

DEPARTAMENTO DE GEOMETRIA Y TOPOLOGIA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

SUPERFICIES MINIMALES  
SUPERFICIES CON CURVATURA MEDIA CONSTANTE

FRANCISCO JOSE LOPEZ FERNANDEZ

*Memoria realizada en el Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, bajo la dirección del Pof. Antonio Ros Mulero, Profesor Titular del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad de Granada, para obtener el Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada.*

Vº. Bº.      El Director

*Aspirante al Grado de Doctor*

*Tesis Doctoral dirigida por el Profesor Dr. D. Antonio Ros Mulero, profesor titular del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Fué leída el día 23 de Septiembre de 1989. ante el Tribunal formado por los profesores: Antonio Martínez Naveira, Francisco Urbano Pérez-Aranda, Vicente Miquel Molina, Rafael Ortega Rios y Sebastian Montiel Gómez. Obtuvo la calificación de Apto "cum laude".*

A mis padres y  
hermanos

A Isabel

Agradezco sinceramente a Antonio Ros su ánimo y ayuda  
constantes.

Mi reconocimiento a Alfonso, Sebastian y Francis por su  
gran estímulo.

## INDICE

INTRODUCCION .....	1
CAPITULO 0: "PRELIMINARES".....	1
0.1. Algunos Resultados Básicos en la Teoria de Superfícies Minimales en $\mathbb{R}^3$ .....	1
CAPITULO I: "ESTABILIDAD DE SUPERFÍCIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN $\mathbb{R}^3$ Y SUPERFÍCIES DE INDICE 1".....	9
I.1. Generalidades y Preliminares .....	10
I.2. Superfícies Minimales de Indice 1 .....	14
I.3. Superfícies de Curvatura Media Constante .....	18
CAPITULO II: "ACOTACIONES DE SUPERFÍCIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$ ".....	33
II.1. Generalidades y Preliminares .....	33
II.2. Superfícies Minimales no Orientables en $\mathbb{R}^3$ entre dos planos .....	35
II.3. Superfícies Minimales Doblemente Periodicas con una coordenada acotada .....	39
CAPITULO III: "APLICACIÓN DE GAUSS DE SUPERFÍCIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$ ".....	45
III.1. Generalidades y Preliminares .....	46
III.2. Superfícies Minimales omitiendo 6 ó más puntos de la esfera por su aplicación de Gauss .....	51

INDICE

CAPITULO IV: "NUEVOS EJEMPLOS DE SUPERFÍCIES MINIMALES EN $R^3$ " .....	53
IV.1. Preliminares .....	54
IV.2. Construcción de nuevos ejemplos de Superfícies Minimales .....	56
BIBLIOGRAFÍA .....	61

## INTRODUCCION

Clásicamente, el estudio de las superficies minimales en el espacio Euclídeo tridimensional ha sido uno de los problemas más importantes de la Geometría Diferencial.

Las superficies minimales surgen como los "puntos críticos" del funcional área y se corresponden intuitivamente, siguiendo el modelo físico clásico descrito por Plateau, con las formas que adoptan las películas de jabón que se pueden construir con un soporte de alambre de forma arbitraria.

Aparte de esta interpretación física, geoméricamente se pueden describir como las superficies de curvatura media nula, y analíticamente como los grafos asociados a funciones  $f(x,y)$  que satisfacen la ecuación quasilineal y elíptica:

$$(1) \quad (1+f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_{xy} + (1+f_x^2)f_{yy} = 0.$$

Para abordar su estudio se han desarrollado métodos provenientes del Analisis Complejo y de las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales, además de técnicas propias de la Geometría Riemanniana.

En un principio, el problema más conocido y estudiado fué el de la construcción de superficies minimales con borde prefijado (Problema de Plateau), para posteriormente pasar a resultados más propios de la teoría global de estas superficies.

Así, en 1915 Bernstein (ver [34]) probó que los únicos grafos minimales y completos (definidos sobre  $\mathbb{R}^2$ ) son los que determinan planos, probando que (1) sólo admite soluciones en todo  $\mathbb{R}^2$  definidas por funciones lineales.

Este teorema ha admitido posteriormente diversas generalizaciones que han motivado la apertura de distintas líneas de investigación dentro de este campo de la Geometría.

Concretamente, el estudio de la aplicación de Gauss y la estabilidad de superficies minimales, que serán de especial interés en esta memoria (ver Capítulos I,III).

El concepto de estabilidad tiene sentido en una clase más amplia de superficies: las de curvatura media constante, y algunos problemas relativos se tratan específicamente también en el Capítulo I.

Otro problema global importante en la teoría de superficies minimales es el de estudiar el tipo de acotaciones que admiten en  $\mathbb{R}^3$ , así como de dar nuevos ejemplos interesantes en esta línea.

Calabi fué el primero que se preguntó si existían superficies minimales y completas no llanas contenidas en un semiespacio de  $\mathbb{R}^3$ , y respuestas a esta pregunta en sentido afirmativo han sido ya hoy obtenidas. Sobre estos temas tratará el Capítulo II.

Naturalmente que el conocimiento de nuevos ejemplos de superficies minimales ha enriquecido aún más esta teoría. En los últimos años, un ejemplo debido a Costa (ver [04]) de una superficie minimal completa con curvatura total finita embebida en  $\mathbb{R}^3$  ha resuelto en sentido negativo la conjetura que afirmaba que el plano y la Catenoide eran los dos únicos en tales condiciones. Estos temas han evolucionado y sufrido un gran impulso gracias a los trabajos de Meeks III y D. Hoffman ([19], [21]), quienes además de estudiar completamente la superficie de Costa, han obtenido nuevos ejemplos embebidos para géneros tan grandes como se quiera.

A la construcción de algunos ejemplos de superficies minimales de curvatura total finita y género cero está dedicado el Capítulo IV.

Tras esta somera exposición que a modo de resumen nos ha introducido en algunos de los problemas que serán tratados posteriormente, procedamos a la explicación más detallada de los contenidos de cada uno de los Capítulos de que consta la memoria.

El Capítulo 0 está dedicado al desarrollo de algunas gene-



neralidades y hechos fundamentales en la Teoría de Superficies Minimales en  $\mathbb{R}^3$ , muchos de los cuales se pueden encontrar en [04] ó [35].

El Capítulo I lo hemos titulado: "Estabilidad de Superficies de Curvatura Media Constante en  $\mathbb{R}^3$  y Superficies Minimales de Índice 1".

Si  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión de una superficie en el espacio Euclídeo tridimensional, la condición de minimalidad, esto es,  $H=0$  con  $H$  la curvatura media de la inmersión  $x$ , como ya hemos comentado antes es equivalente a que  $x$  sea un punto crítico para el funcional Area asociado a variaciones de  $x$  con soporte compacto.

Es conocido también que las superficies con  $H$  constante no nula son también puntos críticos relativos a un problema variacional ligeramente distinto al anterior: en este caso respecto al funcional Area asociado a variaciones con soporte compacto que dejan constante el volumen "encerrado" por la superficie en cada instante de la deformación.

De manera natural pues surge el concepto de estabilidad en sendos problemas variacionales, hablandose de superficies (minimales ó de curvatura media constante) estables cuando estas representen mínimos locales para el funcional Area asociado a cada problema variacional.

Así, independientemente, Do Carmo y Penk [06], Fischer-Colbrie y R. Schoen [11] y Pogorelov [38] caracterizaron al plano como la única superficie minimal completa y estable en  $\mathbb{R}^3$ , y Barbosa y Do Carmo [03] a la esfera  $S^n$  como la única hipersuperficie compacta y con  $H$  constante estable en  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Observar que el primero de los resultados constituye una primera generalización del Teorema de Berstein anteriormente mencionado (tener presente que todo grafo minimal es estable).

En el caso de  $H$  constante general, quedaba pues abierto el problema para hipersuperficies no compactas con  $H$  constante en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , y más concretamente, para superficies en  $\mathbb{R}^3$ .

Para el caso  $H=0$  en  $\mathbb{R}^3$ , es de especial transcendencia el conocimiento de información acerca del Índice de la superficie, entendiendo por Índice el número máximo de direcciones linealmente independientes a lo largo de las cuales una superficie

## INTRODUCCION

representa un máximo estricto para el funcional Area. Observese que en el sentido de esta definición, estabilidad equivale a Indice cero.

En esta linea, Fischer-Colbrie [10] y Gulliver, Lawson [14] [15] han demostrado que una superficie minimal, completa y orientable tiene Indice finito si y sólo si es de curvatura total finita.

Nosotros ya hemos comentado anteriormente que Indice cero implica necesariamente que nuestra superficie es un plano.

En esta memoria se prueba que la Catenoide y la Superficie de Enneper son las únicas superficies minimales completas orientables con Indice 1, lo que nos proporciona una nueva caracterización de estos dos ejemplos tan importantes clásicamente.

Por otra parte, Cheng y Tysk [07] han resuelto este mismo problema para el caso embebido.

Si se desea, se puede encontrar más información acerca del Indice en superficies minimales en los trabajos de Tysk [42], Choe [08], Ejiri (comunicación personal, aparecerá).

Comprobaremos que una superficie completa, orientable con  $H$  constante en  $\mathbb{R}^3$  tiene Indice finito si y sólo si es compacta con  $H$  no nula ó es una superficie minimal con curvatura total finita.

En particular, se observará que las superficies de  $H$  constante no compactas y estables necesariamente han de ser superficies minimales con Indice menor o igual que 1, esto es, la Catenoide, la Superficie de Enneper ó el plano.

No será difícil el establecer que la única de estas tres estable es el plano, con lo que se cierra el problema relativo a la clasificación de superficies con  $H$  constante y estables en  $\mathbb{R}^3$ .

Es importante destacar que este último resultado ha sido obtenido tambien independientemente por Silveira [40] y Palmer [36].

No se conocen versiones para dimensiones superiores de este mismo resultado, pero el problema es bastante complicado y necesita otras muchas herramientas.

Por otra parte, gran parte de los resultados contenidos en

este primer Capítulo estan recogidos y conforman esencialmente la referencia [29].

En el Capítulo II, nos centramos en el tema de acotaciones de superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$ .

Una restricción bien conocida a la topología de las superficies minimales y completas en  $\mathbb{R}^3$  es que nunca pueden ser compactas.

Sin embargo, ha sido de especial interés el establecer si es posible encontrar superficies minimales y completas en  $\mathbb{R}^3$  sometidas a determinadas acotaciones, como motivaba el problema planteado por Calabi.

En el año 1980, P.M. de Jorge y F. Xavier [24] dieron ejemplos de superficies minimales y completas no llanas en  $\mathbb{R}^3$  entre dos planos paralelos, resolviendo así el interrogante de Calabi.

Tales superficies son orientables y con topología trivial (simplemente conexas). Obviamente, a priori sobre estas superficies podemos afirmar que son de curvatura total finita y por supuesto no estables.

En estos ejemplos, se observa también que la aplicación de Gauss omite dos puntos de la esfera, justamente los que corresponden a los dos normales asociados a los planos que las encierran.

Destaquemos también que B. Lawson construyó superficies no compactas en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante entre dos planos (ver [25]), y más recientemente, Abresh [00] y anteriormente Wente [43] han dado ejemplos de toros inmersos en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante.

Posteriormente al resultado de Jorge y Xavier, se han desarrollado algunos trabajos que profundizan en el estudio de la topología que una superficie minimal y completa en  $\mathbb{R}^3$  con una coordenada acotada puede admitir.

Concretamente, Rosenberg y Toubiana en [39] construyen cilindros minimales en  $\mathbb{R}^3$  entre dos planos paralelos, y en esta memoria se expone un trabajo recogido en [28] que nos muestra como generar una familia de cintas de Möbius minimales y completas en las mismas condiciones. En particular, comprobaremos que la orientabilidad no es esencial en el trabajo de Jorge y Xavier.

Aun hoy permanece abierto el problema de si es posible encontrar alguna superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$  dentro de un cilindro ó dentro de una bola.

D. Hoffman y W.H. Meeks III en [19] (ver tambien [34]) han probado que todo anillo minimal en  $\mathbb{R}^3$  propiamente inmerso que esté por encima ó por debajo de una Catenoide necesariamente a de tener curvatura total finita, por lo que cualquier superficie minimal completa propiamente inmersa y con topología finita si interseca a una Catenoide en un conjunto compacto ha de tener curvatura total finita.

Estos resultados nos imponen una restricción clara para las superficies posibles soluciones de los problemas anteriores: no pueden ser propiamente inmersas, que tampoco ha de sorprendernos ya que todos los ejemplos anteriores con una coordenada acotada no lo son.

En este Capítulo tambien se presenta un ejemplo de una superficie minimal no llana doblemente periodica con una coordenada acotada.

Una superficie en  $\mathbb{R}^3$  es doblemente periodica si es invariante por dos traslaciones linealmente independientes.

Esta familia de superficies minimales es muy importante desde el punto de vista clásico, y últimamente algunos aspectos de esta teoria han sido estudiados por W.H. Meeks III y Rosenberg (ver [32]).

Si  $\mathcal{G}$  es el Grupo generado por las traslaciones asociadas a  $M$  doblemente periodica, entonces  $M/\mathcal{G}$  es una superficie en  $\mathbb{R}^3/\mathcal{G} = T \times \mathbb{R}$ , donde  $T$  es un toro llano de dimensión dos.

Además, si  $M$  es minimal y completa en  $\mathbb{R}^3$ ,  $M/\mathcal{G}$  lo es en  $T \times \mathbb{R}$ .

El ejemplo al que hacemos referencia nos proporciona un toro agujereado minimal y acotado en  $T \times \mathbb{R}$ .

Por lo tanto, este es el mejor resultado posible acerca de acotaciones de superficies doblemente periodicas y minimales en  $\mathbb{R}^3$ .

El Capítulo III está dedicado a uno de los temas más apasionantes y de mayor desarrollo en estos últimos años dentro de la teoria general de las superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$ : el estudio de la aplicación de Gauss.

Como generalización del Teorema de Berstein, Niremberg con-

jeturó que una superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$  y no llana ha de tener la imagen por la aplicación de Gauss densa en  $S^2$ .

R. Osserman resolvió en sentido afirmativo esta conjetura y profundizó aún más en este aspecto, probando que el complemento de la imagen por su aplicación de Gauss de una superficie minimal y completa no llana en  $\mathbb{R}^3$  tiene capacidad logarítmica cero (ver [35]).

F. Xavier dió un brillante impulso a estos trabajos demostrando que si la aplicación de Gauss de una superficie minimal omitía 7 ó más puntos de la esfera, esta debía de ser un plano (ver [44]).

Era sobradamente conocido que Voss (ver [35]) ya habia construido superficies minimales completas cuya aplicación de Gauss omitía  $k$  puntos de  $S^2$ , con  $k$  entre 0 y 4, por lo que el problema quedó centrado en si era posible encontrar superficies minimales omitiendo 5 ó 6 puntos de  $S^2$  por su aplicación de Gauss.

Fujimoto (ver [12]) ha dado respuesta recientemente a este interrogante resolviendolo completamente, y demostrando que el plano es la única superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  cuya aplicación de Gauss omite 5 puntos ó más de la esfera.

Este trabajo fué generalizado por Osserman y Xiaokang Mo posteriormente en [46].

En esta memoria se presenta un resultado intermedio obtenido independientemente de los trabajos de Xavier y Fujimoto, y que representa un refinamiento del método de Xavier para obtener un mejora de un punto en su Teorema.

Por último, en el Capítulo IV se presentan algunos ejemplos de superficies minimales de género cero y curvatura total finita.

Aún hoy se mantiene abierta la conjetura que afirma : "La Catenoide y el Plano son las dos únicas superficies minimales de género cero con curvatura total finita y embebidas en  $\mathbb{R}^3$ ".

Esta conjetura, para género arbitrario, es falsa como prueba la superficie de Costa-Meeks III-Hoffman, y los ejemplos posteriores que Meeks y Hoffman han dado de superficies minimales embebidas con género alto (ver [20], [21]).

No obstante, Meeks III y Jorge han probado que la

## INTRODUCCION

conjetura anterior en género 0 es cierta si se impone la restricción de que la curvatura total sea mayor ó igual que  $-16\pi$ , esto es, superficies con un número de finales menor ó igual a 5 (ver [23]), y han dado ejemplos de superficies minimales de género 0 (no embebidas) con todos sus finales embebidos y tipo Catenoide.

Posteriormente, Peng ([37]) construyó nuevos ejemplos de superficies minimales, siempre en género 0, con 6 finales todos embebidos, dos de ellos tipo Catenoide y el resto planos, que mantienen cierta disposición de los vectores normales que se tiene en el caso de una superficie embebida (lo que llama superficies pseudo-embebidas), pero que no son embebidas.

Consultar también el trabajo de L. Xiao [45].

En esta memoria se presenta una manera de generar superficies minimales de género cero con un número par arbitrario de finales, todos ellos embebidos y planos salvo dos que son tipo Catenoide, y que responden a lo que Peng definía como superficies pseudo-embebidas.

Para  $k=2$  se obtiene la Catenoide y para  $k=6$  los ejemplos de Peng.

Es fácil comprobar que para  $k$  entre 4 y 10 todos los ejemplos no son embebidos, pero para  $k>10$  esto no se puede garantizar por lo que se plantea una interrogante interesante en la línea de mantener ó no la conjetura anterior sobre el plano y la Catenoide.

## CAPITULO 0

### "PRELIMINARES"

#### 0.1. Algunos Resultados Básicos en la Teoría de Superficies Minimales en $\mathbb{R}^3$

Precisemos alguna notación y definiciones fundamentales.

Sea  $(M^2, ds^2)$  una superficie Riemanniana, que supondremos, salvo mención explícita de lo contrario, siempre orientable y conexa.

Escribamos por  $K$ ,  $\Delta$ ,  $dA$  la curvatura de Gauss, el Laplaciano métrico y la medida canónica en  $M$  asociados a  $ds^2$  respectivamente.

Consideremos  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión isométrica de  $(M, ds^2)$  en  $\mathbb{R}^3$ , y fijemos de ahora en lo sucesivo  $N:M \longrightarrow \mathbb{S}^2$  aplicación de Gauss de  $M$ .

Escribiremos por  $H(P)$  la media aritmética de las curvaturas principales de  $x$  en  $P$  punto de  $M$  asociadas a  $N$ , y llamaremos a este escalar curvatura media en  $P$  (asociada a  $N$ ).

DEFINICION 0.1.1. *La inmersión  $x$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  se dice minimal si  $H=0$  sobre toda  $M$ .*

En muchas ocasiones hablaremos de  $M$  superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  sin hacer mención explícita de la inmersión  $x$ , identificando

de manera natural  $(M, ds^2)$  con  $x(M) \subset \mathbb{R}^3$  con la métrica inducida.

El primer hecho fundamental de la teoría de superficies Riemannianas es que cada una de ellas lleva asociada una estructura conforme, esto es, de una manera canónica pueden ser consideradas como superficies de Riemann. Esto es consecuencia del siguiente Teorema.

TEOREMA 0.1.2. *Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana. Entonces  $\forall P \in M$ , existe  $(U, (u, v))$  abierto coordenado que contiene a  $P$  de manera que:*

$$\langle \partial/\partial u, \partial/\partial u \rangle = \langle \partial/\partial v, \partial/\partial v \rangle = \lambda^2(u, v)$$

(1)

$$\langle \partial/\partial u, \partial/\partial v \rangle = 0$$

donde  $\lambda(u, v) > 0$ .

A tal entorno coordenado le llamaremos parametrización isoterma de  $(M, ds^2)$ .

Una demostración de este resultado para superficies minimales se puede ver en [34].

Como consecuencia del Teorema 0.1.2., sobre  $(M, ds^2)$  se puede considerar la familia de todas las cartas isotermas, compatiblemente orientadas respecto de la orientación prefijada en  $M$ , que dota a nuestra superficie de estructura de superficie de Riemann. Para un estudio sistemático sobre superficies de Riemann se puede consultar [40] ó [09].

Es importante señalar que la estructura conforme que  $ds^2$  induce sobre  $M$ , es la misma que la inducida por cualquier otra métrica  $ds_1^2$  conforme con  $ds^2$ , esto es,  $ds_1^2 = e^{2u} ds^2$ , con  $u \in C^\infty(M)$ .

En consecuencia, el atlas holomorfo antes mencionado caracteriza una clase de métricas conformes sobre  $M$ . Es más, se puede probar (ver [09]) que dada una superficie de Riemann  $M$ , existe sobre  $M$  una métrica  $ds^2$  (incluso completa y de curvatura constante) que soporta tal estructura conforme, como consecuencia del Teorema de Uniformización (ver [09]).



DEFINICION 0.1.3. Sea  $M$  una superficie de Riemann. Una inmersión  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  se dice conforme cuando la métrica inducida por  $\mathbb{R}^3$  en  $M$  via  $x$  soporta la estructura conforme primitiva de  $M$ .

