CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE PROFESORES DE MATEMÁTICA EN FORMACIÓN INICIAL SOBRE ASPECTOS LÓGICOS Y SINTÁCTICOS DE LA DEMOSTRACIÓN

Christian Alfaro Carvajal, Pablo Flores Martínez y Gabriela Valverde Soto

El artículo presenta los resultados de un estudio cualitativo dirigido a caracterizar el conocimiento de futuros profesores de matemáticas en la Universidad Nacional de Costa Rica sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. Se proponen indicadores para caracterizar el conocimiento relacionado con la práctica matemática de la demostración, destacando aspectos lógicos y sintácticos. Se apreció que la mayoría de los sujetos mostraron conocimiento de los aspectos lógicos de la demostración y que los indicadores de análisis propuestos permitieron clasificar la mayor parte de sus respuestas.

Términos clave: Conocimiento del profesor de matemáticas; Demostración matemática; Formación inicial de profesores de matemáticas

Specialized knowledge of the prospective teachers of mathematics on the logical and syntactic aspects of the mathematical proof

The article presents the results of a qualitative study that aims to characterize the knowledge of future mathematics professors at the National University of Costa Rica (UNA) on the logical and syntactic aspects of the mathematical proof. Knowledge indicators are proposed to characterize that related to the mathematical proof practice, focusing on the logical and syntactic aspects. It was appreciated that most of the subjects showed knowledge of the logical aspects of the proof and that the proposed analysis indicators allowed to classify most of their responses.

Keywords: Mathematical proof; Mathematics teacher's knowledge; Prospective teachers of mathematics

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14*(2), 85-117.

Los procesos de argumentación y demostración son relevantes en la enseñanza de las matemáticas. Existen recomendaciones internacionales como las realizadas por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) que indican que tales procesos deberían tener presencia en los programas de todos los niveles educativos, específicamente, recomiendan promover actividades tales como la formulación e investigación de conjeturas, el desarrollo y la evaluación de argumentos matemáticos y demostraciones, en donde se empleen diferentes métodos y tipos de razonamiento. En esta dirección, Stylianides (2007) señala que muchos investigadores y marcos curriculares abogan por la inclusión de las demostraciones matemáticas como parte de las experiencias de los estudiantes en todas las áreas de contenido y en todos los niveles educativos. Las demostraciones son fundamentales para hacer y saber matemáticas, son la base de la comprensión matemática y tienen un papel preponderante para desarrollar, establecer y comunicar el conocimiento matemático.

Específicamente, Stylianides, Stylianides y Weber (2017) señalan que existe un amplio reconocimiento sobre el papel de la demostración matemática en la formación de los estudiantes en todos los niveles educativos. En educación primaria, puede favorecer que los niños exploren o debatan sobre la veracidad de las afirmaciones matemáticas con base en la estructura lógica del sistema matemático y no en la autoridad del docente o del libro de texto. En secundaria, puede cumplir una amplia gama de funciones tales como la verificación, que permite establecer la veracidad o falsedad de una proposición; la explicación, en donde se propongan las razones por las que una proposición matemática es verdadera; el descubrimiento, en donde se establezcan nuevos resultados matemáticos; la comunicación, que permite la transmisión de resultados matemáticos a los demás miembros del aula; la propuesta de nuevos métodos de deducción; y la justificación del uso de una definición o un sistema de axiomas.

En el contexto educativo costarricense, el currículo matemático de la educación secundaria considera como expectativa de aprendizaje el proceso de razonar y argumentar en los estudiantes y refiere a elementos de pensamiento matemático tales como la deducción, la inducción, la comparación analítica, la generalización, las justificaciones, las pruebas, el uso de ejemplos y contraejemplos. La justificación y la prueba se consideran elementos esenciales en los quehaceres matemáticos y por lo tanto deben tener un papel primordial en la formación escolar. Se da importancia al proceso de conjeturar pues permite el descubrimiento de nuevos resultados en las matemáticas. Al plantear una conjetura se promueven los procesos para justificarla ya sea con materiales concretos, diagramas, uso de la calculadora u otros elementos tecnológicos. A medida que se avance en la formación escolar, las conjeturas deberán hacerse sobre elementos más generales y abstractos, y las justificaciones emplear elementos más técnicos. De este modo, la argumentación debe incentivarse de manera paulatina, primero usando formas verbales, luego las escritas y posteriormente, mediante formas simbólicas. Se pretende que, una vez que los estudiantes han formulado una conjetura, se trabajen tres etapas: la verificación en casos particulares, la propuesta de un argumento que justifique la validez de la conjetura, y la demostración del resultado (Ministerio de Educación Pública, 2012).

Las exigencias curriculares planteadas en el Programa de Estudios de Matemática de la Educación Secundaria de Costa Rica tienen una incidencia directa en el papel del profesor de matemáticas, pues este debe promover en sus estudiantes procesos de razonamiento y argumentación, además de lograr que se familiaricen con el sentido de la demostración matemática. Según Knuth (2002) la incorporación de la demostración en las clases de matemáticas impone demandas significativas a los profesores de matemáticas debido a que los enfoques diseñados para mejorar el papel de la demostración en el aula requieren un esfuerzo de su parte.

Lo anterior sugiere que la demostración debe hacer parte del conocimiento que requiere el profesor de matemáticas para su desarrollo profesional pues, como señalan Flores-Medrano, Montes, Carrillo, Contreras, Muñoz-Catalán, y Liñán (2016), además de conocer los contenidos y sus relaciones, el profesor de matemáticas debe tener conocimiento de cómo se produce el conocimiento matemático, lo que implica conocer sobre las reglas sintácticas de la disciplina, la diferencia entre una demostración, una prueba y una comprobación, aunado a los diferentes tipos de demostraciones.

Para Hanna y De Villiers (2012) existen dos posiciones sobre la demostración matemática, una que apela más a los aspectos lógico-sintácticos y que la considera como una secuencia de pasos que permiten el establecimiento de una conclusión necesaria, y otra más vinculada a los aspectos semánticos y que la contempla en un sentido más amplio, como una serie de ideas y percepciones que favorezcan la comprensión matemática. Según Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, y Tanguay (2012a) en la educación matemática también existe la tensión entre lo lógico-sintáctico y lo semántico de la demostración y sus posibles relaciones y oposiciones, tales como los resultados matemáticos ajustados a reglas lógicas y textuales o los aspectos creativos y constructivos.

Tanto lo sintáctico como lo semántico son elementos relevantes en la comprensión de la demostración matemática. No obstante, el conocimiento del profesor de matemática para saber que un ejemplo puede ser, en unos casos una simple comprobación de una propiedad y en otros una demostración, está más asociado a lo sintáctico y es fundamental para la diferenciación entre comprobación y demostración (Flores-Medrano et al., 2016). De esta manera el conocimiento de los profesores de matemáticas sobre los aspectos lógicos de la demostración es de interés, pues como indican Durand-Guerrier, Boero, Douek, Epp, y Tanguay (2012b) en cualquier nivel educativo los docentes no podrían guiar eficazmente a sus estudiantes en las actividades de razonamiento y demostración si ellos mismos no son conscientes y conocedores de los principios básicos del razonamiento lógico. Señalan además que el conocimiento de las reglas básicas de la lógica de predicados puede ser útil para que los estudiantes comprendan la estructura fundamental de la demostración matemática, específicamente para que comprendan qué significa que algo sea verdadero y qué debería hacerse para demostrar su veracidad. Las respuestas a tales preguntas dependen fundamentalmente de las reglas de inferencia de la lógica de predicados y de la estructura sintáctica de las proposiciones en cuestión.

En esta línea, el objetivo de este estudio es caracterizar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial en la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. Esta carrera contempla al pensamiento lógico-matemático como uno de sus ejes curriculares, el cual incluye a la demostración que es abordada en los diferentes cursos de matemáticas del plan de estudios.

Según Lo y McCrory (2009) los futuros profesores de matemáticas deberían aprender sobre la demostración en tres niveles: (1) como una herramienta de validación sobre la veracidad o falsedad de una afirmación; (2) como un objeto matemático regulado por reglas y estándares; y (3) como un elemento que favorece el desarrollo de los alumnos y que depende de varios factores tales como: el nivel de enseñanza, el tipo de argumentos que pueden formular, la naturaleza de la justificación, entre otros.

Para Herbst (2000) la investigación sobre el papel del profesor de matemáticas con respecto a la demostración debe orientarse a comprender en qué condiciones este profesional puede proponer, gestionar, mantener e incorporar en sus clases un proyecto teórico, es decir, la construcción de una teoría matemática que incluya a la demostración junto con su significado. Consideramos que para generar avances en la línea investigativa señalada por Herbst (2000) es necesario realizar investigaciones sobre el conocimiento que manifiestan los profesores de matemáticas sobre la argumentación y la demostración como lo proponen Stylianides, Bieda y Morselli (2016).

Esta investigación es un aporte en esa línea y se considera pertinente en dos direcciones específicas: primero, para contar con insumos que favorezcan el abordaje de la demostración matemática en el plan de formación inicial del profesorado de matemáticas en la UNA y en otros planes de formación inicial similares, y segundo, para hacer un aporte teórico a la categoría demostrar en el subdominio de la práctica matemática en el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), concretamente en la construcción de componentes para estudiar conocimiento sobre la demostración matemática, en particular con indicadores de conocimiento sobre los aspectos lógico-sintácticos sobre esta.

