ninguno de sus puntos es un punto aislado[26].

Si todos los puntos de un conjunto P son puntos de acumulación de P, entonces P está incluido en su primera derivada, $P^{(1)}$. En la concepción de Bolzano P es continuo. De acuerdo con la terminología de Cantor P es denso es sí, que es uno de los rasgos que definen la continuidad pero no el único. Ademas de ser denso en sí, un conjunto necesita ser cerrado y coherente, en opinión de Cantor, para ser continuo. Esta es la razón por la que Cantor considera incompleta la aproximacion de Bolzano al concepto de continuo.

Hans Hahn, en sus comentarios a la obra de Bolzano[27] ilustra la incorrección de la posición de este último indicando que dos cubos en el espacio, que no tengan ningún punto en común, tomados conjuntamente constituirían un conjunto de puntos continuo de acuerdo con la definición de Bolzano. El ejemplo de los cubos en el espacio es análogo al que he introducido en el punto anterior referido a R y R'. Ejemplos del mismo tipo pueden emplearse contra todas las aproximaciones al concepto de continuidad que, como las de Bolzano y Dedekind, no contemplen lo que Cantor llama "coherencia".

2.3. Conjuntos infinitos de tamaños distintos

Los conjuntos de puntos pueden analizarse atendiendo no sólo al número de derivadas sino también desde el punto de vista de la la cantidad de puntos que contienen. El 29 de Noviembre de 1873, en una carta a Dedekind[28] propone Cantor la cuestión de si es posible hacer corresponder a cada número natural un número real y sólo uno, y viceversa. Aventura el autor una respuesta negativa aunque se confiesa incapaz de encontrar una prueba estricta para su hipótesis. La prueba deseada la consigue poco despues y la comunica a Dedekind a principios de Diciembre del mismo año[29]. La demostracion es relativamente complicada, pero, con una diferencia de dos dias, encuentra una simplificacion de la misma y se la confia nuevamente a Dedekind en una carta del 9 de Diciembre[30]. Tambien informa Cantor a Weierstrass de su descubrimiento[31] y este último le anima a publicar los resultados obtenidos. Cantor sigue el consejo del matemático berlinés y escribe un artículo titulado "Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", que se publica en 1874. En éste ofrece Cantor la prueba de que no todos los conjunto infinitos son iguales en cuanto al tamaño y, en especial, que el conjunto de los números reales tiene más miembros que el conjunto de los números algebraicos. Se llama número real algebraico a aquél que es raíz de una ecuación de la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

en la que n, a_0, a_1 ... son números enteros distintos de 0.

La demostración de la existencia de dos tamaños, al menos, para conjuntos infinitos se lleva a cabo en dos etapas. En la primera se prueba que el conjunto de los números algebraicos, (ω), tiene el mismo tamaño que el conjunto de los números naturales. Esto significa, en el contexto de la obra de nuestro autor, que puede definirse una relación que haga corresponder a cada número algebraico un número natural y sólo uno y, viceversa, que conecte cada número natural con un número algebraico y sólo uno. De ahí se sigue que (ω) puede ordenarse como la serie de los números naturales

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots$$

En la segunda etapa de la prueba se llega a la conclusión de que en cualquier intervalo de números reales $(\alpha \ldots \beta)$ hay al menos un número que no pertenece a la serie (ω). O lo que es lo mismo, que hay más números en el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$ que en la serie (ω).

De lo dicho se sigue que en un intervalo de números reales hay siempre un número infinito de números no algebraicos. A estos últimos se les llama <u>números transcendentes</u>.

Consideremos la prueba de Cantor:

A) Supongamos que la ecuación

(1) $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

es irreductible. Se llama, entonces, a la suma de las cantidades absolutas

$$N = n-1 + |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n|$$

la <u>altura</u> del número x, siendo x la raíz de la ecuación (1).

Cada número algebraico tiene una altura determinada. Y a cada número entero particular le corresponde un número finito de números algebraicos que tienen a este entero como su altura. De esta manera, el conjunto de los números algebraicos puede ordenarse de acuerdo con la altura de sus miembros, de menor a mayor altura, y los que coincidan en altura de acuerdo con su magnitud, primero los menores, después los mayores, dando lugar a una serie

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots$$

en la que estarán <u>todos</u> los números algebraicos.

Esta serie puede hacerse corresponder con la de los números naturales, de manera que se compruebe que hay tantos de estos como números algebraicos.

B) Para todo conjunto de números reales (r) --algebraicos o no -- que puedan ordenarse de la forma

(2) $$r_1,\ r_2,\ r_3,\ \ldots,\ r_n,\ \ldots$$

y para cualquier intervalo de reales $(\alpha \ldots \beta)$, hay siempre, al menos, un número θ perteneciente al intervalo y que no aparece en la serie (2).

Prueba: En el intervalo $(\alpha \ldots \beta)$, tenemos que $\alpha < \beta$. Tomemos los dos primeros números del intervalo, sin contar los extremos, que pertenezcan a la serie (2) y designémoslos por α' y β', siendo $\alpha' < \beta'$. Estos definen a su vez un intervalo $(\alpha' \ldots \beta')$. Los dos primeros números de éste que pertenezcan a la serie (2) definirán otro intervalo $(\alpha'' \ldots \beta'')$ y así sucesivamente. Estos intervalos están encajados unos en otros y la serie

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \ldots,\ \alpha^{\nu},\ \ldots$$

crecerá continuamente, mientras que

$$\beta,\ \beta',\ \beta'',\ \ldots,\ \beta^{\nu},\ \ldots$$

disminuirá.

Actualmente, llamaríamos a la serie (α^{ν}) monótona creciente y a (β^{ν}) monótona decreciente.

En la situación descrita se pueden presentar dos alternativas:

1) La sucesión de los intervalos es finita. Esto es, llega un momento en que, en el interior de un intervalo $(\alpha^{n} \ldots \beta^{n})$, se en cuentra a lo sumo un miembro de (2) -- si se encontraran dos o más este no sería el último intervalo --. En este caso, cualquiera de los infinitos números reales que pertenecen al intervalo último puede identificarse con θ, a excepción del posible r.

q. e. d.

2) La sucesión de los intervalos es infinita. Como hemos dicho, la serie $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ crece indefinidamente, y define,

pues, un limite al que Cantor simboliza por "α^{ω}". Tambien la serie β, β', β'', ... define un limite, β^{ω}.

De nuevo se plantean dos alternativas:

2.1) $\alpha^{\omega} = \beta^{\omega}$. En este caso, el numero θ se identifica con α^{ω} y β^{ω} y está en el centro del intervalo. Pertenece a este pero no a la serie (2), ya que en un número infinito de intervalos ningún r puede estar en el centro. Supongamos que hubiera un tal r, r_1, entonces habrá siempre un intervalo (α_1 ... β_1) y r_1 será idéntico a α_1 o a β_1.

2.2) $\alpha^{\omega}<\beta^{\omega}$. En este caso, todo número en (α^{ω} ... β^{ω}), incluidos α^{ω} y β^{ω}, satisface las condiciones para ser θ.

q. e. d.

A la afirmación de la existencia de al menos un número en el interior de una sucesión infinita de intervalos de la forma anteriormente expuesta se la conoce actualmente como <u>principio de los intervalos encajados</u> o <u>principio de continuidad de Cantor</u>.

Quiero hacer notar aquí que la comparación de conjuntos infinitos respecto de sus tamaños no tendría sentido, no podría haber sido siquiera imaginada, sin la aceptaciónprevia de que los elementos de tales conjuntos pueden encontrarse disponibles todos a la vez. Cuando Cantor dice que en una serie determinada están <u>todos</u> los algebraicos y que θ no es ninguno de ellos esta suponiendo que los algebraicos forman un conjunto infinito actual, con todos sus elementos dados, y que puede determinarse que θ no es identico a ninguno de ellos. Esto significa que la prueba que acabamos de presentar no depende sólo de consideraciones matematicas sino tambien ontologicas y filosóficas en general. El punto de vista ontológico es lo que distingue a Cantor de sus predecesores -- y de muchos de sus contemporáneos y sucesores --.

2.3.1. La existencia de numeros transcendentes

Cantor prueba la existencia de infinitos numeros transcendentes en cualquier intervalo de numeros reales en "Ueber eine Eigenschaft..." (1874). El resultado de esta prueba no puede calificarse de intrinsecamente interesante, desde un punto de vista matematico, puesto que se conocia antes de 1874, gracias al trabajo de Liouville de 1851. Liouville llegó a la conclusión de que todo número x de la forma:

$$x = \frac{d_1}{10!} + \frac{d_2}{10^2!} + \frac{d_3}{10^3!} + \ldots + \frac{d_k}{10^k!} + \frac{d_{k+1}}{10^{k+1}!} + \ldots$$

donde los d_i son números cualesquiera, era transcendente. A los números con esta estructura se los conoce como "números de Liouville"[32].

Lo que tiene un interes extraordinario es la forma misma de la prueba de Cantor. Hay una diferencia profunda en los fundamentos filosoficos que subyacen a las pruebas de Cantor y Liouville. Mientras que Liouville presenta la efectiva construccion de una estructura que puede dar lugar a un número infinito de numeros particulares, en el trabajo de Cantor no aparece indicación alguna de cómo podrian ser éstos. Cantor afirma que hay un número infinito de numeros transcendentes, pero no ejemplifica su afirmación. Lo que ha cambiado de un autor a otro es algo mas que un metodo de prueba, es la concepcion misma de la existencia de los objetos matematicos. Para Liouville y la mayoria de los matematicos anteriores a Cantor -- Dedekind, contemporaneo de Cantor, es una excepcion -- un numero existe si poseemos un procedimiento para obtenerlo.

Cantor parte, sin embargo, de la existencia de todos los numeros reales, y el hecho de que haya infinitos transcendentes se sigue del hecho de que hay tantos algebraicos como naturales y de que en un intervalo de números reales todos ellos están disponibles de una vez.

Intimamente conectado con lo anterior, destaca en "Ueber eine Eigenschaft..." la distincion cuantitativa entre infinitos. La mayoria de los matematicos, filosofos y teologos anteriores a nuestro autor -- con la excepción de Bolzano, del que nos ocuparemos en breve -- consideraban que el infinito no admite grados, o mejor, que el infinito constituye el grado maximo de magnitud tanto si existe de hecho, en el caso de que se acepte el infinito actual, como si se permite unicamente como idea regulativa.

En opinión de Cantor, la precaria situación en que se encontraba la teoría del infinito hasta su propio trabajo era debida a una confusión generalizada que consistia en la mezcla indiferenciada de las propiedades del infinito cualitativo con el cuantitativo. El primero, reconocido por la tradicion cristiana occidental como atributo divino y quizá tambien como (uno de los rasgos de la) esencia de la divinidad, no era susceptible de aumentar o disminuir. En efecto, no habia grados en el. El segundo, aceptado en su forma potencial en teoria de limites y funciones, no tiene nada que ver con el primero. El infinito matematico potencial es un infinito matemático auxiliar que, segun Cantor, presupone la existencia de un infinito matemático actual que proporcione el marco sobre el que pueda variar el infinito potencial. El infinito matematico actual si admite distintos tamaños, como Cantor demostró por primera vez en 1874.

2.3.2 <u>El origen del concepto de potencia</u>

Para exponer la distinción cantoriana entre magnitudes infinitas he estado utilizando el término "tamaño". Pero ¿qué se entiende por "tamaño"?. ¿Cómo podemos determinar si un conjunto infinito es mayor que otro?. Algunas respuestas "obvias" han resultado ser falsas, puesto que, como Cantor y Dedekind demostraron, no hay mas numeros racionales que naturales. O, haciendo uso de la llamada <u>paradoja de Galileo</u>, sabemos que no hay mas numeros enteros que numeros pares. El criterio que hoy es habitual descansa en la idea de la correspondencia uno-a-uno o biunivoca; esto es, dos conjuntos tienen el mismo "tamaño" si existe una relación biunivoca que conecte los elementos del uno con los del otro en parejas sin que sobren elementos de ninguno. Este criterio fue utilizado por Cantor 1874, aunque no lo expuso explicitamente, y se conocia antes de esa fecha, como se deduce de la paradoja de Galileo. Sin embargo, la familiaridad con la que actualmente lo tratamos no debe confundirnos, puesto que matematicos de la talla de Bolzano, por ejemplo, fueron incapaces de dar con él.

A los distintos tamaños que se derivan del criterio de la correspondencia uno-a-uno, o <u>equivalencia</u>, los bautizó Cantor con el nombre de <u>potencias</u> (<u>Machtigkeiten</u>) y de lo dicho se sigue que, en esta fecha, Cantor aceptaba al menos dos potencias: la del conjunto de los numeros naturales y todos los equivalentes a éste y la del conjunto de los números reales y todos sus equivalentes.