Consideremos  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana, y  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión isométrica de  $(M, ds^2)$  en  $\mathbb{R}^3$ . Se tiene la Proposición siguiente:

PROPOSICION 0.1.4. Fijada la estructura conforme inducida por  $ds^2$  en  $M$ , y llamando  $x_k$ ,  $k=1,2,3$  a las funciones coordenadas asociadas con  $x$ , se tiene que :

$x_k$  es armónica sobre  $M$ ,  $k=1,2,3 \Leftrightarrow x$  es una inmersión minimal

Demost.:

Es fácil observar que si  $(U, (u,v))$  es una carta isoterma, y usando la notación fijada en (1):

$$(2) \quad \Delta_0 x = 2\lambda^2 HN$$

donde  $\Delta_0$  es el Laplaciano llano usual de  $U \subset \mathbb{R}^3$ , y  $N$  es el normal que nos proporciona la orientación fijada sobre  $M$ .

De aquí es inmediata la conclusión.

Q.E.D.

Usualmente, si  $(M, ds^2)$  es una superficie Riemanniana y por  $(U, (u,v))$  representamos una parametrización conforme en  $M$ , usaremos notación compleja y escribiremos  $\xi = u + iv$ , donde  $i$  es la unidad imaginaria compleja, y si  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión isométrica,  $\partial x / \partial \xi = \frac{1}{2} \{x / \partial u - i \partial x / \partial v\}$ .

Es inmediato establecer la siguiente Proposición:

PROPOSICION 0.1.5. Sea  $M$  superficie diferenciable y sea  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  aplicación diferenciable. Consideremos sobre  $M$  la métrica inducida por  $\mathbb{R}^3$  via  $x$ , posiblemente no regular. Fijemos  $(U, (u,v))$  entorno coordenado en  $M$ . Entonces:

$$(i) \quad \sum_{k=1}^3 (\partial x_k / \partial \xi)^2 = 0 \Leftrightarrow (U, (u,v)) \text{ es un parametrización isoterma}$$

(ii)  $\partial x_k / \partial \xi$  es analítica en  $\xi \Leftrightarrow x_k$  es armónica en  $(u, v), k=1, 2, 3$

(iii) Si se da (i),  $x$  es inmersión  $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^3 |\partial x_k / \partial \xi|^2 \neq 0$

Uniendo las Proposiciones 0.1.4. y 0.1.5., obtenemos el Teorema:

TEOREMA 0.1.6. (Representación de Weierstrass de Superficies Minimales en  $\mathbb{R}^3$ )

Sea  $M$  una superficie de Riemann, y consideremos  $w$  y  $g$  1-forma y función holomorfa y meromorfa respectivamente sobre  $M$ . Definamos:

$$(3) \quad \phi_1 = \frac{w}{2} (1-g^2) \quad \phi_2 = i \frac{w}{2} (1+g^2) \quad \phi_3 = wg$$

Entonces, si  $\phi_k, k=1, 2, 3$  son holomorfas y no tienen periodos reales sobre  $M$ , y además  $\sum_{k=1}^3 |\phi_k| \neq 0$ , se tiene que:

$$(4) \quad x = \left( \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_1, \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_2, \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_3 \right), \quad x: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

es una inmersión minimal y conforme de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Demost.:

Lo primero importante es que  $x$  está bien definida, ya que si  $C$  es una curva diferenciable a trozos sobre  $M$  y cerrada, por nuestras hipótesis se tiene que:  $\operatorname{Re} \int_C \phi_k = 0, k=1, 2, 3$ .

Por otra parte, (3) y (4) implican que si  $(U, \xi)$  es una carta conforme sobre  $M$ ,  $\sum_{k=1}^3 (\partial x_k / \partial \xi)^2 = 0$  y por (i) en la Proposición 0.1.5.,  $\xi$  es una carta isoterma respecto de la métrica que induce  $\mathbb{R}^3$  sobre  $M$  via  $x$ .

Nuevamente por (iii) en la Proposición 0.1.5. y usando que  $\sum_{k=1}^3 |\partial x_k / \partial \xi|^2 \neq 0$ , que es cierto por hipótesis, se tiene que  $x$  es una inmersión conforme de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Como es claro que  $x_k, k=1,2,3$  son funciones armónicas sobre  $M$ , por (ii) en Proposición 0.1.4. la inmersión  $x$  es minimal.

Q.E.D.

Lo recíproco a lo enunciado en este Teorema también es cierto en el siguiente sentido. Si  $(M, ds^2)$  es una superficie Riemanniana y  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una inmersión isométrica y minimal de  $(M, ds^2)$  en  $\mathbb{R}^3$ , por el Teorema 0.1.2. podemos inducir en  $M$  una estructura de superficie de Riemann, y si  $(U, \xi)$  es una parametrización conforme en  $M$ , se definen  $\phi_k(\xi) = 2(\partial x_k / \partial \xi) d\xi, k=1,2,3$ .

Ovviamente  $\phi_k, k=1,2,3$  representan tres 1-formas holomorfas sobre  $M$ , que por ser  $x$  inmersión conforme y minimal, usando las Proposiciones 0.1.4., 0.1.5., verifican:

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 = 0 \quad \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \neq 0$$

Observese que  $\exists z_0 \in M$  tal que:  $x_k = \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_k, k=1,2,3$ , y por

último definiendo:

$$(5) \quad w = \phi_1 - i\phi_2 \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

1-forma y función meromorfas en  $M$ , se pueden recuperar las  $\phi_k, k=1,2,3$  usando las fórmulas de (3).

Normalmente, una superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  suele presentarse via su representación de Weierstrass:  $w, g$ , que nos determina la superficie salvo una traslación (que se corresponde con la arbitrariedad de la elección del punto  $z_0$  en (4)).

Ejemplos de superficies minimales se pueden construir ahora con facilidad.

Así, la Catenoide, que admite por representación de Weierstrass:

$$(6) \quad M = \mathbb{C} - \{0\}, \quad w(z) = \frac{1}{z^2} dz, \quad g(z) = z$$

ó la superficie de Enneper:

$$(7) \quad M = \mathbb{C}, \quad w(z) = dz, \quad g(z) = z$$

Todos los elementos geométricos de una superficie minimal

en  $\mathbb{R}^3$  se pueden enunciar en términos de la 1-forma y función que aparecen en su representación de Weierstrass.

Se tiene, por ejemplo, lo siguiente (consultar [34]):

PROPOSICION 0.1.7. Sea  $x:M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  inmersión isométrica minimal de  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana.

Sean  $w, g$  como en (5) y tomemos  $(U, \xi)$  carta isoterma en  $M$ . Si en  $U$  se tiene que  $w(\xi) = f(\xi)d\xi$ , entonces:

$$(8) \quad ds^2 = \lambda^2 |d\xi|^2, \text{ donde } \lambda = \frac{|f|}{2} (1 + |g|^2)$$

$$(9) \quad N(\xi) = \left( \frac{2\operatorname{Re}(g)}{1+|g|^2}, \frac{2\operatorname{Im}(g)}{1+|g|^2}, \frac{|g|^2-1}{1+|g|^2} \right) (\xi)$$

$$(10) \quad K(\xi) = - \left[ \frac{4|g'|^2}{|f|(1+|g|^2)^2} \right]^2 (\xi)$$

Como consecuencia de (9), si componemos con la proyección estereográfica  $\rho$  desde el Polo Norte de la esfera se tiene que:  $(\rho \circ N)(\xi) = g(\xi) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , esto es, la función  $g$  que nos aparecía en la representación de Weierstrass de  $M$  no es sino (salvo la proyección estereográfica) la aplicación de Gauss de nuestra superficie minimal.

COROLARIO 0.1.8. La curvatura total de una superficie minimal  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  es el opuesto del área de la imagen de  $M$  por la aplicación de Gauss en  $S^2$ .

Demost.:

Tomemos  $(U, \xi)$  carta conforme en  $M$ , y pongamos  $w(\xi) = f(\xi)d\xi$  en  $U$ ,  $\xi = u + iv$ .

Se tiene que usando (8) y (10):

$$\int_U K dA = \int_U K \lambda^2 du dv = - \int_U \left[ \frac{2|g'|^2}{1+|g|^2} \right] du dv$$
, y la última integral (salvo el signo) es el área de  $N(U)$  en  $S^2$ , ya que  $\rho \circ N = g$ .

Q.E.D.

DEFINICION 0.1.9. Una superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  se dice de curvatura total finita si:

$$C(M) = \int_M K dA > -\infty$$

Teniendo en cuenta el Corolario 0.1.8. y (6), (7) se observa que la curvatura total de la superficie de Enneper y la Catenoide es  $-4\pi$ .

La estructura conforme de las superficies minimales completas de curvatura total finita ha sido estudiada en profundidad por R. Osserman, quien ha probado (ver [34]):

TEOREMA 0.1.10. Sea  $M$  superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  completa y con curvatura total finita.

Entonces  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann  $\Sigma$  menos un número finito de puntos  $\{P_1, \dots, P_k\}$ , esto es:  $M \cong \Sigma - \{P_1, \dots, P_k\}$  como superficies de Riemann.

Además, la aplicación de Gauss de  $M$   $g$  se extiende a todo  $\Sigma$  de manera que  $g: \Sigma \longrightarrow S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  es una aplicación holomorfa.

Es posible establecer una relación entre el género de  $\Sigma$ , grado de  $g$  y número de finales de  $M$  ó puntos que quitamos a  $\Sigma$ :  $k$ .

Concretamente, W. H. Meeks III y Jorge han probado lo siguiente (ver [23]):

TEOREMA 0.1.11. Sea  $M$  superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura total finita, y sean  $\Sigma$  y  $\{P_1, \dots, P_k\}$  como en el Teorema 0.1.10..

Consideremos  $\phi_j, j=1,2,3$  como en (3), y escribamos por  $I_i = \text{Máx} \{O(\phi_j, P_i), j=1,2,3\} - 1, \quad i=1, \dots, k,$  donde  $O(\phi_j, P_i)$  es el orden del polo de la 1-forma  $\phi_j$  en el punto  $P_i$ .

Entonces:

$$(11) \quad 2\text{Grado}(g) = 2\text{Género}(M) - 2 + \sum_{i=1}^k (I_i + 1)$$

Observese que por la completitud de  $M$ ,  $I_i \geq 0$ , e incluso se puede probar que  $I_i \geq 1, i=1, \dots, k$ .

El número  $I_i$  tiene una interpretación geométrica interesante, indica el número de "vueltas" que la superficie minimal  $M$  da entorno al final  $P_i$ .

R. Osserman probó la siguiente caracterización de la Catenoide y la Superficie de Enneper, aunque el establecerla ahora puede resultar fácil a partir del Teorema 0.1.11..

**TEOREMA 0.1.12.** *Sea  $M$  superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura total  $-4\pi$ . Entonces,  $M$  es la Catenoide ó la Superficie de Enneper.*

Una demostración de este resultado se puede encontrar en [25] ó en [35].

## CAPITULO I

### "ESTABILIDAD DE SUPERFICIES DE CURVATURA MEDIA CONSTANTE EN $\mathbb{R}^3$ Y SUPERFICIES MINIMALES DE INDICE 1."

Las motivaciones y descripción general de los problemas que se van a abordar en este Capítulo ya fueron expuestos en la Introducción.

Es interesante comentar, aunque pueda resultar redundante con lo ya dicho anteriormente, que esencialmente, lo que se aborda y resuelve completamente es el problema de clasificación de superficies con curvatura media constante y estables en  $\mathbb{R}^3$ , aparte de dar una caracterización nueva de las superficies minimales de curvatura total  $-4\pi$  (la Catenoide y la superficie de Enneper) en términos del Índice de estas superficies.

Naturalmente, se abre un amplio abanico de posibilidades en cuanto a la generalización y mejora de este resultado para índices superiores, problema apasionante que queda abierto totalmente en la actualidad (Ver [07],[08],[42]).

Gran parte de los resultados que se establecen aquí están inspirados en el trabajo de D. Fischer Colbrie [10], básico para comprender lo que sigue.

## 1.1. Generalidades y Preliminares.

Sea  $(M, ds^2)$  una variedad Riemanniana 2-dimensional completa y orientable. Como es usual, denotaremos por  $K$ ,  $\Delta$ , y  $dA$  la curvatura de Gauss, el Laplaciano y la medida canónica correspondiente a la métrica  $ds^2$ .

La condición de minimalidad para  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  inmersión isométrica de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  se expresa geoméricamente a través de la 1ª Fórmula de Variación del Area (ver [25]):

PROPOSICION I.1.1. (1ª Fórmula de Variación del Area)

Sea  $x: W \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión isométrica de  $W$  variedad Riemanniana compacta con borde no vacío:  $\partial W \neq \emptyset$ .

Sea  $X: (-\varepsilon, \varepsilon) \times W \rightarrow \mathbb{R}^3$  una variación diferenciable de  $x$  con frontera fija, esto es,  $X$  diferenciable y si  $X_t \equiv X(t, \cdot)$  para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,  $X_t|_{\partial W} = X_0|_{\partial W}$ ,  $X_0 = x$ . Llamemos  $A(t) = \int_W dA_t$ , donde  $dA_t$  es la medida canónica en  $W$  inducida por  $\mathbb{R}^3$  para  $X_t$ . Entonces:

$$A'(0) = -2 \int_W H f dA_0$$

donde  $f(P) = \langle dX_{(0,P)}, N \rangle$ ,  $\forall P \in M$  con  $N$  campo unitario y normal a lo largo de  $x$ , y  $H$  el escalar curvatura media asociado a  $N$  a lo largo de  $x$ .

Observando esta fórmula, lo interesante es el conocimiento de la función  $f$  asociada a la variación  $X$ , por lo que usualmente se identificará  $f \equiv X$ . Se llamará soporte de la variación  $X$  al soporte de  $f$ .

Ahora es claro que  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  es minimal (punto crítico respecto del funcional Area asociado a variaciones  $X$  de soporte compacto  $W$  dentro de  $M$ ), si y sólo si  $H=0$  sobre  $M$ .

Otro funcional importante asociado a variaciones  $X$  de  $M$  con soporte compacto  $W$  es el volumen con signo encerrado por la superficie en cada instante de la variación, que se define:



$$V(t) = \frac{1}{3} \int_W \langle X_t, N_t \rangle dA_t$$

donde  $N_t$  es un campo unitario normal a lo largo de  $X_t$ .

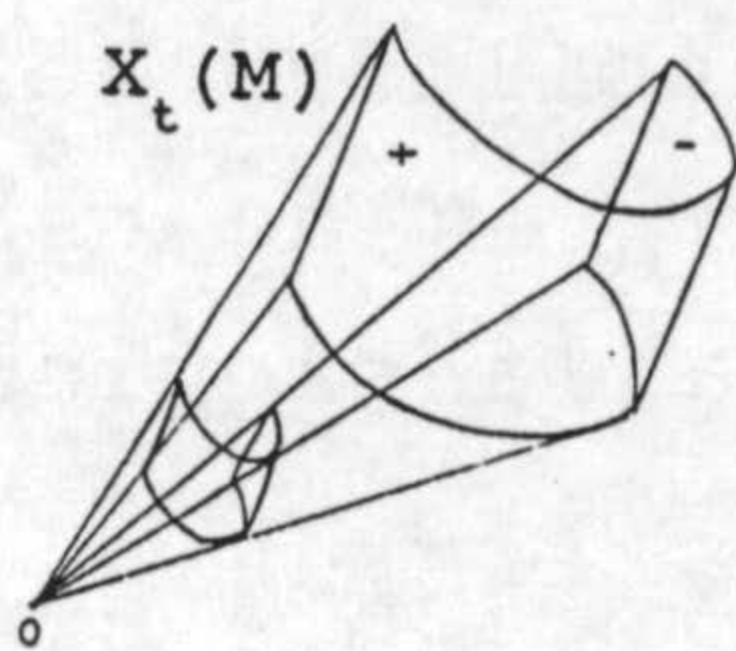


Figura 1

Geoméricamente mide el volumen del cono formado uniendo puntos de  $X_t(M)$  con el vértice que es el origen  $O \in \mathbb{R}^3$ , volumen que tendrá para cada región  $W$  signo + ó - según sea la disposición del normal a lo largo de ella. (Ver la Figura 1).

En principio está claro que este valor  $V(t)$  depende de cual sea el punto origen de coordenadas tomado en  $\mathbb{R}^3$ , pero lo que si es independiente de esta referencia fijada es el valor de  $V'(t)$ .

PROPOSICION I.1.2. (1ª Fórmula de variación del Volumen)

*En el mismo ambiente y notación anteriores:*

$$V'(0) = \int_W f dA_0$$

Las variaciones de volumen constante ( $V(t)=V(0)$ ,  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ) se caracterizan por tener  $\int_W f dA_0 = 0$  (ver [03]), y son importantes en el estudio de las superficies con curvatura media constante como nos indica la siguiente Proposición.

PROPOSICION I.1.3. *La inmersión  $x$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  es de curvatura media constante  $H_0$  no nula si y sólo si para toda variación  $X$  de  $x$  de soporte compacto  $W \subset M$  con  $\int_W f dA = 0$ , se tiene que  $A'(0) = 0$ .*

Esto es decir que  $M$  sea punto crítico para el funcional Area asociado a variaciones de volumen constante.

En [03] se prueba otra caracterización equivalente a partir del funcional  $J(t) = A(t) + 2H_0 V(t)$  asociado a variaciones de soporte compacto. Concretamente (ver [03]):

PROPOSICION I.1.2'. La inmersión  $x$  de  $M$  es de curvatura media constante  $H_0$  si y sólo si  $J'(0)=0$  para cualquier variación con soporte compacto en  $M$ .

Si se está interesado en resultados sobre estabilidad relativos a los dos problemas variacionales anteriores, es de especial relevancia la información que nos proporciona la siguiente fórmula:

PROPOSICION.I.1.4. En el mismo ambiente de la Proposición I.1.1., si la inmersión  $x$  es de curvatura media constante  $H_0$ , entonces:

$$J''(0) = \int_W \left( -f\Delta f - |\sigma|^2 f^2 \right) dA$$

donde  $\sigma$  es la 2ª forma fundamental asociada a  $x$ .

Observar que en el caso  $H_0=0$ ,  $J=A$  y se obtiene la conocida 2ª Fórmula de variación del Area para superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$ .

Esta fórmula motiva las siguientes definiciones:

DEFINICION I.1.5. Una inmersión  $x$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H_0$  constante se dice estable si y sólo si:

$$J''(0) = \int_M \left( |\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2 \right) dA \geq 0$$

$\forall f \in H_0^1(W) / \int_M f dA = 0$ , y esto  $\forall W \subset\subset M$  (esto es, para todo  $W$  dominio relativamente compacto de  $M$ ).

**Nota.** Por definición, dado  $W \subset\subset M$ ,  $H_0^1(W)$  es el completado de  $C_0^\infty(W)$  con la norma:  $\|f\|_{H_0^1} = \|f\|_2 + \|\nabla f\|_2$ . Previa extensión por cero fuera de  $W$ , se considera de forma natural  $H_0^1(W) \subset H_0^1(M)$ .

Cambiando el funcional  $J$  por  $A$ , la misma definición nos sirve para caracterizar la estabilidad.

En el caso minimal podemos ahora formular la siguiente definición.

DEFINICION I.1.6. Una inmersión minimal  $x$  de  $M$  en  $\mathbb{R}^3$  se dice estable si y sólo si:

$$A''(0) = \int_M (|\nabla f|^2 - |\sigma|^2 f^2) dA \geq 0$$

$\forall f \in H_0^1(W)$ , y esto  $\forall W \subset\subset M$ .

Consideremos sobre  $M$  el operador  $\mathcal{L} = \Delta + q$ ,  $q \in C^\infty(M)$ , y a partir de el definamos  $Q(f, f) = - \int_M f \mathcal{L}(f) dA$ ,  $\forall f \in C_0^\infty(W)$ , donde  $W \subset\subset M$ , la forma cuadrática asociada a  $\mathcal{L}$  en  $W$ , que se extiende por continuidad a todo  $H_0^1(W)$ .

DEFINICION I.1.7. Llamamos Índice de  $\mathcal{L}$ :  $\text{Ind}(\mathcal{L})$  al número:  $\sup \{ \text{Ind}(\mathcal{L}, W), W \subset\subset M \}$ , donde  $\text{Ind}(\mathcal{L}, W)$  es el Índice de la forma cuadrática  $Q$  asociada a  $\mathcal{L}$  en  $H_0^1(W)$ . Eventualmente,  $\text{Ind}(\mathcal{L})$  puede ser  $\infty$ .