Marco teórico

Según Ponte y Chapman (2006) el estudio sobre el conocimiento del profesor es un tema de interés desde hace tiempo, particularmente se destacan en la década de 1980 los trabajos de Elbaz, Shulman y Schön. A partir de estos trabajos, se ha generado un interés investigativo por examinar de manera analítica el conocimiento del profesor mediante la construcción de modelos que permitan determinar cómo puede enfocarse dicho conocimiento. En estos modelos se distinguen dos componentes principales: el conocimiento del contenido a enseñar y el conocimiento didáctico del contenido a enseñar (Carrillo et al., 2018).

La demostración en relación con el conocimiento del profesor de matemáticas

Para llevar a cabo la caracterización del conocimiento de los futuros profesores de matemáticas sobre los aspectos lógicos y sintácticos, se consideró necesario contar con un modelo de conocimiento del profesor de matemáticas que incluyera a la demostración. El modelo MTSK plantea dos dominios fundamentales de conocimiento: *conocimiento matemático* que hace referencia a aquel que posee el profesor sobre las matemáticas como una disciplina científica, pero en un contexto escolar, y *conocimiento didáctico del contenido* que refiere sobre los aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza–aprendizaje (Carrillo et al., 2018).

En el dominio del conocimiento matemático, el MTSK posee un subdominio llamado *práctica matemática* que hace referencia al conocimiento del profesor sobre la manera en la que se construye el conocimiento matemático. Incluye la jerarquización y la planificación en la manera de proceder al resolver problemas matemáticos, los tipos de validación y demostración, el papel del lenguaje y los símbolos, algunas prácticas particulares como la modelización y sobre las condiciones suficientes y necesarias para la generación de definiciones (Espinoza, Zakaryan y Carrillo, 2018; Flores-Medrano et al., 2016; Vasco y Climent, 2018).

De este modo, la práctica matemática corresponde al conocimiento que tiene el profesor sobre lo que significa demostrar, justificar, definir, deducir e inducir. Incluye el conocimiento del fundamento lógico de cada una de las prácticas anteriores y del uso y funcionamiento del ejemplo y contraejemplo, ya que este subdominio hace referencia a las formas de desarrollar nuevos resultados matemáticos, es decir, hacer matemáticas. Las categorías de este subdominio no son exhaustivas y pueden emerger nuevas, con base en la revisión de literatura algunos investigadores han propuesto las siguientes: demostrar, definir, ejemplificar y usar heurísticos (Carreño, Rojas, Montes y Flores, 2013; Flores-Medrano, 2015).

Según Flores-Medrano (2015), para el modelo MTSK, en la categoría demostrar se incluyen las ideas de argumentación, justificación y validación debido a la similitud que tienen en cuanto a su carácter de convencimiento, aunque diferentes en cuanto al uso de los criterios de verdad. Para esta categoría, considera importante tres componentes: el conocimiento sobre la naturaleza de las demostraciones, los esquemas de demostración y las funciones atribuidas a estas.

Estudiar conocimiento sobre la demostración requiere establecer subcomponentes que se incluyen para cada uno de los componentes considerados en la categoría demostrar. Para ello hemos estudiado investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas, concretamente sobre las concepciones de la demostración, sus funciones y las prácticas argumentativas para ampliar los componentes sobre el conocimiento de la naturaleza de las demostraciones y las funciones atribuidas a éstas.

En el caso de las concepciones de la demostración, Montoro (2007) señala que no son simples ni uniformes y que por lo tanto la multiplicidad de significados del término demostración debe ser considerada en la formación de los futuros profesores. Según Ayalon y Even (2008) los profesores de matemáticas abordan el razonamiento deductivo de dos maneras: como la inferencia basada en las reglas de la lógica formal o como una manera de resolver problemas de manera sistemática paso a paso sin tener en cuenta elementos de validez ni las reglas lógicas formales.

En cuanto a las funciones de la demostración, los docentes reconocen una variedad de roles tales como la verificación, la explicación, la comunicación, la creación de resultados y la sistematización, no obstante, muchos no la consideran útil para el aprendizaje de las matemáticas (Knuth, 2002). En este sentido Viseu, Menezes, Fernandes, Gomes y Martins (2017) determinaron que, para los docentes con menor experiencia, la demostración matemática tiene una naturaleza diferente a otras disciplinas, es una actividad esencial para la construcción del conocimiento, su función es verificar y explicar la veracidad de un razonamiento, pero debe ser reservada a los mejores alumnos. Para los docentes con más experiencia la demostración es una actividad cerrada que consiste en la reproducción de demostraciones presentes en libros de texto y realizadas por especialistas.

Por su parte Furinghetti y Morselli (2009) identificaron dos posiciones sobre el papel de la demostración que le otorgan los profesores en el aula dependiendo del contexto escolar: (a) enseñar teoremas y probar hechos, la demostración se considerada aquí como un elemento que permite sistematizar y convencer sobre las cuestiones matemáticas; (b) enseñar a demostrar y usar la demostración como forma de enseñanza, la función de la demostración en esta posición es promover la comprensión matemática.

Sobre las prácticas argumentativas y los elementos de convicción de un argumento matemático, Stylianides y Stylianides (2009) señalan que varios estudios indican que los futuros profesores de matemáticas que enseñan en los primeros años tienen ideas erróneas sobre la demostración, particularmente sobre el rol de los argumentos empíricos. Por su parte, Lin, Yang, Lo, Tsamir, Tirosh y Stylianides (2012) manifiestan que muchos profesores de matemáticas basan su convicción sobre algún resultado matemático, más en la autoridad de entes externos, como manuales y en colegas que reconocen más competentes, que en su propio razonamiento. En este sentido, Flores (2007) determinó que los esquemas de argumentación que utilizan algunos profesores son los fácticos, en los que hacen un recuento de lo realizado a modo de justificación, o los empíricos en los cuales se apoyan en hechos físicos o dibujos, lo cual no favorece el uso de la deducción y el lenguaje preciso.

Con base en investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas como las mencionadas y en los trabajos de Flores-Medrano (2015) y Knuth (2002), hemos detectado algunos de los elementos relevantes que creemos que deben ser considerados en el conocimiento matemático sobre la demostración dentro del subdominio de la práctica matemática en el MTSK, hasta establecer tres componentes principales: (1) el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática, (2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas y (3) la convicción de un argumento matemático. A continuación, se detallan cada uno de los componentes mencionados.

El conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática: es el conocimiento sobre lo que constituye una demostración matemática, y considera los siguientes subcomponentes: (a) el concepto de demostración matemática, es decir, el conocimiento sobre qué es una demostración matemática y qué significa demostrar algo en las matemáticas (Flores-Medrano, 2015), (b) la validez lógica, que se refiere al conocimiento sobre cómo proceder en la demostración de afirmaciones matemáticas involucrando de forma implícita o explícita las conectivas lógicas (y, o, si−entonces, no, entre otras) y los cuantificadores existencial y universal, además del uso de las reglas de inferencia, de las equivalencias lógicas y de los métodos de demostración matemática (Durand-Guerrier et al., 2012b), y (c) la validez matemática, que se refiere al conocimiento del rigor en la demostración matemática lo que supone el uso correcto de axiomas, hipótesis y definiciones empleadas en las demostraciones (Cabassut, Conner, İşçimen, Furinghetti, Jahnke, y Morselli, 2011).

El conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas: es el conocimiento sobre cuál es el papel de las demostraciones en las matemáticas. Se consideran los siguientes subcomponentes propuestos por de Villiers (1993): la verificación, la explicación, la sistematización, el descubrimiento y la comunicación.

La convicción de un argumento matemático: se refiere a las razones por las que los profesores de matemáticas encuentran convincente a un argumento matemático. Un argumento para validar una afirmación puede asumir varias formas diferentes y ser convincente, aunque no necesariamente sea una demostración (de Villiers, 1993; Hanna, 2002). Se consideran los siguientes subcomponentes basados en los trabajos de Knuth (2002) y Harel y Sowder (1998): el uso de elementos concretos, la familiaridad, el nivel de detalles, la forma ritual, el nivel explicativo y la validez del argumento.

En el subcomponente de la validez lógica, hemos considerado tres elementos para esta investigación: el tipo de demostración, el tipo de cuantificador y el tipo de conectiva lógica, y cada uno de ellos involucra a las equivalencias e inferencias lógicas. Estos elementos fueron precisados con base en un estudio teórico previo sobre la demostración y que constituyen un aporte inicial de la investigación en curso (Alfaro, Flores y Valverde, 2019).

- El tipo de demostración: se considera el conocimiento del profesor de matemáticas sobre los tipos de demostraciones, directas e indirectas, que pueden emplearse para demostrar una proposición matemática Q que puede tener la forma $P \Rightarrow Q$ de forma explícita o implícita, en este último caso, P representa a todos los axiomas, definiciones y teoremas de la teoría matemática en donde se inserta la proposición Q.
- El tipo de cuantificador: corresponde al conocimiento del profesor de matemática sobre cómo proceder, de forma directa o indirecta, en la demostración de una proposición matemática que involucra un cuantificador universal o un cuantificador existencial. Las proposiciones con cuantificador universal en general tienen la forma $\forall x \in U\big(P(x)\big)$ y las proposiciones con cuantificador existencial $\exists x \in U\big(P(x)\big)$, en donde $P(x)$ es una propiedad con variable x que pertenece a un dominio de discurso o conjunto universo U.
- El tipo de conectiva lógica: hace referencia al conocimiento del profesor de matemática sobre cómo proceder, de forma directa o indirecta, en la demostración de proposiciones matemáticas que involucren las conectivas lógicas implicación, disyunción, conjunción y la doble implicación lo que hace necesario el conocimiento sobre los criterios de veracidad y falsedad de tales conectivas lógicas.

La lógica se entiende aquí como la disciplina que trata los aspectos semánticos y sintácticos de la organización del discurso matemático con el objetivo de deducir resultados que se siguen de manera necesaria de un conjunto de premisas (Durand-Guerrier et al., 2012b).