El concepto de potencia aparece con este nombre por primera vez en BK (1878). No es un término acuñado por el autor sino que lo toma de Steiner[33] quien lo utiliza en un sentido más restringido.

Los conjuntos pueden organizarse en clases -- Cantor utiliza a veces en este contexto el término alemán Klassen -- de acuerdo con su potencia, de manera que a una clase determinada pertenezcan todos los conjuntos equivalentes entre sí, y los conjuntos de potencias distintas pertenezcan a clases distintas. En ULP I (1879) afirma el autor que cada miembro de una clase puede considerarse como representante de la clase a la que pertenece[34].

La primera concepción cantoriana de las potencias, de 1878, se reduce a lo siguiente:

> Dos conjuntos tiene la misma potencia si puede establecerse entre ellos una relación que empareje cada elemento de uno con un elemento del otro, y sólo uno, de manera que todo elemento esté exactamente en un par.

Aproximaciones similares a este concepto ocurren en otros artículos posteriores, como Grundlagen (1883) o la recopilación de 1887-8, Mitteilungen.

Una característica de las potencias así definidas es que se asocian con todo conjunto, independientemente de que sea finito o no. La única exigencia que se les pone a estos es que estén bien definidos. Lo que entiende Cantor por un conjunto bien definido es que pueda determinarse siempre si un objeto dado pertenece o no al conjunto en cuestión, habiéndose aceptado previamente la validez del Principio del Tercio Excluso. La forma en que Cantor lo expresa es interesante de por sí, ya que suscita ciertos problemas de interpretación. Por esta razón transcribo a continuación el texto completo:

> "Llamo bien definida a una multiplicidad (una colección, un conjunto) de elementos, que pertenecen a alguna esfera conceptual, si sobre la base de su definición y siguiendo el principio lógico del tercero excluido, debe considerarse como internamente determinado tanto si algún objeto perteneciente a la misma esfera conceptual pertenece o no como elemento a la multiplicidad pensada, como también si dos objetos pertenecientes al conjunto son idénticos uno a otro o no, a pesar de las diferencias formales en la manera de darse."[35]

Las expresiones que suscitan la duda son dos. Una es "esfera conceptual" (Begriffssphäre) y otra "internamente determinado" (intern bestimmt).

La mención de que los elementos de un conjunto deban pertenecer a una determinada esfera conceptual puede traernos resonancias de una versión primitiva de algún tipo de axioma de separación: un conjunto está compuesto por elementos que pertenecen a algún campo ya acotado, pudiendo ser ese campo, a su vez, un conjunto. M. Hallett juega con esa idea[36] aunque termina por rechazarla sin dar una explicación clara de la razón de su rechazo. Parece desprenderse de su argumentación que la aceptación de un axioma de separación del que dependiera la formación de conjuntos en la obra de Cantor haría muy difícil sostener que el ámbito de los números, o la esfera conceptual de todo lo matematizable, no puede ser un conjunto. Supongamos que Cantor aceptara que los conjuntos se definen a partir de otros más abarcantes por medio de algún tipo de axioma de separación, entonces lo que Hallett parece indicar es que si los conjuntos de los que habla Cantor son partes de la esfera conceptual de todos los números no hay razón para negar que tal esfera conceptual sea a su vez un conjunto del que los demás se separan. Pero como Hallett sostiene que el ámbito de las matemáticas se identifica con el Absoluto y éste no puede ser un conjunto, concluye que no es coherente en la obra de Cantor suponer un axioma de separación.

En mi opinión, como explicaré más adelante, no hay razones suficientes en los textos de Cantor como para considerar que el Absoluto juega algún papel en la concepción cantoriana de los conjuntos.

Desde mi punto de vista, la referencia que hace Cantor a esferas conceptuales significa que los elementos de un conjunto deben ser individuos con unas características conocidas previamente. Los individuos a los que se aplica el principio del tercio exciuso no pueden ser objetos acerca de cuya constitución sólo tengamos una idea aproximada y nebulosa. Lo que Cantor quiere decir cuando afirma que los elementos de una multiplicidad pertenecen a alguna esfera conceptual es que estos pertenecen al universo de alguna teoría, por expresarlo de una forma actual. Dicho de otro modo, los elementos acerca de los cuales tiene sentido preguntarse si pertenecen o no a un conjunto deben de formar parte del dominio de objetos del que se ocupa alguna teoría. Cantor parece indicar en el texto que todos los elementos de un conjunto pertenecen a la misma esfera conceptual, con lo que hay una cierta restricción a lo que entiende por multiplicidad bien definida. No obstante, esta restricción no es lo suficientemente fuerte como para impedir que la primitiva concepción de los conjuntos de Cantor pertenezca al estadio ingenuo de la teoría.

En cuanto a la segunda expresión, "internamente determinado", es un indicio de la posición filosófica con la que Cantor se enfrenta a los orígenes de la teoría de conjuntos. Esta posición es inexcusable si se quiere trabajar con conjuntos infinitos. Al señalar que la pertenencia de un individuo a un conjunto debe estar determinada internamente se está subrayando más bien la negación de la posibilidad contraria, esto es, que no tiene por qué estar disponible una dterminación por nuestra parte. La filosofía subyacente a esta afirmación se alinea del lado del realismo: el que un objeto, un elemento, pertenezca o no a un conjunto es independiente de nuestro conocimiento de la situación, de la misma manera que dos elementos, _a_ y _b_, de un conjunto serán idénticos o no, sin tener en cuenta como se han dado -- o definido -- y si somos conscientes o no de su identidad o diferencia. En este sentido, se desprende de lo último que las definiciones no crean objetos y que los objetos conceptuales, como los números, son algo distinto de meros signos -- entendiendo por signos tanto los ejemplares como los tipo --. Cantor sostendría aquí, si mi interpretación es correcta, que los signos son distintos de lo que designan. Estaría así libre de la enfermedad que Frege bautizó como "morbus mathematicorum recens"[37], cuyo síntoma principal se encuentra en esta confusión.

2.3.3. Bolzano y los tamaños del infinito

El único filósofo del siglo XIX al que Cantor consideraba digno de mención en relación al tema del infinito es B. Bolzano. Este despejó el camino en el que posteriormente se incardinaría la obra de Cantor. Bolzano tiene el mérito de ser el primer filósosfo y matemático de la edad moderna que no se dejó engañar por la paradoja de Galileo. A la propiedad que tienen los conjuntos infinitos de ser equivalentes a algunos de sus subconjuntos propios se la conoce actualmente como reflexividad. Esta es la característica que pone de manifiesto la citada paradoja, y tal paradoja fue utilizada abundantemente para demostrar por reducción al absurdo la inexistencia del infinito actual, ya que contradecía el principio euclídeo de que el todo es mayor que la parte.

Bolzano fue el primero en aceptar que la reflexividad no es contradictoria. La paradoja de Galileo no es más que eso: una paradoja; pero no una contradicción. Las mal llamadas "paradojas de la teoría de conjuntos", como la del ordinal máximo o la del máximo cardinal, son auténticas contradicciones. Pero son de un tipo distinto a la paradoja de Galileo. La reflexividad es una propiedad característica de los conjuntos infinitos. Después de Bolzano, otros lo mantuvieron también. Pero esta aceptación no le llevó a renunciar al principio de que el todo es mayor que la parte, cosa que sí hicieron Cantor y Dedekind. Bolzano no consideró que de la paradoja citada se dedujera la falsedad del principio, sino la falsedad de la tesis de que todo lo que vale para conjuntos finitos debe valer también para conjuntos infinitos. De la equivalencia de dos conjuntos finitos se sigue su identidad en cuanto al tamaño. Cuando se trata de conjuntos infinitos no estamos autorizados a extraer la misma conclusión, desde la perspectiva de Bolzano.

Recojamos un ejemplo que se encuentra en <u>Paradoxien des Unendlichen</u>[38]:

```
                 b   a
------- S ----|---|-------- R --------
```

La línea que parte del punto **a** y sigue en el sentido R es una línea infinita. La línea que parte de <u>b</u> en el sentido R sin límite también es infinita. Y aunque los puntos de aRO y bRO pueden correlacionarse exhaustivamente, Bolzano afirma que que la línea que parte de <u>b</u> hacia R es <u>mayor</u> que la que parte de <u>a</u> en el mismo sentido puesto que el segmento <u>ba</u> pertenece a la primera y no a la segunda. También la línea que se extiende sin límites en los dos sentidos, R y S, es infinita y mayor que aRO y bRO.

En la obra citada se utiliza el ejemplo anterior para ilustrar la creencia de su autor en la existencia de diversos tamaños de infinito. Y lo que se desprende de su exposición es que Bolzano no acepta que el emparajamiento uno-a-uno entre los miembros de conjuntos infinitos sea condición suficiente de la identidad de sus potencias, aunque ese sea el caso en el ámbito de la finitud. Entre conjuntos infinitos, pues, el tamaño relativo no se mide de la misma manera que entre los que no lo son[39].

2.4. Continuos de más de una dimensión

Una vez que Cantor hubo establecido, irrefutablemente a su juicio, que hay más números reales que números algebraicos -- y teniendo en cuenta la trasposición que hacía de los primeros a los puntos de una recta -- no es extraño que se planteara qué ocurriría con las potencias si en vez de líneas se tomasen en consideración superficies y volúmenes. Los puntos de una línea constituyen un continuo unidimensional; los de una superficie, un continuo bidimensional; un volumen, uno tridimensional; y no hay dificultad teórica en tratar continuos de cualquier número de dimensiones.

La pregunta que se hizo Cantor, y que comunicó a Dedekind el 20 de Junio de 1877[40], puede reformularse así: ¿Es posible relacionar biunívocamente los puntos de un plano, de un volumen o, en general, de figuras de un número finito de dimensiones, con los de una línea?. Esto es: ¿Es posible probar que todos los continua, independientemente del número -- finito o numerable -- de sus dimensiones, tienen la misma potencia?.

El núcleo de tal prueba consistiría en proporcionar un método que asignase a cada conjunto finito -- o numerable --de números reales un número real, y sólo uno, y viceversa; es decir, un método que emparejase unívocamente cada real con un conjunto determinado de reales. Cada conjunto de números reales designaría un punto de un espacio pluridimensional: si se trata de superficies, los conjuntos serían pares de números; si de volúmenes, tríadas; si de figuras de cuatro dimensiones, tétradas, etc. Y cada real único con el que habría que conectar cada uno de los conjuntos indicaría un punto específico de la línea recta.

En un primer momento puede parecer que la respuesta a esta pregunta debería de ser negativa. Cantor confiesa que lo creyó así durante años, pero en la carta citada ofrece ya a Dedekind una prueba por inducción de la existencia de tal correspondencia. La prueba es la siguiente:

Se puede dar una representación única de cada número real x, $0 < x < 1$, por medio de una fracción decimal infinita

$$x = \alpha_1 . \frac{1}{10} + \alpha_2 . \frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_\nu . \frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

en la que los α_ν son numeros enteros entre 0 y 9, ambos incluidos. El que tal representacion pueda darse significa que todo x puede determinarse mediante una sucesión infinita de la forma indicada y tambien que cada sucesion infinita define un número real x.

Un conjunto finito de números reales x_μ, de la forma

$$x_1 = \alpha_{1,1}.\frac{1}{10} + \alpha_{1,2}.\frac{1}{10^2} + \ldots + \alpha_{1,\nu}.\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

$$x_2 = \alpha_{2,1}.\frac{1}{10} + \alpha_{2,2}.\frac{1}{10^2} + \ldots +\alpha_{2,\nu}.\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

.

$$x_\rho = \alpha_{\rho,1}.\frac{1}{10} +\alpha_{\rho,2}.\frac{1}{10^2} + \ldots +\alpha_{\rho,\nu}.\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

pueden determinar absolutamente un nuevo número real $x_{\rho+1}$, de la forma

$$x_{\rho+1} = \beta_1.\frac{1}{10} +\beta_2.\frac{1}{10^2} + \ldots + \beta_\nu.\frac{1}{10^\nu} + \ldots$$

mediante las siguientes identidades

$$\beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}$$

$$\beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n}$$

$$\beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}$$

$$\beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n}$$

en las que cada entero v aparece de una manera, y solo una,

$v = (n-1)\rho+\sigma$,donde $0<\sigma\leq\rho$.

De esta manera, afirma Cantor, todo conjunto de ρ series infinitas define un número real x y viceversa.