DEFINICION I.1.8. Llamamos  $\text{Ind}_0(\mathcal{L})$  al número:  $\sup \{ \text{Ind}_0(\mathcal{L}, W), W \subset\subset M \}$ , donde  $\text{Ind}_0(\mathcal{L}, W)$  es el Índice de la forma cuadrática  $Q$  asociada a  $\mathcal{L}$  en  $H_0^1(W) \cap \left\{ f \in L^2(M) / \int_M f dA = 0 \right\}$ , eventualmente,  $\text{Ind}_0(\mathcal{L})$  puede ser  $\infty$ .

En el caso de que sobre  $M$  trabajemos con el operador definido por  $\mathcal{L}_J = \Delta + |\sigma|^2$  (operador de Jacobi), se formula la siguiente definición:

DEFINICION I.1.9. Llamamos  $\text{Ind}(M)$  a  $\text{Ind}(\mathcal{L}_J)$  e  $\text{Ind}_0(M)$  a  $\text{Ind}_0(\mathcal{L}_J)$ .

Al primer número lo referiremos como el Índice de  $M$ , y al segundo como el Índice sub-cero de  $M$ .

Observar que en el caso minimal, la estabilidad (Definición I.1.6.) es equivalente a  $\text{Ind}(M) = 0$ , y en el caso de  $H = H_0$

constante la estabilidad (Definición I.1.5.) equivale a  $\text{Ind}_0(M)=0$ .

Para  $M$  superficie minimal, tenemos definidos dos Indices:  $\text{Ind}(M)$  e  $\text{Ind}_0(M)$ .

## I.2. Superficies Minimales de Indice 1.

Sea  $M$  una superficie minimal orientable en  $\mathbb{R}^3$ , y denotemos por  $N:M \rightarrow S^2$  su aplicación de Gauss. Como siempre, escribiremos por  $ds^2$  y  $dA$  la métrica y medida asociadas respectivamente en  $M$ .

Para nuestro propósito, será importante el siguiente Teorema debido a D. Fisher-Colbrie (ver [10]):

**TEOREMA I.2.1.** *Sea  $M$  superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces:*

$$M \text{ es de curvatura total finita} \Leftrightarrow \text{Ind}(M) < \infty$$

Así pues, usando el Teorema 0.1.10., si  $\text{Ind}(M) < \infty$  podemos garantizar que  $M$  es conformemente equivalente a una superficie de Riemann compacta  $\Sigma$  menos un número finito de puntos  $\{P_1, \dots, P_k\}$ .

Además,  $N$  se extiende a  $\{P_1, \dots, P_k\}$  de forma que se convierte en una aplicación holomorfa de  $\Sigma$  en  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

D. Fisher-Colbrie ha probado el siguiente resultado (consultar [10]):

**TEOREMA I.2.2.** *Sea  $ds_1^2$  una métrica en  $\Sigma$  compatible con su estructura conforme. Si definimos el operador  $\mathcal{L}_1 = \Delta_1 + |\nabla_1 N|^2$  sobre  $\Sigma$ , con  $\Delta_1, \nabla_1$  el laplaciano y gradiente asociados a la métrica  $ds_1^2$ , entonces:  $\text{Ind}(\mathcal{L}_1) = \text{Ind}(M)$ .*

Llamemos  $Q_1$  a la forma cuadrática asociada a  $\mathcal{L}_1$ , esto es:  
 $Q_1(f, f) = -\int_{\Sigma} f \mathcal{L}_1(f) dA_1$ ,  $f \in H_0^1(\Sigma)$ , donde como es usual  $dA_1$  representa la medida canónica asociada a  $ds_1^2$ .

Antes de enunciar el principal resultado de esta sección, necesitamos el siguiente Lema, que es una ligera extensión de un resultado de Hersch (ver [17]). Consultar también el trabajo de Li y Yau [27] para una versión más general.

LEMA I.2.3. Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana, y consideremos  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  función positiva y medible con  $0 < \int_M f dA < \infty$ . Sea  $\psi: M \rightarrow S^2$  una función medible verificando que para cualquier  $\vartheta \in S^2$ ,  $\psi^{-1}(\vartheta)$  es de medida nula.

Entonces  $\exists h: S^2 \rightarrow S^2$  biholomorfismo tal que  $\int_M f(h \circ \psi) dA = 0$ .

Demost.: Consideremos  $\mathbb{B}^3 = \{g \in \mathbb{R}^3 / |g| < 1\}$ .  
 Definamos  $F: \mathbb{B}^3 \times S^2 \rightarrow S^2$  de la siguiente manera:

$$F(g, p) = \frac{p + (\mu \langle p, g \rangle + \lambda)g}{\lambda(\langle p, g \rangle + 1)}$$

donde  $\lambda = \sqrt{(1 - |g|^2)^{-1}}$ ,  $\mu = (\lambda - 1)|g|^{-2}$ .

Para cada  $g \in \mathbb{B}^3$ ,  $F_g = F(g, \cdot)$  es una transformación conforme de  $S^2$ .

Comprobemos que si  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{B}^3$ , y  $\{g_n\} \rightarrow \vartheta \in S^2$ , entonces la sucesión de funciones  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , con  $F_n = F(g_n, \cdot)$  converge puntualmente en  $S^2 - \{-\vartheta\}$  a  $F_{\vartheta}$  definida por:  $F_{\vartheta}(P) = \vartheta$ ,  $\forall P \in S^2$ ,  $P \neq -\vartheta$ .

En efecto, si  $-\vartheta \neq p$ , se tiene que llamando  $\alpha_n = \sqrt{1 - |g_n|^2}$ :

$$|F(g, p) - \vartheta| = \frac{1}{|1 + \langle p, g_n \rangle|} \left| p \alpha_n + g_n \left[ \frac{1 - \alpha_n}{|g_n|^2} \langle p, g_n \rangle + 1 \right] - \nu(\langle p, g_n \rangle + 1) \right|$$

y como cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\{\alpha_n\} \rightarrow 0$ ,  $\{\langle p, g_n \rangle + 1\} \rightarrow \langle p, \vartheta \rangle + 1 \neq 0$  y  $\{g_n\} \rightarrow \vartheta$ , entonces  $|F(g_n, p) - \vartheta| \rightarrow 0$  como pretendíamos.

Definamos la función  $\Phi: \bar{\mathbb{B}}^3 \rightarrow \bar{\mathbb{B}}^3$  por:

$$\Phi(g) = \left[ \int_M f dA \right]^{-1} \left[ \int_M f(F_g \circ \psi) dA \right]$$

Como  $f \geq 0$ ,  $\left[ \int_M f dA \right] |\Phi(g)| \leq \int_M |f(F_g \circ \psi)| dA = \int_M f dA$ , de donde  $|\Phi(g)| \leq 1$  y  $\Phi$  está bien definida.

Además, por el Teorema de la convergencia dominada,  $\Phi$  es continua en  $\bar{B}^3$ , y si  $\vartheta \in S^2$ , entonces  $F_{\vartheta} \circ \psi(Q) = \vartheta$  para casi todo  $Q \in M$ , ya que  $\psi^{-1}(-\vartheta)$  es de medida nula en  $M$ , de lo que se deduce que para cada  $\vartheta \in S^2$ :

$$\Phi(\vartheta) = \left[ \int_M f dA \right]^{-1} \left[ \int_M f \vartheta dA \right] = \vartheta$$

Así pues,  $\Phi|_{\partial \bar{B}^3} = \text{Id}|_{\partial \bar{B}^3}$ , y por un razonamiento de topología elemental,  $\Phi$  es sobreyectiva. En particular,  $\exists g \in B^3$  tal que:

$$\int_M f(F_g \circ \psi) dA = 0$$

Q.E.D.

Nuestro principal resultado es el Teorema que enunciamos a continuación:

**TEOREMA I.2.4.** *Sea  $M$  una superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces  $\text{Ind}(M)=1$  si y sólo si  $M$  es la Catenoide ó la superficie de Enneper.*

Demost.: Es conocido que para la Catenoide y la superficie de Enneper, con en el lenguaje del Teorema 0.1.10.,  $\Sigma = S^2$  y en este caso  $N \cong g: S^2 \longrightarrow S^2$  es un biholomorfismo (recordar (6) y (7)).

Usando el Teorema I.2.2., el indice de ambas superficies se calcula por ejemplo a partir del indice del operador  $\mathcal{L}_1 = \Delta_1 + 2$ , asociado a  $S^2$  con la métrica usual, ya que esta métrica es compatible con la única estructura conforme que tiene  $S^2$ .

Es conocido tambien que:

$$2 = \inf \left\{ \int_{S^2} |\nabla_1 f|^2 dA_1 / \int_{S^2} f^2 dA_1 = 1, \int_{S^2} f dA_1 = 0 \right\}$$

ya que 2 es el segundo (primero no nulo) de los autovalores para el laplaciano de la métrica usual sobre  $S^2$ .

Como naturalmente  $\int_{S^2} (|\nabla f|^2 - 2f^2) dA_1 < 0$  si  $f$  es una constante no nula, se concluye que  $\text{Ind}(\mathcal{L}_1) = 1$ .

Recíprocamente, supongamos  $\text{Ind}(M) = 1$ .

Nuevamente usamos el Teorema 0.1.10. y consideramos  $\Sigma$  superficie de Riemann compacta tal que  $M$  es conformemente equivalente a  $\Sigma - \{P_1, \dots, P_k\}$ , donde  $\{P_1, \dots, P_k\} \subset \Sigma$ .

Tomando  $ds_1^2$  métrica en  $\Sigma$  compatible con la estructura conforme y  $\mathcal{L}_1$  como en el Teorema I.2.2., tenemos garantizado que:

$$\text{Ind}(M) = \text{Ind}(\mathcal{L}_1)$$

Sea  $\rho$  la primera autofunción para  $\mathcal{L}_1$ , que es conocido es positiva.

Como  $\text{Ind}(\mathcal{L}_1) = 1$ , entonces para cada  $u \in C^1(\Sigma)$  con  $\int_{\Sigma} u \rho dA_1 = 0$ , se tiene que:

$$(12) \quad Q_1(u, u) \geq 0$$

Además, en (12) se da la igualdad si y sólo si  $\mathcal{L}_1(u) = 0$ .

Sea  $\psi: \Sigma \rightarrow S^2$  aplicación holomorfa no constante.

Por el Lema 1.2.3., existe  $h: S^2 \rightarrow S^2$  transformación conforme tal que  $\Psi = h \circ \psi$  satisface:  $\int_{\Sigma} \rho \Psi dA_1 = 0$ .

Por otra parte de (12):

$$0 \leq Q_1(\Psi, \Psi) = \int_{\Sigma} (|\nabla_1 \Psi|^2 - |\nabla_1 N|^2) dA_1 = 8\pi \left( \text{Grado}(\Psi) - \text{Grado}(N) \right)$$

y de aquí que:

$$(13) \quad \text{Grado}(\psi) = \text{Grado}(\Psi) \geq \text{Grado}(N)$$

dándose la igualdad en (13) si y sólo si  $\Delta_1 \Psi + |\nabla_1 N| \Psi = 0$ .

Al ser  $\Psi$  holomorfa, siempre es cierto que:

$$(14) \quad \Delta_1 \Psi + |\nabla_1 \Psi|^2 \Psi = 0$$

Uniendo (13) y (14), obtenemos que:

$$(15) \quad \text{Grado}(\Psi) = \text{Grado}(N) \Leftrightarrow |\nabla_1 \Psi| = |\nabla_1 N|$$

Discutamos los siguientes casos:

a)  $\Sigma$  es la esfera  $S^2$ .

Tomando  $\psi = \text{Id}_{S^2}$ , entonces por (13)  $\text{Grado}(N) = 1$ , y por el Teorema 0.1.12.,  $M$  es la Catenoide ó la superficie de Enneper.

b) Supongamos que  $\text{Genero}(M) \geq 1$ .

En este caso, por el Teorema 0.1.11.,  $\text{Grado}(N) \geq \text{Género}(\Sigma) + 1$ .

Si la desigualdad es estricta, por el Teorema de Riemann-Roch (ver por ejemplo [09]), existe  $\Psi$  aplicación holomorfa no constante en  $\Sigma$  sobre  $S^2$  con  $\text{Grado}(\Psi) \leq \text{Género}(\Sigma) + 1$ , con lo que llegamos a contradicción con (13).

Podemos suponer pues que  $\text{Grado}(N) = \text{Género}(\Sigma) + 1$ . Sea  $P \in \Sigma$  tal que  $|\nabla_1 N|(P) \neq 0$ .

Por el Teorema de Riemann-Roch de nuevo, existe  $\Psi$  holomorfa en  $\Sigma$  no constante sobre  $S^2$  con  $\text{Grado}(\Psi) \leq \text{Género}(\Sigma) + 1$ , y teniendo en  $P$  un punto de ramificación de orden  $\text{Grado}(\Psi)$ .

Si  $\text{Grado}(\Psi) < \text{Género}(\Sigma) + 1$ , llegamos a un absurdo como antes. Supongamos pues que  $\text{Grado}(\Psi) = \text{Género}(\Sigma) + 1 = \text{Grado}(N)$ . Por (15), tenemos que  $|\nabla_1 \Psi| = |\nabla_1 N|$ .

En particular,  $|\nabla_1 \Psi|(P) = 0$ , pero  $|\nabla_1 \Psi|(P) = |\nabla_1 N|(P) \neq 0$ , con lo que llegamos a contradicción. El caso b) es imposible.

Q.E.D.

### I.3. Superficies de Curvatura Media Constante.

Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana.

Para lo que sigue, necesitaremos el siguiente Lema:

LEMA. I.3.1. *Supongamos que  $M$  es no compacta y conexa.*

*Entonces, dado  $P \in M$ , existe  $\gamma: [0, a[ \rightarrow M$ ,  $0 < a \leq \infty$  geodésica divergente en  $M$  minimizante para  $ds^2$  con  $\gamma(0) = P$  y suponemos parametrizada respecto del arco asociado a  $ds^2$ .*

Demost.: Sea  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de dominios relativamente compactos en  $M$ , verificando:  $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = M$  y  $P \in \Omega_1$ .

Definamos, para cada  $n$ , una geodésica  $\gamma_n: [0, a_n[ \rightarrow M$ , donde  $0 < a_n < \infty$  con  $\gamma_n(0) = P$  parametrizada por el arco según  $ds^2$ .

Además,  $a_n = \text{Long}(\gamma_n) = \text{dist}(P, \partial\Omega_n)$  y  $\gamma_n$  es divergente en  $\Omega_n$ .

La existencia de una tal  $\gamma_n$  se puede garantizar por el si-



guiente razonamiento:

Tomemos una métrica  $ds_n^2$  en  $M$  completa tal que  $ds_n^2|_{\Omega_n} = ds^2$ .

Una tal  $ds_n^2$  se puede conseguir a partir de una métrica cualquiera  $ds_0^2$  completa en  $M$  (que existen, incluso de curvatura constante via el Teorema de Uniformización) rectificandola mediante una función meseta  $\eta$  que se anule en  $\Omega_n$  y valga 1 en  $M - \Omega_{n+1}$ , y sumandole al resultado  $ds^2$ :  $ds_n^2 = \eta ds_0^2 + ds^2$ .

Razonando con  $ds_n^2$ , al ser esta métrica completa, por el Teorema de Hopf y Rinow siempre existe  $\gamma_n: [0, a_n] \rightarrow M$  geodésica parametrizada por el arco según  $ds_n^2$  con  $\gamma_n(0) = P$  y que realice  $\text{dist}(P, \partial\Omega_n)$  con  $ds_n^2$ .

Es claro que  $\gamma_n([0, a_n[) \subset \Omega_n$  y como  $ds_n^2|_{\Omega_n} = ds^2$ , entonces  $\gamma_n$  es una geodésica parametrizada por el arco según  $ds^2$  que además tiene  $\text{Long}(\gamma_n) = \text{dist}(P, \partial\Omega_n)$ ,  $\gamma_n(0) = P$  y divergente en  $\Omega_n$  como queríamos.

Sea  $\{\gamma'_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset T_P M$ . Como  $|\gamma'_n(0)| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ , podemos extraer una subsucesión convergente a  $\gamma'(0) \in T_P M$ , con  $|\gamma'(0)| = 1$ .

Observemos que  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente y en consecuencia por teoría elemental de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, si llamamos  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\}$ ,  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de  $[0, a[$  a  $\gamma: [0, a[ \rightarrow M$  geodésica minimizante para  $ds^2$  divergente en  $M$  por ser  $\{\Omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  expansiva, parametrizada respecto del arco según  $ds$  con  $\gamma(0) = P$ .

Q.E.D.

Las ideas fundamentales para la demostración del siguiente Teorema estan recogidas en el trabajo de D. Fischer Colbrie [10] .

**TEOREMA 1.3.2.** *Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana no compacta , y supongamos que  $\exists u: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u > 0$ ,  $u \in C^\infty(M)$  y  $a > \frac{1}{4}$ ,  $c > 0$  constantes verificando:*

$$(16) \quad \Delta u - aKu + cu \leq 0$$

$$\text{Entonces } \forall P \in M, \text{ dist}(P, \partial M) \leq \pi \sqrt{\frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a} - 1)c}}$$

donde  $\text{dist}(P, \partial M) = \inf \left\{ \text{Long}(\alpha) \mid \alpha \text{ curva diferenciable a trozos divergente partiendo de } P \right\}$ .

En particular, si  $M = N - C$ , donde  $N$  es una superficie Riemanniana completa y  $C$  es un compacto no vacío de  $N$ , entonces  $N$  es compacta.

Demost.: Consideremos sobre  $M$  la métrica  $u^{2p} ds^2$ , donde  $p > 0$ .

Por el Lema I.3.1., existe  $\gamma$  geodésica minimizante respecto de la métrica  $u^{2p} ds^2$  divergente en  $M$ :  $\gamma: [0, \ell[ \rightarrow M$  que representamos parametrizada respecto del arco asociado a  $ds^2$ , que sale de  $P$ . El número  $\ell$  puede eventualmente ser  $\infty$ .

Como  $\gamma$  es minimizante para  $u^{2p} ds^2$ , usando la 2ª fórmula de variación de la longitud de arco para variaciones  $\phi \cdot n$  donde  $n$  es normal a  $\gamma$  según  $u^{2p} ds^2$  ó  $ds^2$  y  $\text{sop}(\phi) \subset [0, \ell[$  tendremos:

$$(17) \quad \int_0^\ell \left[ \left( \frac{d\phi}{ds_1} \right)^2 - K_1 \phi^2 \right] ds_1 \geq 0$$

donde  $ds_1$  es el elemento de arco asociado a  $u^{2p} ds^2$  y  $K_1$  la curvatura de Gauss también asociada a  $u^{2p} ds^2$ .

Si  $ds$  es el elemento de arco asociado a  $ds^2$  y  $K$  la curvatura de Gauss, entonces:

$$(18) \quad \frac{d\phi}{ds_1} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{ds_1} = u^{-p} \frac{d\phi}{ds} \quad \text{y} \quad K_1 = u^{-2p} (K - p \Delta \log(u))$$

Usando (16) y (18) tenemos que:

$$(19) \quad \Delta \log(u) = \frac{u \Delta u - |\nabla u|^2}{u^2} \leq aK - c - \frac{|\nabla u|^2}{u^2}$$

de donde nuevamente por (18):

$$(20) \quad K_1 \geq u^{-2p} \left( (1 - ap)K + pc + p \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right)$$

y metiendo (20) en (17):

$$(21) \quad \int_0^l u^{-p} (\phi'(s))^2 ds \geq \int_0^l u^{-p} \left( (1-ap)K + pc + p \frac{|\nabla u|^2}{u^2} \right) \phi^2 ds$$

Pero  $|\nabla u|^2 \geq (u')^2$ , de aquí que teniendo esto en cuenta (21), tomando  $\phi = u^q \psi$ ,  $q > 0$ ,  $\psi$  de soporte compacto en  $[0, l[$  y escribiendo  $r = 2q - p$ , obtengamos que:

$$\int_0^l u^r \left( (1-ap)K + pc + p \frac{(u')^2}{u^2} \right) \psi^2 ds \leq \int_0^l u^r \left( q^2 \frac{(u')^2}{u^2} \psi^2 + (\psi')^2 + 2q \frac{u'}{u} \psi \psi' \right) ds$$

Eligiendo  $p = q^2 = \frac{1}{a}$  y simplificando en esta última expresión:

$$\int_0^l q^2 c u^{2q-q^2} \psi^2 ds \leq \int_0^l u^{2q-q^2} \left( (\psi')^2 + 2q \frac{u'}{u} \psi \psi' \right) ds$$

y de aquí que integrando por partes:

$$(22) \quad \int_0^l \left[ q^2 c \psi^2 + \frac{q}{2-q} (\psi')^2 + \frac{2\psi\psi''}{2-q} \right] u^{2q-q^2} ds \leq 0$$

Sea ahora  $0 < b < l$  y  $\psi_b : [0, l[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\psi_b(s) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi s}{b}\right) & \text{si } 0 \leq s \leq b \\ 0 & \text{si } b \leq s \end{cases}$$

Poniendo  $\psi = \psi_b$  en (22) tenemos:

$$\int_0^b \left[ \left( \frac{2\sqrt{a}}{1-2\sqrt{a}} \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{c}{a} \right) \sin^2\left(\frac{\pi s}{b}\right) + \left( \frac{1}{2\sqrt{a}-1} \frac{\pi^2}{b^2} \right) \cos^2\left(\frac{\pi s}{b}\right) \right] u^{\frac{2\sqrt{a}-1}{a}} ds \leq 0$$

y como  $a > \frac{1}{4}$ , esta última expresión nos fuerza necesariamente a que :

$$b < \pi \sqrt{\frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)c}}$$

de donde se puede concluir que:

$$(23) \quad l \leq \pi \sqrt{\frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)c}}$$

Pero como  $\gamma$  es divergente en  $M$ ,  $\text{dist}(P, \partial M) \leq l$ , y uniendo esto con (23) queda probado el Teorema.