METODOLOGÍA

La investigación tiene un enfoque cualitativo, de alcance descriptivo. Participaron 25 profesores de matemáticas en formación inicial de la carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la UNA, 18 matriculados en el cuarto año de la carrera y siete matriculados en el quinto año. Ambos grupos constituyeron la totalidad del estudiantado matriculado y activo en esos niveles durante el segundo semestre del 2018.

Esta carrera se imparte de manera compartida por la Escuela de Matemática, que ofrece el componente matemático, y la División de Educología, que brinda el componente pedagógico. Otorga el grado académico de Bachillerato con una duración de cuatro años y el de Licenciatura que consta de tres semestres adicionales y la elaboración de un trabajo final de graduación.

Todos los sujetos participantes en la investigación han estudiado la demostración y han tenido que probar su destreza demostrando propiedades para aprobar los cursos del plan de estudios de la carrera. En esta sección se consideran dos apartados; el primero sobre la recolección de la información, en donde se describe el cuestionario utilizado y las etapas consideradas en su construcción; el segundo presenta el análisis de la información, en donde se explica de qué manera se analizaron las respuestas que los participantes de la investigación manifestaron en el cuestionario.

Recolección de la información

Para la recolección de la información se elaboró un cuestionario que se aplicó en los meses de setiembre y octubre del 2018 con una duración aproximada de dos horas. Los sujetos lo completaron de forma individual en los horarios asignados a los cursos matriculados. Previo a su aplicación, fue revisado por tres especialistas en Educación Matemática quienes se eligieron por su formación en matemáticas y en didáctica de las matemáticas, además de su amplio conocimiento del contexto formativo de los sujetos de investigación. Para la construcción del cuestionario, se realizaron las siguientes etapas.

- ♦ La consideración de los elementos del marco teórico sobre el conocimiento de la validez lógica de una demostración para la generación de las categorías de análisis. Específicamente, el tipo de demostración: directa o indirecta; el tipo de cuantificador: universal o existencial; y el tipo de conectiva lógica: implicación, disyunción, conjunción y doble implicación.
- ♦ La revisión del Programa de Estudios de Matemáticas de la Educación Secundaria en Costa Rica para analizar la estructura sintáctica de las proposiciones matemáticas que se sugiere demostrar. Se determinó que la mayoría de las proposiciones son de cuantificación universal en conjuntos infinitos, sin embargo, se propone la verificación de propiedades para casos particulares, por lo que en menor medida se detectó la presencia de afirmaciones de cuantificación existencial.
- ♦ Se decidió que la caracterización debía estar regida por las formas de proceder en la demostración de proposiciones matemáticas en función de la estructura sintáctica y, por lo tanto, dichas proposiciones debían estar desprovistas de contenido matemático, a tales proposiciones se les llamó

proposiciones genéricas. No obstante, se consideró pertinente que los sujetos propusieran un ejemplo concreto de la proposición genérica en cuestión y ofrecieran una demostración de esta.

- Dado que las propiedades que se demuestran en la enseñanza secundaria expresan cualidades aplicables a todos los elementos de un conjunto determinado, se decidió incluir demostraciones con cuantificador universal, y sólo una existencial. De esta manera las afirmaciones debían involucrar al cuantificador universal con una propiedad simple y con propiedades compuestas empleando a las conectivas lógicas implicación, disyunción, conjunción y doble implicación. Además, se consideró al cuantificador existencial con una propiedad simple.
- Se consideró pertinente que cada una de las seis afirmaciones genéricas dieran origen a una tarea.

Con base en lo anterior, el cuestionario consta de seis tareas, en cada una de ellas se presenta una proposición matemática, de forma verbal y simbólica, que se denomina genérica. En cada tarea los sujetos debían explicar la forma general en la que realizarían la demostración matemática de la proposición genérica dada, y proporcionar un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo brindado. En esta segunda instrucción, se sugirió utilizar proposiciones y demostraciones sencillas de las matemáticas escolares, es decir, de temas como álgebra, números, geometría, relaciones y funciones que se abordan en la educación secundaria costarricense. En la tabla 1 se muestra cada una de las proposiciones genéricas contempladas en las tareas.

Tabla 1
Proposiciones genéricas de las tareas del cuestionario

Proposición genérica	
Representación verbal	Representación simbólica
Tarea 1: Universal simple	
Todos los elementos de un conjunto U satisfacen una propiedad $P(x)$	$\forall x \in U\big(P(x)\big)$
Tarea 2: Existencial simple	
Al menos un elemento de un conjunto U satisface una propiedad $P(x)$	$\exists x \in U\big(P(x)\big)$
Tarea 3: Implicación universal	
Todos los elementos de un conjunto U cumplen que, si satisfacen una propiedad $P(x)$ entonces satisfacen una propiedad $Q(x)$	$\forall x \in U[P(x) \Rightarrow Q(x)]$
Tarea 4: Disyunción universal	

Todos los elementos de un conjunto U satisfacen una propiedad $P(x)$ o satisfacen una propiedad $Q(x)$	$\forall x \in U[P(x) \vee Q(x)]$

Tabla 1
Proposiciones genéricas de las tareas del cuestionario

Proposición genérica	
Representación verbal	Representación simbólica
Tarea 5: Conjunción universal	
Todos los elementos de un conjunto U satisfacen de manera simultánea una propiedad $P(x)$ y una propiedad $Q(x)$	$\forall x \in U[P(x) \wedge Q(x)]$
Tarea 6: Doble implicación universal	
Todos los elementos de un conjunto U satisfacen una propiedad $P(x)$ siempre y cuando satisfacen una propiedad $Q(x)$	$\forall x \in U[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$

Análisis de la información

Para analizar la información se empleó el análisis de contenido que permite la codificación de preguntas abiertas en cuestionarios y la descripción de patrones y tendencias en el contenido comunicativo. Siguiendo a Cohen, Manion, y Morrison (2007), este análisis implica codificación, categorización (creación de categorías significativas en las que se pueden ubicar las unidades de análisis —palabras, frases, oraciones—), comparación (categorías y creación de vínculos entre ellas) y conclusión (extraer conclusiones teóricas de las unidades de análisis).

Para analizar las respuestas de los sujetos sobre (a) la explicación de la forma de proceder en la demostración de cada proposición genérica dada y (b) la demostración realizada del ejemplo propuesto, se establecieron tres categorías con base en los elementos del conocimiento sobre la validez lógica de una demostración considerados en el marco teórico: el tipo de demostración (directa o indirecta) que estuvo presente en cada una de las seis tareas del cuestionario, el tipo de cuantificador (universal, presente en todas las tareas, excepto en la segunda, o existencial, presente en la segunda tarea) y el tipo de conectiva lógica (implicación universal, disyunción universal, conjunción universal y doble implicación universal) los cuales se contemplaron en las tareas tres, cuatro, cinco y seis respectivamente.

En cada una de las tareas, los investigadores realizamos un análisis a priori sobre la forma en la que consideramos que se puede proceder en la demostración, directa o indirecta, de la proposición genérica. En todos los casos se consideró al conjunto universo como infinito.

Se ilustra este proceso con la proposición genérica que involucra al cuantificador universal y a una propiedad simple o compuesta $\forall x \in U[A(x)]$, en donde $A(x)$ representa a una propiedad simple, como en la tarea 1, donde $A(x) \equiv P(x)$ que se llamó universal simple; o $A(x)$ representa a una propiedad compuesta $A(x) \equiv \big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ llamada implicación universal, como se muestra en la tarea 3; o una disyunción universal $A(x) \equiv \big(P(x) \vee Q(x)\big)$ como en la tarea 4; una conjunción universal $A(x) \equiv \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$ en la tarea 5; o en la tarea 6 donde $A(x) \equiv \big(P(x) \Leftrightarrow Q(x)\big)$ corresponde a una doble implicación universal.

- Demostración directa: se escoge un elemento $x \in U$ que representa a cualquier elemento del universo U y posteriormente se considera fijo. Luego se debe garantizar que la proposición $A(x)$ es verdadera. Como el elemento $x \in U$ es un representante de cualquier elemento del universo U se puede concluir que es verdadero que $\forall x \in U[A(x)]$.
- Demostración indirecta: se utiliza la equivalencia lógica $\forall x \in U[A(x)] \equiv \exists x \in U[\neg A(x)] \Rightarrow F_0$, en donde F_0 representa a cualquier contradicción. En este caso se supone como verdadero que $\exists x \in U[\neg A(x)]$ y, con base en ese supuesto, se debe obtener una proposición categóricamente falsa que haría el papel de F_0. Una vez hallada la contradicción se puede concluir que es verdadera la proposición $\forall x \in U[A(x)]$.

