

COMPONENTES DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Juan Luis Piñeiro, Elena Castro-Rodríguez y Enrique Castro

La importancia que presenta la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de la matemática es una premisa aceptada en la comunidad de educadores matemáticos. No obstante, los marcos que describen o caracterizan el conocimiento de los profesores sobre las matemáticas escolares han dado poca relevancia a este proceso. Partiendo de revisiones curriculares y teóricas, presentamos una organización del conocimiento del profesor de educación primaria sobre la resolución de problemas de matemáticas. En ella diferenciamos un conocimiento sobre la resolución de problemas del que emergen los componentes relativos al concepto de problema, proceso de resolución y disposición para afrontar un problema; y un conocimiento pedagógico sobre la resolución de problemas en el que distinguimos un componente referido al aprendizaje y otro a la enseñanza. Nuestra reflexión ratifica la idea que la naturaleza distinta de un proceso como la resolución de problemas provoca un conocimiento que los modelos han omitido.

Palabras clave: Problemas matemáticos, Resolución de problemas, Conocimiento del profesor, Educación primaria.

Teacher knowledge components for teaching problem solving in primary education

Problem solving is central in teaching and learning of mathematics, an accepted premise in the community of mathematics educators. However, the frameworks that describe or characterize teachers' knowledge have given

little relevance to this process. Starting from curricular and theoretical revisions, we present a proposal of organization for the knowledge of primary teacher about problem solving. We differentiate a knowledge of the process from which the components related to the concept of problem, resolution process and disposition to face a problem emerge; and a pedagogical knowledge where we distinguish a component referring to learning and another to the teaching of problem solving. Our reflection confirms the idea that the different nature of a process such as problem solving, causes a knowledge that the models have omitted.

Keywords: Math problem, Problem solving, Teacher knowledge, Primary Education.

A lo largo de los años, publicaciones como la “An Agenda for Action” (NCTM, 1980) o los “Principios y Estándares para la Educación Matemática” (NCTM, 2000) han otorgado relevancia sustantiva a la resolución de problemas en la matemática escolar, dándole un lugar privilegiado a este proceso (Schmidt, McKnight, Valverde, Houang y Wiley, 1997). Como consecuencia de ello, diversas evaluaciones internacionales como PISA o TIMSS han considerado la resolución de problemas como un proceso central para evaluar diferentes dominios cognitivos (Grønmo, Lindquist y Arora, 2014; OECD, 2013). En este contexto se establece que resolver problemas es un indicativo primordial cuando se trata de demostrar competencia matemática y evaluar la calidad de los sistemas educativos. Esto la convierte en un aspecto primordial de la enseñanza, y por tanto, en parte esencial del conocimiento del profesor.

Tomando como punto de partida los trabajos de Shulman (1986), las investigaciones que describen el conocimiento del profesor de matemáticas suelen diferenciar entre conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido. Sin embargo, estos modelos teóricos sobre el conocimiento del profesor (Ball, Thames y Phelps, 2008; Bromme, 1994; Carrillo et al., 2018; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005), suelen generarse desde la perspectiva de la matemática escolar como concepto, al margen de los procesos, como la resolución de problemas, que presentan un carácter transversal y tienen una configuración diferente (García y Llinares, 2001). En los últimos años diversos investigadores han hecho notar que los modelos de conocimientos presentan limitaciones al caracterizar el conocimiento de los profesores sobre resolución de problemas, por ejemplo Lin y Rowland (2016) en una revisión a la investigación sobre el conocimiento del profesor en las actas del “International Group for the Psychology of Mathematics Education” (PME), señalan:

Los trabajos presentados en PME incluyen una serie de propuestas para la elaboración o modificación de las teorías existentes sobre el conocimiento del profesor de matemáticas”... “Si bien tales estudios generalmente se suman a la sobrecarga de siglas en el campo, algunos llaman la atención sobre las brechas o los conflictos en el discurso del conocimiento de los maestros. Tanto Chapman (2012) como Foster, Wake y Swan (2014) abordan la crítica de que el marco de Shulman y sus derivados se centran en el conocimiento de conceptos matemáticos a expensas de la capacidad de resolución de problemas (p. 489).

Si bien los trabajos de Chapman (2012) y Foster y colaboradores (2014) son avances importantes, no han logrado posicionarse o son relativamente recientes, por lo que la investigación es insuficiente para determinar su utilidad en la identificación detallada del conocimiento relativo a la resolución de problemas de los docentes.

En este contexto, el objetivo de este trabajo es proponer una serie de componentes que debiese contemplar el conocimiento profesional sobre la resolución de problemas de un profesor de educación primaria. Para ello, en un primer apartado fundamentamos la propuesta; en un segundo se desarrolla y finalmente discutimos su utilidad y prospectiva.

MODELOS DE CONOCIMIENTO DEL PROFESOR Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En Educación Matemática, los procesos tienen una conceptualización distinta a los conceptos (García y Llinares, 2001). Por ejemplo, una forma de interpretar los conceptos matemáticos son las ideas de Frege, en las que establece la diferencia entre signo y significado y, dentro de este último, distingue entre sentido y referencia. Estas tres componentes del significado de un concepto matemático se relacionan mediante el triángulo semántico. Por tanto a un concepto suele asociársele una estructura, unos sistemas de representación y unos sentidos o modos de uso (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). Un proceso, como la resolución de problemas, tiene otros componentes como la comprensión conceptual de conceptos matemáticos, operaciones y relaciones, la comprensión de heurísticas generales y estrategias específicas, y cuándo y cómo usarlas, la capacidad para el pensar lógicamente y la comprensión de la reflexión para la toma de conciencia, la supervisión, el control y la supervisión del propio proceso cognitivo durante la resolución de un problema, y el mantenimiento de creencias sobre las matemáticas, la resolución de problemas y la competencia para resolver un problema que apoyen la motivación y la confianza (Chapman, 2015). Específicamente, Schoenfeld (1992)

describe la resolución de problemas como una actividad, en la que son necesarios el conocimiento del individuo, las estrategias heurísticas, el monitoreo y la autorregulación, y un sistema de creencias para describirla. Es decir, los procesos tienen entidad propia y no tienen una estructura similar a los conceptos. Este hecho provoca que los modelos de conocimiento más utilizados en investigación, centrados en conceptos, no capturen elementos que configuran la naturaleza de dichos procesos.

Modelos como el *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT, por sus siglas en inglés) de Ball y colaboradores (2008) no consideran explícitamente en ninguno de sus dominios o subdominios a la resolución de problemas. Otros modelos de conocimiento como el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés) de Carrillo y colaboradores (2018) han refinado y reconceptualizado los esfuerzos iniciados con Shulman (1986), dando un lugar específico a la resolución de problemas en uno de sus subdominios llamado Conocimiento de la Práctica Matemática. Sin embargo, sus estudios aún no han detallado qué conocimientos específicos sobre la práctica matemática se considerarían cuando hablamos de resolución de problemas (Carrillo et al., 2018).

