MODELOS DE LA PROGRAMACION LINEAL DIFUSA PARA LA RESOLUCION DE JUEGOS MATRICIALES IMPRECISOS

Lourdes Campos Gutiérrez

Septiembre, 1986 Tesis Doctoral

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

"MODELOS DE LA PROGRAMACION LINEAL DIFUSA PARA LA RESOLUCION DE JUEGOS MATRICIALES IMPRECISOS".

Memoria que, para optar al grado de Doctor, presenta la Licenciada en Ciencias Matemáticas,

Lourdes Campos Gutiérrez.

Granada, Septiembre de 1986.

Director de Tesis:

Profesor Dr. D. José Luis Verdegay Galdeano.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

1986

Deseo, desde estas líneas, expresar el profundo agradecimiento que siento hacia el director de este trabajo y hacia todos los que me han demostrado su amistad: con su comprensión, apoyo y estímulo en todo momento, o abriendo sus puertas para ofrecerme los medios necesarios para la realización de esta memoria. Gracias a todos vosotros he podido llevarla a cabo. Nunca lo olvidaré.

INDICE

INTRODUCCION

GENERAL

Una de las principales causas por las que la metodología que soportan los conjuntos difusos ha tenido tan espectacular desarrollo en los últimos años, es el hecho intuitivo de que muchos conceptos, operaciones, instrucciones, etc, que se dan con el lenguaje natural tienen unas características totalmente imprecisas. Como además tal imprecisión es inherente a las mencionadas nociones, no es representable de un modo probabilístico, es decir, conceptos tales como "un gran aumento de las inversiones", "el préstamo es rápido de conseguir", o "reducir la velocidad si la carretera está en mal estado", no puede representarse probabilísticamente sin que la interpretación de los mismos pueda provocar alteraciones en todo el conjunto que se considere. Sin embargo, en contextos análogos a los descritos, los conjuntos difusos se han mostrado como una potente herramienta.

Más concretamente, en el planteamiento de muchos problemas de decisión, intervienen datos como: "el beneficio será aproximadamente de ...", "no ganaremos mucho", etc, datos que indudablemente tienen una naturaleza imprecisa y que, por tanto, son representables por mediación de los conjuntos difusos. A este planteamiento no escapa, por ser justamente una materia dentro de la Teoría de la Decisión, la Teoría Matemática de los Juegos.

Aunque los orígenes de la Teoría de Juegos corren con los de la humanidad, e incluso juegos actualmente tan populares como el del ajedrez o el backgamon tienen interpretaciones militares o de espionaje bastante claras que justifican tales orígenes, todo el mundo está de acuerdo en que la Teoría Matemática de los Juegos nació en 1947 con la publicación de la obra de J. von Neumann y O. Morgensten: Theory of Games and Economic Behaviour.

La situación más elemental que se considera en Teoría de Juegos es la de los Juegos Bipersonales de Suma Nula (Juegos matriciales) en los que, supuestos dos jugadores J_1 y J_2 se conocen sus respectivos conjuntos de acciones posibles (estrategias) $X = \{x_1,..., x_m\}$ e $Y = \{y_1,..., y_n\}$ y una función

$$M: X x Y \rightarrow \mathbb{R}$$

que asigna a cada par de estrategias (x_i, y_j) una recompensa para J_1 (o una pérdida para J_2) $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(-a_{ij} \in \mathbb{R})$. Naturalmente, se trata de buscar una estrategia para cada jugador, que haga, respectivamente, máxima la ganancia para J_1 y mínima la pérdida para J_2.

Este planteamiento sencillo no supone que estos Juegos, desde el punto de vista teórico, tengan una solución trivial e, incluso, los aspectos computacionales que contempla su resolución numérica, pueden suponer serios problemas.

Por otra parte, los Juegos recién descritos tienen un enorme campo de aplicación. Basta, para justificar ésto, el entenderlos desde el punto de vista, más general, de modelos para representar y resolver conflictos de intereses. Pero no hay que limitarlos a este contexto. En efecto, estudiando los juegos que consideramos podemos sacar conclusiones válidas para otros campos científicos que, además, pueden abrir una perspectiva investigadora de notable importancia: como se sabe, es usual definir un autómata determinístico finito especificando su conjunto de inputs (I), su conjunto de estados interno (Q) y una función

$$f: \; I \times Q \rightarrow Q$$

de transición de estados.

Como es evidente hay una forma inmediata de relacionar un Juego Bipersonal con un autómata determinístico finito. Supuesta la siguiente matriz de transición de estados

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} i_1 & i_2 & i_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{array} & \begin{bmatrix} q_1 & q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_1 \\ q_3 & q_2 & q_1 \end{bmatrix} \end{array}$$

que correspondería a un autómata con tres estados, esta matriz especifica completamente la conducta del autómata.

Si, ahora en el contexto de los Juegos, interpretamos un pago como el estado de un sistema constituido por jugadores y, analogamente, cualquier estrategia como un input al sistema, la relación entre ambos conceptos aparece trivial. Esta relación puede permitirnos desarrollar metodologías que siendo propias del campo de los Juegos, nos sirvan para trasladarlas al terreno de los autómatas.

Desde esta perspectiva, el problema inicial que en esta memoria nos planteabamos era el siguiente: Supuestos dos jugadores con sendos conjuntos de estrategias perfectamente determinados y con posturas antagónicas, podemos suponer que, al igual que comunmente ocurre, los pagos asociados a las parejas de estrategias a emplear, estaban determinados de forma vaga o imprecisa, de manera que podían representarse por mediación de conjuntos difusos. En una situación como ésa ¿qué tipo de solución tendría el juego? y, además ¿cómo se podrían trasladar las conclusiones que obtuviéramos al caso de los autómatas determinísticos finitos?.

Estas dos cuestiones sirven para situar el marco en el que se desarrolla la presente memoria, así como para indicar la línea de trabajo que se piensa seguir.

De hecho, la respuesta a la primera pregunta constituye el cuerpo de materia de esta memoria, que sirve para dejarnos en una buena situación para poder abordar la segunda cuestión.

A continuación comentamos brevemente cuál ha sido el camino seguido en la confección de esta memoria.

Como se sabe, en el caso de Juegos Bipersonales de Suma Nula convencionales, la herramienta más potente que existe, de cara a obtener su solución, es la Programación Lineal. Nos pareció, por tanto, plausible recorrer un camino paralelo al del caso clásico para intentar resover los Juegos Difusos considerados, sobre todo habida cuenta del nivel teórico que hoy en día tiene la Programación Lineal Difusa (P.L.D.).

Pero, planteado el Juego Difuso como un problema de P.L.D., se obtenía un conjunto de restricciones atípico de esta clase de problemas, ya que suponía que la matriz tecnológica estaba constituida por números difusos y las restricciones, en lo que se refiere a su verificación, eran también difusas.

En la literatura especializada sobre P.L.D., se conoce un sólo modelo que supone números difusos en la matriz tecnológica (Tanaka et al., 1985), pero que no considera restricciones difusas. Por otra parte, el caso de restricciones difusas está muy desarrollado pero, en ningún modelo se suponen números difusos.

Por tanto, pareció evidente que, para resolver el Juego que inicialmente considerábamos, había que desarrollar un modelo de P.L.D. que garantizara la resolución de tal Juego. Sin embargo, la participación de números difusos en ese modelo aportaba un nuevo problema: El de la comparación de dichos números o cantidades imprecisas.

La comparación de números difusos es uno de los problemas sobre los que más se ha investigado y, aún no está resuelto satisfactoriamente. De hecho, las formas de comparar cantidades imprecisas, los índices de comparación entre números difusos, son múltiples. Por tanto, con vistas a nuestro objetivo inicial, hubo que remontarse a los métodos de comparación de números difusos y, consecuentemente, ése es el punto de partida de la presente memoria, que se desarrolla en cuatro Capítulos que describimos brevemente a continuación.

En el Capítulo I partiendo del concepto de conjunto difuso, el problema que se considera es el de dados dos números difusos A, B, notados así sin ambiguedad por ahora, ¿cuándo A ≤ B?, es decir, si μ_A y μ_B son las funciones de pertenencia de ambos conjuntos, ¿cuándo $\mu_A \leq \mu_B$?.

Para ello se consideran los índices de comparación que se han mostrado más útiles en la literatura, y se muestran los diferentes resultados.

También, en ese Capítulo I, se introducen los conceptos más necesarios para el buen desarrollo de los Capítulos posteriores.

En el Capítulo II se aborda el problema de P.L.D. en todas las versiones conocidas hasta ahora. Se analizan tres grandes grupos de problemas,

1) Problemas con restricciones difusas: En definitiva se trata de

$$\begin{array}{ll} \text{Max:} & z = cx \\ \text{s.a.:} & \\ & Ax \underset{\sim}{<} b \\ & x \geqq 0 \end{array}$$

con $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y A una matriz mxn de números reales, pero donde con cada restricción hay definida una función

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \to [0,1], \qquad i = 1,\dots,m.$$

que mide el cumplimiento de la restrición "$a_i x$ no supere en mucho al valor b_i" para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Se exponen los distintos enfoques de resolución y se comparan las soluciones que con cada uno se obtiene.

2) Problemas con costos difusos: Se supone un problema de P.L.D. en el que el decisor expresa vagamente cuáles son los costos que intervienen en el mismo, es decir, se trata de resolver,

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & z = \tilde{c}_1 x_1 + \tilde{c}_2 x_2 + \dots + \tilde{c}_n x_n \\ \text{s.a.:} \quad & \\ & Ax \leqq b \\ & x \geqq 0 \end{aligned}$$

donde para cada $\tilde{c}_j$, $j = 1, \dots, n$, el decisor ha fijado una función

$$\mu_j : \mathbb{R} \to [0,1],$$

que expresa la imprecisión con que conoce cada costo. Como antes, se pone de manifiesto los enfoques existentes de resolución y se relacionan entre sí.

3) Problemas con coeficientes difusos: Con el mismo sentido anterior el problema que se considera es,

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & z = cx \\ \text{s.a.:} \quad & \\ & \tilde{A}x \leq \tilde{b} \\ & x \geqq 0 \end{aligned}$$

donde $\tilde{A}$ y $\tilde{b}$ están constituidos por números difusos. Este problema se analiza desde el punto de vista existente en la literatura y sirve, a partir de los inconvenientes operativos que se encuentran, como escalón para un estudio más profundo del mismo. En efecto, este problema se resuelve suponiendo que, fijado un grado $h \in [0,1]$ por el decisor, $A \leq B$ si, y solo si,

$$a_k \leq b_k \quad \text{y} \quad A_k \leq B_k \qquad \forall k \in [h,1]$$

donde a_k y A_k, respectivamente b_k y B_k, son los extremos inferior y superior del conjunto de nivel $k \in [h,1]$ de $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B}$.

Puesto que esta relación intervalar es una de las muchas formas posibles de comparar números difusos, el resto del Capítulo se dedica a estudiar los distintos problemas auxiliares que resultan cuando, en lugar de esta relación intervalar, se emplean los diferentes índices de comparación sobre las restricciones del problema.

En cualquier caso, todos los problemas del tipo 3) que se estudian en ese Capítulo II, suponen que las restricciones son de corte convencional. Como para el problema que inicialmente tenemos planteado, el cumplimiento de dichas restricciones debe ser gradual, en el Capítulo III se introduce un modelo más general que todos los anteriores y que se formula,

$$\text{Max:} \quad z = cx$$

$$\text{s.a.:}$$

$$\tilde{A}x \;\tilde{\le}\; \tilde{b}$$

$$x \geq 0$$

donde $\tilde{A}$ y $\tilde{b}$ están constituidos por números difusos y $\tilde{\le}$ es una relación difusa que expresa que el decisor puede tolerar valores de $\tilde{A}x$ un poco por encima de $\tilde{b}$.

La resolución de este modelo se enfoca desde dos puntos de vista. En primer lugar, se construye un problema auxiliar siguiendo un camino paralelo al del caso de problemas de P.L.D. en los que no intervienen números difusos, que se muestra como poco operativo debido a las perturbaciones que, las operaciones de multiplicación y división de números difusos, introducen en el mismo.

A la vista de ésto se propone un segundo enfoque de resolución basado, fundamentalmente, en la idea de que el conjunto de restricciones, para este caso en que los coeficientes son números difusos, sea un conjunto difuso convexo. Así, se consigue un problema auxiliar bien conformado a excepción de la relación que compare dos números difusos.

Desde aquí, el resto de ese Capítulo III se dedica a formular los distintos problemas convencionales de

P.L. que pueden considerarse, según el índice de comparación que estemos dispuestos a usar.

Con todas las herramientas hasta aquí desarrolladas, en el Capítulo IV se estudian los Juegos Bipersonales Difusos de Suma Nula. De entrada, el planteamiento es más general, de manera que se introduce la noción de Juego Difuso, se proponen distintos modelos de Juegos Difusos y se hace un análisis crítico de las principales aportaciones existentes sobre el tema.

Se considera entonces un Juego Bipersonal de Suma Nula en el que los jugadores, conociendo sus respectivos conjuntos de estrategias, conocen imprecisamente los pagos que pueden recibir.

En estas circunstancias se supone que, ambos jugadores, desean encontrar una estrategia optimal que les permita garantizarse una ganancia mínima aunque, debido a la naturaleza imprecisa de los pagos, ambos están dispuestos a tolerar ciertas violaciones en la consecución de esa ganancia mínima.

Con todo esto se llega a formular un par de problemas de P.L.D. que, respectivamente, para el primer jugador y el segundo tienen la forma,

$$\text{Min: } x_1+x_2+\ldots+x_m$$

$$\text{s.a.:} \quad Ax \geqq b-d(1-\alpha), \quad x \geqq 0,\ \alpha \in (0,1]$$

y

$$\text{Max: } y_1+y_2+\ldots+y_n$$

$$\text{s.a.:} \quad yA \leqq b+c(1-\alpha), \quad y \geqq 0,\ \alpha \in (0,1]$$

en los que A, d y c, y por tanto $b-d(1-\alpha)$ y $b+c(1-\alpha)$, están constituidos por números difusos, y la relación $\leqq$ es cualquier relación de comparación entre este tipo de cantidades.

Se desarrolla un análisis paralelo al del segundo enfoque, analizado en el Capítulo III, pero particularizado a esta pareja de problemas, y se muestra como la solución de este Juego tiene las mismas características imprecisas que se consideraban en su planteamiento.

La memoria termina con algunos comentarios finales y un apéndice bibliográfico en el que se recopilan las más destacadas contribuciones a la materia que se ha estudiado.

CAPITULO I

0. INTRODUCCION

Un concepto que se muestra básico a lo largo de la presente memoria es el de número difuso. Desde el punto de vista de que un número difuso es un conjunto difuso en ℝ, podemos decir que la noción de número difuso se introdujo en 1965 en el célebre trabajo de L.A. Zadeh: Fuzzy Sets.

Sin embargo, los números difusos no toman carta de naturaleza hasta aproximadamente 1978 con los trabajos de S. Nahmias sobre variables difusas y de D. Dubois y H. Prade sobre el manejo de cantidades imprecisas. Desde entonces, el estudio de las posibles definiciones de número difuso y, sobre todo, el cómo manipularlos y compararlos, es un tema de gran interés en el área de los conjuntos difusos que, además, no está exento de polémica.

En efecto, frente a un sector que defiende que la definición de número difuso, comunmente aceptada en la literatura, es buena desde el punto de vista de que no hay otra que permita el manejo de cantidades imprecisas con ciertas garantías de coherencia, hay otro sector que mantiene que la actual definición de número difuso corresponde, más bien, a la de cierta propiedad cuantitativa de una determinada medida imprecisa. Medida imprecisa que, sin embargo, no se define.

Aunque los argumentos que existen a favor de este segundo punto de vista son considerables, el no tener una alternativa operativa hace que, consecuentemente, en esta memoria, nos alineemos con el primer sector comentado.

Desde esta perspectiva, en este Capítulo se introducen las nociones y operaciones elementales entre conjuntos difusos para llegar al referido concepto de número difuso. Establecida esta noción, se estudian las distintas operaciones aritméticas entre los números difusos más comunmente empleados: los del tipo L-R.

El resto del Capítulo se dedica al problema, no trivial, de comparar dos números difusos. Este es un problema complejo porque, dado el carácter impreciso de las cantidades que se consideran, por ejemplo A y B, de antemano no puede garantizarse el que $A \leq B$, o el que $B \leq A$, sino que, ambas propiedades van a verificarse simultáneamente con ciertos grados de cumplimiento.

Esto hace que existan múltiples métodos de comparar dos números difusos que, en la literatura especializada, se han desarrollado mediante los llamados índices de comparación, los cuales son analizados en la última parte de este primer Capítulo.

1. INTRODUCCION AL CONCEPTO DE CONJUNTO DIFUSO

Sea X un conjunto cuyos elementos notaremos por x, y sea A un subconjunto de X. La pertenencia de un elemento x de X al conjunto A viene dada por la función característica

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si y solo si } x \in A \\ 0 & \text{si y solo si } x \notin A \end{cases}$$

{0,1} es el llamado conjunto valoración.

Si el conjunto valoración es el intervalo real [0,1], A es denominado un conjunto difuso (Zadeh, 1965) y μ_A mide el grado de pertenencia del elemento x a A. A se caracteriza por el conjunto de pares

$$A = \{(x, \mu_A(x)),\ x \in X\}$$

Con la notación propuesta por Zadeh (1972) cuando X es un conjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto difuso en X es expresado como:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

y para X no finito, escribiremos

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \qquad (1.1)$$

Dos conjuntos difusos A y B son considerados iguales (A = B) si y solo si:

$$\forall x \in X, \qquad \mu_A(x) = \mu_B(x)$$

1.1. **Definición.** (Zadeh, 1965)

Dado un conjunto difuso $A = \{(x, \mu_A(x))\}$ se define su soporte como el conjunto ordinario

$$S(A) = \{x \in X / \mu_A(x) > 0\} \qquad (1.2)$$

1.2. **Definición.** (Zadeh, 1965)

Dado un conjunto difuso A, llamamos α-corte de dicho conjunto, al conjunto ordinario

$$A_\alpha = \{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad \text{con } \alpha \in [0,1] \qquad (1.3)$$

Claramente se ve como los conjuntos A_α, $\alpha \in [0,1]$ constituyen una sucesión decreciente (Fig. 1).

Si $\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow A_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_2} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$

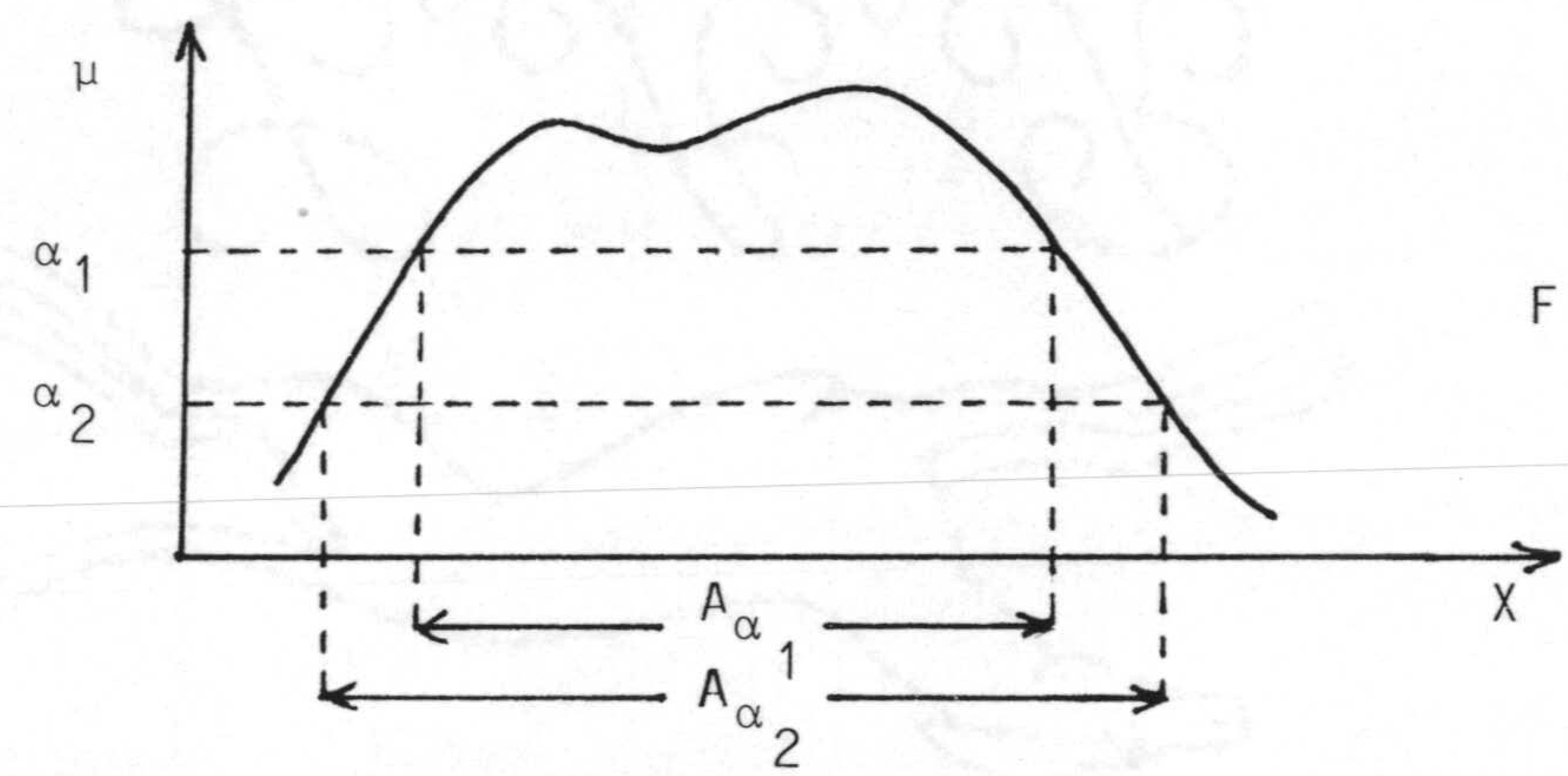


Fig. 1

También es inmediato que $A_0 = X$, por lo que de ahora en adelante nos referiremos al intervalo $(0,1]$.

1.3. **Teorema de Representación.** (Negoita y Ralescu, 1975)

Si A es un conjunto difuso y A_α sus α-cortes $\alpha \in (0,1]$, se verifica que:

$$A = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} \alpha A_\alpha \qquad (1.4)$$

entendiendo esta notación formal como la igualdad entre las funciones de pertenencia de ambos conjuntos. Si $\mu_{A_\alpha}(x)$ nota la función característica de A_α, caso particular de la función de pertenencia

$$\mu_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si y sólo si } x \in A_\alpha \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de pertenencia del conjunto difuso A puede expresarse en términos de las funciones características de sus α-cortes según la fórmula

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \min(\alpha, \mu_{A_\alpha}(x)) \qquad (1.5)$$

1.4. Principio de Extensión. (Zadeh, 1975)

Sean los universos $X_1, X_2, \ldots, X_r$ y X el producto cartesiano de ellos ($X = X_1 x X_2 x \ldots x X_r$), y $A_1, A_2, \ldots, A_r$ r conjuntos difusos en X_1, $X_2, \ldots, X_r$ respectivamente. El producto cartesiano $A_1 x A_2 x \ldots x A_r$ se define como un conjunto difuso

$$\{((x_1, \ldots, x_r), \mu_{A_1 x \ldots x A_r}(x_1, \ldots, x_r))\}$$

donde $(x_1, \ldots, x_r) \in A_1 x A_2 x \ldots x A_r$, y

$$\mu_{A_1 x \ldots x A_r}(x_1, \ldots, x_r) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r))$$

Con la notación de Zadeh (1972)

$$A_1 x \ldots x A_r = \int_{X_1 x \ldots x X_r} \min(\mu_{A_1}(x_1) \ldots \mu_{A_r}(x_r)) / (x_1 \ldots x_r)$$

Si f es una aplicación de X en el universo Y tal que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_r) = y$$

el Principio de Extensión permite inducir desde los conjuntos difusos A_i un conjunto difuso B en Y mediante la función f tal que:

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1 \ldots x_r \\ y=f(x_1 \ldots x_r)}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_r}(x_r)) \qquad (1.6)$$

$$\mu_B(y) = 0 \quad \text{si} \quad f^{-1}(y) = \emptyset$$

donde $f^{-1}(y)$ es la imagen inversa de y,

$\mu_B(y)$ es el superior de los grados de pertenencia $\mu_{A_1 x \ldots x A_r}(x_1, \ldots, x_r)$ de la realización de y usando r-uplas $(x_1, \ldots, x_r)$.

Usando la notación de Zadeh (1972) se tiene:

$$B = f(A_1 \ldots . A_r) = \int_{X_1 x \ldots x X_r} \min(\mu_{A_1}(x_1) \ldots \mu_{A_r}(x_r))/f(x_1 \ldots x_r)$$

donde la operación superior está implícita.

1.5. Definición. (Zadeh, 1965)

Un conjunto difuso es convexo si solo si sus α-cortes son convexos.

Una definición equivalente a la convexidad es que A es convexo si sólo si

$$\forall x_1,\ x_2 \in X, \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \qquad (1.7)$$

(Ver Figura 2)

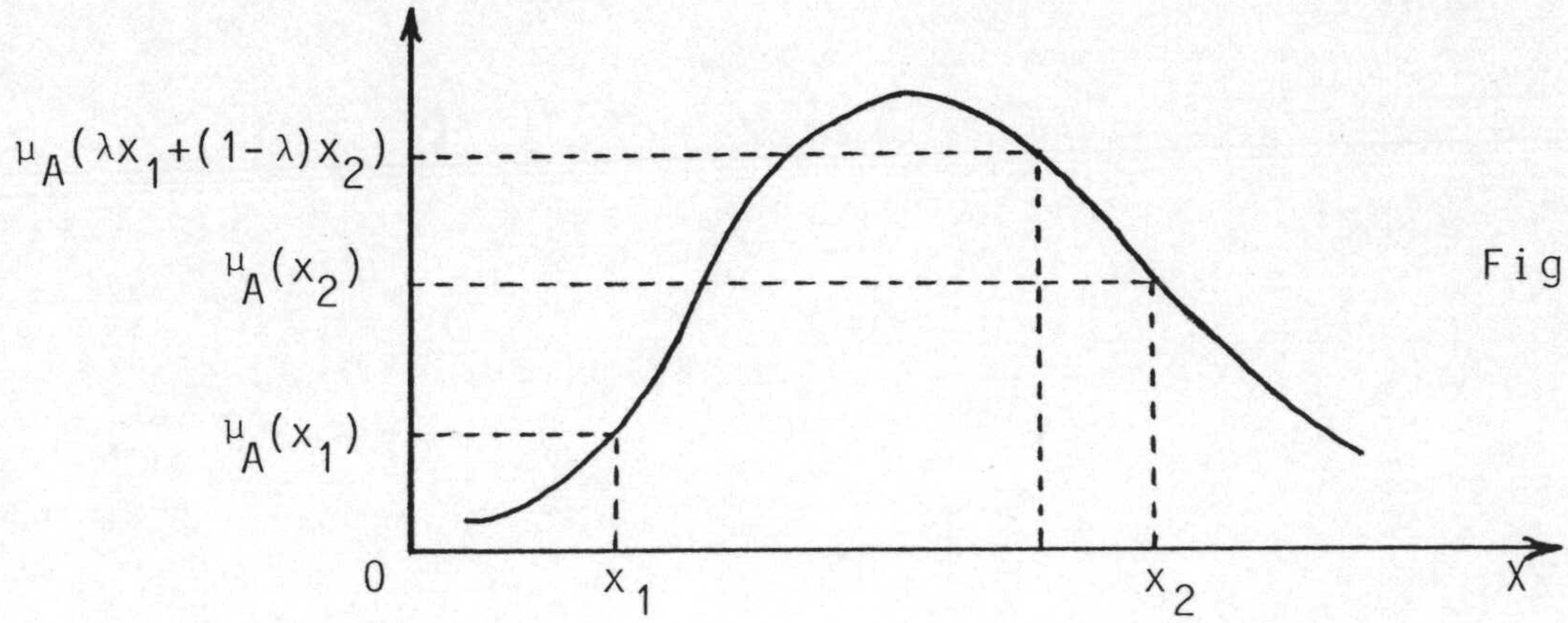


Fig. 2

1.6. Definición.

Se define la altura de un conjunto difuso

$$hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x) \tag{1.8}$$

1.7. Definición.

Un conjunto difuso se dice normalizado si solo si $\exists x \in X$ en el que $\mu_A(x) = 1$.

Esta definición implica que en los conjuntos difusos normalizados

$$hgt(A) = 1.$$

1.8. Posibilidad y Necesidad. (Zadeh, 1978)

Dado un conjunto referencial X, se define una **medida de Posibilidad** en X y la notaremos Π, como la función de conjuntos

$$\Pi : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$$

tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(\emptyset) = 0 \\ \Pi(X) = 1 \end{array}\right. \tag{1.9}$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad \Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B))$$

Dado un conjunto difuso normalizado F en X (es decir existe algún $x \in X$ / $\mu_F(x) = 1$) la cantidad $\Pi_F(A)$ se obtiene de la función de pertenencia μ_F por

$$\Pi_F(A) = \operatorname*{Sup}_{x \in A} \mu_F(x), \qquad \forall A \subseteq X \tag{1.10}$$

y define una medida de posibilidad.

Cuando A y F son difusos, (1.10) se extiende, usando el conjunto difuso intersección, a

$$\Pi_F(A) = \operatorname*{Sup}_{x} \min\left(\mu_F(x), \mu_A(x)\right) \tag{1.11}$$

Por otra parte, una **medida de Necesidad**, es una función de conjuntos

$$\mathcal{N}: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0,1]$$

tal que

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{N}(\emptyset) = 0 \\ \mathcal{N}(X) = 1 \end{array}\right. \tag{1.12}$$

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X), \quad \mathcal{N}(A \cap B) = \min\left(\mathcal{N}(A), \mathcal{N}(B)\right)$$

La medida de Necesidad puede obtenerse de la Posibilidad

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \qquad \mathcal{N}(A) = 1 - \Pi(\overline{A}) \tag{1.13}$$

siendo $\overline{A}$ el complementario del conjunto A, e inversamente, dada una medida de Necesidad, entonces

$$\forall A \in \mathcal{P}(X), \qquad \Pi(A) = 1 - \mathcal{N}(\overline{A}) \tag{1.14}$$

define una medida de posibilidad.

De (1.13) y (1.14) se deduce que el grado de necesidad de un suceso A es el grado de imposibilidad del suceso complementario.

Si Π se obtiene por una función de pertenencia normalizada μ_F entonces es obvio que

$$\forall A, \mathcal{N}_F(A) = 1 - \Pi_F(\bar{A}) = \inf_{x\varepsilon\bar{A}} (1 - \mu_F(x)) \qquad (1.15)$$

Cuando A y F son difusos (1,15) se extiende fácilmente de acuerdo con (1.11)

$$\mathcal{N}_F(A) = 1\text{-}\sup_x \min(\mu_F(x), 1-\mu_A(x)) = \inf_x \max(1-\mu_F(x), \mu_A(x)) \qquad (1.16)$$

2. NUMEROS DIFUSOS

Definición. (Zadeh, 1965)

Un número difuso es un conjunto difuso convexo y normalizado de la recta real $\mathbb{R}$ tal que

a) $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \quad \mu_A(x_0) = 1$

x_0 es llamado valor normal de A

b) μ_A es continua a trozos

Todo número difuso A está pues caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$$

y toda función como la anterior engendra un número difuso donde, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu_A(x)$ es el grado de pertenencia de x al número difuso A.

Notaremos por $N_D(\mathbb{R})$ al conjunto de los números difusos sobre $\mathbb{R}$ y al conjunto de las funciones de pertenencia sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, por tanto nos podemos referir al hablar de número difuso tanto al elemento $A \in N_D(\mathbb{R})$ como a $\mu_A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Diremos que un número difuso es positivo (negativo) si su función de pertenencia es tal que $\mu_A(x) = 0$, $\forall x < 0$ ($\forall x > 0$).

2.1. **Representación L-R de un número difuso.** (Dubois y Prade, 1978)

Un número difuso M se denomina número difuso del tipo L-R si y solo si su función de pertenencia μ_M es de la forma:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} L((m-x)/\alpha) & \text{para } x \leq m,\ \alpha > 0 \\ R((x-m)/\beta) & \text{para } x \geq m,\ \beta > 0 \end{cases} \qquad (1.17)$$

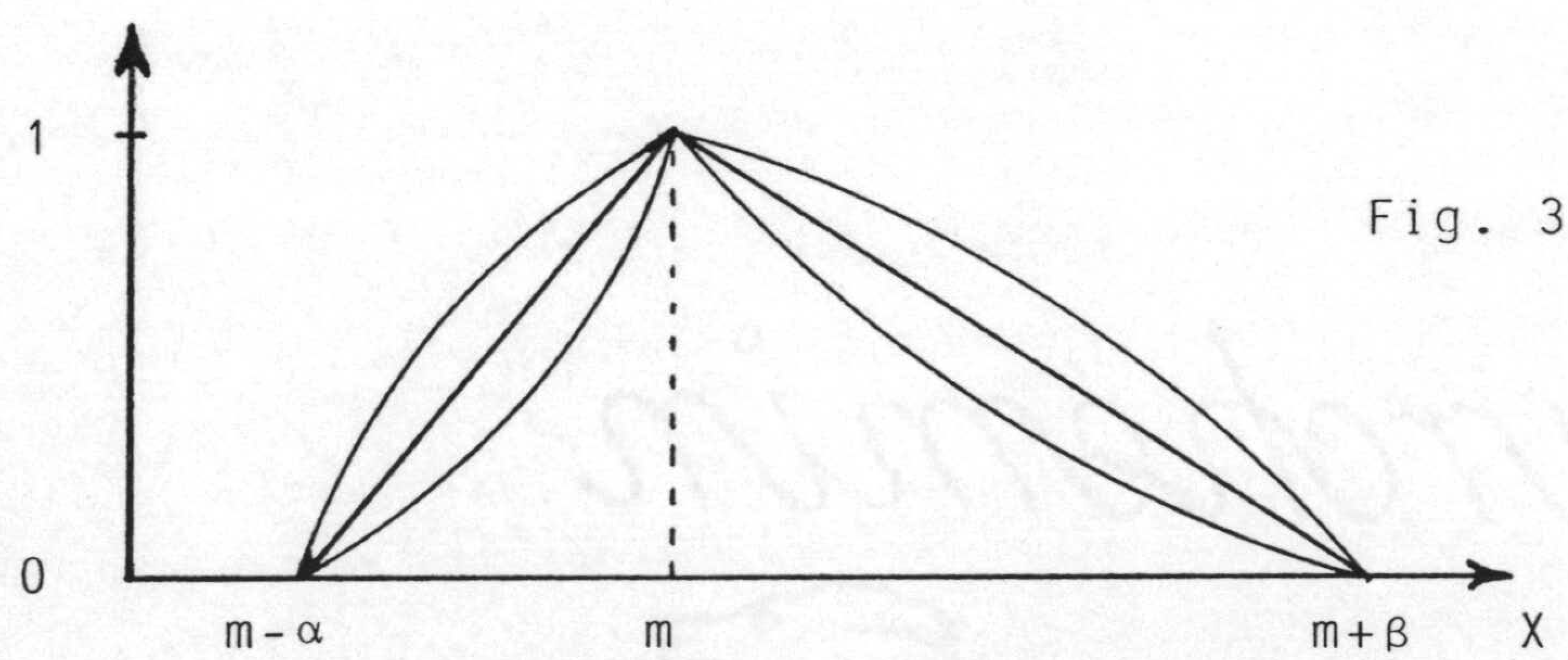


Fig. 3

donde L y R representan una función a la izquierda y derecha de m respectivamente, L no decreciente y R no creciente, m es el valor modal ($\mu_M(m) = 1$), α y β son las amplitudes a la izquierda y a la derecha respectivamente (Fig. 3).

El número difuso M lo notaremos abreviadamente por:

$$M = (m,\alpha,\beta)_{LR} \tag{1.18}$$

Cuando α y β son ambos nulos, M es un número no difuso o "crisp".