Dedekind contestó a la comunicación señalando lo que le parecía ser una pequeña incorreccion de la prueba: si cada número real se representa mediante una serie infinita de decimales, en algunos casos esos decimales serán cero a partir de uno determinado. Así algunas magnitudes tendrán dos formas de representación; por ejemplo 3/10 será 0'300... y 0'299... . Dedekind propone entonces que no se permitan las representaciones en las que aparezcan solo ceros desde una posición en adelante, con la excepción de la representación del cero mismo que sería 0'000...[41].

Cantor aceptó la rectificación, que no afectaba esencialmente, en su opinión, a la conclusión, sino a la prueba misma y se dispuso a corregirla. Sin embargo, la objección de Dedekind no era tan fácil de superar como el autor había supuesto en un principio, pues se vió obligado a demostrar una serie de afirmaciones previas a la prueba que la despojaban de su sencillez y elegancia primitivas.

El desarrollo de la nueva prueba aparece en la correspondencia entre los dos matemáticos[42] y en BM (1878). En líneas generales la demostración se resuelve de la siguiente manera[43]:

(I) En primer lugar hay que probar que existe una correspondencia biunívoca entre todos los números del intervalo (0...1) y los números del mismo intervalo con exclusión del cero.

Mediante una aplicación reiterada de esta afirmación, cambiando sucesivamente el cero por otros números, se prueba que

(II) Existe una correspondencia biunívoca entre todos los valores del intervalo y los valores de ese mismo intervalo del que se han excluido un número infinito de números irracionales (ϵ_ν), estos últimos forman una serie tal que

$$\lim_{\nu\to\infty} (\epsilon_\nu) = 1$$

Mediante el teorema anterior se prueba que

(III) El conjunto de los números irracionales contenidos en el intervalo (0...1) puede relacionarse biunívocamente con todos los números de tal intervalo.

De aquí se sigue que hay en (0...1) tantos irracionales como reales. Luego las afirmaciones que se hagan acerca del tamaño del dominio de los números irracionales en un intervalo, pueden considerarse ciertas igualmente del conjunto de todos los reales en el intervalo.

El objetivo de toda esta argumentación es probar la afirmación

(IV) Los puntos de una extensión continua de ρ dimensiones pueden determinarse mediante los números del intervalo (0...1), de manera que a cada número x del intervalo le corresponde un punto y sólo uno de la extensión y viceversa.

Esto quiere decir que pueden emparejarse exhaustivamente cada conjunto finito de números de (0...1) con un número de (0...1) sin que queden ningún conjunto ni ningún número sin pareja. Cantor esboza una prueba de que esto se cumple para los irracionales, es decir, que todo conjunto finito de racionales define un irracional y todo irracional está determinado por un conjunto finito de irracionales. De aquí y de (III) se sigue (IV).

Respecto de los irracionales las líneas maestras de la argumentación son las siguientes:

Cada número irracional e, 0<e<1, puede determinarse completamente a través de una cadena infinita de fracciones de la forma

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + 1 \atop \ddots \cfrac{1}{\alpha_\nu + \ddots}}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \ldots)$$

donde los α_ν son números positivos racionales. A cada irracional e le corresponde una serie infinita α_ν y viceversa.

Si $e_1, e_2, \ldots, e_\rho$, es un conjunto finito de variables independientes unas de otras cada una de las cuales puede tomar cualquier valor del intervalo $(0\ldots1)$, entonces cada conjunto

$$e_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,\nu}, \ldots)$$

$$e_2 = (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{2,\nu}, \ldots)$$

$$e_\rho = (\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \ldots, \alpha_{\rho,\nu}, \ldots)$$

determina un irracional, el (ρ-ésimo):

$$\delta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu, \ldots)$$

en el que los primero ρ digitos corresponden a la sucesión ordenada de los primeros digitos de cada uno de los e_i, $(1\leq i\leq\rho)$, los ρ siguientes a la sucesión ordenada de los segundos digitos de los e_i y así sucesivamente. Esto es:

$$\delta = \alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \ldots, \alpha_{\rho,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{\rho,2}, \alpha_{1,3}, \ldots, \alpha_{\rho,3} \ldots$$

Así, todo irracional δ, $0<\delta<1$, determina un conjunto de irracionales y al contrario. Como, según lo dicho en (III), el conjunto de los irracionales en $(0\ldots1)$ equivale a todo el intervalo, se ha probado que cualquier punto de un espacio de ρ dimensiones puede emparajarse de la manera precisada con un número real, que era lo que se buscaba.

Cantor afirma también que este resultado puede extenderse al caso de que le número de dimensiones sea infinito, siempre y cuando sea equivalente al conjunto de los números naturales[44].

La conclusión que el autor considera establecida tras esta serie de consideraciones matemáticas es que, en contra de lo que se ha creido hasta su época, el número de coordenadas necesarias para determinar la situación de un punto en una extensión no tiene por que identificarse con el número de dimensiones de la misma. Es decir, que toda extensión puede representarse mediante un número arbitrario de coordenadas, independientemente de las dimensiones que tenga.

El resultado al que llega Cantor es muy importante, en primer lugar, porque se opone a una creencia generalmente establecida y que sustenta procedimientos de prueba utilizados por los geómetras de su epoca. En segundo lugar, por lo que tiene de antiintuitivo el hecho de que haya tantos puntos en la recta como en cualquier extensión de finitas o numerables dimensiones. Lo curioso de este resultado sorprendió tanto al mismo Cantor que le escribió a Dedekind la frase, luego tan conocida: "je le vois, mais je ne le crois pas"[45]. En tercer lugar, lo que mas nos interesa, el resultado es fundamental porque demuestra que en el contexto de los conjuntos de puntos no existen potencias infinitas mayores que las ya conocidas. Esto es, que cualquier conjunto de puntos o es finito o tiene la potencia de los números reales, o quizá alguna potencia intermedia, si la hay. Pero el aumento en el número de dimensiones no implica, como se ha visto, un aumento en la potencia de los conjuntos.

3. El procedimiento de la diagonal en la obra de Cantor

Al resultado de que hay conjunto infinitos de diversos tamaños, o lo que es lo mismo, que hay conjuntos infinitos no equivalentes al de los números naturales, llegó Cantor, como sabemos, en 1874. En 1890 desarrolla una nueva estrategia, mas simple y elegante, para obtener la misma conclusión[46]. Expondré a continuación la nueva estrategia, el método diagonal, dividiéndolo en tres etapas[47]:

Primera etapa: Supongamos que **m** y **w** son dos signos distintos y que *i* y *j* son variables que pueden tomar como valores cualquier número natural. Consideremos ahora el conjunto M de todas las sucesiones E_j que pueden obtenerse mediante un número infinito de repeticiones de los signos **m** y **w**:

$$E_j = (x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots).$$

Cada uno de los x_i es o bien igual a **m** o bien igual a **w** y cada elemento E_j está constituido por infinitos x_i.

Formemos con los E_j una serie equivalente a la de los números naturales y que pueda ser ordenada como estos últimos

$$E_1, E_2, \ldots , E_n, \ldots$$

Cada E_j es una combinacion determinada de caracteres **m** o **w**:

$$E_1 = (m, m, m, \ldots, m, \ldots.)$$

$$E_2 = (m, w, m, w, \ldots, m, w, \ldots)$$

$$E_3 = (m, m, w, w, \ldots, m, m, w, w, \ldots)$$

(donde e, n y s son son números naturales cualesquiera). Si se coloca en una lista vertical primero a E_1, debajo a E_2 y así sucesivamente, se obtiene una serie vertical infinita de series horizontales infinitas

$$E_1 = (x_{1,1},\ x_{1,2}, \ldots,\ x_{1,n},\ \ldots)$$

$$E_2 = (x_{2,1},\ x_{2,2}, \ldots,\ x_{2,n}, \ldots)$$

$$E_1 = (x_{1,1},\ x_{1,2}, \ldots,\ x_{1,n}, \ldots)$$

<u>Segunda etapa</u>: Se trata ahora de formar un nuevo elemento del conjunto M de los E_j a partir de la lista anteriormente obtenida, de la siguiente manera: se toma el primer elemento de E_1, $x_{1,1}$, el segundo de E_2, $x_{2,2}$ el tercero de E_3, $x_{3,3}$, etc. Es decir formamos el elemento

$$E_x = (x_{1,1}, x_{2,2}, \ldots,\ x_{n,n}, \ldots)$$

y a continuación se define un procedimiento para transformar E_x en un elemento que no haya aparecido en la serie infinita de los E_j. Cantor llama al nuevo elemento E_0. Este tambien consiste en un número infinito de signos

$$E_0 = (y_1,\ y_2,\ \ldots, y_n, \ldots)$$

y cada y_i está determinado por el elemento x_{ii} de E_x. Dado que E_0 es elemento de M, los y_i serán o bien <u>m</u> o bien <u>w</u>. El que sean iguales a uno u otro carácter depende del caracter con el que se identifique x_{ii}. Así y_i será <u>w</u> siempre que x_{ii} sea <u>m</u> y viceversa, será <u>m</u> siempre que x_{ii} sea <u>w</u>.

<u>Tercera etapa</u>: Esta etapa consiste en la demostración de que E_0 no es ninguno de los E_j originales, aunque tiene la misma estructura quw ellos, por lo que pertenece al conjunto M.

E_0 se diferencia de E_1 en el primer elemento, puesto que si x_{11} es w, entonces y_1 es m y al contrario. Se diferencia de

E_2 en el segundo elemento, por la misma razón, de E_3 en el tercer elemento, de E_n en el n-ésimo, etc.. Y aunque incluyésemos a E_0 en la lista de los E_j, de nuevo podríamos comenzar el proceso y encontraríamos un elemento E_{01} que no aparecería en la nueva lista. La definición de E_0 no es, pues, fruto de un olvido en la formación de los E_j sino una característica esencial de la serie[48].

La prueba anterior es muy general. Su relación con el tema de los conjuntos de números se ve inmediatamente si en vez de utilizar los dos caracteres **m** y **w**, usamos los números 0 y 1. En este caso, cada E_i puede considerarse como la representación de un número real en lenguaje binario. Lo que vuelve a demostrar Cantor en este artículo es que, si ordenamos los números reales en una serie con la estructura de los naturales, el ámbito de los primeros no se agota. Es decir, que no puede darse una serie tal como la indicada en la que tengan su lugar <u>todos</u> los números reales[49].

Este resultado suele considerarse como la prueba de lo posteriormente se ha llamado <u>el teorema de Cantor</u>, que puede expresarse así

$$\alpha < 2^{\alpha} \qquad (*)$$

tanto si α es finito como si es infinito.

Cantor no probó estrictamente este teorema, aunque en una carta a Dedekind de 1899[50] afirma que sus resultados de 1890 pueden extenderse fácilmente hasta alcanzar el enunciado general (*). Si utilizamos la notación cantoriana de los alef -- que son números cardinales transfinitos -- lo que se desprende de todo lo dicho es que el conjunto de los subconjuntos del conjunto de los números naturales tiene más elementos que este último:

(1) $$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

y la versión ampliada, el teorema de Cantor, puede parafrasearse diciendo que cualquier conjunto, sea finito o infinto, tiene más subconjuntos que elementos. Esto es, si P(A) es el conjunto de todos los subconjuntos de A, no puede existir una relacion biunívoca que empareje los elementos de de A y de P(A). A P(A) se le llama habitualmente el conjunto de las partes de A o el conjunto potencia de A[5].

4. Definiciones matematicas

El primer concepto conjuntista que Cantor define es el de potencia. Como veremos inmediatamente, las definiciones cantorianas de potencia son del tipo llamado "definición por abstracción". Esre tipo no era muy frecuente en su epoca, aunque tampoco completamente inusual, como lo prueba el caso de la definición del número de Frege, pero desde luego no era el habitual, ni siquiera era aceptado sin reservas por la comunidad matematica.

Las definiciones matematicas utilizadas entre los especialistas a finales del siglo pasado y principios del presentes pueden clasificarse en tres tipos: las definiciones nominales, las definiciones por postulados y las definiciones por abstracción. Algunos matematicos consideraban adecuados los tres tipos, como es el caso de Burali-Forti[6]. Otros autores menos generosos no aceptaron mas que las definiciones nominales, entre estos destacan G. Peano[53] y B. Russell[54].

Se entiende por definición nominal una identidad en uno de cuyos lados aparece el término que se pretende definir y en el otro aparecen términos ya conocidos. La característica más relevante de las definiciones nominales es que los conceptos definidos mediante ellas pueden ser sustituidos en todo contexto por sus definiciones respectivas. Las definiciones nominales son, pues, meras abreviaturas[55].