Para ilustrar este hecho, mostramos dos ejemplos sobre cómo los conocimientos relativos a la enseñanza de la resolución de problemas presentan dificultades al ser organizados siguiendo dos modelos de conocimiento del profesor. La elección de estos modelos se ha realizado por dos razones. En primer lugar su contexto de origen, mientras uno de ellos (MKT) realiza su caracterización desde la perspectiva de profesores en ejercicio, el segundo (*Knowledge Quartet*) lo hace desde la formación inicial de profesores. En segundo lugar, la presencia e influencia que tienen en el campo investigaciones sobre el conocimiento del profesor (Lin y Rowland, 2016). Estos marcos de conocimiento del profesor concentran la atención de la comunidad de educación matemática. Por tanto, sí los dos marcos más utilizados tienen limitaciones en identificar aspectos de conocimiento sobre la resolución de problemas, se puede inferir que un gran número de investigaciones han relegado este conocimiento.

En el contexto de la resolución de problemas y tomando como marco el modelo MKT, un conocimiento común del contenido consistiría en la propia competencia del profesor para resolver problemas, permitiendo dar cuenta de errores o procedimientos. No obstante, es pertinente preguntarse ¿qué aspecto de la resolución de un problema es un conocimiento común del contenido?, ¿qué aspectos corresponden a un conocimiento especializado? Existe una lógica clara en el argumento, no obstante autores como Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) hacen notar las dificultades que surgen al diferenciar estos tipos de conocimientos cuando se observan acciones de los docentes. Ahora bien, asumiendo

que la competencia de los profesores para resolver problemas es un conocimiento común, ¿qué correspondería a un conocimiento especializado del contenido?, ¿qué aspectos del problema son conocimientos del profesor que no tengan relación con ser capaz de resolverlo, ni con el aprendizaje o la enseñanza? Una de las características primordiales de los problemas es que sea una tarea problemática para su resolutor (Lester, 2013; Pólya, 1981), por tanto involucraría al estudiante, alejándose de las descripciones de los autores del modelo MKT.

Al igual que el modelo anterior, el Knowledge Quartet fue desarrollado a partir de las ideas de Shulman (1986). Su carácter evaluativo, surgido en un contexto de prácticas en el aula de un programa de formación inicial de profesores, dio lugar a que las dimensiones que emplea sean distintas a la tradicional distinción entre conocimiento del contenido y didáctico del contenido. Conceptualiza el conocimiento del profesor como conocimiento en la acción, lo que produce que sus dimensiones sean apropiadas para la identificación del conocimiento en la práctica (Rowland et al., 2005; Turner y Rowland, 2011).

Una primera dimensión de este modelo, la fundamentación, tiene relación con los conocimientos previos y creencias de los profesores. Turner y Rowland (2011) señalan que se refiere al conocimiento, comprensión y los recursos disponibles que se han aprendido durante las distintas etapas de formación, difiriendo de las otras tres dimensiones en el sentido de que se trata de conocimiento poseído (intencionalmente o no). Los autores señalan que en esta dimensión se distinguen aspectos claves como conocimiento y comprensión de las matemáticas per se, aspectos significativos resultantes de la investigación, y creencias sobre las matemáticas, incluyendo por qué y cómo se aprende (Rowland et al., 2005). Desde la perspectiva de la resolución de problema, el conocimiento que establece la descripción de la fundamentación estaría dado por su propia competencia para resolver problemas, aspectos teóricos surgidos de la investigación referidos a la resolución de problemas y las creencias que tengan sobre este proceso. Además incluiría elementos relativos a enfoques o vías de acceso, evaluación, selección de las tareas, etc. Por tanto, esta dimensión mezclaría en una sola elementos sobre los problemas y su enseñanza, y sobre creencias de todos ellos. Si bien nos parece importante que considere las creencias sobre la resolución de problemas, este enfoque parece demasiado amplio y no permite analizar de una forma útil qué conocimiento está incluido en esta dimensión.

PERSPECTIVA TEÓRICA

Al reflexionar sobre la investigación en el conocimiento del profesor, Chapman (2013) señala que una de las vías para ir más allá de lo que los maestros pueden o no

pueden hacer, es entender qué conocimiento tienen y cómo y por qué lo tienen. Tomando estas ideas como punto de referencia, en este trabajo tomamos una perspectiva del conocimiento basada en categorías. Entendemos que esta visión no otorga una panorámica completa sobre qué requeriría el profesor para enseñar a resolver problemas, pero resulta de utilidad conocer aspectos claves para avanzar en la comprensión de este conocimiento del profesor.

En este contexto, en el caso del conocimiento del contenido, Shulman (1986) señala que para pensar correctamente sobre este conocimiento es necesaria una comprensión de los conceptos o hechos de un dominio particular, añadiendo que debe hacerse de la manera definida por eruditos. En este sentido, para desentrañar los componentes de este conocimiento del contenido desde la perspectiva de un proceso, es necesario pensar en la competencia para resolver problemas. Sin embargo, Lester (2013) señala que los profesores deben poseer, además de una competencia para resolver problemas, un conocimiento más amplio que su competencia. Por tanto, es necesario que un profesor, además de ser competente en resolver problemas, presente un conocimiento teórico, tanto del propio proceso como didáctico, sobre la resolución de problemas.

Además de un conocimiento del proceso, los profesores han de contemplar un conocimiento pedagógico de la resolución de problemas. En este caso, se trataría de comprender de forma pedagógica el proceso de resolver un problema, es decir, no solo teniendo en cuenta el proceso por sí solo, sino a los estudiantes que los resolverán y las estrategias de enseñanza que puedan resultar más apropiadas.

En este contexto, utilizamos dos constructos teóricos para describir el conocimiento necesario para enseñar a resolver problemas en educación primaria: la competencia para resolver problemas (exclusivamente y dejando a un lado el concepto matemático que esté implicado en el problema) y el triángulo didáctico. Este último es empleado por su potencialidad para desentrañar aspectos del acto de enseñar (Schoenfeld, 2012). Además, hemos recurrido a dos perspectivas que permiten enmarcar la discusión. Un primer elemento es el marco propuesto por Chapman (2015) para enseñar a resolver problemas, el *Mathematical problem-solving knowledge for teaching* (MPSKT). Un segundo aspecto son las directrices curriculares. Estos documentos delimitan el conocimiento de los profesores (Ball, Hill y Bass, 2005). Por ello, hemos realizado un análisis a dichos documentos con el fin de identificar los conocimientos exigidos a los docentes (Piñeiro, Castro-Rodríguez y Castro, 2016).

Competencia para resolver problemas

Un primer elemento necesario para identificar el conocimiento profesional relativo a la enseñanza de la resolución de problemas es recurrir a un entendimiento del

dominio matemático de forma distinta a como lo realizan tradicionalmente los modelos de conocimiento del profesor. Esto quiere decir, un conocimiento del proceso de resolución de problemas no solo desde la perspectiva propia de resolutor, sino de aspectos teóricos de este proceso. Esto obliga a tener un claro entendimiento sobre el significado de la resolución de problemas. Este proceso es entendido como un constructo que encapsula lo que se espera aprendan los estudiantes para desenvolverse como ciudadanos en la sociedad actual (Abrantes, 2001; Rico, 2007).