2.2. Operaciones con números difusos del tipo L-R

a. Adición

Dados dos números difusos L-R, $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ y $N = (n, \gamma, \delta)_{LR}$, el número difuso suma de ambos es:

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \oplus (n,\gamma,\delta)_{LR} = (m+n,\alpha+\gamma,\beta+\delta)_{LR} \tag{1.19}$$

La expresión del opuesto de un número difuso es:

$$-(m,\alpha,\beta)_{LR} = (-m,\beta,\alpha)_{RL} \tag{1.20}$$

De (1.19) y (1.20) se obtiene la expresión del número difuso diferencia entre dos números difusos L-R

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \ominus (n,\gamma,\delta)_{RL} = (m-n,\alpha+\delta,\beta+\gamma)_{LR} \tag{1.21}$$

b. **Multiplicación**

Si M y N son dos números difusos positivos

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \odot (n,\gamma,\delta)_{LR} \cong (mn, m\gamma+n\alpha, m\delta+n\beta)_{LR} \qquad (1.22)$$

c. **Multiplicación por escalar**

$$\forall\lambda > 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \odot (m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}$$
$$\forall\lambda < 0,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \odot (m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha)_{RL} \qquad (1.23)$$

d. **Inverso de un número difuso**

Siendo $\mu_{M^{-1}}(x) = \mu_M(1/x)$ $\forall x \neq 0$, $\forall M \in \mathcal{F}(\mathbb{R}-\{0\})$ se tiene que:

$$(m,\alpha,\beta)^{-1}_{LR} \cong (m^{-1}, \beta m^{-2}, \alpha m^{-2})_{RL} \qquad (1.24)$$

e. **División**

Usando la identidad $M \oslash N = M \odot N^{-1}$ de (1.22) y (1.24) se obtiene:

$$(m,\alpha,\beta)_{LR} \oslash (n,\gamma,\delta)_{RL} \cong \left(\frac{m}{n}, \frac{\delta m+\alpha n}{n^2}, \frac{\gamma m+\beta n}{n^2}\right)_{LR} \qquad (1.25)$$

Nota:

A partir de aquí notaremos un número difuso a, por $\underset{\sim}{a}$, y si es del tipo L-R,

$$\underset{\sim}{a} = (a, \underline{a}, \overline{a})$$

es decir, $\underline{a}$ y $\overline{a}$ representan las amplitudes a la izquierda y derecha del valor modal a. A los extremos inferior y superior del soporte de dicho número difuso lo notaremos por $_0a$ y ^0a respectivamente, siendo pues:

$$_0a = a - \underline{a}$$

$$^0a = a + \overline{a}$$

3. FORMAS DE COMPARAR NUMEROS DIFUSOS

Existen en la literatura diversas formas de comparar números difusos que podemos considerar enmarcadas en dos grandes grupos. Por una parte, tenemos los métodos para ordenar números difusos basados en la definición de una función de comparación que aplique cada número difuso en la recta real donde existe un orden natural. Otros autores consideran una formalización diferente del problema. Una comparación entre números difusos es siempre una comparación entre alternativas, es decir un procedimiento de decisión. Desde este punto de vista, dados los números difusos $\underset{\sim}{u}_i$, i = 1,...n, se determina el conjunto difuso de las alternativas optimales

$$\underset{\sim}{O} = \{i, \mu_{\underset{\sim}{O}}(i)\} \qquad i = 1,\dots,n \qquad (1.26)$$

donde $\mu_{\underset{\sim}{O}}(i)$ es el grado con que la i-ésima alternativa puede considerarse como la mejor alternativa. Mostraremos los diferentes métodos que existen en la literatura para seleccionar una alternativa dado un conjunto de números difusos que representan un grupo de ellas.

Iremos viendo cada uno de los métodos y su aplicación a números difusos triangulares, es decir con función de pertenencia dada por (Fig. 4):

$$\mu_{\underset{\sim}{a}}(x) = \begin{cases} (x - {}_0a)/(a - {}_0a) & {}_0a \leqq x \leqq a \\ ({}^0a - x)/({}^0a - a) & a \leqq x \leqq {}^0a \\ 0 \text{ en otro caso} & \end{cases} \qquad (1.27)$$

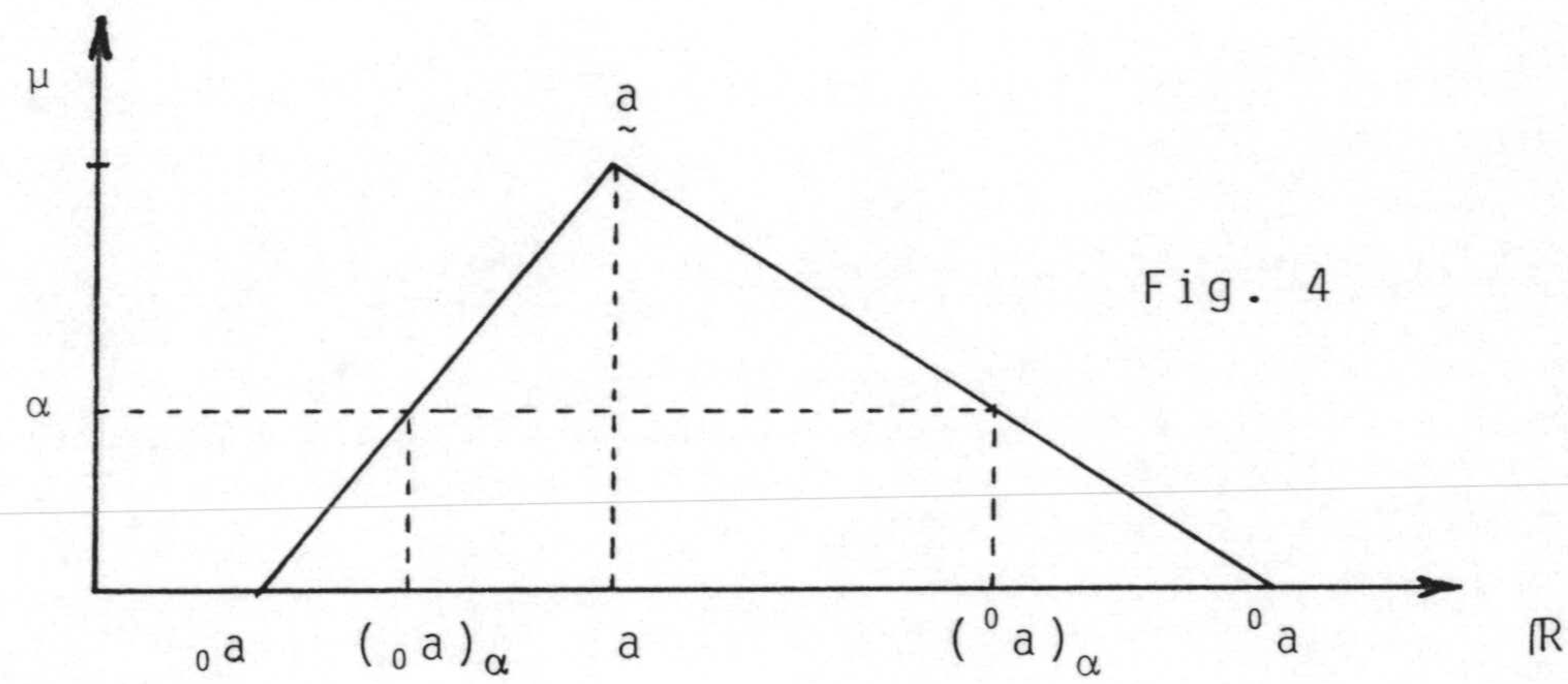


Fig. 4

Un α-corte del número difuso $\underset{\sim}{a}$ es:

$$A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} / \mu_{\underset{\sim}{a}}(x) \geqq \alpha\}$$

es decir, el intervalo

$$[({}_0a)_\alpha, ({}^0a)_\alpha] = [{}_0a + \alpha(a - {}_0a), {}^0a + \alpha(a - {}^0a)] \qquad (1.28)$$

3.1. Comparación de **números** difusos **mediante** una **función de** comparación.

Supongamos n números difusos $\underset{\sim}{u}_i$, $i = 1,...,n$,

$$\underset{\sim}{u}_i = \{(x, \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x))\} \qquad x \in I \subset \mathbb{R}$$

Se define una función de comparación

$$F : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \qquad (1.29)$$

donde $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es el conjunto de los números difusos en $\mathbb{R}$.

F es tal que:

$$F(\underset{\sim}{u}_i) < F(\underset{\sim}{u}_j) \Rightarrow \underset{\sim}{u}_i < \underset{\sim}{u}_j$$

$$F(\underset{\sim}{u}_i) = F(\underset{\sim}{u}_j) \Rightarrow \underset{\sim}{u}_i = \underset{\sim}{u}_j \qquad (1.30)$$

$$F(\underset{\sim}{u}_i) > F(\underset{\sim}{u}_j) \Rightarrow \underset{\sim}{u}_i > \underset{\sim}{u}_j$$

denominaremos a tal funcion **Indice.**

Veamos a continuación algunos de los índices que se conocen en la literatura.

a. **Indice** de **Chang.** (Chang, 1981)

Chang propone como índice

$$F(\underset{\sim}{u}_i) = \int_{S_i} x \, \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x) \, dx \qquad (1.31)$$

donde S_i es el soporte de $\underset{\sim}{u}_i$.

El valor de este índice para un número difuso $\underset{\sim}{a}$ con función de pertenencia triangular con soporte $[{}_0a, {}^0a]$ y altura $hgt = \mu_{\underset{\sim}{a}}(x)_{x=a}$ se reduce a:

$$F(\underset{\sim}{a}) = (({}^0a - {}_0a)({}^0a + {}_0a + a))/6 \qquad (1.32)$$

Aplicando este índice para comparar dos números difusos $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ con función de pertenencia (1.27) tendremos que si $F(\underset{\sim}{a}) \leq F(\underset{\sim}{b})$ entonces $\underset{\sim}{a} \leq \underset{\sim}{b}$.

Por tanto, por (1.31) obtenemos que se ha de verificar que

$$({}^{0}a-{}_{0}a)({}^{0}a+{}_{0}a+a) \leqq ({}^{0}b-{}_{0}b)({}^{0}b+{}_{0}b+b) \qquad (1.33)$$

b. **Indices de Yager.** (Yager, 1978, 1981)

Yager propone tres índices sin imponer ninguna hipótesis de normalidad o convexidad.

El primer índice es:

$$F_1(\underset{\sim}{u}_i) = \frac{\int_{S_i} g(x)\, \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x)\, dx}{\int_{S_i} \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x)\, dx} \qquad (1.34)$$

donde g(x) es una medida de la importancia del valor x. Cuando g(x) = x este índice representa la abcisa del centro de gravedad del número difuso $\underset{\sim}{u}_i$.

El valor de este índice en el caso de un número difuso $\underset{\sim}{a}$ con función de pertenencia (1.27) y g(x) = x, puesto que en tal caso el numerador es el índice de Chang y el denominador es el área del triángulo

$$\int_{S_i} \mu_{\underset{\sim}{a}}(x)\, dx = \int_{{}_{0}a}^{{}^{0}a} \mu_{\underset{\sim}{a}}(x)\, dx = \frac{{}^{0}a - {}_{0}a}{2}$$

es entonces:

$$F_1(\underset{\sim}{a}) = \frac{{}^{0}a + {}_{0}a + a}{3} \qquad (1.35)$$

En consecuencia, dados dos números difusos $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ del tipo (1.27) diremos que $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ cuando $F_1(\underset{\sim}{a}) \leqq F_1(\underset{\sim}{b})$, es decir cuando:

$$^0a + {}_0a + a \leqq {}^0b + {}_0b + b \qquad (1.36)$$

El segundo índice que Yager propone es la medida de la consistencia de un número difuso $\underset{\sim}{u}_i$, cuyo soporte está contenido en el intervalo $[0,1]$, con el conjunto difuso lineal

$$\underset{\sim}{z} = \{(z, \mu_{\underset{\sim}{z}}(z)),\ \mu_{\underset{\sim}{z}}(z) = z\}$$

$$F_2(\underset{\sim}{u}_i) = \max_{z \varepsilon S_i} \min\ (z, \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(z)) \qquad (1.37)$$

El valor de este índice para un número difuso $\underset{\sim}{a}$, tal que $[{}_0a, {}^0a] \subseteq [0,1]$ con función de pertenencia (1.27) es:

$$F_2(\underset{\sim}{a}) = \frac{{}^0a}{{}^0a - a + 1} \qquad (1.38)$$

Por tanto diremos que $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ cuando $F_2(\underset{\sim}{a}) \leqq F_2(\underset{\sim}{b})$, es decir cuando:

$$\frac{{}^0a}{{}^0a - a + 1} \leqq \frac{{}^0b}{{}^0b - b + 1} \qquad (1.39)$$

La tercera función de comparación propuesta por Yager es

$$F_3(\underset{\sim}{u}_i) = \int_0^{\alpha_{max}} M\ (U_i^\alpha)\ d\alpha \qquad (1.40)$$

donde U_i^α es el α-corte de $\underset{\sim}{u}_i$, $M(U_i^\alpha)$ es el valor medio de los elementos de U_i^α y $\alpha_{max} = hgt(\underset{\sim}{u}_i)$.

En el número difuso $\underset{\sim}{a}$ que estamos considerando (1.27), tenemos

$$U_i^\alpha = [({}_0a)_\alpha, ({}^0a)_\alpha] = [{}_0a + \alpha(a - {}_0a), {}^0a + \alpha(a - {}^0a)]$$

$$M(U_i^\alpha) = \frac{1}{2}\,[{}^0a + {}_0a + \alpha(2a - {}_0a - {}^0a)]$$

y $\alpha_{max} = 1$, luego:

$$F_3(\underset{\sim}{a}) = \frac{1}{4}\,({}^0a + {}_0a + 2a) \qquad (1.41)$$

Así pues, diremos que $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ si $F_3(\underset{\sim}{a}) \leqq F_3(\underset{\sim}{b})$, es decir, si:

$${}^0a + {}_0a + 2a \leqq {}^0b + {}_0b + 2b \qquad (1.42)$$

c. **Indice de Adamo.** (Adamo, 1980)

Empleando el concepto de α-corte, Adamo define un índice de α-preferencia dado por:

$$F_\alpha(\underset{\sim}{u}_i) = \max\,\{x / \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x) \geqq \alpha\} \qquad (1.43)$$

por tanto para números difusos con función de pertenencia (1.27), tendremos según (1.28),

$$F_\alpha(\underset{\sim}{a}) = ({}^0a)_\alpha = {}^0a + \alpha(a - {}^0a) \qquad (1.44)$$

con este índice diremos que $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ a grado α, cuando

$${}^0a + \alpha(a - {}^0a) \leqq {}^0b + \alpha(b - {}^0b) \qquad (1.45)$$

3.2. Comparación de números difusos mediante selección de la mejor alternativa.

Uno de los primeros índices definidos en estos términos fué el propuesto por Baas y Kwakernaak.

a. **Indice de Baas y Kwakernaak.** (Baas and Kwakernaak, 1977)

Con el fin de obtener un conjunto difuso de las alternativas optimales (1.26), se define en primer lugar el conjunto difuso condicional

$$\underset{\sim}{O/R} = \{i,\ \mu_{\underset{\sim}{O/R}}(i/x_1,\dots,x_2)\} \qquad (1.46)$$

$$i \in N \qquad x_i \in I \subset \mathbb{R}$$

con función de pertenencia

$$\mu_{\underset{\sim}{O/R}}(i/x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq x_j \quad \forall j \in N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de pertenencia en el conjunto de alternativas optimales viene dada por:

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(i) = \sup_{x_1\dots x_n} \left(\mu_{\underset{\sim}{O/R}}(i/x_1\dots x_n) \wedge (\min_j \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j))\right) =$$

$$= \sup_{\substack{x_1\dots x_n \\ x_i \geq \max_j x_j}} \min_j \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j) = \qquad (1.47)$$

$$= \sup_{x_i} \min \left(\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i),\ \min_{j\neq i} \sup_{x_i \geq \max_{j\neq i} x_j} \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j)\right)$$

b. **Indice de Baldwin y Guild.** (Baldwin and Guild, 1979)

Estos autores proponen un índice similar al anterior, pero con el objetivo de obtener más sensibilidad emplean una relación de preferencia bidimensional.

Así, definen

$$\underset{\sim}{P}_{ij} = \{(x_i, x_j)\ \mu_{\underset{\sim}{P}_{ij}}(x_i, x_j)\}$$

donde $\mu_{\underset{\sim}{P}_{ij}}$ mide cuánto x_i es preferido a x_j, $i \neq j$.

En particular, sugieren: $\mu_{\underset{\sim}{P}_{ij}} = x_i - x_j$.

El conjunto optimal viene entonces dado por:

$$\mu_{\underset{\sim}{O}}(i) = \min_{j \neq i} \sup_{x_i x_j} (\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i) \wedge \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j) \wedge \mu_{\underset{\sim}{P}_{ij}}(x_i, x_j)) \quad (1.48)$$

Dubois y Prade (1978) propusieron con anterioridad el uso del operador $\widetilde{\max}$ difuso para solventar el problema de la comparación entre números difusos. Posteriormente, reconocieron este operador como inadecuado ya que puede resultar un número difuso distinto de los que se comparan.

c. **El método propuesto por Kerre.** (Kerre, 1982)

Kerre sugiere también evaluar el $\widetilde{\max}$ difuso pero introduciendo el cálculo de la distancia de Hamming entre cada número difuso y el $\widetilde{\max}$. La distancia de

Hamming entre dos conjuntos difusos viene definida (en el caso continuo) por:

$$\text{dis}\,(\underset{\sim}{u}_i, \underset{\sim}{u}_j) = \int_I |\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x) - \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x)|\, dx$$

El conjunto difuso cuya distancia al $\widetilde{\max}$ es mínima es el más preferido.

d. **Indice de Watson et** al. (Watson et al., 1979)

Estos autores proponen un índice relativo al concepto de implicación que se demuestra poco operativo para los intereses de esta memoria.

e. **Método sugerido por Jain.** (Jain, 1976, 1977)

Para determinar el conjunto difuso de las alternativas optimales, se determina en primer lugar el soporte de la unión de los números difusos en consideración, que notaremos:

$$S = \text{Sop de} \bigcup_i \underset{\sim}{u}_i$$

Sea x_{max} = Sup S, entonces el conjunto maximizante de S es evaluado como:

$$\underset{\sim}{u}_{max} = \{ x, \mu_{max}(x) \} \qquad x \in S$$

donde

$$\mu_{max}(x) = (x/x_{max})^k, \quad k > 0 \qquad (1.49)$$

y finalmente se obtiene

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(i) = \text{hgt}\ (\underset{\sim}{u}_i \cap \underset{\sim}{u}_{max}) \qquad (1.50)$$

Nótese que $\mu_{\underset{\sim}{0}}(i)$ no es muy diferente del índice F_2 propuesto por Yager.

Es obvio que el conjunto difuso de las alternativas optimales depende de la definición del conjunto maximizante.

Así pues, dados dos números difusos $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ diremos que

$$\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b} \quad \text{si} \quad \mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}) \leqq \mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b}).$$

Veamos qué expresión toma esta última desigualdad para el caso de números difusos $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ con función de pertenencia del tipo (1.27), siendo k = 1 y en los tres posibles casos en que $x_{max} = {}^0b$, $x_{max} = {}^0a$ y $x_{max} = {}^0a = {}^0b$.

1er Caso: Sea $x_{max} = {}^0b$, entonces $\mu_{max} = x/{}^0b$ $0 \leqq x \leqq {}^0b$. Calculamos $\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a})$ y $\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b})$ intersecando la función de pertenencia de $\underset{\sim}{u}_{max}$ con $\mu_{\underset{\sim}{a}}$ y $\mu_{\underset{\sim}{b}}$ en los respectivos intervalos $[a, {}^0a]$ y $[b, {}^0b]$ (Fig. 5).

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}) = {}^0a/({}^0a - a + {}^0b)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b}) = {}^0b/(2\,{}^0b - b)$$

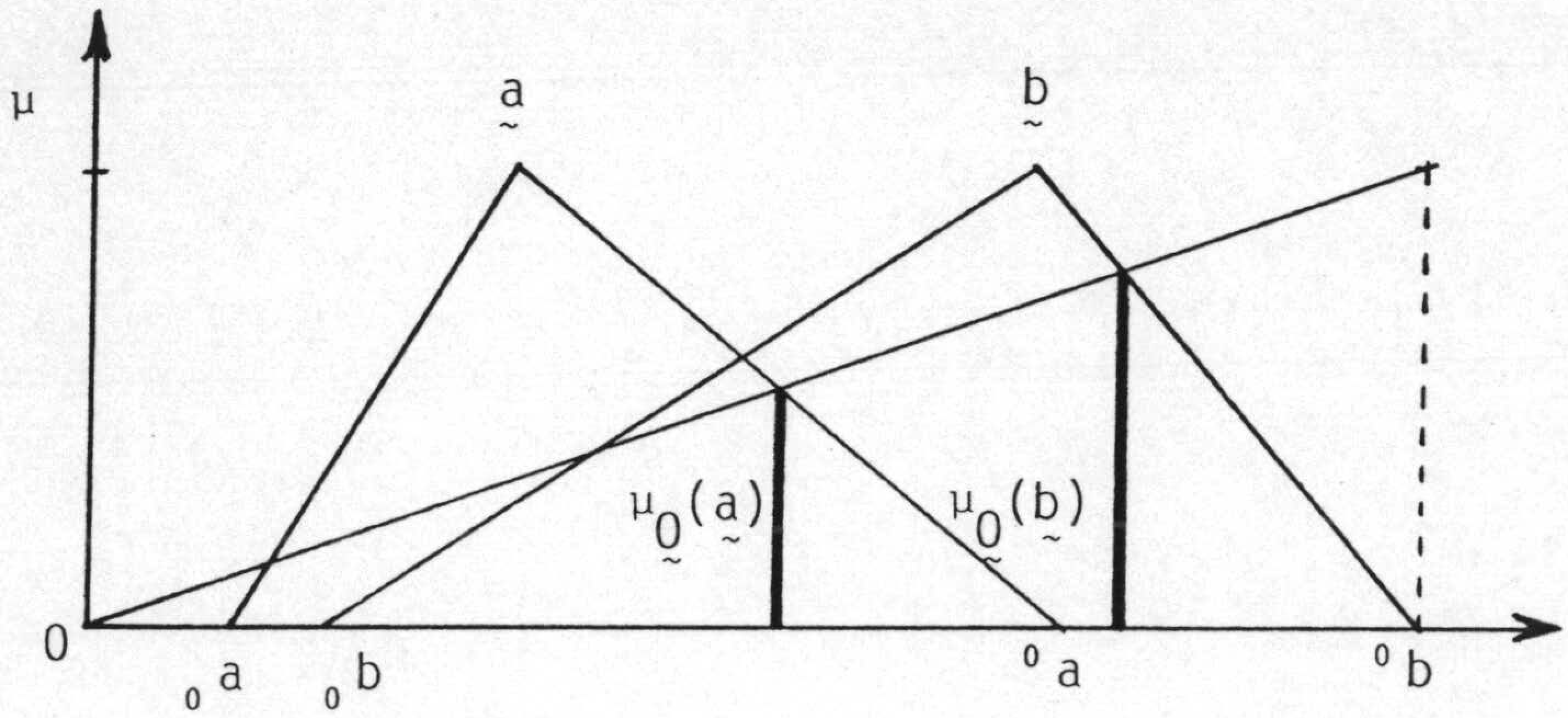


Fig. 5

Por tanto diremos que $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{{}^0a}{{}^0a - a + {}^0b} \leqq \frac{{}^0b}{2\,{}^0b - b} \qquad (1.51)$$

2º Caso: Si $x_{max} = {}^0a$, $\mu_{max}(x) = x/{}^0a$ (Fig. 6), se obtiene:

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{a}) = \frac{{}^0a}{2\,{}^0a - a}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{0}}(\underset{\sim}{b}) = \frac{{}^0b}{{}^0b - b + {}^0a}$$

con lo cual, $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{{}^0a}{2\,{}^0a - a} \leqq \frac{{}^0b}{{}^0b - b + {}^0a} \qquad (1.52)$$

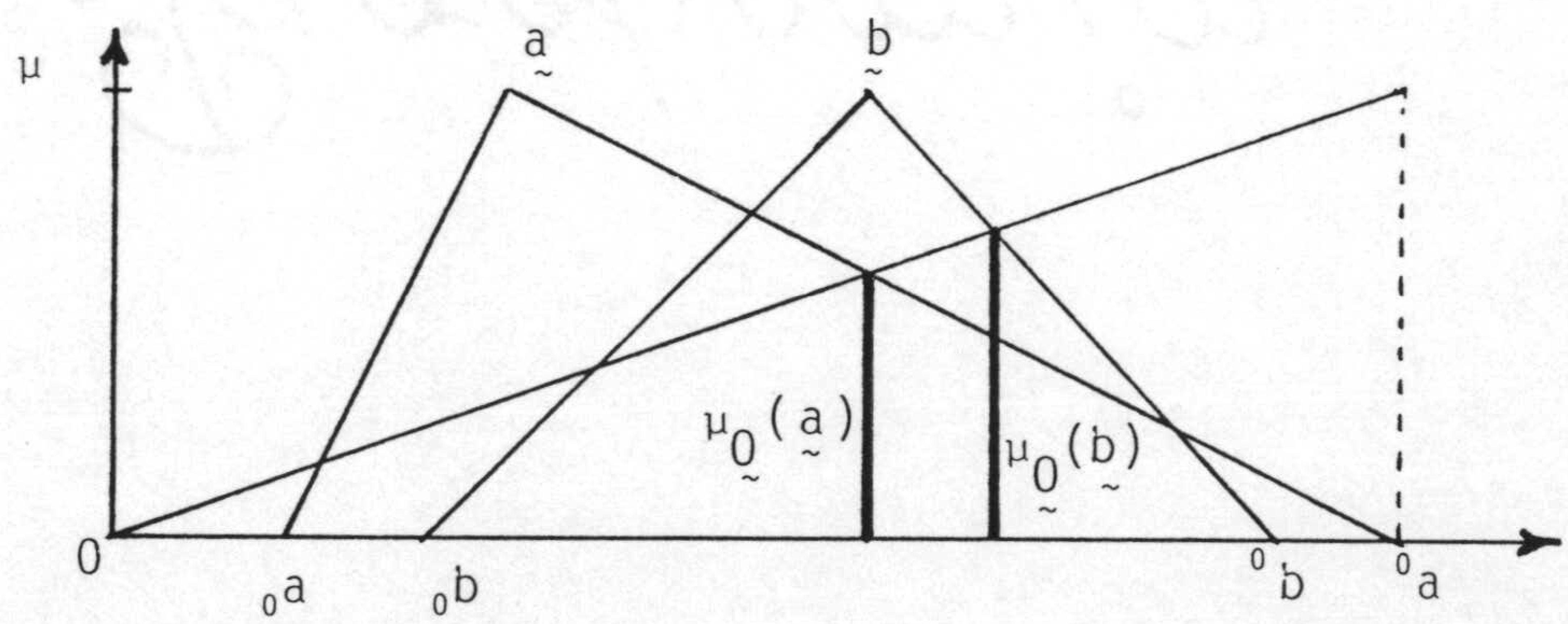


Fig. 6

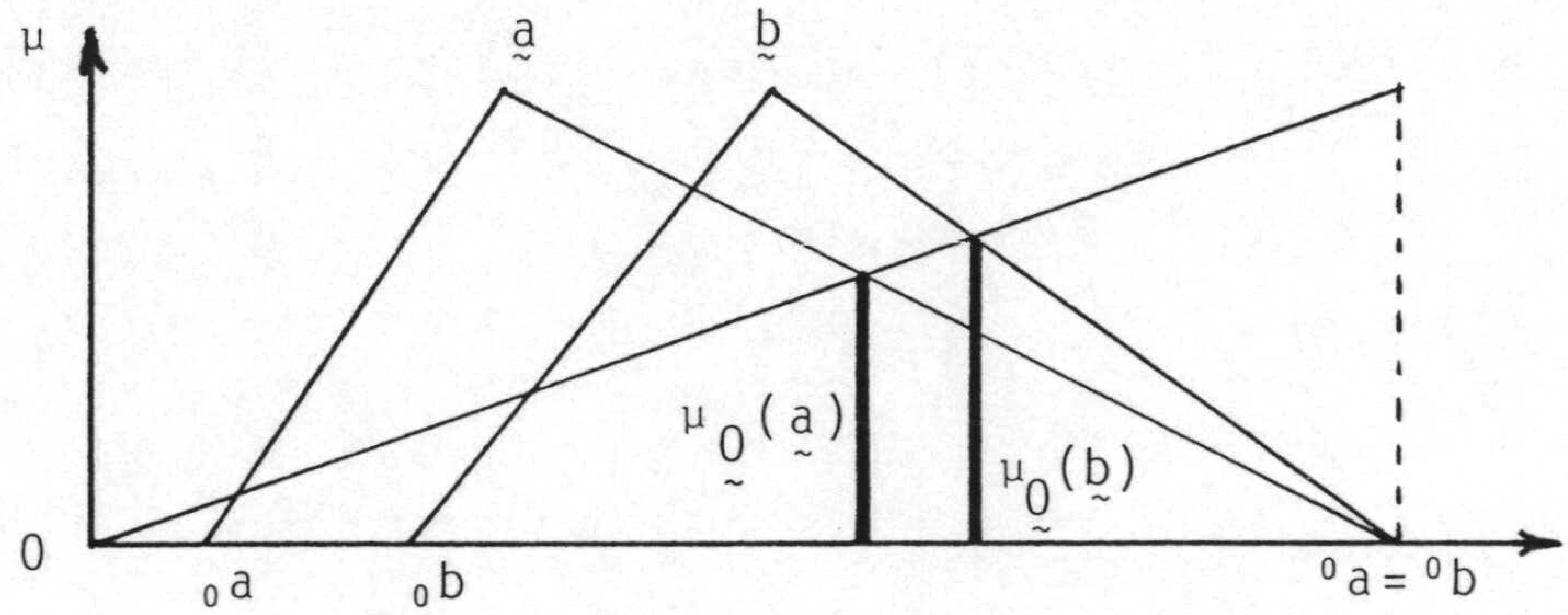
3er Caso: Cuando $x_{max} = {}^0a = {}^0b$ (Fig. 7) se obtiene que

$\underset{\sim}{a} \leq \underset{\sim}{b}$ si:

$$\frac{{}^0b}{2\,{}^0b - a} \leq \frac{{}^0b}{2\,{}^0b - b}$$

por tanto si:

$$a \leq b \qquad (1.53)$$



(Fig. 7)

f. Indices de Dubois y Prade. (Dubois and Prade, 1983)

Dubois y Prade proponen cuatro índices que describen la posición relativa de dos números difusos $\underset{\sim}{u}_i$ y $\underset{\sim}{u}_j$.

f.1. Grado de posibilidad de dominancia (de $\underset{\sim}{u}_i$ sobre $\underset{\sim}{u}_j$).

Se define:

$$PD(\underset{\sim}{u}_i) = \Pi_{\underset{\sim}{u}_i}([\underset{\sim}{u}_j, +\infty)) \triangleq \operatorname{Poss}(\underset{\sim}{u}_i \geq \underset{\sim}{u}_j) =$$

$$= \sup_{x_i} \min\left(\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i), \sup_{x_j \leq x_i} \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j)\right) =$$

$$= \sup_{\substack{x_i, x_j \\ x_i \geq x_j}} \min\left(\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i), \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j)\right) \qquad (1.54)$$

índice que coincide con el propuesto por Baas y Kwakernaak.

Así, dados dos números difusos $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ con función de pertenencia (1.27) diremos que $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ si

$$\mathrm{Poss}(\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}) \geqq \mathrm{Poss}(\underset{\sim}{b} \leqq \underset{\sim}{a}) \qquad (1.55)$$

Geométricamente (Fig. 8), Poss $(\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b})$ es la ordenada del punto donde se intersecan la función de pertenencia del número difuso $\underset{\sim}{b}$ en el intervalo $[b, {}^{0}b]$ con la función de pertenencia de los números reales x "posiblemente mayores o iguales a z" donde $z \in \underset{\sim}{a}$ con función de pertenencia

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mu_{[a,+\infty)}(x) = \sup_{z \leqq x} \mu_{\underset{\sim}{a}}(z) = \Pi_{\underset{\sim}{a}}(-\infty, x]$$

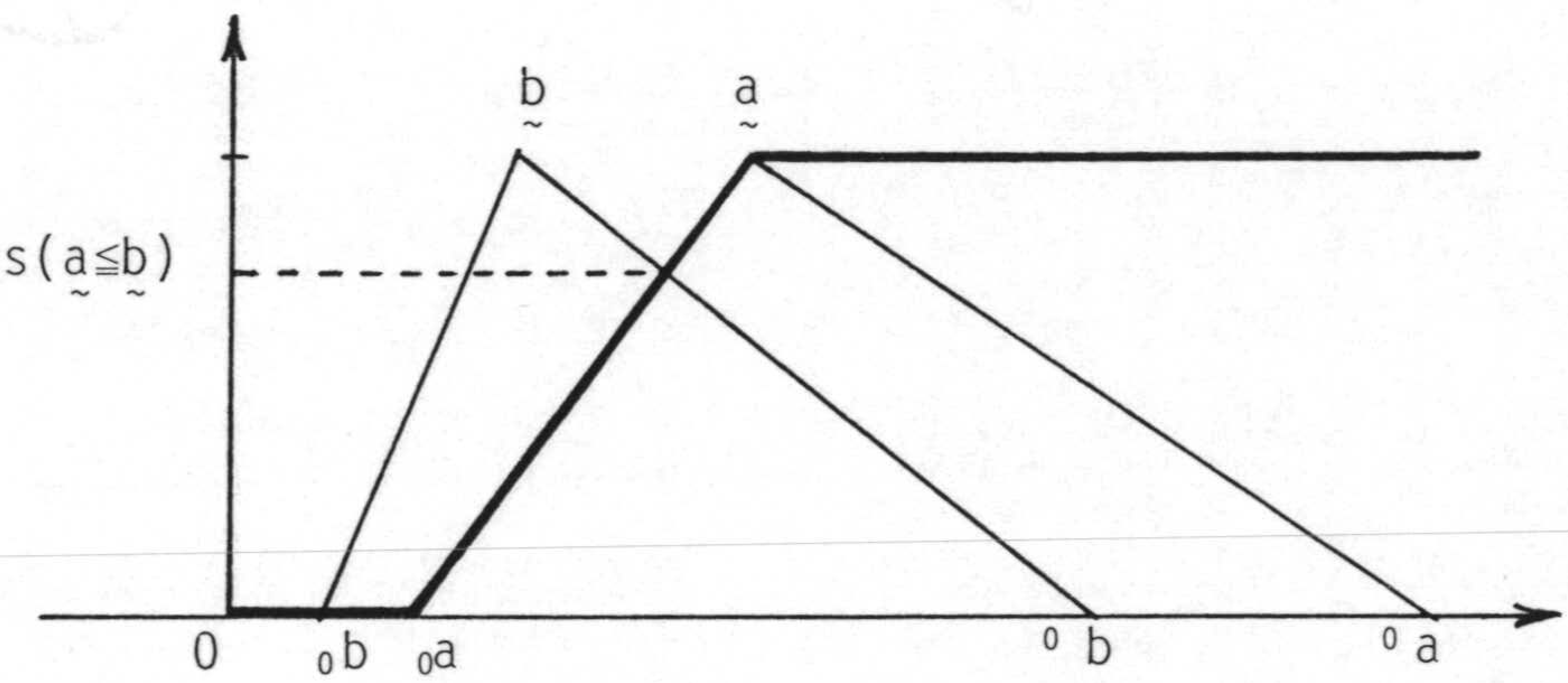


Fig. 8

Análogamente, calculamos el valor de $\mathrm{Poss}(\underset{\sim}{b} \leqq \underset{\sim}{a})$. Obtenemos que tales valores son:

$$\mathrm{Poss}\,(\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad {}^{0}b \leqq {}_{0}a \\ \dfrac{{}^{0}b - {}_{0}a}{{}^{0}b - b + a - {}_{0}a} & \text{si} \quad a > b \;\; \text{y} \;\; {}^{0}b > {}_{0}a \\ 1 & \text{si} \quad a \leqq b \end{cases} \qquad (1.56)$$

$$Poss(\underset{\sim}{b} \leqq \underset{\sim}{a}) = \begin{cases} 0 & si \quad {}^0a \leqq {}_0b \\ \dfrac{{}^0a - {}_0b}{{}^0a - a + b - {}_0b} & si \quad b > a \quad y \quad {}^0a > {}_0b \\ 1 & si \quad b \leqq a \end{cases} \qquad (1.57)$$

Por tanto, $\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b}$ si

$$\frac{{}^0b - {}_0a}{{}^0b - b + a - {}_0a} \geqq \frac{{}^0a - {}_0b}{{}^0a - a + b - {}_0b} \qquad (1.58)$$

f.2. Grado de necesidad de dominancia.