Q.E.D.

Veamos algunas consecuencias interesantes de este último resultado.

COROLARIO I.3.3. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana y  $\Omega \subset M$  dominio relativamente compacto. Fijemos, dada  $a > \frac{1}{4}$  constante el operador  $\Delta - aK$  sobre  $M$ . Si  $\lambda_1(\Omega)$  es el primer autovalor asociado a  $\Delta - aK$  en  $\Omega$  actuando sobre funciones que se anulen en  $\partial\Omega$ , entonces  $\forall P \in \Omega$ :

$$\lambda_1(\Omega) \leq \frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{\text{dist}(P, \partial\Omega)^2}$$

Demost.: Siempre  $\Delta u - aKu + \lambda_1(\Omega)u = 0$ , con  $u$  la 1ª función propia asociada a  $\lambda_1(\Omega)$ ,  $u > 0$  (ver [02]) y se tiene que:

$$\lambda_1(\Omega) > \frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{\text{dist}(P, \partial\Omega)^2} > 0$$

Tomando  $c$  constante verificando:

$$\lambda_1(\Omega) > c > \frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{\text{dist}(P, \partial\Omega)^2}$$

y aplicando el Teorema I.3.2. llegamos a un absurdo.

Q.E.D.

COROLARIO I.3.4. En las mismas hipótesis del Corolario anterior, llamando:

$$R_n = \sup \left\{ R > 0 / \exists B_1, \dots, B_n \subset \Omega \text{ bolas geodésicas disjuntas de radio } R \right\}$$

entonces:

$$\lambda_n(\Omega) \leq \frac{2a\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1} \frac{\pi^2}{R_n^2}$$

Demost.: Sea  $P_0 \in M$  /  $\text{dist}(P_0, \partial\Omega) = \sup \{ \text{dist}(P, \partial\Omega), P \in \Omega \}$  y observese que:

$$R_n \geq \frac{\text{dist}(P_0, \partial\Omega)}{2n-1}$$

Sean  $B_1, \dots, B_n$  bolas de radio  $R_n - \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, y disjuntas. Sabemos que :

$$\lambda_1(B_i) \leq \frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{(R_n - \varepsilon)^2}, \quad i=1, \dots, n$$

consecuencia del Corolario I.3.3.

Sean  $u_1, \dots, u_n$  las primeras autofunciones para  $\Delta - aK$  en las bolas  $B_1, \dots, B_n$  respectivamente. Como  $u_i \in H_0^1(\Omega)$ ,  $i=1, \dots, n$ , esto implica que  $\sum_{i=1}^n a_i u_i \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\forall a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n$ .

Elijamos  $a_i \in \mathbb{R}$  no todos nulos tal que  $\int_{\Omega} (\sum_{i=1}^n a_i u_i) v_j dA = 0$ ,  $j=1, \dots, n-1$ , con  $v_j$  la  $j$ -ésima autofunción para  $\Delta - aK$  en  $\Omega$ , siempre actuando sobre funciones con valores nulos en la frontera.

Por la caracterización variacional de  $\lambda_n(\Omega)$  (ver [02]):

$$\lambda_n(\Omega) \leq \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (a_i^2 |\nabla u_i|^2 + aK a_i^2 u_i^2) dA}{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i^2 u_i^2 dA} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_1(B_i) \int_{\Omega} u_i^2 dA}{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i^2 u_i^2 dA} \leq \frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{(R_n - \varepsilon)^2}$$

y haciendo  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene lo buscado.

Q.E.D.

**COROLARIO I.3.5.** Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana compacta. Consideremos el operador  $\Delta - aK$ ,  $a > \frac{1}{4}$  sobre  $M$ . Entonces:

$$\lambda_2(M) \leq \frac{8a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{\text{diam}(M)^2}$$

Demost.: Recordemos que  $\lambda_2(M)$  es el 2º autovalor de  $\Delta - aK$ . Sean  $P_0, Q_0 \in M$  /  $\text{dist}(P_0, Q_0) = \text{diam}(M)$ . Consideremos  $C = \{Q_0\}$  compacto, y llamemos  $\Omega = M - C$ . Usando el Corolario I.3.4.:

$$\lambda_2(M) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)} \frac{\pi^2}{R_2^2}$$

Pero  $R_2 \geq \frac{\text{diam}(M)}{2}$ , y de aquí el resultado.

Q.E.D.

Otra consecuencia importante del Teorema I.3.2., ó más concretamente del Corolario I.3.3. es el siguiente Teorema:

TEOREMA I.3.6. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H$  constante y no nula (siempre considerada positiva). Supongamos que  $\text{Ind}_0(M) < \infty$ .

Entonces no existen  $\text{Ind}_0(M)+2$  bolas  $B_j$  disjuntas de radio

$$R > \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} \frac{\pi}{H}$$

Demost.: Supongamos que existen  $B_j$ ,  $j=1, \dots, \text{Ind}_0(M)+2$  bolas en las condiciones expuestas.

Consideremos el operador  $\Delta - 2K$  actuando sobre funciones que se anulen en  $\partial B_j$  (funciones de  $H_0^1(B_j)$ ), y esto para cada  $j$ .

Sean  $u_j, \lambda_1(B_j)$  la primera función propia y primer autovalor para  $\Delta - 2K$  en  $B_j$ ,  $j=1, \dots, \text{Ind}_0(M)+2$ , y supondremos siempre que para cada  $j$ ,  $\int_M u_j^2 dA = 1$ .

Sean  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $j=1, \dots, \text{Ind}_0(M)+2$  elegidos de forma que, llamando  $r = \text{Ind}_0(M)+2$ , se tenga que:

$u = \sum_{j=1}^r a_j u_j$ , definida en toda  $M$  previa extensión por cero como siempre de cada  $u_j$  fuera de  $B_j$ , sea una función de  $H_0^1(M)$  verificando que  $\int_M u dA = 0$  y además ortogonal en  $L^2(M)$  al subespacio con dimensión  $\text{Ind}_0(M)$  de  $H_0^1(M) \cap \{f \in L^2(M) / \int_M f dA = 0\}$  de las funciones donde  $Q$  forma cuadrática asociada a  $\Delta - 2K$  es definida negativa.

Para esta  $u$ , por definición de  $\text{Ind}_0(M)$ , se tiene:

$$(24) \quad \int_M (|\nabla u|^2 - |\sigma|^2 u^2) dA \geq 0$$

Pero por otra parte:

$$(25) \quad \int_M (|\nabla u|^2 - |\sigma|^2 u^2) dA = \sum_{j=1}^r a_j^2 \lambda_1(B_j) - 4H^2 \left( \sum_{j=1}^r a_j^2 \right)$$

Pero por el Corolario I.3.3.,

$$(26) \quad \lambda_1(B_j) \leq \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \frac{\pi^2}{R^2}$$

para cada  $j$ .

Usando (24), (25) y (26), se tiene:

$$\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1} \frac{\pi^2}{R^2} - 4H^2 \geq 0, \text{ lo que contradice nuestras hipótesis.}$$

Q.E.D.

**COROLARIO I.3.7.** *Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana completa inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H$  constante no nula.*

*Entonces,  $M$  es compacta  $\Leftrightarrow \text{Ind}_0(M) < \infty$ , y en este caso:*

$$\text{diam}(M) \leq 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} \frac{\pi}{H} (\text{Ind}_0(M)+1)$$

Demost.: Si  $M$  es compacta, el número de autovalores negativos para  $\Delta + |\sigma|^2$  es finito (ver [02]) y de aquí que  $\text{Ind}_0(M) < \infty$ .

Si  $\text{Ind}_0(M) < \infty$ , por el Teorema I.3.6.  $M$  es acotada en distancia y por lo tanto compacta ya que es completa.

Además, el Teorema I.3.6. nos dice que no hay  $\text{Ind}_0(M)+2$  bolas disjuntas de radio  $R > \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}} \frac{\pi}{H}$ .

Q.E.D.

Fischer-Colbrie ha probado el siguiente Teorema (ver [10]):

**TEOREMA I.3.8.** *Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana completa y consideremos el operador  $\mathcal{L} = \Delta + q$ , donde  $q \in C^\infty(M)$ .*

*Entonces,  $\text{Ind}(\mathcal{L}) < \infty \Leftrightarrow \exists u \in C^\infty(M)$ ,  $u > 0$  y  $C$  compacto en  $M$  de forma que  $\Delta u + qu = 0$  en  $M-C$ .*

Uniando la información de este último Teorema con el Teorema I.3.2., se sigue el siguiente Corolario:

COROLARIO I.3.9. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana completa y  $q \in C^\infty(M)$ . Supongamos que  $\mathcal{L} = \Delta + q$  tiene  $\text{Ind}(\mathcal{L}) < \infty$ , y sean  $u, C$  función y compacto en  $M$  determinadas como en el Teorema I.3.8..

Si  $c = \inf \left\{ (q + aK)(P), P \in M - C \right\} > 0$ , con  $a > \frac{1}{4}$ , entonces  $M$  es compacta.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el resultado más importante de esta sección:

TEOREMA I.3.10. Sea  $(M; ds^2)$  superficie Riemanniana inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H$  constante.

Entonces  $M$  es estable (como superficie de curvatura media constante) si y sólo si  $M$  es el Plano ó la Esfera.

Demost.: Es conocido que el Plano y la Esfera son estables (consultar [03],[11]).

Sea el operador  $\mathcal{L}_J = \Delta + |\sigma|^2$  sobre  $M$ .

Es inmediato que  $1 + \text{Ind}_0(M) \geq \text{Ind}(M)$ .

Al ser  $M$  estable,  $\text{Ind}_0(M) = 0$  y en consecuencia  $\text{Ind}(M)$  es finito. Aplicando el Teorema I.3.8. al operador de Jacobi  $\mathcal{L}_J$ , sean  $u > 0$  función diferenciable y  $C$  compacto como en el Teorema.

Como  $|\sigma|^2 = 4H^2 - 2K$ , en el caso  $H = \text{constante} \neq 0$ , podemos usar el Teorema I.3.2. con  $a = 2$  y  $c = 4H^2$  para concluir que  $M$  es compacta, ó bien usar directamente el Corolario I.3.7.. En este caso pues  $M$  es una esfera (ver [03]).

Podemos pues suponer que  $H = 0$ , esto es,  $M$  es minimal. Como sabemos que  $\text{Ind}(M) \leq 1$ , caben dos posibilidades:

(i)  $\text{Ind}(M) = 0$ . En este caso  $M$  es el plano (consultar [06], [11] ó [37]).

(ii)  $\text{Ind}(M) = 1$ . Por el Teorema I.2.4.,  $M$  es la Catenoide ó la superficie de Enneper.

Acabaremos el Teorema si probamos los siguientes Lemas:

LEMA I.3.11. La Catenoide no es estable (como superficie de curvatura media constante).



LEMA I.3.11. *La Catenoide no es estable (como superficie de curvatura media constante).*

Demost.: La Catenoide se puede parametrizar:

$$X(u, v) = \left( \cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v \right), \quad v \in \mathbb{R}, u \in [0, 2\pi]$$

De aquí que la métrica inducida y su curvatura de Gauss son:

$$(27) \quad ds^2 = \cosh^2(v) (du^2 + dv^2) \quad K = \frac{-1}{\cosh^4(v)}$$

Si la Catenoide fuese estable, entonces para cualquier función Lipschitziana  $f(u, v) = f(v)$  con soporte compacto en  $\mathbb{R}$  (función que esta en  $H_0^1(S)$ ,  $S = \text{sop}(f)$ ) que verifique:

$$(28) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(v) \cosh^2(v) dv = 0$$

se tendría que usando (27):

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f'^2(v) dv \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2f^2(v)}{\cosh^2(v)} dv$$

El lema estará acabado si construimos  $f$  satisfaciendo (28) pero no (29).

Dados  $0 < a < b$ , consideremos la función  $f_{a,b}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$(30) \quad f_{a,b}(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } |v| \leq a \\ \frac{|v| - b}{a - b} & \text{si } a \leq |v| \leq b \\ 0 & \text{si } b \leq |v| \end{cases}$$

y observe que  $|f'_{a,b}(v)| \leq \frac{1}{b-a}$ .

Para cada  $k \geq 0$ , sea la función  $2f_{a,b} - f_{a+k, b+k}$ . Por ser:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cosh^2(v) dv = +\infty$$

para  $k=0$ , la integral (28) es positiva, y si  $k \rightarrow \infty$  se convierte en negativa.

Luego existe  $k > 0$  tal que la integral de (28) vale 0, y para este  $k$  escribamos:  $\bar{f}_{a,b} = 2f_{a,b} - f_{a+k,b+k}$ .

La función  $\bar{f}_{a,b}$  verifica:

$$(31) \quad \bar{f}_{a,b}(v) = 1 \text{ si } |v| \leq a, \quad |\bar{f}'_{a,b}| \leq \frac{2}{(b-a)}$$

y además el conjunto de reales donde  $|\bar{f}'_{a,b}| \neq 0$  tiene medida menor ó igual que  $4(b-a)$ .

Pongamos  $a=1$  y  $\bar{f}_{1,b}$  en (29), y observemos que por (31):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\cosh^2(v)} \bar{f}_{1,b}^2(v) dv \geq \int_{-1}^{+1} \frac{2}{\cosh^2(v)} dv > 0, \quad \forall b > 0$$

y además:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}'_{1,b}(v) dv \right| \leq \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{16}{(1-b)} = 0$$

de donde para  $b$  suficientemente grande se llega a absurdo.

Q.E.D.

LEMA I.3.12. *La superficie de Enneper no es estable (como superficie de curvatura media constante)*

Demost.: La representación de Weierstrass de la superficie de Enneper viene dada (ver (7)) por:

$$f, g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad f(z)=1, \quad g(z)=z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como consecuencia de la Proposición 0.1.7., la métrica inducida por  $\mathbb{R}^3$  y la curvatura de Gauss se expresan:

$$(32) \quad ds^2 = \left[ \frac{1}{2} (1+|z|^2) \right] |dz|^2 \quad K = - \left[ \frac{4}{(1+|z|^2)^2} \right]^2 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Analogamente al Lema I.3.11., trabajaremos con funciones en coordenadas polares:

$f(r, \vartheta) = f(r)$ ,  $r > 0$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  con soporte compacto y Lipschitzianas.

La estabilidad de la superficie de Enneper trabajando con este tipo de funciones nos diría:

$$(33) \int_0^{\infty} f'^2(r) r dr \geq \int_0^{\infty} \frac{8f^2(r)r}{(1+r^2)^2} dr \text{ siempre que } \int_0^{\infty} f(r)(1+r^2)^2 r dr = 0$$

Sea  $f_t: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f_t(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ -r+2 & \text{si } 1 \leq r \leq 3 \\ -1 & \text{si } 3 \leq r \leq t \\ r-t-1 & \text{si } t \leq r \leq t+1 \\ 0 & \text{si } t+1 \leq r \end{cases}$$

Consideremos la sucesión  $\{f_t^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , sucesión de funciones de soporte compacto en  $\mathbb{R}_+$ . Tomemos  $t_0$  suficientemente grande para que:

$$\int_0^{\infty} f_{t_0}^n (1+r^2)^2 r dr < 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ impar}$$

Por continuidad, para cada  $n$  impar existe  $\varepsilon(n) > 0$  de tal forma que:

$$\int_0^{\infty} \max\{f_{t_0}^n, -\varepsilon(n)\} (1+r^2)^2 r dr = 0$$

Llamemos  $\bar{f}_n = \max\{f_{t_0}^n, -\varepsilon(n)\}$ ,  $n$  impar, y observemos que:

$$(34) \quad \bar{f}_n = 1 \text{ en } [0, 1], \text{ y } \exists \delta > 0 / \varepsilon(n) > \delta \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ impar}$$

En particular de (34) se deduce que  $\bar{f}_n < -\delta$  en  $[3, t]$ ,  $n$  impar.

Extendiendo  $\bar{f}_n$  a todo  $\mathbb{C}$  revolucionando alrededor del origen,  $\bar{f}_n$  se convierte en una función Lipschitziana con soporte compacto, y (33) queda:

$$(35) \quad \int_0^{\infty} (\bar{f}'_n)^2 r dr \geq \int_0^{\infty} \frac{8\bar{f}_n^2(r)r}{(1+r^2)^2} dr, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ impar}$$

Por otra parte:

$$(36) \quad \int_0^{\infty} \frac{8\bar{f}_n^2(r)r}{(1+r^2)^2} dr \geq \int_0^{\infty} \frac{8r}{(1+r^2)^2} dr > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \text{ impar}$$

y además:

$$\int_0^{\infty} (\bar{f}'_n)^2 r dr \leq \int_1^3 n^2 |f_{t_0}|^{2n-2} r dr + \int_{t_0}^{t_0+1} n^2 |f_{t_0}|^{2n-2} r dr \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

donde para obtener la última desigualdad se ha usado que  $|f_{t_0}| < 1$  en  $]1, 3] \cup ]t_0, t_0+1]$  y el Teorema de la convergencia dominada, ya que puntualmente las funciones que aparecen tienden a 0.

Uniendo esto último con (35) y (36) se llega a un absurdo.

Q.E.D.

Para acabar este Capítulo I, veamos algunos hechos elementales pero de gran interés que serán consecuencia de los resultados anteriormente expuestos.

TEOREMA I.3.13. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana y sea  $u$  una solución de la ecuación diferencial:

$$\Delta u - aKu + qu = 0$$

donde  $a$  es una constante,  $a > \frac{1}{4}$ , y  $q \in C^{\infty}(M)$ . Supongamos que se tiene  $c = \inf\{q(P) / P \in M\} > 0$  y que  $\exists P_0 \in M$  verificando:

$$\text{dist}(P_0, M) > \pi \sqrt{\frac{2a\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}-1)c}}$$

Entonces,  $u$  se anula en algún punto de  $M$ .

Demost.: Si fuese  $u \neq 0$  sobre  $M$ ; entonces  $|u|$  verifica:

$$\Delta |u| - aK|u| + q|u| = 0$$

y como  $|u| > 0$  se deduce que:

$$\Delta |u| - aK|u| + c|u| \leq 0$$

de donde aplicando el Teorema I.3.2. llegamos a un absurdo.

Q.E.D.

COROLARIO I.3.14. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana completa y no compacta. Supongamos que existe  $u \in C^{\infty}(M)$  verificando:

$$\Delta u - aKu + qu = 0$$

Otra consecuencia geométrica interesante del Teorema I.3.13. nos la da el siguiente Corolario:

COROLARIO I.3.15. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana no compacta inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H$  constante no nula. Sea  $N:M \rightarrow S^2$  la aplicación de Gauss de  $M$ .

Entonces si  $\Omega$  es una región en  $M$  tal que existe  $P \in \Omega$  con:

$$\text{dist}(P, \partial\Omega) > \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{(2\sqrt{2}-1)} \frac{\pi}{H}}$$

$N(\Omega)$  no está contenido en ningún hemisferio abierto de  $S^2$ .

Demost.: Sea  $u = \langle N, n \rangle$ ,  $n \in S^2$ . Es conocido que  $u$  satisface:

$$\Delta u + |\sigma|^2 u = 0$$

por ser  $H$  constante.

Si  $N(\Omega)$  está contenido en un hemisferio abierto que determine  $n$ , podemos suponer que  $u > 0$  en  $\Omega$  y además se tiene:

$$\Delta u - 2Ku + 4H^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega$$

ya que  $|\sigma|^2 = 4H^2 - 2K$ .

Aplicando el Teorema I.3.13. llegamos a una contradicción.

Q.E.D.

COROLARIO I.3.15'. Sea  $(M, ds^2)$  superficie Riemanniana completa no compacta inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media  $H$  constante no nula. Sea  $N:M \rightarrow S^2$  la aplicación de Gauss de  $M$ .