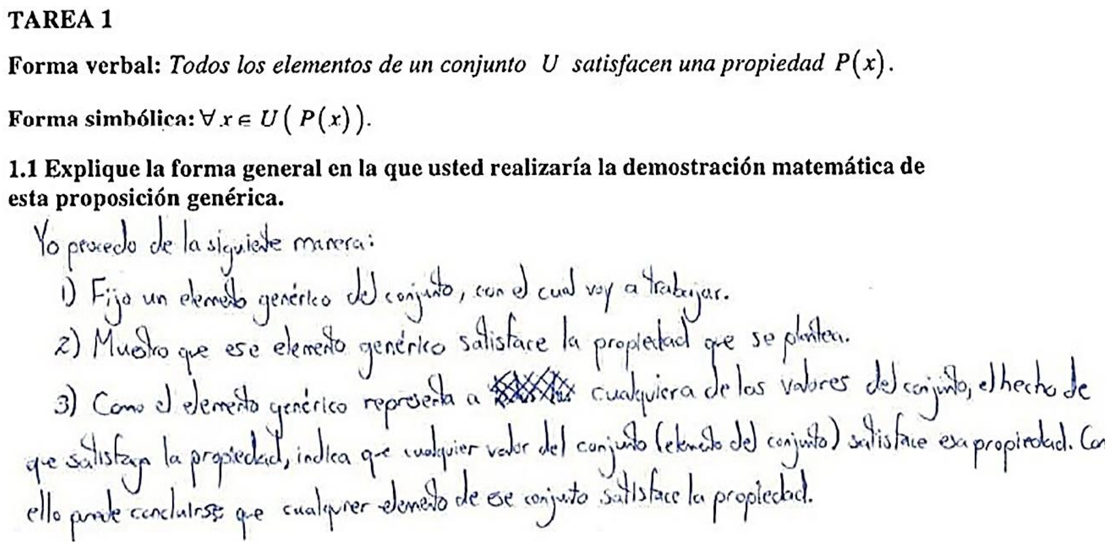
Una vez realizado el análisis anterior, se generaron los indicadores de conocimiento, entendidos como frases para determinar en las respuestas de los sujetos de investigación, evidencias de conocimiento sobre las formas de proceder en la demostración. En la tabla 2, se muestran los indicadores de conocimiento generados para el cuantificador universal a partir de las formas de proceder consideradas por los investigadores.

En el caso de las respuestas de los sujetos sobre proporcionar un ejemplo concreto de la proposición genérica, se determinó si se ajustaba a la estructura sintáctica de la proposición genérica en cuestión. Para hacer el registro de todas las respuestas, los sujetos fueron codificados empleando la letra *E* para indicar que era estudiante; la letra *B* para indicar que era de Bachillerato o la letra *L* para indicar que era de Licenciatura; la letra *H* para indicar que era hombre y la letra *M* para indicar que era mujer y; los números del 01 al 18 para los de Bachillerato y de 01 al 07 para los de Licenciatura, así, por ejemplo, el código EBH08 indica que es estudiante del Bachillerato, hombre y es el número 8 y ELM04 indica que es estudiante de la Licenciatura, mujer y la número 4. Para cada sujeto se hizo una revisión exhaustiva de sus respuestas de manera que se asignaba con 1 o 0 la presencia o ausencia respectivamente de los indicadores de conocimiento definidos. Además, se hizo un registro de las respuestas que no pudieron ser clasificadas por tales indicadores y una síntesis de tales respuestas.

Tabla 2
Indicadores de conocimiento generados para el cuantificador universal

Forma de proceder según el tipo de demostración	Indicadores de conocimiento generados
Demostración directa	
Se escoge un elemento $x \in U$ que representa a cualquier elemento del universo U.	Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo.
Se debe garantizar que la proposición $A(x)$ es verdadera y como el elemento $x \in U$ es un representante de cualquier elemento del universo Use puede concluir que $\boldsymbol{\forall x \in U[A(x)]}$ es verdadero.	Manifiesta que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario.
Demostración indirecta	
Se supone verdadera la proposición $\neg\forall x \in U[A(x)]$.	Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada.
Se determina que la proposición $\neg\forall x \in U[A(x)]$ es equivalente a $\exists x \in U[\neg A(x)]$.	Manifiesta cuál es la equivalencia de la negación de la proposición dada.
Una vez supuesta verdadera la proposición $\exists x \in U[\neg A(x)]$ se debe obtener una proposición categóricamente falsa que haría el papel de F_0.	Manifiesta que debe llegarse a una contradicción.
Cuando se obtiene la proposición F_0 se puede concluir que la proposición original $\forall x \in U[A(x)]$ es verdadera.	Manifiesta que una vez determinada la contradicción podía concluirse que la proposición original era verdadera.

A continuación, se ilustra con un caso particular el procedimiento seguido para la codificación de las respuestas de los sujetos que dieron lugar a los resultados. Para ello, se presenta la respuesta del sujeto EBH10 sobre la forma de proceder en la demostración de la proposición genérica (figura 1) y el ejemplo brindado con su correspondiente demostración (figura 2), todas las respuestas referidas a la tarea 1: universal simple.



TAREA 1

Forma verbal: *Todos los elementos de un conjunto U satisfacen una propiedad $P(x)$.*

Forma simbólica: $\forall x \in U\,(P(x))$.

1.1 Explique la forma general en la que usted realizaría la demostración matemática de esta proposición genérica.

Yo procedo de la siguiente manera:

1) Fijo un elemento genérico del conjunto, con el cual voy a trabajar.

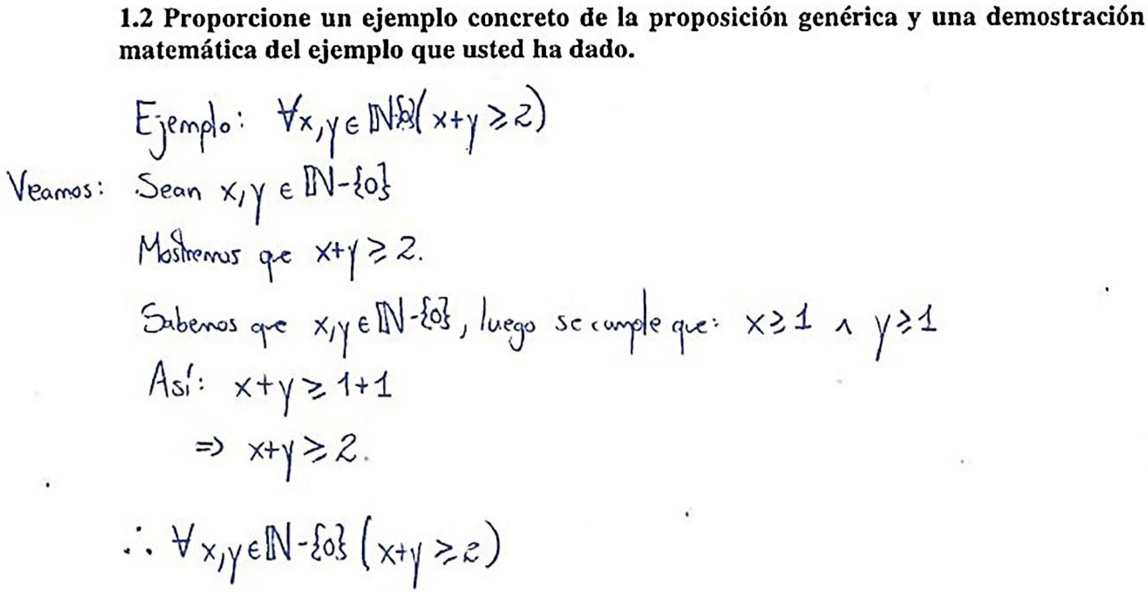
2) Muestro que ese elemento genérico satisface la propiedad que se plantea.

3) Como el elemento genérico representa a cualquiera de los valores del conjunto, el hecho de que satisfaga la propiedad, indica que cualquier valor del conjunto (elemento del conjunto) satisface esa propiedad. Con ello puede concluirse que cualquier elemento de ese conjunto satisface la propiedad.

Figura 1. Explicación de la forma de proceder en la proposición genérica de la tarea 1 por parte del sujeto EBH10

Con base en el análisis de la figura 1 se tiene que el sujeto evidencia en su respuesta sobre la proposición genérica (PG) los dos indicadores de conocimiento definidos para el cuantificador universal y asociados al tipo de demostración directa (ver tabla 2): que debe considerarse un elemento arbitrario del universo y que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario, por lo tanto, para este sujeto se asigna un 1 a cada indicador. Además, no evidencia ninguno de los indicadores definidos para el tipo de demostración indirecta (ver tabla 2), por lo que para este sujeto se asigna 0 a cada uno de esos indicadores.

De forma similar, al analizar la figura 2 se puede notar que el sujeto brinda una proposición que se ajusta a la estructura sintáctica de la proposición genérica considerada en la tarea 1, a saber, $\forall x \in U\big(P(x)\big)$. Además, en su demostración evidencia el indicador asociado a la escogencia de un elemento arbitrario del universo, por lo tanto, se asigna 1 a ese indicador en la demostración del ejemplo (DE), sin embargo, no manifiesta de forma explícita que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario y en consecuencia se asigna 0 a ese indicador. Asimismo, no evidencia ninguno de los indicadores definidos para la demostración indirecta, por lo que se asigna 0 a cada uno de ellos para este sujeto.


1.2 Proporcione un ejemplo concreto de la proposición genérica y una demostración matemática del ejemplo que usted ha dado.

Ejemplo: $\forall x, y \in \mathbb{N}-\{0\} (x+y \geq 2)$

Veamos: Sean $x, y \in \mathbb{N}-\{0\}$

Mostremos que $x+y \geq 2$.

Sabemos que $x, y \in \mathbb{N}-\{0\}$, luego se cumple que: $x \geq 1 \wedge y \geq 1$

Así: $x+y \geq 1+1$

$\Rightarrow x+y \geq 2$.

$\therefore \forall x, y \in \mathbb{N}-\{0\} (x+y \geq 2)$

Figura 2. Ejemplo de proposición genérica brindado y demostración por parte del sujeto EBH10 en la tarea 1

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados se presentan considerando las tres categorías definidas para analizar las respuestas de los sujetos en torno a dos cuestiones: la explicación de la forma de proceder en la demostración de cada proposición genérica y la demostración realizada del ejemplo propuesto.