Se define:

$$ND(\underset{\sim}{u}_i) = \mathcal{N}_{\underset{\sim}{u}_i}([\underset{\sim}{u}_j, +\infty)) \triangleq Nec\ (\underset{\sim}{u}_i \geqq \underset{\sim}{u}_j) =$$

$$= \inf_{x_i} \sup_{x_i, x_j \leqq x_i} \max\,(1 - \mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i),\ \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j)) \quad (1.59)$$

Consideremos dos números difusos $\underset{\sim}{a}$ y $\underset{\sim}{b}$ con funciones de pertenencia del tipo (1.27). Geométricamente se obtiene el grado de necesidad de dominancia $Nec(\underset{\sim}{a} \leqq \underset{\sim}{b})$ como la ordenada el punto donde se intersecan las funciones de pertenencia $1 - \mu_{\underset{\sim}{b}}(x)$ con la función de pertenencia de los "números x posiblemente mayores o iguales a z" donde $z \in \underset{\sim}{a}$, con función de pertenencia $\mu_{[a,+\infty)}(x) = \sup_{z \leqq x} \mu_{\underset{\sim}{a}}(z)$, y para ello calculamos el punto de corte de $1 - \mu_{\underset{\sim}{b}}$ en el intervalo $[{}_0b, b]$ con la función de pertenencia del número difuso $\tilde{a}$ en el intervalo $[{}_0a, a]$ (Fig. 9)

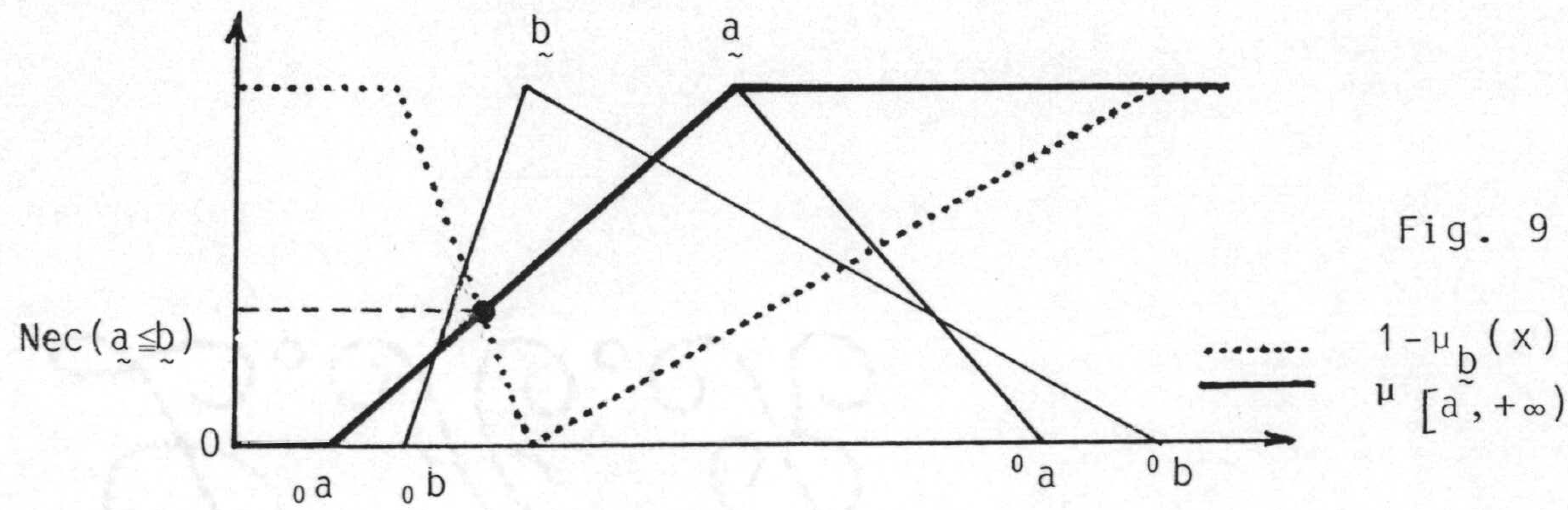


Fig. 9

Se obtiene:

$$\mathrm{Nec}\,(\tilde{a} \leqq \tilde{b}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad b \leqq {}_0a \\ \dfrac{b - {}_0a}{a - {}_0a + b - {}_0b} & \text{si} \quad b > {}_0a \quad \text{y} \quad a > {}_0b \\ 1 & \text{si} \quad a \leqq {}_0b \end{cases} \tag{1.60}$$

De forma análoga,

$$\mathrm{Nec}\,(\tilde{b} \leqq \tilde{a}) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leqq {}_0b \\ \dfrac{a - {}_0b}{a - {}_0a + b - {}_0b} & \text{si} \quad a > {}_0b \quad \text{y} \quad b > {}_0a \\ 1 & \text{si} \quad b \leqq {}_0a \end{cases} \tag{1.61}$$

Por tanto diremos que $\tilde{a} \leqq \tilde{b}$ cuando:

$$\mathrm{Nec}\,(\tilde{a} \leqq \tilde{b}) \geqq \mathrm{Nec}\,(\tilde{b} \leqq \tilde{a})$$

que por (1.60) y (1.61) se reduce a:

$$a + {}_0a \leqq b + {}_0b \tag{1.62}$$

f.3. **Grado de posibilidad de dominancia estricta.**

$$PSD(\underset{\sim}{u}_i) = \Pi_{\underset{\sim}{u}_i}([\underset{\sim}{u}_j,+\infty)) \triangleq Poss(\underset{\sim}{u}_i > \underset{\sim}{u}_j) =$$

$$= \sup_{x_i} \inf_{x_j, x_j \geq x_i} \min(\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i), 1-\mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j)) \qquad (1.63)$$

f.4. **Grado de necesidad de dominancia estricta.**

$$NSD(\underset{\sim}{u}_i) = \mathcal{N}_{\underset{\sim}{u}_i}(]\underset{\sim}{u}_j,+\infty)) \triangleq Nec(\underset{\sim}{u}_i > \underset{\sim}{u}_j) =$$

$$= 1 - \sup_{x_i \leq x_j} \min(\mu_{\underset{\sim}{u}_i}(x_i), \mu_{\underset{\sim}{u}_j}(x_j)) =$$

$$= 1 - PD(\underset{\sim}{u}_j) \qquad (1.64)$$

que puede comprobarse coincide con el de Watson et al. (1979) pero que como aquél no consideraremos por mostrarse poco operativo para nuestros intereses.

Si queremos comparar un número difuso $\underset{\sim}{a}$ y un número no difuso b podemos aplicar los índices anteriores teniendo en cuenta que si b es crisp puede considerarse como un número difuso en el cual $_0b = {}^0b = b$. Por tanto, podemos decir que $\underset{\sim}{a} \leq b$ mediante la aplicación directa de los índices que acabamos de mostrar y en cuyas expresiones tendremos en cuenta la doble igualdad anterior, en todos los casos, a excepción del 1er índice propuesto por Yager que queda indeterminado al aplicarlo, pero si tenemos en cuenta su significado: "abcisa del centro de gravedad", podemos considerar que al ser un número no difuso, tal valor es él mismo.

CAPITULO II

0. INTRODUCCION

El problema de Programación Lineal Difusa (P.L.D.) fué inicialmente sugerido en 1970 en un magistral trabajo de R. Bellman y L.A. Zadeh: Decision Making in a Fuzzy Environment. Posteriormente, en 1974, H. Tanaka, T. Okuda y K. Asai, por un lado, y H.J. Zimmermann, por otro, propusieron el primer modelo de P.L.D. resoluble con técnicas de la Programación Lineal clásica.

Desde entonces, éste ha sido un tema en el que la metodología de los conjuntos difusos ha sido más profusamenete empleada, existiendo una gran variedad de modelos bien estudiados. El tipo de problemas que, hasta ahora, han recibido más atención son aquellos en los que la difusividad del modelo se establece en la frontera del conjunto del restricciones o en los costos de la función objetivo.

Al estudio de este tipo de problemas se dedica la primera parte de este Capítulo en la que no sólo se describen los diferentes modelos, sino que se ponen de manifiesto las posibles relaciones que existen entre sus soluciones, mostrando unas como soluciones particulares de otras y aportando versiones de algunos enfoques de resolución que se demuestran más generales.

Posteriormente, nos centramos en los problemas en los que intervienen números difusos en los coeficientes que definen al conjunto de restricciones. En este caso, el problema crucial es el de comparar dos cantidades imprecisas. Partiendo del modelo que se propone en Tanaka et al. (1984), suponemos que los números difusos que intervienen en el problema pueden compararse con cualquiera de los índices de comparación existentes al efecto, y aportamos un conjunto de problemas auxiliares, para la resolución del inicial, de los que en cada caso puede obtenerse una solución.

Hay que destacar que, a diferencia del caso clásico en el que está perfectamente establecido cuando $A \leqq B$, como las formas de comparar números difusos son múltiples, esto hace que, según el índice de comparación que se use, se obtenga $\underset{\sim}{A} \leqq \underset{\sim}{B}$ con diferentes grados de cumplimiento lo que, naturalmente, provoca que las soluciones del problema de P.L.D. que consideramos, sean numéricamente distintas en cada caso.

El capítulo se termina con algunos ejemplos en los que se pone de manifiesto todo esto.

1. EL PROBLEMA GENERAL DE PROGRAMACION MATEMATICA DIFUSA

En general un problema de Programación Matemática (P.M.) se establece en los siguientes términos:

$$\begin{array}{lll} \text{Min:} & f(x) & \\ \text{s.a.:} & g_i(x) \leqq b_i, & i = 1, 2,\ldots,p-1 \\ & g_i(x) = b_i, & i = p,\ldots m \\ & x \in X & \end{array} \qquad (2.1)$$

siendo f, $g_1,\ldots,g_m$ funciones definidas en $\mathbb{R}^n$, X un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, x un vector de n componentes, y $b_1,\ldots,b_m$ valores reales.

El planteamineto de tal problema supone, implícitamente, una información precisa por parte del decisor acerca de los elementos que intervienen en el mismo, de forma que, por ejemplo, para cada i = 1, 2,...,p-1 el decisor sabe perfectamente el mayor valor b_i que cada restrición puede llegar a tomar.

Sin embargo, es frecuente en la práctica disponer de informaciones de la forma "no mucho más de b_i", "aproximadamente b_i", etc, que en términos de restricciones de problemas claśicos de P.M. se traducirían en relaciones establecidas mediante los símbolos " ≧", "=", etc, que sólo reflejarían una parte de la información que se ha suministrado para poder plantear el problema en cuestión.

Con la intención de poder plasmar matemáticamente problemas en los que intervienen informaciones como las anteriormente descritas y que, en el contexto de la P.M. llamaremos difusas, surge la P.M. Difusa (P.M.D.) o más concretamente los problemas de P.M.D.

Con base a ésto, entenderemos por problema de P.M.D. cualquier problema de P.M. en el que por lo menos un elemento de los que lo definen provenga de una información difusa o bien sea expresable mediante algún subconjunto difuso.

Un ejemplo de problema de P.M.D. puede ser el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{Min:} \quad z = \underset{\sim}{c}_1 x_1^3 - x_2^2 + x_1 x_3^2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad x_1 + x_2^2 + x_3 \cong 5 \\
&\qquad 5x_1^2 - x_2^2 - x_3 \gtrsim 2 \\
&\qquad x_i \geqq 0
\end{aligned}$$

donde $\underset{\sim}{c}_1$ representa la información "c_1 es un valor próximo a 1" y que podríamos representar por el número difuso (1, 1/2, 1/2).

La primera restricción correspondería a que "$x_1 + x_2^2 + x_3$ valga alrededor de 5" lo que podría representarse mediante la función de pertenencia

$$\mu(x) = \begin{cases} 2(x_1+x_2^2+x_3-4.5) & \text{si } 4.5 \leqq x_1+x_2^2+x_3 \leqq 5 \\ 2(5.5-x_1-x_2^2-x_3) & \text{si } 5 \leqq x_1+x_2^2+x_3 \leqq 5.5 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Finalmente, la segunda restricción expresaría el que "$5x_1^2 - x_2^2 - x_3$ no sea mucho menor que 2" y podríamos representarla por la función de pertenencia

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 5x_1^2-x_2^2-x_3 \geqq 2 \\ 10/3(5x_1^2-x_2^2-x_3-1.7) & \text{si } 1.7 \leqq 5x_1^2-x_2^2-x_3 \leqq 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Cuando en (2.1) tanto la función objetivo como las restricciones son lineales, se habla de problemas de Programación Lineal (P.L.).

De modo análogo a como hemos introducido el problema de P.M.D., si en un problema de P.L. al menos uno de los elementos es difuso, hablamos de un problema de P.L. Difusa (P.L.D.).

2. DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS DE P.L.D.

La primera aproximación al problema de P.L.D. fué hecha por Bellman y Zadeh (1970), en el contexto más general de los problemas de decisión en ambiente difuso.

Se define un objetivo difuso, O, (entendido como meta, no como función objetivo) como un subconjunto difuso en $\mathbb{R}^n$ caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_O : \mathbb{R}^n \to [0,1]$$

Asímismo, se define restricción difusa, R, como un subconjunto difuso en R^n caracterizado por una función de pertenencia

$$\mu_R : \mathbb{R}^n \to [0,1]$$

Con estos elementos y apoyándose en la idea intuitiva de decisión, se define una decisión difusa como el conjunto difuso $D = R \cap O$ caracterizado por la función de pertenencia

$$\mu_D = \mu_O \wedge \mu_R$$

Se determina la alternativa factible maximizante como aquella $x^* \in X$ tal que:

$$\mu_D(x^*) = \max_x \left(\mu_O(x) \wedge \mu_R(x) \right) \qquad (2.2)$$

Con este soporte teórico, Tanaka et al. (1974) y Zimmermann (1974) propusieron separadamente el problema de P.L.D. dando métodos de resolución diferentes. A partir de entonces, las aportaciones teóricas a este tema han sido múltiples (Zimmermann, 1974; Tanaka et al., 1974; Negoita y Ralescu, 1975; Chanas and Kokalanow, 1977; Orlovsky, 1977; Verdegay, 1982; Delgado et al., 1985, 1986).

A continuación vamos a describir suscintamente los distintos problemas de P.L.D. que pueden darse para pasar posteriormente a estudiar sus métodos de resolución.

Un problema clásico de P.L.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } cx \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad Ax \leqq b \\
&\qquad x \geqq 0
\end{aligned}
$$

puede representarse abreviadamente por la cuadrupla $(A, b, c, \leqq)$ con un significado claro.

Atendiendo a la definición que anteriormente dimos de un problema de P.L.D., siempre que al menos uno de estos cuatro elementos sea difuso, estaremos en presencia de un problema tal.

Consideremos en primer lugar el caso en el que sólo el conjunto de restricciones sea un conjunto difuso (Tanaka, 1974; Zimmermann, 1974). Representaremos este problema por $(A, b, c, \lesssim)$. La situación es la siguiente:

Se supone que el decisor, conociendo perfectamente todos los parámetros que intervienen en el problema, considera restricciones que para él se satisfacen con un grado de cumplimiento máximo, cuando no superan el correspondiente valor de b; pero en las que permite violaciones de hasta un valor b + t, valor al que asocia un grado mínimo en el cumplimiento de la restricción, es decir, el decisor está dispuesto a tolerar violaciones en el cumplimiento de las restricciones hasta un umbral máximo que él mismo fija.

Una restricción de este tipo puede ser "el consumo no debe ser mucho maś de un 15%".

Claramente, un conjunto de restricciones así, puede ser definido como un subconjunto difuso de restricciones (sin afectar la difusividad, evidentemente a la naturaleza económica de las variables, es decir, a las condiciones de no negatividad de las mismas) y representado por funciones de pertenencia

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1] \qquad i=1,...,m$$

Desde el punto de vista teórico, a tales funciones habrá que exgirles el que definan un subconjunto difuso de restricciones convexo.

Habitualmente en la literatura se usan indistintamente funciones de pertenencia para restricciones en $\lesssim$ (respectivamente $\gtrsim$) como las de la Figura 1 (Figura 2).

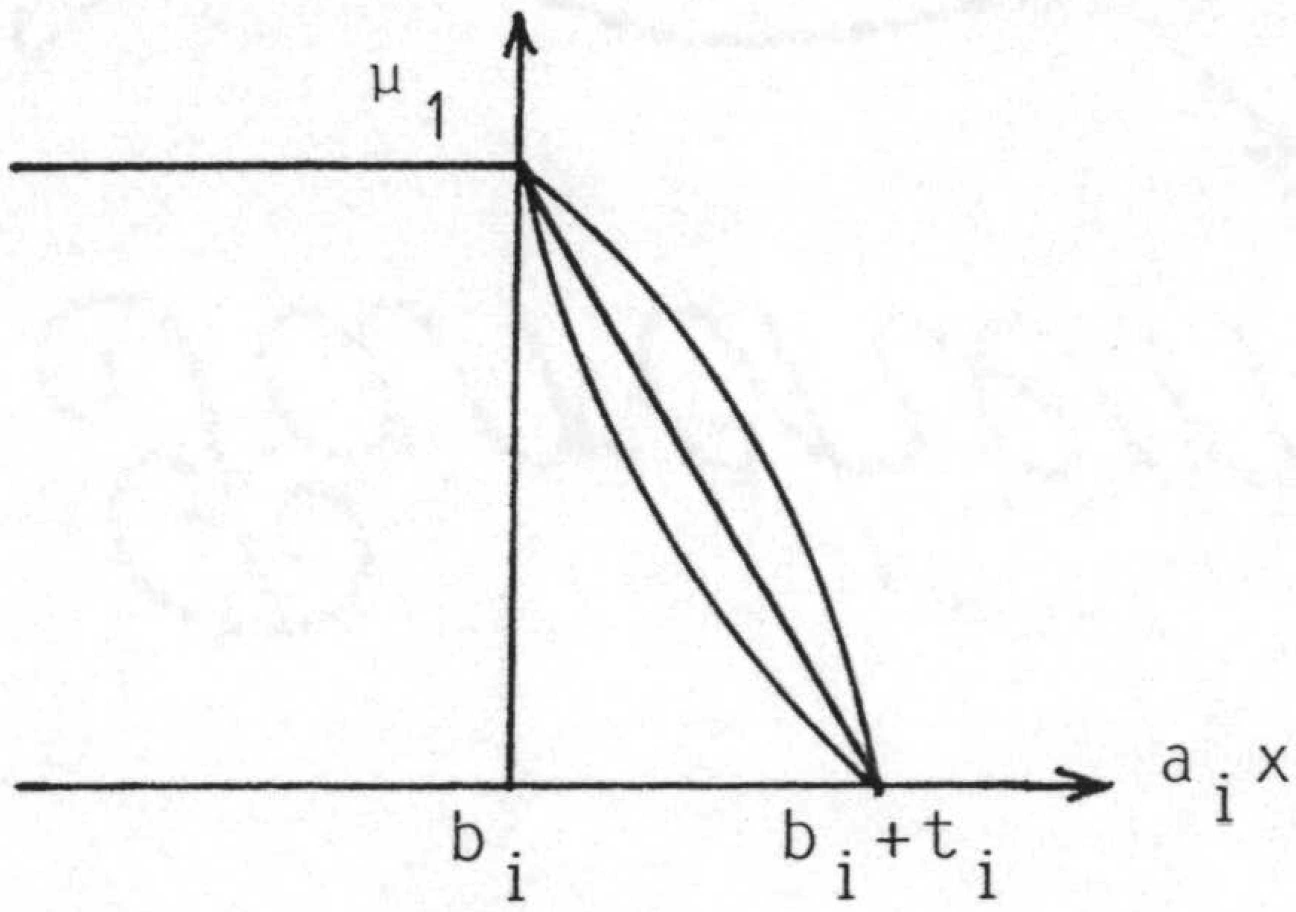


Fig. 1

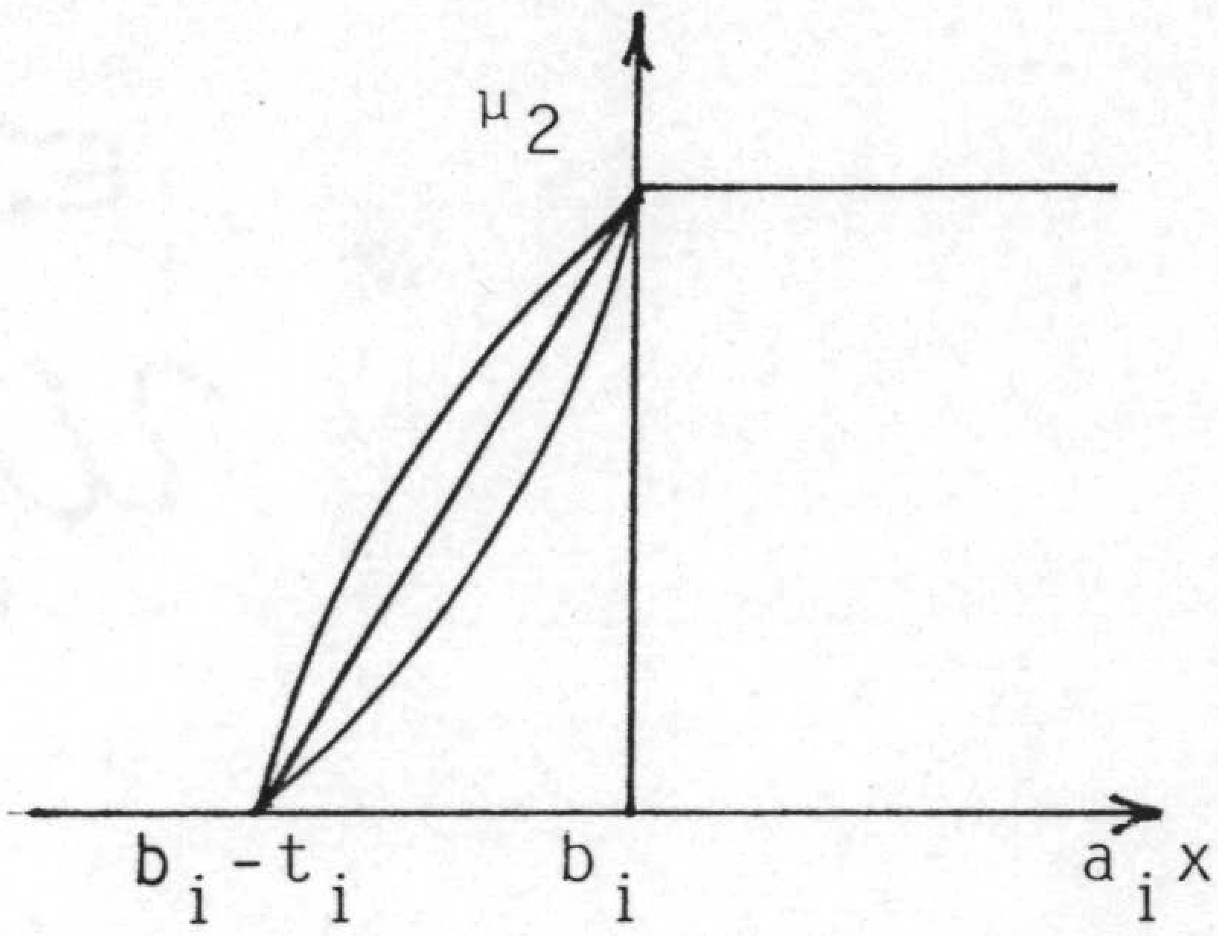


Fig. 2

con las expresiones respectivas generales , $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \leq b_i \\ f_1(a_i x) & \text{si } b_i \leq a_i x \leq b_i+t_i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad (2.3)$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i x \geq b_i \\ f_2(a_i x) & \text{si } b_i-t_i \leq a_i x \leq b_i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \qquad (2.4)$$

Asímismo, para restricciones en igualdad ($\eqsim$) se usan funciones de pertenencia como las de la figura 3, aunque no suelen ser muy habituales al poder sustituirse una ecuación por dos inecuaciones, a las que se les asocia funciones de pertenencia como las anteriores.

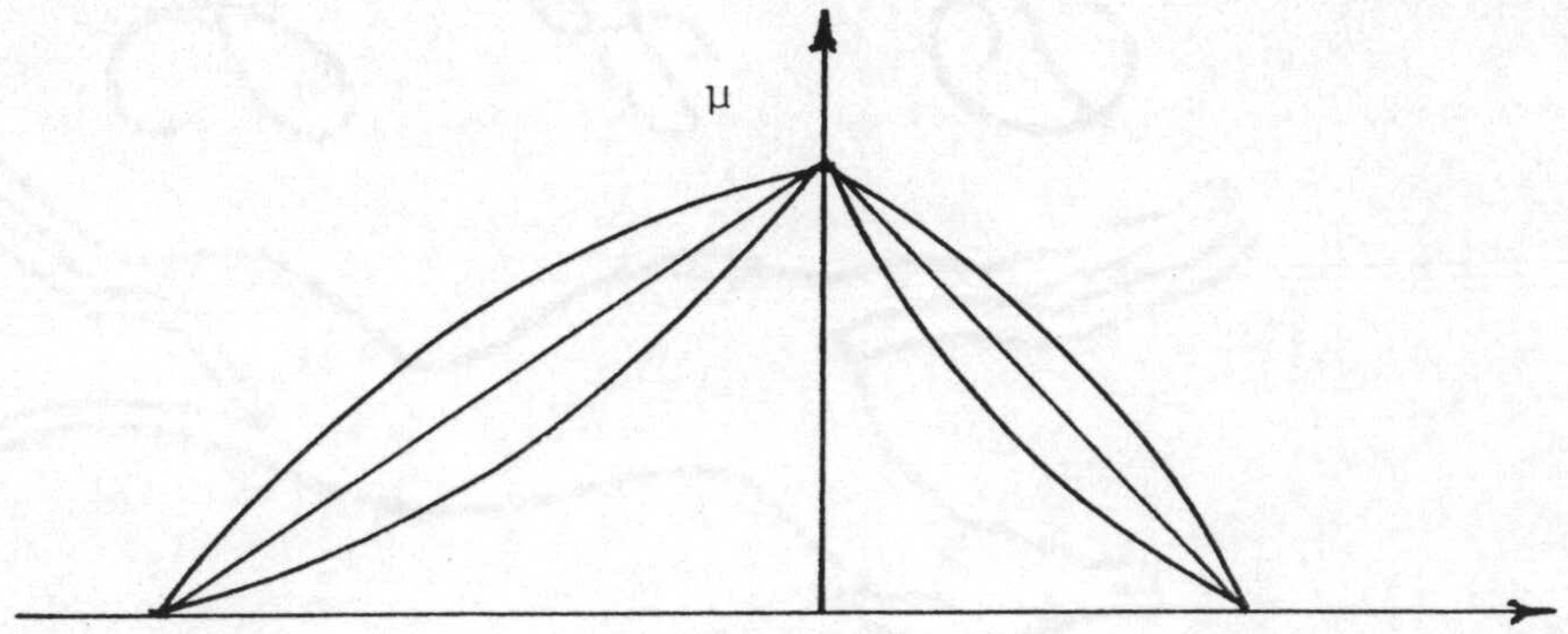


Fig. 3

Tales funciones de pertenencia tienen como expresión general, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\mu(x) = \begin{cases} f_1(a_ix) & \text{si} \quad b_i \leqq a_ix \leqq b_i+t_i \\ f_2(a_ix) & \text{si} \quad b_i-t'_i \leqq a_ix \leqq b_i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \tag{2.5}$$

En definitiva, siempre se suponen funciones de pertenencia no crecientes (no decrecientes) para restricciones en $\lesssim$ ($\gtrsim$), o del tipo L-R para las de igualdad ($\eqsim$).

También notaremos: $b_i + t_i = {}^0b_i$ y $b_i - t'_i = {}_0b_i$.

En el problema que acabamos de describir, suele suponerse también que el objetivo es difuso (Tanaka et al., 1974; Zimmermann, 1974). Esta hipótesis se refleja suponiendo una función de pertenencia

$$\mu_0 : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

que mide el grado de cumplimiento que para el decisor tiene cada valor del objetivo en referencia a una meta que previamente se ha fijado.

En esta situación, considerando funciones de pertenencia como las anteriores, está claro que la evaluación de $\mu_0(cx)$ no supone más que un cambio de escala para los valores del objetivo, por lo que nos podemos seguir refiriendo a cx. Suponer que el objetivo es difuso en estas condiciones, lo único que aporta es un cambio de escala en los valores del mismo. Por tanto, no parece adecuado este marco teórico para tratar problemas con objetivos difusos, salvo cuando ésto se entienda en el sentido de la "goal programming", pero éste es un tema que no trataremos aquí.

Supongamos ahora el caso en que sólo los costos que intervienen en el problema están definidos imprecisamente. En la nomenclatura anterior se trata del problema de P.L.D. definido por $(A, b, \underset{\sim}{c}, \leq)$ (Verdegay, 1982; Delgado et al., 1985). La situación sería la de un decisor que conociendo exactamente las restricciones que han de verificar las variables que toman parte en el problema, tiene una información vaga acerca de los verdaderos costos que intervienen en el objetivo. Esto sucede frecuentemente en la práctica, ya que cuando se pregunta a un decisor el valor de un parámetro c de un problema, es usual obtener respuestas como "c es bastante grande", "c vale alrededor de g", etc; respuestas que obviamente muestran cierta vaguedad acerca del valor de c.

Una forma común de resolver este problema, es dar estimaciones aproximadas del verdadero valor de c (Bitran, 1980), estimaciones que, por supuesto, pueden a su vez conllevar la ya mencionada vaguedad. Parece pues más razonable considerar c como un parámetro difuso de forma que la imprecisión del planteamiento queda incorporada al modelo matemático que se usa para resolverlo.

Esto nos lleva a considerar costos difusos en el objetivo, es decir, costos definidos por números difusos. Según la proposición difusa que sirva para definir cada uno de los costos podremos construir funciones de pertenencia que nos reflejen adecuadamente la misma. Así, por ejemplo, decir que c vale alrededor de c_1^* pero nunca menos de ${}_0c_1$, ni más de ${}^0c_1$, puede representarse mediante una función de pertenencia trapezoidal como se muestra en la Figura 4.

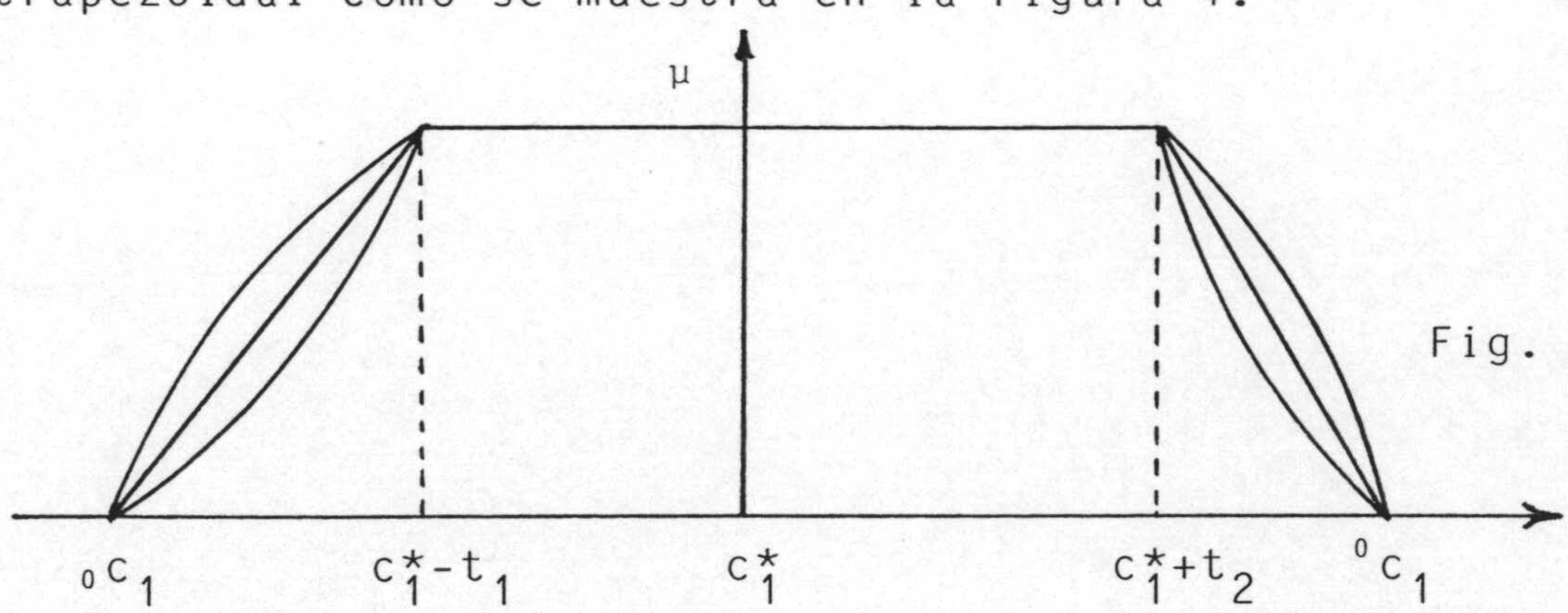


Fig. 4

y cuya expresión matemática será: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mu(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si} \quad c_1^* + t_2 \leq x \leq {}^0c_1 \\ f_2(x) & \text{si} \quad {}_0c_1 \leq x \leq c_1^* - t_1 \\ 1 & \text{si} \quad c_1^* - t_1 \leq x \leq c_1^* + t_2 \end{cases} \tag{2.6}$$

El introducir costos difusos en el objetivo, lleva asociado el hecho de que el decisor puede definir una relación de orden difusa entre las alternativas factibles del problema, lo que supone una versión más intuitiva de una función objetivo difusa.

Evidentemente, cuando el decisor tiene un conjunto de costos difusos y un conjunto difuso de restricciones, tenemos un problema que se describe a partir de los dos anteriores y sobre el que por ahora no abundaremos más.

El mismo razonamiento que ha valido para introducir los problemas con costos difusos sirve para el caso en que los valores del miembro de la derecha en un problema de P.L. vengan definidos vagamente, es decir, puedan describirse como números difusos. Tal problema de P.L.D. lo representaremos por $(A, \tilde{b}, c, \leq)$

(Ohmigeartaigh, 1982).

En esencia, la diferencia que existe entre este problema y el (A, b, c, $\lesssim$) que ya describimos es que en el primero todos los datos del problema son perfectamente conocidos pero se permiten ciertas violaciones en el cumplimiento de las restricciones mientras que en el (A, $\underset{\sim}{b}$, c, $\leqq$), teniendo que cumplirse exactamente las restricciones, no se conoce con exactitud el valor de b. El contexto en el que se planteó por primera vez este modelo fué el de un problema de transporte en el que se disponía de una información difusa acerca de los valores de las disponibilidades y las demandas.

El caso en que todos los coeficientes de la matriz tecnológica son números difusos ha sido estudiado recientemente por Tanaka et al. (1984). En este trabajo no se estudia el caso de números difusos en la matriz A independientemente del resto de los datos sino que, también se suponen números difusos en los vectores b y c. En nuestra nomenclatura se trata de un problema del tipo ($\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\leqq$).

A diferencia del caso anterior en el que el vector de costos es difuso, Tanaka et al. (1984) no buscan en este problema determinar una relación de orden difusa para las alternativas factibles, sino una solución para el problema basada en la comparación de números difusos.

Como es usual, también en este modelo las funciones de pertenencia que se usan son de los tipos descritos anteriormente tanto para los elementos de $\underset{\sim}{A}$ como de $\underset{\sim}{b}$ y de $\underset{\sim}{c}$. Dentro de este tipo de problemas, Negoita (1976), propuso un método en el que los coeficientes de A se consideran conjuntos difusos; b también se considera como un conjunto difuso, y se estudia el problema de optimización resultante desde el punto de vista de la inclusión de conjuntos difusos.

Se trata en definitiva del siguiente problema

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.: } \underset{\sim}{A}_1 x_1 + \underset{\sim}{A}_2 x_2 + \dots + \underset{\sim}{A}_n x_n \subset \underset{\sim}{B} \\ &\qquad\qquad\qquad x_1, x_2, \dots, x_n \geqq 0 \end{aligned}$$

El estudio posterior de la aritmética difusa (Dubois y Prade, 1978) ha traido consigo el que este tipo de problemas no haya recibido mucha atención. Nosotros tampoco volveremos sobre él, refiriéndonos al modelo ($\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{b}$, $\underset{\sim}{c}$, $\leqq$) de Tanaka et al. (1984) siempre que consideremos coeficientes difusos en la matriz tecnológica.

Hemos realizado hasta aquí una descripción pormenorizada de los diferentes problemas de P.L.D. conocidos en la literatura, sin entrar en modelos particulares de los mismos (problemas de asignación, de flujo de redes, etc) que escapan del ámbito de esta memoria.

La dispersión temporal en la aparición de estos modelos ha supuesto el que se propongan diferentes métodos de resolución para los mismos. En lo que sigue, describimos los distintos enfoques de resolución y proponemos un problema más general que engloba los modelos anteriores.

3. METODOS DE RESOLUCION PARA PROBLEMAS DE P.L.D.

3.1. Consideremos en primer lugar un problema de P.L.D. $(A, b, c, \lesssim)$, es decir, con un conjunto difuso de restricciones

$$\begin{aligned} \text{Max: } & cx \\ \text{s.a.: } & Ax \lesssim b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

siendo $c \in \mathbb{R}^n$, A una matriz mxn, $b \in \mathbb{R}^m$ y estando definida una función de pertenencia

$$\mu_i : R^n \to [0,1] \qquad i = 1,\ldots,m$$

por (2.3), para cada una de las restricciones que se consideran.

Supondremos además que tales funciones de pertenencia son lineales al igual que en Zimmermann (1974) y Tanaka et al. (1974).

Si notamos

$$X_{\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n \; / \; \bigwedge_i \mu_i(x) \geqq \alpha\} \qquad \alpha \in [0,1] \tag{2.8}$$

el método que se propone en Tanaka et al. (1974) para resolver (2.7) se basa en la determinación del par optimal (α^*, x^*) tal que:

$$\alpha^* \wedge f(x^*) = \operatorname*{Sup}_{\alpha} \left(\alpha \wedge \max_{X_\alpha} f(x)\right)$$

donde:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1] \tag{2.9}$$

es una función de evaluación del objetivo en el sentido ya comentado cuya introducción en el problema es necesaria para que (2.9) tenga sentido dentro de la idea que inspira a estos autores, que es la integración difusa (Sugeno, 1972).

Bajo estas hipótesis débiles (de continuidad para f y de unicidad para la solución α^*) se demuestra que el par optimal (α^*, x^*) que resuelve (2.7) se obtiene de la aplicación del siguiente algoritmo.

1) Tomar $k = 1$ y seleccionar un valor $\alpha_k \in |0,1|$.

2) Calcular $f_k = \underset{X_{\alpha_k}}{\text{Max}}\, f(x)$

3) Determinar $\varepsilon_k = \alpha_k - f_k$

Si $|\varepsilon_k| > \varepsilon$ (valor fijado de antemano) pasar a 4)

Si $|\varepsilon_k| < \varepsilon$ pasar a 5)

4) Tomar $\alpha_{k+1} = \alpha_k - r_k \varepsilon_k$ y volver a 2) reemplazando k por $k+1$, estando r_k seleccionado por el decisor de modo que $r_k \geqq 0$ y $0 \leqq \alpha_k \leqq 1$.