Una definición por postulados consiste en un conjunto de proposiciones que especifican las relaciones que un grupo de objetos mantienen entre sí. En este tipo de definición los términos que hay que definir no aparecen aislados en uno de los lados de una identidad, i.e., no existe una expresión determinada que sea la definición de cada uno de los términos que requieren ser definidos. Estos se encuentran formando parte de algunos enunciados y lo único que puede decirse acerca de ellos es que tienen las propiedades y relaciones que se indican en los enunciados en los que se encuentran. De esta manera las definiciones por postulados no definen objetos individuales sino grupos de objetos.

Las definiciones por abstracción se utilizan habitualmente para caracterizar funciones. Si f es una función cualquiera, quedará definida por abstracción cuando se especifique a qué dominio A de objetos se aplica y cuando quede establecido bajo que condiciones puede afirmarse que , para dos objetos, a y b, pertenecientes al dominio A,

$$f(a)=f(b)$$

Un ejemplo muy conocido de definición por abstracción es la que proporciona Frege de la función dirección de[56].

4.1 Las definiciones cantorianas de potencia

La concepción de las potencias no permanece inalterable a lo largo de la obra de Cantor, sino que sufre una evolución que la hace atravesar, en mi opinión, al menos tres etapas. Aparece por primera vez en 1878, y en esta fecha aún no está claro si Cantor cree que existen potencias como algo separado de los conjuntos. En las primeras aproximaciones del autor al concepto de potencia no se considera la referencia a éste más que otra forma de hablar acerca de la equivalencia entre conjuntos. Esto es, si entre dos conjuntos M y N puede definirse una relación que empareje cada elemento de M con uno y sólo uno de N, sin que sobren o falten elementos entonces Cantor dirá "que estos conjuntos tienen la misma potencia, o también que son equivalentes"[57]. Decir que M tiene una potencia distinta a la de N significa que una relación como la mencionada no puede establecerse entre M y N. Pero hasta 1884 aproximadamente no hará Cantor ninguna alusión a qué tipos de entidades son las potencias.

A partir de 1884, y a raíz de una recensión que de la obra de Frege Grudlagen der Arithmetik publica Cantor, empieza a considerar a las potencias conceptos. Como ejemplo de esta etapa considérese la siguiente definición:

"Llamo 'potencia de una multiplicidad o conjunto de elementos' (donde los últimos pueden ser iguales o desiguales, simples o compuestos) al concepto general bajo el que caen todos los conjuntos que son equivalentes al conjunto dado y sólo ellos."[58]

En el texto citado ya aparece explícitamente la afirmación de que las potencias son conceptos generales que tienen por extensión en cada caso a los conjuntos equivalentes entre sí. En Principien (1885) señala Cantor que todos los conjuntos equivalentes pertenecen a una y la misma clase, a la que él llama Mächtigkeitsclasse, que es la extensión (Umfang) de un concepto general (Allgemeinbegriff) que es la potencia que define la clase. En esta obra considera a las potencias también como conceptos de género (Gattungsbegriff) y categorías (Kategorie)[59]. De lo dicho se sigue que las potencias no se identifican con los conjuntos de los que son potencias, ni con la clase de equivalencia de tales conjuntos, sino que son otro tipo de entidades --conceptos, categorías o, también podríamos decir, universales-- de las que las clases de equivalencia de los conjuntos que comparten la misma potencia son las extensiones. No hay duda de que en este período la concepción cantoriana de las potencias está muy influida por la definición de número de Frege.

Alrededor de 1887 y claramente ya a partir de 1895 se observa en Cantor un deslizamiento hacia un reduccionismo conjuntista que le hace mantener abiertamente que las entidades básicas sobre las que se construyen las matemáticas finitas o transfinitas son conjuntos. En esta época considera a las potencias conjuntos abstraídos de otros conjuntos. Como veremos, Cantor identifica las potencias con los números cardinales, por lo que estos últimos también son conjuntos, como también lo son los números ordinales. En este sentido, y refiriéndose a números, dice Cantor en 1887:

> "cada uno de ellos es una auténtica unidad (μονας), porque en ellos se conecta unitariamente una multiplicidad o conjunto de unidades."[60]

Esto es, los números son conjuntos de unidades que forman a su vez una unidad. Dentro de este periodo la definición de potencia más característica es la siguiente:

> "Llamamos 'potencia' o 'número cardinal' de M al concepto general, que resulta del conjunto M cuando, con la ayuda de nuestra activa capacidad de pensamiento, se hace abstracción de la constitución de sus distintos elementos m y del orden en el que se dan."[61]

Aunque se hable aquí de "concepto general" esta expresión no debe confundirnos ya que Cantor continúa:

> "Puesto que a partir de cada elemento unitario m, si se prescinde de su constitución, resulta un 'uno', así el número cardinal (...) mismo es un conjunto determinado de puros unos reunidos."[62]

Por lo tanto, en esta tercera etapa las potencias son conjuntos a los que se llega al abstraer de cada conjunto tanto el orden como los rasgos característicos de los elementos que a él pertenecen. La potencia de un conjunto A es así un conjunto equivalente a A, ya que con cada elemento de A se puede hacer corresponder un elemento de la potencia de A, a saber, el uno que queda al pasar por alto sus peculiaridades.

La diferencia entre las etapas segunda y tercera consiste en que en la ultima Cantor señala explícitamente que las potencias son conjuntos, cosa que no hace en la anterior. No obstante, en ambas etapas llama a las potencias "conceptos generales" por lo que no puede saberse si en la segunda etapa creía también que las potencias eran conjuntos o no.

Podría pensarse que entre la definición de Rezension (1884) y la de Beiträge (1895) hay una diferencia esencial que se formularía de la siguiente manera: mientras que en Rezension una potencia nunca es equivalente al conjunto del que se abstrae, que en este caso es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes entre sí, en Beiträge ocurre lo contrario puesto que las potencias se abstraen de cada conjunto particular y no de la clase de equivalencia. Esto es, si a es la potencia del conjunto A, de acuerdo con la definicion de Rezension

(1) Es falso que a sea equivalente a A

y de acuerdo con la definicion de Beitrage

(2) Es cierto que a es equivalente a A.

La contradiccion entre (1) y (2) muestra que las definiciones son distintas.

En mi opinion, sin embargo, las definiciones que Cantor ofrece no son diferentes en el sentido que acabo de explicar. La razon de mi discrepancia con la tesis anterior estriba en que en las definiciones anteriores a 1887, en las que Cantor define las potencias en relacion con el conjunto de todos los conjuntos equivalentes a uno dado, no se dice nunca que las potencias se abstraigan de la clase de equivalencia, sino que los conjuntos que forman esta caen bajo una determinada potencia. Cuando Cantor habla de abstraer lo hace siempre en relación a un conjunto determinado del que queremos obtener su potencia, y no menciona en estos casos el conjunto de conjuntos equivalentes. Desde mi punto de vista, la diferencia entre ambos tipos de definición, que coinciden con las etapas segunda y tercera que he señalado anteriormente, es más bien de perspectiva o de enfasis: Las potencias son, para Cantor, conceptos generales que a veces él considera conjuntos y otras no explícitamente. Las potencias mantienen con los conjuntos de los que son potencias una relación pluriunívoca, i. e., a cada conjunto le corresponde una potencia y sólo una pero una misma potencia es compartida por muchos -- infinitos -- conjuntos. Dicho de otro modo, de cada conjunto se abstrae una potencia y sólo una, pero hay muchos conjuntos que caen bajo una misma potencia. En las definiciones posteriores a 1887 se suele subrayar la primera parte de la relacion, mientras que en las anteriores, posiblemente debido a la influencia de los escritos de Frege, se acentúa la segunda parte.

Las definiciones de potencia de las tres etapas que he distinguido pertenecen al tipo que se ha denominado definicion por abstracción. La función que se define es potencia de. Su dominio de aplicación está determinado puesto que se sabe que se aplica a conjuntos y, para cualesquiera dos elementos, a y b, están precisadas las condiciones de la identidad

potencia de a = potencia de b

a saber, las dos potencias serán iguales si, y sólo si, los dos conjuntos a y b son equivalentes.

4.2. Críticas a las definiciones de potencia

Las críticas más frecuentes a las definiciones cantorianas anteriormente tratadas -- críticas de las que Cantor no fué consciente o al menos no influyeron en absoluto en la evolución de su postura -- pueden clasificarse en tres grupos: en el primero se encuentran las que rechazan las definiciones por abstracción como definiciones adecuadas desde un punto de vista matemático. En el segundo están las críticas que subrayan la contradicción latente en el concepto de la clase de todos los conjuntos equivalentes a uno dado y en el tercer grupo se recogen las críticas dirigidas al procedimiento de la abstracción como acto psicológico. No hay que confundir las críticas del primer tipo con las del tercero aunque en ambos casos se utilice el término "abstracción": Las críticas del primer tipo se dirigen contra una forma de definición, aceptada por unos y rechazada por otros, que no tiene nada de subjetivo o arbitrario. No obstante, algunos autores piensan que las definiciones por abstracción no son las más adecuadas para las matemáticas. Las críticas del tercer tipo son completamente distintas, ponen de manifiesto la ambiguedad del proceso por el cual Cantor define cada potencia a partir de conjuntos concretos mediante el mecanismo de borrar mentalmente las diferencias entre los elementos de los conjuntos y conseguir así conjuntos de "unos" en cuya elaboración toma parte activa el sujeto que lleva a cabo el proceso.

A) Entre los autores que realizan las críticas que he clasificado en el primer grupo destacan Russell y Poincaré:

Russell[54] considera que la característica fundamental de toda definición matemática consiste en garantizar que el término que se define sea el único que mantiene con un determinado conjunto de nociones las relaciones precisas que se reseñan en la definición. Esta condición sólo la satisfacen las definiciones nominales. Las definiciones por postulados definen sistemas de objetos y las definiciones por abstracción no aseguran la unicidad del término definido. Esta últimas caracterizan una entidad como aquello que tienen en común los objetos de una clase cuando es posible determinar entre cada dos de estos objetos una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva. La relación de equivalencia que conforma la totalidad de los conjuntos equivalentes a uno dado y, por tanto, equivalentes entre sí, es de este tipo. Y lo que tienen en común todos estos conjuntos es su potencia, como afirma el propio Cantor:

"lo que es común a todos los conjuntos perteneciente a una y la misma clase constituye el concepto de potencia o valencia."[65]

Lo que subraya Russell es que no puede decirse sin mas que eso común sea una propiedad única; es más, afirma explicitamente que es facil mostrar que los miembros de una clase de equivalencia comparten un numero infinito de propiedades[66]. Por ello no es posible hablar de la potencia de una clase como aquello que posee en común con el resto de las clases equivalentes porque no hay un objeto único con el que identificar "lo común". Russell considera este rasgo de las definiciones por abstracción como un defecto gravísimo hasta el punto de las hace indignas del calificativo de definición matemática.

Poincaré tiene un punto de vista similar al de Russell, aunque no llega a rechazar de plano las definiciones por abstracción[67]. El matemático francés destaca la superioridad de las definiciones nominales sobre las definiciones por abstracción porque estas últimas presuponen, en primer lugar, la existencia de los objetos que pretenden definir o, dicho de otro modo, que no son constructivas y, en segundo lugar y en esto coincide con Russell, porque no se define un objeto sino un conjunto de ellos. En palabras de J. de Lorenzo:

> "Hay que observar, sin embargo, que este tipo de designación, de definición por abstracción, no caracteriza a un individuo único sino a todo un genero

al cual ese individuo pertenece. Se agrega, por tanto, a la nota de no ser creadora, el caracter de incompleta."[58]

B) El segundo tipo de crítica dirigido contra las definiciones cantorianas de potencia se centra en el análisis del concepto de la clase de todos los conjuntos equivalentes entre si. Como sabemos, Cantor reune en clases (Machtigkeitsclassen) a todos los conjuntos que comparten la misma potencia y lo que señala este tipo de critica es que postular la existencia de tales clases lleva a una contradiccion. Para deducir la contradicción se requiere la aceptación de una estrategia que permita formar conjuntos cada vez mayores a partir de cualquier conjunto dado. Cantor dispone de una estrategia así: el teorema del conjunto potencia que lleva su nombre, que afirma que todo conjunto tiene mas subconjuntos que miembros.

