Resolución del examen de Selectividad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Andalucía – Septiembre de 2019

Antonio Francisco Roldán López de Hierro *

Miércoles, 11 de septiembre de 2019

Opción A

Ejercicio 1 **Se consideran las matrices:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

(a) **(1 punto) Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:**

1) $A \cdot A^t$ **es una matriz simétrica.**

2) $A \cdot A^t + B$ **posee inversa.**

(b) **(1.5 puntos) Resuelva la ecuación matricial** $B \cdot X + A = C$.

Solución: **Apartado (a.1).** La matriz $A \cdot A^t$ siempre es simétrica ya que su matriz traspuesta coincide con ella misma al verificarse $(A \cdot A^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$.

Apartado (a.2). Calculamos la matriz:

$$A \cdot A^t + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Profesor de la Universidad de Granada - http://www.ugr.es/~aroldan

Dado que su determinante vale

$$\det\left(A\cdot A^t+B\right)=\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=6\cdot 2-(-3)\cdot(-4)=12-12=0,$$

la matriz $A\cdot A^t+B$ no posee inversa.

Apartado (b). El determinante de la matriz B es:

$$\det(B)=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-6,$$

por lo que la matriz B posee inversa. Así, la ecuación $B\cdot X+A=C$ puede resolverse de la siguiente forma (es importante multiplicar por la inversa de B por la izquierda):

$$B\cdot X+A=C \quad\Leftrightarrow\quad B\cdot X=C-A \quad\Leftrightarrow\quad X=B^{-1}(C-A).$$

De esta forma:

$$X=B^{-1}(C-A)=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\left[\begin{pmatrix} 7 & -12 & 16 \\ -1 & 7 & 12 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$
$$=\frac{1}{-6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 0 & 6 & 12 \end{pmatrix}=\frac{-1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 18 & 36 \\ 12 & -18 & 48 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\textbf{(a)}\ (1)\text{ es cierta y }(2)\text{ es falsa}\qquad \textbf{(b)}\ X=\begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -2 & 3 & -8 \end{pmatrix}}$$

■

Ejercicio 2 El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0\le x\le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

(a) **(1 punto) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.**

(b) **(0.75 puntos) Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?**

(c) **(0.75 puntos) Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.**

Solución : La función C es polinómica ya que

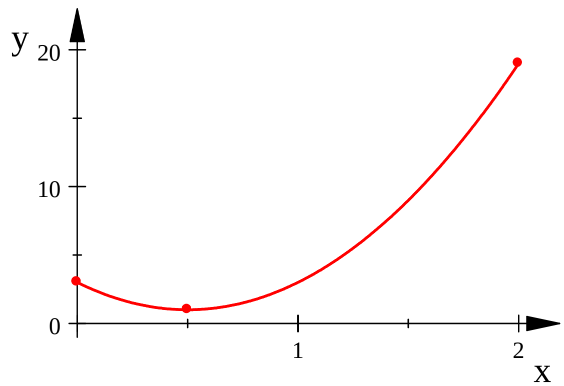
$$C(x)=2(2x-1)^2+1=2(4x^2-4x+1)+1=8x^2-8x+3,$$

y su dominio es el intervalo $[0, 2]$. Se trata de un trozo de parábola convexa cuyo vértice está situado en $x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{16} = 1/2$. Antes de su vértice es decreciente y después de su vértice es creciente, por lo que su vértice es un mínimo absoluto. Su abscisa es

$$y_v = C\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)^2 + 1 = 1,$$

por lo que el vértice está situado en el punto $(0'5, 1)$. Con todos estos datos, podemos hacer un esbozo de su gráfica con una pequeña tabla de valores.

x	y
0	3
$0'5$	1
1	3
2	19



De todo lo anterior deducimos las siguientes soluciones.

(a) C es decreciente en $[0, 0'5[$ y creciente en $]0'5, 2]$.

(b) Se ha de producir medio millón de kilogramos y el coste será de 1 unidad monetaria.

(c) Ver más arriba.

■

Las cuestiones anteriores pueden resolverse con lo que debemos haber aprendido en la ESO. No obstante, también podemos involucrar el uso de la derivada de la siguiente forma.

Apartado (a). Su primera derivada es $C'(x) = 16x - 8$, que sólo se anula en $x = 1/2$. La siguiente tabla nos informa de la monotonía y del mínimo de C.

C'		$-$	mín	$+$	
C	0	$\searrow$	$0'5$	$\nearrow$	$\sqrt{3}$

$C'(0'1) = 1'6 - 8 = -6'4 < 0$; $\quad C'(1) = 16 - 8 = 8 > 0$.