5) Fijar $\alpha^* = \alpha_k$ y evaluar el x^* optimal tal que:

$$f(x^*) = \underset{X_{\alpha^*}}{\text{Max}}\, f(x)$$

Nótese como el valor del α^* óptimo depende directamente del $\varepsilon > 0$ elegido y cómo una mala elección de α_1 puede alargar demasiado los cálculos.

Por otro lado, en Zimmermann (1974) se propone otro método de resolución para (2.7) directamente inspirado en el concepto de decisión maximizante (2.2).

Planteado el problema (2.7), el decisor puede quedar satisfecho con un x_1 con el que consiga z_0, que aún no siendo el óptimo del problema, satisfaga mejor las restricciones, dado que ellas están establecidas en términos como "Ax debe ser aproximadamente menor o igual que b". Podemos pues considerarlo como el siguiente problema de P.L.D.

$$\begin{array}{lll} \text{Min:} & cx \lesssim z_0 & \text{(a)} \\ \text{s.a.:} & & \\ & Ax \lesssim b & \text{(b)} \\ & x \geqq 0 & \end{array}$$

donde (a) representa el objetivo difuso y (b) el conjunto de restricciones difusas.

Zimmermann utiliza funciones de pertenencia tanto para (a) como para (b) de la forma (2.3) donde f es lineal,

$$f_i(a_i x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a_i x \leqq b_i \\ 1 - \dfrac{a_i x - b_i}{t_i} & \text{si} \quad b_i \leqq a_i x \leqq b_i + t_i \\ 0 & \text{si} \quad a_i x \geqq b_i + t_i \end{cases}$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, m$

donde notamos abreviadamente

$$a_i x = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

y donde el índice $i = 0$ corresponde a la función de pertenencia de la función objetivo $a_0 x = cx$.

Así, la decisión maximizante se obtiene calculando

$$\underset{x \geqq 0}{\text{Max}} \ \underset{i}{\text{Min}} \ f_i(a_i x) \qquad (2.10)$$

lo cual es equivalente a resolver el siguiente problema de P.L.

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad \lambda \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad \lambda \leqq (b_i - a_i x)/t_i \qquad i = 0, 1, \ldots, m \\ &\qquad x \geqq 0 \end{aligned} \qquad (2.11)$$

cuya solución óptima (λ^*, x^*) se considera como la solución optimal de (2.7) siendo x^* la decisión maximizante y λ^* el grado de cumplimiento optimal de la misma.

Las características comunes a ambos métodos son:

I.- Ambos exigen la definición de una función de evaluación para el objetivo, lo que implícitamente supone resolver previamente un problema de P.L. clásico para encontrar una cota para la función objetivo y poder así normalizarla.

II.- Ambos métodos están, prácticamente, restringidos al uso de funciones de pertenencia lineales ya que en caso contrario las correspondientes versiones de los problemas (2.9) y (2.10) suponen modelos de programación no lineal.

III.- Finalmente, ambos métodos proporcionan una solución no difusa, en forma de par optimal, a un problema de planteamiento difuso.

Estas tres características comunes, que pueden analizarse como inconvenientes, fueron discutidas en Verdegay (1981), proponiendo para resolver (2.7) el siguiente problema de P.L. paramétrica,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad Ax \leqq b + t(1-\alpha) \\ &\qquad x \geqq 0 \qquad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si notamos $x^*(\alpha)$ la solución de (2.12), $\alpha \in (0,1]$, la solución de (2.7) es el subconjunto difuso de $\mathbb{R}^n$ con función de pertenencia

$$\mu(x) = \begin{cases} \sup\limits_{\alpha} \alpha & \text{si } x = x^*(\alpha) \\ 0 & \text{si } \nexists\, \alpha \in (0,1] / x = x^*(\alpha) \end{cases}$$

En Verdegay (1981 y 1982) se demuestra que si se supone una función de evaluación f para el objetivo, como en (2.9) y en (2.10), las correspondientes soluciones puntuales que se obtendrán con el algoritmo de la página 62 y el modelo (2.11), vienen determinadas a partir de la solución paramétrica $x(\alpha)$ de (2.12) particularizando dicha solución en aquel valor $\alpha^* \in (0,1]$ que resuelva la ecuación del punto fijo

$$f\,(cx(\alpha)) = \alpha \tag{2.13}$$

donde se supone f continua y valorada en $[0,1]$.

3.2. Consideremos ahora el caso de un problema del tipo $(A,\ b,\ \tilde{c},\ \leq)$, es decir con costos definidos por números difusos. Para resolverlo se han propuesto dos enfoques que mostramos a continuación.

En Tanaka et al. (1984) se propone un método de resolución para un problema más general, pero que podemos particularizar al caso que estudiamos suponiendo A y b con elementos bien conocidos.

Sea el problema de P.L.D.

$$\begin{aligned} &\widetilde{\text{Max}}:\quad y = cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad Ax \leq b \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

en el que el símbolo "$\sim$" indica que todos los costos que intervienen en el objetivo son números difusos con funciones de pertenencia,

$$\mu_j : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], \quad j = 1,\ldots,n \tag{2.15}$$

el enfoque que se muestra en Tanaka et al. (1984) se basa en la siguiente

Definición 3.1.- Se define la maximización de un conjunto difuso, y, como sigue:

$$\text{Max } y \leftrightarrow \text{Max } w_1{}^0y + w_{2\,0}y$$

donde $w_1 + w_2 = 1$, $w_1, w_2 \in [0,1]$ e ${}^0y$ e ${}_0y$ están definidos a partir de las operaciones usuales entre los números difusos $\tilde{c}_j$, $j = 1, 2,\ldots, n$.

Por tanto, si los $\tilde{c}_j$ son números difusos triangulares, es decir, de la forma $(c_j, {}_0c_j, {}^0c_j)$ habitual, (2.14) se reduce al problema de P.L. convencional:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } (w_1{}^0c + w_{2\,0}c)x \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad A\,x \leqq b \\ &\qquad\ \ x \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

con ${}^0c = ({}^0c_1, {}^0c_2, \ldots, {}^0c_n)$ y ${}_0c = ({}_0c_1, {}_0c_2, \ldots, {}_0c_n)$. Nótese que en cualquier caso los pesos w_1 y w_2 ha de fijarlos con antelación al decisor, sin darle para ello ninguna indicación.

Por otro lado, en Delgado et al. (1985) se propone un enfoque diferente. La idea de partida es que, igual que en el caso de un problema de P.L., la función objetivo induce una relación de preorden entre las alternativas factibles, en el caso de problemas de P.L.D. el objetivo (difuso) también debería inducir un preorden difuso.

Desde este punto de vista se define objetivo difuso como un conjunto difuso del conjunto de los objetivos. Se llega a probar que, si suponemos costos difusos, el objetivo así constituido cumple los anteriores requisitos. Con esto, el enfoque que se propone, se basa en los α-cortes de los costos difusos que intervienen en el problema. Tales α-cortes proporcionan, para cada $\alpha \in (0,1]$ y cada costo, un intervalo cerrado de valores. Así, se llega a un problema auxiliar de P.L con costos intervalares.

Más concretamente, si las funciones de pertenencia de los costos (2.15) son trapezoidales no lineales, es decir, en (2.6) f_1 y f_2 son no lineales, el α-corte de un costo cualquiera $\tilde{c}_j$, j = 1,...,n viene definido por el intervalo

$$[\phi_j(\alpha), \psi_j(\alpha)] \subset \mathbb{R} \qquad \alpha \in (0,1]$$

siendo $\phi_j(\cdot)$ y $\psi_j(\cdot)$, j = 1,...,n las respectivas funciones inversas de f_1 y f_2 para cada costo.

Se demuestra que la solución difusa para (2.16) puede encontrarse a partir de la solución paramétrica del siguiente problema paramétrico lineal multiobjetivo,

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & [c^1x, c^2x, \ldots, c^{2^n}x] \\ \text{s.a.:} \quad & \\ & Ax \leqq b \\ & x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1] \\ & c^k \in E(1-\alpha), \; k = 1,\ldots,2^n \end{aligned} \qquad (2.17)$$

donde para cada $\alpha \in (0,1]$, $E(1-\alpha)$ está definido de la siguiente forma,

$$\forall c \in \mathbb{R}^n \; : \; c=(c_j), \quad c \in E(1-\alpha) \quad \leftrightarrow$$

$$c_j = \phi_j(1-\alpha) \quad ó \quad \psi_j(1-\alpha), \quad j=1,2,\ldots,n$$

A continuación demostramos cómo el modelo (2.16) es un caso particular del (2.17) que acabamos de describir.

En efecto, consideremos como en Tanaka et al. (1984) funciones de pertenencia triangulares lineales: caso particular de la (2.6) en donde $t_1 = t_2 = 0$ y f_1 y f_2 son lineales. Notemos como antes $\phi_j(\cdot)$ y $\psi_j(\cdot)$ las respectivas inversas de las funciones f_1 y f_2 de cada costo.

Al ser (2.17) un problema multiobjetivo, se pueden usar diferentes métodos para su resolución. Uno de ellos es el de ponderación de los objetivos. Si a cada objetivo c^k le asociamos un peso w_k, $k = 1,...,2^n$ tal que

$$\forall k, \; w^k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{2^n} w_k = 1$$

(2.17) se reduce al problema convencional de P.L. paramétrica

$$\begin{aligned} \text{Max:} \quad & \sum_{k=1}^{2^n} w_k(c^k x) \\ \text{s.a.:} \quad & \\ & Ax \leq b \qquad\qquad (2.18) \\ & x \geq 0, \quad \alpha \in (0,1] \\ & c^k \in E(1-\alpha), \; k = 1,...,2^n \end{aligned}$$

de entre los 2^n objetivos que intervienenen (2.17) y (2.18), fijémonos en aquellos dos cuyos coeficientes $\phi_j(\cdot)$ y $\psi_j(\cdot)$, $j = 1,...,n$, son todos, respectivamente, iguales a $\phi_j(0)$ y $\psi_j(0)$, y supongamos que sean c^1 y c^2, es decir,

$$c^1 = [\psi_1(0), \psi_2(0),...,\psi_n(0)] = ({}^0c_1, {}^0c_2,...,{}^0c_n)$$

$$c^2 = [\phi_1(0), \phi_2(0),...,\phi_n(0)] = ({}_0c_1, {}_0c_2,...,{}_0c_n)$$

Evidentemente, c^1 y c^2 coinciden coordenada a coordenada, con los vectores ${}^{0}c$ y ${}_{0}c$ empleados en (2.16) y definidos en Tanaka et al. (1984).

Tomando ahora como vector de pesos $w = (w_1, w_2, 0, \ldots, 0)$, $w_1 + w_2 = 1$, el problema (2.18) y, consecuentemente (2.17), se reduce al modelo (2.16) como queríamos probar.

Casos más particulares de estos modelos han sido estudiados en Chanas and Kokalanow (1977) y en Delgado et al. (1986) referidos a problemas de P.L.D. con estructuras especiales (transporte, asignación, etc).

3.3. Los problemas en los que tanto los coeficientes de la matriz tecnológica como los miembros de la derecha son números difusos han sido abordados en Tanaka et al. (1984) y desarrollados básicamente para el caso de números difusos triangulares.

El problema que se considera es

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } \; y = cx \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \tilde{A}x \overset{h}{\leqq} \tilde{b} \\
&\qquad x \geqq 0
\end{aligned}
$$

donde $\tilde{A}$ es una matriz de números difusos (triangulares simétricos), $\tilde{b}$ es un vector de números difusos del mismo tipo que los anteriores, $h \in [0,1]$ es un nivel prefijado por el decisor (que puede interpretarse como su grado de optimismo), y la relación $\leqq$ entre números difusos está definida de la siguiente forma:

$\forall P, Q \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$$P \overset{h}{\underset{\sim}{\geq}} Q \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} ({}^{0}P)_k > ({}^{0}Q)_k & \forall k \in [h,1] \\ ({}_{0}P)_k > ({}_{0}Q)_k & \end{cases} \tag{2.20}$$

donde $({}_0P)_k$ y $({}_0Q)_k$ (respectivamente $({}^0P)_k$ y $({}^0Q)_k$) son los extremos inferiores (superiores) de los intervalos que definen en $\mathbb{R}$ los correspondientes k-cortes de los números difusos P y Q.

Consideremos el primer miembro de una restricción cualquiera $\tilde{a}_i x$. Si todos los coeficientes a_{ij}, $j = 1,...,n$ son números difusos triangulares simétricos $(a_{ij} = ({}_0a_{ij} + {}^0a_{ij})/2)$, según el Principio de Extensión, la función de pertenencia de $\tilde{a}_i x$ es:

$$\mu(a_i x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|2(a_i x) - ({}^0a_i + {}_0a_i)x|}{({}^0a_i - {}_0a_i)\ |x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0,\ a_i x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 0,\ a_i x \neq 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

donde ${}^0a_i = ({}^0a_{i1}, {}^0a_{i2}, ..., {}^0a_{in})$ y ${}_0a_i = ({}_0a_{i1}, {}_0a_{i2}, ..., {}_0a_{in})$. Así, un k-corte de este difuso está dado por el intervalo

$[\{\frac{k}{2}{}^0a_i + (1-\frac{k}{2})\,{}_0a_i\}x, \{(1-\frac{k}{2})\,{}^0a_i + \frac{k}{2}\,{}_0a_i\}x] \quad \forall x > 0$

y para el correspondiente b_i (supuesto también triangular simétrico) por:

$$[\frac{k}{2}\,{}^0b_i + (1-\frac{k}{2})\,{}_0b_i,\ (1-\frac{k}{2})\,{}^0b_i + \frac{k}{2}\,{}_0b_i]$$

De acuerdo con (2.20), (2.19) puede formularse como el siguiente problema de P.L.

Max: $y = cx$

s.a.:

$$[\frac{k}{2}{}^0a_i+(1-\frac{k}{2}){}_0a_i]x \leqq \frac{k}{2}{}^0b_i+(1-\frac{k}{2}){}_0b_i \qquad (2.22)$$

$$[(1-\frac{k}{2}){}^0a_i+\frac{k}{2}{}_0a_i]x \leqq (1-\frac{k}{2}){}^0b_i+\frac{k}{2}{}_0b_i, \quad i = 1,\dots,m$$

$$x \geqq 0$$

cuya solución optimal $x^{*(k)}$ se propone como solución difusa de (2.19).

Evidentemente si las funciones de pertenencia, siendo triangulares, no son simétricas, el problema (2.22) se escribe como:

Max: $y = cx$

s.a.:

$${}_0a_ix + k(a_ix - {}_0a_ix) \leqq {}_0b_i + k(b_i - {}_0b_i) \qquad (2.22\ \text{bis})$$

$${}^0a_ix + k(a_ix - {}^0a_ix) \leqq {}^0b_i + k(b_i - {}^0b_i)$$

$$x \geqq 0$$

$$i = 1,\dots,n \qquad k \text{ fijo } k \in [0,1]$$

Sobre la resolución de los problemas del tipo (2.19), podemos hacer las siguientes consideraciones:

1) Cuando no todos los valores que intervienen en el problema son difusos, es decir, cuando también hay valores reales entre los datos del problema, todos los razonamientos anteriores siguen siendo válidos.

2) No es necesario limitarse al uso de números difusos triangulares simétricos. Si suponemos en general, que los a_{ij} son números difusos del tipo L-R, mediante el Principio de Extensión siempre puede obtenerse una expresión similar a (2.21) para cada restricción y, consecuentemente, obtener un modelo (problema auxiliar) para resolver (2.19) formalmente idéntico al (2.22)

$$\begin{aligned} &\text{Max:} \quad y = cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad f_i^{-1}(k)x \leq g_i^{-1}(k) \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde ahora f_i^{-1} y g_i^{-1} son las correspondientes funciones inversas de las funciones de pertenencia que hubiéramos obtenido como (2.21).

No se pierde además la linealidad del problema ya que el efecto no lineal de los números L-R se acumula en las expresiones de $f_i^{-1}(\cdot)$ y $g_i^{-1}(\cdot)$, pero no en la expresión de las restricciones.

3) No hay por qué exigir al decisor que exprese de antemano el nivel de cumplimiento $k \in [0,1]$ al que quiere obtener una solución optimal. En efecto, (2.23) puede resolverse como un problema paramétrico en $\alpha \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \text{Max:}\quad & y = cx \\ \text{s.a.:}\quad & \\ & f_i^{-1}(\alpha) \leqq g_i^{-1}(\alpha) \\ & x \geqq 0, \qquad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.24}$$

y de su solución optimal: a) determinar un conjunto difuso de soluciones $\{x(\alpha),\alpha\}$, es decir, una solución difusa, y b)de acuerdo con esa solución difusa fijar un grado de cumplimiento $k \in [0,1]$ y calcular la correspondiente solución optimal. Evidentemente, esta solución optimal coincidirá con la encontrada para (2.22) si en (2.24) tomamos números difuso triangulares simétricos.

Aclaremos ésto con el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Max:}\quad & y = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:}\quad & \\ & a_{11}x_1 - 2x_2 \leqq b_1 \\ & x_1 + x_2 \leqq 5 \\ & x_i \geqq 0 \end{aligned}$$

donde a_{11} y b_1 son números difusos de función de pertenencia

$$\mu(a_{11}) = \begin{cases} -a_{11}^2 + 6a_{11} - 8 & \text{para } 2 \leqq a_{11} \leqq 3 \\ 1/4(-a_{11}^2 + 6a_{11} - 5) & \text{para } 3 \leqq a_{11} \leqq 5 \end{cases}$$

$$\mu(b_1) = \begin{cases} -b_1^2/4 + 3b_1 - 8 & \text{para } 4 \leqq b_1 \leqq 6 \\ -b_1^2 + 12b_1 - 35 & \text{para } 6 \leqq b_1 \leqq 7 \end{cases}$$

La expresión de los intervalos, para cada α-corte, en la primera restricción es,

$$(a_{11}x)_\alpha = [(3-\sqrt{1-\alpha})x_1-2x_2, (3+2\sqrt{1-\alpha})x_1-2x_2], \quad \alpha \in [0,1]$$

$$(b_1)_\alpha = [6-2\sqrt{1-\alpha}, 6+\sqrt{1-\alpha}], \quad \alpha \in [0,1]$$

y por tanto (2.24) toma la forma,

$$\begin{aligned} \text{Max: } \quad & y = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.a.: } \quad & (3-\sqrt{1-\alpha})x_1-2x_2 \leqq 6-2\sqrt{1-\alpha} \\ & (3+2\sqrt{1-\alpha})x_1-2x_2 \leqq 6+\sqrt{1-\alpha} \\ & x_1+x_2 \leqq 5 \\ & x_i \geqq 0, \quad \alpha \in [0,1] \end{aligned} \tag{2.25}$$

Cuya solución es el conjunto difuso

$$S = \sum_\alpha \alpha \left(\frac{16+\sqrt{1-\alpha}}{5+2\sqrt{1-\alpha}}, \frac{9+9\sqrt{1-\alpha}}{5+2\sqrt{1-\alpha}} \right)$$

estando el valor del objetivo dado por el conjunto difuso

$$G = \sum_\alpha \alpha \left(\frac{57+12\sqrt{1-\alpha}}{5+2\sqrt{1-\alpha}} \right)$$

Hay que destacar que los problemas de P.L. de la forma (2.24) o más particularmente aquéllos que suponen un parańetro en los coeficientes de la matriz tecnológica, no han sido muy estudiados en la literatura especializada debido a que tal dependencia de un parámetro puede llevar a que se pierda la convexidad del conjunto de restricciones. En nuestro caso, tal posibilidad no existe si suponemos, como hemos dicho, números difusos de la forma L-R porque entonces, la expresión de cualquier restricción es también del tipo L-R y cualquier α-corte es, evidentemente, un intervalo en $\mathbb{R}$, es decir, siempre tenemos un conjunto convexo de restricciones.

4) Como resulta obvio, el caso en que en la función objetivo haya números difusos en los costos y, también el conjunto de restricciones sea difuso, se puede resolver por combinación de los dos métodos aquí descritos.

5) La resolución de los problemas de la forma (2.19), no está restringida por la relación entre números difusos (2.20). De hecho se puede pensar que si dicha relación la sustituimos por cualquier otra, se puede obtener cualquier otro modelo de P.L. que sirva como problema auxiliar para resolver (2.19). A ésto es a lo que nos dedicamos a continuación.

4. MODELOS AUXILIARES PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE P.L.D. CON NUMEROS DIFUSOS EN LA MATRIZ TECNOLOGICA

Con todo lo dicho anteriormente, el problema que consideramos, como el (2.19), es:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.: } \tilde{a}_i x \lesssim \tilde{b}_i, \qquad i = 1,\dots,m \\ &\qquad\; x \geq 0 \end{aligned} \qquad (2.26)$$

donde $\tilde{a}_i$ es un vector de números difusos, $\tilde{b}_i$ un número difuso, $i = 1,\dots,m$, y $\lesssim$ es una relación entre números difusos por especificar.

Como se estudió en el Capítulo I, las comparaciones entre números difusos pueden ser las que se relacionan en el punto 3 (aunque existen otras que consideramos de poco interés o poco operativas).

En todo lo que sigue supondremos que las funciones de pertenencia que definen cada número difuso que intervienen en (2.26) son triangulares, como las (1.27), sin que ésto suponga pérdida alguna de generalidad, sino que las elegimos por comodidad en los cálculos.

Por otra parte, será fundamental el siguiente resultado, que generaliza la expresión (2.21), consecuencia del Principio de Extensión.

Teorema: Si $y = a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = ax$ es una ecuación lineal en la que los a_i, $i = 1,\ldots,n$ son números difusos de funciones pertenencia triangulares, entonces, la función de pertenencia de y es

$$\mu_y(v) = \begin{cases} \dfrac{v - {}_0ax}{ax - {}_0ax} & \text{cuando } {}_0ax \leq v \leq ax \\ \dfrac{{}^0ax - v}{{}^0ax - ax} & \text{cuando } ax \leq v \leq {}^0ax \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

cuya demostración es trivial.

Siguiendo el mismo orden de exposición dado en el primer capítulo para los índices de comparación entre los números difusos, consideramos en primer lugar el,

a) Indice de Chang:

Como ya vimos, si $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathfrak{F}(\mathbb{R})$ son dos números difusos y

$$F(\underset{\sim}{A}) = ({}^0A - {}_0A)({}^0A + {}_0A + A)/6$$

entonces decimos que

$$\underset{\sim}{A} \leq \underset{\sim}{B} \qquad \text{si} \qquad F(\underset{\sim}{A}) \leq F(\underset{\sim}{B})$$

en estas condiciones y según el Teorema anterior, usando este índice, cada una de las restricciones de (2.26) puede sustituirse respectivamente por,

$$({}^0a_ix-{}_0a_ix)({}^0a_ix+{}_0a_ix+a_ix) \leq ({}^0b_i-{}_0b_i)({}^0b_i+{}_0b_i+b_i)$$

quedando en consecuencia, como problema clásico auxiliar para resolver (2.26) el, Max: cx

s.a.:

$$({}^{0}a_i x - {}_{0}a_i x)({}^{0}a_i x + {}_{0}a_i x + a_i x) \leqq ({}^{0}b_i - {}_{0}b_i)({}^{0}b_i + {}_{0}b_i + b_i)$$

$$x \geqq 0, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (2.27)$$

problema que, como es evidente, tiene el inconveniente de ser no lineal.

b) Primer Indice de Yager:

Como vimos en el Capítulo I, si $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ decimos que

$$\underset{\sim}{A} \leqq \underset{\sim}{B} \qquad \text{si} \quad F_1(\underset{\sim}{A}) \leqq F_1(\underset{\sim}{B})$$

siendo

$$F_1(\underset{\sim}{A}) = \frac{\int_{{}_{0}A}^{{}^{0}A} g(x)\, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dx}{\int_{{}_{0}A}^{{}^{0}A} \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\, dx}$$

y g(x) una función que mide la importancia que para el decisor tiene el valor x. Si consideramos que $g(x) = x$ $\forall x$, entoncoes las restricciones del problema (2.26) pueden escribirse de acuerdo con este índice como:

$${}^{0}a_i x + {}_{0}a_i x + a_i x \leqq {}^{0}b_i + {}_{0}b_i + b_i, \qquad i = 1,\ldots,m$$

y consecuentemente, el problema auxiliar que resuelve (2.26) en este caso tiene la expresión

Max: cx

s.a.:

$${}^{0}a_i x + {}_{0}a_i x + a_i x \leqq {}^{0}b_i + {}_{0}b_i + b_i, \quad i = 1,\ldots,m \qquad (2.28)$$

$$x \geqq 0$$

que evidentemente es la de un problema lineal que, además, tiene el mismo número de restricciones que el (2.26).

En el caso particular de que las funciones de pertenencia que intervienen en el problema sean simétricas, (2.28) se expresaría como:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\quad {}^0a_ix + {}_0a_ix \leq {}^0b_i + {}_0b_i, \quad i = 1,\ldots,m \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como para este tipo particular de funciones de pertenecia es trivial que la moda es

$$a_ix = ({}^0a_ix + {}_0a_ix)/2$$

(2.29) toma la sencilla expresión:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\quad a_ix \leq b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

que expresa que, en este caso, toda la ambiguedad recogida en (2.26) se representa por los puntos medios de los respectivos soportes, lo que es intuitivamente razonable al haber escogido $g(x) = x$ representando este índice la abcisa del centro de gravedad del correspondiente número difuso.

Nótese que este problema reproduce el propuesto en Tanaka et al. (1984), (2.22) para el caso de funciones de pertenencia triangulares simétricas y $k = 1$.

Como veremos, (2.30) es un problema auxiliar que se repetirá para sucesivos índices y cuando se consideren funciones de pertenencia triangulares simétricas.

c) Segundo Indice de Yager:

Según se vió en el primer Capítulo, si $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ con soportes incluidos en $[0,1]$,

$$\underset{\sim}{A} \leqq \underset{\sim}{B} \qquad \text{si} \quad F_2(\underset{\sim}{A}) \leqq F_2(\underset{\sim}{B})$$

donde

$$F_2(\underset{\sim}{A}) = {}^0A/({}^0A - A + 1)$$

para funciones de pertenencia triangulares como las que tratamos. Con ésto, las restricciones de (2.26) se escriben, respectivamente, como,

$${}^0a_i x/({}^0a_i x - a_i x + 1) \leqq {}^0b_i/({}^0b_i - b_i + 1), \quad i = 1,...,m$$

y consecuentemente, en este caso, el modelo auxiliar que sirve para resolver (2.26) es,

Max: cx

s.a.:

$$\begin{aligned} {}^0a_i x/({}^0a_i x - a_i x + 1) &\leqq {}^0b_i/({}^0b_i - b_i + 1), \quad i = 1,...,m \\ x &\geqq 0 \end{aligned} \qquad (2.31)$$

y como $^0a_i x - a_i x + 1 > 0$ y $^0b_i - b_i + 1 > 0$, podemos reescribirlo como:

Max: cx

s.a.:

$$^0a_i x(1-b_i) + {}^0b_i a_i x \leqq {}^0b_i, \qquad i = 1,\dots,m \qquad (2.32)$$

$$x \geqq 0$$

problema que, como antes, es lineal y de las mismas dimensiones que (2.26), y del que se puede obtener trivialmente una expresión (que no simplifica la anterior) para el caso de funciones de pertenencia triangulares simétricas.

d) Tercer Indice de Yager:

Como vimos en el Capítulo I, para el caso de funciones de pertenencia triangulares, si $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ decimos que:

$$\underset{\sim}{A} \leqq \underset{\sim}{B} \qquad \text{si} \quad F_3(\underset{\sim}{A}) \leqq F_3(\underset{\sim}{B})$$

siendo

$$F_3(\underset{\sim}{A}) = 1/4({}^0A + {}_0A + 2A)$$

en estas condiciones, y llevando este índice de comparación a cada una de las restricciones de (2.26), dichas restricciones se expresan como:

$$^0a_i x + {}_0a_i x + 2a_i x \leqq {}^0b_i + {}_0b_i + 2b_i, \qquad i = 1,\dots,m$$

lo que conduce al problema auxiliar

Max: cx

s.a.:

$$ {}^0a_ix + {}_0a_ix + 2a_ix \leqq {}^0b_i + {}_0b_i + 2b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (2.33) $$
$$ x \geqq 0 $$

problema que, de nuevo, es lineal y de las mismas dimensiones que (2.26) y que, además, conduce a la siguiente versión más simplificada para el caso de funciones de pertenencia triangulares simétricas,

Max: cx

s.a.:

$$ {}^0a_ix + {}_0a_ix \leqq {}^0b_i + {}_0b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (2.34) $$
$$ x \geqq 0 $$

que, como ya anticipábamos, es el mismo modelo que se obtenía para el 1er Indice de Yager, lo que está justificado ya que, para estas funciones de pertenencia particulares, ambos índices 1º y 3º coinciden salvo por una constante multiplicativa,

$$ F_1(\underset{\sim}{A}) = 1/3({}^0A + {}_0A - A) $$
$$ F_3(\underset{\sim}{A}) = 1/4({}^0A + {}_0A + 2A) $$

por lo que si $A = ({}^0A + {}_0A)/2$, queda:

$$ F_1(\underset{\sim}{A}) = 1/6({}^0A + {}_0A) $$
$$ F_3(\underset{\sim}{A}) = 1/2({}^0A + {}_0A) $$

e) Indice de Adamo:

Como sabemos, dados $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ decimos que:

$$\underset{\sim}{A} \leqq \underset{\sim}{B} \quad \text{a grado } \alpha \qquad \text{si} \quad F_\alpha(\underset{\sim}{A}) \leqq F_\alpha(\underset{\sim}{B})$$

donde

$$F_\alpha(\underset{\sim}{A}) = {}^0A + \alpha(A - {}^0A)$$

donde el grado α es prefijado por el decisor. Con ésto, las restrcciones de (2.26) se escriben como:

$$(1-\alpha)\,{}^0a_i x + \alpha a_i x \leqq (1-\alpha)\,{}^0b_i + \alpha b_i, \qquad i = 1,\dots,m$$

y consecuentemente en este caso el problema auxiliar que resuelve (2.26) es:

Max: cx

s.a.:

$$(1-\alpha)\,{}^0a_i x + \alpha a_i x \leqq (1-\alpha)\,{}^0b_i + \alpha b_i \tag{2.35}$$
$$x \geqq 0,, \qquad i = 1,\dots,m$$

que también es lineal y de las mismas dimensiones que (2.26). Particularmente, si las funciones de pertenencia consideradas son simétricas, (2.35) queda como:

Max: cx

s.a.:

$$(1-\alpha/2)\,{}^0a_i x + (\alpha/2)_0 a_i x \leqq (1-\alpha/2)\,{}^0b_i + (\alpha/2)_0 b_i \tag{2.36}$$
$$x \geqq 0, \qquad i = 1,\dots,m$$

Nótese que si $\alpha = 1$ (2.36) coincide con el mismo problema auxiliar obtenido con los índices 1º y 3º de Yager.

f) Indice de Jain:

Consideremos ahora el caso en que para comparar dos números difusos $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(R)$ usamos el Indice de Jain ya estudiado en el Capítulo I.

Haremos la hipótesis (no muy restrictiva) de que siempre el valor

$$x_{max} = \text{Sup } S = \text{Sup } [\text{Sop}(\underset{\sim}{a}_i x \cup \underset{\sim}{b}_i)] = {}^0b_i, \quad i=1,\dots,m$$

En estas circunstancias,

$$\underset{\sim}{a}_i x \leq \underset{\sim}{b}_i \quad \text{si} \quad \frac{{}^0a_i x}{{}^0a_i x - a_i x + {}^0b_i} \leq \frac{{}^0b_i}{2\,{}^0b_i - b_i} \quad i=1,\dots,m$$

que es la expresión final de la aplicación del Indice de Jain a los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$.

Por tanto, el problema auxiliar que en este caso para resolver (2.26) tiene la forma,

Max: cx

s.a.:

$$ {}^0a_i x({}^0b_i - b_i) + {}^0b_i a_i x \leq {}^0b_i^2, \qquad i = 1,\dots,m \qquad (2.37)$$

$$x \geq 0$$

del que es inmediato obtener su versión para el caso de funciones de pertenencia triangulares simétricas, manteniendo igual que (2.37) la linealidad y la dimensionalidad de (2.26).

Las otras posibilidades que se estudiaron en el Capítulo I para el valor x_{max} no las incluimos quí por ser casos totalmente similares al que acabamos de describir.

g) Indice de Posibilidad:

Consideramos ahora que para dos números difusos $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ la relación $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ se mide mediante el grado de Posibilidad de dominancia de Dubois y Prade que ya analizamos en el primer Capítulo.

Como vimos,

$$\tilde{A} \leqq \tilde{B} \quad \text{si} \quad \frac{{}^0B - {}_0A}{{}^0B - B + A - {}_0A} \geqq \frac{{}^0A - {}_0B}{{}^0A - A + B - {}_0B}$$

expresión que corresponde al imponer que

$$\mathrm{Poss}(\tilde{A} \leqq \tilde{B}) \geqq \mathrm{Poss}(\tilde{B} \leqq \tilde{A})$$

entonces las restricciones de (2.26) se expresan como:

$$\frac{{}^0b_i - {}_0a_i x}{{}^0b_i - b_i + a_i x - {}_0a_i x} \geqq \frac{{}^0a_i x - {}_0b_i}{{}^0a_i x - a_i x + b_i - {}_0b_i} \qquad i = 1,\ldots,m$$

Operando se obtiene

$$a_i x({}_0b_i - {}^0b_i + {}_0a_i x - {}^0a_i x) \geqq b_i({}_0b_i - {}^0b_i + {}_0a_i x - {}^0a_i x)$$

y como

$${}_0b_i - {}^0b_i + {}_0a_i x - {}^0a_i x < 0, \qquad i = 1,\ldots,m$$

entonces las anteriores restricciones se reducen a:

$$a_i x \leqq b_i, \qquad i = 1,\ldots,m$$

con lo cual el problema auxiliar que en este caso resuelve (2.26) toma la forma:

$$\text{Max: } cx$$

s.a.:

$$a_i x \leq b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \tag{2.38}$$
$$x \geq 0$$

Si usamos el grado de Posibilidad de dominancia para la comparación entre $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in \mathcal{F}(R)$ en el sentido de que el decisor prefije el grado $k \in [0,1]$ mínimo posible para el que $\underset{\sim}{A} \leq \underset{\sim}{B}$ tendríamos que:

$$\text{Poss}(\underset{\sim}{A} \leq \underset{\sim}{B}) \geq k$$

pero si $\text{Poss}(\underset{\sim}{B} \leq \underset{\sim}{A}) \leq k$, entonces, $\text{Poss}(\underset{\sim}{A} \leq \underset{\sim}{B}) \geq k$ ya que para el caso de números difusos con funciones de pertenecia como las que consideramos

$$\text{Poss}(\underset{\sim}{B} \leq \underset{\sim}{A}) \leq k \quad \longleftrightarrow \quad \frac{{}^0A - {}_0B}{{}^0A - A + B - {}_0B} \leq k$$

de donde,

$$kA + (1-k)\,{}^0A \leq kB + (1-k)\,{}_0B$$

y como $k \in [0,1]$

$$kA + (1-k)\,{}_0A \leq kA + (1-k)\,{}^0A$$
$$kB + (1-k)\,{}_0B \leq kB + (1-k)\,{}^0B$$

se tiene

$$kA + (1-k)\,{}_0A \leq kB + (1-k)\,{}^0B$$

que es equivalente a

$$\frac{{}^0B - {}_0A}{{}^0B - B + A - {}_0A} \geq k \quad \longleftrightarrow \quad \text{Poss}(\underset{\sim}{A} \leq \underset{\sim}{B}) \geq k$$

La implicación inversa no tine porqué verificarse (como puede probarse con contraejemplos sencillos). Desde este punto de vista, el problema auxiliar que resuelve (2.26) sería,

Max: cx

s.a.:

$$k a_i x + (1-k)\, {}^0a_i x \leqq k b_i + (1-k)\, {}_0b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (2.39)$$

$$x \geqq 0$$

que coincide trivialmente con (2.38) sin más que tomar k = 1, y que como antes es lineal y de las mismas dimensiones que (2.26).

Por otra parte, a partir de él, es inmediato encontrar el modelo particular del caso de funciones de pertenecia triangulares simétricas.

h) Indice de Necesidad:

Consideremos por último, para la comparación entre números difusos $\tilde{A}$, $\tilde{B} \in \mathcal{F}(R)$ el grado de Necesidad de dominancia que estudiamos en el primer Capítulo. Según vimos, diremos que

$$\tilde{A} \leqq \tilde{B} \quad \text{cuando} \quad \mathrm{Necc}(\tilde{A} \leqq \tilde{B}) \geqq \mathrm{Necc}(\tilde{B} \leqq \tilde{A})$$

lo que para el caso de funciones de pertenencia triangulares se traduce en que

$$A + {}_0A \leqq B + {}_0B$$

con lo que aplicando este Indice sobre cada una de las restricciones de (2.26), el problema auxiliar correspondiente que resulta es,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad a_ix + {}_0a_ix \leqq b_i + {}_0b_i, \qquad i = 1,\ldots,m \qquad (2.40) \\ &\qquad\qquad x \geqq 0 \end{aligned}$$

problema que sigue manteniendo la linealidad y dimensionalidad de (2.26).

Para el caso de funciones de pertenencia triangulares simétricas, el problema auxiliar se obtiene trivialmente de (2.40).

