

TESIS DOCTORAL

Rou

PROCESOS ESTACIONARIOS EN
ESPACIOS DE HILBERT INVOLUTIVOS

CARMELO RODRIGUEZ TORREBLANCA



Biblioteca Universitaria de Granada



01534045

P.N.

Proou. T. 13/98

T
14
60

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 14 JUN. 1993
SALIDA NUM. 501

Universidad de Granada

Facultad de Ciencias Experimentales
de Almeria

PROCESOS ESTACIONARIOS
EN
ESPACIOS DE HILBERT INVOLUTIVOS

Memoria presentada por el licenciado en Ciencias
Matemáticas Carmelo Rodríguez Torreblanca para optar
al grado de Doctor.

Almería, 16 de Marzo de 1993



Director de la memoria:



Prof. Dr. Alfredo Martínez Almécija

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
GRANADA
Nº Documento 619664369
Nº Copia 121213811

UNIVERSIDAD DE GRANADA
26 MAR. 1993
COMISION DE DOCTORADO

Quiero manifestar mi agradecimiento al profesor D. Alfredo Martínez Amécija, no sólo por su apoyo intelectual en la dirección de este trabajo, sin el cuál, por supuesto, no hubiera sido posible, sino también, y ante todo, por su apoyo humano como amigo, ayudándome y orientándome siempre que lo he necesitado.

A Irene, por el tiempo que le ha robado este
trabajo ...

INDICE

INTRODUCCION	1
--------------	---

Capítulo 0 ELEMENTOS ALEATORIOS EN ESPACIOS DE HILBERT

0.1. Algunos conceptos sobre espacios de Hilbert	
A. Conceptos básicos: propiedades derivadas del producto interior	5
B. Operadores entre espacios de Hilbert	13
0.2. Vectores aleatorios Hilbert-valuados	
A. Definiciones de v.a. Hilbert-valuados	20
B. Convergencias	23
C. El espacio lineal $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\Omega, H)$	24
D. Integración	26
E. El espacio de Hilbert $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_2(\Omega, H)$	30

Capítulo I FUNCIONES ESTACIONARIAS HILBERT-VALUADAS

1.1. Funciones aleatorias estacionarias complejo(o real)-valuadas	
A. Funciones aleatorias: generalidades	36
B. Propiedades de segundo orden	40
C. Funciones aleatorias estacionarias	48
1.2. Funciones aleatorias Hilbert-valuadas	
A. Función covarianza	64
B. Sucesiones estacionarias Hilbert-valuadas	68
1.3. Procesos estacionarios Hilbert-valuados	
A. Sucesiones estacionarias asociadas	81
B. Fórmula de aproximación lineal media cuadrática	87

Capítulo II
PROCESOS ESTACIONARIOS
ADJUNTOS

2.1. Introducción	97
2.2. Propiedades analíticas	
A. El espacio de Hilbert involutivo $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_2(\Omega, H)$	98
B. Operadores de Hilbert-Schmidt	100
2.3. Propiedades de segundo orden	109
2.4. Descomposición de Wald. Fórmula de aproximación lineal	112
BIBLIOGRAFIA	116

INTRODUCCION

En este trabajo estudiaremos los procesos estacionarios (en tiempo continuo) con valores en un espacio de Hilbert involutivo. Nuestro objetivo es llegar a una fórmula en media cuadrática para resolver el problema de la aproximación lineal de las funciones aleatorias estacionarias débilmente continuas.

En pos de nuestro propósito, introducimos una clase de operadores de Hilbert-Schmidt, que nos permitirán caracterizar la descomposición de Wald, en la parte puramente no determinística y la parte puramente determinística de una sucesión estacionaria. Entonces, asociamos, con herramientas proporcionadas por la teoría espectral, a todo proceso estacionario débilmente continuo una sucesión estacionaria, cuya aproximación lineal en media cuadrática da pié a la predicción del proceso.

El capítulo 0 está dedicado al estudio de los elementos aleatorios en espacios de Hilbert. El objetivo fundamental es describir con detalle el espacio de las variables aleatorias de segundo orden valuadas sobre un espacio de Hilbert H involutivo, que a su vez es un espacio de Hilbert, con producto interior dado por

$$\langle X, Y \rangle = \int_{\Omega} \langle X(\omega), Y(\omega) \rangle dP(\omega) \quad \forall X, Y \in \mathbb{H}_2$$

A cada v.a. de segundo orden se le asocia un operador de Hilbert-Schmidt de H en \mathbb{C}_2 , siendo $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_2(\Omega, \mathbb{C})$ el espacio de v.a. complejo-valuadas definidas sobre Ω , con norma cuadrado-integrable. \mathbb{C}_2 es un también un espacio de Hilbert con producto interno definido por

$$\langle U, V \rangle = E[U\bar{V}] \quad U, V \in \mathbb{C}_2$$

e involutivo la involución definida por $U \mapsto \bar{U}$ (v.a. compleja conjugada de U).

Como puede apreciarse, la estructura básica que soporta nuestro trabajo la constituyen los espacios de Hilbert, por lo que hemos creído conveniente

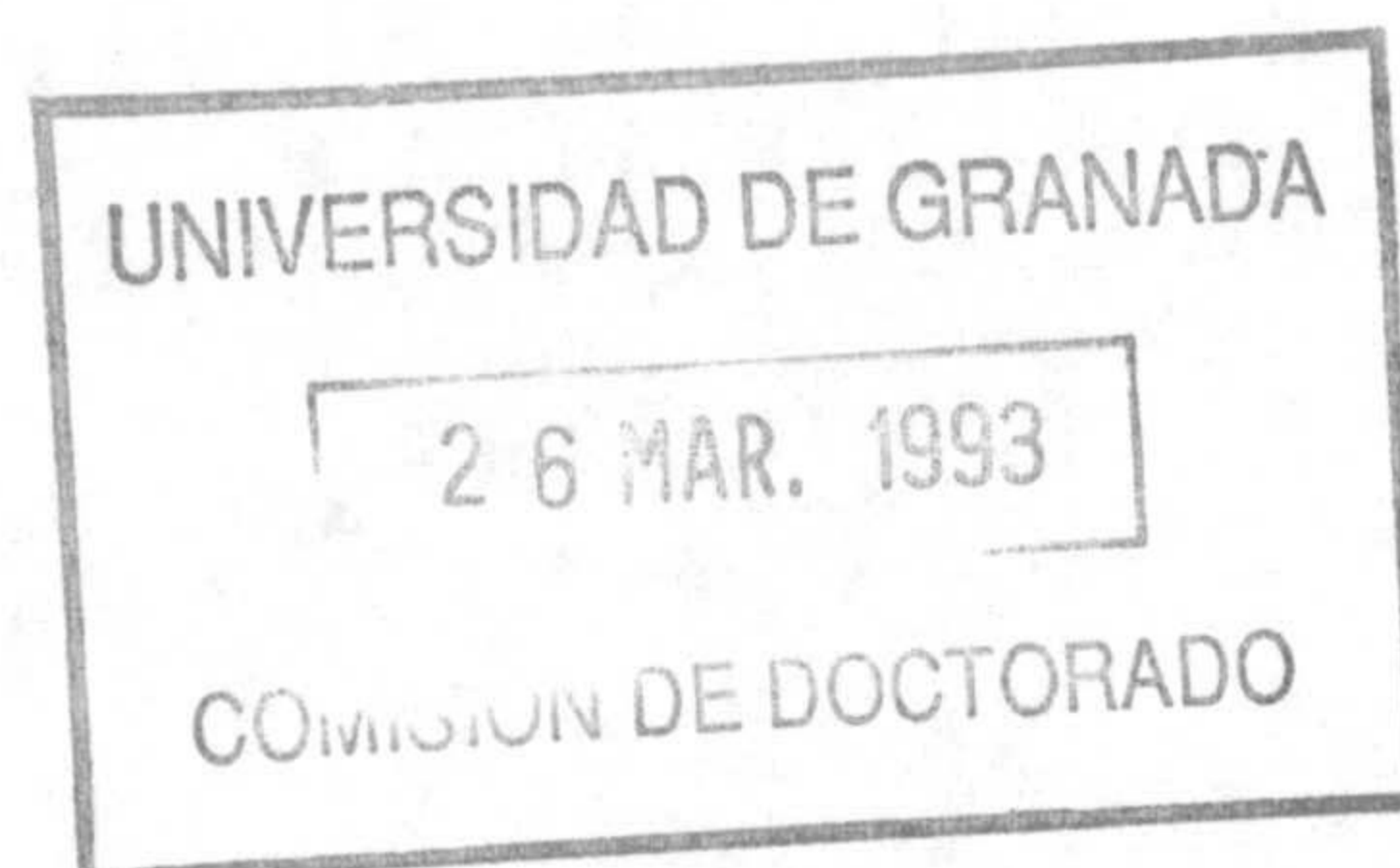
introducir previamente una sección con sus propiedades elementales, y algunos resultados sobre la teoría de operadores en espacios de Hilbert, que nos han servido de herramientas fundamentales para obtener los resultados netamente probabilísticos, con el fin de condensar éstos lo más posible para la mayor claridad de la filosofía seguida

En la primera sección del capítulo I, describimos el desarrollo que hace Doob de nuestro problema bajo estudio para los procesos estacionarios complejo-valorados, que nos sirve de antecedente probabilístico de nuestro trabajo. Posteriormente pasamos a estudiar, en la segunda sección del capítulo las funciones aleatorias Hilbert-valoradas, estudiando con detalle las sucesiones estacionarias, las cuales nos permitirán resolver el problema de la aproximación lineal para procesos estacionarios en la sección siguiente. El análisis de la función covarianza de una función aleatoria de segundo orden, motivará la generalización del concepto para sucesiones de operadores de Hilbert-Schmidt, cuya descomposición ortogonal y análisis espectral repercutirá a su vez, en las funciones aleatorias asociadas.

En la última parte de este capítulo I, vamos a buscar la descomposición de los procesos estocásticos estacionarios (en sentido amplio), débilmente continuos y con valores en el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt (y como consecuencia de los procesos Hilbert-valorados), en la parte determinística y puramente no determinística, por un método análogo al utilizado en sucesiones estacionarias, y nuestra principal preocupación será establecer, para las funciones estacionarias de segundo orden, débilmente continuas y con valores en el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt, una fórmula de aproximación lineal en media cuadrática de la forma

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-s) d\varepsilon(t)$$

donde ε es una aplicación tal que, a cada intervalo acotado e de \mathbb{R} , le hace corresponder un operador lineal de H en K , producto de un operador parcialmente isométrico por un escalar, y que satisfaga las propiedades de aditividad y



ortogonalidad:

$$\begin{aligned}\varepsilon(eve') &= \varepsilon(e) + \varepsilon(e') \\ \varepsilon^*(e)\varepsilon(e) &= 0\end{aligned}$$

para intervalos e, e' disjuntos. Todos los operadores $\varepsilon(e)$ tienen el mismo dominio inicial $H_0 \subseteq H$, y $c(t)$ es una función con valores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(H, H_0)$ de operadores lineales de Hilbert-Schmidt de H en H_0 . Una vez obtenida la recta de mínimos cuadrados, el siguiente objetivo es la utilización de la fórmula anterior en la predicción lineal.

Paralelamente, en el capítulo II, estudiaremos el proceso $\{X_t^*\}$ adjunto asociado al proceso $\{X_t\}$ por la involución definida en el espacio de Hilbert. Se establece una correspondencia entre los operadores de Hilbert-Schmidt asociados a los vectores aleatorios X_t , y su adjuntos por la involución, X_t^* , para caracterizar con dicha correspondencia una relación entre las funciones covarianza del proceso y las de su adjunto. Esta relación permite establecer, además de otros resultados interesantes, que toda representación unitaria asociada a $\{X_t\}$ define una representación unitaria de $\{X_t^*\}$ que conserva la correspondencia descrita arriba, y como consecuencia de ello, obtenemos la descomposición de Wald y la fórmula de aproximación lineal del proceso adjunto.

Capítulo 0

ELEMENTOS ALEATORIOS
EN
ESPACIOS DE HILBERT

0.1. ALGUNOS CONCEPTOS SOBRE ESPACIOS DE HILBERT

En esta sección resumiremos los conceptos básicos respecto a la geometría de los espacios de Hilbert, estructuras soporte sobre las que se definirán los elementos aleatorios que estudiaremos en este trabajo, y de las funciones analíticas que nos servirán de herramientas básicas para la obtención de nuestros resultados. Así, tras describir la estructura de un espacio de Hilbert, resumiremos sus propiedades esenciales, sobre todo aquellas que juegan un papel fundamental en nuestro estudio, que no son otras, que las deducidas directamente del producto interior, como por ejemplo el concepto de ortogonalidad, y posteriormente enunciaremos algunos conceptos y resultados sobre operadores en espacios de Hilbert.

A. CONCEPTOS BASICOS

0.1. Definición

Un espacio vectorial H se dice un espacio *prehilbertiano* o con *producto interno* si hay definida sobre $H \times H$, para todo par de elementos x, y de H , una función escalar-valuada, denotada por $\langle x, y \rangle$, y llamada producto interno o escalar de x e y , tal que

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in H$
2. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H, \alpha, \beta \text{ escalares}$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in H$, con $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x=0$ (elemento nulo de H).

(Notese que el producto interno es un funcional bilineal simétrico y definido estrictamente positivo).

Si H es un espacio prehilbertiano, puede definirse una *norma* a partir del producto interno por

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in H$$

Es decir, la aplicación $\|\cdot\|: H \rightarrow \mathbb{R}$ es

- estrictamente positiva ($\|x\| > 0 \quad \forall x \neq 0$)
- positivamente homogénea ($\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$)
- subaditiva ($\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$)

y por tanto, H es un espacio normado.

Como consecuencia, si definimos la *distancia* entre dos elementos x, y de H como $d(x, y) = \|x - y\|$, H es un espacio métrico con respecto a esta distancia.

Las consideraciones anteriores nos dan pie para utilizar libremente, en espacios prehilbertianos, conceptos topológicos como convergencia, continuidad, separabilidad, conjunto denso, conjunto cerrado y la clausura de un conjunto; y conceptos métricos, como la continuidad uniforme, sucesiones de Cauchy y completitud.

La topología inducida por la métrica dada por $d(x, y) = \|x - y\|$ se llama *topología fuerte* o *topología de la norma* o *de la métrica*.

0.2. Definición

Una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de un espacio prehilbertiano H *converge fuertemente* o *en la topología fuerte* a un elemento x de H si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$$

A x se le llama *límite fuerte* de $\{x_n\}$.

Necesitaremos hacer uso de la continuidad de las cuatro operaciones (producto escalar, suma, y la formación de productos internos y normas) que son intrínsecas a los espacios prehilbertianos. En este sentido, conviene tener presente que las

funciones:

$$\Phi_{\alpha}(x) = \alpha x, \quad \Phi^{+}(x,y) = x+y, \quad \Phi_y(x) = \langle x,y \rangle, \quad \text{y} \quad \Phi(x) = \|x\|$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$, $x,y \in H$, son uniformemente continuas en todos sus argumentos.

La relación más importante entre los elementos de un espacio prehilbertiano es la *ortogonalidad*: $x,y \in H$ son ortogonales, y lo notaremos $x \perp y$, si $\langle x,y \rangle = 0$. En general, una familia $\{x_j\}$ de elementos de H se dice una familia ortogonal si $x_j \perp x_i$ para todo $j \neq i$.

Otros conceptos que manejaremos posteriormente son los siguientes: Un vector x de H , se dice *normalizado*, o que es un *vector unidad*, si $\|x\| = 1$. El proceso de reemplazar un vector x no nulo por el vector unitario $x/\|x\|$ se llama *normalización*. Una familia de vectores $\{x_j\}$ se dice *ortonormal* si es una familia ortogonal y cada x_j está normalizado, o más explícitamente, si $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j$.

La siguiente proposición resume algunas de las propiedades más relevantes de los elementos de un espacio con producto interno.

0.3. Proposición

Sea H un espacio prehilbertiano.

a) Una condición necesaria y suficiente para que $x=0$ es que x sea ortogonal a todo elemento de H ($\langle x,y \rangle = 0 \quad \forall y \in H$).

b) *Ley del paralelogramo*: $\forall x,y \in H$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

c) *Teorema de Pitágoras*: Si $x \perp y$, entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

d) *Desigualdad de Bessel*: Si $\{x_j\}$ es una familia ortonormal finita de H , entonces

$$\sum_j |\langle x, x_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H$$

dándose la igualdad si y sólo si x es una combinación lineal de los x_j .

(A los escalares $\langle x, x_j \rangle$ se les llama *coeficientes de Fourier* de x con respecto a la familia ortonormal $\{x_j\}$.)

e) *Desigualdad de Schwarz*: $\forall x, y \in H$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

dándose la igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

En general, si $\{x_j\}$ es una familia finita, no vacía, de elementos de H , y si $\gamma_{jk} = \langle x_j, x_k \rangle$, entonces el determinante de la matrix (γ_{jk}) es no negativo, y es nulo si y sólo si los x_j son linealmente dependientes.

0.4. Definición

Si un espacio H con producto interior, es completo bajo la norma inducida por éste, entonces H se dice un *espacio de Hilbert*.

Otra consideración que no queremos pasar por alto es que la completitud de un espacio de Hilbert es, sin duda, una parte esencial de su estructura, pero es inesencial en el sentido que un espacio prehilbertiano siempre puede completarse (de manera única salvo isometrías) a un espacio de Hilbert, es decir, las operaciones lineales y el producto interior pueden extenderse unívocamente hasta la completación métrica ordinaria de un espacio prehilbertiano de tal forma que dicha completación llegue a ser un espacio de Hilbert.

Algunos ejemplos de espacios de Hilbert, con los que trataremos en este trabajo, son:

a) Los espacios finito dimensionales \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{donde } x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

b) El espacio l_2 de las sucesiones $\{x_n\}$ (de números reales o complejos) tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

c) El espacio $L_2(\Omega)$ de las v.a. (reales o complejo-valuadas) de segundo orden definidas sobre Ω , es decir, el espacio

$$\{X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) / E[|X|^2] < \infty\}$$

(con la usual identificación de las v.a. que difieren en un conjunto de medida cero), con producto interno

$$\langle X, Y \rangle = E[X \bar{Y}]$$

que veremos con más detalle en la sección 0.2.

0.5. Definición

Una familia de vectores $\{x_i\}$ se dice *sumable* con suma "x", y lo notaremos por $\sum_i x_i = x$, si $\forall \varepsilon > 0, \exists$ un conjunto finito J_0 de índices tal que $\|x - \sum_{j \in J} x_j\| < \varepsilon$ donde J es un conjunto finito de índices que contiene a J_0 .

Es claro que toda familia finita de vectores es sumable, y que una sucesión de vectores $\{\alpha_n\}$ del espacio de Hilbert \mathbb{R} o \mathbb{C} , es sumable con suma α si y sólo si la serie numérica $\sum \alpha_n$ es absolutamente convergente al valor α .

El concepto de familia sumable hace posible una generalización de la desigualdad de Bessel "borrando" del enunciado anteriormente dado la palabra "finita", ya que es válida para cualquier familia ortonormal. Como consecuencia, "si $\{x_n\}$ es una sucesión ortonormal, entonces $\{\langle x_n, x \rangle\} \rightarrow 0 \forall x \in H$, esto es, los coeficientes de Fourier de x tienden a cero".

0.6. Propiedades de la suma

a) Si $\sum_i x_i = x$, entonces $\sum_i \alpha x_i = \alpha x \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

b) Si $\{x_i\}$ y $\{z_i\}$ son dos familias indexadas sobre el mismo conjunto de índices, tal que $\sum_i x_i = x$, y $\sum_i z_i = z$, entonces, $\sum_i (x_i + z_i) = x + z$.

c) Si $\sum_i x_i = x$, entonces:

$$\sum_i \langle x_i, y \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{y} \quad \sum_i \langle y, x_i \rangle = \langle y, x \rangle$$

para todo vector y .

d) Una familia $\{x_i\}$ es sumable si y sólo si para cada número real positivo ε existe un conjunto finito J_0 de índices tal que $\|\sum_{j \in J} x_j\| < \varepsilon$, donde J es un conjunto finito de índices disjunto de J_0 . En cuyo caso, el conjunto de índices j para los que $x_j \neq 0$ es numerable.

e) Una familia ortogonal $\{x_i\}$ es sumable si y sólo si la familia de números positivos $\{\|x_i\|^2\}$ es sumable ($\sum_i \|x_i\|^2 < \infty$). Si $x = \sum_i x_i$, entonces $\|x\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2$.
(Generalización del teorema de Pitágoras).

0.7. Definición

Una *variedad lineal* es un subconjunto no vacío M de H tal que si $x, y \in M$, entonces $\alpha x + \beta y \in M \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Un *subespacio* es una variedad lineal cerrada.

Es obvio que todo subespacio de un espacio de Hilbert es también un espacio de Hilbert, y que la intersección de cualquier familia de subespacios es un subespacio. Por tanto, tiene sentido definir el subespacio *generado* por un arbitrario subconjunto M de H , denotado por " $\vee M$ ", como la intersección de todos los subespacios que contienen a M , o equivalentemente, como el mínimo subespacio que contiene a M . En este sentido, el siguiente resultado es importante:

0.8. Proposición

Si M es un subconjunto no vacío de H , y N es el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de elementos de M , entonces N es una variedad lineal, y $\vee M = \overline{N}$ (clausura de N).

(En general, si $\{M_j\}$ es una familia de subconjuntos, $\bigcup_j M_j$ denotará el subespacio $\vee(\bigcup_j M_j)$).

0.9. Definición

Un vector x es *ortogonal* a un subconjunto M de H , y lo notaremos $x \perp M$, si $x \perp y \forall y \in M$.

El *complemento ortogonal de M* , que notaremos M^\perp , es el conjunto de vectores x tal que $x \perp M$.

Si M, N son subconjuntos tales que $M \subset N$, el complemento ortogonal de M en N es $N-M = N \cap M^\perp$.

M y N son ortogonales, $M \perp N$, si $x \perp N \forall x \in M$.

Vamos a resumir en la siguiente proposición, los resultados más interesantes sobre ortogonalidad y subespacios.

0.10. Proposición

a) Si M es un subespacio, si $x \in H$, y si $\delta = \text{Inf}\{\|y-x\|: y \in M\}$, entonces existe un vector $y_0 \in M$ tal que $\|y_0-x\|=\delta$.

b) Si M y N son subespacios tales que $M \subset N$ ($M \neq N$), entonces existe un vector no nulo $z \in N$ tal que $z \perp M$.

c) Si M es un subconjunto H , entonces M^\perp también lo es, y $M \cap M^\perp \subseteq \{0\}$.

d) Si M es un subconjunto de H , entonces $M \subseteq M^{\perp\perp}$.

e) Si M y N son subconjuntos de H tales que $M \subseteq N$, entonces $N^\perp \subseteq M^\perp$.

f) Si M es un subconjunto de H , entonces $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$.

g) Si M es un subespacio, entonces $M = M^{\perp\perp}$.

h) Si $\{M_j\}$ es una familia de subespacios, entonces:

$$(\bigvee_j M_j)^\perp = \bigcap_j M_j^\perp \quad \text{y} \quad (\bigcap_j M_j)^\perp = \bigvee_j M_j^\perp$$

Dados dos subespacios M y N de H , $M+N = \{x+y: x \in M, y \in N\}$ es una variedad lineal (no necesariamente subespacio), y es fácil ver que $M+N \subseteq M \vee N$. El siguiente resultado proporciona propiedades interesantes en las que interviene el concepto de suma de subespacios.

0.11. Proposición

a) Si M y N son subespacios ortogonales, entonces $M+N$ es cerrado.

b) Si M es un subespacio, entonces $M+M^\perp=H$.

c) Si $\{M_j\}$ es una familia de subespacios, y $M = \sum_j M_j$, entonces $\bigvee_j M_j = \overline{M}$.

d) Si $\{M_j\}$ es una familia ortogonal de subespacios, entonces $\bigvee_j M_j = \sum_j M_j$; y

la representación de un elemento de $\sum_j M_j$ en la forma $\sum_j x_j$, con $x_j \in M_j$, es única.

0.12. Definición

Una base de un subespacio M es una familia ortonormal maximal de vectores de M .

0.13. Teorema

Sea $\{x_j\}$ una familia ortonormal de vectores de un subespacio M . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\{x_j\}$ es una base.
2. Si $x \in M$ y $x \perp \{x_j\}$, entonces $x=0$.
3. $\bigvee_j \{x_j\} = M$.

4 Si $x \in M$, entonces $x = \sum_j \langle x, x_j \rangle x_j$ (*desarrollo de Fourier*).

5. Si $x \in M$, entonces $\|x\|^2 = \sum_j |\langle x, x_j \rangle|^2$.

0.14. Teorema

Dos bases cualesquiera de un subespacio tienen el mismo, cardinal, al que se llama *dimensión* del subespacio, $\dim(H)$.

Si $\dim(H)$ es finito, el espacio se dice finito-dimensional.

Si $\dim(H) = \aleph_0$ (cardinal de \mathbb{N}), el espacio se dice numerable dimensional.

0.15. Teorema

Si H es un espacio de Hilbert H separable (es decir, si contiene un subconjunto denso numerable), entonces es numerable dimensional.