Por consiguiente, C es decreciente en $[0, 0'5[$ y creciente en $]0'5, 2]$.

Apartado (b). Claramente el mínimo se alcanza cuando $x = 0'5$, siendo $C(0'5) = 2(2 \cdot 0'5 - 1)^2 + 1 = 1$.

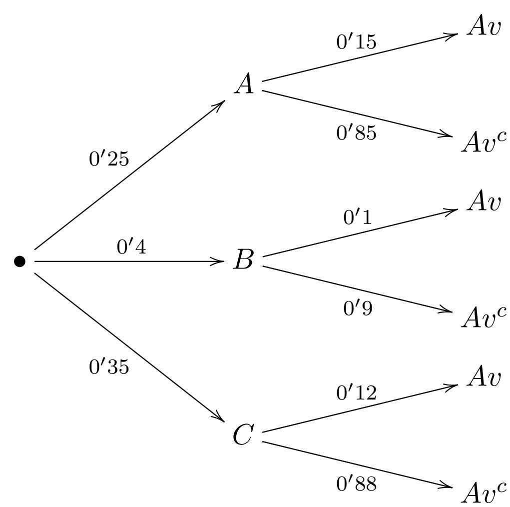
Ejercicio 3 **Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15 % de patinetes del modelo A, el 10 % del B y el 12 % del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.**

(a) **(1 punto) Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.**

(b) **(0.5 puntos) Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?**

(c) **(1 punto) Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C.**

Solución: Llamemos A, B y C a los sucesos "elegido un patinete al azar, éste es del modelo A", "B" o "C", respectivamente, y denotemos por Av al suceso "elegido un patinete al azar, éste presenta alguna avería" (por consiguiente, Av^c significará que el patinete no ha presentado ninguna avería). El enunciado nos permite construir el siguiente diagrama en árbol:



Apartado (a). Aplicando el *teorema de la probabilidad total*, la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería es:

$$p(Av) = p(A) \cdot p\left({}^{Av}\!/_{A}\right) + p(B) \cdot p\left({}^{Av}\!/_{B}\right) + p(C) \cdot p\left({}^{Av}\!/_{C}\right)$$

$$= 0'25 \cdot 0'15 + 0'4 \cdot 0'10 + 0'35 \cdot 0'12 = 0'1195.$$

Apartado (b). Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A (primera rama del árbol), la probabilidad de que no haya presentado ninguna avería es:

$$p\left({}^{Av^c}\!/_{A}\right) = 1 - p\left({}^{Av}\!/_{A}\right) = 1 - 0'15 = 0'85.$$

Apartado (c). Aplicando el teorema de la probabilidad compuesta, la probabilidad de que sea del modelo C y haya presentado alguna avería es:

$$p(C \cap Av) = p(C) \cdot p\left({}^{Av}\!/_{C}\right) = 0'35 \cdot 0'12 = 0'042.$$

Por tanto, la probabilidad de que sea del modelo C o haya presentado avería es:

$$p(C \cup Av) = p(C) + p(Av) - p(C \cap Av) = 0'35 + 0'1195 - 0'042 = 0'4275.$$

$$\boxed{\textbf{(a) } p(Av) = 0'1195 \qquad \textbf{(b) } p\left({}^{Av^c}\!/_{A}\right) = 0'85 \qquad \textbf{(c) } p(C \cup Av) = 0'4275}$$

■

Ejercicio 4 **Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.**

(a) **(1.5 puntos) Obtenga un intervalo, con un 92 % de confianza, para la puntuación media de los participantes en dicho concurso.**

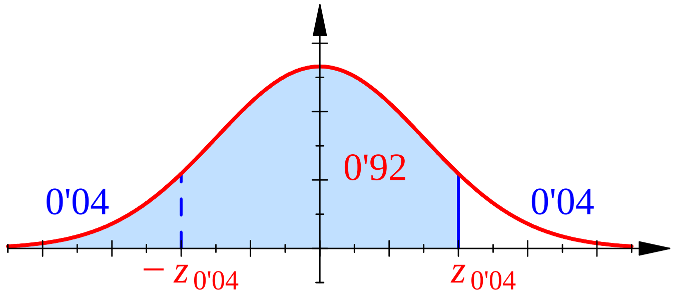
(b) **(1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.**

Solución: Sea X la variable aleatoria que mide la puntuación de un participante, elegido al azar, en dicho concurso. El enunciado nos informa de que X sigue una distribución Normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 36)$, de varianza $\sigma^2 = 36$ puntos^2 (o sea, desviación típica $\sigma = 6$), siendo la media μ desconocida. Se toma una muestra aleatoria de $n = 64$ concursantes que arroja una media de $\overline{x} = 35$ puntos.