Si al igual que supusimos para el grado de Posibilidad de dominancia, el decisor fija ahora un valor $k \in [0,1]$ e impone que

$$\text{Necc}(\underset{\sim}{A} \leqq \underset{\sim}{B}) \geqq k$$

$$\text{Necc}(\underset{\sim}{B} \leqq \underset{\sim}{A}) \leqq k$$

(2.26) puede resolverse de acuerdo con el siguiente problema auxiliar,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad ka_ix + (1-k)\,{}_0a_ix \leqq (1-k)b_i + k\,{}_0b_i \\ &\qquad (1-k)a_ix + k\,{}_0a_ix \leqq kb_i + (1-k)\,{}_0b_i, \quad i=1,\ldots,m \qquad (2.41) \\ &\qquad\qquad x \geqq 0 \end{aligned}$$

que para el caso de funciones de pertenencia triangulares simétricas toma la forma

Max: cx

s.a.:

$$k\,{}^{0}a_i x+(2-k)\,{}_{0}a_i x \leq (1-k)\,{}^{0}b_i+(k+1)\,{}_{0}b_i$$

$$(1-k)\,{}^{0}a_i x+(k+1)\,{}_{0}a_i x \leq k\,{}^{0}b_i+(2-k)\,{}_{0}b_i, \quad i = 1,...,m$$

$$x \geq 0 \qquad (2.42)$$

Nótese que ahora al no existir ninguna relación entre $Necc(\underset{\sim}{A} \leq \underset{\sim}{B}) \geq k$ y $Necc(\underset{\sim}{B} \leq \underset{\sim}{A}) \leq k$, como ocurría en el grado de Posibilidad, las dimensiones del problema se duplican.

A continuación ilustramos la aplicación de algunos de los índices hasta aquí comentados con el siguiente,

EJEMPLO NUMERICO:

Consideremos como en Tanaka et al. (1984) el siguiente problema de P.L.D.

Max: $25x_1 + 18x_2$

s.a.:

$$\underset{\sim}{15}x_1 + \underset{\sim}{34}x_2 \leq \underset{\sim}{800}$$

$$\underset{\sim}{20}x_1 + \underset{\sim}{10}x_2 \leq \underset{\sim}{430} \qquad (2.43)$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

en el que los números difusos que en él intervienen tienen las siguientes funciones de pertenencia triangulares

$$
\begin{aligned}
\tilde{15} &= (15,12,19) \\
\tilde{34} &= (34,31,36) \\
\tilde{800} &= (800,750,850) \qquad (2.44) \\
\tilde{20} &= (20,17,22) \\
\tilde{10} &= (10,7,15) \\
\tilde{430} &= (430,360,480)
\end{aligned}
$$

entonces, según la relación intervalar de Tanaka et al. (1984), es decir, según el modelo (2.22bis) tenemos como problema auxiliar,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad 14.1x_1 + 33.1x_2 \leq 785 \\
&\qquad 16.2x_1 + 34.6x_2 \leq 815 \qquad (2.45) \\
&\qquad 19.1x_1 + 9.1x_2 \leq 409 \\
&\qquad 20.6x_1 + 11.5x_2 \leq 445 \\
&\qquad x_1 \geq 0 \\
&\qquad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

cuya solución es,

$$x_1^* = 11.44 \qquad x_2^* = 18.19 \qquad y^* = 613.63$$

que no coincide con la obtenida en Tanaka et al. (1984) porque allí las funciones de pertenencia que se usaban eran triangulares simétricas.

Aplicando los diferentes criterios de comparación anteriormente descritos, se obtienen los siguientes problemas auxiliares y de ellos las soluciones de (2.43).

a) Primer Indice de Yager:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\quad 46x_1 + 101x_2 \leqq 2400 \\ &\quad 59x_1 + 32x_2 \leqq 1270 \\ &\quad x_1 \geqq 0 \\ &\quad x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.47$ $\quad$ $x_2^* = 18.53$ $\quad$ $y^* = 620.45$

b) Tercer Indice de Yager:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\quad 61x_1 + 135x_2 \leqq 3200 \\ &\quad 79x_1 + 42x_2 \leqq 1700 \\ &\quad x_1 \geqq 0 \\ &\quad x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.47}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.73$ $\quad$ $x_2^* = 18.40$ $\quad$ $y^* = 624.62$

c) Indice de Adamo: con $\alpha = 0.7$

Max: $25x_1 + 18x_2$

s.a.:

$$
\begin{aligned}
16.2x_1 + 34.6x_2 &\leqq 815 \\
20.6x_1 + 11.5x_2 &\leqq 445 \\
x_1 &\geqq 0 \\
x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.44$ $\quad$ $x_2^* = 18.19$ $\quad$ $y^* = 613.63$

d) Indice de Jain:

Max: $25x_1 + 18x_2$

s.a.:

$$
\begin{aligned}
13700x_1 + 30700x_2 &\leqq 722500 \\
10700x_1 + 5550x_2 &\leqq 230400 \\
x_1 &\geqq 0 \\
x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

cuya solución es,

$x_1^* = 12.13$ $\quad$ $x_2^* = 18.11$ $\quad$ $y^* = 629.50$

e) Indice de Posibilidad de Dubois y Prade:

Max: $25x_1 + 18x_2$

s.a.:

$$
\begin{aligned}
15x_1 + 34x_2 &\leqq 800 \\
20x_1 + 10x_2 &\leqq 430 \\
x_1 &\geqq 0 \\
x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

cuya solución es,

$$x_1^* = 12.49 \qquad x_2^* = 18.01 \qquad y^* = 636.60$$

f) Indice de Posibilidad fijado un valor k = 0.7:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad 16.2x_1 + 34.6x_2 \leqq 785 \\ &\qquad 20.6x_1 + 11.5x_2 \leqq 409 \\ &\qquad x_1 \geqq 0 \\ &\qquad x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.51}$$

cuya solución es,

$$x_1^* = 9.73 \qquad x_2^* = 18.13 \qquad y^* = 569.67$$

g) Indice de Necesidad de Dubois y Prade:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad 27x_1 + 65x_2 \leqq 1550 \\ &\qquad 37x_1 + 17x_2 \leqq 790 \\ &\qquad x_1 \geqq 0 \\ &\qquad x_2 \geqq 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

cuya solución es,

$$x_1^* = 12.84 \qquad x_2^* = 18.50 \qquad y^* = 654.34$$

h) Indice de Necesidad fijado un valor k = 0.7:

$$\text{Max: } 25x_1 + 18x_2$$

s.a.:

$$\begin{aligned} 14.1x_1 + 33.1x_2 &\leqq 765 \\ 12.9x_1 + 31.9x_2 &\leqq 785 \\ 19.1x_1 + 9.1x_2 &\leqq 381 \\ 17.9x_1 + 7.9x_2 &\leqq 409 \\ x_1 &\geqq 0 \\ x_2 &\geqq 0 \end{aligned} \tag{2.53}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.21$ $\quad$ $x_2^* = 18.33$ $\quad$ $y^* = 610.33$

Lo que demuestra, en general, que:

1) Según el Indice de comparación que usemos, se obtendrán soluciones distintas, y

2) En todos los casos se obtiene una solución no difusa para el problema que consideramos o, más especialmente, una solución con un grado fijo.

CAPITULO III

0. INTRODUCCION

En el anterior Capítulo, cuando se han considerado problemas con números difusos en los coeficientes que definen al conjunto de restricciones, en ningún caso se ha supuesto que las restricciones puedan verificarse de una forma general, es decir, nunca se han supuesto las restricciones difusas. El principal objetivo de este Capítulo es el de desarrollar un modelo que, considerando números difusos en la matriz tecnológica y en los términos de la derecha, suponga también que las restricciones sean difusas mostrándose, por tanto, más general que los hasta aquí considerados.

Se supone, en definitiva, el siguiente problema de P.L.D.

$$\begin{aligned} \text{Max:}\quad & z = cx \\ \text{s.a.:}\quad & \\ & \underset{\sim}{A}x \lesssim \underset{\sim}{b} \\ & x \geqq 0 \end{aligned}$$

donde la matriz $\underset{\sim}{A}$ y el vector $\underset{\sim}{b}$ están constituidos por números difusos y, para cada restricción hay definida una función de pertenencia que mide el cumplimiento de la misma para cada $x \in \mathbb{R}^n$.

En primer lugar se intenta resolver este problema de una forma paralela al caso en que no intervienen números difusos, demostrándose este enfoque poco viable ya que, con el mismo, hay que multiplicar y dividir números difusos y éstas son operaciones que introducen muchas perturbaciones, por las aproximaciones que hay que realizar, en la solución del problema.

Se propone entonces un segundo enfoque de resolución que se basa en la idea de sustituir el conjunto de restricciones original, por otro que sea más operativo. Esta sustitución se realiza de forma que el nuevo conjunto de soluciones factibles sea convexo y, además, incorpore la difusividad de las restricciones, no de los coeficientes que intervienen, al miembro de la derecha. Con ésto, se consigue un problema intermedio de la forma,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } z = cx \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \underset{\sim}{A}x \leqq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{d}(1-\alpha) \\
&\qquad x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
$$

en el que la relación $\leqq$ es cualquier relación de comparación de números difusos.

La solución al problema originalmente planteado se obtiene por particularización, en el problema auxiliar, de la relación $\leqq$ a cada índice de comparación, de los ya analizados en el Capítulo anterior para este tipo de modelos.

Por las mismas causas explicadas en el Capítulo II, en definitiva, no se obtiene una única solución para el problema de P.L.D. planteado, sino que la solución depende directamente del índice que se considere.

El Capítulo termina con algunas aplicaciones numéricas, que explican cómo el método propuesto da soluciones que engloban como casos particulares la de los modelos estudiados en el Capítulo anterior.

1. UN MODELO MAS GENERAL

El propósito de esta Sección es estudiar un modelo de P.L.D. más general que todos los anteriores y que permita desde esa generalidad:

1) Englobar todos los modelos particulares hasta ahora estudiados, y

2) Disponer de un método de resolución propio que resuelva este caso más general y, por ende, los problemas más específicos que de él se desprendan.

Nos limitaremos al caso de problemas de P.L.D. en los que la difusividad venga establecida sólo en el conjunto de restricciones, dejando el caso de objetivos difusos aparte, por separarse demasiado de los objetivos de esta memoria.

La situación que contempla el modelo a considerar es la siguiente. Supongamos un decisor que para plantear una restricción en forma de inecuación lineal,

$$\underset{\sim}{a}_1 x_1 + \underset{\sim}{a}_2 x_2 + \dots + \underset{\sim}{a}_n x_n \leqq \underset{\sim}{b}$$

dispone de una información acerca de la misma como sigue: Los coeficientes $\underset{\sim}{a}_i$, $i = 1,\dots,n$ toman valores cercanos a a_i que nunca son superiores a ${}^0a_i$ ni inferiores a ${}_0a_i$. La disponibilidad $\underset{\sim}{b}$ se supone alrededor de b casi siempre, pero puede llegar a valer ${}^0b$ como mucho y nunca bajar de ${}_0b$.

Por otra parte, al decisor no le importa demasiado que la anterior inecuación se viole, siempre que tal violación no supere en mucho al valor d.

Este planteamiento supone una imprecisión en todos los datos que permite poder modelizarla desde el punto de vista de los subconjuntos difusos sin más que admitir que la imprecisión sobre los a_i, $i = 1,\ldots,n$ y b puede representarse por respectivas funciones de pertenencia, y que, por otro lado, la posibilidad de violación del cumplimiento de la inecuación puede expresarse midiendo el grado en que se produce tal violación, es decir, incorporando una función de pertenencia que mida la adecuación entre el número difuso $\tilde{a}_1 x_1 + \ldots + \tilde{a}_n x_n$ y el $\tilde{b}$, en relación al también número difuso $\tilde{d}$, que expresa el margen tolerable por el decisor para tal violación.

La situación hasta aquí descrita, en el contexto de la P.L.D. puede representarse como el problema,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad \tilde{a}x \lesssim \tilde{b} \\ &\qquad x \geqq 0 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

en el que suponemos que en $\tilde{a}$ hay al menos un elemento caracterizado imprecisamente, es decir, representable como un número difuso, así como en $\underset{\sim}{b}$, y que las restricciones son también difusas en el sentido introducido. En estas condiciones, el problema consta de los siguientes elementos.

Para cada fila, restricción, i = 1,...,m en (3.1)

$$\exists\ \mu_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}),\quad \mu_i : \mathbb{R} \to [0,1] \tag{3.2}$$

que define el número difuso $\underset{\sim}{b}_i$

y también $\forall$ i = 1,...,m, $\forall$j = 1,...,n

$$\exists\ \mu_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}),\ \mu_{ij} : \mathbb{R} \to [0,1] \tag{3.3}$$

expresando la difusividad del respectivo término $\underset{\sim}{a}_{ij}$, y por último $\forall$i = 1,...,m

$$\exists\ \mu^i \in \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathbb{R})),\ \mu^i : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0,1] \tag{3.4}$$

midiendo para cada número difuso $\underset{\sim}{a}_i x$ el grado con que cumple la restricción

$$\underset{\sim}{a}_i x \lesssim \underset{\sim}{b}_i, \qquad i = 1,...,m.$$

Evidentemente, este problema generaliza los problemas de la forma (2.7) en los que, supuestas las restricciones difusas, todos los parámetros que intervenían en el problema eran números reales conocidos por el decisor.

Asímismo, los problemas del tipo (2.19) son también casos particulares del (3.1) ya que allí no se hacía ninguna hipótesis acerca de la difusividad de las restricciones en lo referido al cumplimiento de las mismas.

Está claro además, que si en (3.1) hubiéramos considerado un objetivo difuso, el resto de los modelos analizados habrían quedado englobados en él.

Para resolver (3.1) vamos a intentar dos enfoques. De un lado estudiaremos la viabilidad de una resolución con técnicas paralelas a las de los problemas (2.7). Por otro lado, consideraremos un nuevo método, que se aparta sustancialmente del anterior pero que se demostrará más eficaz.

En ambos casos admitiremos que existe una relación clásica (no difusa propiamente), que sirva para discernir cuándo dos números difusos $M, N \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ verifican que $M \leq N$. Esta no es una hipótesis fuerte, ya que existen muchas de estas relaciones como hemos visto en los anteriores Capítulos.

2. PRIMER ENFOQUE DE RESOLUCION

Como hemos dicho, la idea que anima este primer enfoque es la de trabajar con el problema (3.1) de la misma forma que se hace en el caso de los problemas (2.7) cuando hay restricciones difusas.

El inconveniente básico de este método de resolución radica en que ahora, a diferencia de aquel caso, tenemos que operar con números difusos. Por cuestiones de operatividad, supondremos que todos los números difusos que intervienen son del tipo L-R y, como más adelante expondremos, ya que se trata de demostrar la ineficacia de este enfoque, consideraremos casos más particulares de éstos. Por comodidad supondremos que los números difusos con los que trabajamos están expresados en función de sus amplitudes y no de sus extremos.

Si en (3.1) no tuviéramos números difusos en los coeficientes, la función de pertenencia (3.4) para una restricción cualquiera tendría la forma,

$$\mu(a_i x, b_i) = \begin{cases} 1 & a_i x \leqq b_i \\ 1-(a_i x - b_i)/d_i & b_i \leqq a_i x \leqq b_i + d_i \\ 0 & a_i x \geqq b_i + d_i \end{cases} \qquad (3.5)$$

Para el problema que actualmente consideramos, el grado de cumplimiento de la restricción difusa $\underset{\sim}{a}_i x \underset{\sim}{\leq} \underset{\sim}{b}_i$, entre los números difusos $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, podríamos medirlo según una función de pertenencia con el mismo sentido que la (3.5), si bien formalmente diferente , ya que al tener que operar con números difusos la expresión se complicará demasiado.

A continuación, demostramos cómo este camino para la resolución de (3.1) no es viable.

En efecto, supongamos por comodidad que todas las funciones de pertenencia que intervienen en el problema, las referidas a números difusos, son triangulares L-R. Como es habitual, para un número cualquiera $\underset{\sim}{m} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ representaremos su función de pertenencia por $(m,\underline{m},\overline{m})$ donde m es la moda y $\underline{m}$ y $\overline{m}$ son los márgenes a la izquierda y a la derecha de tal número difuso.

En esta situación, las hipótesis del problema suponen las siguientes funciones,

$\forall i = 1,\ldots,m, \quad \forall j = 1,\ldots,n, \quad \underset{\sim}{a}_{ij} = (a_{ij},\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij})$

$\forall i = 1,\ldots,m, \quad \underset{\sim}{b}_i = (b_i,\underline{b}_i,\overline{b}_i)$

Para construir (3.4) de forma paralela a (3.5) observemos que $\mu(\underset{\sim}{a}_i x \lesssim \underset{\sim}{b}_i)$ debe medir el cumplimiento de tal restricción en referencia a una cierta holgura (margen) que es precisamente lo que establece la difusividad de tal restricción, es decir, en términos de (3.5), en referencia a d_i.

Siendo $\underset{\sim}{a}_i x$ y $\underset{\sim}{b}_i$, $i = 1,\ldots,m$ números difusos, hay que suponer que la holgura d_i también la haya establecido el decisor de forma difusa, es decir, que tiene sentido decir que d_i es un número difuso de la forma $\underset{\sim}{d}_i = (d_i, \infty, \overline{d}_i)$ lo que expresaría que el decisor tolera desviaciones en el cumplimiento de la restrición de "no mucho más del valor d_i".

Con estas herramientas vamos a construir a continuación (3.4), usando para ello las fórmulas de operación entre números difusos L-R (Dubois y Prade, 1980).

Siendo todos los $\tilde{a}_{ij}$ del tipo L-R, la función de pertenencia será de la forma $(a_{ij}, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij})$.

Como debemos calcular

$$1 - (\tilde{a}_i x - \tilde{b}_i)/\tilde{d}_i$$

tenemos en primer lugar que la función de pertenencia de $\tilde{a}_i x - \tilde{b}_i$ es:

$$\tilde{a}_i x - \tilde{b}_i = (a_i x - b_i, \underline{a}_i x + \overline{b}_i, \overline{a}_i x + \underline{b}_i)$$

entonces

$$\frac{\tilde{a}_i x - \tilde{b}_i}{\tilde{d}_i} = \left(\frac{a_i x - b_i}{d_i}, \frac{\overline{d}_i (a_i x - b_i) + d_i (\underline{a}_i x + \overline{b}_i)}{d_i^2}, \infty \right)$$

y finalmente,

$$1 - \frac{\tilde{a}_i x - \tilde{b}_i}{\tilde{d}_i} = \left(1 - \frac{a_i x - b_i}{d_i}, \infty, \frac{\overline{d}_i (a_i x - b_i) + d_i (\underline{a}_i x + \overline{b}_i)}{d_i^2} \right) \qquad (3.6)$$

Evidentemente, cada función de pertenencia (3.6) representa la restricción de enunciado difuso: El valor aproximadamente igual a $a_i x$ no supere mucho más de $\overline{d}_i$ al valor "aproximadamente b_i". Notando tal restricción como R_i, el problema que nos ocupa (3.1), puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad x \text{ cumpla } R_i, \quad i = 1,..,m \qquad (3.7) \\ &\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

donde cada restricción difusa lleva asociada una función de pertenencia de la forma (3.6)

$$\mu^i : \mathcal{F}(\mathbb{R}) \to [0,1], \qquad i = 1,...,m$$

como se anticipaba en (3.4).

Para resolver (3.7) la línea que vamos a seguir es la siguiente. Dada la naturaleza de las funciones de pertenencia $\mu^i(\cdot)$, $i = 1,...,m$ está claro que el conjunto de restricciones en (3.7) es un número difuso de segundo orden.

Si para cada $\alpha \in (0,1]$ determinamos los α-cortes del conjunto de restricciones en virtud del Teorema de Representación, obtendremos dicho conjunto descompuesto en conjuntos difusos de $\mathbb{R}$ con lo que estamos en la misma situación que planteaban los problemas del tipo (2.19) y para los cuales conocemos un método de resolución.

Concretamente, para cada $\alpha \in (0,1]$ determinamos el conjunto difuso,

$$\mu^i(\underset{\sim}{a}_i x, \underset{\sim}{b}_i) \geq \alpha, \qquad i = 1,...,m.$$

En virtud de (3.6) tenemos

$$\mu^i(\underset{\sim}{a}_i x, \underset{\sim}{b}_i) \geq \alpha \leftrightarrow \left(\frac{\underset{\sim}{a}_i x d_i^2 - d_i^2 + d_i(a_i x - b_i)}{\overline{d}_i(a_i x - b_i) + d_i(\underline{a}_i x + \overline{b}_i)} \right) \leq 1 - \alpha \qquad (3.8)$$

expresión en la que $\underset{\sim}{a}_i x$, $i = 1,...,m$ representa un número difuso con función de pertenencia $(a_i x, \underline{a}_i x, \overline{a}_i x)$.

Por tanto, el primer miembro de (3.8) es un número difuso con función de pertenencia en virtud de las reglas de operaciones entre números difusos (Dubois y Prade, 1980)

$$1/p\left((a_i x-1)d_i^2 + d_i(a_i x-b_i), d_i^2\, \underline{a}_i x, d_i^2\, \bar{a}_i x)\right) \qquad (3.9)$$

donde $p = \bar{d}_i(a_i x-b_i) + d_i(\underline{a}_i x+\bar{b}_i)$ y se opera en (3.9) con la regla usual de multiplicación de un número difuso por un escalar.

Supongamos que la función de pertenencia (3.9) representa al número difuso que, sin ambiguedad, notamos como $\underset{\sim}{A}_i x$. El problema (3.7) se escribe entonces como:

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad \underset{\sim}{A}_i x \leqq 1-\alpha, \qquad i = 1,\ldots,m, \\ &\qquad x \geqq 0, \qquad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \qquad (3.10)$$

Un λ-corte de $\underset{\sim}{A}_i x$ es un intervalo en $\mathbb{R}$ de extremos inferior y superior respectivos,

$$I_1^i(\lambda) = \frac{(a_i x-1)d_i^2 + d_i(a_i x-b_i) - d_i^2 \underline{a}_i x(1-\lambda)}{\bar{d}_i(a_i x-b_i) + d_i(\underline{a}_i x+\bar{b}_i)}$$

$$I_2^i(\lambda) = \frac{(a_i x-1)d_i^2 + d_i(a_i x-b_i) + d_i^2 \bar{a}_i x(1-\lambda)}{\bar{d}_i(a_i x-b_i) + d_i(\underline{a}_i x+\bar{b}_i)}$$

Por tanto, para que en (3.10) se verifiquen las restricciones para cada $\lambda \in (0,1]$ y cada $\alpha \in (0,1]$ basta con que

$$I_2^i(\lambda) \leqq 1 - \alpha, \qquad i = 1,\dots,m.$$

Con lo que (3.10) se expresa como el problema de P.L. paramétrica siguiente,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.: } \frac{(a_i x-1)d_i^2 + d_i(a_i x-b_i) + d_i^2\overline{a}_i x(1-\lambda)}{\overline{d}_i(a_i x-b_i) + d_i(\underline{a}_i x+\overline{b}_i)} \leqq 1 - \alpha \\ &\qquad x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad \lambda \in (0,1] \end{aligned} \tag{3.11}$$

o escrito propiamente en forma lineal

$$\begin{aligned} &\text{Max: } cx \\ &\text{s.a.: } \\ &\qquad \{a_i\left(d_i(d_i+1)-\overline{d}_i(1-\alpha)\right)+\overline{a}_i d_i^2(1-\lambda)-\underline{a}_i d_i(1-\alpha)\}x \leqq \\ &\qquad \leqq d_i(d_i+b_i)+(d_i\overline{b}_i-\overline{d}_i b_i)(1-\alpha) \qquad i = 1,\dots,m \\ &\qquad x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad \lambda \in (0,1] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Sobre este problema es necesario hacer los siguientes comentarios.

1) Debido a la doble difusividad que el modelo propone, el problema auxiliar que se usa como medio para encontrar una solución difusa, tiene expresiones más complicadas que las comunmente resultantes. Sin embargo, el uso del Teorema de Representación garantiza la linealidad.

2) Como en todos los casos hemos supuesto números L-R, no hay teóricamente ninguna dificultad en suponer que los números difusos que intervienen en el problema tengan funciones de pertenencia no lineales. En tal caso, la no linealidad de dichas funciones se acumularía sobre los parámetros α y λ que intervienen, pero no afectaría a la linealidad de las restricciones.

3) El problema auxiliar (3.12) no reproduce el original (3.1) cuando suponemos que todos los datos son crisps.

En efecto, si todos los $\underset{\sim}{a}_{ij}$ y $\underset{\sim}{b}_i$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ y las restricciones son convencionales, deberíamos obtener un problema como (3.1) pero sin ambiguedad en su planteamiento,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } cx \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad a\,x \leqq b \\
&\qquad\;\; x \geqq 0
\end{aligned}
$$

con $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y a una matriz real de dimensión mxn.

Sin embargo, si en (3.12) tomamos $\alpha = \lambda = 1$, es decir, nos quedamos con las modas de los números difusos que intervengan y exigimos que las restricciones se cumplan en sentido clásico, obtenemos en cada fila de (3.12),

$$a_i\big((d_i(d_i+1)\big)x \leqq d_i(d_i+b_i), \qquad i = 1,\ldots,m$$

y por tanto

$$a_i x \leqq (d_i + b_i)/(d_i + 1), \qquad i = 1,\ldots,m \quad (3.13)$$

Asímismo, si suponemos que no intervienen números difusos, sino que sólo las restricciones son difusas, en cada fila, supuestas funciones de pertenencia lineales para medir el cumplimiento de cada restricción, deberíamos obtener,

$$a_i x \leqq b_i + d_i(1 - \lambda), \qquad i = 1,\ldots,m$$

como en (2.12).

Pero sin en (3.12) tomamos $\alpha = 1$ nos queda en cada fila

$$\{a_i[d_i(d_i+1)]+\overline{a}_i[d_i^2\ (1-\lambda)]\}x \leqq d_i(d_i+b_i),\ i = 1,\ldots,m. \quad (3.14)$$

Las expresiones (3.13) y (3.14) están, sin embargo, justificadas. Para llegar al problema auxiliar (3.12) hemos tenido que usar las operaciones usuales entre números difusos. Ahora bien, nótese que el inverso de un número difuso D del tipo L-R tiene por su parte derecha, por ejemplo, de ecuación

$$\mu_{D^{-1}}(x) = L((1-dx)/\underline{d}x), \qquad x \geqq 1/d$$

cuando $D = (d,\underline{d},\overline{d})$. Así, D^{-1} no es un número del tipo L-R ni R-L. Pero para poder operar con comodidad, en la división se hace la aproximación (Dubois y Prade, 1980)

$$(1-dx)/\underline{d}x \cong ((1/d)-x)/(\underline{d}/d^2)$$

con lo que se consigue que D^{-1} sea aproximadamente del tipo L-R

$$(d,\underline{d},\overline{d}) \cong (1/d,\overline{d}/d^2,\underline{d}/d^2).$$

Por tanto, la introducción de esta aproximación en la función de pertenencia (3.6) lleva a que (3.13) y (3.14) no reproduzcan las expresiones clásicas.

Esta no reproducción de los resultados que se obtendrían si los parámetros que intervienen en el problema no fueran difusos, desde un punto de vista general, no debería ser importante. En efecto, al tratarse de un problema no clásico, es lógico pensar que su solución no tenga nada que ver con la correspondiente clásica de un problema formalmente paralelo al que se considera.

Sin embargo, el método de resolución, que en el caso concreto de los problemas de P.L.D. hemos descrito, permite determinar para cada grado $\alpha \in (0,1]$ o $\lambda \in (0,1]$ la estructura de un problema clásico de P.L. cuya solución no se corresponde con la que se obtiene, por particularización de α o λ de la solución difusa del problema que consideramos, obtenida según la resolución descrita.

En resumen, si $\mathcal{P}$ representa un problema como (3.1) y $\mathcal{S}$ su solución difusa obtenida como hemos explicado hasta aquí, sea $P_{\alpha(\lambda)}$ el problema clásico que se puede obtener del $\mathcal{P}$ fijando unos valores $\alpha \in (0,1]$ y $\lambda \in (0,1]$, y sea $S_{\alpha(\lambda)}$ la correspondiente solución clásica de $P_{\alpha(\lambda)}$ y $\Sigma_{\alpha(\lambda)}$ su solución según el método desarrollado. Hemos comprobado que $S_{\alpha(\lambda)}$ y $\Sigma_{\alpha(\lambda)}$ no son iguales por lo que el diagrama (3.15) no puede cerrarse entre $\mathcal{S}$ y $\Sigma_{\alpha(\lambda)}$ o $S_{\alpha(\lambda)}$ por no haber unicidad en este último caso debido a las aproximaciones que hemos hecho en los cálculos.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ \big| & & \\ P_{\alpha(\lambda)} & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} S_{\alpha(\lambda)} \\ \Sigma_{\alpha(\lambda)} \end{array} \right. \end{array} \qquad (3.15)$$

El siguiente ejemplo numérico explica todo esto.

EJEMPLO:

Consideremos el siguiente problema de P.L.D., de la misma estructura que (3.1) y que ya vimos en el Capítulo II,

$$\begin{array}{l} \text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ \text{s.a.:} \\ \qquad \underset{\sim}{15}x_1 + \underset{\sim}{34}x_2 \lesssim \underset{\sim}{800} \\ \qquad \underset{\sim}{20}x_1 + \underset{\sim}{10}x_2 \lesssim \underset{\sim}{430} \\ \qquad x_1 \geqq 0 \\ \qquad x_2 \geqq 0 \end{array} \qquad (3.16)$$

(Corresponde a $\mathcal{P}$ en el diagrama (3.15)). Sean las funciones de pertenencia de los números difusos que interviene en (3.16) triangulares dadas por,

$\underset{\sim}{15} = (15,3,3)$ $\quad \underset{\sim}{34} = (34,2,2)$ $\quad \underset{\sim}{800} = (800,50,50)$

$\underset{\sim}{20} = (20,2,2)$ $\quad \underset{\sim}{10} = (10,3,3)$ $\quad \underset{\sim}{430} = (430,50,50)$

y donde $\underset{\sim}{d}_1 = (800,\infty,75)$, $\underset{\sim}{d}_2 = (430,\infty,65)$. El cumplimiento de las restricciones en (3.16) viene medido por sendas funciones de pertenencia, según (3.6), de expresiones respectivas

$$\mu^1 \equiv \left(1 - \frac{(15,34)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-800}{800}, \infty, \frac{75\left[(15,34)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-800\right]+800\left[(3,2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+50\right]}{640000}\right)$$

$$\mu^2 \equiv \left(1 - \frac{(20,10)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-430}{430}, \infty, \frac{65\left[(20,10)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-430\right]+430\left[(2,3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+50\right]}{184900}\right)$$

Entonces, (3.12) toma la forma,

$$\text{Max: } 25x_1 + 18x_2$$

s.a.:

$$(461139+141\alpha-76800\lambda,\, 922522+166\alpha-51200\lambda)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \leqq 50400+800$$

$$(407424+216\alpha-36980\lambda,\, 240606+194\alpha-55470\lambda)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \leqq 36335+645$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

$$\alpha, \lambda \in (0,1] \tag{3.17}$$

Evidentemente, el problema (3.17) representa al $P_{\alpha(\lambda)}$ del diagrama (3.15). La solución de este problema lineal biparamétrico daría la solución difusa correspondiente a (3.16), $\mathcal{S}$.

Ahora bien, si en (3.16) suponemos el problema clásico subyacente con grado 1,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad 15x_1 + 34x_2 \leqq 800 \\ &\qquad 20x_1 + 10x_2 \leqq 430 \\ &\qquad\qquad x_1 \geqq 0 \\ &\qquad\qquad x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

su solución óptima, $S_{1(1)}$, es,

$$x_1^* = 12.49 \qquad x_2^* = 18.01 \qquad y^* = 636.60 \quad (3.18)$$

Pero la solución optimal, $\Sigma_{1(1)}$, de (3.17), es decir, según el modelo de resolución desarrollado cuando se toma $\alpha = \lambda = 1$, es la del problema,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad 384480x_1 + 871488x_2 \leqq 51200 \\ &\qquad 370660x_1 + 185330x_2 \leqq 36980 \\ &\qquad\qquad x_1 \geqq 0 \\ &\qquad\qquad x_2 \geqq 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$x_1^0 = 0.09 \qquad x_2^0 = 0.01 \qquad y^0 = 2.62$$

que evidentemente está muy en desacuerdo con la solución (3.18). Hemos comprobado, por tanto, como la construcción de funciones de pertenencia de una forma paralela a la seguida para resolver problemas de P.L.D. en los que no intervienen números difusos ni en a ni en b, no proporciona un método satisfactorio de resolución, en este caso debido, básicamente, a tener que operar de forma aproximada con los parámetros difusos que toman parte.

Con la idea de paliar estos inconvenientes, estudiamos a continuación un,

3. SEGUNDO ENFOQUE DE RESOLUCION

Con la experiencia anterior, está claro que el principal inconveniente asociado a la solución de (3.1) es el de tener que operar con números difusos. El objetivo de este segundo enfoque es el de poder obtener un problema de P.L.D. en el que las restricciones del problema se hayan sustituido por otras que, representandolas, tengan expresiones más tratables. En definitiva, lo que consideramos es la sustitución del conjunto doblemente difuso $\underset{\sim}{a}x \lesssim \underset{\sim}{b}$ por un conjunto difuso convexo de restricciones.

Igual que en el primer enfoque descrito, supondremos una relación $\leqq$ que mide el que $M \leqq N$, $\forall M, N \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Concretamente, sean T y $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números difusos fijos. Definimos el conjunto difuso en $\mathcal{F}(R)$

$$\forall A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \Rightarrow \mu(A) = \mathrm{Sup}\{ \alpha \in (0,1]: A \leqq B+T(1-\alpha)\} \tag{3.19}$$

midiendo para cada $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ el grado con el que ese número difuso verifica la propiedad $A \leqq B+T(1-\alpha)$.

De forma análoga a la definición de convexo difuso convencional, decimos que $\mu \in \mathcal{F}[\mathcal{F}(\mathbb{R})]$ es convexo si, y sólo si,

$$\forall x,y \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \mu[\lambda x+(1-\lambda)y] \geqq [\mu(x) \wedge \mu(y)]$$

Nótese que esta definición no introduce perturbaciones en el uso de números difusos ya que la suma y la multiplicación por un escalar son operaciones bien definidas.

Con ésto podemos demostrar que (3.19) es convexo. En efecto,

$$\forall M, N \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \quad \mu(M) = \alpha \quad y \quad \mu(N) = \beta \Rightarrow$$

$$M \leqq B + T(1-\alpha)$$

$$N \leqq B + T(1-\beta)$$

luego, $\forall \lambda \in [0,1]$

$$\lambda M \leqq \lambda B + \lambda T(1-\alpha)$$

$$(1-\lambda)N \leqq (1-\lambda)B + (1-\lambda)T(1-\beta)$$

por tanto,

$$\lambda M+(1-\lambda)N \leqq B+T[\lambda(1-\alpha)+(1-\lambda)(1-\beta)] = B+T[1-(\lambda\alpha+(1-\lambda)\beta)]$$

Sea $\gamma = \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta \in (0,1]$, entonces $\gamma \geqq \alpha \wedge \beta$ ya que si $\gamma < \alpha \wedge \beta \Longrightarrow \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta < \alpha \wedge \beta$.

Si $\alpha \wedge \beta = \alpha$ entonces,

$\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta < \alpha \quad \Longrightarrow \quad (1-\lambda)\beta < \alpha(1-\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \beta < \alpha$

lo que contradice el que $\alpha \wedge \beta = \alpha$ y análogamente ocurrirá si $\alpha \wedge \beta = \beta$. Por tanto, con la definición (3.20) el difuso (3.19) es convexo.

Consideremos ahora una restricción cualquiera de (3.1) $\underset{\sim}{a}_i x \lesssim \underset{\sim}{b}_i$, $i = 1,\dots,m$. Sea $\underset{\sim}{t}_i$ un número difuso fijado por el decisor expresando el margen máximo tolerable para él en la violación de tal restricción. Entonces, tiene sentido sustituir esa relación difusa por la restricción entre números difusos

$$\underset{\sim}{a}_i x \leqq \underset{\sim}{b}_i + \underset{\sim}{t}_i(1-\alpha), \quad i = 1,\dots,m, \quad \alpha \in [0,1]$$

que expresaría que con grado $\alpha = 0$ la restricción se verifica con el peor grado de cumplimiento que el decisor espera, mientras que para $\alpha = 1$ se verifica con una adecuación máxima a sus intereses.

Por tanto, en virtud de la definición de (3.19) y como puede comprobarse inmediatamente, la intersección de convexos también lo es, y el conjunto de restricciones difusas de (3.1)

$$\underset{\sim}{a}x \lesssim \underset{\sim}{b}$$

puede sustituirse por el convexo difuso

$$\underset{\sim}{a}x \leqq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{t}(1-\alpha)$$

donde $\underset{\sim}{a}$ es una matriz de mxn números difusos y $\underset{\sim}{b}$ y $\underset{\sim}{t}$

son vectores de números difusos, uno dado por el problema, y el otro, $\underset{\sim}{t}$, fijado por el decisor conforme a sus intereses.

En esta situación, el problema auxiliar para resolver (3.1) toma la siguiente expresión,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } cx \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{t}(1 - \alpha) \qquad\qquad (3.20) \\
&\qquad x \geq 0, \qquad \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
$$

que tiene el mismo significado que el (2.19) si en él fijamos un grado de realización para los números difusos que intervienen.