La categoría (1) tipo de demostración es transversal a las otras dos. En las categorías (2) tipo de cuantificador y (3) tipo de conectiva lógica se establecieron indicadores de conocimiento para cada cuantificador y para cada conectiva lógica con cuantificación universal, separados por el tipo de demostración: directa e indirecta. Dichos indicadores se muestran de la tabla 4 a la tabla 9. En cada una de ellas se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas conocimiento de los indicadores planteados para la explicación de la forma de demostrar la proposición genérica (PG) y para la demostración del ejemplo propuesto (DE). En las categorías (2) y (3) se hace también la transcripción de algunas respuestas representativas para ilustrar los casos. En la tabla 3 se presenta la cantidad de sujetos que hicieron referencia a la demostración directa o indirecta.

Se presenta, además, la síntesis de las respuestas de los sujetos sobre las formas de proceder en la demostración que no fueron contempladas en los indicadores de conocimiento y el promedio de sujetos que presentaron un ejemplo concreto que se ajustaba a la estructura sintáctica de la proposición genérica solicitada en cada una de las seis tareas.

Categoría 1. Tipo de demostración: directa o indirecta

En la tabla 3 se presenta el número de sujetos que mencionaron el uso de la demostración directa o indirecta en cada una de las seis tareas, tanto para la proposición genérica como para la demostración del ejemplo que brindaron. Esta tabla sintetiza la información sobre el tipo de demostración de las tablas 4 a la 9.

Tabla 3

Número de sujetos que evidencian en las tareas la demostración directa e indirecta

Tipo de demostración		Tarea 1	Tarea 2	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
Directa	PG	21	20	22	17	17	22
	DE	20	20	21	14	14	20
Indirecta	PG	04	06	06	02	00	02
	DE	02	00	01	00	00	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

La demostración directa fue el método preferido por los profesores de matemática en formación inicial en las seis tareas. En el caso de la proposición genérica fue mencionada por 20 sujetos en promedio y en la demostración del ejemplo fue empleada por 18 sujetos en promedio. Por su parte, tres sujetos en promedio hicieron referencia a la demostración indirecta en la proposición genérica y fue empleada en la demostración del ejemplo únicamente por tres sujetos: dos en la tarea 1 y uno en la tarea 3. El programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria costarricense plantea que el profesor realice demostraciones a sus alumnos, la mayoría mediante el tipo de demostración directa, sin embargo, también se plantean resultados que deben demostrarse de forma indirecta, como la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, lo que hace necesario tener el conocimiento de este tipo de demostración.

Categoría 2. Tipo de cuantificador: universal o existencial

El cuantificador universal: $\forall x \in U\big(P(x)\big)$

El cuantificador universal estuvo presente en todas las tareas, excepto en la tarea 2 que trataba sobre el cuantificador existencial. En la tabla 4 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para este cuantificador cuando se empleaba el tipo de demostración directa e indirecta.

Tabla 4

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento del cuantificador universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 1	Tarea 3	Tarea 4	Tarea 5	Tarea 6
Demostración directa						
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario del universo	PG	21	18	15	16	16
	DE	20	18	14	13	19
Manifiesta que la propiedad se satisface para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario	PG	03	01	01	01	01
	DE	01	00	00	00	00
Demostración indirecta						
Manifiesta que se debe suponer la negación de la proposición dada	PG	04	02	02	00	00
	DE	02	01	00	00	00
Manifiesta cuál es la equivalencia de la negación de la proposición	PG	03	02	02	00	00
	DE	02	01	00	00	00
Manifiesta que debe llegarse a una contradicción	PG	03	01	02	00	00
	DE	02	01	00	00	00
Manifiesta que una vez determinada la contradicción podía concluirse que la proposición original era verdadera	PG	02	01	01	00	00
	DE	02	01	00	00	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

En el caso de la demostración directa, los sujetos evidenciaron conocimiento de que debían considerar un elemento arbitrario del universo de discurso, específicamente, 17 sujetos en promedio, tanto para la proposición genérica como en la demostración del ejemplo. De este modo, la mayoría de los sujetos tenía claro que en proposiciones con cuantificación universal su demostración no puede abordarse apelando a casos particulares. Se presentan dos respuestas representativas, la del sujeto EBM05 para la proposición genérica y la del sujeto ELH06 en el ejemplo y su demostración, ambos en la tarea 1:

EBM05: Primero aclaro que inicia la prueba. Seguidamente tomaría un elemento arbitrario del conjunto U. Después llevaría el elemento de forma que se aprecie el cumplimiento de la propiedad $P(x)$. Finalmente concluyo que el elemento satisface la propiedad $P(x)$ y escribo que ha finalizado la prueba.

ELH06: Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}\left((x^2+1)>0\right)$. Demostración: Sea $x \in$ □ . Por tricotomía, todo elemento $x \in$ □ cumple que $x>0$, $x=0$ o $x<0$. Elevando al cuadrado se tiene que $x^2>0$ o $x^2=0$. Como $1>0$ y sumando miembro a miembro se concluye que $x^2+1>0, \forall x \in$ □.

Pocos sujetos mostraron conocimiento de que la propiedad en cuestión se satisfacía para todos los elementos del conjunto universo en virtud de que se había validado para un elemento arbitrario. En la proposición genérica, este hecho fue mencionado por tres sujetos en la tarea 1 y por un sujeto en las tareas 3, 4, 5 y 6. En la demostración del ejemplo, solo un sujeto evidenció este indicador de conocimiento en la tarea 1. Una respuesta que evidencia este conocimiento es la del sujeto EBH16 en la proposición genérica de la tarea 1:

EBH16: Como la proposición se cumple para cualquier “x” elemento del conjunto “U” entonces la demostración debe iniciarse escogiendo a un elemento cualquiera, pero fijo. Como un representante del conjunto y luego probar que este elemento cumple con la propiedad “$P(x)$”. Así como el elemento escogido es genérico aseguramos que se cumple para cualquiera dentro del conjunto.

La demostración indirecta, fue mencionada en las tareas 1, 3 y 4 en promedio por tres sujetos, tanto para la proposición genérica como en la demostración del ejemplo, quienes evidenciaron conocimiento de que se debía suponer la negación de la proposición dada $\neg\forall x \in U\big(P(x)\big)$, que era equivalente a la proposición $\exists x \in U\big(\neg P(x)\big)$, que debía llegarse a una contradicción y que una vez hecho esto podía concluirse que la proposición original $\forall x \in U\big(P(x)\big)$ era verdadera. Una respuesta que muestra conocimiento sobre la demostración indirecta en la proposición genérica de la tarea 1, es la del sujeto ELH03.

ELH03: Primeramente, es importante definir un elemento que pertenece al conjunto, este debe ser expresado de manera general, ya que casos particulares no garantizan o justifican adecuadamente que la proposición se cumple para todos los elementos de U. Seguidamente, se procede a verificar que dicho elemento "x" cumple con tal proposición, aquí podríamos utilizar una demostración directa o indirecta, esta última consiste en negar la proposición con la esperanza de llegar a alguna contradicción, y de esta manera, al ser la proposición negada falsa, la proposición sin negar sería verdadera por deducción.

El cuantificador existencial: $\exists x \in U(P(x))$

Este cuantificador estuvo presente en la tarea 2 del cuestionario. En la tabla 5 se presenta el número de sujetos que dieron evidencia en sus respuestas de los indicadores de conocimiento definidos para este cuantificador cuando se empleaba el tipo de demostración directa e indirecta.

Tabla 5

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento del cuantificador existencial en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 2
Demostración directa		
Manifiesta que debe mostrarse un elemento del universo que cumpla la propiedad o se dice que tal elemento se podría obtener de alguna forma (prueba constructiva del existencial).	PG	19
	DE	20
Manifiesta que es posible garantizar que un elemento del universo cumple la propiedad mediante teoremas que justifiquen tal existencia (prueba no constructiva del existencial).	PG	01
	DE	00
Demostración indirecta (Reducción al absurdo)		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\exists x \in U(P(x))$	PG	06
	DE	00
Manifiesta que la proposición $\neg\exists x \in U(P(x))$ es equivalente a la proposición $\forall x \in U(\neg P(x))$.	PG	03
	DE	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\exists x \in U(P(x)) \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	PG	05
	DE	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\exists x \in U(P(x))$ debe ser falsa y que en consecuencia $\exists x \in U(P(x))$ debe ser verdadera	PG	01
	DE	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

La mayor parte de los profesores de matemáticas en formación inicial evidenciaron una preferencia por la demostración directa para proposiciones con cuantificación existencial, particularmente consideraron que para proceder en la demostración debía exhibirse un elemento concreto del universo que cumpliera la propiedad y, además, manifestaron una preocupación por contar con algún procedimiento, posiblemente de tipo algebraico, para determinar tal elemento. En el caso de la proposición genérica, tal procedimiento consistiría en analizar el predicado $P(x)$ para tener algún indicio de cuál elemento podría funcionar, sin embargo, los sujetos no aclararon si tal procedimiento lo considerarían como parte de la demostración. Algunas respuestas representativas de este caso son las siguientes:

EBH02: Debo analizar $P(x)$ de tal manera que, este señale algún valor $x \in U$, tal que cumpla $P(x)$.

ELH03: En este tipo de proposición, basta con mostrar algún elemento de U que cumpla con la condición $P(x)$, pero no siempre es fácil encontrarlo, por lo que se podría despejar a "x" en $P(x)$ para ver su forma, y ayudarnos a determinarlo.

Un grupo de ocho profesores consideró que ese procedimiento de obtención formaba parte de la demostración del ejemplo, aunque tal forma de proceder asume de forma implícita la existencia. Una respuesta representativa de este caso es la del sujeto EBM09:

EBM09: Proposición: $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 = 1)$. Demostración: $x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \vee x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$. Basta tomar 1 y -1. ∴ Los valores que existen son 1 y -1.