Veamos en qué consiste la contradicción[59]:

Supongamos que M' es el conjunto de todos los conjuntos equivalentes a M. Si M' existe y tiene un determinado numero de elementos, por ejemplo n, tambien existirá el conjunto potencia, P(M'), cuyo número de elementos será 2^n. A P(M') perteneceran, como sabemos, todos los subconjuntos de M'. Es decir,

$$x \in P(M') \text{ si, y sólo si, } x \subset M'$$

A partir de cada elemento P_i de P(M') formamos un conjunto de pares (P_i, m_j), siendo m_j cada uno de los elementos de M. Cada par, en cada conjunto de pares, tendra un primer miembro fijo, P_i, correspondiente al elemento de P(M') de que se trate, y un segundo miembro, que será cada uno de los elementos de M, uno en cada par. Como hay 2^n P_i, se formarán 2^n conjuntos de pares, cada uno con n elementos. El conjunto P de todos los conjuntos de pares será equivalente, por tanto, a $P(M')$. Luego P será mayor que M'. Pero como cada elemento de P tiene n miembros, P está incluido en M', con lo que debería ser mayor o igual que él. Así, se deduce una contradicción.

Aunque esta crítica a las definiciones cantorianas no hace referencia explícita a que estas sean por abstracción o no, lo cierto es que implícitamente puede considerarse también dirigida conta este tipo de definiciones, puesto que no todos los tipos de definición conocidos podrían dar lugar a una inconsistencia como la anterior. Si definimos una noción nominalmente, es decir, la introducimos como abreviatura para otras previamente comocidas, la noción definida no aportará contradicción alguna que no estuviera ya presente antes de su introducción. Así, si lo que se requiere de una definición es que proporcione un método para construir la noción definida a partir de otras, la definición llevará incorporada una prueba de existencia que eliminará la posibilidad de la emergencia de contradicciones. En este sentido, y como indicaba Poincare, las definiciones por abstracción no son constructivas, y tampoco lo son las definiciones por postulados, por lo que una disputa acerca de qué significa definir una noción matemática puede reducirse a menudo a una polémica sobre la existencia de los objetos abstractos. Las definiciones constructivas producen nuevos objetos, el resto caracteriza objetos que se asumen previamente como existentes.

C) El tercer tipo de crítica subraya el carácter subjetivo y ambiguo del procedimiento de la abstracción como método de definición. Entre los autores que dirigieron esta crítica contra las definiciones cantorianas de potencia destaca Frege. El lógico alemán critica [70] la idea cantoriana de que los números son colecciones de "unos" y el procedimiento de la abstracción como método para definir tanto los números ordinales como cardinales. Al procedimiento de la abstracción le encuentra el inconveniente de que cuando se prescinde de las propiedades que diferencian a los objetos individuales no se consigue por ello el concepto de número. En opinión de Frege, al pasar por alto las peculiaridades de las cosas se llega al universal, por utilizar una terminología escolástica, esto es, al concepto general bajo el que caen esas cosas. Un ejemplo que Frege utiliza[71] para ilustrar su tesis es el siguiente: supongamos que tenemos un gato blanco y un gato negro y abstraemos de ellos el color, que es una de las peculiaridades que distinguen al uno del otro y el resto de las características que los diferencian. De este modo, en opinión de Frege, no se llega al número dos sino, en el mejor de los casos, al concepto general "gato" del cual los dos gatos anteriores son instancias o individuos que caen bajo él. En cualquier caso, los gatos sobre los que hemos abstraído el concepto general seguirán siendo el uno blanco y el otro negro y el procedimiento de la abstracción no podrá hacer que cosas diferentes se vuelvan indistinguibles.

La crítica anterior de Frege a la abstracción no va dirigida expresamente contra Cantor, aunque a éste le afecta directamente. En otros lugares, sin embargo, sí se encuentran críticas de Frege en las que cita explícitamente a Cantor. Considérese el siguiente ejemplo:

"Reunamos, pues, a algunos señores para que consideren un lápiz y pidámosles que, con toda energía, abstraigan la constitución y el orden de sus elementos. Después de haberles dejado tiempo suficiente para esta difícil tarea, preguntemos al primero: ¿A qué concepto general ha llega usted?, como no-matemático que es, responderá:"al puro ser". El segundo dirá mas bien:"a la pura nada", el tercero -- presumiblemente discípulo del Sr. Cantor : "el número cardinal uno". Un cuarto se queda quizá con la sensación de tristeza de que todo ha desaparecido, a un quinto -- posiblemente un discípulo del Sr. Cantor -- le ha susurrado una voz interior que el grafito y la madera componentes del lápiz son 'elementos constitutivos' y se forma en él el concepto general llamado número cardinal dos."[72]

Lo que Frege quiere indicar con el irónico texto anterior es que mediante el procedimiento de la abstracción no puede definirse el concepto de número puesto que sólo llegaremos a él en el caso de que lo conozcamos previamente. Dicho de otro modo, para llegar al concepto de número dos mediante la abstracción hay que saber, antes de aplicar este metodo, qué es el número dos. Hay, ademas, otro serio inconveniente y es que no hay garantías de que si se realiza la abstracción varias veces sobre una misma multiplicidad se vaya a llegar siempre al mismo resultado. Es esencial, para esto último, que se tenga una idea clara de qué aspectos de la multiplicidad han de considerarse como "elementos constitutivos" que darán lugar a "unos" diferentes, cosa que Cantor no explica en ninguna parte. Veamos otro texto en el que Frege se expresa en el mismo sentido, dirigido esta vez contra Jevons pero que afecta igualmente a Cantor:

> "Lo que Jevons dice no es en absoluto adecuado, en especial para el 0 y el 1. ¿Qué es lo que en realidad hay que abstraer para pasar de la Luna al número 1?. Por medio de la abstracción se obtienen ciertamente los conceptos: satélite de la tierra, satélite de un planeta, cuerpo celeste sin luz propia, cuerpo, objeto; pero en esta serie no damos con el 1; pues no es un concepto bajo el que pudiera caer la Luna. En el caso del 0, ni siquiera se obtiene un objeto del que poder partir para la abstracción. ¡Que no se objete que el 0 y el 1 no son números en el mismo sentido que 2 y 3!. El número responde a la pregunta ¿cuántos?, y si se pregunta, por ejemplo: ¿cuántas lunas tiene este planeta?, uno puede estar preparado igualmente para la respuesta 0 ó 1, como para 2 ó 3, sin que por ello el sentido de la pregunta se vuelva distinto. Cierto que el número 0 tiene algo de particular, y lo mismo el 1, pero esto vale en lo fundamental para cualquier número entero; sólo que en los números mayores estos se hace cada vez menos patente. Es completamente arbitrario establecer aquí una diferencia específica. Lo que no sea

adecuado para el 0 y el 1 no puede ser esencial para el concepto de numero."[73]

Frege está reprochando a Cantor que con su uso de la abstracción, un procedimiento no objetivo, este introduce en los fundamentos de la aritmética nuevamente el psicologismo que Frege había conseguido desterrar.

El procedimiento cantoriano de la abstracción da lugar a otro tema controvertido que tampoco escapa a la crítica de Frege: el estatuto de los "unos" que, en opinión de Cantor, aparecen tras abstraer a partir de los elementos de un conjunto la constitución de los mismos. Frege no cree, como ya hemos visto, que mediante un metodo conceptual se obtengan elementos iguales, como los unos, a partir de objetos distintos, pero acepta metodológicamente que esto pudiera ocurrir[75]. Si lo que queda tras la abstracción de un conjunto es una colección de unidades, la pregunta decisiva es: ¿son éstas iguales o distintas entra sí?. Supongamos que son iguales. Dice Frege:

> "Por procedimientos meramente conceptuales no se consigue hacer iguales cosas distintas; pero si se consiguiese, ya no se tendrían cosas, sino sólo una cosa[76]."

Aplicado a los "unos" de Cantor, esto significa que si los "unos" son iguales no hay "unos" sino sólo un "uno". De este modo no podría haber números distintos en la teoria de Cantor en la cual estos son conjuntos de "unos", puesto que todos los números se identificarían con la clase unitaria del único "uno" existente.

Supongamos que los "unos" son distintos unos de otros. En opinión de Frege, ésta sería la posición de Descartes, Schröder o Jevons para los cuales el número es la medida de la diversidad[77]. Si las unidades son distintas, ¿en qué sentido lo son?, ¿en qué se diferencian?. Necesitamos que sean iguales para poder llamarlas a todas unidades y necesitamos que sean distintas para discriminar unos números de otros. Esta dificultad es insoluble. Trasladando lo dicho a la teoría de Cantor, la situación no mejora en absoluto: si hemos abstraído la constitución de los elementos de un conjunto y el orden en que aparecen no queda ningún rasgo que permita diferenciar los "unos" entre sí.

En conclusión, la abstracción es inaceptable como método lógico de definición del concepto de número, dando lugar a problemas que, como el estatuto de los "unos", no pueden resolverse. En opinión de Frege, las dificultades aludidas descansan en que se definen los números sobre los objetos. No habría ambigüedades si se aplicaran los números exclusivamente a los conceptos. Los números afirman algo de los conceptos, no de los objetos y lo que afirman de aquellos es cuantos objetos constituyen sus extensiones. Los números cardinales particulares son extensiones de conceptos. Y para definir estos no juega la abstracción ningún papel.

CAPITULO II:

LA PRIMERA TEORIA DE CONJUNTOS CANTORIANA: GRUNDLAGEN Y BEITRAGE

0. Introducción

El propósito del capítulo II es ofrecer una reconstrucción de la teoría de conjuntos transfinitos que Cantor desarrolló en sus años de mayor productividad científica, que se extienden entre 1883 y 1897. A la teoría así reconstruida la llamaré la primera teoría de conjuntos cantoriana Se encuentra fundamentalmente en dos obras, Grundlagen (1883) y Beiträge (1895-97) y en menor medida en Mitteilungen (1887-8). Además, se pretende en este capítulo investigar las implicaciones filosóficas de la teoría de conjuntos de Cantor y los supuestos no demostrados y a veces no explícitos que subyacen a las afirmaciones de Cantor acerca de conjuntos y números transfinitos.

La teoría de conjuntos cantoriana descansa en dos actitudes que Cantor sustenta, a las que llamaré actualismo y realismo. El actualismo consiste en la aceptación de colecciones infinitas en acto y el realismo, a grandes rasgos, es la creencia de que los objetos abstractos, i.e., no espacio-temporales, como los números, existen con independencia de que sean conocidos o no y que tienen características y mantienen relaciones que no podemos modificar a voluntad. La actitud realista no es un rasgo original de Cantor, ha sido sostenida por muchos filósofos y matemáticos antes. Entre sus contemporáneos destaca Frege.

No puede decirse lo mismo del actualismo. Desde Aristóteles, el único tipo de infinitud lícito tanto entre los filósofos como entre los matemáticos ha sido el infinito potencial: de acuerdo con el filósofo griego, algunas colecciones, como la de los números naturales, pueden aumentarse indefinidamente, pero no puede darse de una vez una colección infinita. El punto 1.1 del presente trabajo está dedicado a la teoría aristotélica del infinito. En él se recogen y explicitan los argumentos de Aristóteles contra el infinito actual. A todos estos argumentos contesta Cantor en varias de sus obras, Grundlagen, Mitteilungen, y über die verschidenen Standpunkte, mostrando que los argumentos tradicionales contra el infinito en acto o bien son contradictorios porque dependen de una noción ambigua de la infinitud o bien son circulares porque parten ya subrepticiamente de la imposibilidad del infinito actualmente dado. Separándose del punto de vista aristotélico, Cantor acepta ambos infinitos, el potencial y el actual, así com el infinito divino o Absoluto al que distingue cuidadosamente del infinito actual. Los tipos de infinito que Cantor utiliza se estudian en el punto 1.2.

Bolzano es el único filósofo moderno que defendió la licitud del infinito en acto con anterioridad a Cantor. Las tesis de Bolzano se discuten en 2.1. Tras la publicación de algunos artículos de Cantor sobre este tópico otros filósofos se convencieron de las ventajas del actualismo y algunos, como Couturat, contribuyeron con sus escritos a la defensa de la concepción cantoriana del infinito. Los argumentos que Couturat utiliza en su obra De l'infini mathematique a favor del actualismo, tomados en su mayoría de Cantor, se tratan en 2.2.