En concordancia con lo planteado por Chapman (2015), la resolución de problemas interconecta aspectos cognitivos, no cognitivos y de contexto. Abrantes (2001) señala que se relaciona con el proceso de activar recursos (conocimientos, habilidades y estrategias) en una variedad de contextos (problemas). De un modo bastante similar, Rico (2007) plantea que este constructo puede tomar diferentes significados, sin embargo cuando nos referimos a un dominio, se configura en torno a tres componentes: unas tareas contextualizadas (problemas en contextos personales, escolares, profesionales y sociales), unas herramientas conceptuales y un sujeto. Es este último, el que al realizar dichas tareas, moviliza herramientas conceptuales manifestando competencia matemática. Kilpatrick, Swafford y Findell (2001), señalan que esta noción está compuesta por cinco dimensiones entrelazadas e interconectadas (comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y una disposición productiva). Cada una de las dimensiones potencia a otra u otras, y en su conjunto promueven un desarrollo de la competencia matemática.

En este contexto, entendemos la competencia para resolver problemas como la manifestación que se produce cuando un sujeto identifica una situación como problemática, procede a su resolución a través de una serie de fases no necesariamente lineales usando una estrategia, y se involucra, con una disposición positiva, en el desafío de resolverla. En esta caracterización identificamos tres elementos teóricos que deben formar parte del conocimiento del profesor. Un primer elemento se relaciona con la noción de problema, un segundo con el proceso de resolver un problema y un tercer elemento no cognitivo. Si bien, cada uno de estos tres elementos presenta sutilezas y matices, creemos que son fundamentales para poder hablar de competencia, pues estos movilizan una serie de procesos cognitivos y no cognitivos que fomentan un desarrollo del pensamiento matemático.

Triángulo didáctico y resolución de problemas

Para reinterpretar conocimiento pedagógico del profesor sobre resolución de problemas, recurrimos al triángulo didáctico. En el contexto escolar, la triada ha permitido reflexionar sobre la educación y específicamente sobre el proceso de enseñar en diversas ocasiones (Schoenfeld, 2012). Nipper y Sztajn (2008) señalan

que el triángulo didáctico permite entender la enseñanza como las interacciones contextualizadas entre el profesor, los estudiantes y las matemáticas. Esta perspectiva permite una visión global del profesor, focalizado en las interacciones entre los elementos del triángulo didáctico y en los contextos donde se producen. En este sentido, el triángulo hace posible comprender el proceso de enseñanza de la resolución de problemas de una manera holística, manteniendo una fidelidad a la naturaleza del proceso. Las interacciones que se producen entre cada vértice del triángulo, permiten desentrañar elementos del conocimiento pedagógico del profesor que han sido omitidos por la literatura al caracterizar dicha noción. La figura 1 muestra la triada didáctica, sus relaciones, y nuestra interpretación de los elementos de conocimiento del profesor sobre la resolución de problemas que se desprenden.

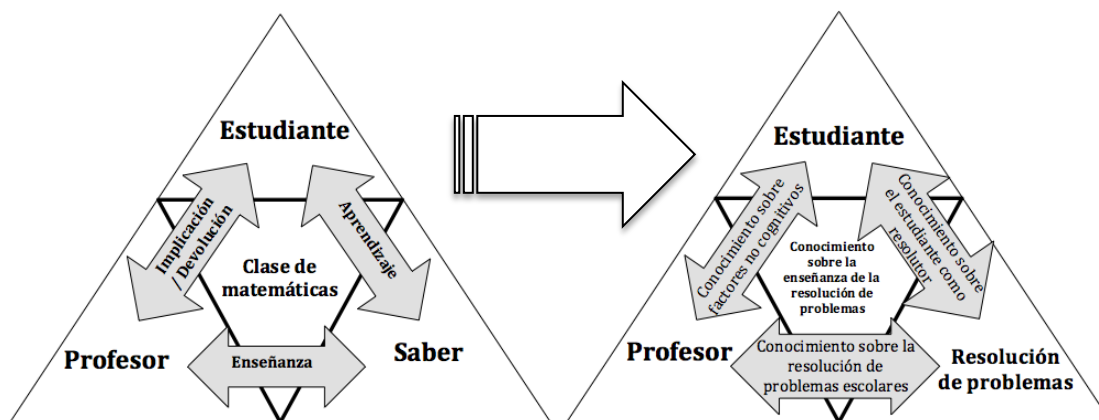


Figura 1. *Triángulo didáctico y conocimiento pedagógico para resolver problemas*

Las interacciones dobles (profesor/estudiante, estudiante/resolución de problemas y profesor/resolución de problemas) han atraído la atención de la mayoría de la investigación en este campo, especialmente la del estudiante y resolución de problemas (Lester, 2013). No obstante, las interacciones restantes han sido señaladas como centrales, si el propósito es mejorar el desempeño de los estudiantes al resolver problemas (Cai, 2010; Lester y Cai, 2016; Liljedahl, 2016).

COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL SOBRE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

En lo que sigue, destacamos algunos del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico vinculados a la resolución de problemas.

Conocimiento sobre resolución de problemas

El conocimiento del contenido se suele definir como un entramado interconectado de ideas matemáticas, sus representaciones y formas de proceder (Ponte y Chapman, 2016) y en el que se distingue un conocimiento común, uno especializado y uno del horizonte del contenido (Ball, Thames y Phelps, 2008). En este y otros modelos es posible observar una categorización en términos de un concepto. Creemos que para ser fieles a la naturaleza de la resolución de problemas debemos recurrir a su conceptualización como una competencia.

Desde nuestra perspectiva, el conocimiento de la resolución de problemas se configura en torno a la propia competencia del profesor y a los componentes teóricos (noción de problema, resolución y disposición).

Para reflexionar sobre los conocimientos que implicarían los componentes teóricos pensemos en un problema aritmético verbal como: Carmen va por la página 32 de su libro. Mañana espera leer 15 páginas más. ¿En qué página irá cuando lea esas 15 páginas? Utilizar este problema en una situación de enseñanza, requiere conocimientos matemáticos que tienen relación con el procedimiento de la adición, como la ubicación de las cifras según valor posicional o saber que no importa el orden en que se realice, pues el resultado será el mismo. Sin embargo, existen otros que son inherentes a los problemas y su proceso de resolución como las estrategias que acepta el problema, el proceso que se seguiría al resolverlo, las variables de tarea que interfieren con la dificultad, etc. Por ejemplo, seleccionar este problema para un grupo de estudiantes implica un conocimiento relativo al problema y su clasificación y al tipo de estructura aditiva implícita en él, convirtiéndose en una tarea compleja para los futuros docentes (Carpenter et al., 1988). También subyace el conocimiento de los estudiantes y en qué medida será un problema para cada uno de ellos.

Como puede verse, este conocimiento es un complejo sistema en el que se imbrican diversas dimensiones sobre la resolución de problemas. A continuación presentamos las referidas a los componentes del conocimiento de la resolución de problemas, es decir, (a) la noción de problema, (b) el proceso de resolución y (c) la disposición.