B. OPERADORES ENTRE ESPACIOS DE HILBERT

0.16. Definiciones

Una *transformación lineal* de un espacio de Hilbert H_1 en un espacio de Hilbert H_2 es una aplicación $A: H_1 \rightarrow H_2$ tal que

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \quad \forall x, y \in H_1, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

La imagen de un vector x mediante una aplicación A , la denotaremos $A(x)$ o Ax .

Un *isomorfismo* de un espacio de Hilbert H_1 sobre un espacio de Hilbert H_2 es una transformación lineal uno-a-uno U de H_1 en H_2 tal que

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in H_1$$

Una *isometría* de un espacio de Hilbert H_1 en un espacio de Hilbert H_2 es una transformación lineal U de H_1 en H_2 tal que

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x \in H_1$$

Observese que una isometría hace honor a su nombre, esto es, en virtud de la ecuación $\|Ux-Uy\| = \|U(x-y)\| = \|x-y\|$, una isometría no sólo preserva normas (distancias desde 0), sino todas las distancias (métrica). También puede observarse que todo isomorfismo es una isometría. Puesto que una isometría de H_1 a H_2 , no necesariamente tiene por qué ser una aplicación de H_1 sobre "todo" H_2 , es fácil construir isometrias que no son isomorfismos. No obstante, una transformación lineal entre dos espacios de Hilbert es un isomorfismo si y sólo si es una isometría sobreyectiva. Interesa destacar el siguiente resultado: "Dos espacios de Hilbert son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión". En particular, cualquier espacio de Hilbert separable es isomorfo a un subespacio cerrado del espacio $\mathbb{C}[0,1]$.

Por tanto, cualquier propiedad específica que no posean los espacios de Hilbert generales, puede caracterizarse simplemente por "conteo". Por ejemplo, una condición necesaria y suficiente para que H sea separable es que su dimensión sea numerable. De hecho, puesto que la distancia entre dos términos de una familia ortonormal es $\sqrt{2}$, se sigue que si H es separable, entonces ninguna familia ortonormal puede ser no numerable. Si, por otra parte, existe una familia $\{x_i\}$ ortonormal, numerable y maximal, cuyas partes real e imaginaria son ambas racionales, entonces es un conjunto denso numerable de H .

0.17. Definición

Una transformación lineal A de un espacio de Hilbert H_1 a otro espacio de Hilbert H_2 es *acotada* si existe un número real positivo α tal que $\|Ax\| \leq \alpha\|x\| \quad \forall x \in H_1$.

Si A acotada, la *norma* de A es $\|A\| = \text{Inf}\{\alpha: \|Ax\| \leq \alpha\|x\| \forall x \in H_1\}$.

Las transformaciones lineales entre dos espacios de Hilbert se dicen también operadores lineales, o simplemente operadores, aunque este término suele reservarse a las transformaciones lineales acotadas de un espacio de Hilbert en sí mismo.

Las transformaciones lineales definidas en H y con valores en el cuerpo de escalares (\mathbb{R} o \mathbb{C}) se llaman *funcionales*.

0.18. Teorema

a) Una transformación lineal $A:H_1 \rightarrow H_2$ es acotada si y sólo si aplica la *esfera unidad* (es decir, el conjunto $\{x:\|x\|=1\}$) sobre un subconjunto acotado de H_2 .

Si $\alpha = \text{Sup}\{\|Ax\|: \|x\|=1\}$, entonces $\|A\|=\alpha$.

b) Una transformación lineal entre dos espacios de Hilbert es acotada si y sólo si es continua.

c) El espacio de las transformaciones lineales acotadas (y por tanto, continuas) de H_1 en H_2 , $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ es un espacio de Hilbert.

d) *Representación de Riesz para funcionales lineales acotados*: "Un funcional lineal ψ definido sobre H es acotado si y sólo si existe un vector y_0 tal que

$$\psi(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad \forall x \in H,$$

en cuyo caso, y_0 es único.

Como consecuencia del último resultado, puede establecerse una isometría biyectiva (no isomorfismo, pues es sólo semilineal) entre un espacio de Hilbert H y el espacio de sus funcionales acotados $\mathcal{B}(H, \mathbb{K})$, (donde $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ o \mathbb{R}), usualmente representado por $x \mapsto x'$, donde

$$x'(y) = \langle y, x \rangle \quad \forall y \in H$$

El espacio $\mathcal{B}(H, \mathbb{K})$ suele notarse por H' , y se le llama espacio *dual* o *conjugado* de H .

Es inmediato ver, que H'' si es isomorfo a H , esto es, H es reflexivo. (Esto no ocurre para un espacio de Banach X en general, donde X puede ser un subespacio propio de X'').

Un resultado básico que relaciona la separabilidad de un espacio de Hilbert (y de Banach en general) con el concepto de funcional acotado es:

0.19. Proposición

H es un espacio de Hilbert separable si y sólo si para todo $x \in H$:

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x, y \rangle|.$$

Se necesitará también el siguiente concepto: "Un conjunto N de H se llama *total* sobre un conjunto M de H si:

$$\forall x_1, x_2 \in M: \langle x_1, y \rangle = \langle x_2, y \rangle \quad \forall y \in N \Rightarrow x_1 = x_2$$

En lo que sigue, salvo que se especifique otra cosa, un *operador* es una transformación lineal acotada de H en H . No obstante, (en cuyo caso lo aclararemos convenientemente) puede significar una transformación lineal acotada entre dos espacios de Hilbert H y K . El siguiente resultado describe el comportamiento de los operadores respecto a las operaciones usuales.

0.20. Teorema

a) Si A y B son operadores y si, para todo vector x y todo número complejo α :

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax), \quad (A+B)x = Ax+Bx, \quad \text{y} \quad (AB)x = A(Bx),$$

entonces, αA , $A+B$, y AB son operadores tal que:

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|, \quad \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \text{y} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

b) Si A es un operador, x un vector, y $\{x_j\}$ una familia sumable de vectores

tales que $\sum_i x_i = x$, entonces $\sum_i Ax_i = Ax$.

Es inmediato que el conjunto de todos los operadores definidos sobre H es un espacio vectorial complejo con respecto a la multiplicación escalar y la suma definida en el teorema anterior. Además, la multiplicación descrita es asociativa y bilineal (es decir, con respecto a estas operaciones, el conjunto de operadores sobre H es un álgebra). Esta álgebra contiene una unidad, llamada operador *identidad*, denotado por 1 , y definido por $1x=1$ para todo x . Generalizando esta notación, para cualquier número complejo, usaremos el símbolo α para denotar el operador $\alpha 1$.

Como en toda álgebra, usaremos el símbolo A^n para denotar el producto de n factores iguales a A , $n=1,2,\dots$, y $A^0=1$. Más generalmente, si p es cualquier polinomio $p(\lambda)=\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda^i$, usaremos el símbolo $p(A)$ para el operador $\sum_{i=1}^n \alpha_i A^i$.

Un operador A es *invertible* si existe un operador B tal que $AB=BA=1$, en cuyo caso el operador B es único para cada A , se denota por A^{-1} , y se llama *inverso* de A .

Si A y B son operadores invertibles, y si n es un entero positivo, entonces es elemental ver que, A^{-1} , AB , y A^n son invertibles, con inversos dados, respectivamente por $(A^{-1})^{-1}=A$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, y $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$. (el último operador suele notarse por A^{-n}).

Es de gran utilidad tener a mano, condiciones geométricas para la invertibilidad. Tales condiciones pueden darse en términos del *rango* de un operador A , que recordemos, es el conjunto de vectores de la forma Ax , y es siempre una variedad lineal, pero no necesariamente un subespacio.

0.21. Proposición

a) Si A es un operador y α un número real positivo tal que $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ para todo vector x , entonces el rango de A es cerrado, y por tanto un subespacio.

b) Un operador A sobre H es invertible si y sólo si su rango es denso en H y existe un número positivo α tal que $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ para todo vector x .

(Notese que en este caso, es decir, si A es invertible, su rango es un subespacio).

Como corolario:

c) Si un operador A es tal que $\|1-A\| < 1$, entonces A es invertible.

Si A es una transformación lineal (no necesariamente acotada) de H en H , y si

$$\psi(x,y) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

entonces ψ es un funcional bilineal, esto es, una transformación bilineal de $H \times H$ en el cuerpo de escalares. Las propiedades elementales del producto interno implican que si A_1 y A_2 son dos transformaciones lineales de H en H tal que

$$\langle A_1 x, y \rangle = \langle A_2 x, y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

entonces $A_1 = A_2$. De hecho, basta que

$$\langle A_1 x, x \rangle = \langle A_2 x, x \rangle \quad \forall x \in H$$

para que sea $A_1 = A_2$.

El siguiente resultado muestra que la relación entre las transformaciones bilineales y los funcionales lineales va más allá de estas consideraciones iniciales.

0.22. Proposición

Si A es un operador, y

$$\psi(x,y) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

entonces ψ es un funcional bilineal acotado y $\|\psi\| = \|A\|$.

Recíprocamente, si ψ es un funcional bilineal acotado, entonces existe un único operador A tal que $\psi(x,y) = \langle Ax, y \rangle$ para todo $x, y \in H$.

Notese, que de la primera parte del resultado anterior se sigue que

$$\|A\| = \text{Sup} \{ |\langle Ax, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1 \}$$

Por último, introduciremos, el concepto de operador adjunto, del que constantemente haremos uso en este trabajo:

Si A es un operador, entonces existe un único operador A^* , llamado *adjunto de* A , tal que

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \forall x, y \in H$$

Además, $\|A^*\| = \|A\|$, y si A y B son dos operadores, y α es un número complejo, entonces:

1. $(A^*)^* = A$
2. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$
4. $(AB)^* = B^* A^*$
5. $\|A^* A\| = \|A\|^2$
6. Si A es invertible, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

(Los resultados anteriores permiten definir una operación $*$ en el espacio de los operadores de un espacio de Hilbert H , $\mathcal{L}(H)$, de formación del adjunto, tal que $A \mapsto A^*$, que verifica las propiedades de una involución.

0.2. VARIABLES ALEATORIAS HILBERT-VALUADAS

En esta segunda sección vamos a estudiar los diferentes conceptos y propiedades del conjunto de variables aleatorias valuadas en un espacio de Hilbert H , destacando especialmente, que aquellas de norma cuadrado integrable tienen, a su vez, estructura de espacio de Hilbert.

A. DEFINICIONES DE V.A. HILBERT-VALUADAS

En la teoría clásica de probabilidad, las v.a. se introducen como funciones medibles reales (o complejas) definidas sobre un espacio de medida. Análogamente, las v.a. Hilbert-valuadas son funciones medibles con valores en un espacio de Hilbert; sin embargo, en el caso de funciones Hilbert-valuadas, pueden introducirse varios conceptos de medibilidad que conducen a definiciones equivalentes de v.a. Hilbert-valuadas.

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio probabilístico completo, y sea (H, \mathcal{B}) un espacio de medida, donde H es un espacio de Hilbert con producto interno denotado por \langle, \rangle , y \mathcal{B} es el σ -campo de todos los subconjuntos Borel de H .

0.23. Definición

Una aplicación $X: \Omega \rightarrow H$ se dice una v.a. con valores en H si $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

La definición anterior, en el caso de \mathbb{R} o \mathbb{C} , coincide con la usual definición constructiva de v.a. Vamos a introducir ahora, otros conceptos de v.a. Hilbert-valuadas.

0.24. Definición

Una aplicación $X:\Omega\rightarrow H$ se dice una v.a. *elemental* si es constante sobre cada uno de un número finito de conjuntos disjuntos $A_i \in \mathcal{A}$ y se anula sobre $\Omega - (\bigcup_{i=1}^n A_i)$.

X se dice una v.a. *simple* si es elemental y $P[\omega: \|X(\omega)\| \geq 0]$ es finita.

X se dice una v.a. de *numerablemente valuada* si toma a lo sumo un conjunto numerable de valores en H , cada uno de ellos no nulo sobre un conjunto de \mathcal{A} .

0.25. Definición

Una aplicación $X:\Omega\rightarrow H$ se dice una v.a. *fuerte (o Bochner)* si existe una sucesión $\{X_n\}$ de v.a. numerablemente valuadas que converge a X c.s.; es decir, existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ con $P(A_0)=0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0 \text{ para todo } \omega \in \Omega - A_0.$$

(En realidad, puesto que $P(\Omega)=1$, podemos reemplazar "numerablemente valuadas" por "simples" en la definición).

0.26. Definición

Una aplicación $X:\Omega\rightarrow H$ se dice una v.a. *débil (o Pettis)* si la aplicación definida sobre Ω en \mathbb{R} (o \mathbb{C}) por

$$\omega \mapsto \langle X(\omega), y \rangle$$

es una v.a. real (o compleja) para cada $y \in H$.

Para conectar los conceptos de v.a. fuerte y débil, se necesita el concepto de v.a. P-casi separablemente valuada.

0.27. Definición

Una aplicación $X:\Omega \rightarrow H$ se dice una v.a. *P-casi separablemente valuada* si existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ tal que $P(A_0)=0$ y $X(\Omega-A_0)$ es separable.

0.28. Teorema

Una aplicación $X:\Omega \rightarrow H$ es una v.a. fuerte si y sólo si es una v.a. débil y P-casi separable.

El resultado anterior puede verse en Hille y Phillips[13], p. 72.

Si nos restringimos al importante caso donde H es separable, un corolario del teorema anterior establece que los conceptos de v.a. fuerte y débil son equivalentes (ver Hille y Phillips[13], p. 73). Además, la σ -álgebra generada por la clase de todos los entornos esféricos de H es igual a la σ -álgebra de todos los subconjuntos Borel de H . La separabilidad del Hilbert también implica que toda v.a. fuerte es medible en el sentido de la definición 1.4, por lo que las tres definiciones anteriores de v.a. Hilbert-valuadas son equivalentes.

Por otra parte, si H es separable, la aplicación norma de Ω en \mathbb{R}_0^+ dada por

$$\omega \mapsto \|X(\omega)\|$$

es medible para toda v.a. X .

En lo que sigue, supondremos que el espacio de Hilbert H es separable.

B. CONVERGENCIAS

Vamos a considerar en este apartado algunos tipos de convergencia para v.a. Hilbert-valuadas. Sean X e $\{X_n\}$ v.a. H -valuadas.

0.29. Definición

La sucesión $\{X_n\}$ converge a X en Ω

i) *casi seguramente (c.s.) en sentido fuerte* si existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ con $PA_0=0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| = 0 \quad \text{para todo } \omega \in \Omega - A_0$$

ii) *c.s. en sentido débil* si existe un conjunto $A_0 \in \mathcal{A}$ con $PA_0=0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n(\omega), y \rangle = \langle X(\omega), y \rangle \quad \forall y \in H, \forall \omega \in \Omega - A_0$$

iii) *en medida (o probabilidad) en sentido fuerte* si para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\omega: \|X_n(\omega) - X(\omega)\| > \varepsilon] = 0$$

iv) *en medida en sentido débil* si para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P[\omega: |\langle X_n(\omega), y \rangle - \langle X(\omega), y \rangle| > \varepsilon] = 0 \quad \forall y \in H$$

En cada uno de los casos anteriores, las convergencias en sentido fuerte siempre implican las convergencias en sentido débil, y las convergencias c.s. implican la convergencia en probabilidad.

C. EL ESPACIO LINEAL $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\Omega, H)$

Si denotamos por $\mathbb{H} = \mathbb{H}(\Omega, H)$ el conjunto de todas las v.a. definidas sobre Ω y con valores en el espacio de Hilbert separable H , el siguiente resultado establece que \mathbb{H} es un espacio vectorial, cerrado para la composición con funciones Borel-medibles y por paso al límite débil.

0.30. Teorema

a) Si $X, Y \in \mathbb{H} \Rightarrow X + Y \in \mathbb{H}$

b) Si $X \in \mathbb{H}$, y α es un escalar $\Rightarrow \alpha X \in \mathbb{H}$

c) Si $X \in \mathbb{H}$, y ψ es una función Borel-medible de (H, \mathcal{B}) en un espacio de Hilbert arbitrario (H_1, \mathcal{B}_1) , entonces $\psi(X(\omega))$ es una v.a. H_1 -valuada.

(En particular, si $H_1 = H$, $\psi(X) \in \mathbb{H}$).

d) Si $\{X_n\}$ es una sucesión de elementos de \mathbb{H} que converge debilmente c.s. a X , entonces $X \in \mathbb{H}$.

Vamos a introducir ahora, el concepto de espacio de Hilbert involutivo, soporte de nuestro trabajo.

0.31. Definición

Un espacio de Hilbert H se dice *involutivo* si:

1. Existe una aplicación de H en H , que llamaremos *involución*, y que representaremos por $x \mapsto x^*$ para todo $x \in H$ tal que:

$$i) (x^*)^* = x \quad \forall x \in H$$

$$ii) (x+y)^* = x^* + y^* \quad \forall x, y \in H$$

$$iii) (\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^* \quad \forall x \in H, \alpha \in \mathbb{C}$$

2. El producto interior verifica la propiedad:

$$\langle x, y^* \rangle = \langle y, x^* \rangle \quad \forall x, y \in H$$

La propiedad 2 implica que la aplicación involución es continua y acotada. Es fácil ver, que la conjugación del espacio de Hilbert de los números complejos verifica las propiedades de una involución.

En el caso que H sea involutivo, para cada v.a. X H -valuada, podemos asociarle otra v.a. H -valuada, X^* de la siguiente manera:

0.32. Definición

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio probabilístico y, $X: \Omega \rightarrow H$ un vector aleatorio H -valuado, H involutivo. Definimos $X^*: \Omega \rightarrow H$ por

$$X^*(\omega) = (X(\omega))^* \quad \forall \omega \in \Omega$$

0.33. Teorema

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio probabilístico y H un espacio de Hilbert involutivo. $X: \Omega \rightarrow H$ un vector aleatorio H -valuado si y sólo si $X^*: \Omega \rightarrow H$ lo es.

(La demostración de este resultado puede verse en Hainis[8]).

D. INTEGRACION

El concepto de esperanza matemática en el caso clásico, se define vía integral de Lebesgue. Aquí, para definir de forma análoga la esperanza matemática de una v.a. Hilbert-valuada, requerimos generalizaciones de la integral de Lebesgue para funciones medibles H-valuadas. Las dos generalizaciones que se consideran son las integrales en sentido G. Pettis (1936-38), y las integrales en sentido Bochner (1933), definidas sobre v.a. débiles y fuertes.

0.34. Definición

Sea $X(\omega)$ una v.a. H-valuada definida sobre Ω . $X(\omega)$ se dice *integrable Pettis* si y sólo si existe $x_A \in H$ correspondiente a cada $A \in \mathcal{A}$ tal que

$$\langle x_A, y \rangle = (L) \int_A \langle X(\omega), y \rangle dP(\omega) \quad \forall y \in H$$

donde se asume que la integral existe en el sentido Lebesgue.

La integral de Pettis de X se define como

$$x_A = (P) \int_A X(\omega) dP(\omega)$$

Es claro, a partir de la definición anterior que, una v.a. \mathcal{X} -valuada integrable Pettis es una v.a. débil, pero no necesariamente fuerte. De aquí, que para v.a. débiles introducimos la siguiente definición:

0.35. Definición

Sea $X(\omega)$ una v.a. débil. La *esperanza* de X , denotada por $E_d[X]$ o $E_d[X(\omega)]$, se define como la integral de Pettis de X sobre Ω , es decir,

$$E_d[X(\omega)] = (P) \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

Nos referiremos a la esperanza anterior como *esperanza débil*. Para definir el

concepto de esperanza matemática en sentido fuerte, lo hacemos desde un punto de vista constructivo.

0.36. Definición

Una función simple $X(\omega)$ se dice *integrable Bochner* si y sólo si $\|X(\omega)\| \in L_1(\Omega)$. Por definición

$$(B) \int_A X(\omega) dP(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i \cap A)$$

donde $X(\omega) = x_i$ sobre $A_i \in \mathcal{A}$, $i=1,2,\dots,n$.

La integral de Bochner y de Pettis sobre funciones simples coinciden.

0.37. Definición

$X(\omega)$ se dice *integrable Bochner* si y sólo si existe una sucesión de v.a. simples $\{X_n(\omega)\}$ convergente c.s. a $X(\omega)$ y tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|X_n(\omega) - X(\omega)\| dP(\omega) = 0$$

Por definición,

$$(B) \int_A X(\omega) dP(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} (B) \int_A X_n(\omega) dP(\omega)$$

para cada $A \in \mathcal{A}$ y en particular para $A = \Omega$.

Es claro a partir de la definición anterior que, cada v.a. integrable Bochner es una v.a. fuerte. Además, Si X es integrable Bochner, es integrable Pettis y ambas integrales coinciden.

0.38. Definición

Sea $X(\omega)$ una v.a. fuerte. La *esperanza* de X , denotada por $E_f[X]$ o $E_f[X(\omega)]$, se define como la integral de Bochner de X sobre Ω , es decir,

$$E_f[X(\omega)] = (B) \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$$

Nos referiremos a la esperanza anterior como *esperanza fuerte*. La existencia de esperanza fuerte implica la existencia de la esperanza débil, en cuyo caso, ambas son iguales.

La clase de v.a. cuya esperanza fuerte existe puede caracterizarse como sigue.

0.39. Teorema

$E_f[X(\omega)]$ existe $\Leftrightarrow X$ es una v.a. fuerte y $E[\|X(\omega)\|] < \infty$.

Los conceptos de esperanza, como ocurre en el análisis clásico, dan lugar a los espacios B_p . Así, $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1(\Omega, H)$ el conjunto de las v.a. H -valuadas definidas sobre Ω , que son integrables Bochner. \mathfrak{H}_1 es un espacio lineal (subespacio de \mathfrak{H}), y la integral Bochner es un operador lineal sobre \mathfrak{H}_1 . \mathfrak{H}_1 es un espacio normado con norma

$$[X] = E[\|X(\omega)\|] = (L) \int_{\Omega} \|X(\omega)\| dP(\omega)$$

Consideremos ahora $\mathfrak{H}_p = \mathfrak{H}_p(\Omega, H)$ el conjunto de las v.a. $X(\omega)$ H -valuadas definidas sobre Ω tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L) \int_{\Omega} \|X_n(\omega) - X(\omega)\|^p dP(\omega) = 0$$

$1 < p < \infty$, para alguna sucesión $\{X_n(\omega)\}$ de v.a. simples.

Los espacios \mathfrak{H}_p son normados, con norma

$$[X]_p = \left((L) \int_{\Omega} \|X(\omega)\|^p dP(\omega) \right)^{1/p} = \left(E[\|X(\omega)\|^p] \right)^{1/p}$$

Si $X(\omega) \in \mathfrak{H}_p$ es una v.a. fuerte, $\|X(\omega)\| \in \mathbb{L}_p(\Omega, \mathbb{R})$. El recíproco también es cierto.

Las propiedades de E_d y E_f se pueden resumir en el siguiente resultado.

0.40. Teorema

a) $E_d[X]$ y $E_f[X]$ están bien definidas.

b) Si $X, Y: \Omega \rightarrow H$ son integrables en ambos sentidos:

$$E_d[\alpha X + \beta Y] = \alpha E_d[X] + \beta E_d[Y]$$

$$E_f[\alpha X + \beta Y] = \alpha E_f[X] + \beta E_f[Y]$$

c) Si $E_f[X]$ existe, entonces

$$|E_d[X]| \leq E[\|X\|]$$

$$|E_f[X]| \leq E[\|X\|]$$

d) Si $L \in \mathcal{L}(H)$ y $X: \Omega \rightarrow H$ es una v.a. débil tal que $E_d[X]$ existe, entonces

$$E_d[L(X)] = L(E_d[X])$$

Si $L \in \mathcal{L}(H)$ es un operador cerrado y $X: \Omega \rightarrow H$ es una v.a. fuerte tal que $E_f[X]$ existe, entonces

$$E_f[L(X)] = L(E_f[X])$$

E. EL ESPACIO DE HILBERT $\mathbb{H}_2(\Omega, H)$

En todo lo que sigue, (Ω, \mathcal{A}, P) denota un espacio de probabilidad completo, H un espacio de Hilbert separable, y $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_2(\Omega, H)$ el espacio de v.a. H -valuadas definidas sobre Ω con norma

$$[X]_2 = \left((L) \int_{\Omega} \|X(\omega)\|^2 dP(\omega) \right)^{1/2} < \infty \quad (1)$$

0.41. Teorema

La aplicación $\mathbb{H}_2 \times \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\langle X, Y \rangle = \int_{\Omega} \langle X(\omega), Y(\omega) \rangle dP(\omega) \quad \forall X, Y \in \mathbb{H}_2$$

es un producto interior, cuya norma inducida coincide con (1).