En general, (3.20) plantea un problema más general aún que (2.19), ya que para llegar a él no hemos hecho ninguna hipótesis adicional sobre la relación $\leq$ que existe en el conjunto de restricciones, es decir, que mide cuándo dos números difusos M y N verifican $M \leq N$. En nuestro caso, cuando

$$\underset{\sim}{a}x \leq \underset{\sim}{b} + \underset{\sim}{t}(1 - \alpha)$$

Si tal relación fuera la (2.20), evidentemente (3.20) reproduciría el modelo de Tanaka et al. (1984). Por otra parte, está claro que si en (3.1) no hubiera números difusos en su planteamiento, sino sólo restricciones difusas, este enfoque aquí desarrollado coincide con el correspondiente modelo (2.12) anterior quedando así soslayados los inconvenientes mencionados con el modelo que proponía el primer enfoque.

Sin embargo, como sabemos, no tenemos porqué limitarnos al uso de la relación (2.20) sino que, como hemos visto en el Capítulo anterior, podemos usar otras. Naturalmente, el uso de una u otra puede llevar a obtener distintos modelos convencionales de problemas pero que, ahora, serán de P.L. paramétrica, lo que permitirá la obtención de una solución propiamente difusa.

4. SOLUCIONES ALTERNATIVAS

Puesto que sabemos cómo manejar los diferentes Indices de comparación, nos limitaremos a continuación a señalar las expresiones de los problemas auxiliares que se obtienen al usar en (3.20) esos Indices.

La diferencia esencial con respecto a los modelos del Capítulo II estriba en que el $\underset{\sim}{b}_i$ que allí aparecía tiene ahora la forma

$$\underset{\sim}{b}_i + \underset{\sim}{t}_i(1 - \alpha), \quad i = 1,\ldots,m, \quad \alpha \in (0,1]. \quad (3.21)$$

Siendo las funciones de pertenencia de los números difusos que intervienen en este último

$$\underset{\sim}{b}_i = (b_i, \underline{b}_i, \overline{b}_i), \quad i = 1,\ldots,m$$

$$\underset{\sim}{t}_i = (t_i, \underline{t}_i, \overline{t}_i), \quad i = 1,\ldots,m$$

resulta inmediato que la función de pertenencia de (3.21) es,

$$(b_i+(1-\alpha)t_i, \underline{b}_i+(1-\alpha)\underline{t}_i, \overline{b}_i+(1-\alpha)\overline{t}_i), \quad i = 1,\ldots,m \quad (3.22)$$

que en la nomenclatura que se usó en el Capítulo II corresponde a un número difuso de moda $b_i+(1-\alpha)t_i$ y extremos, inferior y superior, respectivos

$$(b_i - \underline{b}_i) + (1-\alpha)(t_i - \underline{t}_i), \quad i = 1,\ldots,m$$

$$(b_i + \overline{b}_i) + (1-\alpha)(t_i + \overline{t}_i), \quad i = 1,\ldots,m$$

donde

$$b_i - \underline{b}_i = {}_0b_i \qquad b_i + \overline{b}_i = {}^0b_i$$

$$t_i - \underline{t}_i = {}_0t_i \qquad t_i + \overline{t}_i = {}^0t_i$$

son los respectivos extremos inferior y superior con la citada nomenclatura (Capítulo II) de los números difusos $\underset{\sim}{b}_i$ y $\underset{\sim}{t}_i$. Con lo que las expresiones de los extremos del número difuso $\underset{\sim}{b}_i + \underset{\sim}{t}_i(1-\alpha)$ quedan más reducidas y sencillas de manejar.

En resumen, el número difuso $\underset{\sim}{b}_i + \underset{\sim}{t}_i(1-\alpha)$ expresado en función de sus extremos es,

$$(b_i+t_i(1-\alpha), {}_0b_i+{}_0t_i(1-\alpha), {}^0b_i+{}^0t_i(1-\alpha)), \; i=1,\ldots,m. \quad (3.23)$$

El cambio de notación lo hacemos con vista a que, al ser de nuevo la empleada en el Capítulo II, podemos apreciar mejor las diferencias, al aplicar los distintos Indices, entre los problemas auxiliares que resultaban en aquel Capítulo y los que aquí obetenemos a continuación. Evidentemente, cuando $\alpha = 1$ en (3.21) y (3.23) tenemos el número difuso $\underset{\sim}{b}_i = (b_i, {}_0b_i, {}^0b_i)$.

Los extremos del k-corte del número difuso (3.23) que llamaremos más abreviadamente $\underset{\sim}{c}_i = (c_i, {}_0c_i, {}^0c_i)$ son:

$$({}_0c_i)_k = k(b_i+(1-\alpha)t_i)+(1-k)[{}_0b_i+(1-\alpha)\,{}_0t_i]$$
$$({}^0c_i)_k = k(b_i+(1-\alpha)t_i)+(1-k)[{}^0b_i+(1-\alpha)\,{}^0t_i] \quad (3.24)$$

Según ésto, los problemas auxiliares que ahora resuelven (3.20) según los distintos Indices de comparación son:

a) Indice de Chang:

El problema auxiliar para resolver (3.20) se reduce a,

Max: cx

s.a.:

$$({}^0a_ix-{}_0a_ix)({}^0a_ix+{}_0a_ix+a_ix) \leq$$
$$\leq [({}^0b_i-{}_0b_i)+(1-\alpha)(t_i-{}_0t_i)]\cdot$$
$$\cdot[b_i+{}^0b_i+{}_0b_i+(1-\alpha)(t_i+{}^0t_i+{}_0t_i)], \quad i=1,...,m \quad (3.25)$$
$$x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

problema que no es lineal como el (2.27) y que coincide con él para $\alpha = 1$.

b) Primer Indice de Yager:

El problema auxiliar es ahora,

Max: cx

s.a.:

$$ {}^{0}a_i x + {}_{0}a_i x + a_i x \leq {}^{0}b_i + {}_{0}b_i + b_i + (1-\alpha)({}^{0}t_i + {}_{0}t_i + t_i) $$

$$ x \geq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad i=1,\dots,m \qquad (3.26) $$

problema que coincide, cuando $\alpha = 1$, como se ve fácilmente, con el obtenido con este Indice en (2.28).

c) Segundo Indice de Yager:

El problema auxiliar para resolver (3.20) es ahora,

Max: cx

s.a.:

$$ a_i x({}^{0}b_i + (1-\alpha)\,{}^{0}t_i) + {}^{0}a_i x[1-(b_i + (1-\alpha)t_i)] \leq {}^{0}b_i + (1-\alpha)\,{}^{0}t_i $$

$$ x \geq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad i = 1,\dots,m \qquad (3.27) $$

Nótese que este problema supone coeficientes paramétricos en la matriz tecnológica.

d) Tercer Indice de Yager:

Con este Indice, el problema auxiliar que se obtiene para resolver (3.20) es,

Max: cx

s.a.:

$$ {}^{0}a_i x + {}_{0}a_i x + 2a_i x \leq {}^{0}b_i + {}_{0}b_i + 2b_i + (1-\alpha)({}^{0}t_i + {}_{0}t_i + 2t_i) $$

$$ x \geq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad i=1,\dots,m \qquad (3.28) $$

que coincide con (2.33) para $\alpha = 1$.

e) Indice de Adamo:

Fijado por el decisor un grado $k \in [0,1]$, el problema auxiliar que resulta es,

Max: cx

s.a.:

$$(1-k)\,{}^{0}a_i x + k a_i x \leq (1-k)\,{}^{0}b_i + k b_i + (1-\alpha)\left[(1-k)\,{}^{0}t_i + k t_i\right]$$

$$x \geq 0, \qquad \alpha \in (0,1], \qquad i=1,\dots,m \qquad (3.29)$$

f) Indice de Jain:

Con este Indice (3.20) se resuelve mediante el siguiente problema auxiliar

Max: cx

s.a.:

$${}^{0}a_i x({}^{0}b_i - b_i + (1-\alpha)({}^{0}t_i - t_i)) + ({}^{0}b_i + (1-\alpha)\,{}^{0}t_i)a_i x \leq$$

$$\leq ({}^{0}b_i + (1-\alpha)\,{}^{0}t_i)^2$$

$$x \geq 0, \qquad \alpha \in (0,1], \qquad i=1,\dots,m \qquad (3.30)$$

Nótese que al aparecer $\alpha \in (0,1]$ en todos los primeros miembros de cada restricción, la resolución de este problema auxiliar no será, en general, fácil, por lo que en lo sucesivo lo obviaremos (como el segundo Indice de Yager) por su poca operatividad.

g) Indice de Posibilidad:

El problema auxiliar que resulta para resolver (3.20) empleando el Indice de Posibilidad de dominancia de Dubois y Prade es,

Max: cx

s.a.:

$$a_i x \leqq b_i + (1-\alpha)t_i, \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$x \geqq 0, \qquad \alpha \in (0,1] \tag{3.31}$$

O bien, si se fija un $k \in [0,1]$ por el decisor,

Max: cx

s.a.:

$$k a_i x + (1-k)\,{}^{0}a_i x \leqq k b_i + (1-k)\,{}_{0}b_i + (1-\alpha)(k t_i + (1-k)\,{}_{0}t_i)$$

$$x \geqq 0, \qquad \alpha \in (0,1], \qquad i=1,\ldots,m \tag{3.32}$$

problema equivalente a (2.39) para $\alpha = 1$.

h) Indice de Necesidad:

Con este último Indice, el problema auxiliar que se obtiene para resolver (3.20) es el siguiente,

Max: cx

s.a.:

$$a_i x + {}_{0}a_i x \leqq b_i + {}_{0}b_i + (1-\alpha)(t_i + {}_{0}t_i)$$

$$x \geqq 0, \qquad \alpha \in (0,1], \qquad i=1,\ldots,m \tag{3.33}$$

Si el decisor fija un valor $k \in [0,1]$, e impone:

$$Necc(a_i x \leqq b_i + (1-\alpha)t_i) \geqq k$$

$$Necc(b_i + (1-\alpha)t_i \leqq a_i x) \leqq k$$

(3.20) puede resolverse de acuerdo con el siguiente problema auxiliar,

Max: cx

s.a.:

$$k a_i x + (1-k)_0 a_i x \leqq (1-k)(b_i + (1-\alpha)t_i) + k({}_0 b_i + (1-\alpha)_0 t_i)$$

$$(1-k) a_i x + k_0 a_i x \leqq k(b_i + (1-\alpha)t_i) + (1-k)({}_0 b_i + (1-\alpha)_0 t_i)$$

$$x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad i=1,...,m \qquad (3.34)$$

i) Relación intervalar de Tanaka et al.:

Si en (3.20) aplicamos la relación intervalar de Tanaka et al. (1984), tal problema se reduce al siguiente problema de P.L. paramétrica fijado previamente un k por el decisor, $k \in [0,1]$

Max: cx

s.a.:

$$k a_i x + (1-k)_0 a_i x \leqq k(b_i + (1-\alpha)t_i) + (1-k)({}_0 b_i + (1-\alpha)_0 t_i)$$

$$k a_i x + (1-k)^0 a_i x \leqq k(b_i + (1-\alpha)t_i) + (1-k)({}^0 b_i + (1-\alpha)^0 t_i)$$

$$x \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1], \quad i=1,...,m \qquad (3.35)$$

problema auxiliar que evidentemente cuando $\alpha = 1$ coincide con (2.22bis), aunque tiene el inconveniente de duplicar el número de restricciones del problema como en aquel caso.

A continuación aplicamos algunos de estos modelos al siguiente

EJEMPLO NUMERICO:

Consideremos el problema (2.43) en el que los números difusos que intervienen tienen las funciones de pertenencia dadas en (2.44) y en el cual se supone además que las restricciones son difusas, permitiéndose para la primera de ellas una violación de "alrededor de 10" y para la segunda de "alrededor de 5". Por tanto, $\tilde{t}_1 = \tilde{10}$ y $\tilde{t}_2 = \tilde{5}$.

Supongamos que

$$\tilde{10} = (10,8,13)$$
$$\tilde{5} = (5,2,6)$$

Entonces el problema es equivalente al siguiente problema en el que ya se ha omitido la difusividad en cada restricción, no en los coeficientes que intervienen en él,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad \tilde{15}x_1 + \tilde{34}x_2 \leq \tilde{800} + \tilde{10}(1-\alpha) \\ &\qquad \tilde{20}x_1 + \tilde{10}x_2 \leq \tilde{430} + \tilde{5}(1-\alpha) \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0, \quad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{3.36}$$

Los números difusos $\underset{\sim}{b}_i$, $i = 1,2$ de los segundos miembros de (3.36) son según (3.23)

$$\underset{\sim}{b}_1 = (800+10(1-\alpha), 750+8(1-\alpha), 850+13(1-\alpha))$$

$$\underset{\sim}{b}_2 = (430+5(1-\alpha), 360+2(1-\alpha), 480+6(1-\alpha))$$

1) Primer Indice de Yager:

El problema auxiliar para resolver (3.36) es el (3.26) que se traduce en nuestro ejemplo, en

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad 46x_1 + 101x_2 \leqq 2400 + 31(1 - \alpha) \\ &\qquad 59x_1 + 32x_2 \leqq 1270 + 13(1 - \alpha) \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{3.37}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.47+0.07(1-\alpha)$ $x_2^* = 18.53+0.27(1-\alpha)$ $y^* = 620.45+6.74(1-\alpha)$

solución que para $\alpha = 1$ coincide con la de (2.46).

2) Tercer Indice de Yager:

El problema auxiliar (3.28) para resolver (3.36) toma la forma,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad 61x_1 + 135x_2 \leqq 3200 + 41(1 - \alpha) \\ &\qquad 79x_1 + 42x_2 \leqq 1700 + 18(1 - \alpha) \\ &\qquad\qquad x_1, x_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1] \end{aligned} \tag{3.38}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.73+0.08(1-\alpha)$ $x_2^* = 18.40+0.26(1-\alpha)$ $y^* = 624.63+6.94(1-\alpha)$

cuando $\alpha = 1$ la solución coincide con la de (2.47).

3) Indice de Adamo:

Fijado $k = 0.7$, se obtiene como problema auxiliar para resolver (3.36),

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad 16.2x_1 + 34.6x_2 \leq 815 + 10.9(1-\alpha) \\
&\qquad 20.6x_1 + 11.5x_2 \leq 445 + 5.3(1-\alpha) \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.44+0.11(1-\alpha)$ $x_2^* = 18.19+0.26(1-\alpha)$ $y^* = 613.63+7.49(1-\alpha)$

y que a grado $\alpha = 1$ coincide trivialmente con la (2.48).

4) Indice de Posibilidad de Dubois y Prade:

Según (3.31), el problema auxiliar para hallar la solución de (3.36) es,

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad 15x_1 + 34x_2 \leq 800 + 10(1-\alpha) \\
&\qquad 20x_1 + 10x_2 \leq 430 + 5(1-\alpha) \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

cuya solución es,

$x_1^* = 12.49 + 0.13(1-\alpha)$ $\quad x_2^* = 18.01 + 0.23(1-\alpha)$ $\quad y^* = 636.60 + 7.54(1-\alpha)$

que evidentemente coincide con la dada en (2.50) cuando $\alpha = 1$.

Si el decisor fija un valor $k = 0.7$, entonces el problema auxiliar es el siguiente,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad 16.2x_1 + 34.6x_2 \leqq 785 + 9.4(1-\alpha) \\
&\qquad 20.6x_1 + 11.5x_2 \leqq 409 + 4.1(1-\alpha) \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

cuya solución es,

$x_1^* = 9.73 + 0.06(1-\alpha)$ $\quad x_2^* = 18.13 + 0.24(1-\alpha)$ $\quad y^* = 569.67 + 5.95(1-\alpha)$

5) Indice de Necesidad de Dubois y Prade:

Con este Indice, el problema auxiliar para resolver (3.36) es,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad 27x_1 + 65x_2 \leqq 1550 + 18(1-\alpha) \\
&\qquad 37x_1 + 17x_2 \leqq 790 + 7(1-\alpha) \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

cuya solución es,

$x_1^* = 12.84 + 0.07(1-\alpha)$ $x_2^* = 18.50 + 0.24(1-\alpha)$ $y^* = 654.35 + 6.33(1-\alpha)$

y si el decisor fija k = 0.7, según (3.34) el problema auxiliar es entonces,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\quad 14.1x_1 + 33.1x_2 \leqq 765 + 8.6(1-\alpha) \\
&\quad 12.9x_1 + 31.9x_2 \leqq 785 + 9.4(1-\alpha) \\
&\quad 19.1x_1 + 9.1x_2 \leqq 381 + 2.9(1-\alpha) \\
&\quad 17.9x_1 + 7.9x_2 \leqq 409 + 4.1(1-\alpha) \\
&\qquad x_1, x_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

cuya solución es,

$x_1^* = 11.21 + 0.03(1-\alpha)$ $x_2^* = 18.33 + 0.24(1-\alpha)$ $y^* = 610.33 + 5.28(1-\alpha)$

6) Relación intervalar de Tanaka et al.:

El problema auxiliar obtenido según (3.35) con grado k = 0.7 es,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } 25x_1 + 18x_2 \\
&\text{s.a.:} \\
&\quad 14.1x_1 + 33.1x_2 \leqq 785 + 18(1-\alpha) \\
&\quad 16.2x_1 + 34.6x_2 \leqq 815 + 23(1-\alpha) \\
&\quad 19.1x_1 + 9.1x_2 \leqq 409 + 7(1-\alpha) \\
&\quad 20.6x_1 + 11.5x_2 \leqq 445 + 11(1-\alpha) \\
&\qquad x_1, x_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

cuya solución es,

$x_1^*=11.44+0.22(1-\alpha)$ $x_2^*=18.19+0.56(1-\alpha)$ $y^*= 613.63+15.62(1-\alpha)$

Evidentemente cuando $\alpha = 1$ la solución coincide con la de (2.45).

Toda la diversidad de soluciones que hemos obtenido para un mismo problema de P.L.D. la pondremos de manifiesto a continuación en una aplicación destacada de estos problemas como es el caso de los Juegos Bipersonales de Suma Nula Difusos.

A este fin se dedica el próximo Capítulo en el cual, además, se hace un estudio exhaustivo del tipo de Juegos comentado.

CAPITULO IV

0. INTRODUCCION

Como se sabe, la Teoría de Juegos tuvo su primer desarrollo sistemático en 1944 (von Neumann y Morgenstern, 1944), si bien desde años antes ya se conocían algunos trabajos al respecto. La obra citada consideraba, sobre todo, aplicaciones económicas que trataban conflictos de intereses fácilmente cuantificables. Durante la Segunda Guerra Mundial, y después de ella, la Teoría de Juegos dió una consideración especial a los problemas militares, justificada por la importancia que el tratamiento matemático de los conceptos estratégicos tiene. A partir de entonces, se han hecho dominantes las aplicaciones de tipo económico, destacando las orientadas a la resolución de conflictos colectivos, de problemas de regateo, de repartos de reservas hidraúlicas, etc. Una buena muestra de ello puede encontrarse en Fraser y Hipel (1984).

Es bien conocido que la forma extensiva de un Juego n-personal dá, en orden lógico, los movimientos posibles del juego. Cada movimiento se le asigna bien a un jugador o al azar. En un movimiento personal, las posibles opciones del jugador y la información de que dispone han de hacerse explícitas. En un movimiento del azar, se supone especificada una distribución de probabilidad. Finalmente, en cada posición terminal del juego puede expresarse el pago $(p_1,...,p_n)$ que recibe cada jugador, es decir, se expresa un vector en el que p_i representa la ganancia del jugador i, $i = 1,...,n$.

Generalmente, la forma Extensiva se representa por un árbol con un vértice distinguido (el punto de partida o de comienzo del juego). Cada vértice representa una posición del juego y cada arco un movimiento. La información disponible se indica mediante los conjuntos de información: Dos posiciones pertenecen a un mismo conjunto de información si el mismo jugador ha de moverse en cada posición y no puede distinguir una de otra.

Una estrategia es una regla que dice a un jugador todo lo que debe hacer, es decir, qué alternativa elegir en cada conjunto de información. Si un jugador tiene k conjuntos de información, con j_k alternativas en cada uno de ellos, entonces, tiene un total de $j_1 x j_2 x ... x j_k$ estrategias para ese juego.

Si se designan las estrategias $x_1,x_2,...,x_n$ para los n jugadores, entonces, el pago del juego queda determinado, excepto por los movimientos del azar. Pero como las probabilidades en los movimientos de azar se suponen bien definidas, el pago esperado para cada jugador (para esta elección de estrategias) estará bien definido.

La forma Normal del juego es la función que asigna el vector de pagos esperado a cada n-upla de estrategias. Por tanto, la forma Normal del juego es una función que asigna a cada n-upla $(x_1,x_2,...,x_n)$ de estrategias, un vector $(p_1,p_2,...,p_n)$ de pagos. En este contexto, p_i es el pago que recibe el jugador i, si se usa la n-upla de estrategias dada.

Podemos decir que hasta aquí, hemos introducido los elementos básicos de la Teoría de Juegos. Sin embargo, en una situación de la vida real modelizable como un juego matematico, los datos que definen tal juego frecuentemente se establecen como: "Eligiendo esta opción el rendimiento será muy alto", "la ganancia se situa alrededor de x", "quizás haya más opciones", etc. Datos todos estos que, desde un punto de vista convencional, suelen ser simplificados perdiendo la esencia imprecisa que el planteamiento conlleva.

Sin embargo, si se dispusiera de herramientas matemáticas para poder modelizar tales situaciones, es indudable que tal imprecisión no tendría que omitirse, en tanto en cuanto, haciendolo, estaríamos modelizando otro problema, cuya posible solución no tendría que corresponderse con la del original.

En este cuarto Capítulo vamos a centrarnos en este tipo de situaciones en el contexto más particular de los Juegos Bipersonales de Suma Nula, es decir, en el caso en que n = 2 y siempre para cualquier pago (p_1, p_2) se tiene que $p_2 = -p_1$. Supondremos, además, que los conjuntos de estrategias, que notaremos, X para el jugador 1 e Y para el 2, son finitos, y que por tanto, la forma Normal del juego viene dada por una matriz de pagos, que notaremos M.

Comenzamos describiendo los diferentes tipos de Juegos Bipersonales de Suma Nula que podemos encontrar cuando se supone cierta imprecisión en su planteamiento en forma Normal (en la forma Extensiva pueden aparecer otros tipos de imprecisiones que no vamos a considerar en esta memoria y que será objeto de estudios posteriores).

A continuación hacemos una breve descripción del desarrollo histórico de la Metodología Matemática de los Juegos Difusos, destacando las diferentes resoluciones propuestas para los juegos que consideramos en esta memoria.

Posteriormente, proponemos un método de resolución para juegos con conjuntos de estrategias difusos.

Por último, se estudian los juegos con pagos difusos proponiéndose el empleo para su resolución de la P.L.D., usando los resultados obtenidos en el Capítulo III. Así, se obtienen diferentes problemas auxiliares, según el índice de comparación entre números difusos que se considere, que son formalmente idénticos y que, por tanto, permiten determinar una solución difusa, en lo que se refiere a las ganancias que pueden obtener los jugadores, que recoge la imprecisión que se suponía en el planteamiemto del juego inicial.

El Capítulo termina con algunos ejemplos numéricos que ilustran la metodología desarrollada al efecto.

1. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA NULA DIFUSOS

Como ya se sabe, un Juego Bipersonal de Suma Nula (J.B.S.N.) puede representarse mediante una tripleta G(X,Y,M) en la que X e Y son los conjuntos de estrategias de los Jugadores 1 y 2, respectivamente, y M la matriz de pagos.

Consideraremos que un J.B.S.N. es Difuso cuando es un juego G(X,Y,M) en el que exista en algunos o en todos sus elementos algún tipo de imprecisión no aleatoria o vaguedad, que podrá venir dada mediante requerimientos o información adicional, por parte de los jugadores.

En este sentido, consideraremos los siguientes tipos particulares de J.B.S.N. Difusos, a los que, por comodidad, nos referiremos como Juegos Difusos (J.D.).

1.1. Juego en el que un conjunto de estrategias es difuso.

Un juego de estas características lo representaremos por $G(\underset{\sim}{X},Y,M)$ o $G(X,\underset{\sim}{Y},M)$ atendiendo a cual de los conjuntos de estrategias sea difuso.

La situación que contempla este tipo de juegos es la siguiente:

Supongamos un decisor que desea ir a un buen cine de su ciudad, siendo el conjunto de dichos cines

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

La adecuación de la estrategia o alternativa x_i al requerimiento de ser un buen cine, el decisor la establece como $\alpha_i \in [0,1]$ de forma que el conjunto de sus estrategias posibles puede definirse como el subconjunto difuso

$$\underset{\sim}{X} = \{x_1/\alpha_1, x_2/\alpha_2, \ldots, x_n/\alpha_n\}$$

No entramos a discutir detalles sobre el conjunto de estrategias del otro jugador (que en este caso podría ser la naturaleza), ni sobre la función de pagos, por tratarse sólamente de un ejemplo ilustrativo.

Así pues, un J.D. $G(\underset{\sim}{X}, Y, M)$ se caracteriza por un conjunto difuso de estrategias para el jugador 1, que notaremos abreviadamente por

$$\underset{\sim}{X} = \{(x_i, \mu_1(x_i)) \ , \quad i = 1, \ldots, n\}$$

siendo μ_1 la función de pertenencia definida por el jugador 1

$$\mu_1 \ : \ X \rightarrow [0,1] \ .$$

Un conjunto de estrategias convencional para el jugador 2 y una función de pagos M no difusa

$$M : X x Y \rightarrow \mathbb{R}$$

De forma análoga, si el juego difuso es $G(X, \underset{\sim}{Y}, M)$ el conjunto de estrategias difuso es el del jugador 2, y lo notaremos

$$\underset{\sim}{Y} = \{(y_j, \mu_2(y_j)) \ , \quad j = 1,\ldots,m\}$$

con función de pertenencia

$$\mu_2 : Y \rightarrow [0,1]$$

y los otros elementos, X y M, definidos de forma convencional.

1.2. Juego en el que los dos conjuntos de estrategias son difusos.

En el mismo sentido del apartado anterior, se pueden considerar casos en el que ambos conjuntos de estrategias sean difusos.

Consideremos en el ejemplo anterior que el jugador 2 también desea ir al cine siempre y cuando no esté demasiado lejos.

La adecuación de cada alternativa (los cines de la ciudad) al requerimiento de no estar demasiado lejos, la establece el jugador 2, como $\alpha_i \in [0,1]$ de forma que el conjunto de estrategias de dicho jugador es también un subconjunto difuso.

La función de pago se establece de forma convencional. Un juego de estas carateristicas lo notaremos por $G(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},M)$.

1.3. Juego con recompensas difusas.

Es usual oir postulados como: "alrededor de 50", "no mucho más de 23", etc, en el establecimiento de la matriz de recompensas de un juego o, en general, de cualquier situación de tipo decisorio.

Estos establecimientos normalmente se modelizan suponiendo que el pago es 50, 24, etc, respectivamente, lo que, indudablemente, repercute en la adecuación del modelo que se propone al problema original.

Cuando en el planteamiento de algún juego existan postulados de esta naturaleza sobre las recompensas que puedan obtener los respectivos jugadores, diremos que se trata de un juego con recompensas difusas y lo representaremos (caso de ser los conjuntos de estrategias no difusos) por $G(X,Y,\underset{\sim}{M})$.

Cualquier combinación de estos tipos de J.B.S.N. (en su forma Normal) Difusos, diremos que es también un Juego Difuso.

Desde otro punto de vista, un tipo diferente de imprecisión que puede aparecer de modo natural en un J.B.S.N. es la debida al hecho de no reconocer el principio de la ganancia máxima segura como el único principio que determina la elección de una estrategia. Es evidente, que una regla de conducta normal en el comportamiento de los seres humanos al realizar elecciones es escoger aquella alternativa que proporcione el "mejor resultado".

En esta filosofía, un jugador puede no tener definida una relación de preferencia clásica entre los resultados del juego sino, más bien, una relación de preferencia difusa.

Este planteamiento no lo estudiaremos en el desarrollo de esta memoria, por alejarse de los objetivos que en ella nos hemos marcado. Sin embargo, queda para futuras investigaciones.

A continuación, hacemos un breve resumen histórico de las aportaciones más importantes que se conocen en la literatura sobre el tema de Juegos Difusos.

2. DESARROLLO HISTORICO DE LA METODOLOGIA MATEMATICA DE LOS JUEGOS DIFUSOS

Puesto que la Teoría Matemática de los Juegos está enmarcada dentro del ámbito de la Teoría de la Decisión, podemos considerar que el trabajo de Bellman y Zadeh (1970) sobre "Decisión en ambiente difuso" constituyó el punto de partida o el embrión que dió lugar al nacimiento de la Metodología Matemática de los

Juegos Difusos.

Los primeros trabajos en el campo específico de los J.D. surgen con el estudio efectuado por Aubin (1974, 1976) sobre Juegos n-personales con coaliciones difusas entre los jugadores.

Otras situaciones modelizables como J.D., en un contexto económico, fueron consideradas por Féron (1976).

Blaquiere (1976), en la misma línea de trabajo de Aubin, introduce la noción de optimalidad difusa con respecto al conjunto de jugadores.

Regade (1976) estudió los Juegos Bipersonales, cuando las preferencias de los jugadores son difusas.

Nurmi (1976) estudió algunos aspectos de los juegos en relación a los autómatas finitos.

En 1977 Orlovsky estudió los Juegos Bipersonales con conjuntos de estrategias difusos para los dos jugadores.

Un concepto singular de Juego Bipersonal Difuso fué propuesto por Butnariu (1978), al cual nos referiremos más adelante un poco más detalladamente.

Dubois y Prade (1980) plantearon un J.B.S.N. con pagos difusos y su posible método de resolución aunque sin entrar en él.

Billot (1985) ha contribuido a la Metodología de los J.D. con el estudio de los J.B.S.N. con conjuntos de estrategias compactos y función de pagos continua, en donde la relación de preferencia para los jugadores es difusa.

Puesto que en esta memoria abordamos sólo el estudio de los J.B.S.N. Difusos, con conjuntos de estrategias finitos, no entraremos en más detalles sobre los J.D. reseñados, que se alejan demasiado de nuestro objetivo, y destacamos los trabajos sobre J.D. (finitos) más estrechamente relacionados con los que aquí estudiamos.

A continuación los desarrollamos, aunque brevemente.

2.1. Juegos Bipersonales en donde las preferencias de los jugadores son difusas. (Regade, 1976; Dubois y Prade, 1980).

Sea un Juego Bipersonal en forma Normal, donde X e Y son los conjuntos de estrategias de los jugadores y donde la relación de preferencia es difusa.

Cada uno de los jugadores tiene definida una relación de preferencia difusa M_i sobre QxQ, siendo $Q = X x Y$

$$M_i, \ i = 1,2 \qquad \mu_{M_i}((x,y),(x',y')) \in [0,1]$$

Un par de estrategias (x^*, y^*) es considerada por el jugador 1 λ-racional si

$$\forall x \in X, \qquad \mu_{M_1}[(x,y^*),(x^*,y^*)] \geq \lambda$$

El conjunto de todos los pares λ-racionales es notado por $R_{1,\lambda}$. Similarmente, se define el conjunto $R_{2,\mu}$ de estrategias μ-racionales para el jugador 2.

Puesto que un par de estrategias racional para ambos jugadores nos conduce al equilibrio del juego, $R_{1,\lambda} \cap R_{2,\mu}$ puede considerarse como el conjunto de los pares en λ-μ-equilibrio.

2.2. Juegos Bipersonales en los que los conjuntos de estrategias de ambos jugadores son difusos. (Orlovsky, 1977).

El Juego Bipersonal que estudia Orlovsky consta de los siguientes elementos. Los conjuntos de estrategias de ambos jugadores son difusos en X e Y, respectivamente

$$\underset{\sim}{X} = \{(x_i, \mu_{\underset{\sim}{X}}(x_i))\} \quad \underset{\sim}{Y} = \{(y_j, \mu_{\underset{\sim}{Y}}(y_j))\}, \ i=1,\dots,n, \ j=1,\dots,m$$

Las funciones de pagos son no difusas

$$M_i : X x Y \rightarrow \mathbb{R}, \qquad i=1,2$$

El jugador 1 maximiza su pago $M_1(x,y)$ sobre su conjunto de estrategias $\underset{\sim}{X}$ para cada $y \in Y$ supuestamente elegida por el otro jugador.

El jugador 1 define un conjunto difuso en XxY con función de pertenencia

$$\mu_1(x,y) = \begin{cases} \mu_{\underset{\sim}{X}}(x) & \text{si } x \in \bigcup\limits_{\alpha>0} \mathcal{N}(\alpha,y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{N}(\alpha,y) = \{y \in Y / M_1(x,y) = \sup\limits_{x' \in X_\alpha} M_1(x',y)\}$

siendo $X_\alpha = \{x \in X / \mu_{\underset{\sim}{X}}(x) \geqq \alpha\}$.

para todo $\alpha \in [0,1]$ tal que $X_\alpha \neq \emptyset$.

De forma análoga el jugador 2 define un conjunto difuso sobre XxY de función de pertenencia

$$\mu_2(x,y) = \begin{cases} \mu_{\underset{\sim}{Y}}(y) & \text{si } y \in \bigcup\limits_{\beta>0} \mathcal{M}(\beta,y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{4.2}$$

donde $\mathcal{M}(\beta,y) = \{x \in X / M_2(x,y) = \sup\limits_{y' \in Y_\beta} M_2(x,y')\}$

siendo $Y_\beta = \{y \in Y / \mu_{\underset{\sim}{Y}}(y) \geqq \beta\}$.

para todo $\beta \in [0,1]$ tal que $Y_\beta \neq \emptyset$.

La solución de equlibrio difusa es entonces el conjunto difuso en XxY con función de pertenencia

$$\mu_e(x,y) = \min[\mu_1(x,y), \mu_2(x,y)] \tag{4.3}$$

El pago difuso $\underset{\sim}{M}_1$, del jugador 1, correspondiente a la solución de equilibrio difusa es

$$\mu_{M_1}(z) = \sup_{(x,y) \in M_1^{-1}(z)} \mu_e(x,y)$$

donde $M_1^{-1}(z) = \{(x,y) \in X x Y / M_1(x,y) = z\}$

El pago difuso M_2 del jugador 2 se calcula de forma análoga.

2.3. **Un concepto** de **Juego Difuso.** (Butnariu, 1978).

La situación que este autor considera es la siguiente.

Supongamos un intercambio de información entre dos personas (jugador 1 y 2) tales que el jugador k ($k \in \{1,2\}$) es un inversor que conoce el conjunto $\Sigma_k = \{\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \dots, \sigma_{n_k}^{(k)}\}$ $n_k \in N$, donde $\sigma_i^{(k)}$ significa un objetivo (social, político, económico, etc) tal que una inversión de k debe hacerse para que $\sigma_i^{(k)}$ pueda realizarse legalmente. Supongamos que cualquier inversión se mide en términos monetarios. Si el jugador k decide invertir w_i^k en $\sigma_i^{(k)}$ se obtiene un n_k-vector $w^k = (w_1^k, \dots, w_{n_k}^k)$ al que se le llama la composición estratégica de k.

Se supone que se conocen las posibilidades globales financiarias de cualquier jugador, es decir, se conoce un conjunto no ambiguo $Y_k \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$ en el que $w^k \in Y_k$ si, y sólo si, w^k es legal y realizable.

Desde este planteamiento en el que no existe ningún tipo de imprecisión, el autor atendiendo a posturas éticas y morales consigue construir lo que él denomina un conjunto difuso de acciones posibles para los jugadores.

Puesto que para un problema no difuso en este trabajo se propone una solución difusa y el objetivo de la presente memoria es el de proponer soluciones difusas para problemas de esta misma naturaleza, no nos referiremos más al mismo, aunque lo hayamos recogido aquí por motivos ilustrativos.

2.4. Juegos Bipersonales de Suma Nula con pagos difusos. (Dubois y Prade, 1980).

Se considera $\underset{\sim}{M}(x_i,y_j)$, un conjunto difuso en $\mathbb{R}$, que representa el pago difuso que recibe el jugador 1, cuando elige $x_i \in X$ y el jugador 2 elige $y_j \in Y$.

El jugador 1 desea maximizar $\underset{\sim}{M}(x_i,y_j)$ y el jugador 2 maximizar $-\underset{\sim}{M}(x_i,y_j)$.

Independientemente de lo que haga el jugador 2, el jugador 1 puede asegurarse como mínimo

$$\underset{x_i \in X}{\widetilde{\mathrm{Max}}}\ \underset{y_j \in Y}{\widetilde{\mathrm{Min}}}\ \underset{\sim}{M}(x_i,y_j) = \underset{\sim}{v}_1 \qquad (4.4)$$

Similarmente, el jugador 2, puede asegurarse el

$$\underset{y_j \in Y}{\widetilde{\mathrm{Min}}}\ \underset{x_i \in X}{\widetilde{\mathrm{Max}}}\ \underset{\sim}{M}(x_i,y_j) = \underset{\sim}{v}_2 \qquad (4.5)$$

$\underset{\sim}{M}(x_i,y_j)$, $\underset{\sim}{v}_1$, $\underset{\sim}{v}_2$ pueden verse como una distribución de posibilidad sobre el valor del pago.

La posibilidad de existencia de un punto de silla vendrá dado por

$$hgt(\underset{\sim}{v}_1 \cap \underset{\sim}{v}_2)$$

Naturalemente, al no estar bien definidas las operaciones entre números difusos que se proponen en (4.4) y (4.5), no se puede avanzar más en la resolución del juego que aquí se propone, aún admitiendo el razonamiento expuesto sobre el sentido que $\underset{\sim}{v}_1$ y $\underset{\sim}{v}_2$ tienen, como niveles de seguridad para los jugadores 1 y 2.