Entonces  $N^{-1}(S^1)$  es un conjunto no compacto para cualquier ecuador  $S^1$  de  $S^2$ .

Si  $X$  es un campo de Killing en  $\mathbb{R}^3$ , la función  $u = \langle n, X \rangle$  satisface sobre superficies de  $H = \text{constante}$  la ecuación:

$$\Delta u + |\sigma|^2 u = 0$$

Para estas funciones se tienen las correspondientes versiones de los Corolarios I.3.15. y I.3.15'.

Por último comentemos la siguiente extensión de un resultado de Hoffmann, Osserman y Schoen en [22].

Por último comentemos la siguiente extensión de un resultado de Hoffmann, Osserman y Schoen en [22].

TEOREMA I.3.16. Sea  $(M, ds^2)$  una superficie completa no compacta inmersa isométricamente en  $\mathbb{R}^3$  con curvatura media constante  $H$  no nula, y sea  $N: M \rightarrow S^2$  la aplicación de Gauss.

Si  $N(M-C)$  está contenido en algún hemisferio cerrado de  $S^2$ , para algún subconjunto compacto  $C$  de  $M$ , entonces  $M$  es un cilindro circular recto.

Demost.: Supongamos que el hemisferio es el dado por:

$$\{P \in S^2 / \langle P, n \rangle \geq 0\}, \text{ donde } n \in S^2.$$

Entonces, la función  $u = \langle N, n \rangle$  es no negativa ( $\geq 0$ ) en  $M-C$  y satisface la ecuación:

$$\Delta u + |\sigma|^2 u = 0 \text{ en } M$$

Por el Principio del Máximo (ver [13]),  $u$  es ó bien constante 0 ó bien positiva en cada componente conexa de  $(M-C)$ .

Si fuese constante 0 en alguna componente conexa, por la propiedad de la continuación única (ver [01]),  $u=0$  en  $M$  y habríamos acabado. Si  $u > 0$  en  $M-C$ , llegaríamos a contradicción con el Corolario I.3.15'..

Q.E.D.

## CAPITULO II

### "ACOTACIONES DE SUPERFICIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$ "

La inspiración fundamental para los resultados que se van a exponer en este Capítulo emana del trabajo de P. de M. Jorge y F. Xavier [24].

En este trabajo se muestra como generar superficies minimales orientables, completas y simplemente conexas entre dos planos paralelos de  $\mathbb{R}^3$ , por supuesto no llanas.

Las técnicas usadas por Jorge y Xavier, que esencialmente serán en las que nos basaremos, derivan de la variable compleja, y más concretamente, de una manera ingeniosa descrita por Remmert de usar el Teorema de Runge (ver [05]), junto con la representación de Weierstrass para superficies minimales no orientables en  $\mathbb{R}^3$ , introducida por Meeks III (ver [31]).

#### II.1. Generalidades y Preliminares.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{C}$  dominio acotado con un número finito de agujeros.

DEFINICION II.1.1. Una sucesión  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de compactos en  $\Omega$  se dice expansiva si y sólo si existe  $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de

dominios relativamente compactos en  $\Omega$  tal que:

$$K_n \subset D_n, K_{n+1} \cap \overline{D}_n = \emptyset, \overline{D}_n \subset D_{n+1} \quad \forall n \geq 1, \text{ y } \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \Omega$$

Necesitaremos el siguiente Lema, consecuencia del Teorema de Runge (ver [05]).

Lema II.1.2. Sea  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de compactos expansiva en  $\Omega$ , tal que  $K_n$  no tiene agujeros  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Fijemos  $\varepsilon > 0$  y  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de números complejos.

Entonces existe  $f$  función holomorfa en  $\Omega$  verificando:

$$|f - \beta_n| < \varepsilon \quad \text{sobre } K_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demost.: Definamos, usando el Teorema de Runge, una sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  holomorfas en  $\Omega$  por el siguiente proceso inductivo:

$f_1$  es una función holomorfa en  $\Omega$  (y con posibles polos en los agujeros de  $\Omega$ ) verificando que:

$$|f_1 - \beta_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{en } K_1$$

Tal función existe por el Teorema de Runge.

Para  $n > 1$ , definamos  $f_n$  holomorfa en  $\Omega$  (con posibles polos en los agujeros de  $\Omega$ ) usando de nuevo el Teorema de Runge verificando:

$$(37) \quad |f_n - \beta_n| < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{en } K_n, \quad |f_n - f_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{en } \overline{D}_{n-1}$$

La sucesión de funciones  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es uniformemente acotada sobre los compactos de  $\Omega$ . En efecto, dado  $C$  compacto,  $C \subset \Omega$ , siempre existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $C \subset D_m$ . De aquí que:

$$\sup \left\{ |f_n|(z) / z \in C \right\} \leq \sup \left\{ |f_n|(z) / z \in D_m \right\} \leq \varepsilon + \sup \left\{ |f_m|(z) / z \in D_m \right\}$$

y esto  $\forall n \geq m$ , donde se ha usado (37) para establecer la última desigualdad.

Por lo tanto se deduce que:

$$\sup \left\{ |f_n|(z) / z \in C \right\} \leq \varepsilon + \max \left\{ \sup \left\{ |f_i|(z) / z \in D_m \right\}, i=1, \dots, m \right\}$$



y esto  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Esto nos dice que  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una familia normal en  $\Omega$  en el sentido de Montel, y en consecuencia admite una parcial convergente uniformemente sobre compactos de  $\Omega$  a  $f$  función holomorfa en  $\Omega$ , que por (37) verifica lo pedido.

Q.E.D.

Para superficies minimales en  $\mathbb{R}^3$  no orientables, existe una representación de Weierstrass (ver [31]), que en el caso concreto de anillos minimales está recogida en el siguiente Lema.

LEMA II.1.3. Sea  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(1/L, L)$  un anillo abierto en  $\mathbb{C}$  con radio interior y exterior  $1/L$  y  $L$  respectivamente, donde  $L > 1$ .

Sea  $M$  superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  que venga dada via su representación de Weierstrass (ver Teorema 0.1.6.) por  $w = fdz, g$  función y 1-forma definidas en  $\mathcal{C}$ .

Entonces,  $M$  es el recubridor de dos hojas de una superficie minimal no orientable si y sólo si:

$$(i) \quad g(\mathcal{J}(z)) = \mathcal{J}(g(z))$$

$$(ii) \quad (zg(z))^2 = - \frac{\overline{f}(\mathcal{J}(z))}{f(z)}$$

donde  $\mathcal{J}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  está definida por  $\mathcal{J}(z) = -1/\overline{z}$ .

La superficie no orientable es concretamente la cinta de Möbius  $\mathcal{C}/\{I, \mathcal{J}\}$

## II.2. Superficies Minimales no orientables en $\mathbb{R}^3$ entre dos planos

TEOREMA II.2.1. Existe una familia de cintas de Möbius minimales en  $\mathbb{R}^3$  contenidas entre dos planos.

Demost.: Sea  $\mathcal{C}$  como en el Lema II.1.3., y consideremos la Figura 2.

Como se indica,  $K_n^2$  es la región compacta formada cortando dos pequeños trozos antípodos centrados en el eje imaginario si  $n$  es par, y en el real si  $n$  es impar, a un anillo contenido en  $\mathcal{C}$ . Además los radios de estos anillos van creciendo con  $n$  como nos indica la Figura 2, y son todos más grandes que 1.

Es claro que  $-K_n^2 = K_n^2$ .

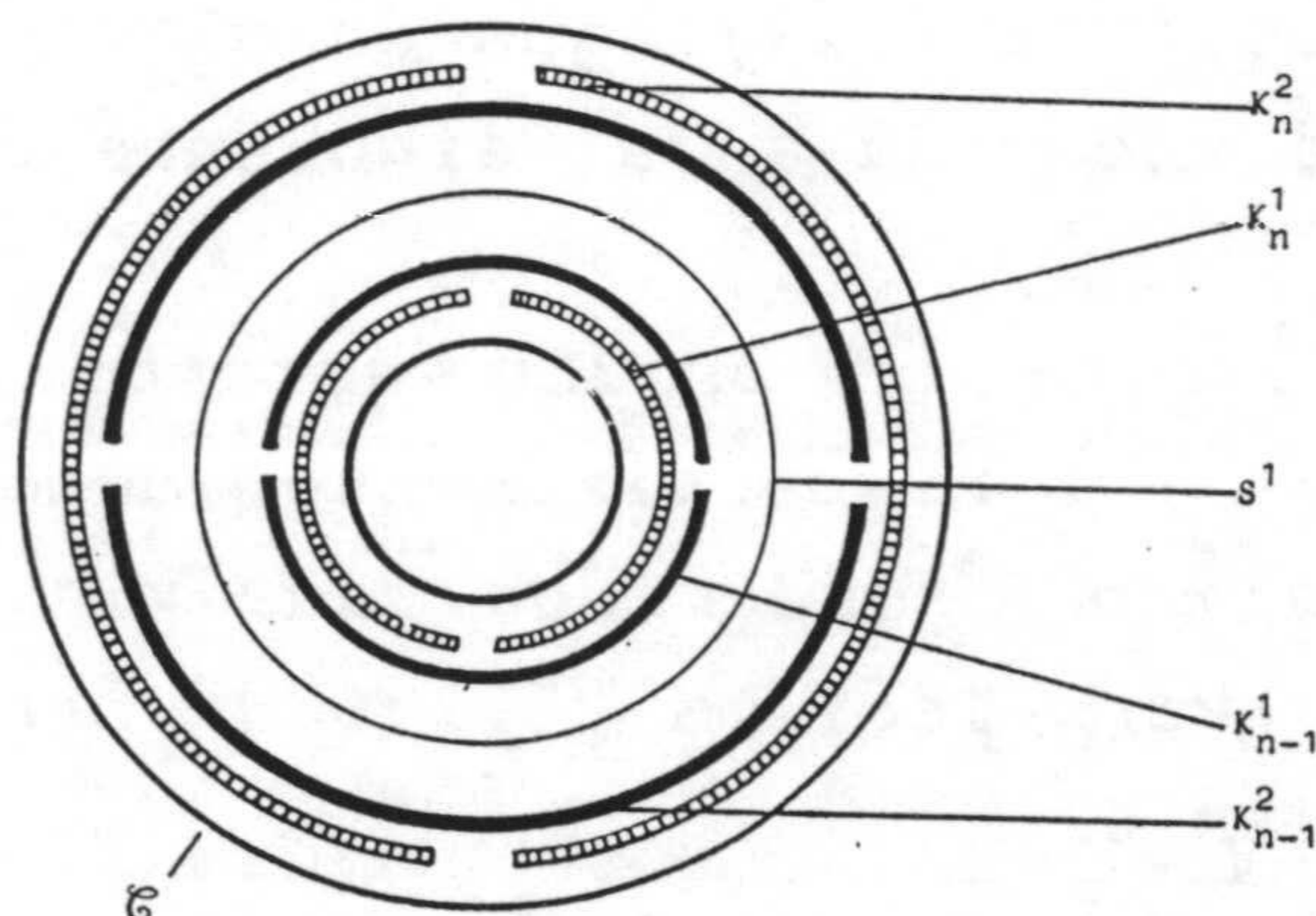


Figura 2

Definimos  $K_n^1 = \mathcal{J}(K_n^2)$ , y  $K_n = K_n^1 \cup K_n^2$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Observese que la sucesión de compactos  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es expansiva según la Definición II.1.1..

Fijemos  $\varepsilon > 0$  y definamos dos sucesiones de  $n^\circ$  reales  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de la siguiente manera:

$$M_{2n} = M_{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ \alpha_n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad N_{2n} = N_{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \alpha_n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

con  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a determinar.

Por el Lema II.1.2., existe  $h$  holomorfa en  $\mathcal{C}$  verificando:

$$(38) \quad |h - M_n| \leq \varepsilon \text{ en } K_n^2, \quad |h - N_n| \leq \varepsilon \text{ en } K_n^1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definamos ahora  $p(z) = e^{h(z)}$  y  $t(z) = \frac{p(z)}{\overline{p(\mathcal{J}(z))}}$  en  $\mathcal{C}$ , y consideremos:

$$(39) \quad \overline{\mathcal{C}} = \mathcal{C}(1/\sqrt{L}, \sqrt{L}) \text{ y } q(z) = t(z^2)t(-z^2) \text{ en } \overline{\mathcal{C}}$$

Está claro que  $q$  es holomorfa en  $\overline{\mathcal{C}}$ , y además satisface:

$$(40) \quad q(z)\bar{q}(\mathcal{J}(z))=1$$

Escribamos  $\bar{K}_n^i = \{z \in \mathbb{C} / z^2 \in K_n^i\}$ ,  $i=1,2$ .

Es claro que  $\{\bar{K}_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de compactos que tiende al círculo exterior de  $\bar{\mathcal{C}}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , formada cortando cuatro piezas antípodas dos a dos a un anillo, como en la Figura 3, y que  $\bar{K}_n^1 = \mathcal{J}(\bar{K}_n^2)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Definamos  $\bar{K}_n = \bar{K}_n^1 \cup \bar{K}_n^2$ .

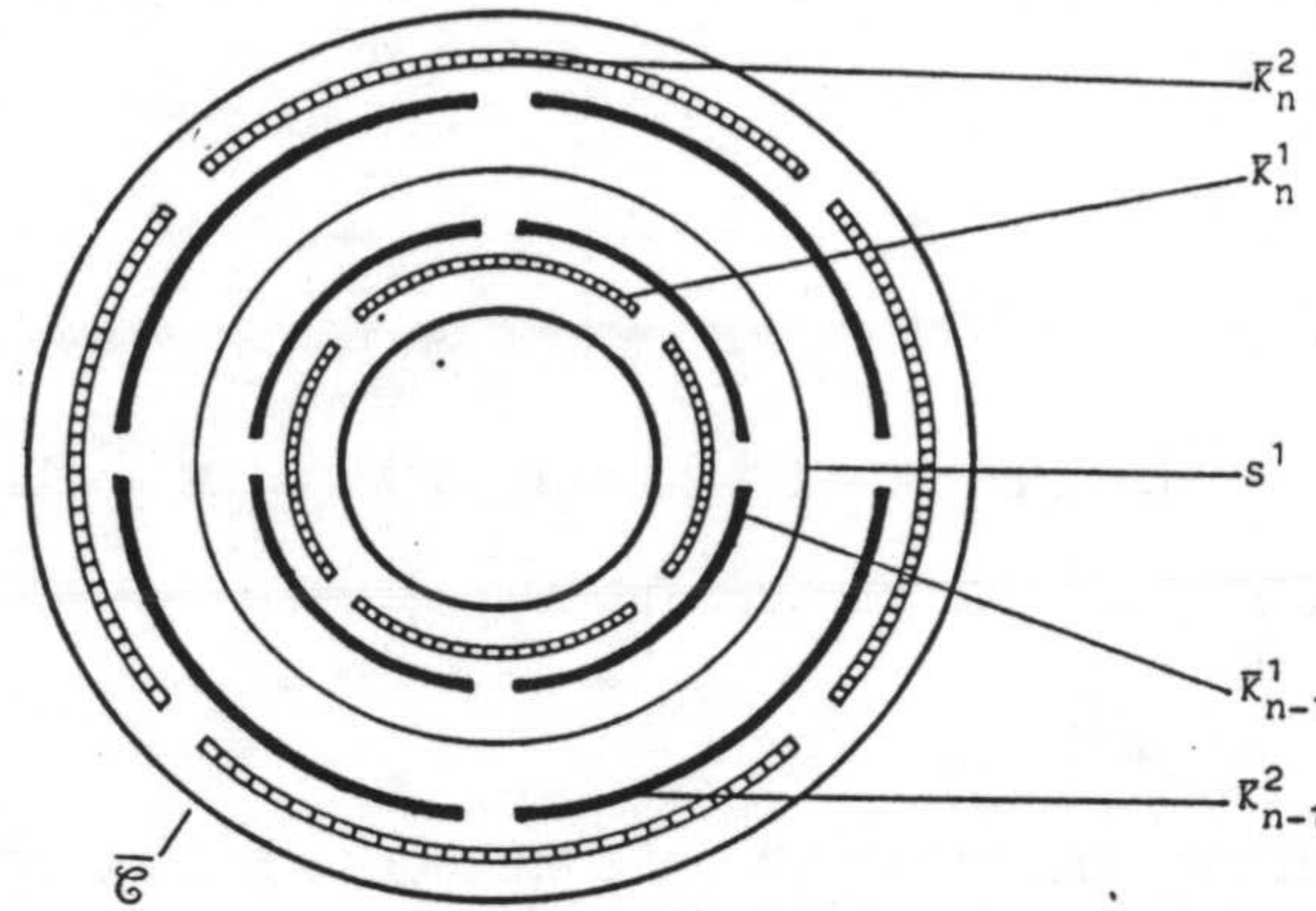


Figura 3

En consecuencia,  $\{\bar{K}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión expansiva. Usando que  $\mathcal{J}(\bar{K}_n^2) = \bar{K}_n^1$  y que  $\bar{K}_n^i = -\bar{K}_n^i$ ,  $i=1,2$ , (38) y la definición de  $q$ , tenemos:

$$(41) \quad \begin{aligned} e^{2\alpha_n - 4\varepsilon - 2} \leq |q| \leq e^{2\alpha_n - 4\varepsilon + 2} & \text{ en } \bar{K}_{2n-1}^2 \cup \bar{K}_{2n}^2 \text{ n impar} \\ e^{2\alpha_n - 4\varepsilon - 2} \leq |q| \leq e^{2\alpha_n - 4\varepsilon + 2} & \text{ en } \bar{K}_{2n-1}^1 \cup \bar{K}_{2n}^1 \text{ n par} \end{aligned}$$

Definamos ahora  $w = i \left[ \frac{(z-1)^2}{z^4} \right] q(z) dz$ ,  $g(z) = \frac{z^2(z+1)}{(z-1)q(z)}$  en  $\bar{\mathcal{C}}$ .

Por (39), las series de Laurent de  $q$  y  $1/q$  en  $\bar{\mathcal{C}}$  son de la forma:

$$(42) \quad q(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{4n} z^{4n} \quad \text{y} \quad q(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a'_{4n} z^{4n}$$

Si definimos  $\phi_k$ ,  $k=1,2,3$  como en (3), entonces (42) implica que  $\phi_k$ ,  $k=1,2,3$  no tienen periodos reales, y en consecuencia por el Teorema 0.1.6.  $x = \left( \text{Re} \int \phi_1, \text{Re} \int \phi_2, \text{Re} \int \phi_3 \right)$  nos define una inmersión

minimal de  $\bar{C}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Escribiremos esta superficie minimal por M.

Usando (40), w y g satisfacen (i) y (ii) en el Lema II.1.3., y en consecuencia, M es el recubridor de dos hojas de una cinta de Möbius.

Como  $|\phi_3|$  es acotado en  $\bar{C}$ , M está contenida entre dos planos paralelos de  $\mathbb{R}^3$  ya que  $x_3$  es acotada.

Necesitamos sólo demostrar que  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  puede ser elegida de manera que M sea completa.

Sabemos por la Proposición 0.1.7. que el elemento de arco en M viene dado por:

$$(43) \quad ds = \lambda |dz|, \text{ donde } \lambda = \left[ \frac{|z-1|^2}{2|z|^4} \right] + \frac{|z+1|^2}{2|q(z)|}$$

La completitud se probará verificando que cualquier curva divergente en M tiene longitud infinita, para una convenientemente elegida sucesión  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Sea  $\alpha$  curva divergente en  $\bar{C}$ , y llamemos t al parametro arco Euclídeo asociado a  $\alpha$ .

Distinguiremos dos casos:

a) Supongamos que  $\alpha$  tiene longitud de arco Euclídea infinita, esto es,  $\alpha(t): [0, \infty[ \longrightarrow \bar{C}$ .

Como  $\lambda \geq A \left( |q| + 1/|q| \right) \geq A > 0$  para cierta constante positiva A en M-T, donde T es un subconjunto compacto de  $\bar{C}$  que contiene a  $\{-1, 1\}$ , entonces:

$$L(\alpha) = \int_0^\infty \lambda(t) dt = \infty$$

b) Supongamos ahora que  $\alpha$  tiene longitud Euclídea finita.

Tendremos  $\alpha(t): [0, l[ \longrightarrow \bar{C}$ ,  $l < \infty$ .

Como  $\alpha$  es divergente, observemos que  $\alpha$  debe cruzar todos los  $\bar{K}_{2n}^2$ , ó todos los  $\bar{K}_{2n-1}^2$ , ó bien todos los  $\bar{K}_{2n}^1$  ó todos los  $\bar{K}_{2n-1}^1$ , salvo un número finito.

Consideremos la primera de las alternativas, y sea  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha$  atraviesa cada  $\bar{K}_{2n}^2$ ,  $n \geq m$ . Sea  $J_n^i = \alpha \cap \bar{K}_n^i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i=1, 2$ .