Noción de problema

La utilización del problema aritmético verbal presentado en el apartado anterior implica que el profesor ha escogido el problema pues el tópico de su enseñanza es la aritmética. No obstante los criterios de selección también tienen relación con las posibilidades que otorga este problema. Por ejemplo, las formas de resolución que acepta. Un primer estudiante podría utilizar diagramas rectangulares donde pueda visualizar las relaciones existentes entre las cantidades para encontrar una respuesta.

Otro grupo de estudiantes pueden directamente recurrir al algoritmo. En este contexto, el profesor debe conocer qué implica esa decisión del estudiante en cuanto a su competencia para resolver problemas. Es decir, en qué medida se constituyó como problema para él o solo se trata de la práctica de un procedimiento conocido. Por tanto, la afirmación que autores como Thames y Ball (2010) sobre la dimensión del conocimiento del contenido que indica que en el conocimiento especializado no están involucrados los estudiantes ni la enseñanza, no es posible realizarse cuando se trata de la resolución de problemas. Idea que ya otros autores han señalado al discutir qué hace al conocimiento del profesor de matemáticas especializado (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2019). Este hecho, refuerza nuestro argumento sobre que el profesor debe considerar al estudiante para etiquetar una tarea como problema.

La identificación es primordial para dar existencia a un problema (Agre, 1982). Sin embargo, cuando hablamos de problemas matemáticos escolares este acto presenta particularidades. Un docente que conoce a sus estudiantes puede plantear tareas a sus estudiantes, que ellos, por sí solos, no consideran problemas, pero que efectivamente lo son en el contexto escolar de aprendizaje y desarrollo de su pensamiento matemático. Si bien, la etiqueta de problema es asignada por el resolutor (Mason, 2016), los problemas matemáticos escolares tiene la particularidad de tener dos niveles de lectura, la del alumno y la del profesor, realizada en dos etapas.

Primero, el profesor identifica cuándo una situación es un problema para algunos de sus estudiantes. Esta elección podría ser realizada en función de sus elementos estructurales, es decir, su formulación, su contexto, el conjunto de soluciones aceptables que presenta y los métodos por los que puede ser abordado (Borasi, 1986). Por sí sola, esta acción genera una caracterización o diferenciación entre las tareas que son consideradas problemas de las que no lo son. En segundo lugar, esta tarea le será planteada al estudiante, quién deberá realizar una formulación de esta para su resolución. La formulación y reformulaciones sucesivas que realice para alcanzar la meta serán hechas por el estudiante (Kilpatrick, 2016), a través de la movilización de una serie direccionada y dirigida de procesos cognitivos (conocimientos y metacognición) y no cognitivos (afectos y creencias) que no están predeterminados por un conocimiento previo de dicho proceso (Mayer y Wittrock, 2006).

Además, estas situaciones deben presentar un nivel de dificultad que provoquen una involucración por parte de los estudiantes. Al mismo tiempo, deben ser vistas como posibles de solucionar para provocar lo que se espera (Agre, 1982). En este sentido, el problema de las páginas del libro de Carmen, anteriormente reseñado, implica un conocimiento sobre algunas variables que puedan generar un mayor o

menor nivel de dificultad en su resolución, como por ejemplo la estructura de cambio ascendente o el tipo de número utilizado. La existencia de estos conocimientos determinará la movilización de aspectos cognitivos y no cognitivos en los estudiantes, por lo que son críticos en la enseñanza para lograr un desarrollo en la competencia para resolver problemas.

Resolución de problemas

La resolución de un problema, se suele entender como el proceso personal, dirigido y procesual que es realizado a través de fases. Poder realizarlo adecuadamente se corresponde con una competencia propia para resolver problemas. Sin embargo, otros aspectos teóricos deben ser conocidos por los profesores (Lester, 2013).

A partir de la conceptualización de competencia para resolver problemas, en lo que sigue se muestra un ejemplo que ilustra a qué conocimientos nos referimos. Que un estudiante resuelva el problema de las páginas del libro de Carmen implica comprender la relación aritmética presente y cómo esta determina una situación de cambio. Comprender aquello posibilita representar adecuadamente el problema y proceder con un plan que permita agregar 15 páginas a las 32 leídas. Así, el estudiante podría recurrir a un algoritmo, una recta numérica o una representación pictórica para realizar un conteo desde 32. Todo ello, permitiría que el estudiante pueda volver atrás en su proceso y revisar que ha realizado, comprobando su resultado y generalizando la idea para la próxima vez que se enfrente a un problema de cambio. Conocer este proceso y entender que puede variar en cada estudiante es parte del conocimiento de la competencia del profesor cuando hablamos de resolución de problemas. Es un conocimiento que podríamos describir con carácter metacognitivo sobre la competencia para resolver problemas, pues comprende heurísticos o fases y estrategias específicas que puedan ser utilizadas en la solución de algún problema. La sola competencia implica saber una estrategia para resolver la tarea, tener un conocimiento profesional sobre el proceso de la resolución de problemas implica qué estrategias acepta el problema para ser resuelto.

En este componente, los planteamientos de Pólya (1981) sobre cómo procede un resolutor emergen naturalmente: comprendiendo el problema, elaborando el plan, llevando a cabo el plan y realizando una visión retrospectiva de su resolución. Investigaciones posteriores han sugerido variantes que con mayor o menor grado de descripción y desde perspectivas diversas, plantean ideas similares que formarían parte del conocimiento de la competencia (e.g., Schoenfeld, 1992). Un factor común que podemos observar en estas fases es su configuración como proceso cognitivo, personal y no observable directamente, sino que a través de manifestaciones de sus componentes o fases (Mayer y Wittrock, 2006). En esta misma línea es importante

destacar la no linealidad de este proceso, pues como exponen Wilson, Fernandez y Hadaway (1993) esta actividad es flexible y permite avances y retrocesos.

Un segundo conocimiento tiene relación con las estrategias de resolución. Schoenfeld (1985) distingue dos tipos diferentes de toma de decisiones, el qué hacer y el cómo hacer. El primero de estos tipos, las decisiones estratégicas, incluyen la selección de objetivos y la decisión de seguir cursos de acción. El segundo, las tácticas, incluye decisiones sobre cómo implementar las decisiones del primer tipo. En su conjunto, forman lo que se entiende por estrategia, que por sí solas no presentan utilidad por diversos factores, entre los que se encuentra el papel de la metacognición (Schoenfeld, 1985). No obstante, existe acuerdo en que una de las responsabilidades más importantes de los profesores es facilitar el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas, que incluyen el conocimiento sobre estrategias (Posamentier y Krulik, 1998). La enseñanza de las estrategias debe ser cuidadosa pues en ella se imbrican todos los componentes que discutimos en este apartado. Concretamente, la toma de decisión sobre qué hacer y cómo hacerlo será realizada de acuerdo a la comprensión y representación mental que se haga del problema. Por otro lado también se verá afectada por la metacognición, pues el uso consciente que se haga de la estrategia determinará en parte el éxito que se pueda obtener con ella. Además, la posibilidad de mirar atrás potenciará este proceso y permitirá decidir si la toma de decisión inicial fue fructífera. Todo este proceso está mediado por las emociones que puedan emerger, las actitudes que provoquen y las creencias que se sostengan durante la resolución de un problema.