En general, los profesores solo mencionan casos de existenciales en los que es posible exhibir un elemento de manera simple, sin aludir a aquellos cuya existencia debe ser garantizada apelando a elementos más teóricos.

El programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria de Costa Rica establece como parte del proceso razonar y argumentar que los estudiantes formulen conjeturas y se trabaje con ellas en tres etapas: la verificación de casos particulares, la propuesta de un argumento matemático para su justificación y finalmente la demostración. En cada una de estas etapas el conocimiento del profesor de matemática sobre los cuantificadores, universal y existencial, es fundamental para determinar la generalidad o particularidad de una proposición matemática sobre la que se conjetura y en función de ello, garantizar la validez de un argumento matemático para su demostración.

Categoría 3. Tipo de conectiva lógica: implicación universal, disyunción universal, conjunción universal y doble implicación universal

La implicación universal: $\forall x \in U[P(x) \Rightarrow Q(x)]$

La implicación con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 3 del cuestionario. En la tabla 6 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta, en el caso de esta última se consideró la reducción al absurdo y la contraposición.

Tabla 6
Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la implicación universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 3
Demostración directa		
Manifiesta que debe suponerse que $P(x)$ es una proposición verdadera	PG	22
	DE	21
Manifiesta que debe garantizarse que $Q(x)$es una proposición verdadera con base en $P(x)$ y en la teoría matemática en donde están insertas las proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$.	PG	22
	DE	21
Demostración indirecta (Reducción al absurdo)		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la negación de proposición dada y que es equivalente a la proposición $\exists x \in U[P(x) \wedge \neg Q(x)]$.	PG	02
	DE	01
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg \forall x \in U[P(x) \Rightarrow Q(x)] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	PG	01
	DE	01
Manifiesta que garantizada F_0 entonces $\neg \forall x \in U[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U[P(x) \Rightarrow Q(x)]$ debe ser verdadera.	PG	01
	DE	01
Demostración indirecta (Contraposición)		
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario x del universo y demostrar de forma directa la proposición $\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$.	PG	05
	DE	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

Hubo una preferencia de los profesores de matemáticas en formación inicial por la demostración directa, 22 en el caso de la proposición genérica y 21 en la demostración del ejemplo, quienes mostraron conocimiento sobre los dos indicadores que refieren al criterio de validez de la implicación, a saber, que debía suponerse que el antecedente $P(x)$ era verdadero y que debía garantizarse que el consecuente $Q(x)$ era verdadero con base en la información asumida en la hipótesis y con la teoría matemática en donde estaban insertas las proposiciones $P(x)$y $Q(x)$. Una minoría de sujetos optaron por la demostración indirecta, seis para la proposición genérica y uno para la demostración del ejemplo propuesto. En este caso la mayoría se inclinaron por el uso de la contraposición

$\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$. Una respuesta representativa de demostración directa es la del sujeto ELM04.

ELM04: En este caso se observa la demostración por implicación, esta demostración se puede realizar por negación $\neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$, pero la forma usual es cuando se toma un elemento x que cumple con la propiedad $P(x)$ y llegar que justamente ese mismo elemento también cumple con la propiedad $Q(x)$.

La disyunción universal: $\forall x \in U[P(x) \vee Q(x)]$

La disyunción con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 4 del cuestionario. En la tabla 7 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta.

Tabla 7

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la disyunción universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 4
Demostración directa		
Manifiesta que el incumplimiento de alguna de las proposiciones, $P(x)$ o $Q(x)$ debe implicar el cumplimiento de la otra proposición. Es decir, que debe demostrarse $\neg P(x) \Rightarrow Q(x)$ o $\neg Q(x) \Rightarrow P(x)$.	PG	12
	DE	09
Demostración indirecta		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\forall x \in U[P(x) \vee Q(x)]$ la cual es equivalente a la proposición $\exists x \in U[\neg P(x) \wedge \neg Q(x)]$.	PG	02
	DE	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	PG	02
	DE	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in U[P(x) \vee Q(x)]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U[P(x) \vee Q(x)]$ debe ser verdadera.	PG	01
	DE	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

En el caso de la demostración directa, los pocos sujetos que evidencian conocimiento de su demostración, 12 en la proposición genérica y nueve en la demostración del ejemplo, transformaron la disyunción en una implicación, planteando que se demostraba evidenciando que el incumplimiento de alguna de las proposiciones, $P(x)$ o $Q(x)$ debía implicar el cumplimiento de la otra proposición, es decir, que debía demostrarse $\neg P(x) \Rightarrow Q(x)$ o $\neg Q(x) \Rightarrow P(x)$. La demostración indirecta fue mencionada por dos sujetos en la proposición genérica y no fue empleada por ninguno en la demostración del ejemplo, pero ambos sujetos mostraron evidencia de los indicadores de conocimiento planteados en este caso. Se presentan dos respuestas representativas que evidencian conocimiento sobre la demostración directa, la del sujeto EBH04 en la proposición genérica y la del sujeto ELH01 en el ejemplo y su demostración:

EBH04: En esta demostración pues me basaría en hacer casos o por una proposición equivalente sería suponer falsa $P(x)$ y llegar a demostrar $Q(x)$ o suponer falsa $Q(x)$ y llegar a demostrar $P(x)$.

ELH01: Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}(x < 0 \vee x + 1 > 0)$. Demostración: usaré su equivalencia $\forall x \in \mathbb{R}(\neg(x < 0) \Rightarrow x + 1 > 0)$. Sea $x \in \square$, supóngase que $x < 0$ es falsa, luego $x \geq 0$ (por ley de tricotomía para los números reales) y como $1 > 0$, $x + 1 > 0$.

La conjunción universal: $\forall x \in U[P(x) \wedge Q(x)]$

La conjunción con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 5 del cuestionario. En la tabla 8 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta.

Tabla 8

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la conjunción universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 5
Demostración directa		
Manifiesta que $P(x)$ y $Q(x)$ son proposiciones para el elemento arbitrario x seleccionado.	PG	16
	DE	13
Manifiesta que debe garantizarse que tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son proposiciones verdaderas con base en la teoría matemática en donde están insertas dichas proposiciones.	PG	15
	DE	12
Demostración indirecta		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\forall x \in U[P(x) \wedge Q(x)]$ la cual es equivalente a la proposición $\exists x \in U[\neg P(x) \vee \neg Q(x)]$.	PG	00
	DE	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U[P(x) \wedge Q(x)] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	PG	00
	DE	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in U[P(x) \wedge Q(x)]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U[P(x) \wedge Q(x)]$ debe ser verdadera.	PG	00
	DE	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

De los 16 sujetos que evidenciaron indicadores de conocimiento en esta tarea, todos ellos hicieron referencia únicamente a la demostración directa y la mayoría evidenció en la proposición genérica y en la demostración del ejemplo, que $P(x)$ y $Q(x)$ eran proposiciones para el elemento arbitrario x seleccionado, 16 y 13 sujetos respectivamente. En cuanto al indicador de conocimiento sobre el criterio de validez de la conjunción, es decir, el conocimiento de que debía garantizarse que $P(x)$ y $Q(x)$ eran proposiciones verdaderas con base en la teoría matemática en donde están insertas dichas proposiciones, 15 sujetos lo evidenciaron en la proposición genérica y 12 sujetos en la demostración del ejemplo. Dos respuestas representativas, una de la proposición genérica y otra sobre el ejemplo y su demostración, son las de los sujetos EBM15 y ELH02:

EBM15: Primero se da un elemento "x" en U. Luego se requiere probar ambas proposiciones $P(x)$ y $Q(x)$. Se podría trabajar cada una por aparte.

ELH02: Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 + 5 > 2 \wedge x < x + 3)$. Demostración: sea $x \in \mathbb{R}$. Luego sabemos que $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 5 \geq 5 \Rightarrow x^2 + 5 \geq 5 \wedge 5 > 2 \Rightarrow x^2 + 5 > 2$. Además, se sabe que $x \leq x \wedge 0 < 3 \Rightarrow x < x + 3$.

La doble implicación universal: $\forall x \in U[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$

La doble implicación con cuantificador universal estuvo presente en la tarea 6 del cuestionario. En la tabla 9 se presenta la cantidad de sujetos que evidenciaron en sus respuestas a los indicadores propuestos para la demostración directa e indirecta.

Tabla 9

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la doble implicación universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 6
Demostración directa		
Manifiesta que debe garantizarse que tanto $P(x) \Rightarrow Q(x)$ como $Q(x) \Rightarrow P(x)$ son proposiciones verdaderas.	PG	22
	DE	20
Demostración indirecta (Reducción al absurdo)		
Manifiesta que debe suponerse verdadera la proposición $\neg\forall x \in U[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$ la cual es equivalente a la proposición $\exists x \in U[(P(x) \wedge \neg Q(x)) \vee (Q(x) \wedge \neg P(x))]$.	PG	00
	DE	00
Manifiesta que se debe demostrar que $\neg\forall x \in U[P(x) \Leftrightarrow Q(x)] \Rightarrow F_0$ en donde F_0 representa a cualquier afirmación contradictoria.	PG	00
	DE	00
Manifiesta que una vez garantizada F_0 entonces $\neg\forall x \in$	PG	00

Tabla 9

Número de sujetos que evidencian los indicadores de conocimiento de la doble implicación universal en la demostración directa e indirecta

Indicadores de conocimiento		Tarea 6
$U[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$ debe ser falsa y que en consecuencia $\forall x \in U[P(x) \Leftrightarrow Q(x)]$ debe ser verdadera.	DE	00
Demostración indirecta (Contraposición)		
Manifiesta que debe considerarse un elemento arbitrario x del universo y demostrar de forma directa la proposición $\neg Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x)$.	PG	02
	DE	00

Nota. PG=Proposición genérica; DE=Demostración del ejemplo.