Apartado (a). Para aplicar la fórmula del intervalo de confianza para la media μ con desviación típica σ conocida, es decir,

$$\text{IC}(\mu) = \left] \ \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \right[,$$

calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del 92 % (es decir, al $\alpha = 0'08 = 8$ % de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'04$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'04 = 0'96$.



Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 1'75) = 0'9599$ y $p(Z \leq 1'76) = 0'9608$, por lo que tomamos como valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'75$. De esta forma, el intervalo de confianza para la puntuación media al 92 % de confianza es:

$$\text{IC}\,(\mu) = \left] \; \overline{x} \pm z_{\alpha/2}\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; \right[= \left] \; 35 \pm 1'75 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} \; \right[\approx \left] \; 35 \pm 1'313 \; \right[= \left] \; 33'687 \; , \; 36'313 \; \right[.$$

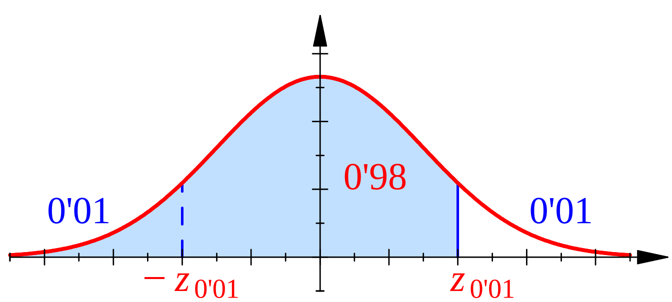
De esta forma, si éste es uno del 92 % de los intervalos que contienen al verdadero valor de la puntuación media (al construir muchos intervalos de confianza asociados a muestras aleatorias independientes), resultará que dicha puntuación media está entre $33'7$ y $36'3$ puntos.

$$\boxed{\text{IC}(\mu) = \left] \; 33'687 \; , \; 36'313 \; \right[.}$$

Apartado (b). El tamaño muestral solicitado debe cumplir:

$$z_{\alpha/2}\, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = E \leq E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_0} \leq \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_0} \right)^2 ,$$

donde $E_0 = 2$ es el error mínimo. Para poder aplicar esta fórmula, calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del 98 % (es decir, al $\alpha = 0'02 = 2$ % de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'01$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'01 = 0'99$.



Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 2'32) = 0'9898$ y $p(Z \leq 2'33) = 0'9901$, por lo que tomamos como valor crítico el punto intermedio $z_{\alpha/2} = 2'235$. De esta forma, el tamaño mínimo debe cumplir:

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{2'235 \cdot 6}{2}\right)^2 \approx 44'957.$$

$$\boxed{\text{El tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98\%, es de 45 individuos.}}$$

■

Opción B

Ejercicio 1 **Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar 1 kg de concentrado A se necesitan 4.5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7.5 kg de grano de Colombia y 1.5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67.5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.**

(a) **(1.75 puntos) Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.**

(b) **(0.25 puntos) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.**

(c) **(0.5 puntos) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?**

SOLUCIÓN: **Apartado (a).** Organizamos la información que nos proporciona el enunciado en la siguiente tabla (conviene poner los productos a fabricar en las columnas y las materias primas en las filas):

	Café A	Café B	Máximo
Café de Colombia	$4'5$	$7'5$	$67'5$
Café de Etiopía	3		30
Café de Costa Rica		$1'5$	9
Beneficio	2 €	4 €	

Llamemos x al número de kilogramos de café de tipo A e y al número de de kilogramos de café de tipo B que vamos a fabricar. Nos encontramos ante las siguientes restricciones:

- No podemos fabricar una cantidad negativa de kilogramos de café, por lo que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.
- Solo disponemos de $67'5$ kg de café de Colombia, por lo que $4'5x + 7'5y \leq 67'5$. Multiplicando entre 10, encontramos la desigualdad $45x + 75y \leq 675$, y dividiendo entre 5, $3x + 5y \leq 45$.
- Solo disponemos de 30 kg de café de Etiopía, por lo que $3x \leq 30$. Simplificando entre 3, encontramos la desigualdad $x \leq 10$.
- Solo disponemos de 9 kg de café de Costa Rica, por lo que $1'5y \leq 9$. Simplificando entre $1'5$, encontramos la desigualdad $y \leq 6$.
- El número de kilogramos de concentrado A (x) producidos debe ser mayor o igual ($\geq$) que la mitad de los kilogramos de concentrado B ($y/2$). Por tanto, $x \geq y/2$. De esta forma, $2x \geq y$ y, así, $2x - y \geq 0$.