Usando (41) y (43), tenemos:

$$L(\alpha) = \sum_{n \geq m} \int_{J_{2n}^2} \lambda(t) dt \geq \sum_{\substack{n \geq m \\ n \text{ impar}}} B e^{2\alpha_n} L(J_{2n}^2)$$

donde B es una constante positiva.

Si  $r_n^i$  es la diferencia entre el radio exterior e interior de  $\bar{K}_n^i$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i=1,2$ , entonces  $L(J_n^i) \geq r_n^i$ , y en consecuencia:

$$L(\alpha) \geq \sum_{\substack{n \geq m \\ n \text{ impar}}} B e^{2\alpha_n} r_{2n}^2$$

Eligiendo  $\alpha_n \geq \max \left\{ -\ln \left( (r_{2n}^2)^{1/2} \right), -\ln \left( (r_{2n-1}^2)^{1/2} \right) \right\}$ ,  $n$  impar, tendremos que  $L(\alpha) = \infty$  para cualquier curva que cruce todos los  $\bar{K}_{2n}^2$  ó todos los  $\bar{K}_{2n-1}^2$ , salvo un número finito.

Analogamente, eligiendo  $\alpha_n \geq \left\{ -\ln \left( (r_{2n}^1)^{1/2} \right), -\ln \left( (r_{2n-1}^1)^{1/2} \right) \right\}$ ,  $n$  par, tendremos  $L(\alpha) = \infty$  si  $\alpha$  atraviesa todos los  $\bar{K}_{2n}^1$  ó todos los  $\bar{K}_{2n-1}^1$ , salvo un número finito.

Esta elección de  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  convierte a M en completa.

Q.E.D.

### II.3. Superficies Minimales Doblemente Periódicas con una coordenada acotada.

Precisemos algunas definiciones y nomenclatura antes de establecer nuestro Teorema.

DEFINICION II.3.1. Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana, y sea  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión isométrica de M en  $\mathbb{R}^3$ .

Diremos que la inmersión x es doblemente periódica si y

sólo si existen  $\{v_1, v_2\}$  vectores en  $\mathbb{R}^3$  linealmente independientes de forma que  $\forall P \in M, x(P) + v_i \in x(M), i=1,2$ .

Usualmente, se identificará, como siempre,  $M \equiv x(M)$  y  $x$  con la inclusión en  $\mathbb{R}^3$ , y hablaremos de  $M$  como superficie doblemente periódica en  $\mathbb{R}^3$ .

Escribiremos  $\mathcal{G} = \{mv_1 + nv_2 / m, n \in \mathbb{Z}\}$  el grupo de las traslaciones en  $\mathbb{R}^3$  que dejan invariante  $M$ .

En consecuencia,  $M/\mathcal{G}$  tiene sentido dentro de  $\mathbb{R}^3/\mathcal{G} \equiv T \times \mathbb{R}$ , donde  $T$  es un toro llano de dimensión dos, como una superficie immersa.

Observese que si  $M$  es minimal en  $\mathbb{R}^3$ ,  $M/\mathcal{G}$  es minimal en  $T \times \mathbb{R}$ .

DEFINICION II.3.2. ( $\mathcal{P}$ -función de Weierstrass)

La función  $\mathcal{P}$  definida:

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ (m, n) \neq 0}} \left[ \frac{1}{(z - m - ni)^2} - \frac{1}{(m + ni)^2} \right]$$

es holomorfa en  $\mathbb{C} - \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{F} = \{m + ni / m, n \in \mathbb{Z}\}$ , y en los puntos de  $\mathcal{F}$  tiene polos de orden 2.

Para un estudio sistemático sobre funciones elípticas, se puede consultar [30].

Observese que por definición,  $\mathcal{P}$  es doblemente periódica en  $\mathbb{C}$  con periodos  $\{1, i\}$ , y presenta la simetría:

$$(44) \quad \mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(-z), \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Llamemos  $C = \left\{ z \in \mathbb{C} / \max\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \leq \frac{1}{2} \right\}$ ,  $z_0 = \frac{1}{4} + \frac{i}{4} \in C$ , y tomemos  $r \in ]0, \frac{1}{4}[$  [suficientemente pequeño verificando:

$$(45) \quad \begin{aligned} 1) \quad \Omega = \mathcal{P}\left(C - \bar{D}(0, r)\right) & \text{ es simplemente conexo} \\ 2) \quad \partial\Omega = \mathcal{P}\left(\partial\bar{D}(0, r)\right) & \end{aligned}$$

y definamos  $\mathcal{A} = \mathbb{C} - \bigcup_{m, n \in \mathbb{Z}} \bar{D}(m + ni, r)$ . Observese que  $\mathcal{A}$  es invariante por las traslaciones de  $\mathcal{F}$ .

Podemos ahora enunciar nuestro Teorema:

TEOREMA II.3.3. Existe una familia de superficies minimales doblemente periódicas completas no llanas entre dos planos paralelos de  $\mathbb{R}^3$ .

Demost.: Consideremos las siguientes dos Figuras.

En la Figura 4 se destacan los segmentos compactos  $l_1 = \overline{z_0, z_0 - i}$  y  $l_2 = \overline{z_0, z_0 + 1}$ , ambos en  $\mathcal{A}$ , y se define a continuación el compacto de  $\Omega: K_1 = \mathcal{P}(l_1 \cup l_2)$ .

Para  $n \geq 2$ , llamemos  $K'_n = \left\{ z \in \Omega / \frac{1}{2n+1} \leq \text{dist}(z, \partial\Omega) \leq \frac{1}{2n} \right\}$ , y definamos  $K_n$  a la región compacta formada cortando un trozo de  $K'_n$ , alternado el corte en una dirección y en su antípoda cuando  $n$  es par ó impar, como se indica en la Figura 5.

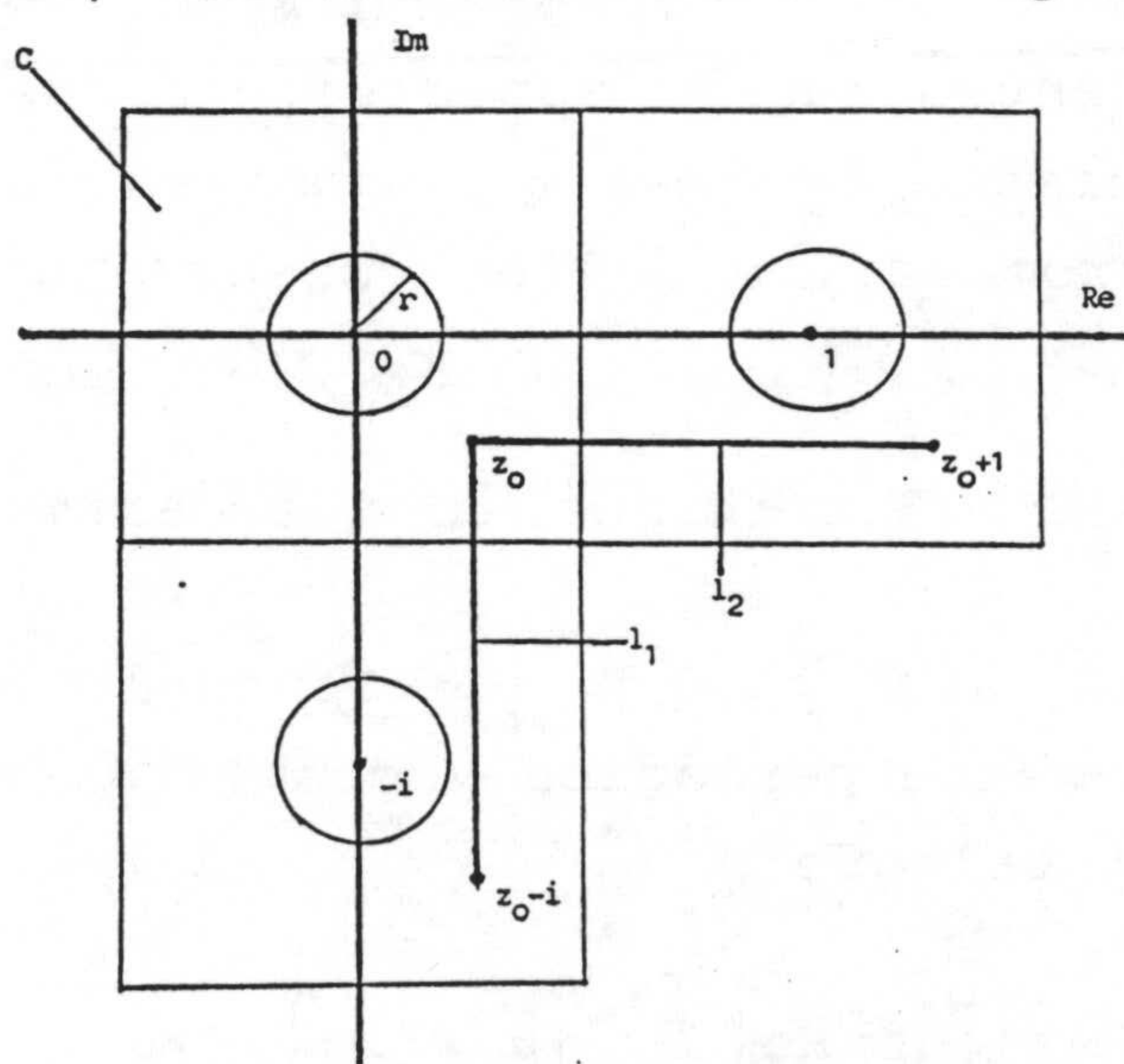


Figura 4

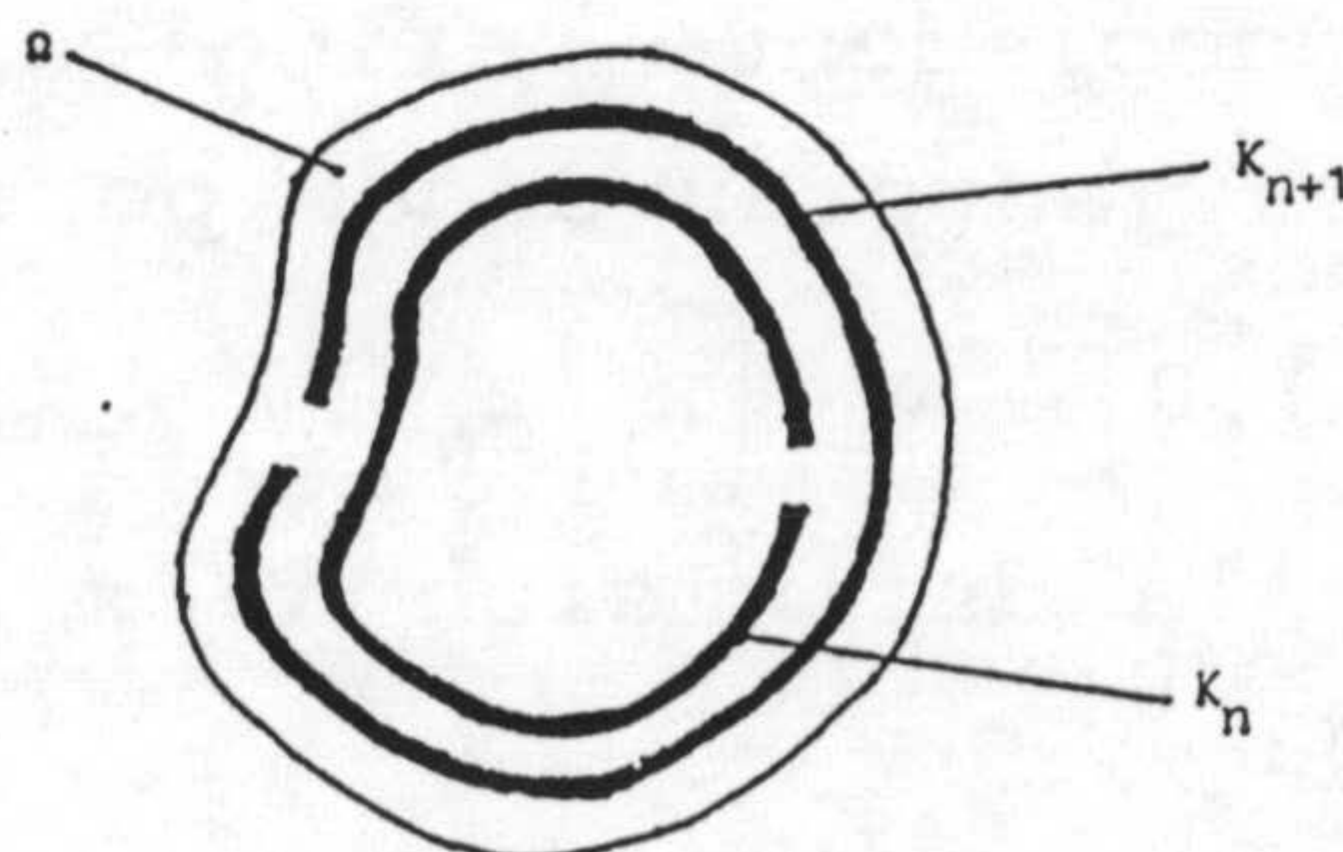


Figura 5

Podemos suponer sin perdida de generalidad para lo que sigue que  $K_n \cap K_1 = \emptyset$  para cada  $n \geq 2$ . La sucesión  $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es

obviamente expansiva según la Definición II.1.1., y entonces tomando  $\varepsilon > 0$  y  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  sucesión de números reales, podemos aplicar el Lema II.1.2. para concluir que existe  $f_1$  función holomorfa en  $\Omega$  de forma que:

$$|f_1 - \beta_n| < \varepsilon \text{ en } K_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Definamos  $f_2 = e^{f_1}$  y observemos que:

$$(46) \quad |f_2| > e^{\beta_n - \varepsilon} \text{ en } K_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomemos  $\beta_1 = 0$  y  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño tal que:

$$(47) \quad |f_2 - 1| < \frac{1}{4} \text{ en } K_1$$

Sean  $g, w$  la función y 1-forma en  $\mathcal{A}$  definidas por:

$$(48) \quad w(z) = f(\mathcal{P}(z)) dz \quad g(z) = \frac{\delta(\mu + \mathcal{P}(z))}{f_2(\mathcal{P}(z))}$$

donde  $\delta \in \mathbb{R}$  y  $\mu \in \mathbb{C}$  son constantes que se especificarán después.

Usando (44) y definiendo  $\phi_k$ ,  $k=1,2,3$  como en (3), estamos en las hipótesis del Teorema 0.1.6., y en consecuencia la aplicación  $x = \left( \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_1, \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_2, \operatorname{Re} \int_{z_0} \phi_3 \right)$  nos proporciona una inmersión minimal regular de  $\mathcal{A}$  en  $\mathbb{R}^3$ . Escribamos esta superficie minimal por  $M$ .

Resta probar que  $\delta \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  y  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  pueden ser elegidos de manera que  $M$  sea doblemente periódica y completa.

Primero, tomemos  $\mu \in \mathbb{C}$  tal que:

$$(49) \quad \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z_0+1} (\mu + \mathcal{P}(z)) dz = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z_0-i} (\mu + \mathcal{P}(z)) dz = 0$$

Por (48) y la definición de  $\phi_3$ , (49) implica que  $x_3$  es acotada en  $\mathcal{A}$ , ya que  $\mathcal{P}$  es doblemente periódica.

Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  los vectores dados por:

$$(50) \quad v_1 = \left( x_1(z_0+1), x_2(z_0+1), 0 \right) \quad v_2 = \left( x_1(z_0-i), x_2(z_0-i), 0 \right)$$

Si  $\delta \rightarrow 0$ , por (47) y la definición de  $x_k$ ,  $k=1,2,3$  se tiene que llamando  $f(z) = f_2(\mathcal{P}(z))$ :

$$(51) \quad x_1(z_0+1) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z_0+1} \frac{f}{2} dz + o_1(\delta) > \frac{3}{8} + o_1(\delta)$$



y analogamente:

$$(52) \quad |x_2(z_0+1)| < \frac{1}{8} + o_2(\delta), |x_1(z_0-i)| < \frac{1}{8} + o_3(\delta), x_2(z_0-i) < -\frac{3}{8} + o_4(\delta)$$

Por (50), (51) y (52), podemos elegir  $\delta$  suficientemente pequeño de forma que  $v_1, v_2$  sean linealmente independientes.

Así, usando (49), (50) y la periodicidad de  $\phi_k$ ,  $k=1,2,3$ ,  $M$  se convierte en doblemente periódica con  $\mathcal{G} = \{nv_1 + mv_2 \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  como su grupo de traslaciones.

Por último, probemos que se puede elegir  $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de manera que  $M$  sea completa.

Por (48) y la Proposición 0.1.7., el elemento de arco en  $M$  viene dado por:

$$(53) \quad ds = \lambda |dz|, \text{ con } \lambda = \frac{|f|}{2} + \frac{|\delta(\mu + \mathcal{P})|^2}{2|f|}$$

Sea  $\alpha(t)$  una curva divergente en  $\mathcal{A}$ , donde  $t$  es el parametro arco Euclídeo de  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  tiene longitud de arco euclídea infinita, como siempre  $\lambda \geq E \left( |f| + \frac{1}{|f|} \right) \geq E > 0$  sobre  $\mathcal{A}/\mathcal{F} - T$ , donde  $T$  es un compacto en  $\mathcal{A}/\mathcal{F}$  conteniendo los ceros de  $\mu + \mathcal{P}$  y  $E$  es una constante positiva, es fácil concluir que  $L(\alpha) = \infty$  en  $M$ .

Cuando la longitud de arco Euclídea de  $\alpha$  sea finita, esto es,  $\alpha: [0, \ell[ \rightarrow \mathcal{A}$ , observemos que  $\gamma(t) = \mathcal{P}(\alpha(t))$  es una curva divergente en  $\Omega$  de longitud Euclídea finita, ya que  $\alpha$  diverge hacia  $\delta D(m+ni, r)$  para algunos  $m, n \in \mathbb{Z}$  y usando (45).

En consecuencia,  $\gamma$  debe atravesar todos los  $K_n$  salvo un número finito.

Por otra parte:

$$(54) \quad 2L(\alpha) \geq \int_0^\ell |f(\alpha(t))| dt \geq S \int_0^\ell |f_2(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt$$

donde hemos usado (53) y  $S$  es una constante positiva tal que:  $|1/\mathcal{P}'| \geq S$  alrededor de  $\partial D(0, r)$ .

Por (54), si  $s$  es el parametro arco Euclídeo de  $\gamma$  en  $\Omega$  y  $\ell'$  su longitud Euclídea, tendremos:

$$(55) \quad L(\alpha) \geq \frac{S}{2} \int_0^{\ell'} |f_2(\gamma(s))| ds$$

Por último, fijemos:

$$(56) \quad \beta_n \geq \varepsilon + \ln(2n(2n+1)), \quad n \geq 2$$

y llamemos  $J_n = K_n \cap \gamma$ ,  $n \geq 2$ . Observese que  $L(J_n) \geq 2n(2n+1)$ , por definición de  $K_n$ .

Entonces por (55) y (56), se concluye que:

$$L(\alpha) > \frac{S}{2} \sum_{n \geq 2} e^{\beta_n - \varepsilon} L(J_n) \geq \frac{S}{2} \sum_{n \geq 2} e^{\beta_n - \varepsilon} \left( \frac{1}{2n(2n+1)} \right) = \infty$$

Q.E.D.

## CAPITULO III

### "APLICACION DE GAUSS DE SUPERFICIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$ "

En este Capítulo se establece una consecuencia geométrica de la normalidad de la aplicación de Gauss de una superficie minimal y completa en  $\mathbb{R}^3$  que omite por esta aplicación 3 ó mas puntos de  $S^2$ , y siguiendo un trabajo de D. Fisher-Colbrie y R.Schoen (ver [11]), usaremos la completitud de la superficie de una manera más elaborada que como lo hace Xavier en [44], para establecer que el plano es la única superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$  cuya aplicación de Gauss omite 6 ó más puntos de la esfera.

Como se indicó en la Introducción, hoy se conoce ya la solución total de este problema, que representa una mejora de un punto en el resultado que presentamos, debida a Fujimoto (consultar [12]).

III.1. Generalidades y Preliminares

Sea  $D$  es disco unidad en el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

DEFINICION III.1.1. Una función  $g:D \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  holomorfa se dice normal si la familia:

$$\left\{ g \circ S / S \text{ es una transformación conforme de } D \right\}$$

es normal en el sentido de Montel.

En [16], Página 163, se prueba que  $g$  es normal si y sólo si existe  $C > 0$  constante tal que:

$$(57) \quad \frac{|g'|}{1+|g|^2} \leq \frac{C}{1-|z|^2} \quad \text{en } D$$

Recordemos que el Teorema de Montel-Caratheodory (ver [05]) nos garantiza que si  $g$  omite 3 valores de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  entonces  $g$  es normal.