Sobre la demostración directa, la gran mayoría de los sujetos evidenció conocimiento sobre el indicador fundamental de cómo proceder en este tipo de demostración, a saber, que debía garantizarse que tanto $P(x) \Rightarrow Q(x)$ como $Q(x) \Rightarrow P(x)$ eran proposiciones verdaderas, 22 en la proposición genérica y 20 en la demostración del ejemplo. La demostración indirecta solo fue mencionada por dos sujetos en la proposición genérica y ambos conocían que debía considerarse un elemento arbitrario x del universo y demostrar de forma directa la proposición $\neg Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x)$. Se presenta un par de respuestas típicas de la demostración directa, la del sujeto ELM07 para la proposición genérica y la del sujeto EBH07 para el ejemplo y su demostración.

ELM07: Se da un elemento genérico del universo y se realiza la demostración en ambas direcciones, es decir, se prueba que $\forall x \in U\big(P(x) \Rightarrow Q(x)\big)$ y $\forall x \in U\big(Q(x) \Rightarrow P(x)\big)$.

EBH07: Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}\ (ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1)$. Demostración: sea $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$) Supongamos que: $ln(x) = 0$. Debemos probar que $x = 1$. Veamos: $ln(x) = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1$. $\Leftarrow$) Supongamos que: $x = 1$. Debemos probar que $ln(x) = 0$. Veamos: $x = 1 \Rightarrow ln(x) = ln(1) \Rightarrow ln(x) = 0$.

Formas alternativas de proceder en la demostración no contempladas en los indicadores de conocimiento y ajuste del ejemplo concreto a la estructura sintáctica

A continuación, se presenta una síntesis de las respuestas de los sujetos que presentaron formas de proceder en la demostración no contempladas en los indicadores de conocimiento que hemos propuesto en este estudio.

La inducción matemática fue mencionada en la tarea 1 por cuatro profesores de matemáticas en formación inicial como una posible forma de proceder en la demostración de la proposición genérica $\forall x \in U\big(P(x)\big)$, tres de ellos aclararon que siempre que el conjunto universo fuera el conjunto de los números naturales.

Se presenta un par de respuestas, la del sujeto EBH04 que no aclara si el conjunto universo es el conjunto de los números naturales y la del sujeto ELM07 que sí lo indica.

EBH04: Lo que sugiere esta demostración es que para cualquier número que usted se tome del conjunto U o no necesariamente es un número, puede ser un elemento, debe vivir o satisfacer la propiedad $P(x)$, por lo que un método a usar sería inducción matemática.

ELM07: Dado que se debe satisfacer la propiedad para todos los elementos, debe presentarse un elemento genérico del universo. Si la forma del elemento interfiere en los pasos para la demostración (por ejemplo en $\mathbb{Z}$, se puede tener $x = 0, x = a(a \in \mathbb{N}), x = -a$), a veces es necesario presentar la demostración por casos. Por ejemplo, si $U = \square$, debe evaluarse la posibilidad de que se demuestre por medio del axioma de inducción matemática, por el principio de inducción matemática o por el principio de inducción fuerte.

El uso de un conjunto universo finito fue propuesto por dos sujetos en la tarea 4, tres sujetos en la tarea 5 y un sujeto en la tarea 6. En todos los casos, los sujetos brindaron un ejemplo de proposición en donde el conjunto tenía pocos elementos y en su demostración verificaron el cumplimiento de la propiedad en todos los casos. Una respuesta representativa es la del sujeto EBH03 en la tarea 5.

EBH03: Proposición: Sea $U = \{2,4,6,8\}, \forall x \in U(x = 2k(k = 1,2,3,4) \wedge x > 0)$. Demostración para 2: $x = 2 \cdot 1 = 22 > 0$; para 4: $x = 2 \cdot 2 = 44 > 0$; para 6: $x = 2 \cdot 3 = 66 > 0$; para 8: $x = 2 \cdot 4 = 88 > 0$.

Dos sujetos en la demostración del ejemplo de la tarea 4 consideraron a un elemento arbitrario del universo y posteriormente presentaron una demostración adecuada por casos. Un ejemplo es la respuesta del sujeto EBM09.

EBM09: Proposición: $\forall x \in \mathbb{R}(x^2 > 0 \vee x = 0)$. Demostración: sea $x \in \mathbb{R}$. Por tricotomía, caso 1 $x > 0$: $x > 0 \wedge x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$; caso 2 $x < 0$: $x < 0 \wedge x < 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$; caso 3 $x = 0$: $x = 0 \wedge x = 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \therefore x^2 > 0 \vee x = 0$.

Cuatro sujetos mencionaron en la proposición genérica de la tarea 6 que podría trabajarse la doble implicación de manera simultánea, es decir, como condición necesaria y suficiente simultáneamente, sin necesidad de trabajar las dos implicaciones por separado. Como ejemplo se presenta la respuesta del sujeto EBM15.

EBM15: Primero, me doy un elemento del conjunto U. Luego se decide en cuál de los dos sentidos del sí y sólo sí, se quiere trabajar, pues muchas veces hay un caso sencillo y otro más complejo. Si se inicia en el sentido $\Rightarrow$), se supone $P(x)$ verdadera y se prueba $Q(x)$; luego se prueba $\Leftarrow$), es decir se supone $Q(x)$ verdadera y se prueba $P(x)$. Ahora, hay demostraciones en donde se puede trabajar el $\Leftrightarrow$ directamente sin necesidad de demostrar las dos direcciones.

Las formas alternativas de proceder en la demostración mencionadas por los sujetos evidencian conocimiento sobre la demostración matemática. Pero la inducción matemática y las demostraciones en donde se utiliza un conjunto universo finito, no tienen presencia en el programa de estudios de matemáticas de la educación secundaria costarricense. No obstante, ambos procedimientos pueden ser empleados por el profesor de matemáticas en la exploración de conjeturas para la verificación de casos particulares antes de presentar una demostración matemática formal.

Por otra parte, 21 sujetos en promedio brindaron un ejemplo concreto de la proposición genérica, en cada una de las seis tareas del cuestionario, que se ajustaba a la estructura sintáctica solicitada. Dos respuestas representativas son las de los sujetos EBH02 para la proposición de la tarea 1 y ELM07 para la proposición de la tarea 2:

EBH02: Proposición en la estructura $\forall x \in U\big(P(x)\big)$ en la tarea 1:$\forall x \in \mathbb{R}(x^2 \geq 0)$.

ELM07: Proposición en la estructura $\exists x \in U\big(P(x)\big)$ en la tarea 2: $\exists x \in \mathbb{Z}(x + 1 = 0)$.

Conclusiones

En esta investigación se ha logrado caracterizar el conocimiento de los futuros profesores de matemáticas sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. El modelo MTSK ha permitido lograr parcialmente este objetivo, debido a que en el subdominio de la práctica matemática se incluye a la categoría demostrar, sin embargo, en este estudio hemos tenido que completar la categorización para la demostración que se ha difundido del MTSK (Flores-Medrano, 2015) con base en investigaciones sobre la demostración en profesores de matemáticas, creando nuevos subcomponentes que pueden ser considerados como evidencias del conocimiento matemático en dos de los componentes propuestos por Flores-Medrano (2015) sobre la demostración. Estos son: (1) el conocimiento sobre la naturaleza de la demostración matemática y (2) el conocimiento sobre las funciones de la demostración en las matemáticas. Además, hemos propuesto un componente nuevo denominado (3) la convicción de un argumento matemático.

Dentro de la primera componente se ha considerado el subcomponente denominado validez lógica y se han precisado los elementos que lo conforman, lo que permitió generar para esta investigación tres categorías que nos permitieron estudiar el conocimiento de los profesores de matemáticas en formación inicial: (1) el tipo de demostración: directa o indirecta, (2) el tipo de cuantificador: universal o existencial y (3) el tipo de conectiva lógica: implicación universal, disyunción universal, conjunción universal y doble implicación universal. Estas componentes han generado indicadores de conocimiento, los cuales hacen referencia a frases para determinar en las respuestas de los sujetos evidencias de conocimiento sobre las formas de proceder desde el punto de vista lógico-sintáctico en la demostración.

Los indicadores de conocimiento establecidos para este estudio nos permitieron clasificar la gran mayoría de respuestas de los profesores de matemáticas en formación inicial en las seis tareas del cuestionario. Fueron pocas las respuestas de los sujetos que presentaron formas de proceder en la demostración no contempladas en tales indicadores tales como el uso de la inducción matemática, la verificación de todos los casos cuando el conjunto universo es finito, las demostraciones por casos y la demostración simultánea de la doble implicación lógica universal. Estas formas alternativas de proceder en la demostración de una proposición matemática, nos sugiere que debemos considerar más indicadores de conocimiento que contemplen estos casos no previstos a priori en nuestra investigación. No obstante, por la gran variedad de formas de demostrar, consideramos que es complejo contar con un conjunto de indicadores que abarquen todos los casos posibles. En este sentido, pensamos que esta investigación puede brindar insumos para el desarrollo de trabajos similares y de este modo, contar con una mayor variedad de categorías e indicadores de conocimiento.

La mayoría de los profesores de matemáticas en formación inicial mostraron conocimiento sobre los aspectos lógicos y sintácticos de la demostración matemática. En el caso del ejemplo concreto de proposición genérica la mayoría ofreció una proposición que correspondía en su forma sintáctica a lo solicitado en cada una de las tareas.