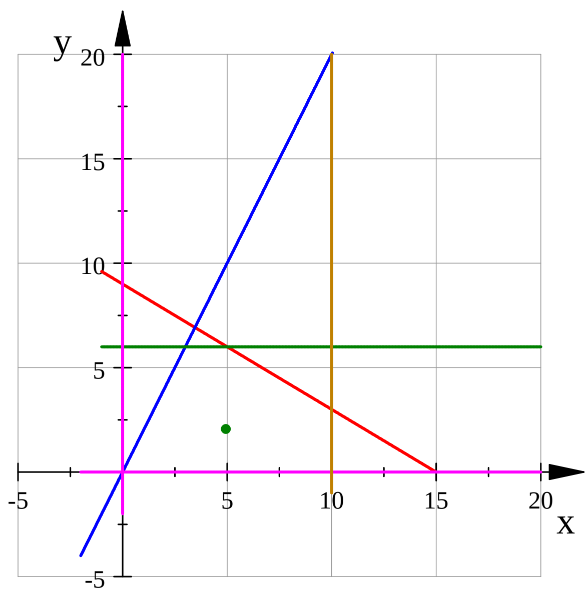
Uniendo todas las restricciones del enunciado, encontramos el sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 3x + 5y \leq 45, \\ x \leq 10, \\ y \leq 6, \\ 2x - y \geq 0. \end{cases}$$

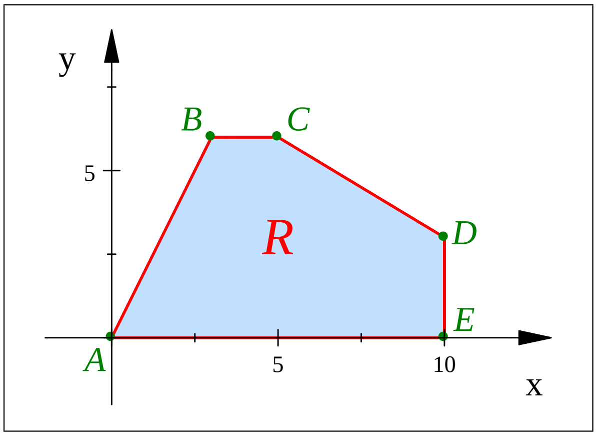
Para dibujar la región factible R que satisface todas las desigualdades, en primer lugar transformamos las desigualdades en igualdades, observando que hay seis de ellas, y buscamos dos puntos del plano que estén sobre cada una de ellas (para así dibujarlas de manera más sencilla):

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (0,10)\,;$$
$$y = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (10,0)\,;$$
$$3x + 5y = 45 \quad \rightarrow \quad (0,9) \quad \text{y} \quad (15,0)\,;$$
$$x = 10 \quad \rightarrow \quad (10,0) \quad \text{y} \quad (10,5)\,;$$
$$y = 6 \quad \rightarrow \quad (0,6) \quad \text{y} \quad (5,6)\,;$$
$$2x - y = 0 \quad \rightarrow \quad (0,0) \quad \text{y} \quad (5,10)\,.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades a través de los dos puntos que hemos calculado en cada recta:



El recinto R que buscamos está delimitado por las rectas anteriores. De hecho, encontramos que el punto $(5,2)$ satisface todas las desigualdades del enunciado, por lo que concluímos que la región factible es la siguiente:



Sabemos las coordenadas de dos vértices con solo mirar el dibujo: $A(0,0)$ y que $E(10,0)$. Determinamos los otros vértices de la región factible resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales.

$$B \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 6 \end{cases} \qquad x = 3,\ y = 6$$

$$C \equiv \begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ y = 6 \end{cases} \qquad x = 5,\ y = 6$$

$$D \equiv \begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ x = 10 \end{cases} \qquad x = 10,\ y = 3$$

Por consiguiente, los vértices de la región factible son:

$$\boxed{A(0,0), \quad B(3,6), \quad C(5,6), \quad D(10,3) \quad \text{y} \quad E(10,0).}$$