Demostración:

$$\begin{aligned} 1. \langle \alpha X + \beta Y, Z \rangle &= \int_{\Omega} \langle (\alpha X + \beta Y)(\omega), Z(\omega) \rangle dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \langle \alpha X(\omega) + \beta Y(\omega), Z(\omega) \rangle dP(\omega) = \\ &= \int_{\Omega} \alpha \langle X(\omega), Z(\omega) \rangle + \beta \langle Y(\omega), Z(\omega) \rangle dP(\omega) = \\ &= \alpha \int_{\Omega} \langle X(\omega), Z(\omega) \rangle dP(\omega) + \beta \int_{\Omega} \langle Y(\omega), Z(\omega) \rangle dP(\omega) = \\ &= \alpha \langle X, Z \rangle + \beta \langle Y, Z \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \langle X, Y \rangle &= \int_{\Omega} \langle X(\omega), Y(\omega) \rangle dP(\omega) = \int_{\Omega} \overline{\langle Y(\omega), X(\omega) \rangle} dP(\omega) = \\ &= \overline{\int_{\Omega} \langle Y(\omega), X(\omega) \rangle dP(\omega)} = \overline{\langle Y, X \rangle} \end{aligned}$$

$$3. \langle X, X \rangle = \int_{\Omega} \langle X(\omega), X(\omega) \rangle dP(\omega) \geq 0$$

C/M



UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

Núm.

501

Tengo el gusto de remitirle 1 ejemplar de la Tesis Doctoral de D. CARMELO RODRIGUEZ TORREBLANCA, para su archivo en la Biblioteca de esta Facultad.

Granada, 14 de Junio de 1993

EL SECRETARIO,



G. Cardenete
Fdo.: Gabriel Cardenete Hernández

____ Sr. Director de la Biblioteca de esta Facultad.

Además,

$$\|X\|^2 = \langle X, X \rangle = \int_{\Omega} \langle X(\omega), X(\omega) \rangle dP(\omega) = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|^2 dP(\omega) = ([X]_2)^2 \bullet$$

0.42. Teorema

Para la topología inducida por la norma, \mathbb{H}_2 es un espacio completo, es decir, \mathbb{H}_2 es un espacio de Hilbert.

Demostración:

Basta probar que toda sucesión de Cauchy es convergente. Sea $\{X_n\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{H}_2 , con lo cual,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|X_n - X_m\| = 0$$

y en particular, existe una subsucesión $\{X_{n_k}\}$ tal que

$$\|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^{k+1}}$$

Sea $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\|$$

Entonces:

$$\|g\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Omega} \|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\|^2 dP(\omega) < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < \infty$$

de donde,

$$\int_{\Omega} [g(\omega)]^2 dP(\omega) < \infty \Rightarrow g(\omega) < \infty$$

y la serie $\sum \|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\|$ converge c.s., con lo cual la serie

$$\sum [X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)]$$

también converge c.s.

$$\text{Sea } X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} [X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)] \text{ c.s.}$$

Entonces,

$$\|X(\omega)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\| = g(\omega) \text{ c.s.}$$

por tanto,

$$\int_{\Omega} \|X(\omega)\|^2 dP(\omega) \leq \int_{\Omega} [g(\omega)]^2 dP(\omega)$$

esto es,

$$\|X\| \leq \|g\| \leq \infty, \text{ y } X \in \mathbb{H}_2$$

Por otra parte,

$$\|X(\omega) - \sum_{k \leq p} [X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)]\| \leq \sum_{k > p} \|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\|$$

y

$$\int_{\Omega} \|X(\omega) - \sum_{k \leq p} [X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)]\|^2 dP(\omega) \leq \int_{\Omega} \sum_{k > p} \|X_{n_{k+1}}(\omega) - X_{n_k}(\omega)\|^2 dP(\omega)$$

con lo cual,

$$\|X - \sum_{k \leq p} [X_{n_{k+1}} - X_{n_k}]\| \leq \sum_{k > p} \|X_{n_{k+1}} - X_{n_k}\| < \frac{1}{2^p}$$

esto es, $\|X - X_{n_{p+1}}\| < \frac{1}{2^p}$

Cuando $p \rightarrow \infty$, entonces $n_{p+1} \rightarrow \infty$ y $\{X_{n_{p+1}}\} \rightarrow X$, pues

$$\|X - X_n\| \leq \|X - X_{n_{p+1}}\| + \|X_n - X_{n_{p+1}}\|$$

y por consiguiente, $\{X_n\} \rightarrow X$. •

Sea $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_2(\Omega, \mathbb{C})$ el espacio de v.a. complejo-valuadas definidas sobre Ω , con norma cuadrado-integrable. \mathbb{C}_2 es un espacio de Hilbert con producto interno definido por

$$\langle U, V \rangle = E[U\bar{V}] \quad U, V \in \mathbb{C}_2$$

\mathbb{C}_2 es un espacio de Hilbert involutivo bajo la involución definida por $U \mapsto \bar{U}$ (v.a. compleja conjugada de U).

Sea X un vector aleatorio de segundo orden. Asociado a X , podemos definir una aplicación F de H en \mathbb{C}_2 dada por

$$x \mapsto F(x) = [\langle X(\omega), x \rangle] \quad \forall x \in H$$

donde $[\cdot]$ de nota la clase de equivalencia de la v.a. $\langle X(\omega), x \rangle$.

La aplicación F es lineal y continua, y $\langle X(\omega), x \rangle \in \mathbb{C}_2$, pues

$$E|\langle X(\omega), x \rangle|^2 \leq \|x\|^2 E[\|X(\omega)\|^2] < \infty$$

Recíprocamente, $F \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$ proviene de un vector aleatorio de segundo orden X , si para todo $x \in H$, la v.a. $\langle X(\omega), x \rangle$ pertenece a la clase de equivalencia $F(x)$.

Vamos a ver que el operador F proviene de una v.a. de segundo orden si y sólo si F es un operador de Hilbert-Schmidt, pero antes, repasemos este concepto.

Sean $\{e_n\}$ y $\{f_n\}$ dos bases ortonormales de sendos espacios de Hilbert H_1 y H_2 , respectivamente, entonces:

Si $\{h_i\} \subset H_2$ tal que $|A|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|_{H_2}^2 < \infty$, entonces, la aplicación $A: H_1 \rightarrow H_2$ definida para cada $x \in H_1$ por

$$x \mapsto Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle_{H_1} h_i$$

verifica que:

1. es lineal y continua, esto es, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$
2. $\|A\| \leq |A|$
3. $Ae_i = h_i$, y por tanto $Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i \rangle_{H_1} Ae_i$

Si A es continua, la aplicación adjunta $A^*: H_2 \rightarrow H_1$ definida para cada $y \in H_2$ por la fórmula

$$\langle Ax, y \rangle_{H_2} = \langle x, A^*y \rangle_{H_1} \quad \forall x \in H_1$$

es lineal y continua.

Los operadores así definidos anterior son operadores de Hilbert-Schmidt. Es inmediato, que el operador adjunto definido es también un operador de Hilbert-Schmidt, y que la norma de Hilbert-Schmidt $|A|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|Ae_i\|_{H_2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A^*f_i\|_{H_1}^2 = |A^*|$ no depende de las bases $\{e_n\}$ y $\{f_n\}$ escogidas.

0.43. Definición

$F \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$ es un operador de Hilbert-Schmidt si

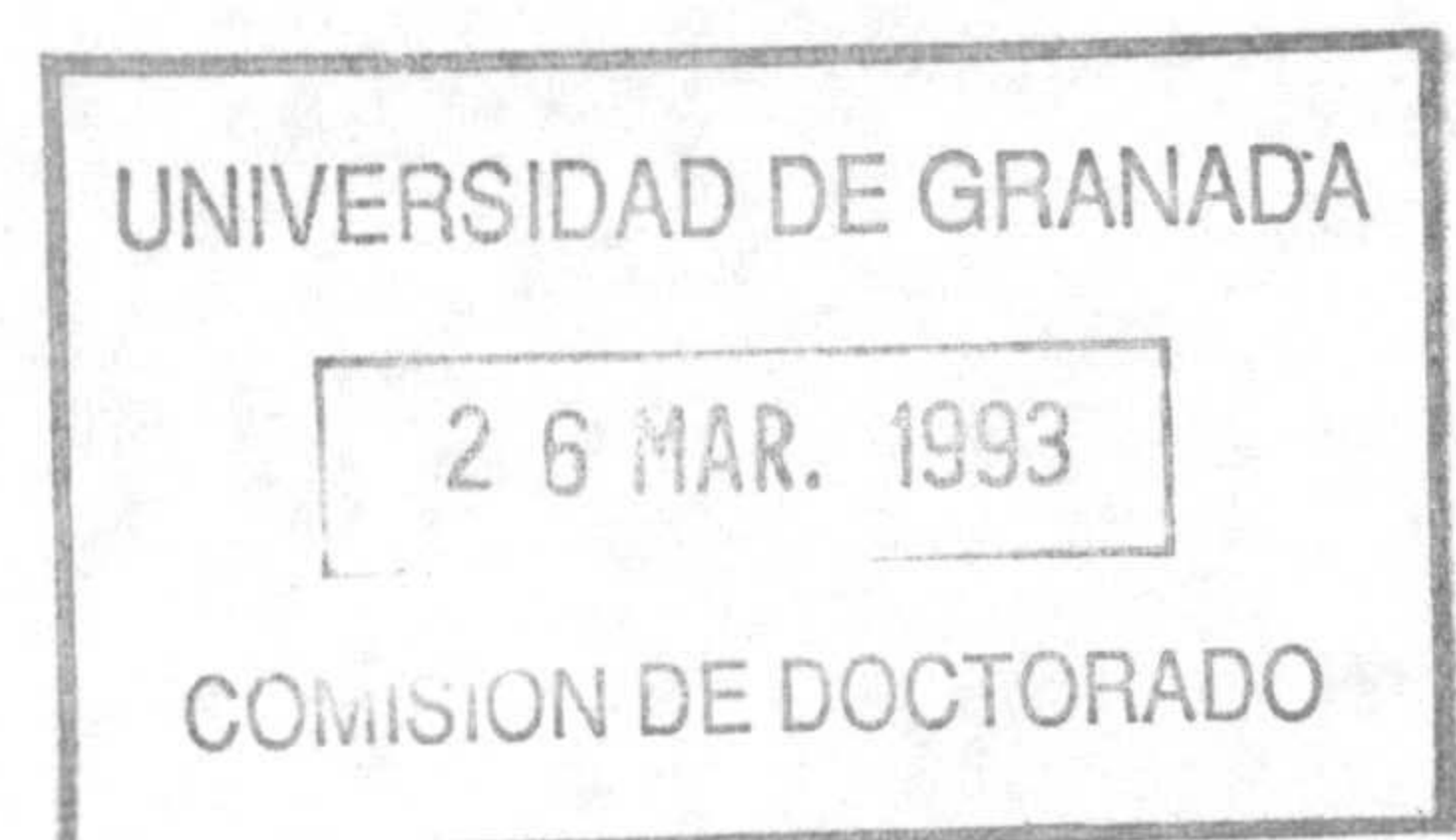
$$\text{Traz}(F^*F) = \sum_{i \in I} \|Fe_i\|^2 < \infty$$

donde $F^* \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_2, H)$ es el operador adjunto de F , y $\{e_i\}_{i \in I}$ es una base ortonormal de H .

0.44. Teorema

\mathbb{H}_2 es isomorfo al dual del espacio de Hilbert $\mathcal{H}\mathcal{S}(H, \mathbb{C}_2)$ de operadores de Hilbert-Schmidt de H en \mathbb{C}_2 .

La demostración de este resultado puede verse en Payen[29], p.347.



Capitulo I

FUNCIONES ESTACIONARIAS

HILBERT-VALUADAS

1.1. FUNCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS COMPLEJA (O REAL)-VALUADAS

En esta primera sección resumiremos los resultados fundamentales, así como las técnicas empleadas para su obtención, que pueden considerarse como antecedentes probabilísticos de nuestro trabajo. Se trata del estudio de las funciones aleatorias estacionarias con valores en \mathbb{R} o \mathbb{C} . Comenzaremos describiendo los conceptos generales y resultados básicos sobre funciones aleatorias, para pasar posteriormente al estudio de la representación y descomposición espectral de las funciones aleatorias estacionarias que concluiremos con el problema de la predicción lineal.

A. FUNCIONES ALEATORIAS: GENERALIDADES

Denotaremos por (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio probabilístico completo, y por $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ o $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ el espacio medible \mathbb{C} o \mathbb{R} con el respectivo σ -campo de Borel \mathcal{B} . Sea T un subconjunto de \mathbb{R} .

1.1. Definición

Un *proceso estocástico* o *función aleatoria* \mathbb{C} (o \mathbb{R})-valuada sobre T es una aplicación $X(t, \omega)$ definida en $T \times \Omega$ con valores en \mathbb{C} (o \mathbb{R}) tal que para cada $t \in T$, X es una variable aleatoria compleja (o real).

$X(t, \omega)$ también se suele notar $X_t(\omega)$, e incluso $\{X_t\}$ o $X(t)$ cuando el espacio Ω esté sobreentendido, aunque la forma habitual de presentar una función aleatoria es

$$\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$$

o simplemente,

$$\{X_t; t \in T\}$$

La naturaleza del conjunto T (según sea numerable o no), que algunos autores denominan espacio *temporal* o espacio *paramétrico*, proporciona una primera clasificación de los procesos estocásticos. Los casos más destacados surgen cuando T es el conjunto \mathbb{N} o \mathbb{Z} , (casos para los que se suele reservar el término de *procesos estocásticos en tiempo -o de parámetro- discreto*), y cuando T es todo \mathbb{R} o $[0, \infty)$ (para los cuales suele estar reservado el término de *procesos estocásticos en tiempo -o parámetro- continuo*).

A la función de $t \in T$, obtenida al fijar ω en $X_t(\omega)$, se le llama *función muestral* del proceso.

Sea t_1, t_2, \dots, t_n cualquier subconjunto finito de T . La distribución multivariante del vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ se le llama *distribución conjunta finito dimensional* del proceso. Si esta distribución es gaussiana para cada conjunto finito de v.a., el proceso se dice *gaussiano*. Si la distribución de $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \dots, X_{t_n+h})$ no depende de h , el proceso se dice *fuertemente o estrictamente estacionario*.

Si notamos $\mathcal{F}_T = \mathcal{B}(X_t, t \in T)$ el σ -campo de Borel de ω -conjuntos generado por la clase de conjuntos de la forma $\{X_t \in B, t \in T, B \in \mathcal{B}\}$, entonces \mathcal{F}_T es el menor σ -campo con respecto al cuál todas las v.a. X_t son medibles. Además \mathcal{F}_T es el σ -campo generado por la clase \mathcal{F}_0 de los ω -conjuntos de la forma $[(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \in A]$ donde A es cualquier intervalo semicerrado por la derecha.

1.2. Teorema

a) Si $A \in \mathcal{A}$, para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto $A_\varepsilon \in \mathcal{F}_T$ tal que

$$P\{[A \cap (\Omega - A_\varepsilon)] \cup [(\Omega - A) \cap A_\varepsilon]\} < \varepsilon$$

Como consecuencia:

b) Si X es una variable aleatoria definida sobre Ω , para cada $\varepsilon > 0$, existe una ω -función X_ε que toma sólo un número de valores finitos, cada uno sobre un conjunto de \mathcal{F}_0 , tal que

$$P[|X - X_\varepsilon| > \varepsilon] < \varepsilon$$

Esta medida de probabilidad es también una medida de los conjuntos de \mathcal{F}_T . Si \mathcal{F}_T' es el dominio de definición de esta medida restringida después de su completación, esto es, \mathcal{F}_T' consiste en los conjuntos de \mathcal{F}_T más los que difieren de ellos en un conjunto de \mathcal{F}_T de probabilidad 0, entonces, por ser P completa por hipótesis, todos los conjuntos de \mathcal{F}_T' son medibles. (Si P no fuese completa, no tendrían por qué serlo, y habría que considerar una *representación* $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$ del proceso, que siempre existe, para que lo fuesen; de ahí nuestra hipótesis de completitud.)

En muchas ocasiones vamos a estar interesados en conocer probabilidades de sucesos referidos al espacio T , que si este no es numerable, puede que no sean medibles, como por ejemplo el supremo o infimo de una familia. Este problema lo solucionaremos con la condición de *separabilidad*, que como veremos se trata de una propiedad muy poco restrictiva.

1.3. Definición

Un proceso $\{X_t, t \in T\}$ se dice *separable* si existe un subconjunto $N \subset \Omega$ de probabilidad 0, y un subconjunto denso y numerable $S \subset T$ tal que, si C es cualquier cerrado de \mathcal{A} e I es un intervalo abierto de T , los ω -conjuntos

$$[X_t \in C, t \in I \cap S] \quad \text{y} \quad [X_t \in C, t \in I \cap T]$$

difieren a lo sumo en algún subconjunto de N .

El conjunto S se llama *separante*.

1.4. Teorema

a) Un proceso $\{X_t, t \in T\}$ es *separable* si y sólo si existe un subconjunto $N \subset \Omega$ de probabilidad 0, y un subconjunto denso y numerable $S \subset T$ tal que, si $\omega \in N$ y $t \in T$, existe una sucesión $\{t_n\}$ de S convergente a t , y con $\{X_{t_n}(\omega)\} \rightarrow X_t(\omega)$.

b) Todo proceso estocástico de tipo continuo $\{X_t, t \in T\}$ (con T lineal), tiene una versión separable, es decir, existe un proceso separable $\{\tilde{X}_t, t \in T\}$ sobre el mismo espacio probabilístico y con el mismo espacio paramétrico tal que $P[\tilde{X}_t = X_t] = 1$ para todo $t \in T$.

1.5. Definición

Un proceso $\{X_t, t \in T\}$ se dice *medible* si el conjunto T es Lebesgue medible y si $X_t(\omega)$ define una función medible en el par de variables (ω, t) .

Si un proceso es medible, entonces casi todas sus funciones muestrales son funciones Lebesgue-medibles. Además, si $E[X_t]$ existe para todo $t \in T$, define una función Lebesgue-medible de t . Si A es un t -conjunto Lebesgue-medible con $\int_A |E[X_t]| dt < \infty$, entonces casi todas las funciones muestrales son Lebesgue-integrables sobre A .

1.6. Definición

Un proceso $\{X_t, t \in T\}$ se dice *continuo en probabilidad* en el punto $t \in T$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} P[|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

1.7. Teorema

a) Si un proceso es separable y continuo en probabilidad (en todo $t \in T$), entonces cualquier subconjunto denso y numerable de T es un conjunto separante del

proceso.

b) Todo proceso separable y continuo en probabilidad es medible.

c) Si un proceso tiene un espacio paramétrico T Lebesgue-medible, y existe un subconjunto T_1 de T de medida 0 tal que el proceso es continuo en probabilidad en $T-T_1$, entonces existe una versión del proceso separable y medible.

B. PROPIEDADES DE SEGUNDO ORDEN

Las propiedades de segundo orden son aquellas que se pueden definir en términos de estos momentos, salvo equivalencia. Las v.a. definidas sobre Ω y con momentos de segundo orden se pueden interpretar como puntos en un espacio de Hilbert (por 0.4.c), el espacio $L_2(\Omega)$ de las v.a. (reales o complejo-valuadas) de segundo orden definidas sobre Ω , es decir, el espacio

$$\{X:\Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) / E[|X|^2] < \infty\}$$

con producto interno

$$\langle X, Y \rangle = E[X\bar{Y}]$$

Los productos escalares determinan las normas

$$\|X\| = (E[|X|^2])^{1/2}$$

y las normas determinan las distancias

$$d(X, Y) = \|X - Y\|$$

La convergencia "en norma" es la convergencia "en media cuadrática", $X_n \xrightarrow{m.c.} X$.

1.8. Teorema

$\|X_n - X\| \rightarrow 0 \iff E|X_n - X|^2 \rightarrow 0$, y L_2 es un espacio de Hilbert.

En L_2 se puede, por tanto, definir el concepto de v.a. ortogonales. El criterio de convergencia y estabilidad se puede resumir en el siguiente resultado.

1.9. Teorema (Convergencia y Estabilidad en m.c.)

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. ortogonales.

1. $\sum X_k$ converge en m.c. $\Leftrightarrow \sum E|X_k|^2 < \infty$, en cuyo caso,

$$E[(\sum X_k)^2] = \sum E|X_k|^2 \quad (\text{relación pitagórica})$$

2. Si $\sum \frac{E|X_k|^2}{b_k^2} < \infty$, $\{b_n\} \nearrow \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{m.c.}} 0$

Para establecer un criterio análogo para la convergencia y estabilidad c.s., nos apoyamos en la desigualdad de Rademacher (similar a la de Kolmogorov).

1.10. Teorema (Convergencia y Estabilidad c.s.)

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de v.a. ortogonales.

1. Si $\sum_{k=1}^n (lgk)^2 E|X_k|^2$ converge c.s. $\Rightarrow \sum_{k=1}^n X_k$ converge c.s. y en m.c.

2. Si $\sum \frac{(lgk)^2 E|X_k|^2}{b_k^2} < \infty$, $\{b_n\} \nearrow \infty \Rightarrow \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{\text{c.s.}} 0$

Una vez estudiadas la convergencia y estabilidad en sucesiones, pasamos a estudiar las funciones aleatorias de segundo orden $\{X(t), t \in T\}$, introduciendo los conceptos de función media y función covarianza.

1.11. Definición

A las funciones $\mu: T \rightarrow \mathbb{C}$ y $R: T \times T \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\mu(t) = E[X(t)] \quad t \in T$$

$$R(s,t) = E[(X(t) - \mu(t))(X(s) - \mu(s))] \quad (s,t) \in T \times T$$

se les llama *función media* y *función covarianza* de la función aleatoria $\{X(t)\}$, respectivamente.

Conviene aclarar que los procesos de segundo orden, se pueden considerar centrados, ya que al expresar

$$X(t) = (X(t) - \mu(t)) + \mu(t)$$

el proceso se descompone en un primer término de media cero y en segundo sumando no aleatorio, sin interés para el cálculo de la m.c.

Vamos a estudiar las propiedades de la función covarianza, que podemos resumirlas en el siguiente resultado.

1.12. Teorema

1. Una función $R(s,t)$ sobre $T \times T$ es una covarianza si y sólo si es de tipo definida no-negativa. Es decir, si para cada conjunto finito de valores $T_0 = \{t_1, \dots, t_N\} \subseteq T$, y cada función $h(t)$ sobre T_0 :

$$\sum_{m,n=1}^N R(t_m, t_n) h(t_m) \overline{h(t_n)} \geq 0$$

En tal caso, verifica que $R(s,t) = \overline{R(t,s)}$. Además, cada covarianza es también la covarianza de una función gaussiana, la cual se puede elegir real-valorada cuando la covarianza lo sea.

2. La clase de las covarianzas es cerrada para adiciones, productos y paso al límite.

3. La parte real de una covarianza es una covarianza, mientras que la parte imaginaria no es una covarianza salvo que sea nula.

La continuidad en m.c. del proceso $\{X(t), t \in T\}$ se define por la propiedad

$$\lim_{h \rightarrow 0} E[|X(t+h)-X(t)|^2]$$

Existe una última relación entre la continuidad en m.c. del proceso y la de su función covarianza, expresada en el siguiente teorema.

1.13. Teorema

Si $\{X(t), t \in T\}$ es una función aleatoria de segundo orden con función covarianza $R(s,t)$, entonces:

1. El proceso es continuo en m.c. si y sólo si R es continua en el punto de la diagonal (t,t) .
2. Si el proceso es continuo en m.c. (en todo t), su covarianza es continua en todo $T \times T$.
3. Si una función semidefinida positiva en $T \times T$ es continua en todo diagonal, también lo es en todo punto de su dominio $T \times T$.

La propiedad de derivabilidad de un proceso de segundo orden continuo en m.c., se introduce como una extensión natural del concepto para funciones no aleatorias.

1.14. Definición

Una función aleatoria de segundo orden $X(t)$ sobre T tiene una derivada en m.c. $\frac{dX(t)}{dt}$ (o $X'(t)$) en $t \in T$ si

$$\frac{X(t+h)-X(t)}{h} \xrightarrow{\text{m.c.}} X'(t) \text{ (si } h \rightarrow 0), t+h \in T$$

Del hecho que L_2 es un espacio completo, se puede demostrar el siguiente resultado.

1.15. Criterio de derivabilidad en m.c.

$X(t)$ tiene derivada en m.c. en $t \in T$ si y sólo si

$$\frac{d^2 R(s,t)}{\partial s \partial t} = E[X'(t)X'(s)]$$

existe y es finita en (t,t) .

La integral en m.c. de una función aleatoria de segundo orden se construye siguiendo una metodología similar a la desarrollada por Riemann para funciones de tipo determinístico, y consiste en considerar una sucesión de particiones $\{T_n\}$ del espacio paramétrico T tal que $\{T_n\}$ tiende a ser densa cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea $T_n = \{a = t_{n_1} < t_{n_2} < \dots < t_{n_{n+1}} = b\}$ un conjunto finito de puntos consecutivos que definen una partición del intervalo $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} \{t_{n_i} - t_{n_{i-1}}\} = 0$$

1.16. Definición

Para una función $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$, la integral

$$\int_a^b f(t)X(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} f(t_{n_i})X(t_{n_i})(t_{n_i} - t_{n_{i-1}})$$

se llama *integral en m.c.* de Riemann de la función aleatoria $X(t)$.

De igual forma que la continuidad y derivabilidad en m.c. se han caracterizado en términos de la función covarianza, también puede hacerse con la integrabilidad.