La reconstrucción sistemática de la primera teoría de conjuntos cantoriana se lleva a cabo en el §3. Cantor se ocupa de esta teoría por primera vez en Grundlagen, aunque en esta obra se mezclan desordenadamente cuestiones filosóficas y técnicas. Una exposición de la teórica desde un punto de vista puramente técnico no aparece hasta Beiträge. Pueden encontrarse asimismo definiciones y dicusiones de algunos aspectos de lo que he llamado la primera teoría de conjuntos en Mitteilungen y en Principien. Además de las actitudes filosóficas ya reseñadas, el tualismo y el realismo, la primera teoría depende de la asunción de gunos principios, a los que cabría calificar de propiamente onjuntistas, que en las teorías de conjuntos del presente siglo han ado lugar a los axiomas. A este tipo de asunciones no justificadas, en as que descansa la primera teoría, se dedica el §4. En concreto, el unto 4.1 trata de la suposición cantoriana de que todo conjunto puede rdenarse bien. Cantor dedicó mucho esfuerzo durante gran parte de su ida a demostrar dicha afirmación, cosa que no consiguió nunca y que no por ello rechazó. La afirmación de la buena ordenación para cualquier conjunto se conoce actualmente como _teorema de Zermelo_ y hoy sabemos que es equivalente a uno de los axiomas más controvertidos de la historia de la teoría de conjuntos, el _Axioma de Elección_. En el punto 4.2 se discute la suposición de la existencia de conjuntos infinitos, que ha dado lugar posteriormente al _Axioma de Infinitud_, que a diferencia de la de la buena ordenación Cantor no intentó demostrar ni la consideró en ningún momento como problemática. En el punto 4.3 se discute la llamada _Hipótesis de Cantor_ que consiste en la afirmación de que el número cardinal del continuo sigue inmediatamente, en orden de magnitud al número cardinal del conjunto de los números naturales. A pesar del empeño de Cantor, la prueba de la Hipótesis también se le resistió. Actualmente gracias a los trabajos de Gödel y Cohen sabemos que no puede probarse a partir de los axiomas habituales de la teoría de conjuntos.

Otros temas tratados en el capítulo segundo son los siguientes: en el §8 se investiga la cuestión de qué tipo de objetos son los números para Cantor. Una de las consecuencias del trabajo de nuestro autor es que el concepto de número aumenta su dominio, si hasta Cantor sólo podía hablarse de números en relación a colecciones finitas a partir de él no hay diferencias entre conjuntos finitos e infinitos a la hora de asignarles un numero cardinal, de este modo tambien la expresion "conjunto numerable", que se aplicaba normalmente a conjuntos del mismo tamaño que el de los números naturales, adquiere una nueva significación que hace de cualquier conjunto infinito bien definido un conjunto numerable en sentido amplio, i.e., numerable mediante los nuevos numeros de Cantor. A esta nueva concepción de la numerabilidad se dedica el §6. Podria parecer que el aparato conceptual que permite tratar numeros y conjuntos infinitamente grandes, servira tambien para solucionar de una vez por todas los problemas relacionados con las magnitudes infinitamente pequeñas. Ciertamente esto es así, aunque la solución de Cantor es negativa: mediante la teoria de numeros transfinitos el autor prueba que tales magnitudes no existen. La demostración de Cantor se presenta en el §5. El §7 ofrece una visión general de la primera teoria subrayando los aspectos que la convierten en una teoria ingenua de conjuntos, contra ciertas intrepretaciones que pretenden ver en ella una concepcion iterativa o, alternativamente, una teoria de la limitación del tamaño. Por último el §9 trata de la concepcion de la existencia matemática que Cantor mantuvo y cómo evolucionó esta a lo largo de su vida.

1. Infinito actual y potencial

La distincion entre infinito en acto e infinito en potencia -- o mejor dicho, la distinción general entre potencia y acto -- la debemos a Aristóteles. El pensamiento de Aristóteles sobre este punto, como sobre otros muchos, ha determinado el desarrollo posterior de la teoria del infinito. La doctrina cantoriana se situa en abierta oposicion a la postura aristotelica, por lo que considero pertinente exponer las ideas que sobre el infinito se desprenden de las obras de Aristóteles.

1.1 Concepción aristotélica del infinito

Fueron los griegos los primeros que utilizaron el infinito en matemáticas, que entró en la ciencia griega de la mano de los procesos ilimitados de convergencia[78]. Tanto los pitagóricos como Platón aceptaron la existencia del infinito, en el número, los primeros, y como idea independiente, el segundo. Aristóteles se opuso en este punto a ambos y sus opiniones sobre el infinito se encuentran en dos de sus obras: De Caelo[79] y Fisica[80]. En una y otra llega a la misma conclusión: no existe el infinito actual, lo que significa, teniendo en cuenta que Aristóteles sólo trata el tema en relacion a los cuerpos fisicos, que no existe una extensión infinita ni en el tiempo ni en el espacio. Una cuestion previa que hay que recordar, es que para los griegos el infinito es lo ilimitado, el *apeiron*, aquello que no tiene fronteras, por lo que la existencia del infinito supone de hecho la no existencia de nada mas fuera de él. Si hubiera algo que existiera además del infinito, supondría un límite para este último que dejaría de ser ilimitado, lo que constituye una contradicción.

Para Aristóteles el infinito no es una sustancia. Una característica de las sustancias es que se identifican con su esencia[81], esto es, si el infinito fuera una sustancia su esencia sería la infinitud. El razonamiento del filósofo griego para refutar que el infinito es una sustancia es el siguiente: una sustancia es o divisible o indivisible; si lo primero, cada una de las partes en las que se divide ha de ser así mismo infinita, ya que estamos hablando del infinito como sustancia, y cada parte en la que una sustancia se descompone tiene que participar de la esencia de esta, que en el caso presente es la infinitud. De este modo, un infinito sustancial divisible tiene que dividirse en partes todas las cuales son igualmente infinitas[82]. Tal posibilidad es absurda en el contexto aristotélico puesto que, como he dicho, el infinito en el que Aristóteles piensa, de existir, no puede mas que identificarse con el Universo, por lo que no tiene sentido hablar de varios infinitos coexistiendo. Supongamos ahora que el infinito es indivisible; entonces es un individuo. Pero un individuo tiene que ser algo determinado, delimitado y el infinito griego es justamente lo contrario, lo que no tiene límites. Luego, es una contradicción en los terminos hablar de un individuo infinito, desde el punto de vista de Aristóteles[83]. De este modo, se rechaza la posibilidad de que el infinito sea una sustancia, con lo que no queda mas opción que considerarlo un accidente, como algo que se da en un sujeto, en un sustrato. De nuevo nos encontramos aquí con dos posibilidades: que el sujeto posea el accidente en acto o que lo posea en potencia, dicho de otro modo, que el sujeto en cuestión sea infinito actualmente, o que simplemente pueda aumentar en algún sentido más allá de todo límite. Veamos qué entiende Aristóteles por infinito:

> "Hay que definir en primer lugar, por tanto, de cuántas maneras se dice de algo que es infinito. En un sentido se dice de lo que no puede recorrerse porque por su naturaleza no es posible atravesar: en este sentido es infinita la voz. En otro sentido se dice de lo que pudiendo ser recorrido carece de fin, o bien de lo que difícilmente puede recorrerse, o bien de lo que por naturaleza tendría que poder recorrerse pero no puede recorrerse o no tiene fin."[84]

De acuerdo con la caracterización anterior, podríamos decir que hay dos maneras de llamar a algo "infinito"; la primera es impropia y se aplica a aquellas cosas que no son finitas, en el sentido de que no podemos decir ni que sean finitas ni infinitas. La segunda es propia, y se dice de las magnitudes y duraciones. Si algo no es ni una cosa ni otra -- no es extensión ni en el tiempo ni en el espacio -- sólo podrá ser infinito en la primera acepción.

Las magnitudes y duraciones pueden ser infinitas, como hemos visto, pero dado que en este contexto se distingue entre el ser en acto y ser en potencia, hay que averiguar ahora en qué sentido, segun Aritoteles, puede una extensión ser infinita. De acuerdo con el filosofo griego los elementos materiales de los que está compuesto todo son sólo cinco: éter, agua, aire, tierra y fuego. Si existe alguna extensión infinita tiene que estar hecha de estos elementos, bien de uno sólo, bien de más de uno. Supongamos que es de un sólo elemento, entonces éste deberá darse en cantidad infinita y no podrá cambiar, ya que el cambio se da entre elementos opuestos. Tampoco puede permanecer en reposo, puesto que cesaría todo cambio y esto equivaldría a la muerte del Universo, considerando que el único infinito posible es el Todo, como he indicado anteriormente. Supongamos, pues, que el infinito sea un compuesto de varios elementos. Al ser estos sólo cinco, alguno debe darse en una cantidad infinita. En este caso, el elemento infinito impediría que se dieran los demás, que no podrian existir sin limitar al primero, con lo que de nuevo estaríamos en el caso de una extensión infinita de un sólo elemento, que ya hemos rechazado. De este modo refuta Aristóteles la posibilidad de que exista un infinito físico actual.

A pesar de lo dicho, no se puede negar que el infinito existe de alguna manera. Aristóteles sostiene, por ejemplo, que las especies biologicas -- el hombre y el resto de los animales -- son infinitas, puesto que no ha existido un ejemplar primero y no habrá uno último, aunque en cada momento el número de seres vivos sea finito. También el tiempo es infinito, sin comienzo ni término, aunque los instantes una vez pasados desaparezcan. Y la serie numérica, que no tiene un número máximo. En el ambito de la geometría encontramos que una línea puede dividirse indefinidamente. Luego, no se puede rechazar absolutamente el infinito. Existe no en acto sino en potencia. Lo que en este caso se entiende por existir en potencia es que no hay límite a la aparición de nuevos elementos: nuevos hombres, instantes o segmentos de recta. Sin embargo, esta opción cuenta con ciertos problemas en la filosofía de Aristóteles[85], puesto que en este contexto la existencia de algo en potencia indica la existencia de algo en acto en el mismo sentido. Esto es, si una cosa es infinita en potencia, tiene que existir así mismo una cosa infinita en acto. De alguna manera, la potencia presupone el acto. Luego, tendríamos que concluir que hay infinitos actuales dado que Aristóteles acepta infinitos potenciales[86].

Por las razones ya señaladas, Aristóteles no asume la existencia de infinitos actuales, pero sí potenciales. La solución a esta aparente inconsistencia reside en la ambigüedad de la expresión "ser en potencia". De igual modo que hay varios sentidos de ser, hay, para el filósofo griego, varios sentidos de ser en potencia[87]. No es lo mismo decir de alguien que es sabio en potencia, que decir de algo que es infinito en potencia. En el primer caso se está diciendo que la persona en cuestión puede ser sabio alguna vez, pero en el segundo caso no se asume que la extensión a la que nos referimos pueda en algún momento llegar a ser infinita actualmente -- por lo menos no se asume en la filosofía de Aristóteles --. El tipo de potencia que es característico del infinito es el tipo peculiar que se aplica a la sucesión de los días y al movimiento[88]. Tanto la duración como el movimiento y el infinito se caracterizan por un continuo estar en potencia, por no terminar nunca el proceso que en otros casos desembocaría en el acto. Por eso podríamos decir -- utilizando una terminología heterodoxa en Aristóteles -- que la esencia del infinito es ser potencia.

El infinito potencial puede darse, en principio, por adición y por división. Un infinito potencial por división se encuentra en las magnitudes continuas que, como la línea, pueden fragmentarse tanto como se quiera sin que se llegue jamás a encontrar partes simples. Estas partes no existen; en caso contrario constituirían un infinito actual. Los segmentos en la línea se crean en el proceso de la división y siempre permanecen en número finito. El infinito potencial por adición, sin embargo, es rechazado por Aristóteles. En el caso de que existiera un infinito que aumentara por adición de elementos nuevos tendría que existir también algún conjunto actualmente infinito que proporcionara dichos elementos[68]. Por esta razón, la sucesión de los números, que es potencialmente infinita para Aristóteles, no puede darse más que por división, esto es, los números naturales sólo pueden aparecer en el proceso ilimitado de partición de un segmento o a la manera de las progresiones geométricas de razón decreciente: 1, 1/2, 1/4, 1/8, ...

He indicado al comienzo de esta sección que Aristóteles sólo se ocupa del infinito físico. No obstante, de pasada afirma así mismo que no puede existir el número infinito, puesto que tanto el número como lo que es numerable necesariamente debe poder ser contado, debe poder recorrerse en un lapso finito de tiempo[69]. De este modo, Aristóteles considera que la finitud es un rasgo esencial del número y de las magnitudes, y tanto esta idea como el rechazo del infinito actual físico perdurarán en la filosofía occidental como mínimo hasta el siglo XIX.

1.2 Tipos de infinito en la obra de Cantor

La primera vez que se encuentra en la obra de Cantor la consideración de la existencia de distintos tipos de infinito es en Grundlagen. En este ensayo distingue el autor entre un infinito impropio (Uneigentlichunendliches), que se dice de las magnitudes que pueden sobrepasar cualquier valor dado, o disminuir tanto como se quiera, aunque permanezcan siempre con un tamaño finito. En este sentido, una serie que crezca indefinidamente sin alcanzar nunca un determinado valor constituirá un ejemplo de infinito impropio. A este le llama Cantor también finito variable (veränderliches Endliches). El infinito impropio, al que en otros lugares se refiere como infinito potencial o sincategoremático es un concepto relacional o auxiliar al que no corresponde ninguna idea concreta.