Apartado (b). Si suponemos que $x = 7$ e $y = 5$, entonces este punto se sale del recinto ya que $3x + 5y = 3 \cdot 7 + 5 \cdot 5 = 21 + 25 = 46$, lo cual contradice la restricción $3x + 5y \leq 45$. Así,

$$\boxed{\text{no sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.}}$$

Apartado (c). La función que indica el beneficio es $F(x,y) = 2x + 4y$. Por tanto, nos encontramos ante el siguiente problema de programación lineal:

$$\text{maximizar} \quad F(x,y) = 2x + 4y \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ 3x + 5y \leq 45, \\ x \leq 10, \\ y \leq 6, \\ 2x - y \geq 0. \end{cases}$$

El *Teorema Fundamental de la Programación Lineal* afirma que la función F alcanza máximo (y mínimo) absoluto en la región acotada R, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto R, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$$\begin{aligned}
F(0,0) &= 2\cdot 0 + 4\cdot 0 = 0,\\
F(3,6) &= 2\cdot 3 + 4\cdot 6 = 30,\\
F(5,6) &= 2\cdot 5 + 4\cdot 6 = 34,\\
F(10,3) &= 2\cdot 10 + 4\cdot 3 = 32,\\
F(10,0) &= 2\cdot 10 + 4\cdot 0 = 20.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el valor máximo, que es 34, se alcanza en el vértice $C(5,6)$, donde $x = 5$ e $y = 6$. Esto significa que:

> el máximo beneficio es de 34 euros y se alcanza fabricando 5 kg de café de tipo A y 6 kg de café de tipo B.

■

Ejercicio 2 De una cierta función f, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

(a) **(1 punto) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.**

(b) **(0.75 puntos) Determine la curvatura de f y halle la abscisa de su punto de inflexión.**

(c) **(0.75 puntos) Calcule la función f, sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1,3)$.**

Solución: Dado que $f'(x) = 3x^2 - 3$ sigue una expresión general polinómica, entendemos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$, donde debe ser continua ya que es derivable.

Apartado (a). Determinamos los puntos críticos de f calculando dónde se anula su primera derivada:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1, 1\}.$$

La siguiente tabla nos informa de la monotonía y de los extremos de la función f.

f'	$+$	máx	$-$	mín	$+$
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$

$$f'(-2) = 9 > 0; \quad f'(0) = -3 < 0; \quad f'(2) = 9 > 0.$$

Por tanto, obtenemos la siguiente conclusión.

La función f es (estrictamente) creciente en $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ y es (estrictamente) decreciente en $]-1,1\,[$. Además, la función f posee un máximo en $x=-1$ y un mínimo en $x=1$.

Apartado (b). La segunda derivada de f es $f''(x)=6x$, que sólo se anula en $x=0$. Así, la siguiente tabla nos indica su curvatura.

f''	$-$	PI	$+$
f	$\cap$	0	$\cup$

$$f''(-1)=-6<0; \quad f''(1)=6>0.$$

De esta forma, f es cóncava en $]-\infty,0[$ y es convexa en $]0,+\infty[$. Además, el punto $x=0$ es un punto de inflexión porque la función es continua en él y cambia de curvatura.

La función f es cóncava en $]-\infty,0[$ y convexa en $]0,+\infty\,[$. Además, posee un punto de inflexión en $x=0$.

Apartado (c). Decir que la gráfica de f pasa por el punto $(-1,3)$ es lo mismo que decir que $f(-1)=3$. Integrando su primera derivada:

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(3x^2-3\right)dx=3\,\frac{x^3}{3}-3x+C=x^3-3x+C.$$

Determinamos la constante C para que $f(-1)=3$ de la siguiente forma:

$$3=f(-1)=(-1)^3-3\cdot(-1)+C=-1+3+C=C+2 \quad\Rightarrow\quad C=1.$$

$$\boxed{f(x)=x^3-3x+1}$$

■

Ejercicio 3 De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A\cap B)=0.2 \qquad P(A\cup B)=0.4 \qquad P(A/B)=0.8$$

(a) **(1.2 puntos) Calcule $P(B)$ y $P(A)$.**

(b) **(0.5 puntos) ¿Son los sucesos A y B independientes? Razone la respuesta.**

(c) **(0.8 puntos) Calcule $P(A^c\cup B^c)$.**

Solución : **Apartado (a).** Llamemos $x = p(A)$ e $y = p(B)$. Escribimos dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de las siguientes fórmulas:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \Leftrightarrow \quad 0'4 = x + y - 0'2;$$

$$p\left(A/_B\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \Leftrightarrow \quad 0'8 = \frac{0'2}{y}.$$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} x + y = 0'6 \\ 0'8y = 0'2 \end{cases}$$

encontramos la solución $p(A) = x = 0'35$ y $p(B) = y = 0'25$.