1.17. Criterio de integrabilidad en m.c.

La integral $\int_a^b f(t)X(t) dt$ existe si y sólo si la función $R(\hat{t},s)f(t)f(s)$ es R-

integrable en el rectángulo $[a,b] \times [a,b]$.

En consecuencia, si el proceso es continuo en m.c., una condición suficiente para la existencia de la integral anterior es que la función $f(t)$ sea continua en $[a,b]$.

El siguiente paso consiste en encontrar descomposiciones ortogonales de funciones aleatorias de segundo orden. La razón física es que las componentes ortogonales se pueden aislar experimentalmente por medio de "filtros" convenientes. La razón matemática es que las descomposiciones ortogonales corresponden a la introducción de una forma general de esquemas de referencia cartesianos que permiten el uso de una forma general de la relación pitagórica. Vimos anteriormente (teorema 0.9) que, dicha descomposición es siempre posible cuando T es numerable. Intentamos proceder a descomposiciones ortogonales más generales del mismo carácter. En primer lugar damos dos descomposiciones numerables.

1.18. Teorema de desarrollo ortogonal

El desarrollo

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^{(k)}(0)$$

de una función aleatoria de segundo orden $X(t)$, es una descomposición ortogonal, si y sólo si, su covarianza $R(s,t)$ es una función del producto st de sus argumentos en $T \times T$.

De hecho, cada función aleatoria $\{X(t), t \in [a,b]\}$ con función covarianza $R(s,t)$ bien definida tiene una descomposición ortogonal numerable. La construcción de tal desarrollo en serie se basa en el hecho que \mathbb{L}_2 es separable, con lo que queda asegurado que todo sistema ortonormal es finito o numerable, es decir, existe una base de \mathbb{L}_2 a partir de la cual, y como aplicación del teorema de Mercer para núcleos simétricos autorreproductores, y del teorema de Karhunen para formas bilineales continuas, el proceso se puede representar como sigue:

1.19. Teorema de descomposición ortogonal propia

Una función aleatoria $X(t)$ continua en m.c. sobre un intervalo cerrado I , tiene sobre I una descomposición ortogonal

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(t) \lambda_k \varepsilon_k$$

con

$$E[\varepsilon_m \overline{\varepsilon_n}] = \delta_{mn} \quad \text{y} \quad \int \phi_m(t) \overline{\phi_n(t)} dt = \delta_{mn},$$

si y sólo si los $|\lambda_n|^2$ son valores propios y las $\phi_n(t)$ son funciones propias ortonormalizadas asociadas al sistema de valores propios de sus covarianzas. En tal caso, la serie converge en m.c. uniformemente sobre I , y

$$\lambda_n \varepsilon_n = \int \overline{\phi_n(t)} X(t) dt$$

La descomposición anterior se conoce como desarrollo de Karhunen-Loeve del proceso $X(t)$. Aplicando éste a procesos de segundo orden concretos, como por ejemplo, el proceso de Wiener-Levy, el de Ornstein-Uhlenbeck, y el puente Browniano, la ecuación

$$\mu \phi_n(t) = \int_a^b R(s,t) \lambda_n \varepsilon_n$$

se reduce mediante doble derivación a un problema de contorno resoluble.

En física, la descomposición ortogonal más importante es la armónica, pues hablando libremente, da las "amplitudes", y de aquí, las "energías" que corresponden a las varias partes del "espectro" de la función aleatoria, y las investigaremos ahora. Pero previamente, tenemos que introducir funciones aleatorias que corresponden a las sumas de v.a. ortogonales.

Designando por $\varepsilon[a,b] = \varepsilon(a) - \varepsilon(b)$ el incremento de la función ε sobre el intervalo $[a,b]$,

1.20. Definición

Una función aleatoria de segundo orden $Y(t)$ tiene *incrementos ortogonales* si para intervalos disjuntos $[a,b)$, $[a',b')$,

$$E[Y[a,b]\overline{Y[a',b']}] = 0$$

En tal caso,

$$E[|Y[a,b] \pm Y[a',b']|^2] = E[|Y[a,b]|^2] + E[|Y[a',b']|^2]$$

y resulta, denotando, para cierto a fijo,

$$E[|Y[a,t]|^2] = F(t) \quad E[|Y[t,a]|^2] = -F(t)$$

que

$$E[|Y[t,s]|^2] = F[t,s]$$

que denotaremos para abreviar:

$$E[|dY(t)|^2] = dF(t)$$

Si $R(t,s)$ es la covarianza de $Y(t)$, esta relación se transforma en:

$$R(s,s) - R(t,s) - R(s,t) + R(t,t) = F(s) - F(t) \quad \forall t \leq s$$

que denotaremos:

$$d^2R(t,s) = dF(t) \quad t \leq s$$

Observese que los momentos segundos de los incrementos de $Y(t)$ están acotados si y sólo si la función no decreciente finita $F(t)$ está acotada en T . Esté acotada o no, esta función no decreciente, se extiende a una función no decreciente (finita o no) sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, y de hecho, sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Esto nos lleva al siguiente teorema.

1.21. Teorema de extensión

Si la función aleatoria $Y(t)$ sobre T tiene incrementos ortogonales con momentos de segundo orden acotados, entonces, conservando esta propiedad, se puede extender $Y(t)$ por continuidad a la clausura de T , y se puede extender a $\overline{\mathbb{R}}$.

Bajo las hipótesis de este teorema, la función aleatoria $Y(t)$ es descomponible en dos partes con incrementos mutuamente ortogonales

$$Y(t) = Y_d(t) + Y_c(t)$$

donde $Y_d(t)$ es una suma de v.a. ortogonales (que converge en m.c. si es numerable), y $Y_c(t)$ es continua en m.c., y además,

$$E|dY_d(t)|^2 = dF_d(t) \quad \text{y} \quad E|dY_c(t)|^2 = dF_c(t)$$

donde F_d y F_c son las partes puramente discontinuas y continuas de F , respectivamente.

C. FUNCIONES ALEATORIAS ESTACIONARIAS

En lo que sigue, $\{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ es una función aleatoria definida desde $\Omega \times T$ en $(\mathbb{C}, \mathcal{B})$ o $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, y con momentos de segundo orden finitos, esto es, $E[|X_t|^2] < \infty$ para todo $t \in T$. (Nos centraremos en el caso continuo, y en particular donde $T = \mathbb{R}$)

1.22. Definición

La función aleatoria real-(o compleja-)valuada $\{X_t\}$ se dice *estacionaria (en sentido amplio)* o *débilmente estacionaria* si:

1. $E[X_t]$ no depende de t (es una constante que se puede tomar nula).
2. Su función *covarianza* asociada definida por

$$R(s,t) = E[X_s \overline{X_t}] \quad (s,t) \in T \times T$$

depende sólo de la diferencia $s-t$.

Nota: Muchos autores omiten la propiedad 1, ya que es matemáticamente intrascendente respecto a las propiedades de segundo orden de la función aleatoria, que son las de nuestro interés, (bastaría considerar el proceso $\{X_t - E[X_t]\}$ de variables con media cero, en lugar de $\{X_t\}$).

Puesto que en los procesos estacionarios $R(s,t)$ depende sólo de la diferencia

$s-t$, se denota por $R(s)$ a $R(t+s,t)=E[X_{t+s}\overline{X_t}]$ para cualquier $t \in T$, pues su valor no depende de t sino de la diferencia $s=(t+s)-t$.

Kintchine, quien introdujo las funciones aleatorias de segundo orden y también estudió la descomposición armónica de sus covarianzas, demostró el siguiente resultado.

1.23. Teorema

La función covarianza R de un proceso estacionario débilmente continuo verifica las siguientes propiedades:

a) R es continua y definida positiva

b) $R(-t) = \overline{R(t)}$

c) $\sum_{m,n=1}^N R(t_m-t_n)\alpha_m\overline{\alpha_n} \geq 0$ para cada conjunto finito de valores t_1, \dots, t_N y de números complejos $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.

Recíprocamente, toda función R verificando las propiedades b) y c) anteriores y continua en $t=0$ es la función covarianza de un proceso (débilmente) estacionario. Si la función covarianza es real, el proceso puede tomarse también con valores reales.

(Si el proceso es de tipo discreto sobran las condiciones de continuidad).

Herglitz obtuvo la función covarianza como una transformada de Fourier-Stieltjes:

1.24. Teorema

Una función R es definida positiva si y sólo si puede expresarse de la forma

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda t} dF(\lambda)$$

donde F es monótona no decreciente y acotada, y se llama *distribución espectral*.

La función F se determina unívocamente por la ecuación

$$\frac{F(\lambda_2^+) - F(\lambda_2^-)}{2} - \frac{F(\lambda_1^+) - F(\lambda_1^-)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-2\pi i \lambda_2 t} - e^{2\pi i \lambda_1 t}}{-2\pi i t} R(t) dt \quad (1)$$

En el caso discreto, $R(t) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda t} dF(\lambda)$, F está definida para $|\lambda| \leq 1/2$ y

determinada por

$$\begin{aligned} \frac{F(\lambda_2^+) - F(\lambda_2^-)}{2} - \frac{F(\lambda_1^+) - F(\lambda_1^-)}{2} &= \\ &= R(0)(\lambda_2 - \lambda_1) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{-2\pi i \lambda_2 n} - e^{2\pi i \lambda_1 n}}{-2\pi i n} R(n) \quad (1') \\ &\quad (-1/2 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1/2) \end{aligned}$$

con $R(0) = F(1/2) - F(-1/2)$.

Si F es absolutamente continua, esto es, si es la integral de su derivada, F' se llama *función de densidad* del proceso, (y cuando se use este término se entenderá que la distribución espectral es absolutamente continua).

Si $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t)| dt < \infty$, existe una función de densidad espectral dada por

$$F'(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t) e^{-2\pi i \lambda t} dt \quad (2)$$

De hecho, esta restricción sobre la función covarianza, implica que (2) puede integrarse para dar (1).

En el caso discreto, Si $\sum_{-\infty}^{\infty} |R(n)| < \infty$, existe una función de densidad espectral dada por

$$F'(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{-2\pi i\lambda t} \quad (2')$$

y (2') puede integrarse para dar (1').

El *espectro* del proceso consiste en los números λ_0 en cuyos entornos F es realmente creciente, en el sentido que $F(\lambda_0 + \varepsilon) > F(\lambda_0 - \varepsilon) \forall \varepsilon > 0$.

(Estos números son las frecuencias que forman parte del análisis armónico tanto de la función covarianza como de las funciones muestrales del proceso).

El primer teorema de representación espectral fue dado por Cramer en 1942, e independientemente por Loeve:

1.25. Teorema

Todo proceso estacionario $\{X_t(\omega)\}$ tiene una representación espectral

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i\lambda t} dY(\lambda) \quad (3)$$

donde $Y(\lambda)$ es un proceso de incrementos ortogonales tal que

$$E[|dY(\lambda)|^2] = dF(\lambda)$$

Recíprocamente, si $Y(\lambda)$ es un proceso con incrementos ortogonales satisfaciendo (3), entonces

$$\frac{Y(\lambda_2^+) - Y(\lambda_2^-)}{2} - \frac{Y(\lambda_1^+) - Y(\lambda_1^-)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-2\pi i\lambda_2 t} - e^{2\pi i\lambda_1 t}}{-2\pi i t} X_t dt$$

y esta ecuación determina unívocamente $Y(\lambda)$, salvo conjuntos ω -nulos, si el proceso $Y(\lambda)$ está propiamente normalizado.

Esta representación de X_t se llama *representación espectral*.

En el caso discreto (3) puede escribirse como

$$X_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda n} dY(\lambda) \quad (3')$$

donde $Y(\lambda)$ es un proceso de incrementos ortogonales tal que

$$E[|dY(\lambda)|^2] = dF(\lambda)$$

Recíprocamente, si $Y(\lambda)$ es un proceso con incrementos ortogonales satisfaciendo (3'), entonces

$$\begin{aligned} \frac{Y(\lambda_2^+) - Y(\lambda_2^-)}{2} - \frac{Y(\lambda_1^+) - Y(\lambda_1^-)}{2} &= \\ &= X_0(\lambda_2 - \lambda_1) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\substack{-N \\ n \neq 0}}^N \frac{e^{-2\pi i \lambda_2 n} - e^{2\pi i \lambda_1 n}}{-2\pi i n} X_n \quad (-1/2 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1/2) \end{aligned}$$

con $X_0 = Y(1/2) - Y(-1/2)$.

y esta ecuación determina unívocamente $Y(\lambda)$, salvo conjuntos ω -nulos, si el proceso $Y(\lambda)$ está propiamente normalizado.

Si el espectro del proceso $X(t)$, (análogamente ocurre en el caso paramétrico discreto), contiene un número finito o numerable de valores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, (esto es, si F es una constante excepto para saltos de magnitud $\sigma_1^2, \dots, \sigma_k^2$ en $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, la representación espectral se reduce a una suma finita del tipo:

$$\begin{aligned} X_t &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t \lambda_j} dY(\lambda) = \sum_j e^{i2\pi t \lambda_j} [Y(\lambda_j^+) - Y(\lambda_j^-)] = \\ &= \sum_j e^{i2\pi t \lambda_j} \varepsilon_j^2 \end{aligned}$$

donde ε_j son mutuamente ortogonales.

El teorema de representación espectral puede modificarse ventajosamente en el caso donde F sea absolutamente continua (tanto en el caso discreto como continuo). Si F es absolutamente continua, y si f es de Baire con $|f^2| = F'$, existe un proceso $\tilde{Y}(\lambda)$ con incrementos ortogonales tal que

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} f(\lambda) d\tilde{Y}(\lambda)$$

con $E[|d\tilde{Y}(\lambda)|^2] = d\lambda$

$$(X_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n \lambda} f(\lambda) d\tilde{y}(\lambda) \text{ en el caso discreto })$$

Es interesante notar que un proceso estacionario tiene distribución espectral absolutamente continuo si y sólo si es un proceso de *medias móviles*, esto es, un proceso definido (en el caso continuo) por

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) d\varepsilon(\lambda+t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda-t) d\varepsilon(\lambda)$$

donde C es una función medible de norma cuadrado integrable y $\varepsilon(t)$ es un proceso con incrementos ortogonales con $E[|d\varepsilon(\lambda)|^2] = d\lambda$; en el caso discreto, $X_n =$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \varepsilon_{n+j}, \text{ con } \sum |c_j|^2 < \infty.$$

Este teorema de representación espectral es esencialmente equivalente a la descomposición armónica de las funciones aleatorias estacionarias de segundo orden, que a su vez, es una consecuencia inmediata del teorema de Stone (1930) sobre grupos de operadores unitarios en espacios de Hilbert.

Kolmogorov y la escuela rusa procede a un estudio detallado de los procesos estacionarios de segundo orden por medio de los métodos utilizables en los espacios de Hilbert. Sea $\mathcal{L}_2(\Omega)$ el espacio de Hilbert de las v.a. de segundo orden con valores en \mathbb{R} o \mathbb{C} , y con producto interno definido por

$$\langle X, Y \rangle = E[X\bar{Y}]$$

Entonces, puede definirse un proceso estacionario como una aplicación $X:T \rightarrow \mathcal{L}_2(\Omega)$ tal que su función covarianza depende sólo de la diferencia $t-s$. Esta condición puede caracterizarse en término de operadores.

Existe una clase de operadores normales (esto es, los operadores sobre un

espacio de Hilbert que conmutan con su adjunto), de notable interés general, y en particular, para la teoría de Procesos Estocásticos: son los llamados operadores *unitarios*.

Un operador U se llama *unitario* si satisface que

$$UU^* = U^*U = 1$$

En el mismo sentido en el que puede pensarse en los operadores hermitianos (es decir, los que coinciden con su adjunto) como números reales generalizados, los operadores unitarios pueden pensarse como números complejos de módulo 1.

Observe que un operador unitario es invertible, y de hecho, los operadores unitarios pueden caracterizarse como aquellos operadores U invertibles tal que $U^{-1} = U^*$. La razón principal de la importancia de los operadores unitarios, es que son exactamente los automorfismos de H (esto es, los isomorfismos de H sobre H). Observe que puesto que un isomorfismo es una isometría, se sigue que un automorfismo es, en particular, un operador. De hecho, una condición necesaria y suficiente para que un operador U sea un automorfismo de H es que sea unitario.

1.26. Teorema

Si \mathcal{M} es el subespacio lineal cerrado generado por el proceso $\{X_t, t \in T\}$ en $L_2(\Omega)$, existe un grupo $\{U_t, t \in T\}$ de operadores unitarios tal que

$$U_t X_s(\omega) = X_{s+t}(\omega)$$

o equivalentemente

$$X_t = U_t X_0$$

Von Neumann y Wintner prueban, para el caso de sucesiones estacionarias $\{X_n, -\infty < n < \infty\}$, donde un resultado análogo a 1.26 establece que podemos escribir $X_n = U^n X_0$ donde U es un operador unitario definido sobre L_2 , el siguiente resultado.

1.27. Teorema

Si U es una transformación unitaria con dominio \mathcal{M} , para cada $\lambda \in [-1/2, 1/2]$, existe en variedad lineal cerrada (subespacio) $\mathcal{M}(\lambda) \subseteq \mathcal{M}$ tal que:

1. $\mathcal{M}(-1/2)$ es una variedad lineal que contiene sólo las v.a. nulas c.s., y $\mathcal{M}(1/2) = \mathcal{M}$

2. $\mathcal{M}(\lambda) \subset \mathcal{M}(\mu)$ si $\lambda < \mu$

3. $\mathcal{M}(\lambda) = \bigcap_{\mu > \lambda} \mathcal{M}(\mu)$ $-1/2 \leq \lambda \leq 1/2$

y si $\tilde{E}(\lambda)$ es la proyección ortogonal de \mathcal{M} sobre $\mathcal{M}(\lambda)$, entonces, para todo x, y de \mathcal{M} :

$$E[(U^n X) \bar{Y}] = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n \lambda} dE[(\tilde{E}(\lambda) X) \bar{Y}] \quad (4)$$

Las propiedades anteriores de los operadores proyecciones implican que el proceso $\{\tilde{E}(\lambda) X, -1/2 \leq \lambda \leq 1/2\}$ tiene incrementos ortogonales, y que $E\{[\tilde{E}(\lambda) X] \bar{X}\}$ es real y monótona no decreciente en λ . Por tanto, si $X=Y$, la ecuación (4) se convierte en otra versión de la expresión de 1.24 para el caso discreto. La ecuación (4) puede escribirse de otras formas, dependiendo del tipo de integral usada, como por ejemplo

$$U^n X = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n \lambda} d\tilde{E}(\lambda) X \quad (5)$$

y como

$$U^n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i n \lambda} d\tilde{E}(\lambda) \quad (6)$$

El teorema correspondiente para el caso continuo al de Neumann y Wintner es:

1.28. Teorema

Si $\{U_t, -\infty < t < \infty\}$ es un grupo de transformaciones unitarias con dominio \mathcal{M} (donde $U_{s+t} = U_s U_t$). Entonces, (añadiendo la condición de continuidad posteriormente

descrita), para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, existe en variedad lineal cerrada (subespacio) $M(\lambda) \subseteq M$ tal que:

1. $\bigcap_{\lambda} M(\lambda)$ es una variedad lineal que contiene sólo las v.a. nulas c.s., y que es densa en M

2. $M(\lambda) \subset M(\mu)$ si $\lambda < \mu$

3. $M(\lambda) = \bigcap_{\mu > \lambda} M(\mu)$ $-1/2 \leq \lambda \leq 1/2$

y si $\tilde{E}(\lambda)$ es la proyección ortogonal de M sobre $M(\lambda)$, entonces, para todo x, y de M :

$$E[(U_t X) \bar{Y}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} dE[(\tilde{E}(\lambda) X) \bar{Y}] \quad (7)$$

o, en versiones alternativas,

$$U_t X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} d\tilde{E}(\lambda) X \quad (8)$$

y como

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \lambda} d\tilde{E}(\lambda) \quad (9)$$

La primera versión con $X=Y$, nos lleva a la representación 1.24 de la función covarianza como una transformada de Fourier-Stieltjes, la segunda nos lleva a la representación espectral 1.25 de un proceso estacionario en tiempo continuo.

El resultado anterior, se debe a Stone (1930) bajo la hipótesis que, para todo X, Y , $E[(U_t X) \bar{Y}]$ defina una función continua de t . Von Neumann (1932) probó que la medibilidad de esta función de t (para todo X, Y) implica su continuidad si M es separable.

Vamos a presentar, por último, el problema de predicción lineal mínimo cuadrática, donde juega un papel esencial la descomposición espectral, que introducimos previamente.

Si A_1, \dots, A_r son r λ -conjuntos disjuntos cuya unión es todo el eje λ , \mathbb{R} (el

intervalo $[-1/2, 1/2]$ en el caso discreto), y si suponemos que estos conjuntos son medibles con respecto a F , entonces es posible representar a $X_t(\omega)$ como suma de procesos estacionarios mutuamente ortogonales (del mismo tipo) cuya distribución espectral se reduce a los conjuntos A_1, \dots, A_r . Ciertos casos especiales de esta descomposición son muy importantes. Sea F una función de distribución espectral dada, entonces F se puede escribir de la forma

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

donde F_1 es una función de salto, F_2 es la componente absolutamente continua de F dada por

$$F_2(\lambda) = \int_0^\lambda F'(\mu) d\mu$$

y F_3 es continua, monótona y no decreciente, y es la parte singular. (F_1 está restringida a los puntos donde F es discontinua, F_2 a los puntos de continuidad donde F' es finita, y F_3 al resto, el conjunto de medida 0 donde F es continua y F' no existe o no es finita).

Esta descomposición nos lleva a la correspondiente descomposición del proceso X_t en tres procesos mutuamente ortogonales

$$X_t(\omega) = X_t^1(\omega) + X_t^2(\omega) + X_t^3(\omega)$$

El primero, X_t^1 se reduce a una simple suma: si $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ son las discontinuidades de F (supuesta continua por la derecha), las v.a. $Y(\lambda_j^+) - Y(\lambda_j^-)$ forma un proceso ortogonal, y $X_t^1 = \sum_j e^{i2\pi t \lambda_j} [Y(\lambda_j^+) - Y(\lambda_j^-)]$, donde la series convergen en media para cada t . La función covarianza es uniformemente casi periódica,

$$R^1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi t \lambda} dF(\lambda) = \sum_j e^{i2\pi t \lambda_j} [F(\lambda_j) - F(\lambda_j^-)]$$

Veremos que el problema de la predicción lineal implica separar $X_t^2(\omega)$ fuera de X_t .

Comenzaremos con el caso discreto. Sea $\{X_n\}$ un proceso estacionario con distribución espectral F . En lo que sigue describiremos como "F-medible" la medida $\int_E dF(\lambda)$ de λ -conjuntos E (medida de Lebesgue-Stieltjes). Previamente introducimos la siguiente notación, donde $\mathcal{M}\{\dots\}$ denota la variedad lineal cerrada generada por los elementos o conjuntos de elementos entre paréntesis.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(m,n) &= \mathcal{M}\{X_j: m < j \leq n\} & (m,n)\mathcal{N} &= \mathcal{M}\{e^{2\pi i j \mu}: m < j \leq n\} \\ \mathcal{N}_n &= \mathcal{N}(-\infty, n) & {}_n\mathcal{N} &= (-\infty, n)\mathcal{N} \\ \mathcal{N}_{-\infty} &= \bigcap_{-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_n & {}_{-\infty}\mathcal{N} &= \bigcap_{-\infty}^{\infty} {}_n\mathcal{N} \\ \mathcal{N}_{\infty} &= \mathcal{M}\{X_n: -\infty < j < \infty\} & {}_{\infty}\mathcal{N} &= \mathcal{M}\{e^{2\pi i j \mu}: -\infty < j < \infty\} \end{aligned}$$

Notese que la variedad ${}_{\infty}\mathcal{N}$ es la variedad \mathcal{N} generada por todas las funciones Φ que son F-medibles y para las cuales $\int_{-1/2}^{1/2} |\Phi(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty$.

El problema de la predicción X_{n+v} en base a un segmento finito del pasado, utilizando la predicción mínimo cuadrática consiste en aproximar X_{n+v} por combinaciones lineales $\sum_{j=0}^{N-1} b_j X_{n-j}$ minimizando el error cuadrático esperado

$$E\left[|X_{n+v} - \sum_{j=0}^{N-1} b_j X_{n-j}|^2\right]$$

Si N es fijo, existe una combinación lineal minimizante, que denotaremos $\psi_{n,v} = \hat{E}[X_{n+v} | X_{n-N+1}, \dots, X_n]$, que es la proyección de X_{n+v} sobre $\mathcal{N}(n-N, n)$.

Si no se fija N , el problema se replantea, minimizando

$$E\{|X_{n+v} - \psi|^2\} \quad \psi \in \mathcal{N}_n$$

y la solución es $\hat{E}[X_{n+v} | \mathcal{N}_n]$, proyección de X_{n+v} sobre \mathcal{N}_n .

En ambos casos la solución es única c.s.

Notese que $\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{E}\{X_n | \mathcal{N}(n-N, n)\} = \hat{E}\{X_n | \mathcal{N}_n\}$.