Nuestro propósito en este Capítulo es el estudio de los J.B.S.N. Difusos en su forma Normal , que, como veíamos en el apartado 1, podemos considerar de tres tipos distintos (salvo combinación de ellos) dependiendo de en cuál de sus elementos aparece la difusividad.

Comenzamos estudiando los J.B.S.N. con conjuntos de estrategias difusos, haciendo un comentario sobre la resolución propuesta por Orlovsky aplicada a estos juegos y proponiendo un método de resolución, cuya solución contiene a la del citado autor y coincide con ella para aquellos juegos en cuya matriz de pagos exista un punto de silla. No nos detendremos en el caso de juegos en el que solo sea difuso un conjunto de estrategias, ya que su planteamiento y resolución están englobados en el anteriormente citado.

Posteriormente estudiamos los juegos con pagos difusos y proponemos el empleo de la P.L.D. para su resolución, que exige el uso de los resultados obtenidos en el tercer Capítulo.

3. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA NULA CON CONJUNTOS DE ESTRATEGIAS DIFUSOS

La situación que consideramos en este Apartado puede describirse formalmente como sigue.

Supongamos un J.B.S.N. en el que X e Y son los conjuntos de estrategias puras para los jugadores 1 y 2 respectivamente, de los que se consideran dos subconjuntos difusos $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$ (cuya justificación ya explicamos anteriormente) de funciones de pertenencia respectivas

$$\mu_1 : X \rightarrow [0,1]$$
$$\mu_2 : Y \rightarrow [0,1]$$

Sobre estas funciones de pertenencia no hacemos ninguna hipótesis salvo la de su existencia.

Se supone que sobre XxY hay definida una función de pago

$$M_i : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, 2$$

de forma que,

$$M_2(x,y) = - M_1(x,y), \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

es decir, se trata de una matriz de recompensas convencional en los J.B.S.N., y que notaremos $M(.,.) = M_1(.,.) = - M_2(.,.)$.

El método que se propne en Orlovsky (1977) da como solución difusa de este juego la que se deduce de (4.3). Dicha solución es un conjunto difuso sobre $X \times Y$ por lo que cada par de estrategias puras con cierto grado forma parte de la solución difusa del juego.

Particularmente, si supusiéramos que,

$$\forall x \in X, \quad \mu_1(x) = 1$$
$$\forall y \in Y, \quad \mu_2(y) = 1$$

o lo que es lo mismo, consideramos un juego claśico, el método que comentamos no proporciona solución alguna, salvo que la matriz de pagos tenga un punto de silla, circunstancia que, naturalmente, no es la más general.

En efecto, consideremos el juego clásico dado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

entonces, según (4.1) y (4.2) se obtiene

$$\mu_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mu_2(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde resulta

$$\mu_e(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

solución de equilibrio que se aparta notablemente de la que correspondería al juego (4.6).

Ahora bien, para este tipo de juegos, con base en el Teorema de Representación de Subconjuntos Difusos, el juego difuso $G(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},M)$ se puede expresar como,

$$G(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},M) = \sum_{\alpha} \alpha\, G_{\alpha} \qquad (4.7)$$

donde $\forall\ \alpha \varepsilon [0,1]$

$X_{\alpha} = \{ x \ \varepsilon\ X / \ \mu_1(x) \geq \alpha \}$, $\qquad Y_{\alpha} = \{ y \ \varepsilon\ Y / \ \mu_2(y) \geq \alpha \}$

y consecuentemente,

$$G_{\alpha} = G(X_{\alpha}, Y_{\alpha}, M_{\alpha})$$

verificando trivialmente que $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \varepsilon [0,1]$

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \iff G_{\alpha_1} \subseteq G_{\alpha_2}$$

y entendiendo en cada caso definida M_{α} como la restricción a $X_{\alpha} x Y_{\alpha}$ de M.

Naturalmente, ahora la solución de cada juego clásico G_{α} podrá obtenerse mediante técnicas convencionales, obteniendo así un conjunto difuso de soluciones que será el que consideraremos como solución difusa del juego difuso $G(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},M)$.

Como por la construcción de la solución difusa que se puede obtener, es posible que, al ir encajados los juegos, una misma solución sea optimal para distintos grados, consideraremos que un par de estrategias es optimal a grado α, si α es el mayor de los grados de los G_α en donde ese par es de equilibrio.

Nótese que el método de resolución que se propone para este tipo de juegos, al basarse fundamentalmente en técnicas de resolución clásicas, permitirá obtener soluciones que estén constituidas por estrategias aleatorizadas, aspecto que no está contemplado en el enfoque de Orlovsky.

Por otra parte, dada la naturaleza de $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$, está claro que tendremos un número finito de juegos G_α, $\alpha \in [0,1]$.

Sea este conjunto de juegos

$$\{G_{\alpha_i} / \ i \in I, \ \alpha_i \in [0,1]\}$$

Para cada G_{α_i}, sea S_{α_i} el conjunto de las soluciones de ese juego. Nótese que

$$S_{\alpha_i} \subset S_1 x S_2, \qquad i \in I$$

donde S_i, $i = 1, 2$ son los conjuntos de estrategias aleatorizadas de cada jugador. Entonces, si

$$\forall (x,y) \in S_1 x S_2 \quad \mu(x,y) = \operatorname*{Sup}_{\alpha} \{(x,y)/ \text{ resuelven } G_\alpha\}$$

podemos escribir (4.8)

$$S_{\alpha_i} = \{(x,y) \in S_1 x S_2 / \alpha_{i-1} < \mu(x,y) \leq \alpha_i\}, \qquad i \in I$$

con lo cual, y en base al Teorema de Representación, obtenemos un conjunto difuso de soluciones correspondiente al juego difuso $G(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},M)$ definido por,

$$\underset{\sim}{S} = \sum_{\alpha_i} \alpha_i \, S_{\alpha_i}, \qquad i \in I \qquad (4.9)$$

es decir, obtenemos un conjunto difuso de soluciones

$$\underset{\sim}{S} \in \mathcal{F}(S_1 x S_2)$$

Por otra parte, el valor del juego $G(\underset{\sim}{X},\underset{\sim}{Y},M)$ nos queda definido, de forma inmediata, a partir de los respectivos valores de los juegos G_{α_i}, como el subconjunto difuso

$$\underset{\sim}{v} = \{ v_i/\alpha_i , \ i \in I\}$$

donde v_i es el valor del juego G_{α_i}, $i \in I$.

Nótese que por la forma de obtener los conjuntos S_{α_i}, no tiene sentido calcular α-cortes de $\underset{\sim}{v}$, sino más bien, conjuntos clásicos de nivel construidos de acuerdo con los S_{α_i}, $i \in I$; de cualquier forma, $\underset{\sim}{v}$ queda definido como un subconjunto difuso en el conjunto de los valores del juego y, por tanto, está de acuerdo con el principio de Goguen (Goguen, 1967).

Cabe esperar que si sobre X e Y tuvieramos definida una función de pertenencia continua (si tuviera sentido), $\underset{\sim}{v}$ tendría asociada también una función de pertenencia continua quedando descrito entonces como un número difuso en el sentido de Dubois y Prade, y también de acuerdo con el Principio de Goguen.

A continuación ilustramos el método descrito con el siguiente, EJEMPLO:

Sean $\underset{\sim}{X} = \{x_1/0.5, x_2/0.2\}$ e $\underset{\sim}{Y} = \{y_1/0.3, y_2/0.7\}$ los conjuntos difusos de estrategias puras de los jugadores 1 y 2 respectivamente. Supongamos una matriz de pagos como la de (4.6). Entonces,

$\{G_{\alpha_i} / i \in I, \alpha_i \in [0,1]\} = \{G_{0.2}, G_{0.3}, G_{0.5}, G_{0.7} = \emptyset\}$

donde los juegos G_{α_i} se han obtenido a partir de los α-cortes de $\underset{\sim}{X}$ e $\underset{\sim}{Y}$, siendo sus soluciones

$$G_{0.2} \rightarrow (x^*, y^*) \in S_1 x S_2, \quad x^* = (3/4, 1/4), \quad y^* = (1/2, 1/2)$$

$$G_{0.3} \rightarrow (x_1, y_1) \in S_1 x S_2,$$

$$G_{0.5} \rightarrow (x_1, y_2) \in S_1 x S_2,$$

Entonces, de acuerdo con (4.8),

$\mu(x^*, y^*) = 0.2 \qquad \mu(x_1, y_1) = 0.3 \qquad \mu(x_1, y_2) = 0.5$

y para cualquier $(\bar{x}, \bar{y}) \in S_1 x S_2 \Longrightarrow \mu(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Por tanto,

$$S_{0.2} = \{(x^*, y^*) / 0 < \mu(x^*, y^*) \leqq 0.2\}$$

$$S_{0.3} = \{(x_1, y_1) / 0.2 < \mu(x_1, y_1) \leqq 0.3\}$$

$$S_{0.5} = \{(x_1, y_2) / 0.3 < \mu(x_1, y_2) \leqq 0.5\}$$

quedando dada la solución difusa del juego mediante (4.9). Hay que hacer notar que la solución difusa que se propone tiene como característica, que el jugador sabe la estrategia que debe seguir hasta un grado máximo $\alpha_i \in [0,1]$, cambiandole dicha estrategia a partir de ese valor y hasta otro grado α_{i+1}, mientras que con la solución que se propone en Orlovsky (1977) cada solución (siempre en estrategias puras) es válida desde el grado para la que se obtiene en adelante, lo que puede llevar a cierta incongruencia como ponemos de manifiesto a continuación.

En efecto, resolviendo el mismo juego anterior con el enfoque de Orlovsky, se obtiene como conjunto difuso de soluciones

$$\underset{\sim}{S} = \{(x_1, y_1)/0.3, (x_1, y_2)/0.5\}$$

del que se deduce, ya que $\mu(x_1, y_1) < \mu(x_1, y_2)$, que (x_1, y_2), por las propiedades de los α-cortes, es la mejor estrategia a grado $\alpha \leqq 0.5$, lo que con la solución que proponemos con nuestro enfoque, no se da, puesto que los S_{α_i} que intervienen en (4.9) no son α-cortes convencionales, pero por la finitud de I y la definición de S_{α_i} permite una representación de $\underset{\sim}{S}$ formalmente idéntica a la que proporciona el Teorema de Representación, pero esencialmente distinta.

También hay que destacar que el método que hemos presentado, reproduce las soluciones clásicas del juego si éste no tiene ningún tipo de difusividad ($\mu_1(x) = \mu_2(y) = 1$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$).

En el ejemplo que hemos analizado, esta solución sería "evidentemente" la (x^*, y^*).

4. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA NULA CON RECOMPENSAS DIFUSAS

El caso que consideramos en este Apartado es el de dos jugadores que, teniendo perfectamente definidos sus conjuntos de estrategias, tienen sin embargo, cierta imprecisión sobre sus recompensas.

Es usual en problemas de la vida real que cuando a algún decisor se le pregunta cuál es la recompensa que tiene asociada a alguna de sus posibles políticas, éste conteste vagamente, en el sentido de fijar valores aproximados para dicha recompensa. Desde este punto de vista, hay que considerar que los juegos $G(X,Y,\underset{\sim}{M})$ son de los más frecuentes en modelos reales.

Como ya dijimos anteriormente, por $\underset{\sim}{M}$ entendenos una matriz de recompensas en la que al menos un elemento está caracterizado imprecisamente.

Como convenio, igual que en el caso clásico, supondremos los pagos referidos al primer jugador de forma que si $\underset{\sim}{a}_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es el pago asociado a las estrategias (i,j) para el primer jugador, supondremos que $-\underset{\sim}{a}_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ es la recompensa del segundo jugador, resolviendo en consecuencia los juegos para el primer jugador, es decir: suponemos que las recompensas están dadas en términos de "ganancias" para el primer jugador, mientras que, para el segundo, se miden en "pérdidas". En este sentido, para el segundo jugador, es en el que hay que entender que $-\underset{\sim}{a}_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

También supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\underset{\sim}{a}_{ij} > 0$ para todo $i = 1,..,m$ y $j = 1,...,n$.

En estas condiciones, sean

$$\mu_{ij} : \mathbb{R} \to [0,1], \quad i=1,...,m, \quad j=1,...,n \qquad (4.10)$$

las funciones de pertenencia de las recompensas del primer jugador. Estas mismas funciones expresan la difusividad de las pérdidas del segundo jugador.

Siguiendo un enfoque paralelo al caso clásico, el primer jugador intentará encontrar una estrategia $(x_1,x_2,...,x_m)$ tal que, al jugarla, le permita garantizarse al menos un pago v. Pero, ahora, debido a las imprecisiones con las que conoce sus propias recompensas, este jugador no puede exigir que dicho valor v sea, como en el caso convencional, un nivel de seguridad fijo sino que, puede permitir que, en cierta medida, se obtenga un valor un poco inferior a v, es decir, el primer jugador puede permitir violaciones en el cumplimiento de las restricciones

$$\sum_{i=1}^{m} \underset{\sim}{a}_{ij} x_i \geqq v, \quad j = 1,...,n \qquad (4.11)$$

que, consecuentemente, podemos reescribir,

$$\sum_{i=1}^{m} \underset{\sim}{a}_{ij} x_i \gtrsim v, \quad j = 1,...,n \qquad (4.12)$$

con un sentido ya explicado suficientemente.

Por tanto, la solución del juego que tenemos planteado para el primer jugador, la proporcionará la solución del problema de P.L.D.,

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } v \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} \tilde{a}_{ij} x_i \gtrsim v, \quad j=1,\dots,n \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\
&\qquad x_i \geqq 0, \quad i=1,\dots,m
\end{aligned} \tag{4.13}$$

en el que tenemos una doble difusividad. De una parte la debida a la naturaleza vaga de las recompensas $\tilde{a}_{ij} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, y de otra la ocasionada al permitir violaciones en el cumplimiento de las restricciones (4.11).

Con un razonamiento totalmente análogo, la estrategia que le proporciona la forma optimal de jugar al segundo jugador, es la solución del problema de P.L.D. siguiente,

$$\begin{aligned}
&\text{Min: } w \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} y_j \lesssim w, \quad i=1,\dots,m \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\
&\qquad y_j \geqq 0, \quad j=1,\dots,n
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Como v y w podemos considerarlos distintos de cero, tomando

$$u_i = x_i/v, \quad i = 1,\dots,m$$

$$s_j = y_j/w, \quad j = 1,\dots,n$$

como $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$, nos queda,

$$
\begin{aligned}
&\text{Min: } u_1 + u_2 + \dots + u_m \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} \underset{\sim}{a}_{ij} u_i \gtrsim 1, \quad j=1,\dots,n \\
&\qquad\qquad u_i \geqq 0, \quad i=1,\dots,m
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

y,

$$
\begin{aligned}
&\text{Max: } s_1 + s_2 + \dots + s_n \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_{ij} s_j \lesssim 1, \quad i=1,\dots,m \\
&\qquad\qquad s_j \geqq 0, \quad j=1,\dots,n
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

respectivamente de (4.13) y (4.14).

Ambos problemas, (4.15) y (4.16), son casos particulares del modelo (3.1) ya que, aquí, cada término de la derecha no es difuso, como allí se suponía. Entonces, con el mismo enfoque de resolución que usamos para (3.1), suponiendo que el primer jugador tolera violaciones $\underset{\sim}{p}_j \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $j = 1,\dots,n$ en el cumplimiento de las restricciones, y que el segundo jugador tolera violaciones $\underset{\sim}{q}_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, de acuerdo con (3.20), podemos reescribir (4.15) y (4.16) como,

$$
\begin{aligned}
&\text{Min: } u_1 + u_2 + \dots + u_m \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad \sum_{i=1}^{m} \underset{\sim}{a}_{ij} u_i \geqq 1 - \underset{\sim}{p}_j(1-\alpha), \quad j=1,\dots,n \\
&\qquad\qquad u_i \geqq 0, \quad i=1,\dots,m \\
&\qquad\qquad \alpha \in (0,1]
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

y,

$$\text{Max: } s_1 + s_2 + \ldots + s_n$$

$$\text{s.a.:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underset{\sim}{a}_{ij} s_j \leqq 1 + \underset{\sim}{q}_i(1-\alpha), \quad i=1,\ldots,m \qquad (4.18)$$

$$s_j \geqq 0, \quad j=1,\ldots,n$$

$$\alpha \in (0,1]$$

donde a_{ij}, p_j, $q_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$.

Supongamos sin pérdida de generalidad, por comodidad, que todos los números difusos que intervienen en (4.17) y (4.18) son triangulares. Particularmente, sean

$$\underset{\sim}{a}_{ij} = (a_{ij}, \underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}), \quad i = 1,\ldots,m, \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\underset{\sim}{p}_j = (p_j, \underline{p}_j, \overline{p}_j), \quad j = 1,\ldots,n$$

$$\underset{\sim}{q}_i = (q_i, \underline{q}_i, \overline{q}_i), \quad j = 1,\ldots,n$$

Es evidente que los miembros de la derecha de (4.17) y (4.18) tienen como funciones de pertenencia, $\alpha \in (0,1]$

$$1-\underset{\sim}{p}_j(1-\alpha) = (1-p_j(1-\alpha), \overline{p}_j(1-\alpha), \underline{p}_j(1-\alpha)), \quad j=1,\ldots,n$$

$$1+\underset{\sim}{q}_i(1-\alpha) = (1+q_i(1-\alpha), \underline{q}_i(1-\alpha), \overline{q}_i(1-\alpha)), \quad i=1,\ldots,m$$

o en función de sus extremos

$$1-\underset{\sim}{p}_j(1-\alpha)=(1-p_j(1-\alpha), 1-{}^0p_j(1-\alpha), 1-{}_0p_j(1-\alpha)), \quad j=1,\ldots,n$$

$$1+\underset{\sim}{q}_i(1-\alpha)=(1+q_i(1-\alpha), 1+{}_0q_i(1-\alpha), 1+{}^0q_i(1-\alpha)), \quad i=1,\ldots,m$$

lo que, ahora, permite operar con comodidad para obtener los distintos problema auxiliares que pueden resolver (4.17) y (4.18) según vimos en el anterior Capítulo.

A continuación nos dedicamos a dar las expresiones que estos problema auxiliares van a tener para el primer y segundo jugador para, a partir de ellas, sacar conclusiones.

a) Primer Indice de Yager.

En este caso, de acuerdo con (3.26), (4.17) y (4.18) llevan a los siguientes problema auxiliares,

$$\text{Min: } \sum_{i=1}^{m} u_i$$

s.a.:

$$({}^{0}a_j + {}_{0}a_j + a_j)u \geqq 3 - ({}^{0}p_j + {}_{0}p_j + p_j)(1-\alpha) \qquad (4.19)$$

$$u \geqq 0, \quad j=1,\ldots,n, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$\text{Max: } \sum_{j=1}^{n} s_j$$

s.a.:

$$({}^{0}a_i + {}_{0}a_i + a_i)s \leqq 3 + ({}^{0}q_i + {}_{0}q_i + q_i)(1-\alpha) \qquad (4.20)$$

$$s \geqq 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad \alpha \in (0,1]$$

de los que se obtendrían las respectivas soluciones para el primer y segundo jugador.

b) Tercer Indice de Yager.

Con este Indice los problemas auxiliares, de los que se pueden obtener las respectivas soluciones para el primer y segundo jugador, toman las formas (de acuerdo con (3.28)) siguientes,

$$\text{Min: } \sum_{i=1}^{m} u_i$$

s.a.:

$$({}^{0}a_j + {}_{0}a_j + 2a_j)u \geqq 4 - ({}^{0}p_j + {}_{0}p_j + 2p_j)(1-\alpha) \qquad (4.21)$$

$$u \geqq 0, \quad j=1,\ldots,n, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$\text{Max: } \sum_{j=1}^{n} s_j$$

s.a.:

$$({}^{0}a_i + {}_{0}a_i + 2a_i)s \leqq 4 + ({}^{0}q_i + {}_{0}q_i + 2q_i)(1-\alpha) \qquad (4.22)$$

$$s \geqq 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad \alpha \in (0,1]$$

c) Indice de Adamo.

Los problemas auxiliares, de los que se deducen las estrategias optimales para ambos jugadores, tienen las expresiones, (de acuerdo con (3.29)),

$$\text{Min: } \sum_{i=1}^{m} u_i$$

s.a.:

$$((1-k)^{0}a_j + ka_j)u \geqq 1 - ((1-k)_{0}p_j + kp_j)(1-\alpha) \qquad (4.23)$$

$$u \geqq 0, \quad j=1,\ldots,n, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$\text{Max: } \sum_{j=1}^{n} s_j$$

s.a.:

$$((1-k)^{0}a_i + ka_i)s \leqq 1 + ((1-k)^{0}q_i + kq_i)(1-\alpha) \qquad (4.24)$$

$$s \geqq 0, \quad i=1,\ldots,m, \quad \alpha \in (0,1]$$

donde, como ya explicamos, $k \in [0,1]$ es un valor fijo preestablecido por el decisor.

Nótese que, con el planteamiento al que hemos llegado con este Indice puede darse un método iterativo de cara a la solución optimal que buscan los jugadores, es decir, no hay ninguna dificultad en que, si se fija el nivel $k \varepsilon [0,1]$, y la solución obtenida no satisface al decisor, éste puede establecer otro nivel $k' \varepsilon [0,1]$ de cara a obtener una solución más acorde con sus interses, y así sucesivamente,

d) Indice de Posibilidad de Dubois y Prade.

De acuerdo con (3.31), (4.17) y (4.18) conducen a los siguientes problemas auxiliares para el primer y segundo jugador, respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\text{Min: } \sum_{i=1}^{m} u_i \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad a_j u \geqq 1-p_j(1-\alpha) \\
&\qquad u \geqq 0, \quad j=1,\dots,n, \quad \alpha \varepsilon (0,1]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Max: } \sum_{j=1}^{n} s_j \\
&\text{s.a.:} \\
&\qquad a_i s \leqq 1+q_i(1-\alpha) \\
&\qquad s \geqq 0, \quad i=1,\dots,m, \quad \alpha \varepsilon (0,1]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

e) Indice de Necesidad de Dubois y Prade.

Con este Indice, según (3.33), los respectivos problemas auxiliares correspondientes a (4.17) y (4.18), toman la forma,

$$\text{Min: } \sum_{i=1}^{m} u_i$$

s.a.:

$$(a_j +_0 a_j)u \geqq 2-(p_j +^0 p_j)(1-\alpha) \qquad (4.27)$$

$$u \geqq 0, \quad j=1,\dots,n, \quad \alpha \in (0,1]$$

$$\text{Max: } \sum_{j=1}^{n} s_j$$

s.a.:

$$(a_i +_0 a_i)s \leqq 2+(q_i +_0 q_i)(1-\alpha) \qquad (4.28)$$

$$s \geqq 0, \quad i=1,\dots,m, \quad \alpha \in (0,1]$$

Los problemas auxiliares (4.19) a (4.28) recogen los correspondientes a los Indices de comparación entre números difusos que, se muestran operativos al considerarlos en el contexto de los Juegos que estamos analizando. El resto de los Indices que, estudiamos con anterioridad no los consideramos aquí por diversas razones para cada uno de ellos. Así, por ejemplo, la relación intervalar que propone Tanaka et al. tiene el inconveniente de duplicar el número de restricciones de los respectivos problemas auxiliares. El Indice de Chang, como ya vimos, provoca problemas auxiliares no lineales. El Indice de Jain conduce a problemas con parámetros en la matriz tecnológica, lo mismo que ocurre con el Segundo de Yager.

Ahora bien, todos los problemas auxiliares (4.19) a (4.28), en general, admiten la siguiente expresión para cada uno de los jugadores, respectivamente,

i) Para el primer jugador

$$\text{Min: } z_1 = \sum_{i=1}^{m} u_i$$

s.a.:

$$Au \geqq b - d(1-\alpha) \qquad (4.29)$$

$$u \geqq 0, \qquad \alpha \in (0,1]$$

ii) Para el segundo jugador

$$\text{Max: } z_2 = \sum_{j=1}^{n} s_j$$

s.a.:

$$sA \leqq b + c(1-\alpha) \qquad (4.30)$$

$$s \geqq 0, \qquad \alpha \in (0,1]$$

Como es evidente, y a diferencia de lo que ocurre en el caso clásico, estos dos problemas lineales paramétricos no constituyen una pareja de problemas Duales. Sin embargo, supuesta una ausencia total de vaguedad en la verificación de las restricciones, ($\alpha = 1$) ambos problemas reproducen el modelo convencional de los J.B.S.N. (aunque según el Indice que se use, (4.29) y (4.30) adquieran formas distintas). Para ello bastaría con hacer un cambio de escala.

Qué duda cabe que el que (4.29) y (4.30) fuesen Duales, supondría, como en el caso convencional una doble ventaja. De un lado, bastaría con resolver uno solo de estos problemas para conocer la solución completa del juego considerado: este es un inconveniente que, en nuestro caso, no podremos obviar. Por otro lado, el Teorema Fundamental de la Dualidad de Programación Lineal, garantiza un mismo valor para los objetivos: el valor del Juego. En nuestro caso, en principio, no podemos garantizar este último hecho. Sin embargo, vamos a poder dar una solución, para el juego que tratamos, que recogerá la vaguedad que supone su planteamiento.

En efecto, si tomamos

$$\lambda = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0,1]$$

es evidente que $\lambda \in [0,1)$ con lo que (4.29) y (4.30) pueden reescribirse como,

$$\begin{aligned} &\text{Min: } z_1 = \sum_{i=1}^{m} u_i \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad Au \geqq b - d\lambda \\ &\qquad u \geqq 0, \quad \lambda \in [0,1) \end{aligned} \tag{4.31}$$

y,

$$\begin{aligned} &\text{Max: } z_2 = \sum_{j=1}^{n} s_j \\ &\text{s.a.:} \\ &\qquad sA \leqq b + c\lambda \\ &\qquad s \geqq 0, \quad \lambda \in [0,1) \end{aligned} \tag{4.32}$$

de forma que si $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1), \lambda_1 \geqq \lambda_2$ entonces $z_1(\lambda_1) \leqq z_1(\lambda_2)$ y $z_2(\lambda_1) \geqq z_2(\lambda_2)$, teniendo sentido el tomar para cada jugador los valores de los objetivos de (4.13) y (4.14), correspondientes a los juegos que inicialmente se planteaban como

$$v(\lambda) = 1/z_1(\lambda) \quad \text{y} \quad w(\lambda) = 1/z_2(\lambda)$$

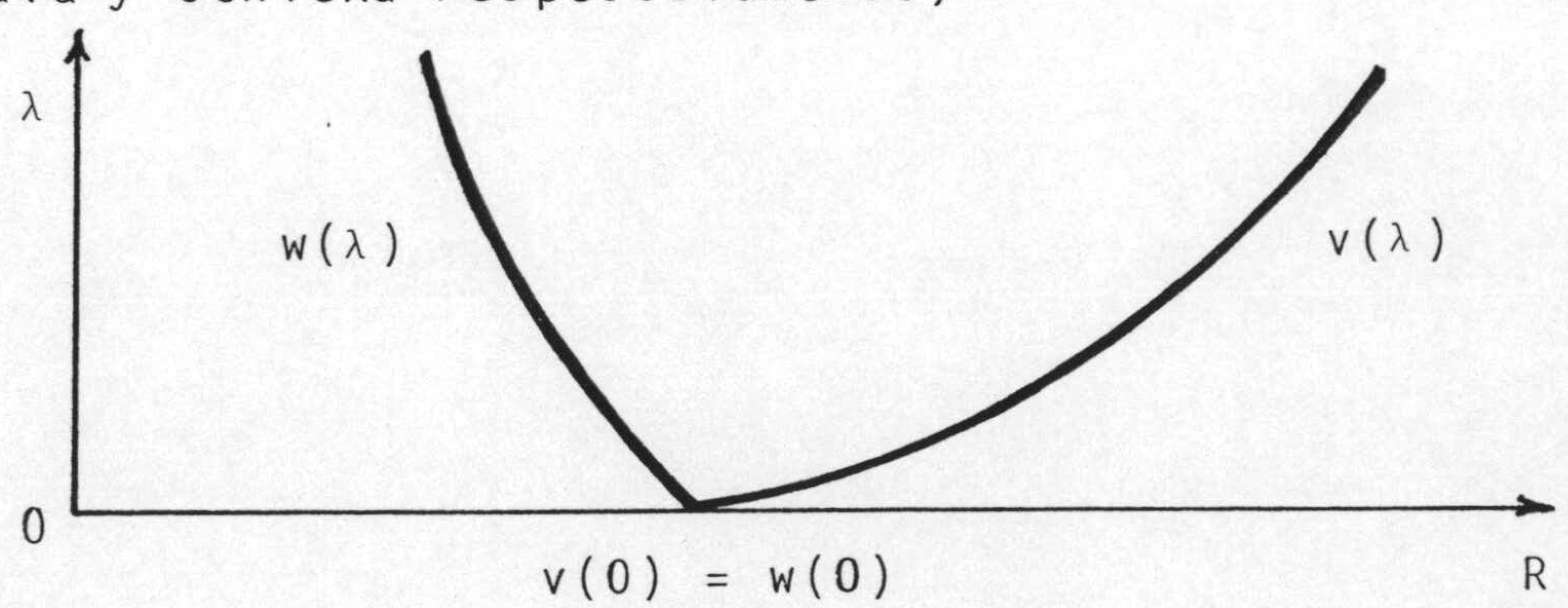
respectivamente.

Entonces, como es trivial, si $\lambda_1 \geqq \lambda_2$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$

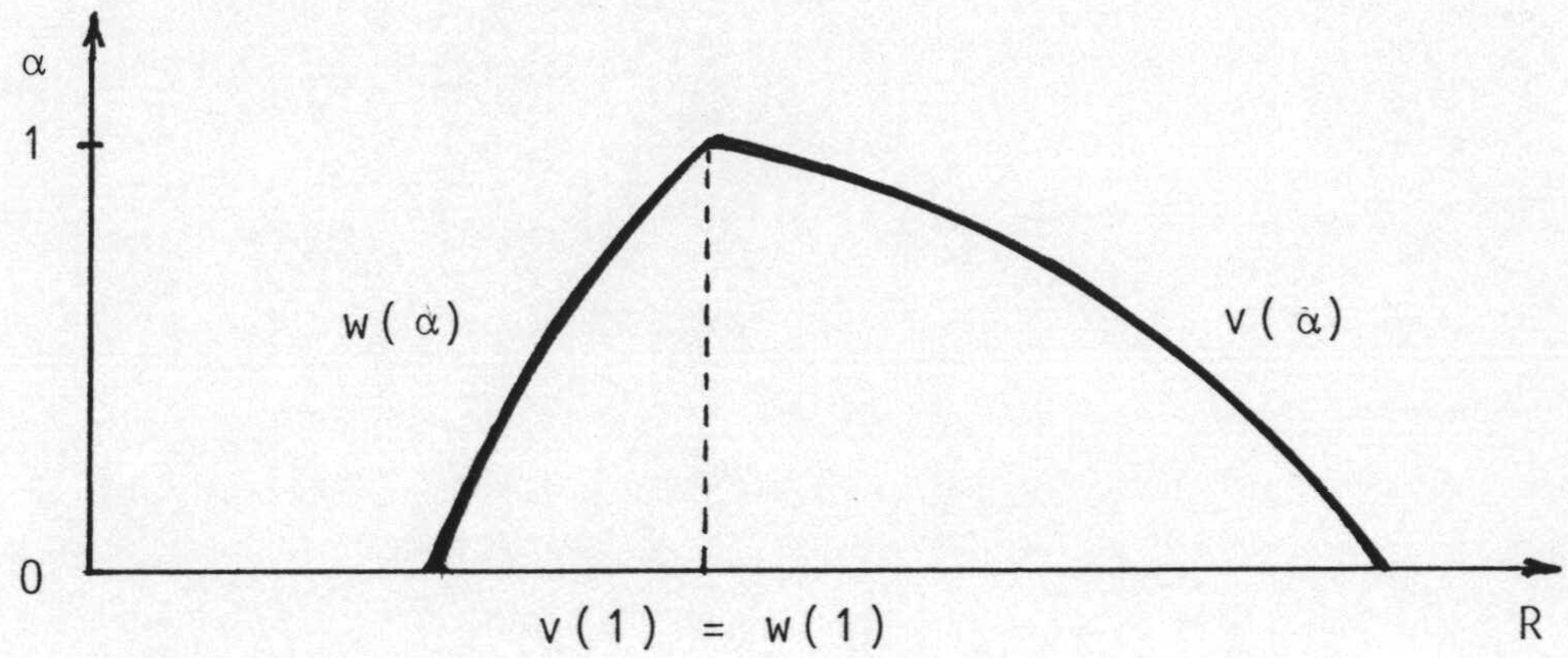
$$v(\lambda_1) \geqq v(\lambda_2) \quad \text{y} \quad w(\lambda_1) \leqq w(\lambda_2).$$

Como es bien conocido, z_1 como función de λ es convexa y lineal a trozos en $[0,1)$, y z_2 cóncava y lineal a trozos en $[0,1)$. Por tanto, $v(\lambda)$ y $w(\lambda)$, puesto que $z_1(\lambda)$, $z_2(\lambda) > 0$ son respectivamente, funciones cóncava y convexa en $[0,1)$. Particularmente, sin embargo, cuando $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$ sean rectas, $v(\lambda)$ y $w(\lambda)$ serán cóncavas o convexas según el valor de los coeficientes que intervengan en las expresiones de $z_1(\lambda)$ y $z_2(\lambda)$.

Por otra parte, como puede comprobarse inmediatamente, $v(0) = w(0)$ y, consecuentemente, ambas funciones tendrán una forma como la que se representa en la figura (para el caso en que $v(\lambda)$ y $w(\lambda)$ sean cóncava y convexa respectivamente)



y que por tanto, como función de $\alpha = 1-\lambda$, $\alpha \in (0,1]$, queda como se representa en la siguiente figura



donde tiene perfecto sentido el que $v(1) = w(1)$ porque $\alpha \in (0,1]$. A la vista de esta representación podemos decir que, con el enfoque de resolución del juego que incialmente planteabamos, ambos jugadores van a obtener como pago un valor "alrededor de $v(1) = w(1)$", es decir, lo que podríamos denominar un pago difuso que, está en consonancia con el planteamiento impreciso que ambos jugadores suponen desde el principio.

Por otra parte, supuesto un α-corte del anterior pago difuso, éste vendrá dado por un intervalo de valores $[w(\alpha), v(\alpha)]$ que podemos considerar, para el primer jugador, como un intervalo de incertidumbre en el que $w(\alpha)$ representaría lo menos que puede ganar y, $v(\alpha)$ lo más que puede ganar, no pudiendo fijar ningún valor intermedio en este intervalo debido a la naturaleza difusa del juego. Esto es, a grado

$\alpha \in (0,1]$ el primer jugador puede asegurar que ganará entre $w(\alpha)$ y $v(\alpha)$.

A continuación mostramos todo lo anterior con el siguiente

EJEMPLO NUMERICO:

Supongamos un juego de matriz

$$\begin{pmatrix} \tilde{180} & \tilde{156} \\ \tilde{90} & \tilde{180} \end{pmatrix}$$

donde los pagos son números difusos triangulares de funciones de pertenencia,

$\tilde{180}=(180,175,190)$ $\tilde{156}=(156,150,158)$ $\tilde{90}=(90,80,100)$

Supongamos que el primer jugador tiene como márgenes

$$\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2 = (0.10,0.08,0.11)$$

y el segundo

$$\tilde{q}_1 = \tilde{q}_2 = (0.15,0.14,0.17)$$

planteando los correspondientes modelos auxiliares de los sucesivos Indices anteriormente analizados, se obtienen los siguientes problemas:

a) Primer Indice de Yager.