Un tercer conocimiento sobre este componente tiene relación con la metacognición. Schoenfeld (1985, 1992) expandió la perspectiva de investigación y en su modelo mostró la importancia que tienen la metacognición y los afectos. La metacognición es descrita como la forma en que el resolutor se auto-regula, monitorea y controla los heurísticos y los conocimientos para resolver un problema, permitiendo que pueda tomar decisiones acertadas sobre lo que se hace.

Un último conocimiento se corresponde con los factores no cognitivos y cómo estos juegan un papel esencial, pues determinarán la forma en que el resolutor afronte los problemas. Schoenfeld (2013) ilustra claramente esto al señalar que “los estudiantes cuya experiencia matemática total consistió en ejercicios prácticos que podrían resolverse en unos pocos minutos llegaron a creer que ‘todos los problemas se pueden resolver en cinco minutos o menos’, y dejaron de trabajar en problemas que podrían haber podido resolver si hubiesen perseverado” (p. 12). Así, existe acuerdo en la literatura al establecer que según la adecuación del desafío propuesto a los estudiantes, estos pondrán en movimiento sus emociones, que luego movilizarán su intelecto (Mason, 2016).

Disposición

Por último, el grado de disposición es fundamental. Saber resolver problemas es importante, pero querer hacerlo es esencial. La importancia que tienen los aspectos no cognitivos en la resolución de problemas ha sido ampliamente estudiada (e.g., Schoenfeld, 1992) y existe acuerdo al establecer que según la adecuación del desafío propuesto a los estudiantes, estos pondrán en movimiento sus emociones (factores afectivos), que luego movilizarán su intelecto (Mason, 2016). Este involucramiento es esencial para la competencia de resolución de problemas, pues será la que movilice todo el proceso. En este contexto, utilizar el problema ya nombrado de las páginas del libro de Carmen implicaría al profesor un conocimiento sobre cómo este problema podría implicar a sus estudiantes en su resolución.

Así, los componentes del conocimiento sobre la resolución de problemas pueden ser descritos bajo las características que presentamos en la tabla 1. Es importante señalar que estos se describen en función de la resolución de problemas.

Tabla 1

Componentes de conocimiento sobre la resolución de problemas

Componente	Conocimientos
Noción de problema	Tarea sin procedimiento de resolución conocido Consideración del resolutor Tipos de tareas que se presentan como problemas
Resolución de problemas	Fases de resolución y su caracterización Estrategias Metacognición Factores no cognitivos
Disposición	Aceptación del desafío de resolver el problema

Conocimiento pedagógico sobre resolución de problemas

La discusión que realizamos en este apartado tiene como eje articulador el triángulo didáctico, específicamente sus interacciones. Desde nuestra perspectiva estas relaciones permiten identificar y organizar elementos del conocimiento pedagógico del profesor sobre la resolución de problemas, específicamente distinguimos las componentes relativas al (a) estudiante como resolutor, (b) la resolución de problemas como tarea escolar, (c) los factores no cognitivos y (d) la gestión de la enseñanza de la resolución de problemas.

Conocimiento sobre el estudiante como resolutor

Este se corresponde con la interacción entre el estudiante y la resolución de problemas, específicamente con los elementos concernientes al aprendizaje. En nuestro contexto, supone un conocimiento del profesor que permite poner atención en lo que pueden hacer, qué puede interferir y hasta dónde se podrá desarrollar la competencia para resolver problemas de los estudiantes. Es decir, conocimiento sobre fortalezas y debilidades, que permitan acompañarlos en un desarrollo apropiado de habilidades involucradas en la resolución de problemas (Chapman, 2015). Esta autora señala que los aspectos solicitados al profesor son: comprender la naturaleza conceptual de las dificultades y ser capaz de interpretarlas desde la perspectiva de los estudiantes, cualidades cognitivas y disposición de los estudiantes exitosos resolviendo problemas, y lo que los estudiantes son capaces de hacer mientras resuelven problemas. Por tanto, los conocimientos que emergen en esta interacción son de interés en nuestra discusión.

Retomando el problema de las páginas del libro de Carmen, un estudiante exitoso sería capaz de resolver el problema a través de representaciones o estrategias de conteo (ambas inclusive), identificaría la relación de cambio existente entre las cantidades o sería capaz de explicar cómo y qué situaciones provocaron que resolviera el problema de la forma en que lo hizo. Por su parte, un estudiante que presenta dificultades podría usar una estrategia de conteo del total de los elementos y se tomaría más tiempo en resolverlo que el resto. Este conocimiento permite que el profesor focalice sus esfuerzos en brindar otras estrategias de resolución con un mayor grado de eficiencia, en vez de por ejemplo, ayudas para comprender el problema o representarlo. Tener un conocimiento de ambos aspectos, el éxito y las dificultades, proporcionan al profesor elementos sobre los cuales tomar decisiones para acompañar a sus estudiantes.

De este modo, las características de resolutores exitosos y las posibles dificultades, permiten una delimitación y organización sobre lo que el profesor espera que sus estudiantes aprendan, en términos de expectativas y limitaciones. Una perspectiva que permite abordar las expectativas son las características de resolutores exitosos (e.g., Kaur, 1997). Chapman (2015) señala que estas se relacionan con la capacidad de los profesores para identificar en sus estudiantes dichas características para redirigir o reforzar según sea el caso. Aquí emergen las posibles formas de proceder asociadas a cada fase de resolver un problema (e.g., Garofalo y Lester, 1985) y las estrategias de resolución que se espera los estudiantes puedan desarrollar (e.g., Posamentier y Krulik, 1998).

Las limitaciones están referidas a las posibles dificultades que pueden presentar y en los errores que estas pueden provocar en los estudiantes. Estos errores serán las evidencias visibles de la dificultad presentada por los estudiantes. Chapman (2015)

señala que los errores permitirían una vía de entrada a la comprensión conceptual del problema presentado. Las dificultades ampliamente estudiadas son mayoritariamente referidas a problemas aritméticos de enunciado verbal (e.g., Goldin y McClintock, 1979), que en el contexto de la educación primaria toman gran relevancia (NCTM, 2000). No obstante, Charles, Lester y O'Daffer (1987) hacen notar otras dificultades relativas al proceso de resolver un problema, como por ejemplo comprender las variables y condiciones del problemas. Estas dificultades suponen que el profesor tenga conocimiento sobre cómo mediar cuando un estudiante no comprende el problema a través de, por ejemplo, representaciones.