La representación espectral de X_n

$$X_n = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda n} dY(\lambda)$$

donde $Y(\lambda)$ es un proceso de incrementos ortogonales tal que

$$E[|dY(\lambda)|^2] = dF(\lambda)$$

juega un papel esencial en la consideración de la predicción lineal como una aproximación polinomial. Sabemos que si $\Phi \in \omega\mathcal{N}$, la integral estocástica

$$\psi = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi(\lambda) dY(\lambda)$$

define una v.a. con $E[|\psi|^2] < \infty$. (Por ejemplo, si $\Phi = e^{2\pi i \lambda n}$, $\psi = X_n$). Además, $\Phi \in \omega\mathcal{N}$ si y sólo si $\psi \in \mathcal{N}_\omega$, y se determinan univocamente una a la otra salvo conjuntos de medida nula.

Usando la correspondencia anterior, se resuelve el problema de predicción, buscando la función $\Phi_\nu \in \mathcal{N}_0$, llamada *función predicción para el retardo ν* , que minimiza

$$\int_{-1/2}^{1/2} |e^{2\pi i \lambda \nu} - \Phi(\lambda)|^2 dF(\lambda)$$

(Basta considerar la igualdad

$$E[|X_\nu - \sum_{j=0}^{N-1} b_j X_j|^2] = \int_{-1/2}^{1/2} |e^{2\pi i \lambda \nu} - \sum_{j=0}^{N-1} b_j e^{-2\pi i \lambda j}|^2 dF(\lambda)$$

para apreciar la equivalencia de ambas formulaciones).

La solución Φ_ν es la proyección de $e^{2\pi i \lambda \nu}$ sobre \mathcal{N}_0 , y está univocamente determinada salvo conjuntos de F -medida nula. Entonces, considerando la correspondencia anterior, tenemos que

$$\psi_{0,\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} \Phi_\nu(\lambda) dY(\lambda)$$

y en general,

$$\psi_{n,\nu} = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \lambda n} \Phi_\nu(\lambda) dY(\lambda)$$

Notese que si $\Phi_v(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j e^{-2\pi i \lambda j}$, entonces $\psi_{n,v}$ viene dado por

$$\psi_{n,v} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_{n-j}$$

Si σ_v^2 es el error cuadrático medio de predicción,

$$\sigma_v^2 = E[|X_{n+v} - \psi_{n,v}|^2] = \int_{-1/2}^{1/2} |e^{2\pi i \lambda v} - \Phi_v(\lambda)|^2 dF(\lambda)$$

entonces $0 \leq \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \leq \dots$. El proceso se dice *regular* si $\sigma_1^2 > 0$, y *no-regular* o *determinístico* si $\sigma_1^2 = 0$. En el caso regular, X_{n+1} no cae en \mathcal{N}_n y la sucesión de variedades $\{\mathcal{N}_n\}$ es estrictamente creciente. En el caso no regular, X_{n+1} cae en \mathcal{N}_n y todas las variedades \mathcal{N}_n son la misma, \mathcal{N}_∞ , siendo todos los σ_j nulos.

1.29. Teorema (Solución general al problema de predicción en el caso discreto)

Si $\{\varepsilon_n, -\infty < n < \infty\}$ es una sucesión ortonormal de v.a., si $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, $c_0 \neq 0$, y si

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n-j} \quad (10)$$

entonces, el proceso $\{X_n\}$ es estacionario y tiene densidad espectral $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n e^{-2\pi i n \lambda}|^2$. El proceso es regular, y el error de predicción cuadrático medio σ_v^2 , satisface la inecuación

$$\sigma_v^2 \geq |c_0|^2 + \dots + |c_{v-1}|^2$$

Notese que la serie dada en (10) converge en media, y que el proceso $\{X_n\}$ se puede expresar de la forma (10) si y sólo si la densidad espectral es absolutamente continua y

$$F'(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n e^{-2\pi i n \lambda}|^2 \quad \text{con} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \quad c_0 \neq 0$$

Por otra parte, todo proceso regular se puede descomponer en un proceso regular otro no regular de tipo canónico: Si \dots, X_0, X_1, \dots son las variables del

un proceso regular, definiendo $\{\varepsilon_n\}$ por

$$X_n - \psi_{n-1,1} = \sigma_1 \varepsilon_n$$

se puede escribir X_n como una suma, U_n , de series de Fourier en ε_n , y un resto, V_n :

$$X_n = U_n + V_n$$

donde $U_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n-j}$ con $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, $c_j = E[X_n \bar{\varepsilon}_{n-j}]$

Entonces, la descomposición se puede resumir:

1.30. Teorema (Descomposición de Wald)

Sea $\{X_n, -\infty < n < \infty\}$ un proceso regular. Entonces X_n se puede escribir de la forma

$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{n-j} + V_n = U_n + V_n$$

donde

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty, \quad c_0 > 0$$

$$E[\varepsilon_m \bar{\varepsilon}_n] = \delta_{mn}, \quad E[\varepsilon_m \bar{V}_n] = 0 \quad \forall m, n; \quad \varepsilon_n \in \mathcal{N}_n, \quad V_n \in \mathcal{N}_{-\infty}$$

Existe una sola sucesión de constantes $\{c_n\}$ y sólo una sucesión de v.a. $\{\varepsilon_n\}$ satisfaciendo estas condiciones.

En esta representación U_n es regular, V_n es determinística. La predicción ψ_{n-v} se da por

$$\psi_{n-v,v} = \sum_{j=v}^{\infty} c_j \varepsilon_{n-j} + V_n$$

El error de predicción es $\sigma_v^2 = \sum_{j=0}^{v-1} |c_j|^2$, que es el mismo del proceso $\{U_n\}$. Las distribuciones espectrales de U_n y V_n son respectivamente, la componente absolutamente continua y la componente singular de la distribución espectral del proceso X_n .

En el caso continuo, dado un proceso $\{X_t\}$ estacionario y débilmente continuo,

introducimos las correspondientes notaciones:

$$\begin{aligned}
 M(r,s) &= M\{X_t: r < t \leq s\} & (r,s)M &= M\{e^{2\pi i t \mu}: r < t \leq s\} \\
 M_t &= M(-\infty, t) & {}_tM &= (-\infty, t)M \\
 M_{-\infty} &= \bigcap_{-\infty}^{\infty} M_t & {}_{-\infty}M &= \bigcap_{-\infty}^{\infty} {}_tM \\
 M_{\infty} &= M\{X_t: -\infty < t < \infty\} & {}_{\infty}M &= M\{e^{2\pi i t \mu}: -\infty < t < \infty\}
 \end{aligned}$$

El problema de la predicción X_t en base a un segmento finito del pasado, utilizando la predicción mínimo cuadrática consiste en minimizar

$$E\{|X_t - \psi|^2\} \quad \psi \in M(r,s)$$

La solución es $\hat{E}\{X_t | M(r,s)\}$, y como en el caso discreto

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \hat{E}\{X_t | M(r,s)\} = \hat{E}\{X_t | M_s\}$$

Debido a la condición de continuidad impuesta al proceso, $M(r,s)$ es una variedad lineal cerrada generada por las v.a. X_{t_1}, X_{t_2}, \dots , donde $\{t_n\}$ es cualquier sucesión densa del intervalo (s,t) .

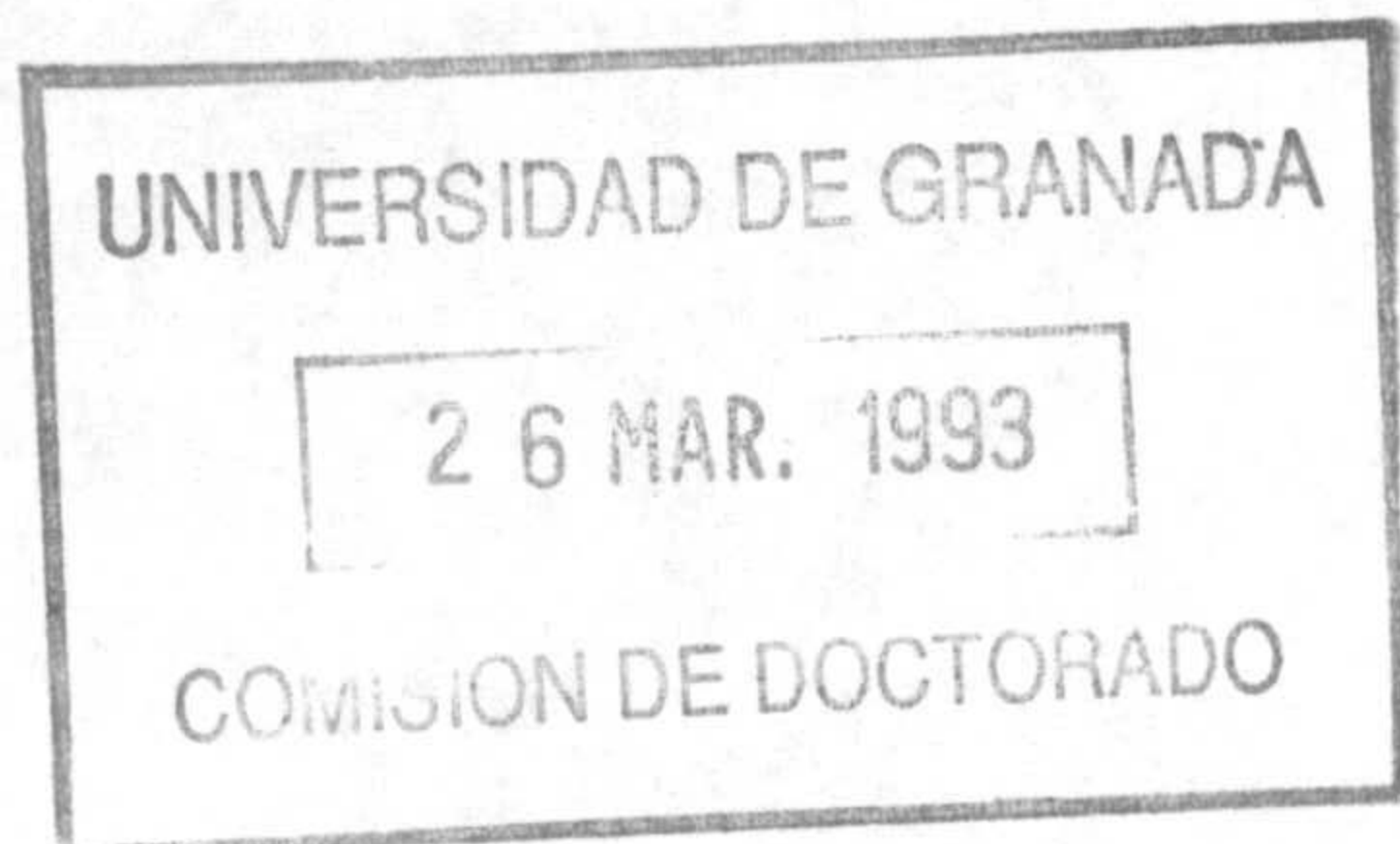
El problema de predicción en el caso continuo se basa en los resultados correspondientes al caso discreto, ya que a cada proceso de tipo continuo con distribución espectral G se le puede asociar un proceso de tipo discreto con distribución espectral F , donde

$$F(\lambda) = G(\mu), \text{ con } \lambda = \text{arctg}(\mu)/\pi$$

y de aquí,

$$e^{2\pi i \lambda} = \frac{1+i\mu}{1-i\mu} \quad \mu = \text{tg}(\pi\lambda) = -i \frac{e^{2\pi i \lambda} - 1}{e^{2\pi i \lambda} + 1}$$

Entonces basta considerar que la variedad de λ -funciones ${}_0N$ cae dentro de la variedad de μ -funciones $M = M\left\{\left(\frac{1+i\mu}{1-i\mu}\right)^n, n \leq 0\right\}$, y que $M = {}_0M$.



Para mayor detalle en la discusión de funciones aleatorias estacionarias, podemos referirnos a los manuales de Doob[7], Cramer y Leadbetter[4], Hida[12], Rozanov[32] y Yaglom[36].

1.2. FUNCIONES ALEATORIAS HILBERT-VALUADAS

En esta sección vamos a introducir las funciones aleatorias Hilbert-valuadas, estudiando con detalle las sucesiones estacionarias, las cuales nos permitirán resolver el problema de la aproximación lineal para procesos estacionarios débilmente continuos. El análisis de la función covarianza de una función aleatoria de segundo orden, motivará la generalización del concepto para sucesiones de operadores de Hilbert-Schmidt, cuya descomposición ortogonal y análisis espectral repercutirá a su vez, en las funciones aleatorias asociadas.

En lo que sigue, T denota un subconjunto real de índices, y X_t un vector aleatorio de segundo orden H -valuado, esto es, un elemento de \mathbb{H}_2 .

1.31. Definición

Una *función aleatoria de segundo orden* H -valuada es una aplicación de T en \mathbb{H}_2 tal que

$$t \mapsto X_t$$

Se suele representar por $\{X_t, t \in T\}$

A. FUNCION COVARIANZA DE UNA FUNCION ALEATORIA DE SEGUNDO ORDEN

1.32. Definición

La función $R(s,t)$ definida sobre $T \times T$ por

$$\langle R(s,t)x,y \rangle = E[\langle X_s(\omega),x \rangle \overline{\langle X_t(\omega),y \rangle}] \quad \forall (x,y) \in H \times H$$

se llama *función covarianza* de la función aleatoria de segundo orden $\{X_t, t \in T\}$.

Asociando a cada vector aleatorio de segundo orden X_t su operador de Hilbert-Schmidt $F_t \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$, la función $R(s,t)$ puede considerarse como una aplicación de $T \times T$ en $\mathcal{L}(H)$ dada por

$$R(s,t) = F_t^* F_s$$

ya que si $(x,y) \in H \times H$:

$$\langle R(s,t)x,y \rangle = E[\langle X_s(\omega), x \rangle \overline{\langle X_t(\omega), y \rangle}] = \langle F_s x, F_t y \rangle = \langle F_t^* F_s x, y \rangle$$

En lo que sigue, toda función aleatoria de segundo orden $\{X_t\}$ queda perfectamente determinada por la respectiva función de operadores de Hilbert-Schmidt asociados $\{F_t\}$. De hecho, podemos generalizar lo visto anteriormente, e introducir el siguiente concepto:

1.33. Definición

La aplicación $R: T \times T \rightarrow \mathcal{L}(H, K)$ definida por

$$R(s,t) = F_t^* F_s$$

se llama *función covarianza* si K denota otro espacio de Hilbert involutivo (al igual que \mathbb{C}_2).

1.34. Teorema

Sea $R(s,t)$ una aplicación de $T \times T$ en $\mathcal{L}(H)$. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:

1. Existe un espacio de Hilbert K , y una aplicación $t \mapsto F_t$ de T en $\mathcal{L}(H, K)$ tal que $R(s,t) = F_t^* F_s$.

2. Para todo subconjunto finito J de T y toda familia $\{x_j, j \in J\}$ de elementos de H , se tiene que

$$\sum_{s,t \in J} \langle R(s,t)x_s, x_t \rangle \geq 0$$

3. Para todo subconjunto finito J de T y toda familia $\{A_j, j \in J\}$ de operadores de $\mathcal{L}(H)$, se tiene que

$$\sum_{s,t \in J} A_t^* R(s,t) A_s \geq 0$$

Demostración:

Sólo necesitamos probar que $2) \Rightarrow 1)$.

Sea $\{e_i, i \in I\}$ una base ortonormal numerable de H . Consideremos el conjunto $V = I \times T$. La función f definida sobre $V \times V$ por

$$f((i,s),(j,t)) = \langle R(s,t)e_i, e_j \rangle \quad (2)$$

es una función compleja de tipo positivo, y por tanto, (ver Moore[27]), existe un espacio de Hilbert K y una aplicación $(i,s) \mapsto h(i,s)$ de V en K tal que

$$\langle h(i,s), h(j,t) \rangle = f((i,s),(j,t)) \quad (3)$$

Si $x \in H$, sea x_i su coordenada i respecto de la base. Para todo $\varepsilon > 0$, puede encontrarse una familia $J \subset I$, tal que para cualquier otra familia finita $W \subset I$, disjunta con J , se tiene que

$$\sum_{i \in W} |x_i|^2 \leq \varepsilon$$

con lo cual, la proyección x_W del elemento x en el subespacio generado por la familia $\{e_i, i \in W\}$ de elementos de la base, verifica que $\|x_W\| \leq \varepsilon$. Entonces:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in W} x_i h(i,t) \right\|^2 &= \sum_{i \in W} \sum_{j \in W} x_i \bar{x}_j \langle R(s,t)e_i, e_j \rangle = \\ &= \langle R(s,t)x_W, x_W \rangle \leq \|R(t,t)\| \|x_W\|^2 \leq \|R(t,t)\| \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir:

$$X_t x = \sum_{i \in I} x_i h(i,t)$$

La aplicación definida por $x \mapsto X_t x$ es un elemento de $L(H,K)$. La linealidad es inmediata, y de (4), se tiene que para todo subconjunto finito W de I :

$$\|X_t x_W\|^2 \leq \|R(t,t)\| \|x_W\|^2$$

y por consiguiente,

$$\|X_t x\|^2 \leq \|R(t,t)\| \|x\|^2$$

que prueba la continuidad. Finalmente, de (2) y (3) resulta que

$$R(s,t) = F_t^* F_s \quad \bullet$$

1.35. Corolario

Sea $R(s,t)$ una función de $T \times T$ en $\mathcal{L}(H)$. Existe un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y una aplicación $t \mapsto X_t$ de T en \mathbb{H}_2 cuya covarianza es $R(s,t)$ si las dos propiedades siguientes se verifican:

1. $R(s,t)$ es de tipo positivo.
2. Para todo $t \in T$, $R(t,t)$ es un operador lineal de traza finita.

B. SUCESIONES ESTACIONARIAS HILBERT-VALUADAS

Sean H y K dos espacios de Hilbert sobre el mismo cuerpo (\mathbb{R} o \mathbb{C}), y sea $\mathcal{L}(H,K)$ el conjunto de operadores lineales y continuos de H en K .

1.36. Definición

Una aplicación de \mathbb{Z} en $\mathcal{L}(H,K)$ se dice *estacionaria* si su función covarianza $R(s,t) = F_t^* F_s$ depende sólo de la diferencia $s-t$.

1.37. Definición

Una aplicación $n \mapsto T_n$ de \mathbb{Z} en $\mathcal{L}(H,K)$ se llama *representación unitaria* si:

1. $T_0 = I$ (operador identidad)
2. $T_n T_m = T_{m+n} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$
3. $T_n^* T_n = I \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

(La representación suele denotarse por $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$).

Análogo al teorema 1.26, se obtuvo, para sucesiones estacionarias Hilbert-valoradas, el siguiente resultado.

1.38. Teorema

Sea $\{F_n\}$ una sucesión estacionaria de \mathbb{Z} en $\mathcal{L}(H,K)$, y M el subespacio de K generado por la familia

$$\{F_n x: x \in H, n \in \mathbb{Z}\}$$

Entonces, existe una representación unitaria $\{T_n\}$ de \mathbb{Z} en M tal que

$$F_{n+m} = T_n F_m$$

Demostración:

Para toda familia finita J de \mathbb{Z} , y toda familia $\{x_j, j \in J\}$ de elementos de H , se tiene que

$$\text{Para todo } t \in \mathbb{Z}, \quad \left\| \sum_{j \in J} F_{n+j} x_j \right\| = \left\| \sum_{j \in J} F_j x_j \right\| \quad (4)$$

En efecto, es suficiente elevar el primer miembro al cuadrado y utilizar la propiedad:

$$F_{n+m}^* F_{n+m} = F_m^* F_m$$

Designando por N el subespacio de K generado por la familia $\{F_n x: x \in H, n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, todo elemento u de N , puede escribirse:

$$u = \sum_{j \in J} F_j x_j$$

Esta expresión puede no ser única, pero si

$$u = \sum_{j \in J} F_j x_j = \sum_{j \in J} F_j y_j$$

se tiene que

$$u = \sum_{j \in J} F_{n_j} x_j = \sum_{j \in J} F_{n_j} y_j$$

Entonces, por la igualdad (4):

$$\left\| \sum_{j \in J} F_{n_j} (x_j - y_j) \right\| = \left\| \sum_{j \in J} F_j (x_j - y_j) \right\| = 0$$

lo que permite definir, una representación $\{T_n\}$ de \mathbb{Z} en N por:

$$T_n \left(\sum_{j \in J} F_j x_j \right) = \sum_{j \in J} F_{n_j} x_j$$

Como T_n es lineal e isométrico, puede extenderse por continuidad a M , y además, la igualdad $F_{n+m} = T_n F_m$ se satisface, y se verifica sin dificultad que $\{T_n\}$ es un grupo. •

1.39. Nota

El resultado anterior es cierto si $\{F_n\}$ es una sucesión estacionaria de un

grupo G cualquiera en $\mathcal{L}(H,K)$. Es fácil comprobar (ver Martínez[21]), que si G es un grupo topológico, y $\{F_n\}$ es débilmente continua en $\mathcal{L}(H,K)$, entonces $\{T_n\}$, en $\mathcal{L}(M)$, es también débilmente continua.

1.40. Corolario

Si $\{X_n\}$ es una sucesión estacionaria de v.a. H -valuadas, entonces existe una representación unitaria en $\mathcal{L}(M)$, donde $M = \mathcal{M}\{X_n x: x \in H, n \in \mathbb{Z}\}$, tal que

$$X_{n+m} = T_n X_m$$

Demostración:

Basta considerar la sucesión de operadores asociada a $\{X_n\}$ •

Vamos a describir la descomposición de Wald de una sucesión estacionaria $\{F_n\}$, para ello, previamente introducimos las siguientes notaciones y conceptos:

Designemos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, por $\mathcal{M}_n(F)$, el subespacio de K generado por los vectores $F_m a$, con $m \in (-\infty, n]$, $a \in H$, esto es, $\mathcal{M}(F_m a, a \in H, m \leq n)$. Sea $\mathcal{M}_{-\infty}(F) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_n(F)$, y $\mathcal{M}_{\infty}(F) = \mathcal{M}\{F_n a, n \in \mathbb{Z}\}$.

(Notese que como consecuencia del teorema anterior, existe un operador unitario único $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{\infty}(F))$ tal que $T_n = T^n$, esto es, $F_n = T^n F_0$)

1.41. Definición

La sucesión $\{F_n\}$ se dice determinística si \mathcal{M}_n no depende de n . Se dice puramente determinística si $\mathcal{M}_{-\infty} = 0$.

1.42. Definición

Dos sucesiones $\{F_n\}$ y $\{G_n\}$ se dicen ortogonales si $M_\infty(F) \perp M_\infty(G)$.

Necesitaremos el concepto de operador parcialmente isométrico.

1.43. Definición

Un operador $A \in \mathcal{L}(H)$ se dice *parcialmente isométrico* si existe un subespacio M de H tal que:

1. $\|Ax\| = \|x\| \quad \forall x \in M$

2. $Ax = 0 \quad \forall x \perp M$.

Diremos que A es parcialmente isométrico sobre M

Es conocido, (ver Maurin[26]), que a todo operador A , podemos asociarle un operador parcialmente isométrico B tal que

$$A = B|A|$$

donde $|A| = (A^*A)^{1/2}$ se llama parte positiva de A . La descomposición anterior recibe el nombre de *descomposición polar*.

1.44. Teorema

Toda sucesión estacionaria puede descomponerse como suma de dos sucesiones ortogonales $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ asociadas a la misma representación unitaria, donde $\{V_n\}$ es determinística y $\{U_n\}$ es puramente no determinística.

Además, la sucesión U_n puede escribirse como suma de una serie fuertemente convergente de la siguiente forma:

$$U_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} A_k$$

donde $A_k \in \mathcal{L}(H)$ y $\{\varepsilon_n = T^n \varepsilon_0, n \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión ortogonal de operadores parcialmente isométricos. Además, si $n \geq m$, se tiene

$$U_m^* U_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* A_{n-m+k}$$

(donde la serie converge débilmente en $\mathcal{L}(H)$).

Demostración:

Designemos por P_n el proyector de K sobre el subespacio lineal cerrado $\mathcal{M}_n(F)$ generado por $\{F_k a, k \leq n, a \in H\}$, y sea T es el operador unitario asociado a la sucesión F_n (esto es, $F_n = T^n F_0$).

Se tiene que $\mathcal{M}_{n+k}(F) = T^k \mathcal{M}_n(F)$, de donde $P_{n+k} T^k = T^k P_n$ para todo k fijo pero arbitrario. De aquí, que $P_{\infty} T^k = T^k P_{\infty}$.

Definimos $V_n = P_{\infty} F_n$ y $U_n = F_n - V_n$.

Es claro que $\{V_n\}$ y $\{U_n\}$ son ortogonales. La sucesión $\{U_n\}$ es puramente no determinística, ya que $Q_n = P_n - P_{\infty}$ es el proyector sobre $\mathcal{M}_n(U)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0$ (límite en $\mathcal{L}(K)$ de una sucesión decreciente de proyectores).

Por otra parte $\mathcal{M}_n(V) = \mathcal{M}_{\infty}(F)$, por lo que $\{V_n\}$ es determinística.

Sea $Z_n = F_n - P_{n-1} F_n$.