Hay otro tipo de infinito al que en nada le concierne este rasgo de indeterminación. Es el infinito propio (Eigentlich-unendliches). Este se parece mas en cierto sentido a las cantidades finitas que al infinito variable, puesto que puede considerarse una magnitud acabada, cerrada, completamente definida.

En una carta a G. Enestrom[illegible], de 1885, considera Cantor tres tipos diferentes dentro del infinito propio o infinito actual: El primer tipo es el referido a Dios, se conoce como Absoluto, y se encuentra, en palabras del autor "in Deo extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante"[91]. Este infinito actual es el único aceptado en la filosofía occidental al menos hasta Bolzano.

El segundo tipo, que se da "in concreto seu in natura naturata"[92], y al que Cantor le llama Transfinito, se refiere a los objetos del mundo externo, esto es, a los objetos físicos que se dan en cantidad infinita.

Por último, el tercer tipo, que es un infinito actual abstracto, es decir que no es espacio-temporal, y que puede concebirse como un infinito matemático que toma la forma de los números transfinitos.

El primer tipo de infinito actual es ampliamente aceptado por matemáticos, filósofos y teólogos; por esta razón no profundiza Cantor en el estudio de sus características y defensa. Acerca de él afirma que no es susceptible de tratamiento matemático y subraya la justeza de la expresión escolástica "omnis determinatio est negatio". Pero no discute sus rasgos, sino que reserva todas sus fuerzas para los dos restantes. En relación a estos últimos Cantor reconoce cuatro posibles posiciones en lo que se refiere a su aceptación o rechazo[93]:

A) En primer lugar puede negarse la existencia de cualquier infinito actual, tanto en el mundo exterior como desde un punto de vista abstracto, es decir, tanto en el mundo físico como en el seno de las matemáticas. Como prototipo de este punto de vista señala Cantor a Cauchy.

B) En segundo lugar, es posible aceptar un infinito concreto -- i.e. espacio-temporal -- mientras que se rechaza como concepto abstracto. Ejemplos de este punto de vista son, para Cantor, Descartes, Spinoza, Leibniz y Locke.

C) En tercer lugar, puede afirmarse la existencia del infinito actual matematico, y negar que exista un infinito en la naturaleza, como hacen, en opinión de Cantor, ciertos neoescolasticos.

D) Por último, es posible defender el infinito actual en todas sus formas. Desde el punto de vista de nuestro autor, esta es la única posición acertada, y Cantor se considera el primer filósofo y el único que la mantiene en su época, aunque esta convencido de que no será el último. A este respecto es significativa la cita evangélica que encabeza su obra cumbre de teoría de conjuntos, Beiträge, y que dice lo siguiente:

> "Veniet tempus, quo ista quae nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris aevi diligentia."[94]

La utilización de un concepto vago y poco elaborado de infinito ha sido, en opinión del autor, el resposable de tantos malentendidos sobre la infinitud. Cantor está convencido de que muchas de las paradojas y, en especial, las antinomias kantianas de la razón pura se derivan de la confusión tradicional sobre el infinito. Los dos equivocos mas extendidos en el tema del infinito son, para Cantor, los siguientes: el primero, el derivado de no distinguir el infinito potencial del actual, lo que implica considerar a este ultimo como algo imperfecto e indeterminado. Este es el caso, en mi opinión, del concepto de infinitud manejado por los griegos, que obligaba a Aristoteles a sostener que el infinito es esencialmente algo inconcluso, abierto e incompatible con la existencia de cualquier limitación exterior a él. El segundo equívoco lleva a no distinguir entre el Absoluto y el infinito matemático. De él depende la idea de que en este último no pueden darse tamaños diferenciados. En los argumentos tradicionales contra la existencia del infinito en acto -- que veremos en el parágrafo siguiente -- parecen fundirse todos los sentidos de infinito, de modo que el monstruo resultante tiene, cosa nada extraña, rasgos contradictorios que justifican el horror que ha producido durante siglos.

En mi opinión, que trataré de justificar en lo que sigue, el esquema de las relaciones entre lo finito y lo infinito en la obra de Cantor es el siguiente:

Existe, por un lado un infinto Absoluto que, conceptualmente, nada tiene que ver ni con lo finito ni con lo infinito matemático, a no ser en sentido negativo. Los rasgos del Absoluto son radicalmente inconmensurables con el resto de lo que existe. Este no puede ser tratado ni filosófica ni matemáticamente, no puede ser comprendido ni abarcado intelectualmente puesto que está fuera del alcance del entendimiento humano. Es tan ajeno a cualquier determinación matemática que no puede ser ni siquiera considerado como límite superior al que tiende el infinito matemático.

Los números trasfinitos, prototipo del infinito abstracto , no son en sí mismos tan diferentes del resto de los conceptos utilizados en las matemáticas, como son los números enteros finitos. Lo finito y lo infinito comparten la determinación y la definición, en este sentido ambos son muy similares entre sí mientras que el Absoluto se encuentra en una esfera completamente opuesta.

En cuanto al infinito creado que se encuentra en el mundo físico, comparte con el infinito abstracto la misma relación que lo finito creado con lo finito matemático. Son conceptualmente independientes, pero la existencia concreta de infinito y finito proporciona objetividad a los conceptos abstractos y éstos, a su vez, ofrecen inteligibilidad a la naturaleza.

2. La defensa del infinito actual: Bolzano y Couturat

Cantor califica en Grundlagen[95] a Bolzano como el mejor defensor que el infinito actual ha tenido en el siglo XIX. El elogio es absolutamente merecido, no sólo en lo que concierne a la aceptación de conjuntos infinitos en acto, sino también en cuanto que se atrevió a determinar tamaños distintos de conjuntos infinitos y algunas relaciones entre ellos. Bolzano había definido los números por un proceso inductivo -- la adición de la unidad -- y no pudo por tanto extenderlos al ámbito de lo infinito. Como tampoco disponía de la distinción entre cardinal y ordinal no llegó muy lejos en el tratamiento matemático del infinito, pero fue el primer matemático que no retrocedió ante la idea de comparar infinitos distintos utilizando operaciones concebidas para números finitos.

Tras la publicación de las obras más importantes de Cantor, Grundlagen y Beitrage, algunos autores asumieron la tarea de defender las ideas cantorianas contra los argumentos tradicionalmente utilizados en la filosofía contra el infinito actual. Entre ellos destaca Couturat que dedicó su monumental obra , De l'infinie mathematique, a esta tarea. De las tesis de ambos, Bolzano y Couturat, acerca del infinito me ocuparé a continuación.

2.1 Las magnitudes infinitas de Bolzano

En el § 29 de su obra Paradoxien des Unendlichen afirma Bolzano que junto a los conjuntos infinitos existen magnitudes infinitas (unendliche Grosse) que pueden distinguirse unas de otras en multiples aspectos, y que pueden aplicarse las operaciones aritméticas a estas magnitudes, aunque esto pueda parecer contradictorio. Habría contradicción, en opinión de Bolzano, si se supusiera que el resultado de tales operaciones es un número, como ocurre cuando se calcula con números finitos. En la esfera de lo infinito las operaciones aritméticas tienen otro sentido para Bolzano: no determinan un número como resultado de la operación que se ha llevado a cabo, sino que tienen por objeto mostrar la relación existente entre los magnitudes infinitas sobre las que se realiza. Bolzano lo ilustra de la siguiente manera[96]: Supongamos que Nº sea el resultado de sumar una serie de unidades del tamaño de la serie de los numeros finitos:

$$1^{o} + 2^{o} + 3^{o} + \ldots + n^{o} + (n+1)^{o} + \ldots \text{ in inf.} = N^{o}$$

donde 1º, 2º, 3º no son los numeros propiamente dichos sino unidades identicas unas a otras. Sea ahora N^{n} el resultado de sumar esas unidades pero a partir del puesto n-esimo:

$$(n+1)^{o} + (n+2)^{o} + \ldots + \ldots \text{in inf.} = N^{n}$$

si comparamos los tamaños de N^{o} y N^{n} encontraremos, segun Bolzano, que N^{n} es menor que N^{o} en n unidades, puesto que

$$1^{o} + 2^{o} + \ldots + n^{o} = n = N^{o} - N^{n}.$$

Desde el punto de vista de la teoria de numeros transfinitos cantoriana no habría diferencia ni ordinal ni cardinal entre N^{o} y N^{n}, pero recordemos que Bolzano no considera que la posibilidad de definir una relación biunívoca sea condición suficiente de la identidad de tamaño.

Si ahora sumamos cada uno de los números como tales y no como puras unidades obtendremos un tamaño de infinito mayor que N^{o} y N^{n}, al que Bolzano denota por S^{o}:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) + \ldots \text{ in inf.} = S^{o}$$

aunque no puede determinarse más la relación entre los tamaños de N^{o} y N^{n}, por un lado, y S^{o}, por otro. Esta indeterminación es otra de las razones que impiden que tales magnitudes puedan llamarse propiamente "números".

Otras operaciones con los números ofrecen, sin embargo, magnitudes que sí son comparables con N^{o} y N^{n}. Por ejemplo, si en la serie de magnitud N^{o} se multiplica cada miembro por N^{o} se obtiene la siguiente identidad[37]:

$$1^{o}.N^{o} + 2^{o}.N^{o} + \ldots + n^{o}.N^{o} + (n+1)^{o}.N^{o} + \ldots = (N^{o})^{2}$$

si en la misma serie se multiplican los elementos por $(N^{o})^{2}$ el resultado es:

$$1^{o}.(N^{o})^{2} + 2^{o}.(N^{o})^{2} + \ldots + n^{o}.(N^{o})^{2} + \ldots = (N^{o})^{3}$$

y así sucesivamente. N^{o}, $(N^{o})^{2}$ y $(N^{o})^{3}$ difieren infinitamente. $(N^{o})^{2}$ supera infinitamente a N^{o} y $(N^{o})^{3}$ es infinitamente mayor que $(N^{o})^{2}$, etc.

He indicado al principio de este punto 2.1 que los signos de infinitud que Bolzano utiliza no son números: no pueden serlo en su teoría porque éstos han sido definidos de manera que sólo se ajusten a los números finitos, pero esta definición podría haberse cambiado. Sin embargo, el rasgo fundamental que impide que estos signos se consideren números es la ausencia de una definición precisa de las relaciones "mayor", "menor" e "igual" entre las magnitudes infinitas.

Cantor indica en Grundlagen que los §§ 29-33 de Paradoxien des Unendlichen en los que se encuentran las tesis que acabo de exponer expresan una doctrina sobre el infinito "insostenible y equivocada"[98]. Desde el punto de vista cantoriano, se deslizan, efectivamente, muchos errores en la concepción del infinito matemático de Bolzano. Pero no cabe duda de que se adelantó Cantor en el tratamiento de los tamaños infinitos como magnitudes estables. No sólo habla Bolzano de la suma y multiplicación infinitas, también hace referencia, aunque sin un tratamiento detallado, a la resta y a la división. Esto indica que desarrolló coherentemente su convicción de la existencia en acto de todos los elementos de ciertos conjuntos infinitos, y en especial, del de los números finitos.

La introducción de los números transfinitos en el caso de Cantor, y de las magnitudes transfinitas en el caso de Bolzano, cuentan con la aceptación del infinito actual como paso previo esencial, aceptación que constituye un elemento definitorio de la obra cantoriana y el rasgo más importante de la "ruptura" -- por emplear la terminología de J. de Lorenzo en La matemática y el problema de su historia -- que ésta produjo.

El infinito actual no es un infinito variable, no aumenta ni disminuye en sí mismo, aunque haya una jerarquía infinita de tamaños infinitos. Es un infinito "cerrado", en cierto sentido, fijo y por tanto determinable. De aquí a los números transfinitos no hay más que un paso, como lo muestra el intento de Bolzano.

2.2 Argumentos en favor del infinito en acto: L. Couturat

Couturat[54] se ocupa de recoger y contestar a los argumentos más frecuentemente utilizados por los filósofos y matemáticos contra el infinito en acto y los números transfinitos. En sus respuestas a estos argumentos Couturat adopta el punto de vista de Cantor. En su obra De l'infinie mathematique desarrolla algunas de las ideas que Cantor introduce en Grundlagen y a menudo las explica y las hace más inteligibles, pero no añade nada esencial a la doctrina cantoriana del infinito.