Conocimiento sobre la resolución de problemas como tarea escolar

La interacción que se produce entre el profesor y la resolución de problemas implica conocimientos relativos al problema y al proceso de resolución como tarea escolar. En este sentido, es complejo diferenciar estos elementos del conocimiento propio del proceso. Para identificar qué elementos se corresponden a cada tipo de conocimiento es necesario tener presente que nuestra caracterización tiene como elemento primordial la consideración del resolutor. Por tanto, en el conocimiento sobre la resolución de problemas se ubican los conocimientos sobre la tarea como problema y del proceso de resolución, es decir en términos de sus características matemáticas teniendo en consideración al resolutor. En tanto, este conocimiento pedagógico, se refiere a sus características como tarea escolar, es decir como una actividad que provocará aprendizajes. Concretamente, nos referimos a las características que puedan hacerla una tarea matemáticamente rica en un momento dado, sus posibilidades de cambio a través de la invención de problemas, los diferentes modelos de solución que podrían ser de ayuda para los estudiantes, etc.

Cai (2010), atribuye como rol clave del profesor el uso que realice de las tareas o problemas. Lester y Cai (2016) señalan que la selección de un buen problema es crítico, pues entre otras cuestiones, se ha evidenciado que los profesores tienden a evitar el uso de tareas realmente problemáticas y que desafíen a los estudiantes. En este sentido, las diferentes categorías semánticas de los problemas aritméticos de enunciado verbal (PAEV) tienen una presencia significativa debido a que permitirán criterios para su selección. Por ejemplo, el problema de las páginas del libro de Carmen es una tarea que puede resultar problemática para estudiantes de los cursos iniciales de Educación Primaria. La utilización del algoritmo en cursos intermedios y finales es bastante común, por lo que es poco probable que para estudiantes de estos niveles constituya realmente un problema. Por otro lado, la estructura aritmética del problema es de las más simples y que generan menor dificultad, por tanto la utilización de este problema en una clase que presente un enfoque de enseñanza para la resolución de problemas o a través de ella es bastante limitado.

Estas razones y otras, son señaladas como criterios que describen buenos problemas (e.g., NCTM, 2000). La investigación sobre PAEV tiene la particularidad de contar con un gran número de implicaciones para la enseñanza que deberían formar parte del conocimiento de un profesor.

Junto a estos conocimientos sobre los problemas como tarea escolar, emergen elementos relativos al proceso de resolver un problema. Los modelos de resolución como las fases de Pólya (1981) o las propuestas por Schoenfeld (1992) tienen repercusiones en la enseñanza. Por ejemplo, Schoenfeld establece dos fases (leer y analizar) para la fase de comprensión de Pólya. Esta diferenciación, por sutil que parezca, resulta de ayuda a un profesor que tiene dificultades para que algunos estudiantes comprendan el problema. Análogamente, las diferencias y especificaciones que realizan diferentes autores con sus modelos de resolución, constituyen conocimientos que son de utilidad para que los profesores puedan planificar, dar las ayudas necesarias o fomentar habilidades involucradas en la resolución de problemas.

Respecto a la invención de problemas, al plantear una situación para los estudiantes de primaria, es necesario diferenciar entre escenarios (Silver, 1994) y métodos (e.g., Brown y Walter, 2005). Estos elementos permitirían a los docentes replantear tareas cuando los estudiantes se atascan o brindar extensiones o nuevas situaciones a los estudiantes más aventajados. Foong (2002) muestra los beneficios que ofrece al desarrollo profesional de los profesores, el que estos posean conocimientos sobre tipos de problemas, con el objeto de, por ejemplo, transformar problemas cerrados en preguntas abiertas cortas. Es decir, que el conocimiento del profesor también debe incluir elementos que les permitan transformar problemas como el de las páginas del libro de Carmen en uno de tipo abierto. Por ejemplo, reformular dicho problema a uno del tipo “Carmen ha leído 47 páginas en dos días. El primero leyó más que el segundo, ¿cuántas páginas puede haber leído cada día?”. Del mismo modo, ser capaz de identificar otras variables presentes como podrían ser las cantidades involucradas, permitiría hacer variaciones, intercambiándolas por otras que admitan la reagrupación para responder en caso de estudiantes más avanzados o, en caso de estudiantes con dificultades a cantidades menores que 20.

Conocimiento sobre factores no cognitivos que afectan la resolución de problemas

El tercer componente de la triada didáctica tiene relación con la interacción entre el profesor y el estudiante en términos de los factores no cognitivos (emociones, actitudes y creencias) de cada uno en torno a la resolución de problemas. La posición de poder en la que se encuentra el profesor y que caracteriza esta relación, acentúa la importancia y responsabilidad de generar un ambiente adecuado que fomente el desarrollo de la resolución de problemas en sus estudiantes. Si bien el

ámbito de los factores no cognitivos es amplio, en este trabajo lo focalizamos en un meta-conocimiento sobre las concepciones y las creencias y las mutuas implicancias que estas tienen en el aprendizaje y la enseñanza. Concretamente nos referimos a expectativas relativas a aspectos no cognitivos como disposiciones o creencias (Schoenfeld, 1992) que se asocian con un desempeño exitoso. Las concepciones y creencias influyen en el aprendizaje de la resolución de problemas y en su enseñanza. Es responsabilidad del profesor conocer tanto su influencia como algunas de las más usuales con el objeto de facilitar ambientes de trabajo adecuados.

Fomentar creencias relativas al tiempo necesario para resolver un problema, las múltiples opciones de resolución o posibilidad de varias respuestas son responsabilidad del profesor que gestiona clase. Asimismo, hacer presente las emociones de ansiedad y frustración como elementos naturales del proceso de resolver un problema son elementos del conocimiento del profesor. También, se debe promover la responsabilidad de los estudiantes en el proceso de construcción de sus aprendizajes, fomentar un proceso de resolución de problemas en concordancia con lo que plantean Wilson y colaboradores (1993), dónde no hay una linealidad sino que existe la posibilidad de volver sobre lo realizado. Todas estas concepciones y creencias debiesen formar parte del conocimiento del profesor. Es importante que el profesor conozca que su forma de actuar y sus propias creencias afectan el comportamiento de los estudiantes y su forma de resolver problemas. Aceptar ciertas formas de resolver problemas y no validar otras, mantener climas de riguroso silencio durante la resolución de un problema o pedir hojas de trabajo pulcras, provocarán creencias sobre cómo debe comportarse un estudiante cuando resuelve un problema que no ayudarán al desarrollo de su competencia.

Conocimiento sobre la gestión de la enseñanza de la resolución de problemas

Un cuarto componente supone el conocimiento sobre la gestión de la enseñanza de la resolución de problemas. Generalmente, la gestión es considerada un conocimiento pedagógico general, pero la enseñanza de la resolución de problemas exige un conocimiento específico. Algunos autores señalan que el aprendizaje de los estudiantes no solo dependen del tipo de tareas matemáticas que los profesores plantean, sino también del tipo de discurso en el aula que tiene lugar durante la resolución de problemas (Lester y Cai, 2016). Chapman (2015) señala que algunas estrategias de enseñanza se muestran idóneas para el desarrollo de esta competencia en los estudiantes. Entre ellas se destaca la enseñanza con orientación constructivista en la que se cimientan significados en ambientes colaborativos, el fomento del desarrollo de estrategias propias de los estudiantes, la escucha activa de los estudiantes y la invención de problemas. Concluye que los profesores deben tener una competencia estratégica, con la que puedan percibir las implicaciones de los

diferentes enfoques de los estudiantes para resolver un problema, decidiendo cuándo y cómo intervenir para que el proceso mantenga su naturaleza. Lester y Cai (2016) reafirman esta idea y analizan las actividades que se han mostrado más efectivas para el desarrollo de resolutores competentes. Identifican que el factor común es que son realmente problemáticas y promueven el pensamiento y sentido matemático.