Puesto que:

$$P_{n-1} = T^n P_{-1} T^{-n}$$

donde, se tiene que:

$$F_n = T^n F_0 - (T^n P_{-1} T^{-n}) T^n F_0 = T^n F_0$$

La sucesión $\{Z_n\}$ es, por tanto, estacionaria, y si ε_n designa el operador parcialmente isométrico asociado a Z_n en la fórmula de descomposición polar $Z_n = \varepsilon_n |Z_n|$, se tiene

$$Z_n = T^n Z_0 = T^n \varepsilon_0 |Z_0|$$

Además, $T^n \varepsilon_0$ es un operador parcialmente isométrico, puesto que ε_0 lo es, y

el dominio inicial de $T^n \varepsilon_0$ es el de ε_0 , resulta entonces de la unicidad de la descomposición polar de Z_n que $\varepsilon_n = T^n \varepsilon_0$.

Por otra parte, puesto que $\{P_n\}$ es una sucesión creciente de operadores proyectores, y $Z_n = (P_n - P_{n-1})Z_n$, los subespacios $Z_n(H)$ son ortogonales dos a dos, y la sucesión $\{\varepsilon_n\}$ es ortonormal.

Los proyectores sobre $\overline{Z_n(H)}$ son $\varepsilon_n \varepsilon_n^*$. Considerando:

$$Q_n = P_n - P_{-\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} \varepsilon_{n-k}^*$$

obtenemos

$$U_n = Q_n F_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} A_k$$

donde $A_k = \varepsilon_{n-k}^* F_n$ no depende de k , ya que:

$$A_k = \varepsilon_{n-k}^* F_n = (T^{n-k} \varepsilon_0)^* (T^n F_0) = \varepsilon_0^* T^k F_0$$

Finalmente,

$$\varepsilon_p^* \varepsilon_p A_k = \varepsilon_p^* \varepsilon_p \varepsilon_p^* F_{p+k} = \varepsilon_p^* F_{p+k} = A_k$$

con $A_0 = |Z_0|$ ya que,

$$A_0 = \varepsilon_0^* F_0 = \varepsilon_0^* \varepsilon_0 \varepsilon_0^* F_0 = \varepsilon_0^* (P_0 - P_{-1}) F_0 = \varepsilon_0^* F_0 = \varepsilon_0^* \varepsilon_0 |Z_0| = |Z_0|$$

y por tanto,

$$U_m^* U_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* A_{n-m+k}$$

Resulta, en particular que $A_0(H)$ es denso en H_0 , dominio inicial común a todos los ε_n . •

1.45. Corolario

Toda sucesión aleatoria de segundo orden estacionaria $\{X_n\}$ puede descomponerse como suma de dos sucesiones estacionarias, una puramente no determinística y otra determinística.

Demostración:

Basta considerar la sucesión de operadores de Hilbert-Schmidt asociados, y aplicar el teorema anterior. ●

Para obtener un teorema análogo al 1.27 de representación espectral, vamos a introducir algunas consideraciones básicas de la teoría espectral.

1.46. Definición

Designemos por H un espacio de Hilbert con una σ -álgebra \mathcal{B} . Una medida espectral \mathcal{E} sobre H es una aplicación definida sobre \mathcal{B} en el conjunto $\mathcal{P}(H)$ de los operadores proyección del espacio H , es decir, una aplicación $\mathcal{E}:\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{L}(H)$, tal que

1. $\mathcal{E}(H) = I$

2. $\mathcal{E}\left(\bigcup_n M_n\right) = \sum_n \mathcal{E}(M_n)$ para toda sucesión $\{M_n\}$ de conjuntos disjuntos de \mathcal{B} .

Un ejemplo típico de medida espectral se obtiene considerando (H,\mathcal{B}) no sólo como un espacio medible, sino como un espacio medible con una medida μ (espacio de medida), y tomando como espacio de Hilbert H , $L_2(\Omega,\mu)$, (esto es, el espacio de las funciones complejas definidas en Ω con módulo cuadrado integrable con respecto a μ), y escribiendo $\mathcal{E}(M)f = \mathbb{1}_M \circ f$ para cada $M \in \mathcal{B}$, y donde $\mathbb{1}_M$ denota la función característica del conjunto M .

Es inmediato ver, con las técnicas generales de la teoría de medida elemental, que si \mathcal{E} es una medida espectral, entonces $\mathcal{E}(\emptyset)=0$ y que \mathcal{E} es finitamente aditiva. Además destacamos las siguientes propiedades:

a) Si \mathcal{E} es una función de conjunto finitamente aditiva definida sobre la clase \mathcal{S} de todos los subconjuntos medibles de un espacio medible y valuada en el conjunto de las proyecciones sobre H (en particular si \mathcal{E} es una medida espectral),

entonces:

- es monótona y substractiva, esto es, si $M, N \in \mathcal{P}$, con $M \subseteq N$, entonces

$$\mathcal{E}(M) \leq \mathcal{E}(N) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}(N-M) = \mathcal{E}(N) - \mathcal{E}(M)$$

- es modular y multiplicativa, esto es, si $M, N \in \mathcal{P}$, entonces

$$\mathcal{E}(M \cup N) + \mathcal{E}(M \cap N) = \mathcal{E}(M) + \mathcal{E}(N) \quad \text{y} \quad \mathcal{E}(M \cap N) = \mathcal{E}(M)\mathcal{E}(N).$$

b) Una función de conjunto \mathcal{E} definida sobre la clase \mathcal{P} de todos los subconjuntos medibles de un espacio medible H y valuada en el conjunto de las proyecciones sobre H es una medida espectral si y sólo si

- $\mathcal{E}(\Omega) = \mathbb{1}$, y

- para cada par de vectores x e y , la función de conjunto complejo-valuada μ definida para cada $M \in \mathcal{P}$ por

$$\mu(M) = \langle \mathcal{E}(M)x, y \rangle$$

es σ -aditiva.

c) Si notamos por $\mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$ a la clase de las funciones medibles, acotadas y complejo-valuadas definidas sobre Ω , y escribiremos $N(f) = \text{Sup}\{|f(\omega)| : \omega \in \Omega\}$ donde $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$:

i) Si \mathcal{E} es una medida espectral y si $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$, entonces existe un único operador A tal que

$$\langle Ax, y \rangle = \int f(\omega) d\langle \mathcal{E}(\omega)x, y \rangle$$

para cada par de vectores x e y ; la relación de A con f y \mathcal{E} la denotaremos escribiendo

$$A = \int f d\mathcal{E} = \int f(\omega) d\mathcal{E}(\omega)$$

ii) Si \mathcal{E} es una medida espectral y si $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$, y α es un número complejo, entonces

$$\int (\alpha f) d\mathcal{E} = \alpha \int f d\mathcal{E}, \quad \int (f+g) d\mathcal{E} = \int f d\mathcal{E} + \int g d\mathcal{E}$$

y

$$\int \bar{f} d\mathcal{E} = \overline{\left(\int f d\mathcal{E} \right)}$$

iii) Si \mathcal{E} es una medida espectral y si $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$, entonces

$$\left(\int f d\mathcal{E}\right)\left(\int g d\mathcal{E}\right) = \int (fg) d\mathcal{E}$$

Como consecuencia, si \mathcal{E} es una medida espectral, entonces

$$\int d\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{E}(H) = 1$$

y más generalmente,

$$\int \mathbb{1}_M(\omega) d\mathcal{E}(\omega) = \int_M d\mathcal{E}(\omega) = \mathcal{E}(M) \quad \forall M \in \mathcal{Y}$$

Además, si $f, g \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$, entonces $\int f d\mathcal{E}$ y $\int g d\mathcal{E}$ conmutan; y si $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$, entonces $\int f d\mathcal{E}$ es normal.

Teniendo en cuenta el teorema de Stone (ver Riesz-Nagy[31], p. 379), vamos a introducir la representación espectral de una sucesión estacionaria:

1.47. Teorema

Toda representación unitaria $n \mapsto T_n$ débilmente continua admite una representación espectral

$$T_n = \int_{\tilde{\mathbb{Z}}} e^{i\lambda n} d\mathcal{E}_\lambda$$

donde \mathcal{E}_λ es una medida espectral definida de $\tilde{\mathbb{Z}}$ (dual de \mathbb{Z}) en $\mathcal{L}(P)$ tal que $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda$ para todo $\lambda \in \tilde{\mathbb{Z}}$.

A partir del teorema de Stone, podemos enunciar:

1.48. Teorema

Sean H y K dos espacios de Hilbert, $n \mapsto F_n$ una sucesión estacionaria de un grupo abeliano localmente compacto G en $\mathcal{L}(H, K)$, $n \mapsto T_n$ una representación unitaria

de G el $\mathcal{L}(H,K)$ asociada a la sucesión anterior, \tilde{G} el dual de G , y ε_λ la medida espectral dada por el teorema de Stone.

Si $Y_\sigma = \varepsilon_\sigma F_0$, donde σ es un boreliano de \tilde{G} , entonces:

$$F_s = \int_{\tilde{G}} \overline{\langle s, \lambda \rangle} dY_\lambda \quad (5)$$

y

$$F_t^* F_s = \int_{\tilde{G}} \overline{\langle t-s, \lambda \rangle} d(Y_\lambda^* Y_\lambda) \quad (6)$$

Demostración:

La igualdad (5) es consecuencia del teorema 1.38 y de la fórmula de Stone

$$T_s = \int_{\tilde{G}} \overline{\langle s, \lambda \rangle} d\varepsilon_\lambda$$

El significado de esta fórmula es el siguiente: A cada conjunto boreliano σ de \tilde{G} le corresponde un proyector $\varepsilon_\sigma \in \mathcal{L}(K)$ tal que

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_{\tilde{G}} = \mathbb{1}, \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\sigma \cap \sigma'} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_{\sigma'}$$

Para cada $u, v \in K$, la aplicación $\sigma \mapsto \langle \varepsilon_\sigma u, v \rangle$ es una medida acotada sobre \tilde{G} , y la integral de la función $\lambda \mapsto \overline{\langle s, \lambda \rangle}$ con respecto a esta medida es $\langle T_s u, v \rangle$.

Si $Y_\sigma = \varepsilon_\sigma F_0$, se tiene que:

$$Y_0 = 0, \quad Y_{\tilde{G}} = F_0, \quad Y_\sigma^* Y_\sigma = F_\sigma^* \varepsilon_\sigma \varepsilon_\sigma F_\sigma = F_\sigma^* \varepsilon_{\sigma \cap \sigma} F_\sigma$$

y si $\sigma = \bigcup_n \sigma_n$, con σ_n borelianos disjuntos, entonces

$$Y_\sigma = \sum_n Y_{\sigma_n} \quad (\text{suma fuerte de aplicaciones ortogonales de } \mathcal{L}(H,K)).$$

Para todo x de H , y todo u de K , la aplicación $\sigma \mapsto \langle Y_\sigma x, u \rangle$ es una medida acotada sobre \tilde{G} , y la integral de la función $\lambda \mapsto \overline{\langle s, \lambda \rangle}$ con respecto a esta medida es $\langle F_s x, u \rangle$, de ahí la igualdad (5).

Para todo $x, y \in H$, se tiene:

$$\langle F_s x, F_t y \rangle = \langle F_{s-t} x, F_0 y \rangle = \int_{\tilde{G}} \overline{\langle t-s, \lambda \rangle} d\langle Y_\lambda x, Y_\lambda y \rangle$$

y de aquí resulta (6), puesto que

$$F_0^* Y_\sigma = F_0^* \varepsilon_\sigma F_0 = Y_\sigma^* Y_\sigma \quad \bullet$$

En particular, si $G = \mathbb{Z}$, con lo cual el toro unidimensional $\tilde{\mathbb{Z}}$ puede ser identificado con el intervalo $[0, 2\pi[$. Denotando, para cada $\lambda \in [0, 2\pi[$, por $Y_\lambda = Y_{[0, \lambda[}$, las expresiones (5) y (6) quedan:

$$F_s = \int_0^{2\pi} e^{-is\lambda} dY_\lambda \quad (5')$$

y

$$F_t^* F_s = \int_0^{2\pi} e^{i(t-s)\lambda} d(Y_\lambda^* Y_\lambda) \quad (6')$$

Si $G = \mathbb{R}$, las integrales sobre $[0, 2\pi[$ son reemplazadas por integrales sobre \mathbb{R} .

Cuando H es un espacio de dimensión mayor que 1, la descomposición de Wald de un proceso no determinístico no corresponde a la descomposición de la medida espectral en la parte absolutamente continua y la parte singular.

Para caracterizar la medida espectral que corresponde a la parte puramente no determinística, introducimos la noción de *parte factorizable máxima* de una función matricial definida positiva.

Designemos por $J \subseteq \mathbb{N}$ una familia de índices, y por H_J es subespacio de H generado por los vectores de la base $\{e_p, p \in J\}$. Sea $\lambda \mapsto W(\lambda)$ una función matricial con términos $w_{p,q}(\lambda)$, $p, q \in J$. A las matrices $(w_{p,q}(\lambda))_{p,q \in J}$ se les asocia un operador W_J de $\mathcal{L}(H_J)$ definido por

$$\langle W_J(\lambda) e_p, e_q \rangle = w_{p,q}(\lambda)$$

1.49. Definición

Una función matricial W se dice *definida positiva*, si para toda parte finita de índices J , W_J es un operador hermitiano positivo.

Se dice que W es integrable si todas las funciones $w_{p,q}$ son integrables.

Si la función matricial W es integrable y definida positiva, existe (ver Martinez[21]), una sucesión $\{X_n\}$ de elementos de \mathbb{H}_2 tal que

$$w_{p,q} = \langle X_p, X_q \rangle$$

y diremos que es *factorizable* si las X_n pueden tomarse de $L_{\mathbb{H}_2}$ (subespacio cerrado de \mathbb{H}_2 constituido por las funciones cuyos coeficientes de Fourier correspondiente a índices negativos son nulos).

La siguiente proposición puede verse en Payen[28], p. 367:

1.50. Proposición

Sea W una función matricial integrable y definida positiva. Entonces, el conjunto de funciones matriciales factorizables mayoradas por W posee un elemento máximo W' .

1.51. Definición

La función W' determinada en la proposición anterior se llama parte factorizable máxima de W .

Con lo anterior, se establece la descomposición de una sucesión estacionaria en el sentido siguiente:

1.52. Teorema

La medida espectral F de la sucesión estacionaria $\{X_n\}$ se descompone de forma única en suma de tres medidas espectrales:

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

donde $\hat{F} = F_1 + F_2$ es la parte absolutamente continua de F , F_3 es la parte singular de F , y para toda base ortonormal $\{e_n\}$ de H , la función matricial

$$w_{p,q}^{(1)}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \langle F_1(\lambda)e_p, e_q \rangle$$

es la parte factorizable máxima de la función matricial

$$\hat{w}_{p,q}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \langle \hat{F}(\lambda)e_p, e_q \rangle$$

Además, para toda base ortonormal $\{e_n\}$ de H , la función matricial

$$w_{p,q}^{(2)}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \langle F_2(\lambda)e_p, e_q \rangle$$

es puramente no factorizable.

Esta descomposición de $F(\lambda)$ corresponde a la descomposición de X_n en tres sucesiones estacionarias $X_n = X_n^{(1)} + X_n^{(2)} + X_n^{(3)}$, la primera puramente no determinística, la segunda determinística y de medida espectral absolutamente continua, y la tercera con medida espectral singular. Para $i=1,2,3$, $F_i(\lambda)$ es la medida espectral de la sucesión estacionaria $\{X_n^{(i)}\}$.

La demostración del resultado anterior puede verse en Martinez[21].

1.3. PROCESOS ESTACIONARIOS HILBERT-VALUADOS

En esta sección estudiaremos un proceso estacionario $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ de v.a. X_t con valores en un espacio de Hilbert H , y que supondremos débilmente continuo. Sea $\{T_t\}$ su representación unitaria asociada, que sabemos por 1.39, que es también débilmente continua.

A. SUCESSIONES ESTACIONARIAS ASOCIADAS

Vamos a asociar a cada proceso estacionario $\{X_t\}$, débilmente continuo, una sucesión $\{\hat{X}_n\}$, también estacionaria. Para ello, siguiendo la metodología precedente, trataremos la cuestión, de modo general, para funciones de segundo orden aleatorias estacionarias de operadores entre espacios de Hilbert.

En lo que sigue, G denotará un grupo abeliano localmente compacto, y $\{T_t, t \in G\}$ una representación unitaria débilmente continua de G en $\mathcal{L}(H)$.

Consideremos la aplicación de $\mathcal{L}^1(G, \mathbb{C})$ en $\mathcal{L}(H)$ dada por

$$\psi \mapsto \int_G \psi(t) T_t dt$$

y sea,

$$\hat{\psi}(x) = \int_G \psi(x) \overline{\langle x, \alpha \rangle} dx$$

la transformada de Fourier de ψ , $\mathcal{F}(\psi)$.

La aplicación

$$\hat{\psi} \mapsto T_{\hat{\psi}} = \int_G \psi(t) T_t dt$$

se puede extender a funciones medibles acotadas sobre \tilde{G} (grupo dual de G). A la función indicatriz de todo boreliano σ de \tilde{G} corresponde un proyector \mathcal{E}_σ , y se

tiene que

$$T_s = \int_{\tilde{G}} \overline{\langle s, \lambda \rangle} d\varepsilon_\lambda$$

Más generalmente, a toda función medible y acotada $\psi(\lambda)$ corresponde el operador

$$T_\psi = \int_{\tilde{G}} \psi(\lambda) d\varepsilon_\lambda$$

definido por

$$\langle T_\psi u, v \rangle = \int_{\tilde{G}} \psi(\lambda) d\langle \varepsilon_\lambda u, v \rangle \quad \forall u, v \in H$$

Sea una aplicación de \mathbb{R} en $\mathcal{L}(H, K)$ débilmente estacionaria, con H y K espacios de Hilbert, tal que a cada $t \in \mathbb{R}$, le corresponde $X_t = T_t X_0$, con

$$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} d\varepsilon_\lambda \quad (\text{fórmula de Stone})$$

El operador,

$$\hat{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda+i}{\lambda-i} d\varepsilon_\lambda$$

es unitario pues $|\frac{\lambda+i}{\lambda-i}| = 1$, y podemos asociar a $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ la sucesión $\{\hat{X}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ definida por

$$\hat{X}_n = \hat{T}_n X_0$$

1.53. Definición

Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario débilmente continuo, dado por $X_t = T_t X_0$. A la sucesión la sucesión $\{\hat{X}_n, n \in \mathbb{Z}\}$ dada por

$$\hat{X}_n = \hat{T}_n X_0$$

donde

$$\hat{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda+i}{\lambda-i} d\varepsilon_\lambda$$

se le llama *sucesión estacionaria asociada* a $\{X_t\}$.

1.54. Nota

La sucesión $\{\hat{X}_n\}$ es estacionaria por la forma de construirla.

Designemos, para cada $t \in \mathbb{R}$, por $M_t(X)$, el subespacio de K generado por los vectores $X_s a$, con $s \in (-\infty, t]$, $a \in H$, esto es, $M(X_s a, a \in H, s \leq t)$. Sea $M_{-\infty}(X) = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} M_t(X)$, y $M_{\infty}(X) = M\{X_s a, s \in \mathbb{R}\}$.

1.55. Proposición

Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario débilmente continuo, y $\{\hat{X}_n\}$ la sucesión estacionaria asociada, entonces

$$M_0(X) = M_0(\hat{X})$$

Demostración:

Para todo entero $n \geq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^n &= \left(1 - \frac{2i}{\lambda + i} \right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-2i)^k}{(\lambda + i)^k} = \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(2i)^k}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(\frac{1}{\lambda + i} \right) = 1 - \mathcal{F}(h(t) \mathbb{1}_{(-\infty, 0]} e^t) \end{aligned}$$

donde \mathcal{F} denota la transformada de Fourier y $h(t)$ es la función

$$h(t) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{2^k t^{k-1}}{(k-1)!}$$

Con ello,

$$\hat{T}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^n d\varepsilon_{\lambda} = \mathbb{1} - \int_{-\infty}^0 h(t) e^{tT} dt$$

donde $\mathbb{1}$ es el operador identidad de K .

Para todo $a \in H$, $u \in K$, $n \geq 0$, se tiene

$$\langle \hat{X}_{-n} a, u \rangle = \langle \hat{T}^{-n} X_0 a, u \rangle = \langle X_0 a, u \rangle - \int_{-\infty}^0 h(t) e^t \langle X_t a, u \rangle dt$$

Es claro que si u es ortogonal a $M_0(X)$, entonces es también ortogonal a $M_0(\hat{X})$, lo que prueba la inclusión

$$M_0(X) \subseteq M_0(\hat{X})$$

De forma análoga, se demuestra la inclusión contraria. •

1.56. Corolario

Con las hipótesis de la proposición anterior, entonces

$$M_{\infty}(X) = M_{\infty}(\hat{X}) \quad \text{y} \quad M_{-\infty}(X) = M_{-\infty}(\hat{X})$$

Demostración:

Para todo $a \in H$, $u \in K$ perpendicular a $M_0(\hat{X})$, se tiene que

$$\langle \hat{X}_n a, u \rangle = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta n} d\langle \tilde{\mathcal{E}}_{\theta} X_0 a, u \rangle = 0$$

donde $\tilde{\mathcal{E}}_{\theta}$ se obtiene mediante el cambio de variable

$$e^{i\theta} = \frac{\lambda - i}{\lambda + i}, \quad \lambda = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} i, \quad \text{y}$$

$$\hat{T}^n = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right)^n d\mathcal{E}_{\lambda} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta n} d\tilde{\mathcal{E}}_{\theta}$$

donde $\tilde{\mathcal{E}}_{\theta} = \mathcal{E}_{\lambda}$, λ y θ ligados por la relación anterior.

Entonces, puesto que $\langle \hat{X}_n a, u \rangle = 0$, la medida $d\langle \tilde{\mathcal{E}}_{\theta} X_0 a, u \rangle$ es nula, y

$$\langle X_{s,a,u} \rangle = \int_0^{2\pi} g_s(\theta) d\langle \tilde{\varepsilon}_\theta X_{0,a,u} \rangle = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

por tanto, $\mathcal{M}_\infty(X) \subseteq \mathcal{M}_\infty(\hat{X})$

La inclusión contraria, y el resto de la demostración se siguen de forma análoga. •

1.57. Corolario

Todo proceso estacionario débilmente continuo puede expresarse como suma de un proceso puramente no determinístico y otro proceso puramente determinístico.

Demostración:

Como se ha visto en la sección anterior, la sucesión estacionaria \hat{X}_n se puede descomponer en la parte puramente no determinística \hat{U}_n , y en la parte determinística \hat{V}_n ,

$$\hat{X}_n = \hat{U}_n + \hat{V}_n$$

Puesto que $\{\hat{X}_n\}$ es la sucesión estacionaria asociada al proceso $\{X_t\}$, y el proyector P_∞ de K sobre $\mathcal{M}_\infty(X) = \mathcal{M}_\infty(\hat{X})$ permuta con T_t , y por consiguiente, con el proyector espectral ε_λ , la sucesión $\{\hat{U}_n\}$ es la asociada a un proceso $\{U_t\}$, y la sucesión $\{\hat{V}_n\}$ es la asociada a un proceso $\{V_t\}$, y por tanto

$$X_t = U_t + V_t \quad \bullet$$

1.58. Nota

La sucesión \hat{U}_n puede escribirse como suma de una serie fuertemente

convergente de la siguiente forma:

$$\hat{U}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} A_k$$

donde $A_k \in \mathcal{L}(H)$ y $\{\varepsilon_n = T^n \varepsilon_0, n \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión ortogonal de operadores parcialmente isométricos. Además, si $n \geq m$, se tiene

$$\hat{U}_m^* \hat{U}_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* A_{n-m+k}$$

(donde la serie converge débilmente en $\mathcal{L}(H)$).

Al proceder los \hat{X}_n de una función aleatoria X_t de segundo orden, esto es de $\mathbb{H}_2(H, K)$, lo que es equivalente a que $\text{Traz}(X_t^* X_t) = \text{Traz}(X_0^* X_0) < \infty$, los operadores $U_n, V_n, \varepsilon_{n-k}$ y A_k , que intervienen en la descomposición de Wald, son operadores de Hilbert-Schmidt, y por tanto, corresponden a vectores de segundo orden, ya que:

$$\hat{X}_n^* \hat{X}_n = \hat{U}_n^* \hat{U}_n + \hat{V}_n^* \hat{V}_n \quad \text{y} \quad \hat{U}_n^* \hat{U}_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^* A_k$$

y se obtiene que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{Traz}(A_k^* A_k) = \text{Traz}(\hat{U}_n^* \hat{U}_n) \leq \text{Traz}(\hat{X}_n^* \hat{X}_n) < \infty.$$

B. FORMULA DE APROXIMACION LINEAL MEDIA CUADRATICA PARA PROCESOS ESTACIONARIOS

En este apartado nos proponemos establecer, para funciones aleatorias estacionarias debilmente continuas donde sus valores son operadores de Hilbert-Schmidt, una fórmula de media cuadrática de la forma

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-s) d\varepsilon(t) \quad (1)$$

donde ε es una aplicación tal que, a cada intervalo acotado e de \mathbb{R} , le hace corresponder un operador lineal de H en K , producto de un operador parcialmente isométrico por un escalar, y que satisfaga las propiedades de aditividad y ortogonalidad:

$$\begin{aligned} \varepsilon(e \cup e') &= \varepsilon(e) + \varepsilon(e') \\ \varepsilon^*(e)\varepsilon(e) &= 0 \end{aligned}$$

para intervalos e, e' disjuntos. Todos los operadores $\varepsilon(e)$ tienen el mismo dominio inicial $H_0 \subseteq H$, y $c(t)$ es una función con valores en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}(H, H_0)$ de operadores lineales de Hilbert-Schmidt de H en H_0 .