LEMA III.1.2. Sea  $g:D \rightarrow \mathbb{C} - \{a,b\}$ ,  $a \neq b$ , holomorfa. Sea  $\alpha = 1 - \frac{1}{m}$  con  $m \in \mathbb{N}$ . Entonces:

$$\int_D \frac{|g'|^p}{\left(|g-a|^\alpha + |g-a|^{2-\alpha}\right)^p} dx dy < \infty$$

para todo  $p \in ]0, 1[$ .

Demost.: La función  $(g-a)^{1/m}$  está bien definida en  $D$  y por el Teorema de Montel Caratheodory es normal.

Luego podemos aplicarle la estimación (57) y obtener:

$$\frac{|g'|^p}{\left(|g-a|^\alpha + |g-a|^{2-\alpha}\right)^p} \leq \left( \frac{C}{1-|z|^2} \right)^p$$

y de aquí el resultado ya que  $\frac{C}{1-|z|^2} \in L_p(M)$ ,  $p \in ]0, 1[$ .

Q.E.D.

Fijemos alguna notación.

Sea  $M$  una superficie minimal simplemente conexa en  $\mathbb{R}^3$ . Por el Teorema de Uniformización (ver [09])  $M$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$  ó  $\mathbb{D}$ .

Usando la representación de Weierstrass asociada a  $M$  (consultar el Teorema 0.1.6.), existe  $g$ ,  $w=f dz$  función y 1-forma meromorfa la primera y holomorfa la segunda sobre  $M$ , que determinan nuestra superficie. Además usando (9), via la identificación de  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ,  $g$  sabemos que se interpreta como la aplicación de Gauss de  $M$ .

En consecuencia, si la aplicación de Gauss omite un punto de  $S^2$ , podemos suponer que  $g$  es holomorfa sobre  $\mathbb{C}$  (salvo una rotación de  $\mathbb{R}^3$  haga coincidir ese punto con  $\infty$ ), lo que por el Teorema 0.1.6. implica que  $|f| > 0$  sobre  $M$ .

Si escribimos  $\lambda^2 = \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2$ , por la Proposición 0.1.7., tenemos que:

$$(58) \quad ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$$

$$(59) \quad K = - \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{2|g'|^2}{1+|g|^2} \right)^2$$

y no es difícil establecer a partir de (58) que:

$$(60) \quad dA = \lambda^2 dx dy$$

$$(61) \quad \Delta = \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right)$$

LEMA III.1.3. *Sea  $M$  una superficie minimal conformemente equivalente al disco unidad. Si la aplicación de Gauss  $g$  es normal, entonces existe  $q > 0$  constante tal que:*

$$(62) \quad \int_M (|\nabla \psi|^2 + qK\psi^2) dA \geq 0$$

para cualquier  $\psi \in C_0^\infty(M)$ .

Demost.: Recordemos que la métrica hiperbólica de curvatura constante  $-1$  en  $D$  viene dada por:

$$(63) \quad ds_1^2 = \left( \frac{2}{1-|z|^2} \right)^2 |dz|^2$$

De (59) y (60) se deduce que:

$$KdA = - \left( \frac{2|g'|^2}{1+|g|^2} \right)^2 dx dy, \text{ lo que combinado con (57) y (63) nos da:}$$

$$(64) \quad KdA \geq -C^2 dA_1$$

donde  $dA_1$  es la medida Riemanniana hiperbólica en  $D$ .

Por otra parte, Hobson (ver [18]) probó que:

$$(65) \quad \int_D \left( |\nabla\psi|^2 - \frac{1}{4} \psi^2 \right) dA_1 \geq 0$$

para cualquier función  $\psi$  diferenciable con soporte compacto en  $D$ , y donde  $|\nabla\psi|^2$  se ha tomado respecto de la métrica hiperbólica.

Por último, de (64) y (65), y teniendo en cuenta la invarianza conforme de la integral de Dirichlet, se obtiene:

$$\int_M \left( |\nabla\psi|^2 + \left(\frac{1}{2c}\right)^2 K\psi^2 \right) dA \geq 0$$

donde  $|\nabla\psi|^2$  se ha tomado respecto de la métrica  $ds^2$  en  $M$ .

Q.E.D.

Fischer-Colbrie y Schoen han probado que  $q < 1$  (ver [11]), y que (62) es equivalente a la existencia de una función positiva  $u$  satisfaciendo  $\Delta u - qKu = 0$  sobre  $M$ .

El siguiente resultado es una combinación de ideas de Fischer-Colbrie, Schoen y Yau.

**LEMA III.1.4.** *Sea  $M$  una variedad Riemanniana  $n$ -dimensional completa, y  $\omega$  una función diferenciable en  $M$  satisfaciendo:*

$$(66) \quad \int_M \left( |\nabla\psi|^2 + \omega\psi^2 \right) dV \geq 0$$

donde  $dV$  es el elemento de volumen métrico, y esto para cualquier  $\psi \in C_0^\infty(M)$ .

Sean  $u$  y  $h$  funciones diferenciables en  $M$ , con  $u > 0$  en  $M$  y

$h > 0$  en casi todo punto de  $M$ , verificando:

$$(67) \quad \Delta \text{Ln}(u) = \omega$$

$$(68) \quad \Delta \text{Ln}(h) = 0, \text{ cuando } h \neq 0$$

Entonces,  $uh^p$  no pertenece a  $L_2(M)$ ,  $\forall p > 0$ , salvo que  $M$  tenga volumen finito,  $\omega = 0$  y  $uh^p$  sea constante.

Demost.: La condición (68) es equivalente a:

$$(68') \quad h\Delta h - |\nabla h|^2 = 0 \text{ en } M$$

Para cada  $\varepsilon > 0$ , tenemos que de (68'):

$$\begin{aligned} \Delta \text{Ln}(h^2 + \varepsilon) &= \frac{(h^2 + \varepsilon)\Delta(h^2) - |\nabla h^2|^2}{(h^2 + \varepsilon)^2} = \frac{(h^2 + \varepsilon)(2h\Delta h + 2|\nabla h|^2) - 4h^2|\nabla h|^2}{(h^2 + \varepsilon)^2} = \\ &= \frac{4\varepsilon|\nabla h|^2}{(h^2 + \varepsilon)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Sea  $v_\varepsilon = u(h^2 + \varepsilon)^{p/2}$  y  $v = uh^p$ . De (67) y del cálculo anterior tenemos:

$$v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon - |\nabla v_\varepsilon|^2 = v_\varepsilon^2 \Delta \text{Ln}(v_\varepsilon) = v_\varepsilon^2 \left[ \text{Ln}(u) + (p/2) \Delta \text{Ln}(h^2 + \varepsilon) \right] \geq \omega v_\varepsilon^2$$

y de esto:

$$(69) \quad -v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon + \omega v_\varepsilon^2 \leq -|\nabla v_\varepsilon|^2$$

Pero por (66) tenemos que:

$$0 \leq \int_M \left( |\nabla \psi v_\varepsilon|^2 + \omega \psi^2 v_\varepsilon^2 \right) dV = \int_M \left( |\nabla \psi|^2 v_\varepsilon^2 + 2\psi v_\varepsilon \langle \nabla \psi, \nabla v_\varepsilon \rangle + |\nabla v_\varepsilon|^2 \psi^2 + \omega \psi^2 v_\varepsilon^2 \right) dV$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_M 2\psi v_\varepsilon \langle \nabla \psi, \nabla v_\varepsilon \rangle dV &= \frac{1}{2} \int_M \langle \nabla \psi^2, \nabla v_\varepsilon^2 \rangle dV = -\frac{1}{2} \int_M \psi^2 \Delta v_\varepsilon^2 dV = \\ &= -\int_M \left( \psi^2 v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon + \psi^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 \right) dV \end{aligned}$$

y así:

$$0 \leq \int_M \left( |\nabla\psi|^2 v_\varepsilon^2 - \psi^2 v_\varepsilon \Delta v_\varepsilon + \omega \psi^2 v_\varepsilon^2 \right) dV \leq \int_M \left( |\nabla\psi|^2 v_\varepsilon^2 - \psi^2 |\nabla v_\varepsilon|^2 \right) dV$$

donde hemos usado (69) en la última igualdad.

En consecuencia tenemos:

$$\int_M |\nabla v_\varepsilon|^2 \psi^2 dV \leq \int_M |\nabla\psi|^2 v_\varepsilon^2 dV$$

Tomando límites cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y usando el Lema de Fatou,  $|\nabla v|^2 \psi^2$  es integrable y :

$$(70) \quad \int_M |\nabla v|^2 \psi^2 dV \leq \int_M |\nabla\psi|^2 v^2 dV$$

Sea  $r$  la función distancia a un cierto punto de  $M$  y  $B(c)$  la bola de radio  $c$  con centro ese punto.

Dados  $c, d$ ,  $0 < c < d$  números reales, consideremos la función Lipschitziana  $\Psi_{cd}: M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\Psi_{cd}(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq c \\ \frac{(r-d)}{(c-d)} & \text{si } c \leq r \leq d \\ 0 & \text{si } d \leq r \end{cases}$$

Notemos que  $|\nabla \Psi_{cd}| \leq \frac{1}{d-c}$ . Como estas funciones pueden ser aproximadas por funciones regulares con soporte compacto en el espacio  $H_0^1(B(d))$ , por un razonamiento de densidad estandar concluimos que tomando  $\psi = \Psi_{cd}$  en (70):

$$\int_{B(c)} |\nabla v|^2 dV \leq \frac{1}{(d-c)^2} \int_M v^2 dV$$

Si  $v \in L_2(M)$ , haciendo  $d \rightarrow \infty$ , se tendría que  $v$  es constante no nula en  $B(c)$ , para  $c$  positivo arbitrario. En consecuencia,  $v$  es constante, el volumen de  $M$  es finito y  $\omega = \Delta \ln(v) = 0$ .

Q.E.D.

En el caso de  $\omega = 0$  y  $u = 1$ , en Lema anterior es un resultado de Yau recogido en [47].



### III.2. Superficies Minimales omitiendo 6 ó más puntos de la esfera por su aplicación de Gauss

TEOREMA III. 2.1. *El plano es la única superficie minimal completa en  $\mathbb{R}^3$  cuya aplicación de Gauss omite seis ó más puntos de la esfera.*

Demost.: Podemos suponer que  $M$  es simplemente conexa, previo paso a su recubridor universal, si es preciso.

Si  $M$  es conformemente equivalente a  $\mathbb{C}$ , el resultado se sigue del Teorema pequeño de Picard (ver [05]). Así pues podemos suponer que  $M$  es conforme a  $D$  disco unidad y que  $g$  omite al menos 6 puntos de la esfera:  $\infty, a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{C}$ , por lo que supondremos  $g$  holomorfa en  $D$  y  $g(z) \neq a_i, i=1, \dots, 5 \forall z \in D$ .

Usando el Teorema de Montel Caratheodory,  $g$  es normal, y por el Lema III.1.3., existe  $q > 0$  constante de forma que se tiene (62).

Consideremos las funciones:

$$u = \left(1 + |g|^2\right)^{-q} |f|^{-1} \prod_{i=1}^5 |g - a_i|^{-p\alpha/2} \quad h = |g'|^2$$

donde  $\alpha$  es como en el Lema III.1.2. y  $p \in ]0, 1[$ . Démosmos cuenta de que  $u > 0$  y  $h$  es positiva en casi todo punto ya que  $g$  no puede ser constante en este caso.

Usando (59) y (61) se tiene que:

$$\Delta \text{Ln}(u) = -q \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \text{Ln} \left(1 + |g|^2\right) = -q \frac{4}{\lambda^2} \left( \frac{|g'|^2}{1 + |g|^2} \right)^2 = qK$$

y es claro que  $\Delta \text{Ln}(h) = 0$  cuando  $h \neq 0$ .

Aplicando el Lema III.1.4. con  $\omega = qK \neq 0$ , tenemos que:

$uh^{p/4}$  no pertenece a  $L_2(M)$ . De aquí se sigue usando (60) que:

$$(71) \quad \int_D \frac{|g'|^p (1+|g|^2)^{2-2q}}{\prod_{i=1}^5 |g-a_i|^{p\alpha}} dx dy = \infty$$

Probemos usando el razonamiento de Xavier en [43] que la integral anterior es finita, y esta contradicción acabará nuestro Teorema.

Sea  $D_j = \{z \in D \mid |g(z) - a_j| < \ell\}$ , con  $\ell \in ]0, 1[$  suficientemente pequeño para que  $D_j$ ,  $j=1, \dots, 5$  sean disjuntos, y  $D' = D - \bigcup_{j=1}^5 D_j$ .

Escribamos por H el integrando de (71). En cada  $D_j$  tenemos:

$$H \leq C_1 |g'|^p |g-a_j|^{-\alpha p} \leq C_1 2^p |g'|^p \left( |g-a_j|^\alpha + |g-a_j|^{2-\alpha} \right)^{-p}$$

para cierta constante  $C_1$ , y por el Lema III.1.2., H es integrable en  $D_j$  para cada j.

En  $D'$ , tenemos la estimación:

$$H \leq C_2 |g'|^p |g-a_1|^{4-4q-5p\alpha}$$

Si existe  $\alpha = 1 - \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $p \in ]0, 1[$  y  $C_3$  constante tal que:

$$(72) \quad |g-a_1|^{4-4q-5p\alpha} \leq C_3 \left( |g-a_1|^\alpha + |g-a_1|^{2-\alpha} \right)^{-p} \text{ en } D'$$

otra vez usando el Lema III.1.2. H sería integrable en  $D'$  y habríamos acabado.

Obsevemos que (72) puede escribirse como:

$$(72') \quad |g-a_1|^{(4-4q)/p - 4\alpha} + |g-a_1|^{(4-4q)/p - 6\alpha+2} \leq C_3^{1/p}$$

Como  $|g-a_1| > \ell$  en  $D'$ , basta conseguir que los dos exponentes sean  $\leq 0$ , esto es:

$$(73) \quad 4+2p \leq 6\alpha p + 4q$$

Eligiendo  $\alpha$  y  $p$  suficientemente próximos a 1, la desigualdad (73) es cierta y el Teorema está probado.

Q.E.D.

En la demostración de Xavier,  $q=0$  y no se puede elegir  $\alpha$  y  $p$  verificando (73). Si la aplicación de Gauss omite  $k$  puntos,  $k=3, 4, 5$ , el método anterior concluye que  $q \leq \frac{6-k}{4}$ .

## CAPITULO IV

### "NUEVOS EJEMPLOS DE SUPERFICIES MINIMALES EN $\mathbb{R}^3$ "

En este Capítulo se presenta una manera fácil de generar superficies minimales de género cero y con curvatura total finita, que son interesantes desde el punto de vista de que tienen todos los finales embebidos.

Suponen pues una nueva aportación en la línea de ofrecer más datos acerca de la veracidad ó no de la conjetura que presenta a la Catenoide como la única superficie minimal embebida de género cero.

Además, en esta familia de superficies minimales que describimos se pueden encontrar algunas con todos los finales planos a distintas alturas en  $\mathbb{R}^3$ , junto con dos finales tipo Catenoide, con lo que el posible conjunto de autointersecciones de nuestra superficie es acotado.

En nuestra familia habrá superficies no embebidas en las condiciones que acabamos de exponer, por lo que el tener el conjunto de autointersecciones acotado no será condición suficiente para garantizar un embebimiento.

Una condición suficiente podría ser, a modo de conjetura, que tuviera el conjunto de autointersecciones acotado y los finales con orientaciones compatibles, esto es, cada dos consecutivos en  $\mathbb{R}^3$  apuntando en sentido opuesto.

## IV.1. Preliminares

Sea  $(M, ds^2)$  una superficie Riemanniana y  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión isométrica minimal.

Escribiremos por  $g$  y  $w$  la función meromorfa y 1-forma holomorfa sobre  $M$  asociadas a la representación de Weierstrass de  $M$  (consultar Teorema 0.1.6.).

Es conocido (ver Teorema 0.1.10.), que el hecho de que  $M$  tenga curvatura total finita equivale a que  $M$  sea conformemente equivalente a una superficie de Riemann  $\Sigma$  menos un número finito de puntos  $\{P_1, \dots, P_k\}$ , y que la aplicación de Gauss  $g: \Sigma \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  extienda a  $\Sigma$  de manera holomorfa.

Salvo una rotación de  $\mathbb{R}^3$  supondremos que  $g(P_i) \neq \infty$ , para cada  $i$ ,  $i=1, \dots, k$ , y bajo estas condiciones, llamaremos:  $n(g, P_i)$ ,  $O(w, P_i)$  al  $n^\circ$  de ramificación de  $g$  en  $P_i$  y el orden del polo de  $w$  en  $P_i$  respectivamente.

Por definición,  $\text{Género}(M) = \text{Género}(\Sigma)$  y nos referiremos a cada punto  $P_i$  como un final de  $M$ . Recordemos el Teorema 0.1.11., y formulemos la siguiente definición.

**DEFINICION IV.1.1.** *Un final  $P_i$  de  $M$  se dice embebido si existe  $D(P_i) \subset \Sigma$  disco conforme centrado en  $P_i$  que no contiene ninguno de los  $P_j$ ,  $j \neq i$ , y de forma que la inmersión  $x$  restringida a  $\left[ D(P_i) - \{P_i\} \right] \subset M$  es un embebimiento.*

*El final  $P_i$  se dice plano si  $n(g, P_i) \geq O(w, P_i) - 1$ .*

Para la demostración de la siguiente Proposición, se puede consultar [23]. Ver también el Teorema 0.1.11..

**PROPOSICION IV.1.2.** *El final  $P_i$  de  $M$  es embebido  $\Leftrightarrow I_i = 1$ .*

*Además, si eso ocurre  $\forall i=1, \dots, k$ , entonces:*

$$\text{Grado}(g) = \text{Género}(M) + k - 1$$

Observese que si  $\text{Género}(M) = 0$  y todos los  $P_i$  son embebidos,

entonces  $\text{grado}(g)=k-1$ , y para  $k=1,2$  se obtienen respectivamente el plano y la Catenoide, ambos ejemplos embebidos en  $\mathbb{R}^3$ .

DEFINICION IV.1.3. *La superficie minimal  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ , con curvatura total finita, se dice pseudo-embebida cuando:*

$$(i) \quad I_i=1, \quad i=1, \dots, k$$

$$(ii) \quad g(P_i) \in \{a, -a\}, \quad i=1, \dots, k, \quad \text{para cierto } a \in \mathbb{S}^2$$

$$(iii) \quad |\#g^{-1}(a) \cap \{P_1, \dots, P_k\} - \#g^{-1}(-a) \cap \{P_1, \dots, P_k\}| \leq 1$$

donde en (iii)  $\#$  indica cardinal, y siempre en esta expresi3n se cuenta cada punto con la correspondiente multiplicidad.

W.H.Meeks III y Jorge (ver [23]) han probado que si  $M$  est3 embebida, entonces  $M$  es pseudo-embebida seg3n la Defini3n IV.1.3. (de hecho esto fue la motivaci3n para tal definici3n), aunque lo rec3proco no es cierto (consultar [23] y [37]).

Nosotros precisaremos la siguiente definici3n:

DEFINICION IV.1.4. *En el mismo ambiente anterior:*

*$M$  se dice de tipo Catenoide si y s3lo si:*

$$(i) \quad \text{G3nero}(M)=0$$

(ii)  *$M$  tiene todos sus finales  $\{P_1, \dots, P_k\}$  embebidos y existe  $a \in \mathbb{S}^2$  tal que  $g(\{P_1, \dots, P_k\}) \subset \{a, -a\}$ .*

(iii)  *$M$  tiene s3lo dos finales no planos, apuntando cada uno de ellos en sentido opuesto, esto es, hacia  $a$  y  $-a$ .*

Es obvio que la Catenoide responde a la anterior definici3n, y observese que en este caso toda la superficie est3 embebida en  $\mathbb{R}^3$ .

## IV.2. Construcci3n de nuevos ejemplos de Superficies Minimales.

Nuestro objetivo ser3 el caracterizar las superficies

minimales de tipo Catenoide y construir una familia bastante amplia de este tipo de superficies que contendrá superficies minimales con algunas propiedades interesantes.

Necesitaremos el siguiente Lema.

LEMA IV 2.1. Sea  $M$  superficie minimal en  $\mathbb{R}^3$  de tipo Catenoide. Supongamos, salvo previa rotación en  $\mathbb{R}^3$ , que los finales de  $M$  apuntan hacia el polo Norte y Sur de la esfera.