En este marco, los enfoques de enseñanza o vías de acceso a la resolución de problemas (Schroeder y Lester, 1989) se corresponden con modelos que fomentan y propician actuaciones en el aula que promuevan el desarrollo de la resolución de problemas. Entendemos que cada uno de ellos da paso a ciertas acciones del docente, que aun siendo diferentes, pueden agruparse en cuatro tipos de gestiones: del discurso, del atasco, de la evaluación y de los recursos.

Un primer elemento a considerar es la gestión del discurso, entendido como todas las acciones (verbales o no) que devengan en una conducción de la clase en la que los estudiantes participen, colaboren y hagan verdaderamente resolución de problemas (Cai, 2010). Lester y Cai (2016) lo describen como la forma en que “los maestros orquestan pedagógicamente la resolución activa de problemas en el aula” (p. 124), incluyendo una serie de acciones como, fomentar el uso de múltiples representaciones o que pueda existir más de una solución. Concretamente, después de la selección de un problema como el de las páginas del libro de Carmen, el profesor es el encargado de diseñar una serie de acciones que estén alineadas con sus objetivos. Por ejemplo, utilizar un enfoque de enseñanza de la matemática sobre la resolución de problemas supone que el foco estará en las fases y estrategias. Por tanto, deberían emerger acciones que hagan que los estudiantes puedan discutir sus estrategias, mostrarlas a los demás, explicándolas y evaluándolas. Junto con esto, el profesor debería supervisar el trabajo de tal manera que a través de preguntas pueda hacer conscientes a los estudiantes sobre en qué fase de resolución se encuentran y qué significa esto en el proceso de resolución. Posteriormente, es necesario concretizar este discurso en una planificación.

Respecto a la gestión de los atascos, se hace necesario un conocimiento de estrategias específicas de enseñanza que sirvan como herramientas para que el profesor pueda mediar en los procesos de resolución. Por ejemplo, en el momento en que se esté utilizando un problema como el de las páginas del libro de Carmen, es propio de la labor del profesor, ser capaz de plantear una representación alternativa para la comprensión de un problema. Puede ocurrir que el estudiante está anotando los datos del problema y no logra comprenderlo, el profesor debiese sugerir una representación que permita visualizar la relación de las cantidades para que se pueda realizar una modelización de la situación y se pueda inferir la operación que lo resuelve. Otro aspecto tiene relación con la posibilidad de redirigir un atasco, sugiriendo otra estrategia. Un estudiante que está utilizando el algoritmo, pero no

recuerda los pasos y comete equivocaciones, el profesor debe mediar para que puedan emerger otras estrategias, tal vez menos avanzadas, pero igualmente útiles como el conteo o la descomposición de los números para sumar según el valor de las cifras.

Otro aspecto tiene relación con la gestión de la evaluación del proceso de resolver un problema. Chapman (2015) indica que es importante conocer elementos sobre esto, que sean coherentes con una genuina resolución de problemas, es decir, centrados en el proceso (e.g., Charles et al., 1987). Este conocimiento permitiría a los docentes establecer metas que promuevan aprendizajes y que estas se traduzcan en unos instrumentos adecuados y variados.

Un último tipo de gestión tiene relación con la que realiza el profesor con los recursos, tanto manipulables como intangibles. El profesor debe tener un conocimiento tanto de la utilización materiales manipulativos durante la resolución de problemas (Kelly, 2006), como de las representaciones posibles de usar (Smith, 2003) y como estas afectan el desarrollo de este proceso en los estudiantes. Esta gestión debe hacerse de las potencialidades y limitaciones de los recursos en términos de la matemática involucrada en sus características. Especial atención tienen estas últimas, pues cada estudiante necesitará de una variedad de ellas en cada una de las fases de resolución. Además, es deseable un conocimiento sobre medios tecnológicos que apoyen la resolución de problema. Diversas investigaciones han señalado que la tecnología provee de nuevos escenarios y representaciones dinámicas que el lápiz y el papel no permiten (Santos-Trigo y Camacho, 2013).

Como puede verse en esta sucinta reflexión, emergen un gran cúmulo de elementos del conocimiento pedagógico sobre la resolución de problemas. Nuestra intención no es agotar la discusión, sino delimitar un marco para su realización. No obstante, nos parece que esta sistematización pone de manifiesto la complejidad de describir el conocimiento del profesor desde esta perspectiva, evidenciando que los modelos de conocimiento han omitido algunos aspectos que pueden resultar dificultosos de analizar. A modo de resumen, la tabla 2 muestra una síntesis de los elementos discutidos sobre el conocimiento pedagógico de la resolución problemas en términos de la actividad de enseñar a resolver problemas.

Tabla 2

Componentes del conocimiento pedagógico sobre resolución de problemas

Componente	Conocimientos
Estudiante como resolutor	Características de resolutores exitosos Dificultades y errores
Resolución de problemas como tarea escolar	Selección de problemas

Tabla 2

Componentes del conocimiento pedagógico sobre resolución de problemas

Componente	Conocimientos
	Modelos de resolución y estrategias
	Invencción de problemas
Factores no cognitivos	Influencia mutua de creencias y concepciones
Gestión de la enseñanza de la resolución de problemas	Enfoques o vías de acceso
	Gestión del discurso
	Gestión de los atascos
	Gestión de la evaluación
	Gestión de los recursos

REFLEXIONES FINALES

Partiendo de revisiones curriculares y teóricas, en este trabajo reflexionamos sobre una posible organización del conocimiento del profesor de educación primaria sobre la resolución de problemas de matemáticas. La reflexión que presentamos reafirma las ideas de Chapman (2015) y Foster y colaboradores (2014) sobre la existencia de particularidades al describir el conocimiento del profesor desde la perspectiva de un proceso en vez de un concepto matemático. Entender el conocimiento del profesor solo desde la perspectiva de los conceptos, suele provocar que la resolución de problemas sea un lugar donde las matemáticas escolares puedan ser aplicadas o construidas, pero no consideran este proceso como una entidad que deba enseñarse. En este contexto, los componentes de conocimiento que presentamos permiten identificar elementos propios de la resolución de problemas, tanto del significado de problema, su proceso de resolución e invención, como de sus aspectos didácticos.

Nuestra intención en este trabajo no es describir en detalle cada una de los conocimientos que implicaría enseñar a resolver problemas, debido a que como señalan algunos autores, sus límites no son claros (e.g., Bromme, 1994). Continuando con la línea de Chapman (2015), esta reflexión la iniciamos con el propósito de identificar diferentes componentes de conocimiento que intervienen en la enseñanza de la resolución de problemas. Este conocimiento es sin duda complejo y amplio, por lo que debe investigarse de manera sistémica teniendo en consideración las demás dimensiones que intervienen en una actividad de

enseñanza. No obstante, un punto de partida necesario para la realización de estas investigaciones, es tener un marco de referencia sobre los conocimientos que deben poseer los docentes.