A. Argumentos contra los números transfinitos

Entre las objeciones más repetidas contra los números transfinitos se encuentran las que pretenden adjudicarles las propiedades de los enteros finitos --o de la mayoría de ellos--. Por ejemplo, a veces se ha pretendido deducir la imposibilidad de la existencia de un número infinito aduciendo que todo número es par o impar. Como el número finito no es ni una cosa ni la otra, no es, se dice, un número en absoluto. A esto responde Couturat poniendo de manifiesto la falsedad de la premisa de la que se parte: que todo número o es par o es impar, puesto que según esta premisa tampoco las fracciones serían números. La objeción puede continuar si se entiende que los números infinitos deben ser números enteros, con lo que el recurso a las fracciones está fuera de lugar, pero Couturat de nuevo argumenta que la premisa sigue siendo falsa aún para los enteros finitos, puesto que el cero es uno de ellos y sin embargo no es par ni impar.

Otra objeción hecha al número infinito que participa también de la confusión entre números finitos e infinitos dice así: si el número infinito existe debe tener un cuadrado, un cubo etc., pero si el número infinito es el mayor de los números entonces se da la paradoja de que es mayor que sí mismo, puesto que el cuadrado, el cubo, etc., de un número son mayores que el número en cuestión, y a la vez idéntico consigo mismo. La confusión entre números finitos e infinitos aparece en la suposición de que el cuadrado, el cubo, etc., de un número deben ser mayores que él. Couturat responde que esto no es siempre cierto, en particular no es cierto respecto de los números infinitos, pero tampoco lo es respecto del cero y del uno, que son números finitos y no obstante idénticos a sus cuadrado, cubos, etc.

Otro error enmascarado en el argumento anterior, y muy corriente, es suponer que sólo hay un número infinito, y que es el último de los números finitos, con lo que si se demuestra que alguna operación sobre un número infinito da como resultado un número infinito mayor, algunos filósofos finitistas extraen la conclusión de que _el_ número infinito es mayor que sí mismo, con la evidente contradicción que esto conlleva. No obstante, en el argumento anterior el error mencionado no hace mella puesto que el cuadrado de un número infinito, o su cubo, no son mayores que él. Sin embargo, este error es el alma de la siguiente objeción: el número infinito es mayor que todos los finitos, por tanto se encontrará al final de la serie de los números finitos. Pero esto no puede ser ya que la serie por definición no tiene último término. La respuesta de Couturat consiste en decir que no hay nada tal como el número transfinito o infinito, que en rigor existe una infinita multiplicidad de números transfinitos, de acuerdo con las tesis de Cantor, y que el menor de los números transfinitos no es el último de los números finitos, no pertenece a la serie de los números finitos, sino que es el primero de la serie de los números transfinitos.

Couturat denuncia en sus respuestas el desconocimiento que sobre la teoría de números transfinitos existe entre aquellos mismos filósofos que se oponen a ella. Hemos recogido ya la creencia de que sólo existe un número infinito. A esta falsa idea se une además la confusión entre números cardinales y ordinales y, sobre todo, la pervivencia del pseudoaxioma euclidiano de que el todo es mayor que la parte, que constituye la esencia de muchas objeciones a los números infinitos y a la existencia de conjuntos infinitos en acto. El principio de que el todo es mayor que la parte no es verdadero siempre, no es, en opinión de Couturat, un principio necesario a priori, sino que en algunos contextos es verdadero y en otros falso. Por ejemplo, considerando el todo como la suma de dos números y la parte cualquiera de los sumandos, Couturat afirma que el principio euclidiano es verdadero para números enteros positivos, pero no para números negativos o para un sumando positivo y uno negativo. Como tendremos ocasión de ver, entre números ordinales transfinitos es unas veces verdadero y otras falso y entre cardinales transfinitos es falso siempre.

B. Argumentos contra la existencia de conjuntos infinitos en acto

Las objeciones contra la existencia del infinito actual se basan en la idea de que los conjuntos infinitos tienen las mismas características que los finitos, y en la suposición de que todos los números son finitos. Representante de los argumentos que participan de la confusión entre finito e infinito es el siguiente: un conjunto infinito no puede estar dado de una vez, pues si lo estuviera tendría un último término y, en este sentido, sería finito. Couturat responde que una colección infinita dada no tiene por qué tener un último término. Esto ocurre entre colecciones finitas, pero no hay contradicción alguna en suponer que las colecciones infinitas se comportan de otro modo. Como ejmplo del prejuicio de que todos los números son números finitos sirve el siguiente silogismo dirigido contra la existencia de colecciones infinitas en acto: toda colección dada tiene un número, como todo número es finito, toda colección dada es finita. El argumento es falaz, en opinión de Couturat, puesto que el término "número" se emplea en dos sentidos diferentes: en la primera premisa se está utilizando en un sentido general, como cardinal de cualquier conjunto definido, mientras que en la segunda tiene su significado tradicional, es decir, "numero entero finito". Si se supone que no hay mças numeros que éstos últimos, el argumento comete petición de principio.

Couturat muestra en su defensa de las tesis de Cantor que los argumentos que habitualmente se han dirigido contra el infinito en todas sus formas son inconsistentes y que la postura de Cantor es irreprochable.

3. La primera teoría de conjuntos de Cantor: *Grundlagen* y *Beiträge*

3.1 Nociones preliminares

Las dos obras del autor en las que se expone con más precisión lo que llamo la primera teoría de conjuntos cantoriana son *Grundlagen* (1883) y *Beiträge* (1895-7). En ambas comienza por explicar qué son los conjuntos, que se convierten en el objeto de los dos trabajos[109]. Las dos definiciones de conjunto que Cantor introduce a lo largo de su obra publicada son las siguientes:

1. "Entiendo por 'multiplicidad' o 'conjunto' en general toda multitud que pueda pensarse como uno, esto es, toda

reunión de elementos determinados, que puedan ser relacionados en un todo mediante una ley"[101]

2. "Entendemos por 'conjunto' cualquier colección M de objetos **m** distintos y determinados, de nuestra intuición o nuestro pensamiento (que se llaman 'elementos' de M) en un todo"[102]

Los conjuntos pueden unirse para formar conjuntos más amplios. Si A es un conjunto formado por los elementos de B y C, siempre que estos últimos no tengan elementos en común, A será la <u>unión</u> de B y C. En la notación de Cantor esta idea se expresa de la siguiente manera:

$$A = (B, C).$$

Se llama <u>parte</u> (<u>Teil</u>) o <u>conjunto-parte</u> (<u>Teilmenge</u>) de un conjunto M a cualquier conjunto M' cuyos elementos sean también elementos de M -- en lo que sigue se utilizará también el término "subconjunto" con el mismo significado --. Aunque Cantor no lo dice expresamente, en su teoría no son partes de un conjunto lo que hoy llamamos "subconjuntos impropios", por lo que por "parte de un conjunto" hay que entender en este contexto únicamente los subconjuntos propios del conjunto en cuestión.

A cada conjunto le corresponde un objeto determinado al que se le llama "potencia", o también "número cardinal". La potencia de un conjunto se obtiene a partir de él por abstracción. Las definicones cantorians de potencia han sido ya discutidas[103].

Para denotar la potencia del conjunto M se utiliza el signo "$\overline{\overline{M}}$". Las potencias son conjuntos que se abstraen a partir de otros conjuntos y se diferencian de los últimos en que sus elementos son puros "unos" abstraidos a su vez de los elementos de los conjuntos sobre los que se definen. Una potencia es un conjuntos de unos, a cada conjunto le corresponde una potencia y sólo una, pero una misma potencia puede serlo de una infinidad de conjuntos, siempre que estos sean equivalentes entre si. Este último rasgo es el que pretende enfatizar la definición de 1884.

Si dos M y N son equivalentes, entonces tienen el mismo número cardinal y a la inversa. Cantor simboliza la equivalencia entre los conjuntos M y N por "$M \simeq N$", por lo que la relación más fundamental entre los conjuntos y sus potencias ó números cardinales es la siguiente

$$M \simeq N \text{ si, y sólo, } \overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}.$$

Esto es, dos conjuntos son equivalentes si, y sólo si, sus cardinales son idénticos.

Además de la equivalencia entre los conjuntos M y N, pueden darse otras dos situaciones entre ellos respecto de sus tamaños relativos: que M sea equivalente a una parte de N o que N sea equivalente a una parte de M. En estos últinos casos M y N tendrán cardinales distintos. Supongamos que a es el cardinal de M y b el cardinal de N:

$$a = \overline{\overline{M}} \quad y \quad b = \overline{\overline{N}}.$$

Si se satisfacen las condiciones

(1) ninguna parte de M es equivalente a N

(2) existe una parte N' de N equivalente a M

entonces se dice que el número cardinal **a** de M es <u>menor</u> que el número cardinal **b** de N, o que **b** es <u>mayor</u> que **a**.

$$a < b \quad ó \quad b > a.$$

Las condiciones (1) y (2) definen una relación entre potencias aunque aparentemente hablan de conjuntos, puesto que nada cambiaría si en vez de considerar los conjuntos M y N, hiciésemos referencia a los conjuntos M' y N', siendo M' equivalente a M y N' equivalente a N.

De este modo se han definido las tres posibles relaciones entre números cardinales, a saber, si **a** y **b** son cardinales sabemos el significado de las tres fórmulas siguientes:

$$a = b, \quad a < b \quad ó \quad b < a.$$

Si una de las tres relaciones se da entre dos números cualesquiera, se sigue de la definición anterior de "mayor" y "menor" que las otras dos quedan excluidas. Cantor es consciente, sin embargo, de que probar que necesariamente una de las tres ha de ocurrir no es tarea fácil. La prueba requiere que nos adentremos en la definición y teoría de los números cardinales transfinitos, que no puede ofrecerse todavía. Pero aún sin probarla, Cantor señala[104] que de la afirmación anterior se siguen los siguientes teoremas[105, 106]

(1) Si M y N son conjuntos tales que M es equivalente a una parte de N y N es equivalente a una parte de M, entonces M y N son equivalentes entre sí.

(2) Si M' es una parte de M y M" una parte de M' y M" es equivalente a M, entonces M' es equivalente a M.

(3) Si M y N son dos conjuntos tales que N no es equivalente a M ni a ninguna de sus partes, entonces existe una parte N' de N que es equivalente a M.

(4) Si M y N son dos conjuntos no equivalentes y hay un subconjunto N' de N equivalente a M, entonces no existe ningún subconjunto de M equivalente a N.

Dado que los cuatro teoremas anteriores dependen de una afirmación aún no demostrada, Cantor señala[107] que no podrán utilizarse hasta que consigamos la demostración, tras la definición de la serie de los números ordinales transfinitos.

3.2 Aritmética cardinal

Se ha indicado anteriormente que la unión de dos conjuntos, M y N, es a su vez un conjunto. A este lo llama Cantor conjunto-unión de M y N. El conjunto-unión de dos (o más) conjuntos tiene una potencia, como cualquier conjunto. Sea **a** el número cardinal de M y **b** el de N, ¿cuál será el número del conjunto-unión (M, N)?. Hay que tener en cuenta que el número de (M,N) no dependerá de la constitución de los elementos de M y N ya que si M' es conjunto equivalente a M y N' a N, el conjunto (M', N') será equivalente a (M, N) y le corresponderá, por tanto, el mismo número cardinal. De este razonamiento deduce Cantor que el número de (M, N) depende exclusivamente de los números cardinales de M y N. Cantor define así la suma de dos cardinales, a y b, como el número del conjunto unión (M, N). Formalmente [108]

$$a + b = \overline{\overline{(M, N)}}.$$

Siguiendo con los conjuntos M y N, supongamos que se conecta cada elemento m de M con cada elemento n de N formando parejas, (m, n). Al conjunto de todas estas parejas, que Cantor simboliza por

"{(m, n)}"

le llama el autor conjunto-conexión de M y N, (M, N), (Verbindungsmenge von M und N). Al igual que ocurría con el caso de la unión, el número cardinal del conjunto-conexión es independiente de la constitución de los elementos de M y N. Cantor considera que el cardinal del conjunto

{(m, n)}

es una función de los cardinales a y b de M y N respectivamente, se define entonces como el cardinal que corresponde al conjunto-conexión de M y N. Formalmente,

$$a.b = \overline{\overline{\{(m, n)\}}}.$$

Tanto en este caso como en el de la suma, el orden en el que se tomen los conjuntos M y N no incide en modo alguno en el resultado final, por lo que

$$a.b = b.a \quad y \quad a + b = b + a.$$

Esta es la propiedad conmutativa de la multiplicación y la adición, y estas operaciones satisfacen, además, las propiedades asociativa y distributiva

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$