Entonces, existen  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C} - \{0\}$  todos distintos tal que  $M$  admite por representación de Weierstrass:

$$g(z) = B \prod_{i=1}^k \left( \frac{z-a_i}{z-b_i} \right)^2 z \quad w = Az^{-2} \prod_{i=1}^k \left( \frac{z-b_i}{z-a_i} \right)^2 dz$$

en  $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, 0\}$ , y donde  $A, B \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Demost.: Los finales de  $M$  es claro que son polos y ceros de  $g$ . Como hay dos finales no planos apuntando en sentido opuesto, salvo una transformación conforme en  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  podemos suponer que se corresponden con  $z=0$  y  $z=\infty$ . Además ambos han de ser regulares para  $g$  ya que  $I_0 = I_\infty = 1$  y representan finales no planos.

Teniendo presente estos comentarios y la Definición IV.1.4., no es difícil probar que la representación de Weierstrass de  $M$  se puede escribir para cierto parametro conforme de  $\mathbb{C}$  (que escribiremos siempre  $z$ ) de la forma:

$$g(z) = B \frac{z \left( \prod_{i=1}^k (z-a_i)^{n_i} \prod_{i=k+1}^t (z-a_i)^{n_i} \right)}{\prod_{i=1}^s (z-b_i)^{m_i} \prod_{i=s+1}^u (z-b_i)^{m_i}}$$

$$w(z) = A \frac{\prod_{i=1}^s (z-b_i)^{2m_i-2} \prod_{i=s+1}^u (z-b_i)^{2m_i}}{z^2 \prod_{i=1}^k (z-a_i)^2} dz$$

en  $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_s, 0\}$ , con  $B, A \neq 0$  ctes,  $n_i \geq 2 \quad i=1, \dots, k,$

$m_i \geq 2, i=1, \dots, s, \sum_{i=1}^t n_i = \sum_{i=1}^u m_i$  y como  $I_\infty = 1$ :

$$(74) \quad \sum_{i=1}^u m_i = s+k$$

de donde con lo anterior se llega a que:

$$(75) \quad \sum_{i=1}^t n_i = s+k$$

Pero es claro que:

$$(76) \quad \sum_{i=1}^u m_i \geq 2s \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^t n_i \geq 2k$$

por serlos puntos correspondientes finales planos.

Luego de (74) y (75),  $s=k$  y  $\sum_{i=1}^t n_i = \sum_{i=1}^u m_i = 2k = 2s$ .

De aquí es inmediato que  $m_i = n_i = 2 \quad i=1, \dots, k=s, \quad m_i = n_i = 0 \quad i > k=s$ .

Q.E.D.

LEMA IV.2.2. Sean  $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $k \geq 1$ , todos distintos.

Llamemos  $P(z) = \prod_{i=1}^k (z - a_i)$ ,  $Q(z) = \prod_{i=1}^k (z - b_i)$ , y pongamos:

$$(77) \quad g(z) = B \frac{zP^2(z)}{Q^2(z)} \quad w(z) = A \frac{Q^2(z)}{z^2 P^2(z)} dz$$

en  $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, 0\}$ , con  $A, B \neq 0$ .

Definamos  $\phi_k$   $k=1, 2, 3$  como en el Teorema 0.1.6..

Entonces las 1-formas  $\phi_k$   $k=1, 2, 3$  no tienen periodos reales en  $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, 0\}$  si y sólo si:

$$(78) \quad \begin{cases} zQ''P + zP''Q + 2QP' - 2zQ'P' = 0 \\ P'(0) = Q'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad AB \in \mathbb{R}$$

Demost.: Es claro que  $\phi_3 = \frac{AB}{z} dz$  no tiene periodos reales si y sólo si  $AB \in \mathbb{R}$ .

Por otra parte:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left( A \frac{Q^2}{P^2 z^2} - AB^2 \frac{P^2}{Q^2} \right) dz \quad \phi_2 = \frac{i}{2} \left( A \frac{Q^2}{P^2 z^2} + AB^2 \frac{P^2}{Q^2} \right) dz$$

Por lo tanto:

$\phi_1, \phi_2$  no tienen periodos reales en  $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, 0\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{Q^2}{P^2 z^2} dz, \frac{P^2}{Q^2} dz$  son exactas sobre  $\mathbb{C} - \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, 0\}$

Esto equivale a decir:

$$\left( \frac{(z-a_i)Q}{zP} \right)' (a_i) = 0, \left( \frac{(z-b_i)P}{Q} \right)' (b_i) = 0, i=1, \dots, k, \left( \frac{P}{Q} \right)' (0) = 0$$

Observar que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{(z-a_i)Q}{zP} \right)' (a_i) = 0 &\Leftrightarrow \left( \frac{zP}{(z-a_i)Q} \right)' (a_i) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{zP}{Q} \right)'' (a_i) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (zP''Q + 2QP' - 2zQ'P') (a_i) = 0 \quad i=1, \dots, k \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\left( \frac{(z-b_i)P}{Q} \right)' (b_i) = 0 \Leftrightarrow \left( \frac{Q}{P} \right)'' (b_i) = 0 \Leftrightarrow (PQ'' - 2P'Q') (b_i) = 0 \quad i=1, \dots, k$$

En consecuencia  $zPQ'' + zQP'' + 2QP' - 2zQ'P'$  representa una función meromorfa en  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de grado  $2k-1$  que admite por ceros a los puntos  $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k\}$  ó lo que es equivalente, se tiene (78).

Recíprocamente, tomando  $A, B \in \mathbb{C} - \{0\}$  con  $AB \in \mathbb{R}$  y  $P, Q$  de grado  $k \geq 1$  verificando (78), con raíces de  $P$  y  $Q$  distintas entre si y no nulas, entonces  $\phi_k$   $k=1, 2, 3$  no tienen periodos y (77) define una superficie minimal de tipo Catenoide en  $\mathbb{R}^3$ .

Q.E.D.

Con  $k \geq 2$ , una solución de (78) nos la proporciona:

$$(79) \quad \begin{cases} P(z) = z^k - \left( \frac{k+1}{k-1} \right) \nu \\ Q(z) = z^{k+\nu} \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Observese que en este caso,  $|a_i| = \sqrt[k]{\frac{k+1}{k-1} |\nu|}$ ,  $i=1, \dots, k$  y  $|b_i| = \sqrt[k]{|\nu|}$ , y como salvo una traslación, la superficie minimal asociada a  $P$  y  $Q$  con representación de Weierstrass como en (77) tiene  $x_3(z) = AB \ln|z|$ , entonces todos los finales planos  $a_1, \dots, a_k$  por una parte y  $b_1, \dots, b_k$  por otra son asintóticos al mismo plano dado por  $x_3 = (AB/k) \ln \left| \frac{k+1}{k-1} \nu \right|$  y  $x_3 = (AB/k) \ln |\nu|$  respectivamente.

Usando el principio del máximo en el infinito (ver [33]) se



concluye que estas superficies no pueden ser embebidas, y además, el conjunto de autointersecciones es no acotado en  $\mathbb{R}^3$ .

Sin embargo, para  $k \geq 5$ , hay más soluciones de (78) distintas de las de (79). Concretamente, los polinomios siguientes:

$$(80) \quad \begin{cases} P(z) = z^k - \left(\frac{\nu}{\lambda}\right) \left(\frac{k}{2r-k}\right)^2 \left(\frac{k-r+1}{k-r-1}\right) z^r - \left(\frac{r+1}{r-1}\right) (\nu\lambda) z^{k-r} + \frac{(r+1)(k-r+1)}{(r-1)(k-r-1)} \nu^2 \\ Q(z) = z^k + \left(\frac{\nu}{\lambda}\right) \left(\frac{k}{2r-k}\right)^2 z^r + (\nu\lambda) z^{k-r} + \nu^2 \end{cases}$$

donde  $\nu, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  y  $2 \leq r \leq k-2$ ,  $r \neq k/2$ .

LEMA IV.2.3. *Supongamos  $k \geq 5$  y  $\text{mcd}(r, k-r) = 1$ .*

*Entonces para casi todo  $\lambda, \nu \in \mathbb{C} - \{0\}$ , los polinomios  $P, Q$  dados en (80) tienen raíces  $a_i, b_i$ ,  $i=1, \dots, k$  no nulas y con  $|a_i|, |b_i|$  todos distintos entre si, esto es:*

$$|a_i| \neq |a_j| \quad i \neq j, \quad |b_i| \neq |b_j| \quad i \neq j, \quad |a_i| \neq |b_j| \quad \forall i, j$$

Demost.: Fijemos  $\nu \neq 0$ .

En principio observese que  $\lambda P(z, \lambda), \lambda Q(z, \lambda) \in \mathcal{P}[z, \lambda]$  polinomios en las variables  $z, \lambda$  son irreducibles.

En consecuencia:

$$M_1 = \left\{ (z, \lambda) / z, \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \lambda P(z, \lambda) = 0 \right\}$$

$$M_2 = \left\{ (z, \lambda) / z, \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \lambda Q(z, \lambda) = 0 \right\}$$

representan dos superficies de Riemann conexas.

Escribamos por  $z_i$ ,  $i=1, 2$  la primera proyección en  $M_i$ ,  $i=1, 2$ .

Sea  $U \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  abierto.

Afirmamos que  $\forall \lambda \in U$ , salvo un conjunto de medida nula, el conjunto  $z_1^{-1}(\lambda) = \left\{ (z_1^1(\lambda), \lambda), \dots, (z_1^k(\lambda), \lambda) \right\}$  formado por  $k$  puntos de  $M_1$  (contando multiplicidades) verifica:

$$(81) \quad |z_1^i(\lambda)| \neq |z_1^j(\lambda)|, \quad i \neq j.$$

En efecto, si esto no fuese así, es fácil observar que para ciertos  $i, j$  con  $i \neq j$  se tiene que:  $|z_1^i(\lambda)| = |z_1^j(\lambda)|$ ,  $\forall \lambda \in U$ .

Luego existe  $\theta \in \mathbb{C}$ ,  $|\theta| = 1$  con  $z_1^i(\lambda) = \theta z_1^j(\lambda) \quad \forall \lambda \in U$ .

Si  $\theta = 1$ ,  $\lambda P(z, \lambda)$  tendría una raíz doble en  $z$ ,  $\forall \lambda \in U$ :  $z_1^i(\lambda)$ , y en consecuencia por prolongación analítica  $z_1^i(\lambda)$  satisface:

$\frac{\partial}{\partial z}(\lambda P(z, \lambda)) = 0$ , por lo que  $\lambda P(z, \lambda)$  y  $\frac{\partial}{\partial z}(\lambda P(z, \lambda))$  tienen un factor  $R(z, \lambda)$  en común no constante contradiciendo la irreducibilidad de  $\lambda P(z, \lambda)$ .

Luego  $\theta \neq 1$ , por lo que por prolongación analítica necesariamente  $\forall (z, \lambda) \in M_1: \theta^{-k} \lambda P(\theta z, \lambda) = 0$  ya que  $M_1$  es conexa.

Consideremos  $S(z, \lambda) = \lambda P(z, \lambda) - \theta^{-k} \lambda P(\theta z, \lambda)$ .

Es claro que  $S(z, \lambda) = 0 \forall (z, \lambda) \in M_1$ . Además,  $S(z, \lambda) \neq 0$  ya que  $\theta^r = 1$  y  $\theta^{k-r} = 1$  es imposible por ser  $\text{mcd}(r, k-r) = 1$  y  $\theta \neq 1$ .

Razonando igual a antes  $\lambda P(z, \lambda)$  y  $S(z, \lambda)$  tienen algún factor común lo que contradice la irreducibilidad de  $\lambda P(z, \lambda)$ .

En consecuencia se tiene (81).

El mismo enunciado es cierto para  $\lambda Q(z, \lambda)$  obviamente:

$$(82) \quad |z_2^i(\lambda)| \neq |z_2^j(\lambda)|, \quad i \neq j, \quad \text{para casi todo } \lambda \in U.$$

Por último, también:

$$(83) \quad |z_1^i(\lambda)| \neq |z_2^j(\lambda)|, \quad \forall i, j, \quad \text{para casi todo } \lambda \in U$$

En efecto, si esto no fuese así,  $\exists i, j: |z_1^i(\lambda)| = |z_2^j(\lambda)|$  y esto  $\forall \lambda \in U$ .

Luego  $z_1^i(\lambda) = \theta z_2^j(\lambda)$ ,  $|\theta| = 1$ ,  $\forall \lambda \in U$ .

Por un razonamiento de prolongación analítica estándar, como  $M_2$  es conexa:  $(z, \lambda) \in M_2 \Rightarrow (\theta z, \lambda) \in M_1$ , y de aquí que por la irreducibilidad de  $\lambda P(z, \lambda)$  y  $\lambda Q(z, \lambda)$  se tenga que:

$\theta^{-k} \lambda P(\theta z, \lambda) = \lambda Q(z, \lambda)$ , lo que nos lleva a un absurdo.

Uniendo (81), (82) y (83) se tiene lo buscado.

Q.E.D.

**COROLARIO IV.2.4.** *Existen superficies minimales de tipo Catenoide en  $\mathbb{R}^3$  con conjunto de autointersecciones compacto.*

Demost.: Si  $\nu, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $P, Q$  son como en el Lema IV.2.3. y  $A, B \in \mathbb{C} - \{0\}$  con  $AB \in \mathbb{R}$ , aplicando el Lema IV.2.2. se construye una superficie minimal de tipo Catenoide que salvo previa traslación, tiene los finales planos asintóticos a los planos  $x_3 = ABLn|b_i|$ ,  $x_3 = ABLn|a_i|$ ,  $i=1, \dots, k$ , todos paralelos y distintos. Como los dos finales no acotados apuntan en sentido contrario, es inmediato concluir el Lema.

Q.E.D.

## BIBLIOGRAFIA

- [00] U. ABRESH.: *"Constant Mean Curvature Tori"*.  
J. reine u. angew. Math. **374**, 116-124 (1987)
- [01] ARONSAJN.: *"A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order"*.  
J. Math. Pures et Appl., **36**, (1957)
- [02] T. AUBIN.: *"Nonlinear Analysis on Manifolds and Monge-Ampère equations"*.  
Springer-Verlag, (1982)
- [03] J.L. BARBOSA y A.G. COLARES.: *"Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$ "*.  
Springer Verlag, (1986)
- [04] J.L. BARBOSA and M.P. DO CARMO.: *"Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature"*.  
Math. Z. Springer Verlag, **185**, 121-132, (1985)
- [05] R.B. BURCKEL.: *"An Introduction to Classical Complex Analysis"*.  
Vol. 1, Birkhauser Verlag, (1979)
- [06] M.P. DO CARMO and C.K. PENK.: *"Stable Complete Minimal Surfaces are Planes"*.  
Bulletin of A.M.S., **1**, (1979)

[07] S.Y. CHENG and J.TYSK.: "An index characterization of the Catenoid and index bounds for minimal surfaces in  $\mathbb{R}^4$ ".

Pacific J. Math., 134, 251-273 (1988)

[08] J.CHOE.: "Index, Vision and Stability of Complete Minimal Surfaces".

Preprint

[09] H.M. FARKAS, I. KRA.: "Riemann Surfaces"

Springer Verlag, (1979)

[10] D.F. COLBRIE.: "On complete minimal surfaces with finite Morse Index in three Manifolds".

Invent. Math. 82, 121-132, (1985)

[11] D.F. COLBRIE and R. SCHOEN.: "The structure of complete stable minimal surfaces in 3-Manifolds of non-negative scalar curvature".

Comm. of Pure and Appl. Math., Vol XXXIII, 199-211, (1980)

[12] H. FUJIMOTO.: "On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces".

J, Math. Soc. Japan, 40, 2, (1988)

[13] GILBARD-TRUDINGER.: "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order".

Springer Verlag (1977)

[14] R. GULLIVER.: "Index and total curvature of complete minimal surfaces".

Geometric Measure theory and calculus of variations, Proc. Summert Inst., Arcata/Calif. 1984.

Proc. Symp. Pure Math., 44, 207-211.

[15] R. GULLIVER and H.B. LAWSON.: "*The structure of stable hypersurfaces near a singularity*".

Geometric Measure theory and calculus of variations,  
Proc. Summert Inst., Arcata/Calif. 1984.

Proc. Symp. Pure Math., **44**, 213-237, (1986)

[16] W.K. HAYMAN "*Meromorphic functions*".

Oxford Mathematical Monographs, (1964)

[17] J.HERSCH "*Quatre Propietes isoperimetriques de membranes spheriques homogenes*".

C.R. Acad. Sci. Paris, **270**, 1645-1648, (1970)

[18] E.W. HOBSON.: "*Spherical and ellipsoidal harmonics*".

Chelsea , New York, (1955)

[19] D.HOFFMAN and W.H. MEEKS III.: "*The asymptotic behavoir of a properly embedded minimal surfaces of finite total curvature*".

Preprint

[20] D. HOFFMAN and W.H. MEEKS III.: "*Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*".

Bull. (new series) of the A.M.S., **12**, (1985)

[21] D. HOFFMAN and W.H. MEEKS III.: "*A complete embedded minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  with genus one and thre ends*".

J. Diff. Geom., **21**, 109-127, (1985)

[22] D. HOFFMAN, R. OSSERMAN and R. SCHOEN.: "*On the Gauss Map of complete surfaces of constant mean curvature in  $\mathbb{R}^3$  an  $\mathbb{R}^4$* ".

Comment. Math. Helvetici, **57**, 519-531, (1982)

[23] L.P. JORGE and W.H. MEEKS III.: "*The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian Curvature*".

Topology, **22**, 203-221, (1983)

BIBLIOGRAFIA

- [24] L.P. JORGE and F. XAVIER.: "A complete minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  between two parallel planes".  
Ann. of Math., **112**, 203-206 (1980)
- [25] B. LAWSON.: "Lectures on Minimal Submanifolds".  
Monografias de Matematica, IMPA, Rio de Janeiro,  
(1973)
- [26] B. LAWSON.: "Complete minimal surfaces in  $S^3$ ".  
Ann. of Math., **92**, 335-374, (1970)
- [27] P. LI and S.T. YAU.: "A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and first eigenvalue of compact surfaces".  
Invent. Math. **69**, 269-291, (1982)
- [28] F.J. LOPEZ.: "A nonorientable complete minimal surface in  $\mathbb{R}^3$  between two parallel planes".  
Proc. of A.M.S., **103**, 3, 913-917 (1988)
- [29] F.J. LOPEZ and A. ROS.: "Complete minimal surfaces with Index one and stable constant mean curvature surfaces".  
Comment. Math. Helvetici, **64**, 34-43, (1989)
- [30] A. MARKUSHEVICH.: "Teoria de las funciones analíticas".  
Tomos I,II, Mir, (1970)
- [31] W.H. MEEKS III.: "The classification of complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with total curvature greather than  $-8\pi$ ".  
Duke Math. J., **48**, 523-535, (1981)
- [32] W.H. MEEKS III and H. ROSENBERG.: "The global theory of doubly-periodic minimal surfaces".  
Preprint

[33] W.H. MEEKS III and H. ROSENBERG.: *"The Maximum Principle at infinity for minimal surfaces in flat three Manifolds"*.

Preprint

[34] W.H. MEEKS III and YI FANG.: *"A note on the Geometry of minimal annuli in  $\mathbb{R}^3$ "*.

Preprint

[35] R. OSSERMAN.: *"A survey of minimal surfaces"*.

Van Nostrand Reinhold Company, (1969)

[36] B. PALMER.: Ph. D. Thesis, Standord University, (1986)

[37] CHIA-KUEI PENG.: *"Some new examples of minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and its applications"*.

MSRI, 07510-85.

[38] A.V. POGORELOV.: *"On the stability of minimal surfaces"*.

Soviet Math. Dokl., **24**, 274-276, (1981)

[39] H. ROSENBERG and E. TOUBIANA.: *"A cylindrical type complete minimal surface in a slab of  $\mathbb{R}^3$ "*.

Bull. Sc. Math. III, 241-245, (1987)

[40] A.M. DA SILVEIRA.: *"Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature"*.

Math. Ann. Band **277**, 629-638 (1987)

[41] G. SPRINGER.: *"Introduction to Riemann Surfaces"*.

Addison-Wesley Publishing Company, (1957)

[42] J. TYSK.: *"Eigenvalue estimates with applications to minimal surfaces"*.

Pacific J. of Math., **128**, 361-366 (1987)

BIBLIOGRAFIA

[43] H.C. WENTE.: "A counterexample to a conjecture of H. Hopf".

Pacific J. of Math., 121, (1986)

[44] F. XAVIER.: "The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere".

Ann. of Math., 113, 211-214, (1981)

[45] LIANG XIAO.: "Some results on pseudo-embedded minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ".

Acta Math. Sin. New Ser. 3, 116-124, (1987)

[46] XIAOKANG MO and R. OSSERMAN.: "On the Gauss map and total curvature of complete minimal surfaces and an extension of Fujimoto theorem".

Preprint

[47] S.T.YAU.: "Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry".

Indiana Univ. Math. J. 25, 659-670, (1976)