Sea $\{\hat{X}_n\}$ la sucesión estacionaria asociada a X_t , que supondremos inicialmente puramente no determinística. Entonces, sabemos que $\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} A_k$ donde $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión estacionaria ortonormal de $\mathcal{L}(H, K)$. Para todo intervalo $e = [a, b]$ de \mathbb{R} , sea

$$v_e(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 - i\lambda) \mathcal{F}(\mathbb{1}_e) \quad (2)$$

Puesto que $\mathcal{F}(\mathbb{1}_e) = \frac{e^{-i\lambda a} - e^{-i\lambda b}}{i\lambda}$, v_e es acotada, y podemos hacerle corresponder un operador de $\mathcal{L}(H)$ definido por

$$T_{v_e} = \int_{-\infty}^{\infty} v_e(\lambda) d\varepsilon_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_a^b T_t dt + \frac{1}{\sqrt{2}} (T_b - T_a)$$

1.59. Lema

Sea ε_0 el operador parcialmente isométrico de índice 0, dado 1.58. A_0 el proyector de H sobre H_0 , $\{E_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$ los proyectores espectrales del grupo unitario $\{T_t, t \in \mathbb{R}\}$, y $\{\tilde{E}_\theta, \theta \in [0, 2\pi[$ los operadores espectrales asociados a $\{\hat{T}^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Las medidas espectrales $d\langle \tilde{E}_\theta \varepsilon_0 a, \varepsilon_0 b \rangle$ y $d\langle E_\lambda \varepsilon_0 a, \varepsilon_0 b \rangle$ son respectivamente, los productos de la medida normalizada de Lebesgue $\frac{d\theta}{2\pi}$ sobre el toro, y la medida de Cauchy $\frac{d\lambda}{\pi(1+\lambda^2)}$ sobre \mathbb{R} .

Demostración:

Como $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión ortogonal de operadores parcialmente isométricos de H en K , con dominio inicial H_0 , se tiene:

$$\delta_{n,m} \langle A_0 a, b \rangle = d\langle \varepsilon_n a, \varepsilon_m b \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-n)} d\langle \tilde{E}_\theta \varepsilon_0 a, \varepsilon_0 b \rangle$$

de donde,

$$d\langle \tilde{E}_\theta \varepsilon_0 a, \varepsilon_0 b \rangle = \langle A_0 a, b \rangle \frac{d\theta}{2\pi}$$

Para la segunda medida, es suficiente aclarar que, $E_\lambda = \tilde{E}_\theta$, donde λ y θ se relacionan por la fórmula de cambio de variable $\lambda = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} i$ •

1.60. Proposición

A todo intervalo acotado e de \mathbb{R} asociamos un operador $\mathcal{E}(e)$ definido por $\mathcal{E}(e) = T_{V_e} \varepsilon_0$, siendo ε_0 el operador parcialmente isométrico que interviene en la

fórmula de aproximación lineal media cuadrática de la sucesión estacionaria puramente no determinística $\{\tilde{X}_n\}$, y T_{v_e} es el operador de $\mathcal{L}(H)$ definido en (2). El operador $\mathcal{E}(e)$ satisface:

1. $\mathcal{E}(e)$ es el producto de un operador parcialmente isométrico por $\sqrt{\lambda(e)}$, donde $\lambda(e)$ es la medida de Lebesgue del intervalo e .

$$2. \mathcal{E}^*(e')\mathcal{E}(e) = \lambda(e' \cap e)A_0$$

$$3. \text{ Si } e \text{ y } e' \text{ son disjuntos, } \mathcal{E}(e \cup e') = \mathcal{E}(e) + \mathcal{E}(e').$$

4. Si e_s designa el conjunto $\{x: x-s \in e\}$, se tiene que:

$$T_s \mathcal{E}(e) = \mathcal{E}(e_s)$$

Demostración:

La propiedad de aditividad 3 resulta inmediatamente de la aditividad del operador T . Demostremos 2: si $a, b \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}(e)a, \mathcal{E}(e')b \rangle &= \langle T_{v_e \bar{v}_e} \mathcal{E}_0 a, \mathcal{E}_0 b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_e(\lambda) \overline{v_{e'}(\lambda)} d \langle \mathcal{E}_\lambda \mathcal{E}_0 a, \mathcal{E}_0 b \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \lambda^2) \mathcal{F}(\mathbb{1}_e) \overline{\mathcal{F}(\mathbb{1}_{e'})} \langle A_0 a, b \rangle \frac{d\lambda}{\pi(1 + \lambda^2)} = \\ &= \langle A_0 a, b \rangle \lambda(e \cap e'). \end{aligned}$$

La propiedad 1 resulta inmediatamente de 2, y la propiedad 4 resulta de:

$$\mathcal{F}(\mathbb{1}_{e_s}) = \mathcal{F}(\mathbb{1}_e(t-s)) = e^{-i\lambda s} \mathcal{F}(\mathbb{1}_e)$$

de donde

$$T_{v_{e_s}} = T_{e^{-i\lambda s} v_e} = T_s T_{v_e} \bullet$$

Para establecer la fórmula de aproximación lineal, se establecen las siguientes definiciones:

1.61. Definición

Si ψ es una función escalonada tal que

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{e_i}(t)$$

donde $\mathbb{1}_{e_i}$ es el indicador del intervalo acotado e_i , y $\alpha_i \in \mathbb{C}$, se define

$$\mathcal{H}(\psi) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{E}(\mathbb{1}_{e_i})$$

Claramente, $\mathcal{H}(\psi)$ no depende de la forma de escribir ψ , por la aditividad 3 de la proposición anterior. Si ψ_1 es una función del mismo tipo,

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{e_i}$$

entonces, suponiendo los intervalos e_i disjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*(\psi_1)\mathcal{H}(\psi) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \mathcal{E}^*(\mathbb{1}_{e_i}) \mathcal{E}(\mathbb{1}_{e_i}) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_i \lambda(e_i) \right) A_0 = \langle \psi, \psi_1 \rangle_{\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2} A_0 \end{aligned}$$

Con lo cual, $\frac{1}{\|\psi\|} \mathcal{H}(\psi)$ es parcialmente isométrico.

Por ello, la aplicación

$$\psi \mapsto \mathcal{H}(\psi)$$

de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$ es lineal y continua en la topología uniforme de $\mathcal{L}(H, K)$. Esta aplicación permite estudiar por continuidad a $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$, es decir,

$$\mathcal{H}(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(dt) \psi(t) \quad \psi \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$$

Para definir la integral (1) vamos a proceder paso a paso. Sea $H_0 = A_0(H)$ el dominio inicial común a todos los operadores parcialmente isométricos \mathcal{E}_k ,

$$\varepsilon_k = \mathcal{H}(\Psi_k), \text{ siendo } \Psi_k = \mathcal{F}(\psi_k) \text{ y } \psi_k(\lambda) = \frac{i\sqrt{2}(\lambda-i)^k}{(\lambda+1)^{k+1}}.$$

Designemos por \mathcal{W}_0 (resp. \mathcal{W}) el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt $\mathcal{H}\mathcal{S}(H, H_0)$ (resp. $\mathcal{H}\mathcal{S}(H, H)$), que provisto con su estructura Hilbertiana, \mathcal{W}_0 es completo. Designemos por $\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2(\mathbb{R}, dt)$ el espacio de aplicaciones fuertemente medibles $c(t)$ de \mathbb{R} en \mathcal{W}_0 y tal que

$$\text{Traz}[c^*(t)c(t)]$$

sea una función integrable.

Provisto del producto escalar

$$\langle c, d \rangle_{\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traz}[d^*(t)c(t)] dt$$

$\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2(\mathbb{R}, dt)$ es un espacio de Hilbert.

Si c es de la forma

$$c(t) = \sum_{r=1}^n \mathbb{1}_{e_r} A_r$$

donde e_r es un intervalo de \mathbb{R} , y $A_r \in \mathcal{W}_0$, entonces, definiendo

$$\mathcal{H}(c) = \sum_{r=1}^n \varepsilon(e_r) A_r$$

$\mathcal{H}(c)$ no depende de la forma de escribir c , y la aplicación

$$c \mapsto \mathcal{H}(c)$$

es una aplicación lineal de un subespacio de $\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2(\mathbb{R}, dt)$ en el espacio de Hilbert de operadores de Hilbert-Schmidt $\mathcal{H}\mathcal{S}(H, K)$.

1.62. Teorema

La aplicación dada por $c \mapsto \mathcal{H}(c)$ es una isometría.

Demostración:

Sea $\{u_i, i \in I\}$ una base ortonormal de H , y sean $\{e_k\}$ una familia finita de intervalos acotados disjuntos de \mathbb{R} . Tenemos que,

$$\begin{aligned} \text{Traz}[\mathcal{H}^*(c)\mathcal{H}(c)] &= \sum_{i \in I} \|\mathcal{H}(c)u_i\|^2 = \sum_{i \in I} \left\| \sum_{r=1}^n \mathcal{E}(e_r)A_r u_i \right\|^2 = \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{r=1}^n \|A_r u_i\|^2 \lambda(e_r) = \sum_{r=1}^n \text{Traz}(A_r^* A_r) \lambda(e_r) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{Traz}[c^*(t)c(t)] dt = \|c\|_{\mathbb{L}_{W_0}^2}^2 \bullet \end{aligned}$$

Las funciones de la forma $c(t)$ constituyen un conjunto denso en $\mathbb{L}_{W_0}^2(\mathbb{R}, dt)$, y se pueden extender por continuidad a todo $\mathbb{L}_{W_0}^2(\mathbb{R}, dt)$. Por tanto

$$\mathcal{H}(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(dt)c(t)$$

1.63. Lema

Si la familia $\{\psi_i A_i, i \in I\}$ es sumable en $\mathbb{L}_{W_0}^2(\mathbb{R}, dt)$, donde $A_i \in W_0$ y $\psi_i \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$, entonces la familia $\{\mathcal{H}(\psi_i)A_i, i \in I\}$ es sumable en $\mathcal{H}^{\mathcal{S}}(H, K)$, y se tiene:

$$\mathcal{H}\left(\sum_{i \in I} \psi_i A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathcal{H}(\psi_i)A_i$$

Demostración:

Si ψ es una función escalonada, la igualdad $\mathcal{H}(\psi A) = \mathcal{H}(\psi)A$ se obtiene de las definiciones de $\mathcal{H}(c)$ y de $\mathcal{H}(\psi)$. Esta propiedad se extiende por continuidad a toda función ψ de $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$. El resto es una consecuencia inmediata de la propiedad de aditividad e isometría de la aplicación $c \mapsto \mathcal{H}(c)$. •

Recordemos que a toda función aleatoria $t \mapsto X_t$ estacionaria, le hemos asociado una sucesión $n \mapsto \hat{X}_n$, con $\hat{X}_n = \hat{T}^n X_0$, que es también estacionaria. Por otra parte, para sucesiones estacionarias puramente no determinísticas, se tiene que $\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} A_k$ donde $\{A_k\}$ son operadores de Hilbert-Schmidt y $\{\varepsilon_n\}$ es una sucesión de operadores parcialmente isométricos, entonces:

1.64. Teorema

Sea $\psi_k = \mathcal{F} \left(\frac{i\sqrt{2}(\lambda-i)^k}{(\lambda+1)^{k+1}} \right)$. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k A_k$$

converge en $\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2(\mathbb{R}, dt)$, y su suma c es tal que $\mathcal{H}(c) = X_0$.

Más generalmente,

$X_s = \mathcal{H}(c_s)$ donde $c_s(t) = c(t-s)$, y se puede escribir

$$X_s = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-s) d\varepsilon(t)$$

Demostración:

Puesto que la sucesión $\{\psi_k, k \geq 0\}$ es ortonormal en $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}, dt)$, la sucesión $\{\psi_k A_k, k \geq 0\}$ es ortogonal en $\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2(\mathbb{R}, dt)$. Por otra parte,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\psi_k A_k\|_{\mathbb{L}_{\mathcal{W}_0}^2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Traz}(A_k^* A_k) < \infty$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k A_k$ es convergente. Sea c su suma, entonces,

$$\mathcal{H}(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}(\psi_k) A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{-k} A_k = X_0$$

Además, para $k \geq 0$,

$$\psi_k = \frac{i\sqrt{2}(\lambda-i)^k}{(\lambda+1)^{k+1}} = \sum_{r=0}^k \frac{\beta_{r,k}}{(\lambda+i)^{r+1}} = \mathcal{F} \left(-i \sum_{r=0}^k \frac{\beta_{r,k}}{r!} (it)^r e^{t} \mathbb{1}_{(-\infty,0]} \right)$$

Si para $k \geq 0$, $\Psi_k(t)$ es nulo para $t \geq 0$, entonces $c(t) = 0$ $t > 0$.

Ahora bien, como $T_s \mathcal{H}(c) = \mathcal{H}(c_s)$, y esta igualdad se extiende por continuidad a toda función c de $L^2_{\mathcal{W}_0}(\mathbb{R}, dt)$, se tiene que

$$X_s = T_s X_0 = T_s \mathcal{H}(c) = \mathcal{H}(c_s). \quad \bullet$$

1.65. Nota

Podemos utilizar la fórmula de aproximación lineal para la predicción lineal se hace como en el caso de v.a. complejo-valoradas. Para el caso de sucesiones, la previsión lineal de $X_{n+\nu}$ en términos de X_n, X_{n-1}, \dots , es el vector aleatorio Y asociado al operador de Hilbert-Schmidt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{n-k} A_{\nu+k} + V_{n+\nu}$$

La innovación, para el término ν , posterior a n , $X_{n+\nu}$, es el vector aleatorio asociado al operador

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} \varepsilon_{n+\nu-k} A_k$$

y el operador

$$D = \sum_{k=0}^{\nu-1} A_k^* A_k$$

prevee el error de previsión

$$E | \langle X_{n+\nu}, a \rangle - \langle Y, a \rangle |^2 = \langle Da, a \rangle \quad \text{con} \quad E \| X_{n+\nu} - Y \|^2 = \text{Traz}(D)$$

Para el caso de procesos débilmente continuos, la previsión lineal de X_t en términos de un segmento finito del pasado se basa en la descomposición

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} c(t-s) d\varepsilon(s) + V_t$$

donde V_t es la parte determinística, y el otro sumando es la fórmula de aproximación lineal media cuadrática de la parte puramente no determinística, calculada a partir del segmento finito del pasado de la puramente no determinística $\{\hat{U}_n\}$ de la sucesión estacionaria asociada.

Capitulo II
PROCESOS ESTACIONARIOS
ADJUNTOS

2.1. INTRODUCCION

En todo el capítulo, H denotará un espacio de Hilbert separable e involutivo.

Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio probabilístico y, $X: \Omega \rightarrow H$ un vector aleatorio H -valuado. Sabemos que $X^*: \Omega \rightarrow H$, definido en 1.10, por

$$X^*(\omega) = (X(\omega))^* \quad \forall \omega \in \Omega$$

es un vector aleatorio H -valuado (por el teorema 0.32).

Dado un proceso aleatorio de segundo orden H -valuado $\{X_t\}$, estudiaremos el proceso $\{X_t^*\}$ adjunto asociado al proceso $\{X_t\}$ por la involución definida en el espacio de Hilbert. Se establece una correspondencia entre los operadores de Hilbert-Schmidt asociados a los vectores aleatorios X_t , y su adjuntos por la involución, X_t^* , para caracterizar con dicha correspondencia una relación entre las funciones covarianza del proceso y las de su adjunto. Además, la relación sirve de modelo para definir una involución en el espacio de operadores $\mathcal{L}(H)$, obteniéndose algunos resultados interesantes, que nos permitirán, por ejemplo, establecer, establecer que toda representación unitaria asociada a $\{X_t\}$ define una representación unitaria de $\{X_t^*\}$ que conserva la correspondencia descrita arriba, y como consecuencia de ello, obtenemos la descomposición de Wald y la fórmula de aproximación lineal del proceso adjunto.

2.2. PROPIEDADES ANALITICAS

El objetivo de esta sección es establecer algunas propiedades de tipo analítico, asociadas a la aplicación involución definida en H , y que serán de fundamental importancia en pos de los resultados buscados.

A. EL ESPACIO DE HILBERT INVOLUTIVO $\mathbb{H}_2 = \mathbb{H}_2(\Omega, H)$.

Comenzaremos con dos importantes teoremas, que nos permiten probar que el espacio \mathbb{H}_2 es involutivo.

2.1. Teorema

Si $X: \Omega \rightarrow H$ es un v.a. Hilbert-valuado tal que EX existe, entonces, EX^* existe, y se verifica que

$$EX^* = (EX)^*$$

Demostración:

Para todo $y \in H^*$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle EX^*, y \rangle &= E \langle X^*, y \rangle = E \langle y^*, X \rangle = \overline{E \langle X, y^* \rangle} = \overline{E \langle X, y^* \rangle} = \\ &= \overline{\langle EX, y^* \rangle} = \langle y, (EX)^* \rangle = \langle (EX)^*, y \rangle \end{aligned}$$

y por tanto, $EX^* = (EX)^*$. •

2.2. Teorema

Sea $X: \Omega \rightarrow H$ un v.a. Hilbert-valuado, entonces

$$X \in \mathbb{H}_2 \iff X^* \in \mathbb{H}_2$$

Demostración:

Basta considerar la propiedad 2 de la definición 0.31, con lo cual,

$$\|X^*\|^2 = \langle X^*, X^* \rangle = \langle X, X \rangle = \|X\|^2$$

Por tanto,

$$\int_{\Omega} \|X^*(\omega)\|^2 dP(\omega) = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|^2 dP(\omega)$$

De donde, X^* es de norma cuadrado integrable si y sólo si X lo es. ●

2.3. Teorema

El espacio de Hilbert \mathbb{H}_2 es involutivo.

Demostración:

Sabemos que \mathbb{H}_2 es un espacio de Hilbert (teoremas 0.41 y 0.42).

Consideremos la aplicación de \mathbb{H}_2 en \mathbb{H}_2 dada por

$$X \mapsto X^* \text{ para cada } X \in \mathbb{H}_2$$

que está bien definida por 2.2. Veamos que se trata de una involución:

1. $X^{**} = X$

En efecto, pues para todo $\omega \in \Omega$:

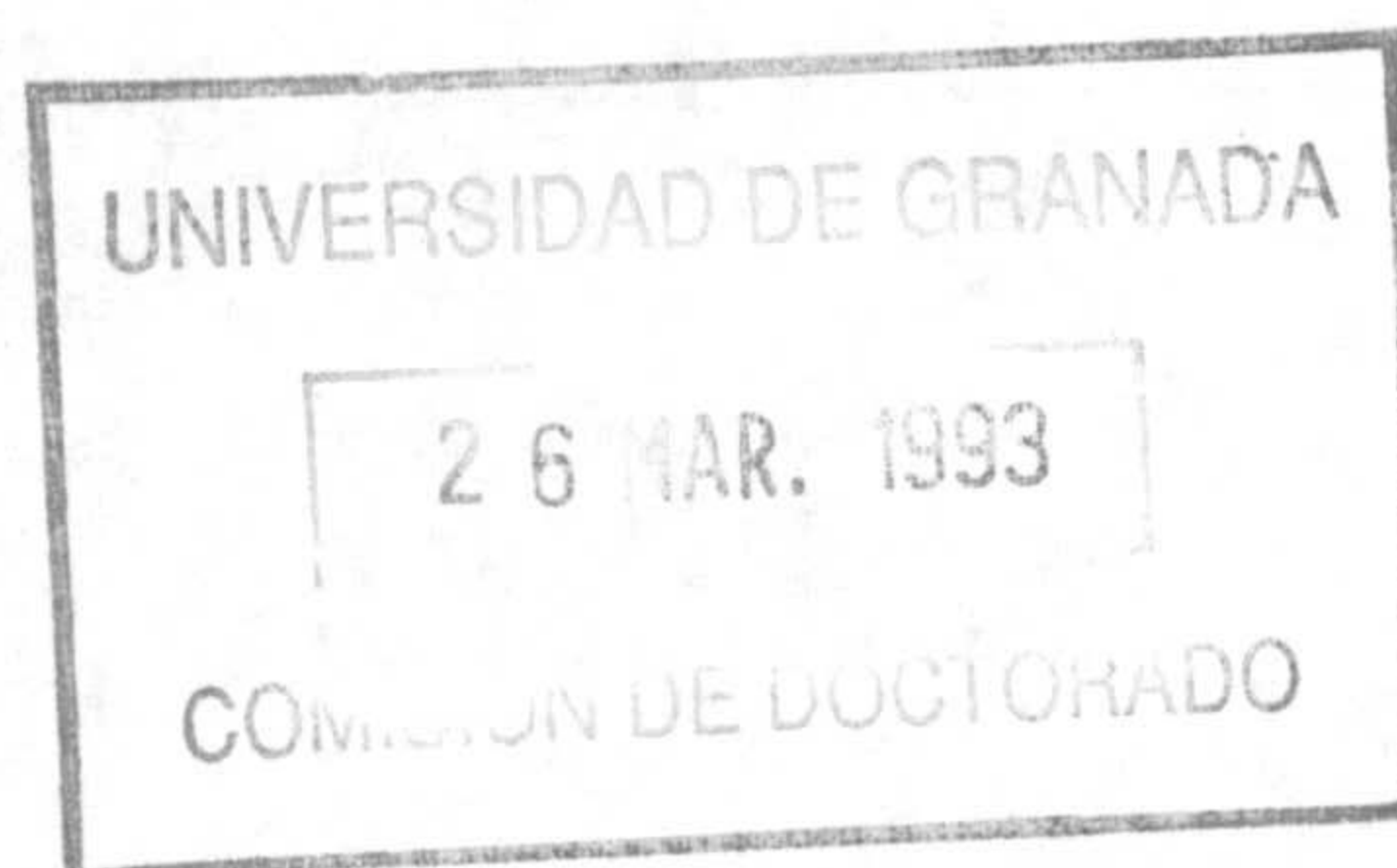
$$X^{**}(\omega) = (X^*(\omega))^* = (X(\omega))^{**} = X(\omega)$$

2. $(\alpha X + \beta Y)^* = \bar{\alpha} X^* + \bar{\beta} Y^* \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, X, Y \in \mathbb{H}_2$

Pues si $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} (\alpha X + \beta Y)^*(\omega) &= ((\alpha X + \beta Y)(\omega))^* = (\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega))^* = \\ &= \bar{\alpha} (X(\omega))^* + \bar{\beta} (Y(\omega))^* = \bar{\alpha} X^*(\omega) + \bar{\beta} Y^*(\omega) \end{aligned}$$

3. El producto interno definido en \mathbb{H}_2 (como en 0.41), verifica que $\langle X^*, Y \rangle = \langle Y^*, X \rangle \quad \forall X, Y \in \mathbb{H}_2$, ya que



$$\langle X^*, Y \rangle = \int_{\Omega} \langle X^*(\omega), Y(\omega) \rangle dP(\omega) = \int_{\Omega} \langle Y^*(\omega), X(\omega) \rangle dP(\omega) = \langle Y^*, X \rangle \bullet$$

B. OPERADORES DE HILBERT-SCHMIDT

El teorema 0.44 establece que a cada v.a. X de \mathbb{H}_2 se le puede asociar un operador de Hilbert Schmidt $F: H \rightarrow \mathbb{C}_2$. Nuestro primer objetivo es establecer una conexión entre el operador de Hilbert-Schmidt F asociado a X , y el operador F_* asociado a X^* .

2.4. Lema

Dada una v.a. X de \mathbb{H}_2 , sean, F y F_* los operadores de Hilbert-Schmidt sobre H , asociados a X y X^* , respectivamente. Entonces, para cada $x \in H$

$$F_*(x) = \overline{F(x^*)} \quad (2)$$

Demostración:

Para cada $x \in H$,

$$F_*(x) = \langle X^*(\omega), x \rangle = \langle x^*, X(\omega) \rangle = \overline{\langle X(\omega), x^* \rangle} = \overline{F(x^*)}. \bullet$$

2.5. Lema

La aplicación de $\mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$ en $\mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$ definida por

$$F \mapsto F_*$$

es una aplicación involutiva.

Demostración:

i) Sea $F \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$, veamos en primer lugar que la aplicación está bien

definida, es decir, que $F_* \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$.

1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in H$:

$$\begin{aligned} F_*(\alpha x + \beta y) &= \overline{F((\alpha x + \beta y)^*)} = \overline{F(\bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*)} = \overline{\bar{\alpha}F(x^*) + \bar{\beta}F(y^*)} = \\ &= \overline{\bar{\alpha}F(x^*)} + \overline{\bar{\beta}F(y^*)} = \alpha F_*(x) + \beta F_*(y) \end{aligned}$$

y por tanto F_* es lineal.