Los componentes del conocimiento relativos a la resolución de problemas que presentamos aquí son un avance que permite profundizar en aspectos relacionados con la enseñanza de la resolución de problemas, especialmente desde la perspectiva del conocimiento del profesor. Si bien este es un tema recurrente en la literatura, esta perspectiva del conocimiento del profesor es bastante reciente. La escasa información sobre qué deben saber los profesores, se añade como un factor a los señalados por Lester (2013) como incidentes en que la enseñanza de la resolución de problemas resulte tan elusiva a través de más de 40 años de investigación. Creemos que, como siguiente paso, es primordial complementar estos componentes con análisis del proceso de planificación de los docentes para observar cómo desarrolla su conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje y cómo se conjugan, y análisis de la sala de clases, que evidencien elementos de la organización y la gestión que la planificación no permite observar.

Por último, es importante señalar que la formación del profesorado se ha convertido en un imperativo en sociedades actuales. La calidad del conocimiento y el desarrollo de este, es una preocupación presente en la formación inicial de profesores (Ponte y Chapman, 2016). Desde esta perspectiva, nuestro trabajo supone un desarrollo útil, pues proporciona componentes para diagnosticar elementos presentes en programas de formación universitarios.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se enmarca en el Plan Nacional de I+D+I del Ministerio de Ciencia e Innovación, financiado bajo el proyecto EDU2015-70565-P; y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica del Gobierno de Chile (CONICYT), mediante una beca de doctorado en el extranjero (Folio 72170314).

REFERENCIAS

- Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47(2), 125-143.
- Agre, G. P. (1982). The concept of problem. *Educational Studies*, 13(2), 121-142.
- Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-46.

- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17(2), 125-141.
- Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' professional knowledge. En R. Biehler, R. Scholz, R. Sträber y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 73-88). Dordrech, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, S. I. y Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Cai, J. (2010). Helping elementary school students become successful mathematical problem solvers. En D. V. Lambdin y F. K. Lester (Eds.), *Teaching and learning mathematics. Translating research for elementary school teachers* (pp. 9-14). Charlotte, NC: NCTM.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Peterson, P. L. y Carey, D. A. (1988). Teachers' pedagogical content knowledge of students' problem solving in elementary arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(5), 385-401.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th CERME* (Vol. 8, pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981
- Chapman, O. (2012). Practice-based conception of secondary school teachers' mathematical problem-solving knowledge for teaching. En T.-Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th PME Conference* (Vol. 2, pp. 107-114). Taipéi, Taiwán: PME.
- Chapman, O. (2013). Investigating teachers' knowledge for teaching mathematics. *Journal of Mathematics teacher Education*, 16(4), 237-243.
- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT*, 3(1), 19-36.
- Charles, R. I., Lester, F. K. y O'Daffer, P. G. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: NCTM.
- Foong, P. Y. (2002). The role of problems to enhance pedagogical practices in the Singapore. *The Mathematics Educator*, 6(2), 15-31.
- Foster, C., Wake, G. y Swan, M. (2014). Mathematical knowledge for teaching problem solving: Lessons from lesson study. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C.

- Nicol y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 97-104). Vancouver, Canadá: PME.
- García, M. y Llinares, S. (2001). Los procesos matemáticos como contenido: el caso de la prueba matemática. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 105-122). Madrid, España: Síntesis.
- Garofalo, J. y Lester, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.
- Goldin, G. A. y McClintock, C. E. (1979). *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, OH: Information Reference Center (ERIC/IRC), The Ohio State University.
- Grønmo, L. S., Lindquist, M. y Arora, A. (2014). TIMSS advanced 2015 mathematics framework. En I. V. S. Mullis y M. O. Martin (Eds.), *TIMSS advanced 2015 assessment frameworks* (pp. 9-16). Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College and IEA.
- Kaur, B. (1997). Difficulties with problem solving in mathematics. *The Mathematics Educator*, 2(1), 93-112.
- Kelly, C. A. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: A performance-based analysis. *The Mathematics Enthusiast*, 3(2), 184-193.
- Kilpatrick, J. (2016). Reformulating: Approaching mathematical problem solving as inquiry. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 69-81). Nueva York, NY: Springer.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 245-278.
- Lester, F. K. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Nueva York, NY: Springer.
- Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 361-386). Nueva York, NY: Springer.
- Mason, J. (2016). When is a problem...? “When” is actually the problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 263-285). Nueva York, NY: Springer.

- Mayer, R. E. y Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. En P. A. Alexander y P. H. Winne (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 287-303). Nueva York, NY: Routledge.
- NCTM. (1980). *An agenda for action: Recommendations for school mathematics of the 1980's*. Reston, VA: Author.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Nipper, K. y Sztajn, P. (2008). Expanding the instructional triangle: conceptualizing mathematics teacher development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(4), 333-341.
- OECD. (2013). *Draft PISA 2015 Mathematics Framework*. París, Francia: OECD Publishing.
- Piñeiro, J. L., Castro, E. y Castro-Rodríguez, E. (2016). Conocimiento profesional para la enseñanza de la resolución de problemas en primaria: una perspectiva curricular. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, ... A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 427-436). Málaga, España: SEIEM.
- Polya, G. (1981). *Cómo plantear y resolver problemas?* DF, México: Trillas.
- Ponte, J. P. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teacher's learning and knowledge for teaching. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics education* (3a ed., pp. 275-296). Nueva York, NY: Routledge.
- Posamentier, A. S. y Krulik, S. (1998). *Problem-solving strategies for efficient and elegant solutions: A resource for the mathematics teacher*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (2013). *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Comares.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Santos-Trigo, M. y Camacho, M. (2013). Framing the use of technology in problem solving approaches. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 279-302.
- Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17(1), 153-172.

- Schmidt, W. H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T. y Wiley, D. E. (1997). *Many visions, many aims. Volume 1. A cross-national investigation of curricular intentions in school mathematics*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). Nueva York, NY: Macmillan.
- Schoenfeld, A. H. (2012). Problematizing the didactic triangle. *ZDM*, 44(5), 587-599.
- Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1&2), 9-34.
- Schroeder, T. L. y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton y A. P. Shulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics. 1989 yearbook* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Smith, R. P. (2003). Representation in school mathematics: Children's representations of problems. En J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 263-274). Reston, VA: NCTM.
- Thames, M. H. y Ball, D. L. (2010). What math knowledge does teaching require? *Teaching Children Mathematics*, 17(4), 220-229.
- Turner, F. y Rowland, T. (2011). The knowledge quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. En T. Rowland y K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L. y Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. En P. S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57-78). Nueva York, NY: Macmillan.

Juan Luis Piñeiro
Universidad de Granada
juanluis.pineiro@gmail.com

Elena Castro-Rodríguez
Universidad de Granada
elenacastro@ugr.es

Enrique Castro
Universidad de Granada
ecastro@ugr.es

Recibido: 03/09/2018. Aceptado: 03/02/2019

doi: 10.30827/pna.v13i2.7876



ISSN: 1887-3987