Apartado (b). Dado que $p\left(A/_B\right) = 0'8$ y $p(A) = 0'35$, deducimos que $p\left(A/_B\right) \neq p(A)$, por lo que los sucesos A y B no son independientes. También pudiera haberse observado que $p(A \cap B) \neq p(A) \cdot p(B)$ para llegar a la misma conclusión.

Apartado (c). Las *leyes de De Morgan* nos garantizan que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, por lo que

$$p(A^c \cup B^c) = p\left((A \cap B)^c\right) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0'2 = 0'8.$$

(a) $p(A) = 0'35$, $p(B) = 0'25$ **(b)** No son independientes **(c)** $p(A^c \cup B^c) = 0'8$

■

Ejercicio 4 **Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.**

(a) **(1.5 puntos) Para un nivel de confianza del 92 %, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.**

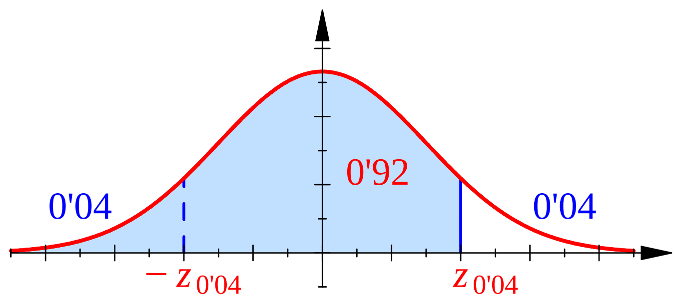
(b) **(1 punto) Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.**

Solución : Llamemos p a la verdadera proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Esta proporción es desconocida y vamos a tratar de estimarla.

Apartado (a). Se ha tomado una muestra aleatoria (suficientemente grande) de $n = 50$ expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados y se ha encontrado que el 22 % de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco, es decir, la proporción muestral de enfermos a causa del tabaco es $\hat{p} = 0'22$. Para poder aplicar la fórmula del intervalo de confianza para la proporción, que es

$$\mathrm{IC}(p) = \left] \; \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \; \right[,$$

calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ a un nivel de confianza del 92 % (es decir, al $\alpha = 0'08 = 8\ \%$ de significación). El número $z_{\alpha/2}$ es el único número real que cumple que $p\left(Z > z_{\alpha/2}\right) = \alpha/2 = 0'04$, siendo Z una variable con distribución Normal estándar. Como disponemos de una tabla de colas a la izquierda, traducimos esta condición con el suceso opuesto, es decir, $p\left(Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - 0'04 = 0'96$.



Buscamos este valor en la tabla de la distribución Normal estándar, encontrando que $p(Z \leq 1'75) = 0'9599$ y $p(Z \leq 1'76) = 0'9608$, por lo que tomamos como valor crítico $z_{\alpha/2} = 1'75$. De esta forma, el intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco es:

$$\mathrm{IC}(p) = \left] \; \hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}} \; \right[= \left] \; 0'22 \pm 1'75\,\sqrt{\frac{0'22 \cdot 0'78}{50}} \; \right[\approx$$

$$\approx \left] \; 0'22 \pm 0'10252 \; \right[= \left] \; 0'11748 \; , \; 0'32252 \; \right[.$$

Por tanto, si éste fuese uno del 92 % de los intervalos de confianza que contienen al verdadero valor de la proporción poblacional (al elegir muchas muestras aleatorias independientes y construir muchos intervalos de confianza asociados), podríamos afirmar que la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco está entre el $11'7$ y el $32'3\ \%$.

$$\boxed{\mathrm{IC}\,(p) = \left] \; 0'11748 \; , \; 0'32252 \; \right[.}$$

Apartado (b). Manteniendo la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral necesario para cometer un error E inferior al $E_0 = 3\ \% = 0'03$ debe cumplir:

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = E \leq E_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z^2_{\alpha/2}\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{n} \leq E_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{z^2_{\alpha/2}\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E_0^2}.$$

Así:

$$n \geq \frac{z^2_{\alpha/2}\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E_0^2} = \frac{1'75^2\cdot 0'22\cdot 0'78}{0'03^2} \approx 583'92.$$

Por tanto,

el número de expedientes que hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizados por causas debidas al tabaco sea inferior al $3\,\%$ es de 584.

■