En cuanto al tipo de demostración directa o indirecta, tuvieron preferencia por la demostración directa tanto en la explicación de la forma de demostrar una proposición genérica, como en la demostración del ejemplo propuesto. Consideramos que una posible explicación de este hecho es que normalmente en los cursos de matemáticas de la carrera de enseñanza de la matemática en la UNA, los futuros profesores están expuestos mayoritariamente a demostraciones directas, pues las proposiciones que se les presentan se han asumido como teoremas y, por ende, verdaderas.

Según Durand-Guerrier et al. (2012a) a los estudiantes pocas veces se les presentan proposiciones matemáticas falsas para que analicen su validez y determinen en qué condiciones podrían ser verdaderas. De hecho, actividades tales como la exploración, la validación y la interpretación, generan la necesidad de comprensión al encontrarse con resultados no previstos, contradicciones o ambigüedades. En el programa de matemáticas de la educación secundaria de Costa Rica y en otras propuestas curriculares, se enfatiza la importancia y la necesidad de que los alumnos de secundaria formulen y analicen conjeturas, en donde no hay certeza de la validez de los resultados obtenidos. Esto promueve la necesidad de realizar procesos de razonamiento, argumentación y demostración. Por tanto, consideramos relevante que los futuros profesores sean sometidos a esos mismos procesos matemáticos en sus planes formativos.

En cuanto al tipo de cuantificador universal la mayor parte evidenció que para su demostración se debía considerar un elemento arbitrario del conjunto universo y que sobre tal elemento se podía garantizar la veracidad de la propiedad en cuestión, sin embargo, muy pocos indicaron que una vez garantizada la veracidad se podía concluir que la propiedad era válida para la totalidad de los elementos del conjunto universo.

Esto último es relevante, pues como lo indican Durand-Guerrier et al. (2012b) si se puede demostrar que una propiedad es cierta para un objeto particular elegido de manera arbitraria, la generalización universal permite concluir que la propiedad es válida para todos los objetos de ese tipo. Creemos que la comprensión de esta generalización universal es necesaria para la solidez de la conclusión de un resultado matemático. En este sentido Knuth (2002) menciona que para algunos profesores de matemáticas la demostración es una construcción falible y que, una vez realizada la demostración de una afirmación matemática, podrían existir contraejemplos u otro tipo de evidencia que pusiera en duda la generalidad de la demostración. Además, señala que algunos profesores sienten la necesidad de hacer una verificación empírica como un elemento adicional de convicción.

En el caso del cuantificador existencial, la mayoría se inclinó por la demostración constructiva, es decir, por brindar un elemento concreto del universo que cumpliera la propiedad en cuestión, además mostraron preocupación por la forma de determinar dicho elemento y en algunos consideraron parte de la demostración el procedimiento de búsqueda del elemento en cuestión.

Concordamos con Durand-Guerrier et al. (2012b) en que la demostración constructiva es importante debido a que cuando se sabe que existe un objeto de cierto tipo se le puede asignar un nombre y que esto es útil en la introducción de símbolos y definiciones. Consideramos que la demostración no constructiva del existencial también debe observarse con más intensidad en los futuros profesores de matemáticas, pues muchas afirmaciones existenciales se justifican empleando otros elementos como axiomas o teoremas precedentes en la teoría matemática en estudio. Por ejemplo, la demostración de que $\exists x \in \mathbb{R}(x^7 + x + 1)$ requiere el uso de otros argumentos matemáticos diferentes a la exhibición de un número particular que cumpla la propiedad.

Coincidimos con Durand-Guerrier et al. (2012b) en que el manejo de los cuantificadores es relevante en la manipulación de objetos matemáticos, pues como estos autores mencionan, algunos matemáticos destacados como Leibniz, Wolf y D'Alembert cometieron errores importantes al resolver problemas de sumas infinitas, límites, convergencia y divergencia debido a un débil control sintáctico y formal sobre los conceptos que estaban tratando y al manejo inadecuado de cuantificadores anidados. En el caso de la Educación Matemática y específicamente, en la formación inicial de profesores de matemáticas, compartimos la perspectiva de Durand-Guerrier et al. (2012b) en el sentido de que el control sintáctico es importante sobre todo cuando el control semántico es inestable, de esta manera una disminución del rigor lógico puede generar malentendidos en el abordaje de la demostración matemática.

En cuanto al tipo de conectiva lógica, la implicación y la doble implicación universales fueron dominadas por la gran mayoría de los sujetos mientras que la conjunción y disyunción universales presentaron más dificultades. La implicación y la doble implicación fueron abordadas mayoritariamente de forma directa. En el caso de la primera, los sujetos evidenciaron conocimiento sobre la forma de proceder asumiendo como verdadero el antecedente y garantizando la veracidad del consecuente; en el caso de la segunda, evidenciaron conocimiento al indicar que debían probarse las dos implicaciones. Consideramos que hubo mayor evidencia de conocimiento en estas dos conectivas lógicas, debido a que, en los cursos de la carrera de enseñanza de la matemática de la UNA, la gran mayoría de proposiciones que los sujetos abordan en los cursos tienen las estructuras sintácticas implicación y doble implicación. En el caso de la conjunción y la disyunción, creemos que debe trabajarse con mayor intensidad en sus criterios de validez en la formación inicial.

Aunque el objetivo principal de este estudio es caracterizar el conocimiento de los sujetos de investigación, consideramos dignas de mención algunas limitaciones observadas en varias respuestas de los sujetos de investigación, tales como el reemplazo de la explicación por la interpretación de la proposición, la confusión entre una propiedad y un conjunto, la verificación de una propiedad en casos particulares de un universo infinito como ejemplo de demostración de una propiedad que afecta el cuantificador universal, la inversión de los cuantificadores universal y existencial, poco manejo de los criterios de verdad de las conectivas lógicas disyunción y conjunción y el uso indebido de algunas equivalencias lógicas.

Según Knuth (2002) el hecho de que algunos profesores de matemáticas presenten limitaciones sobre la demostración no es algo sorprendente, pero la responsabilidad de mejorar la situación recae principalmente en los encargados de su formación.

Creemos que las evidencias de conocimiento halladas en el estudio y estos fenómenos señalados, pueden ser un insumo para considerarse en el abordaje de la demostración en la carrera de enseñanza de la matemática de UNA. En dicha carrera, la demostración es empleada para la verificación de los resultados matemáticos lo que responde al primer nivel planteado por Lo y McCrory (2009), sin embargo, hace falta profundizar en los otros dos niveles mencionados por ambas autoras, a saber, como objeto matemático regulado por reglas y como elemento que favorece el desarrollo de sus futuros alumnos.

Referencias

Alfaro, C., Flores, P., y Valverde, G. (2019). La demostración matemática: significado, tipos, funciones atribuidas y relevancia en el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas. *Uniciencia*, *33*(2), 55-75.

Ayalon, M. y Even, R. (2008). Deductive reasoning: In the eye of the beholder. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 235-247.

Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. y Morselli, F. (2011). Conceptions of proof–In research and teaching. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. Á. y Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8, February 6 - 10, 2013)* (v. 8, pp. 2976-2984). Ankara, Turquía: Middle East Technical University y ERME.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Londres, Reino Unido: Routledge.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, *26*, 15-30.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S. y Tanguay, D. (2012a). Argumentation and proof in the mathematics classroom. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 349-367). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., y Tanguay, D. (2012b). Examining the role of logic in teaching proof. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 369-389). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Espinoza, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(3), 301-324.

Flores-Medrano, E. (2015). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L. C. Contreras y M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor* (pp. 30-34). Huelva, España: SIDM.

Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M., y Liñán, M. (2016). El papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 204-221.

Flores, Á. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

Furinghetti, F. y Morselli, F. (2009). Teachers' beliefs and the teaching of proof. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (pp. 166-171). Taipéi, Taiwán: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Hanna, G. (2002). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Hanna, G., y de Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 1-10). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-283). Providence, RD: American Mathematical Society y Mathematical Association of America.

Herbst, P. (2000). ¿A dónde va la investigación sobre la prueba? En N. Balacheff (Ed.), *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (pp. 191-197). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, *33*(5), 379-405.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D., y Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 327-346). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Lo, J. y McCrory, R. (2009). Proof and proving in a mathematics course for prospective elementary teachers. En F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.),). *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (pp. 41-46). Taipéi, Taiwán: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Ministerio de Educación Pública (2012). *Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado*. San José, Costa Rica: Autor.

Montoro, V. (2007). Concepciones de estudiantes de profesorado acerca del aprendizaje de la demostración. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, *2*(1), 101-121.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (SAEM Thales Trad.). Sevilla, España: SAEM Thales.

Ponte, J. P. da y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the* *psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Rotterdam, Países Bajos: Sense.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J., Bieda, K. N. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En A. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (2nd ed., pp. 315-351). Rotherham, Países Bajos: Sense.

Stylianides, G. J. y Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, VA: NCTM.

Vasco, D. y Climent N. (2018). El estudio del conocimiento especializado de dos profesores de Álgebra Lineal. *PNA*, *12*(3), 129-146.

Viseu, F., Menezes, L., Fernandes, J. A., Gomes, A. y Martins, P. M. (2017). Conceções de professores do ensino básico sobre a prova matemática: influência da experiência profissional. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 430-453.

Christian Alfaro
Universidad Nacional, Costa Rica
cristian.alfaro.carvajal@una.cr

Pablo Flores
Universidad de Granada
pflores@ugr.es

Gabriela Valverde
Universidad de Costa Rica
gabriela.valverde@ucr.ac.cr

Recibido: 09/05/2019. Aceptado: 04/10/2019
doi: 10.30827/pna.v14i2.9363

ISSN: 1887-3987