2. $\|F_*\| = \|F\|$, por lo que F_* es continua, por serlo F .

ii) Veamos ahora que la aplicación es involutiva:

1. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $F, G \in \mathcal{L}(H, \mathbb{C}_2)$:

$$\begin{aligned} (\alpha F + \beta G)_*(x) &= \overline{(\alpha F + \beta G)(x^*)} = \overline{\alpha F(x^*) + \beta G(x^*)} = \\ &= \bar{\alpha}F_*(x) + \bar{\beta}G_*(x) \quad \forall x \in H \end{aligned}$$

Es decir, $(\alpha F + \beta G)_* = \bar{\alpha}F_* + \bar{\beta}G_*$.

2. Si $x \in H$,

$$F_{**}(x) = \overline{F_*(x^*)} = \overline{\overline{F(x^{**})}} = F(x)$$

De donde, $F_{**} = F$. •

Consideremos ahora el conjunto de operadores lineales y continuos de H en sí mismo, es decir, $\mathcal{L}(H)$, sobre el que se tiene definida la aplicación de involución clásica, $A \mapsto A^*$ para cada $A \in \mathcal{L}(H)$, donde A^* es el operador adjunto usual de A , definido por

$$\langle A^*x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in H$$

Por ser H un espacio de Hilbert involutivo, se puede definir una nueva

involución mediante la aplicación de $\mathcal{L}(H)$ en $\mathcal{L}(H)$ dada por

$$A \mapsto A_*$$

donde, para cada $x \in H$:

$$A_*x = (Ax^*)^* \quad (3)$$

2.6. Definición

Al operador A_* definido por (3) lo llamaremos *adjunto por esta nueva involución* o *operador $_*$ -adjunto* de A .

Es decir, $\mathcal{L}(H)$ posee dos aplicaciones involutivas, y por tanto, para cada $A \in \mathcal{L}(H)$ existen dos adjuntos A^* y A_* , dados por las respectivas involuciones, esto es, por la involución clásica, y la definida en (3).

2.7. Lema

En $\mathcal{L}(H)$, las dos involuciones conmutan, es decir:

$$(A_*)^* = (A^*)_*$$

Demostración:

Sean $x, y \in H$:

$$\begin{aligned} \langle (A_*)^*x, y \rangle &= \langle x, A_*y \rangle = \langle x, (Ay^*)^* \rangle = \langle Ay^*, x^* \rangle = \\ &= \langle y^*, A^*x^* \rangle = \langle (A^*x^*)^*, y \rangle = \langle (A^*)_*x, y \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, $(A_*)^* = (A^*)_*$. •

Sea M un subconjunto de H , designaremos

$$M^* = \{x^* / x \in M\}$$

2.8. Lema

Si M es una variedad lineal de H , entonces M^* también lo es.

Demostración:

Si $x^*, y^* \in M^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces, $x, y \in M$, y por tanto:
$$\overline{\alpha x + \beta y} \in M$$

de donde,

$$\alpha x^* + \beta y^* = (\overline{\alpha x + \beta y})^* \in M^* \quad \bullet$$

2.9. Lema

Si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de M con $\{x_n\} \rightarrow x$, entonces $\{x_n^*\} \rightarrow x^*$.

Demostración:

Es evidente sin más que considerar que:

$$\|x_n - x\| = \|x_n^* - x^*\|. \quad \bullet$$

2.10. Corolario

Si M es un subespacio de H , entonces M^* también lo es.

Demostración:

Se sigue inmediatamente de 2.9 y 2.10. \bullet

2.11. Lema

Sea M un subespacio de H . Si $P \in \mathcal{L}(H)$ es un operador proyección definido de H sobre M , entonces P_* es un operador proyección de H en M^* .

Demostración:

i) Veamos primero que P_* es un operador proyección:

Sean $x, y \in H$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle (P_*)^2 x, y \rangle &= \langle P_*(P_*)x, y \rangle = \langle P_*(Px^*)^*, y \rangle = \langle [P(Px^*)]^*, y \rangle = \\ &= \langle (P^2x^*)^*, y \rangle = \langle (Px^*)^*, y \rangle = \langle P_*x, y \rangle \quad \forall x, y \in H \end{aligned}$$

Por tanto, $(P_*)^2 = P_*$, y P_* es idempotente.

Por otra parte, puesto que $P \in \mathcal{L}(H)$, por el lema 2.7, tenemos que $(P^*)_* = (P_*)^*$, por lo que

$$(P_*)^* = (P^*)_* = P_* \text{ por ser } P \text{ autoadjunto, y por tanto, } P_* \text{ es autoadjunto.}$$

ii) Veamos que P_* deja invariante a M^* :

Si $x^* \in M^*$, entonces,

$$P_*x^* = (Px)^* = x^* \text{ (ya que } Px = x, \text{ por ser } x \in M)$$

Si $y \in H$ tal que $P_*y = y$, entonces,

$$(Py^*)^* = P_*y = y, \text{ de donde } (Py^*) = (Py^*)^{**} = y^*$$

esto es, y^* es invariante por P , y por tanto $y^* \in M$, o lo que es igual, $y \in M^*$. ●

Veamos ahora que la $*$ -involución conserva la composición de operadores.

2.12. Lema

Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$, entonces

$$(A \circ B)_* = A_* \circ B_*$$

Demostración:

Para todo $x \in H$,

$$\begin{aligned} (A \circ B)_* x &= [(A \circ B)(x^*)]^* = [A(Bx^*)]^* = A_*[(Bx^*)^*] = \\ &= A_*(B_*x) = (A_* \circ B_*)x \end{aligned}$$

de donde, $(A \circ B)_* = A_* \circ B_*$ •

2.13. Lema

Si $M \subseteq H$, entonces $(M^\perp)^* = (M^*)^\perp$.

Demostración:

Basta ver que si $x \perp M$, entonces $x^* \perp M^*$. En efecto:

Sea $x \perp M$, y sea $y^* \in M^*$ (con lo cual $y \in M$), tenemos que

$$0 = \langle x, y \rangle = \langle y^*, x^* \rangle$$

de donde, $x^* \perp M^*$. •

2.14. Lema

Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es parcialmente isométrico sobre M , entonces A_* es parcialmente isométrico sobre M^* .

Demostración:

1. Si $x^* \in M^*$,

$$\|A_*x^*\| = \|(Ax)^*\| = \|Ax\| = \|x\| = \|x^*\|$$

2. Si $y \perp M^*$, entonces, por el lema 2.13, $y^* \perp M$, y por tanto, $A_*y = A(y^*) = 0$ (por ser A isométrico sobre M). •

2.15. Lema

$\mathcal{L}(H)^+$ es invariante bajo la $*$ -involución $A \mapsto A_*$.

(Donde $\mathcal{L}(H)^+ = \{A \in \mathcal{L}(H) / \langle Ax, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in H\}$).

Demostración:

Si $A \in \mathcal{L}(H)^+$:

$$\langle A_*x, x \rangle = \langle (Ax^*)^*, x \rangle = \langle x^*, Ax^* \rangle \geq 0 \text{ (por ser } \langle Ax^*, x^* \rangle \geq 0).$$

Como consecuencia de esta propiedad, y de la conservación de la composición, se tiene:

2.16. Corolario

Si $A = B|A|$ es la descomposición polar de A , entonces

$$A_* = B_*|A_*|$$

es la descomposición polar de A_* .

2.17. Lema

Sea M un subespacio de H , y $T \in \mathcal{L}(M)$ un operador unitario. Entonces $T_* \in \mathcal{L}(M^*)$ y es unitaria.

Demostración:

Si, si $u^*, v^* \in M^*$:

$$\langle T_*u^*, T_*v^* \rangle = \langle (Tu)^*, (Tv)^* \rangle = \langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (T_*)^*T_* = I \Rightarrow T_* \text{ isometría. } \bullet$$

2.18. Corolario

Sea V un subespacio de \mathbb{C}_2 , y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador unitario. Entonces $T_* \in \mathcal{L}(\overline{V})$ y es unitaria.

Demostración:

Basta tener en cuenta que \mathbb{C}_2 es un espacio de Hilbert involutivo, bajo la conjugación, y aplicar el resultado anterior.

(Notese que en este caso, $T_*u = \overline{Tu}$).

2.19. Lema

Sea \mathcal{E} una medida espectral. Si definimos $\mathcal{E}_*: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ por:

$$\mathcal{E}_*(M) = [\mathcal{E}(M)]_* \quad \forall M \in \mathcal{B}$$

Entonces, \mathcal{E}_* es una medida espectral

Demostración:

1) $\mathcal{E}_*(H) = [E(H)]_* = I_* = I$

2) Si $M = \bigcup_n M_n$, entonces para cada $x, y \in H$:

$$\langle \mathcal{E}_*(M)x, y \rangle = \langle [\mathcal{E}(M)]_*x, y \rangle = \langle y^*, \sum_n \mathcal{E}(M_n)x^* \rangle = \sum_n \langle \mathcal{E}(M_n)_*x, y \rangle \quad \bullet$$

Como consecuencia:

2.20. Corolario

Si \mathcal{E} es una medida espectral sobre \mathbb{C}_2 , y A es el operador asociado a \mathcal{E} (dado en 1.46.i) tal que si $f \in \mathcal{B}(\Omega, \mathbb{C})$:

$$\langle Ax, y \rangle = \int f(\lambda) d\langle \mathcal{E}(\lambda)x, y \rangle \quad \forall x, y \in H \quad \left(\text{ esto es, } A = \int f(\lambda) d\mathcal{E} \right)$$

Entonces,

$$\langle A_*x, y \rangle = \int \overline{f(\lambda)} d\langle \mathcal{E}_*(\lambda)x, y \rangle \quad \forall x, y \in H \quad (\text{ esto es, } A_* = \int \overline{f(\lambda)} d\mathcal{E})$$

Demostración:

$\forall x, y \in H$:

$$\begin{aligned} \langle A_*x, y \rangle &= \langle (Ax^*)^*, y \rangle = \langle y^*, Ax^* \rangle = \overline{\langle Ax^*, y^* \rangle} = \\ &= \overline{\int f(\lambda) d\langle \mathcal{E}(\lambda)x^*, y^* \rangle} = \int \overline{f(\lambda)} d\langle y^*, \mathcal{E}(\lambda)x^* \rangle = \int \overline{f(\lambda)} d\langle \mathcal{E}_*(\lambda)x, y \rangle \quad \bullet \end{aligned}$$

2.3. PROPIEDADES DE SEGUNDO ORDEN

En la definición 1.32 se introdujo el concepto de función covarianza de una función aleatoria H-valuada de segundo orden $\{X_t, t \in T\}$ como una aplicación $R: T \times T \rightarrow \mathcal{L}(H)$ tal que $R(s,t) = F_t^* F_s$ siendo F_t es operador de Hilbert-Schmidt asociado al vector aleatorio X_t .

Por otra parte, hemos visto que si X_t es un vector aleatorio H-valuado de segundo orden, entonces X_t^* también lo es, y sus respectivos operadores de Hilbert-Schmidt asociados están relacionados por

$$F_*(x) = \overline{F(x^*)} \quad \forall x \in H$$

Ahora bien, si $F \in \mathcal{H}\mathcal{S}(H)$, y consideramos un operador F_* definido por la relación anterior, ¿será $F_* \in \mathcal{H}\mathcal{S}(H)$?.

2.21. Lema

Si $F \in \mathcal{H}\mathcal{S}(H)$, entonces $F_* \in \mathcal{H}\mathcal{S}(H)$.

Demostración:

Si $\{e_n\}$ es una base de H (numerable, por ser H separable), entonces:

$$\text{Traz}(F_*^* F_*) = \text{Traz}((F^* F)_*) = \sum_i \|F_* e_i\|^2 = \sum_i \|F e_i^*\|^2 < \infty \bullet$$

2.22. Proposición

Si la función $R(s,t) = F_t^* F_s$ es la covarianza de una función aleatoria H-valuada de segundo orden $\{X_t, t \in T\}$, entonces la función $R_*: T \times T \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definida por

$$R_*(s,t) = (F_t^*)_*(F_s)_*$$

es una covarianza.

Demostración:

En virtud del teorema 1.34, basta demostrar que para toda parte finita J de T y toda familia $\{x_j, j \in J\}$ de elementos de H , $\sum_{s,t \in J} \langle R_*(s,t)x_s, x_t \rangle \geq 0$

Ahora bién,

$$\begin{aligned} \sum_{s,t \in J} \langle R_*(s,t)x_s, x_t \rangle &= \sum_{s,t \in J} \langle (F_t^*)_*(F_s)_*x_s, x_t \rangle = \\ &= \sum_{s,t \in J} \langle (F_s)_*x_s, (F_t)_*x_t \rangle = \sum_{s,t \in J} \langle (F_s x_s^*)^*, (F_t x_t^*)^* \rangle = \\ &= \sum_{s,t \in J} \langle (F_t x_t^*)^*, (F_s x_s^*)^* \rangle = \sum_{s,t \in J} \langle x_t^*, F_t^* F_s x_s^* \rangle = \\ &= \sum_{s,t \in J} \langle x_t^*, R(s,t)x_s^* \rangle \geq 0 \quad (\text{por ser } R \text{ una covarianza}) \quad \bullet \end{aligned}$$

2.23. Corolario

Si $R(s,t) = F_t^* F_s$ es la función covarianza de una función aleatoria H -valuada de segundo orden $\{X_t, t \in T\}$, entonces la función $R_*: T \times T \rightarrow \mathcal{L}(H)$ definida por

$$R_*(s,t) = (F_t^*)_*(F_s)_*$$

es la función covarianza de la función aleatoria H -valuada de segundo orden $\{X_t^*, t \in T\}$, y

$$R_*(s,t) = [R(s,t)]_*.$$

Demostración:

Basta considerar que se F_t es el operador de Hilbert-Schmidt asociado a X_t , entonces $(F_t)_*$ es el operador de Hilbert-Schmidt asociado a X_t^* , por lo que la función de covarianza es:

$$R_*(s,t) = (F_t^*)_*(F_s)_* = R_*(s,t) = (F_t^* F_s)_* = [R(s,t)]_* \quad \bullet$$

Sea G (en particular, puede ser \mathbb{R}) un grupo, y consideremos la función

aleatoria de segundo orden $G \rightarrow \mathbb{H}_2$ dada por $\{X_t, t \in G\}$, o bien, $\{F_t, t \in G\}$, donde F_t es el operador de Hilbert-Schmidt asociado a X_t .

2.24. Teorema

Si la función aleatoria $\{X_t, t \in G\}$ es estacionaria, entonces $\{X_t^*, t \in G\}$ también es estacionaria.

Demostración:

Es suficiente considerar 2.23, con lo cual $R(s,t)$ depende sólo de la diferencia $s-t$ si y sólo si $R_*(s,t)$ depende sólo de la diferencia $s-t$. ●

Se está ahora en disposición de encontrar la descomposición de Wald, en la parte determinista y puramente no determinista del proceso adjunto asociado a un proceso estacionario H -valuado y débilmente continuo, y como consecuencia, la fórmula de aproximación lineal media cuadrática.

2.4. DESCOMPOSICION DE WALD. FORMULA DE APROXIMACION LINEAL

2.25. Lema

Si $\{T_s\}$ es la representación unitaria de de una función estacionaria $\{F_s\}$, entonces $\{(T_s)_*\}$ es la representación unitaria de $\{(F_s)_*\}$.

En particular, si $\{T_n\}$ es la representación unitaria de una sucesión estacionaria $\{F_n\}$, entonces $\{(T_n)_*\}$ es la representación unitaria de $\{(F_n)_*\}$, y además si $T_n = T^n$, se tiene que $(T_n)_* = (T_*)^n$.

Demostración:

Es consecuencia inmediata del 2.18 y del concepto de representación unitaria asociada a una aplicación estacionaria. La última igualdad puede deducirse por una simple inducción. ●

2.26. Corolario

Si la sucesión estacionaria $\{F_n\} = \{U_n\} + \{V_n\}$ según la descomposición dada en 1.44, entonces la sucesión $\{(F_n)_*\}$ se descomponerse como suma de dos sucesiones ortogonales $\{(U_n)_*\}$ y $\{(V_n)_*\}$ (adjuntas por la involución de $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$ respectivamente), asociadas a la misma representación unitaria T_* , donde $\{(V_n)_*\}$ es determinística y $\{(U_n)_*\}$ es puramente no determinística.

Además, la sucesión $(U_n)_*$ puede escribirse como suma de una serie fuertemente convergente de la siguiente forma:

$$(U_n)_* = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{E}_{n-k})_*(A_k)_*$$

donde $A_k \in \mathcal{L}(H)$ y $\{(\mathcal{E}_n)_* = ((T_*)^n)(\mathcal{E}_0)_*, n \in \mathbb{Z}\}$ es una sucesión ortogonal de operadores parcialmente isométricos. Además, si $n \geq m$, se tiene

$$((U_m)_*)^*(U_n)_* = \sum_{k=0}^{\infty} ((A_k)_*)^*(A_{n-m+k})_*$$

(donde la serie converge débilmente en $\mathcal{L}(H)$).

Demostración:

Es suficiente aplicar 1.44, y las propiedades de la $*$ -involución. ●

2.27. Lema

Sean H y K dos espacios de Hilbert, $s \mapsto F_s$ una sucesión estacionaria de un grupo abeliano localmente compacto G en $\mathcal{L}(H, K)$, $s \mapsto T_s$ una representación unitaria de G en $\mathcal{L}(H, K)$ asociada a la sucesión anterior, \tilde{G} el dual de G , y \mathcal{E}_λ la medida espectral dada por el teorema de Stone.

Si $Y_\sigma = \mathcal{E}_\sigma F_0$, donde σ es un boreliano de \tilde{G} , entonces:

Denotando, para cada $\lambda \in [0, 2\pi[$, por $Y_\lambda = Y_{]0, \lambda[}$, para la sucesión estacionaria $s \mapsto (F_s)_*$:

$$(F_s)_* = \int_{\tilde{G}} \langle s, \lambda \rangle d(Y_\lambda)_*$$

y

$$(F_t^*)_*(F_s)_* = \int_{\tilde{G}} \langle t-s, \lambda \rangle d(Y_\lambda^* Y_\lambda)$$

En, particular si $G = \mathbb{Z}$

$$(F_s)_* = \int_0^{2\pi} e^{is\lambda} d(Y_\lambda)_*$$

y

$$(F_t^*)_*(F_s)_* = \int_0^{2\pi} e^{-i(t-s)\lambda} d(Y_\lambda^* Y_\lambda)$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata de 1.48 y de las propiedades de la $*$ -involución vistas. •

2.28. Teorema

Sea $\{X_t\}$ un proceso estacionario débilmente continuo, y $\{X_t^*\}$ su asociado por la involución. Si $X_t = U_t + V_t$, entonces

$$X_t^* = U_t^* + V_t^*$$

Demostración:

Al proceso $\{X_t\}$ se le asocia la sucesión $\{\hat{X}_n\}$, definida como en 1.53. Por otra parte, por 2.25, a toda sucesión estacionaria $\{X_n\}$, podemos asociarle una sucesión $\{X_n^*\}$ que es también estacionaria, y por 2.26, si $X_n = U_n + V_n$, entonces $X_n^* = U_n^* + V_n^*$ con U_n^* puramente no determinística y V_n^* determinística. Además

$$\hat{T}_* = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda + i}{\lambda - i} \right) d(\mathcal{E}_\lambda)_*$$

Con lo cual, la sucesión U_n^* es la asociada a U_t^* , y V_n^* es la asociada a V_t^* , y por tanto

$$X_t^* = U_t^* + V_t^* \quad \bullet$$

2.29. Corolario

Si $\{X_t^*\}$ es el proceso estacionario asociado a $\{X_t\}$ por la involución definida en H , entonces la mejor aproximación lineal en media cuadrática de X_t^* se puede expresar

$$X_t^* = \int_{-\infty}^{\infty} c^*(t-s) d\varepsilon_*(t) + V_t^*$$

Demostración:

Se sigue inmediatamente de 1.64, 2.28 y de las propiedades analíticas de la involución. ●

BIBLIOGRAFIA

- 1 Bharucha-Reid, A.T.: "Random Integral Equations". Academic-Press, 1972.
- 2 Blandt, A., Franken, P. and Lisek, B.: "Stationary stochastic models". Wiley. New York, 1990.
- 3 Burbea, Y, and Masani, P.: " Banach and Hilbert spaces of vector-valued functions". Pitman Advanced Pwb., 1984.
- 4 Cramer, H. y Leadbetter, M.R.: "Stationary and Related Stochastic Processes". Wiley. New York, 1967.
- 5 Dunford, N. y Schwartz, J.L.: "Linear operators, part I: General theory". John Wiley, 1958.
- 6 Dunford, N. y Schwartz, J.L.: "Linear operators, part II: Spectral theory". John Wiley, 1963.
- 7 Doob, J.L.: "Stochastic Processes". Wiley and Sons, 1953.
- 8 Haïnis, J.: "Eléments aléatoires dans une H^* -algèbra de Banach séparable". Bull. Soc. Royale Sciences Liège 33, p. 170-177, 1964.
- 9 Halmos, P.R.: "Introduction to Hilbert Space". Chelsea Publishing Company. New York, 1957.
- 10 Halmos, P.R.: "Finite-Dimensional Hilbert Space". Van Nostrand Reinhold Company, 1958.
- 11 Halmos, P.: "Measure Theory". Springer-Verlag, 1973.
- 12 Hida, T.: "Stationary Stochastic Processes". Pricenton Univ. Press. Pricenton (New Jersey), 1970.
- 13 Hille, E. and Phillips, R.S.: "Funtional Analysis and Semi-Groups". Amer. Math. Soc.. Providence. Rhode Island, 1957.
- 14 Horváth, J.: "Topological Vector Spaces and Distributions". Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- 15 Jenkins G.M. and Wats, D.S.: "Spectral analisys and its applications". Holden-Day, 1986.
- 16 Ito, K.: "Stationary random distributions". Men. Coll. Sei. Univ. Kyoto Ser A, 28. 1953.

- 17 Kallianpur, G. and Mandrekor, V.: "Multiplicity and representation theory of purely non-deterministic stochastic processes". *Teor. Veroyatnost. Primenen* 10, p. 614-644. 1986.
- 18 Kolmogorov, A.N.: "Suites stationnaires l'espace de Hilbert". *Bull. Univ.* t 2, p. 1-40, 1941.
- 19 Loève, M.: "Probability Theory". New York (Van Nostrand), 1960.
- 20 Loynes, R.M.: "On a generalization of second order stationary processes". *London Math. Soc.* (3), 15, p. 385-398. 1965.
- 21 Martinez Almécija, A.: "Las sucesiones estacionarias valuadas en una H^* -álgebra". Tesis Doctoral. Univ. de Granada, 1982.
- 22 Martinez Almécija, A. y Rodríguez Torreblanca, C.: "Some Probabilistic Concepts about Linear Operators Spaces defined on an involutive Hilbert Space". *Fiveth International Symposium on ASMDA*. Granada, 1991.
- 23 Martinez Almécija, A. y Rodríguez Torreblanca, C.: "Spectral measures on stationary sequences". Aceptado en el *Sixth International Symposium on ASMDA*. Chania, Creta (Grecia), 1993.
- 24 Martinez Almécija, A. y Rodríguez Torreblanca, C.: "Second order properties of random vectors valued in an involutive Hilbert space". Aceptado en el *Sixth International Symposium on ASMDA*. Chania, Creta (Grecia), 1993.
- 25 Martinez Almécija, A. y Rodríguez Torreblanca, C.: "Linear approximation of (weakly) stationary random processes valued in involutive Hilbert spaces". Pendiente publicación en *V CLAPEM*, Sau Paulo, 1993.
- 26 Maurin, K.: "Methods of Hilbert Spaces". PWN (Polish Scientific Publishers). Warszawa (Poland), 1972.
- 27 Moore, J.: "Elementary lineal and matrix Algebra. (The newpoint of Geometry)". McGraw-Hill, Tokio, 1972.
- 28 Papoulis, A.: "Probability, Random Variables and Stochastic Processes". John Wiley, 1991.
- 29 Payen, R.: "Fonctions aléatoires du second ordre à valeurs dans un espace de Hilbert". *Ann. Inst. Henri Poincaré*, A p. 313-378, 1967.
- 30 Piettsch, A.: "Operator Ideals". North-Holland Publishing Company, 1980

- 31 Riesz, F. et Nagy, B.S.: "Lecons d'analyse fonctionnelle". Gauthier-Villars, 1972.
- 32 Rozanov, Yu. V.: "Stationary Random Functions". Holden-Day. San Francisco (California), 1967.
- 33 Taylor, A.E.: "Introduction to functional Analysis". John Wiley, 1958.
- 34 Vo-Khac, K.: "Processus stochastiques stationnaires du second ordre á valeurs vectorielles". C.R. Ac. Sci. Pous Ser A, 264, p. 1069-1072. 1967.
- 35 Vo-Khac, K.: "Fonctions et distributions vectorielles aleatoires á ordre p". C.R. Ac. Sci. Pous Ser A, 264, p. 1012-1015. 1967.
- 36 Yaglom, A.M.: "An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions". Prentice-Hall. Englewood Cliffs (New Yersey), 1962.
- 37 Yosida, K.: "Functional Analysis". Springer-Verlang, 1974.