J_1: Min: $u_1 + u_2$

s.a.:

$$545u_1 + 270u_2 \geqq 3 - 0.29(1-\alpha)$$
$$464u_1 + 545u_2 \geqq 3 - 0.29(1-\alpha)$$
$$u_1, u_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

J_2: Max: $s_1 + s_2$

s.a.:

$$545s_1 + 464s_2 \leqq 3 + 0.46(1-\alpha)$$

$$270s_1 + 545s_2 \leqq 3 + 0.46(1-\alpha)$$

$$s_1, s_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

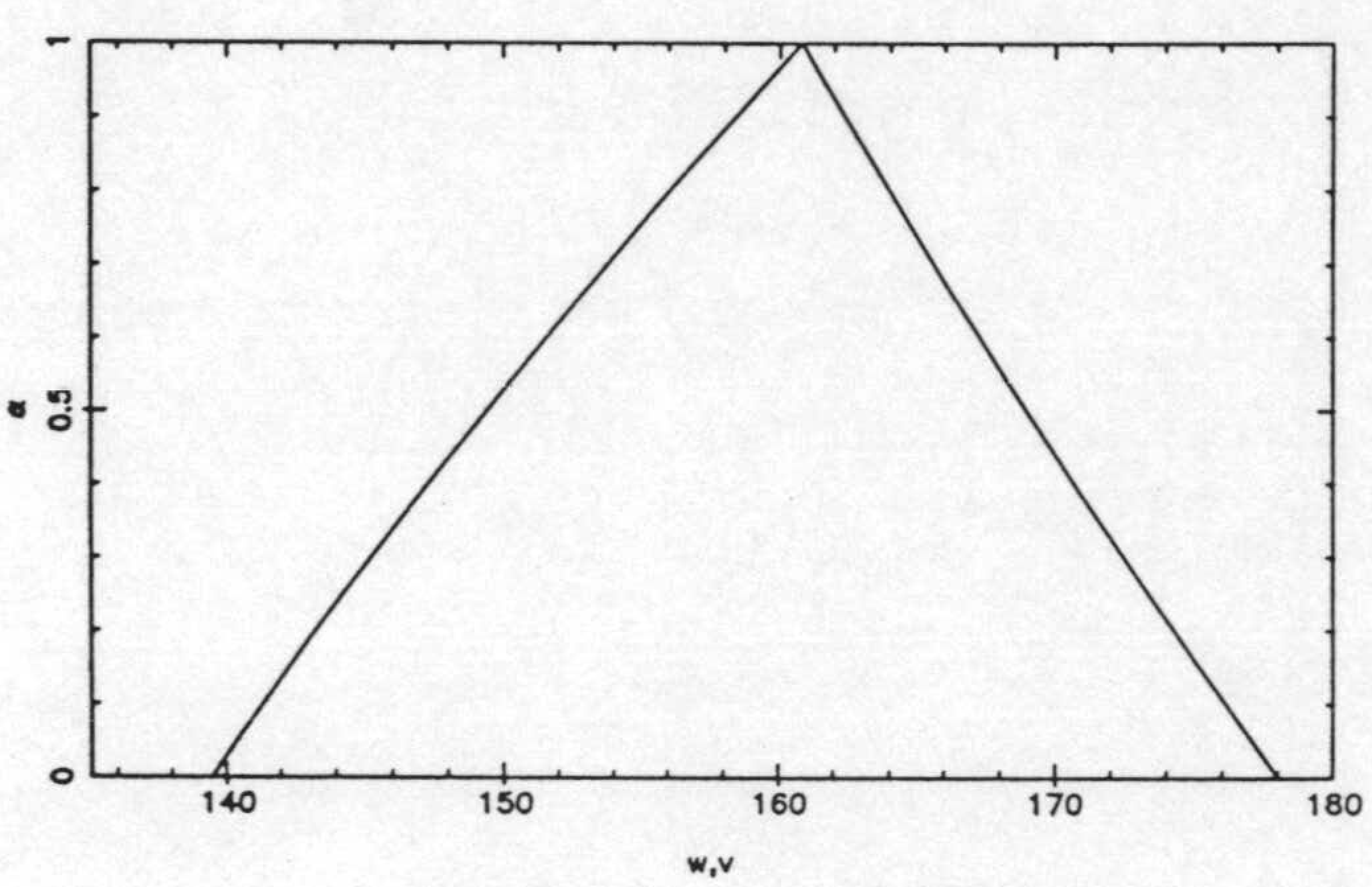
cuyas respectivas soluciones son:

$x_1^* = 0.77$ $x_2^* = 0.23$ $v(\alpha) = 482.43/(3-0.29(1-\alpha))$

e

$y_1^* = 0.23$ $y_2^* = 0.77$ $w(\alpha) = 482.43/(3+0.46(1-\alpha))$

es decir, en este caso, podemos asegurar que el pago que recibe el primer jugador será "aproximadamente 160.81" donde tal "aproximadamente" vendrá dado por la función de la siguiente figura



b) Tercer Indice de Yager.

J_1: Min: $u_1 + u_2$

s.a.:

$$725u_1 + 360u_2 \geqq 4 - 0.39(1-\alpha)$$

$$620u_1 + 725u_2 \geqq 4 - 0.39(1-\alpha)$$

$$u_1, u_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

J_2: Max: $s_1 + s_2$

s.a.:

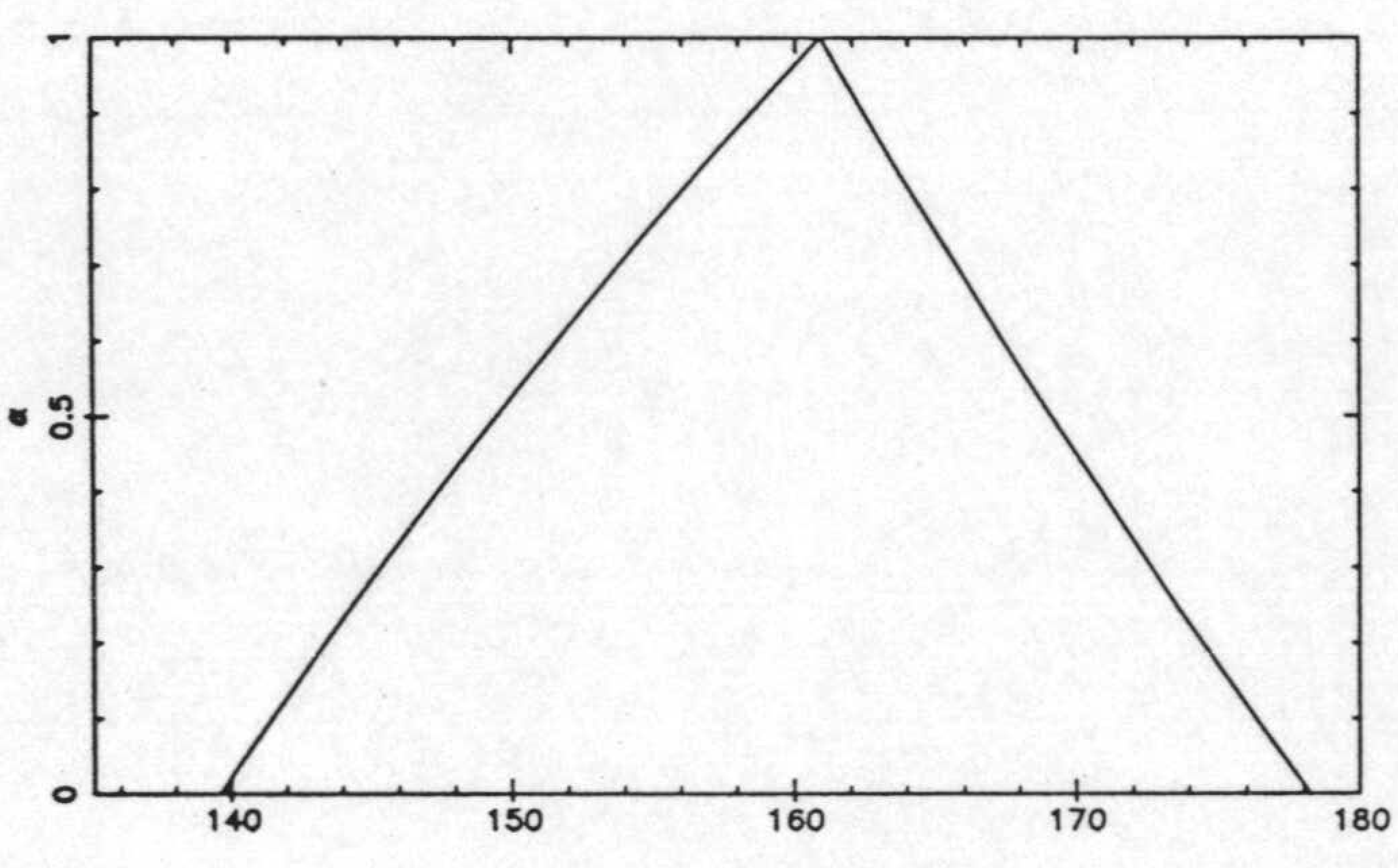
$$725s_1 + 620s_2 \leqq 4 + 0.61(1-\alpha)$$
$$360s_1 + 725s_2 \leqq 4 + 0.61(1-\alpha)$$
$$s_1, s_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

Por tanto, se obtiene como solución en este caso,

$x_1^* = 0.77 \quad x_2^* = 0.23 \quad v(\alpha) = 643.45/(4-0.39(1-\alpha))$

$y_1^* = 0.23 \quad y_2^* = 0.77 \quad w(\alpha) = 643.45/(4+0.61(1-\alpha))$

lo que nos indica que el pago que recibirá el primer jugador será "alrededor de 160.86" y cuya representación gráfica es la siguiente



c) Indice de Adamo.

Supuesto que el decisor fija k = 0.7, se tiene

J_1: Min: $u_1 + u_2$

s.a.:

$$183u_1 + 93u_2 \geqq 1 - 0.094(1-\alpha)$$
$$156.6u_1 + 183u_2 \geqq 1 - 0.094(1-\alpha)$$
$$u_1, u_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

J_2: Max: $s_1 + s_2$

s.a.:

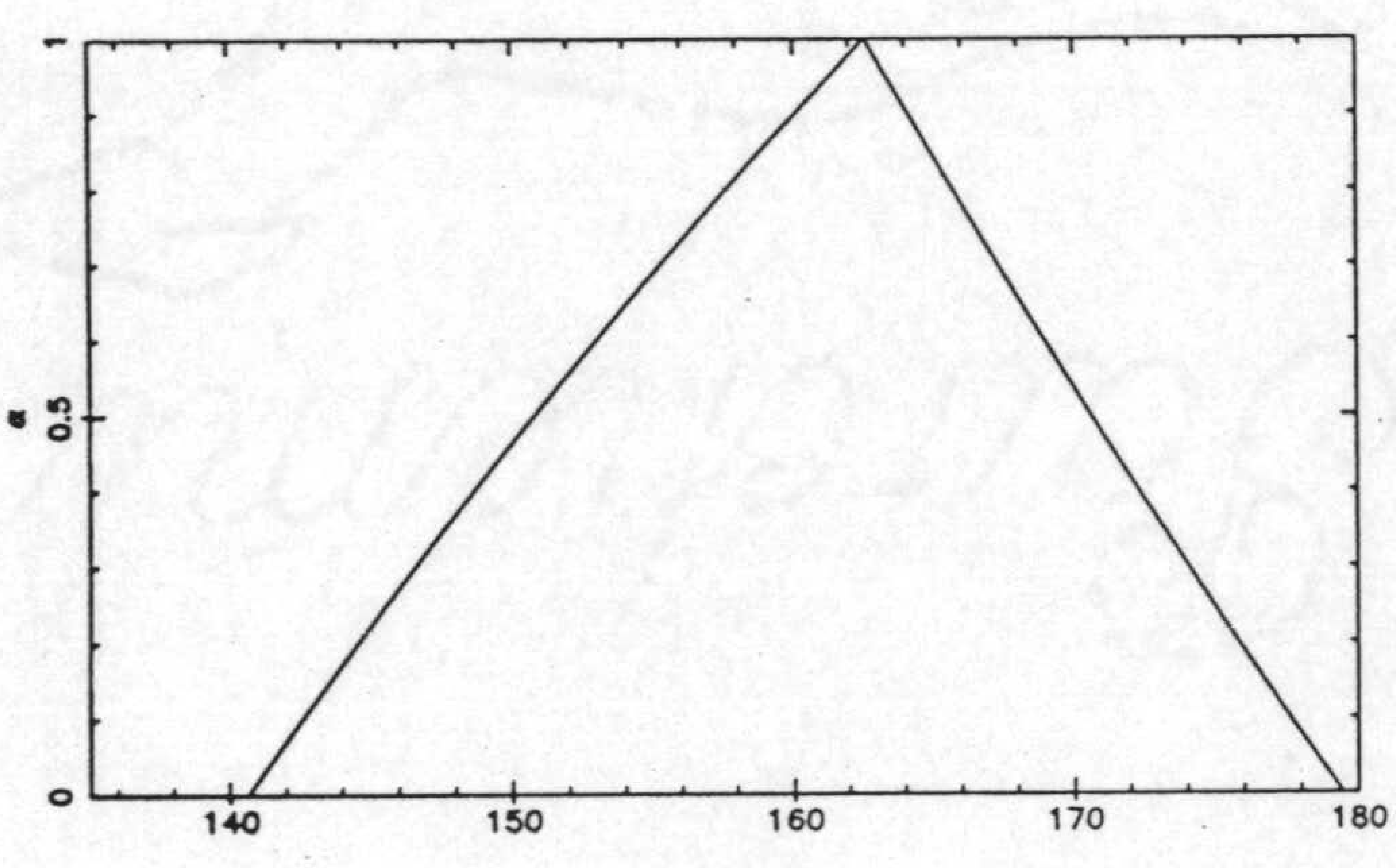
$$183s_1 + 156.6s_2 \leqq 1 + 0.156(1-\alpha)$$
$$93s_1 + 183s_2 \leqq 1 + 0.156(1-\alpha)$$
$$s_1, s_2 \geqq 0, \quad \alpha \varepsilon (0,1]$$

y las soluciones que se obtienen son:

$x_1^* = 0.77$ $x_2^* = 0.23$ $v(\alpha) = 162.58/(1-0.094(1-\alpha))$

$y_1^* = 0.23$ $y_2^* = 0.77$ $w(\alpha) = 162.58/(1+0.156(1-\alpha))$

Por tanto, en este caso, podemos asegurar que el pago que recibirá el primer jugador será "aproximadamente 162.58" lo que representamos en la siguiente figura



d) Indice de Posibilidad de Dubois y Prade.

J_1: Min: $u_1 + u_2$

s.a.:

$$180u_1 + 90u_2 \geqq 1 - 0.1(1-\alpha)$$
$$156u_1 + 180u_2 \geqq 1 - 0.1(1-\alpha)$$
$$u_1, u_2 \geqq 0, \quad \alpha \varepsilon (0,1]$$

J_2: Max: $s_1 + s_2$

s.a.:

$$180s_1 + 156s_2 \leqq 1 + 0.15(1-\alpha)$$

$$90s_1 + 180s_2 \leqq 1 + 0.15(1-\alpha)$$

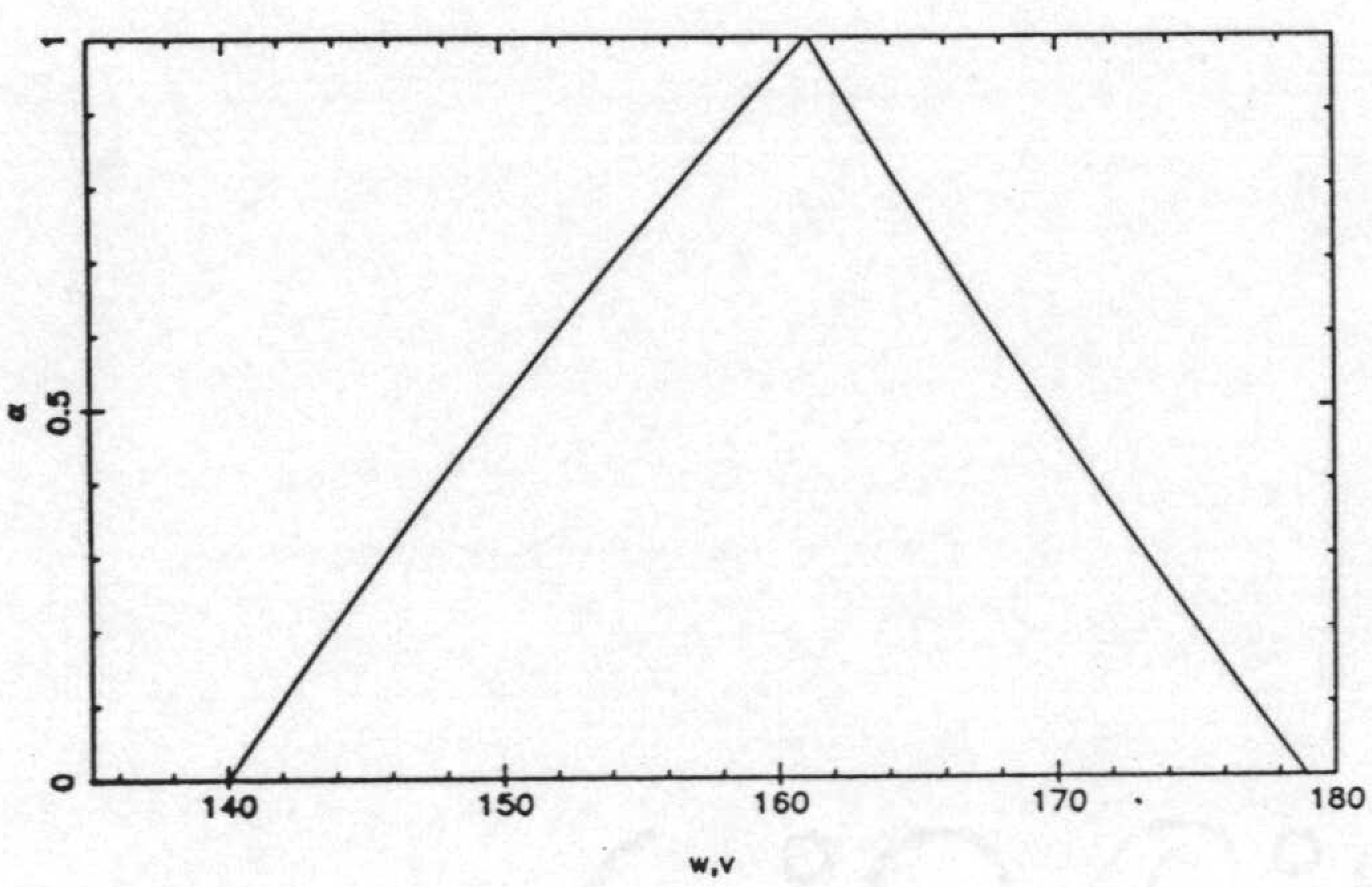
$$s_1, s_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

problemas cuyas soluciones respectivas son:

$x_1^* = 0.79$ $\quad x_2^* = 0.21$ $\quad v(\alpha) = 161.05/(1-0.1(1-\alpha))$

$y_1^* = 0.21$ $\quad y_2^* = 0.79$ $\quad w(\alpha) = 161.05/(1+0.15(1-\alpha))$

es decir, podemos asegurar que, en este caso, el pago para el primer jugador es "alrededor de 161.05", que representamos a continuación



e) Indice de Necesidad de Dubois y Prade.

J_1: Min: $u_1 + u_2$

s.a.:

$$355u_1 + 170u_2 \geqq 2 - 0.21(1-\alpha)$$

$$306u_1 + 355u_2 \geqq 2 - 0.21(1-\alpha)$$

$$u_1, u_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

J_2: Max: $s_1 + s_2$

s.a.:

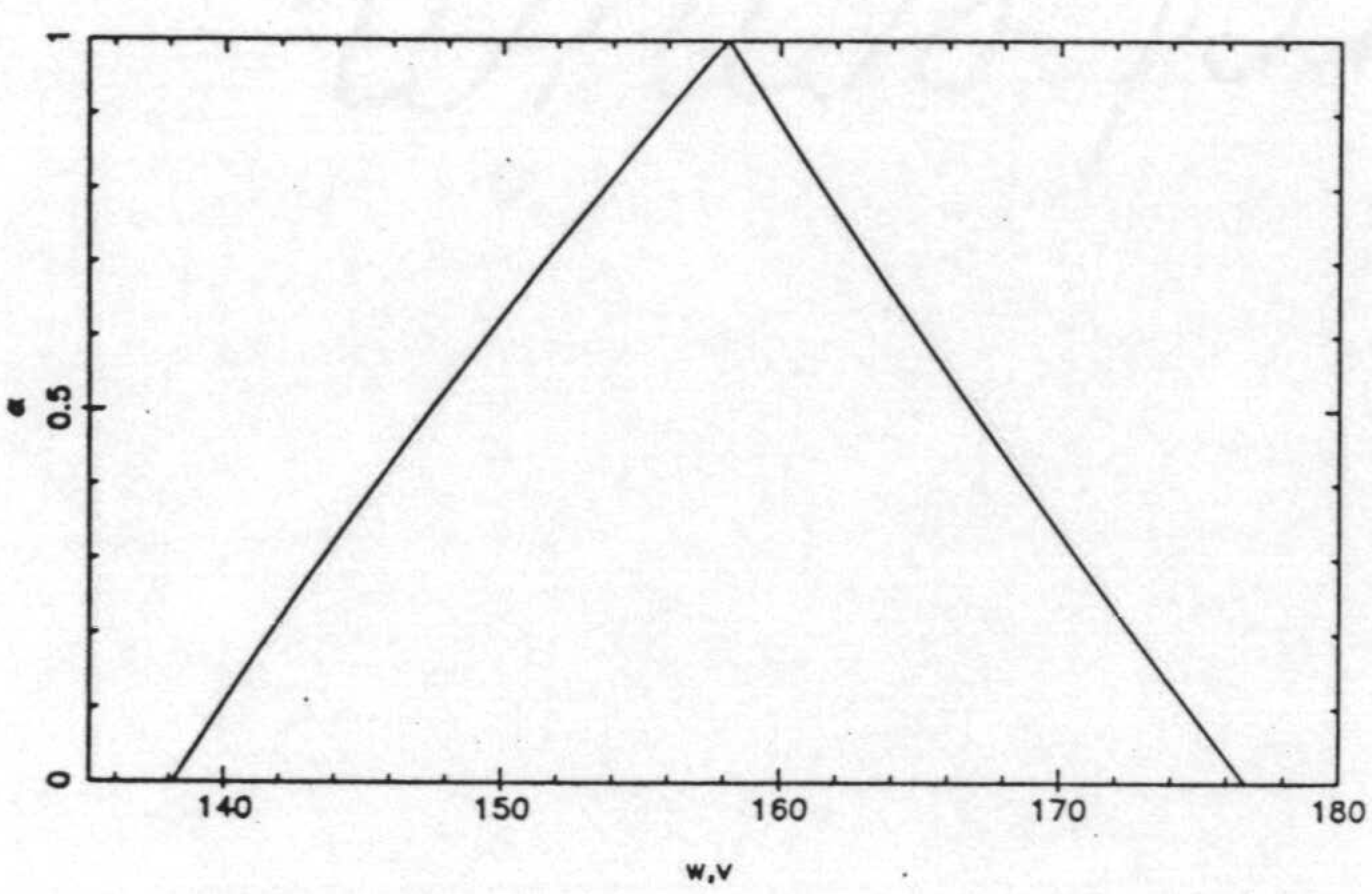
$$355s_1 + 306s_2 \leqq 2 + 0.29(1-\alpha)$$
$$170s_1 + 355s_2 \leqq 2 + 0.29(1-\alpha)$$
$$s_1, s_2 \geqq 0, \quad \alpha \in (0,1]$$

que nos conduce a la siguiente solución:

$x_1^* = 0.79 \quad x_2^* = 0.21 \quad v(\alpha) = 316.26/(2-0.21(1-\alpha))$

$y_1^* = 0.21 \quad y_2^* = 0.79 \quad w(\alpha) = 316.26/(2+0.29(1-\alpha))$

por tanto, en este caso, el pago que recibirá el primer jugador será "aproximadamente 158.13" que está representado en la siguiente figura,



Lo que, en definitiva demuestra que según el Indice de comparación entre números difusos que se emplee, los jugadores obtienen soluciones, numéricamente distintas, pero, desde un punto de vista linguístico, idénticas.

COMENTARIOS FINALES

Como resumen, y de un modo totalmente general, esta memoria ha puesto de manifiesto lo siguiente:

1) Cuando en un problema de P.L. se supone algún tipo de imprecisión sobre los coeficientes que intevienen en la definición del conjunto de restricciones del mismo, y esta imprecisión es modelizable mediante conjuntos difusos, el problema no puede tener, salvo casos patológicos, una solución puntual en el sentido de la Teoría Clásica sino, más bien, una solución de la misma naturaleza que los parámetros a los que antes hemos aludido. Si, además, los anteriores conjuntos difusos suponen representaciones de números difusos, la solución del problema, no sólo es imprecisa sino que, no es única. Esta falta de unicidad, como se ha puesto de manifiesto en el contexto que aquí hemos considerado, se debe a la diversidad de métodos existentes para la comparación de números difusos.

2) A la vista de los diferentes modelos de P.L.D. existentes en la literatura, se ha dado un modelo más general que se ha demostrado puede englobar, como casos particulares, todos los modelos mencionados. Este modelo más general, salvo el problema comentado anteriormente de la comparación

de números difusos, se ha demostrado, además, como muy operativo debido a la incorporación al mismo de la convexidad del conjunto de restricciones cuando éste está definido con números difusos.

3) En el contexto de los Juegos Bipersonales Difusos de Suma Nula que aquí se ha planteado, si bien su solución incorpora los inconvenientes comentados en el punto 1), se ha demostrado que dicha solución tiene la misma naturaleza que los parámetros que definen el juego, es decir, que aunque según el Indice de comparación que se use, la solución que se obtenga sea distinta, todas estas soluciones corresponden a un predicado vago que podemos establecer como "el pago estará alrededor del valor x".

No obstante, esta memoria no deja cerrado el tema motivo de la misma. En efecto, como líneas futuras de actuación, habrá que considerar las siguientes,

a) Profundizar en la defición de número difuso y en el manejo de cantidades imprecisas.

b) La extensión del modelo más general que se planteó en el Capítulo III, al caso de objetivos y variables difusas, con vistas a intentar diseñar un algoritmo para la resolución de problemas de P.L.D. de estas características.

c) Si se interpreta la matriz de pagos de un Juego como el estado de un sistema constituido por dos jugadores, y una estrategia como un input a tal sistema, tal Juego, como se sabe, puede llegar a entenderse como un autómata determinístico finito. El trasvase de la metodología desarrollada en esta memoria a tal campo, y el desarrollo de la misma en él, será motivo de futuras investigaciones.

BIBLIOGRAFIA

ADAMO, J.M. (1980)
Fuzzy Decision Trees. Fuzzy Sets and Systems, 4, 207-219.

AUBIN, J.P. (1974)
Coer et valeur des jeux flous a paiements lateraux. Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. A, 279, 891-894.

AUBIN, J.P. (1974)
Coer et equilibres des jeux flous sans paiements lateraux. Comp. Rendus Acad. Sci. Paris, Ser. A, 279, 963-966.

AUBIN, J.P. (1976)
Fuzzy core and equilibria of games defined in strategic form. In "Directions in Large-scale Systems" (Y.C. Ho and S.K. Mitter, Eds.), Plenum Press, 371-378.

AUBIN, J.P. (1981)
Cooperative Fuzzy Games. Math. Opns. Res., 6, 1-13.

AUBIN, J.P. (1982)
Fuzzy Games: The Static and Dynamical point of view. Ceremade, Univ. de Paris-Dauphine.

BAAS, S.M. and KWAKERNAAK, H. (1977)
Rating and Ranking of Multiple-aspect Alternatives using Fuzzy Sets. Automatica, 13, 47-58.

BALDWIN, J.F. and GUILD, N.C.F. (1979)
Comment on the Fuzzy Max Operator of Dubois and Prade. Internat. J. Systems Sci., 10, 1063-1064.

BALDWIN, J.F. and GUILD, N.C.F. (1979)
Comparison of Fuzzy Sets on the same decision space. Fuzzy Sets and Systems, 2, 213-233.

BAZARAA, M.S. and SHETTY, C.M. (1979)
Nonlinear Programming. Theory and Algorithms. John Wiley and Sons.

BLAQUIERE, A. (1976)
Dynamic Games with coalitions and diplomacies. In "Directions in large-scale systems" (Y.C. Ho and S.K. Mitter, Eds.), Plenum Press, 95-115.

BELLMAN, R.E. and ZADEH, L.A. (1970)
Decision Making in a Fuzzy Environment. Management Science, 17 B(4), 141-164.

BILLOT, A.B. (1985)
Contribution to a Mathematical Theory of Fuzzy Games. BUSEFALL, 24, 83-93.

BITRAN, G.R. (1980)
Linear Multiple Objective Problems with interval coefficients. Management Science, 26, 694-706.

BORTOLAN, G. and DEGANI, R. (1985)
A review of some Methods for ranking Fuzzy Subsets. Fuzzy Sets and Systems, 15, 1-20.

BUCKLEY, J.J. (1983)
Fuzzy Programming and the Pareto Optimal Set. Fuzzy Sets and Systems, 10, 57-63.

BUCKLEY, J.J. (1985)
Ranking alternatives using fuzzy numbers. Fuzzy Sets and Systems, 15, 21-32.

BUTNARIU, D. (1978)
Fuzzy Games: A description of the concept. Fuzzy Sets and Systems, 1, 181-182.

BUTNARIU, D. (1980)
Stability and Shappley value for an n-person Fuzzy Game. Fuzzy Sets and Systems, 4, 63-72.

BUTNARIU, D. (1985)
Non-atomic fuzzy measures and games. Fuzzy Sets and Systems, 17, 38-52.

CHANG, W. (1981)
Ranking of fuzzy utilities with triangular membership function. Proc. Int. Conf. on Policy Analysis and Inf. Systems, 263-272.

CHANAS, S. (1983)
Parametric Programming in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 11, 243-251.

CHANAS, S. (1984)
A Fuzzy Linear Programming problem with equality constraints. Control and Cybernetic, 13, 195-202.

CHANAS, S. and KOKALANOW, M. (1977)
An assignement problem with fuzzy effectiveness estimates. Instytut Organizacji i Zarzadzania Politechniki Wroclawskiej Komunikat No 253. Wractaw.

CHENG, S.H. (1985)
Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set. Fuzzy Sets and Systems, 17, 113-130.

DELGADO, M. (1983)
A Resolution Method for Multiobjective Problem. European J. of Operational Res., 13, 165-172

DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A. (1985)
Solving the biobjective Linear Programming problem: A fuzzy approach. In "Approximate Reasoning in Experts Systems" (M.M. Gupta, A. Kandel, W. Bandler and J.B. Kiszka, Eds.), North-Holland, 317-322.

DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A. (1985)
Mathematical Programming Problems with Fuzzy costs. Presentado al I I.F.S.A. Congress, Mallorca.

DELGADO, M., VERDEGAY, J.L. and VILA, M.A. (1986)
Fuzzy Transportation Problems: A General Approach. "Soft Optimization Models using Fuzzy Sets and Possibility Theory" (J. Kacprzyk and S. Orlovsky, Eds.), Verlag TUV-Rheinland, en prensa.

DUBOIS, D. and PRADE, H. (1978)
Operations on Fuzzy numbers. Internat. J. Systems Sci., 6, 613-626.

DUBOIS, D. and PRADE, H. (1980)
Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications. Academic Press.

DUBOIS, D. and PRADE, H. (1980)
System of Linear Fuzzy Constraints. Fuzzy Sets and Systems, 9, 129-136.

DUBOIS, D. and PRADE, H. (1983)
Ranking Fuzzy Numbers in the Setting of Possibility Theory. Infor. Sci., 30, 183-224.

FRAZER, N.M. and HIPEL, K.W. (1984)
Conflict Analysis: Models and Resolutions. North-Holland.

FERGUSON, R.O. (1967)
Mathematical Statistics, Academic Press.

GAL, T. (1979)
Postoptimal Analysis, Parametric Programming and Related Topics. McGraw-Hill.

GOGUEN, J.A. (1967)
L-Fuzzy Sets. J. Math. Anal. and Appl., 18, 145-174.

GUPTA, M.M., KANDEL, A. BANDLER, W. and KISZKA, J.B. (1985)

GUPTA, M.M., KANDEL, A. BANDLER, W. and KISZKA, J.B. (1985)
Approximate Reasoning in Expert Systems. North-Holland.

GUPTA, M.M. RAGADE, R.K. and YAGER, R.R. (1979)
Advances in Fuzzy Set Theory and Applications. North-Holland.

GUPTA, M.M. and SANCHEZ, E. (1982)
Approximate Reasoning in decision analysis. North-Holland.

GUPTA, M.M. and SANCHEZ, E. (1982)
Fuzzy Information and Decision Processes. North-Holland.

GUPTA, M.M., SARIDIS, G.N. and GAINES, B.R. (1977)
Fuzzy Automata and Decision Processes. North-Holland.

HAMAGHER, H., LEBERLING, H. and ZIMMERMANN, H.J. (1978)
Sensitivity Analysis in Fuzzy Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 1, 269-281.

HANNAN, E.L. (1979)
On the Efficiency of the Product Operator in Fuzzy Programming with Multiple Objectives. Fuzzy Sets and Systems, 2, 259-262.

HANNAN, E.L. (1981)
Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals. Fuzzy Sets and Systems, 6, 235-248

JAIN, R. (1976)
Decision-Making in the presence of fuzzy variables. IEEE Trans. Systems Man. Cybernet., 6, 698-703.

JAIN, R. (1977)
A procedure for multiple-aspect decision-making using fuzzy sets. Internat. J. Systems Sci., 8, 1-7.

JONES, A.T. (1980)
Game Theory: Mathematical Models of conflict. Ellis Horwood.

KACPRZYK, J. and YAGER, R.R. (1985)
Management decision Support Systems using Fuzzy Set and Possibility Theory. Verlag TUV Rheinland.

KAUFMANN, A. (1977)
Introduction a la Theorie des Sous-ensembles flous. V. Masson, S.A.

KAUFMANN, A. and GUPTA, M. (1985)
Introduction to Fuzzy Arithmetic. Theory and Applications. Van Nostrand Reinhold.

KICKERT, W.J.M. (1978)
Fuzzy Theory on Decision-Making. Martinus Nijhoff Social Sciences Division.

KERRE, E.E. (1982)
The use of fuzzy set theory in the electrocardiological diagnostics. In "Approximate Reasoning in Decision Analysis" (M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds.), North-Holland, 277-282.

LEBERLING, H. (1982)
On Finding Compromise Solutions in Multicriteria Problems using the Min-Operator. Fuzzy Sets and Systems, 6, 105-118.

LUHANDJULA, M.K. (1982)
Compensatory Operators in Fuzzy Linear Programming with Multiple Objectives. Fuzzy Sets and Systems, 8, 245-252.

LUHANDJULA, M.K. (1983)
Linear Programming under Randomness and Fuzzyness. Fuzzy Sets and Systems, 10, 57-63.

LUHANDJULA, M.K. (1983)
Programation Lineaire avec des donnes possibilistes. BUSEFALL, 15, 134-144.

LUHANDJULA, M.K. (1986)
On possibilistic Linear Programming. Fuzzy Sets and Systems, 18, 15-30.

McKINSEY, J.C.C. (1967)
Introduccion a la Teoria Matematica de los Juegos. Aguilar.

NAHMIAS, S. (1978)
Fuzzy variables. Fuzzy Sets and Systems, 1, 97-110.

NEGOITA, C.V. (1976)
Fuzzyness in Management. TIMS/ORSA Bull., Miami.

NEGOITA, C.V. (1981)
The Current Interest in Fuzzy Optimization. Fuzzy Sets and Systems, 6, 262-269.

NEGOITA, C.V., FLONDOR, P. and SULARIA, M. (1977)
On Fuzzy Environment in Optimization Problems. In "Modern Trends in Cybernetic and Systems" (J. Rose and

NEGOITA, C.V., FLONDOR, P. and SULARIA, M. (1977)
On Fuzzy Environment in Optimization Problems. In "Modern Trends in Cybernetic and Systems" (J. Rose and C. Bilciu, Eds.), Springer-Verlag.

NEGOITA, C.V. and RALESCU, D. (1975)
Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. Birkhauser-Verlag.

NEGOITA, C.V. and RALESCU, D. (1977)
On Fuzzy Optimization. Kybernetes, 6, 193-195.

NEGOITA, C.V. and SULARIA, M. (1976)
On Fuzzy Programming and Tolerances in Planning. Econom. Comp. Econom. Cybernet. Stud. Res., 1, 3-15.

NURMI, H. (1976)
On Fuzzy Games. Eur. Meet. Cybernet. Syst. Res., 3rd, Vienna.

NURMI, H. (1981)
A Fuzzy Solution to a Majority Voting Game. Fuzzy Sets and Systems, 5, 187-198.

OHEIGEARTAIGH, M. (1982)
A Fuzzy Transportation Algorithm. Fuzzy Sets and Systems, 8, 235-245.

ORLOVSKY, S.A. (1977)
On Programming with Fuzzy Constraint Sets. Kybernetes, 6, 197-201.

ORLOVSKY, S.A. (1980)
On Formalization of a General Fuzzy Mathematical Problem. Fuzzy Sets and Systems, 3, 311-321.

OWEN, G. (1968)
Game Theory. Saunders Co.

OWEN, G. (1982)
Game Theory. Academic Press.

PRADE, H. (1980)
Operations Research with Fuzzy Data. In "Fuzzy Sets. Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems" (P.P. Wang and S.K. Chand, Eds.), Plenum Press, 155-169.

PRADE, H. (1980)
Fuzzy Programming; Why and how?. Some hints and examples. BUSEFALL, 5, 76-90.

RALESCU, D. (1979)
A Survey of Representation of Fuzzy Concept and its Applications. In "Advances in Fuzzy Set Theory and Applications" (M.M. Gupta, R.K. Regade and R.R. Yager, Eds.), North-Holland, 77-91.

RAMIK, J. and RIMANEK, J. (1985)
Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization. Fuzzy Sets and Systems, 16, 123-138.

REGADE, R.K. (1976)
Fuzzy Games in the Analysis of Options. J. Cybernet., 6, 213-221.

RODDER, W. and ZIMMERMANN, H.J. (1977)
Duality in Fuzzy Programming. Int. Symp. on Extremal Methods and Systems Analysis, Austin, Texas.

SIMONNARD, M. (1962)
Programmation Lineaire. Dunod. Paris.

TAKEDA, E. and NISHIDA, T. (1980)
Multiple Criteria Decision. Problems with Fuzzy Domination Structures. Fuzzy Sets and Systems, 3, 123-136.

TANAKA, H., ICHIHASHI, H. and ASAI, K. (1984)
A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problem based on comparison of Fuzzy Numbers. Control and Cybernetic, 13, 185-194.

TANAKA, H., OKUDA, T. and ASAI, K. (1978)
On Fuzzy Mathematical Programming. J. Cybernet., 3, 37-46.

VERDEGAY, J.L. (1981)
Problemas de decision an ambiente difuso. Tesis Doctoral, Univ. de Granada.

VERDEGAY, J.L. (1982)
Fuzzy Mathematical Programming. In "Fuzzy Information and Decision Processes" (M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds.), North-Holland, 231-237.

VERDEGAY, J.L. (1983)
Aplicaciones del enfoque paramétrico en la Programación Lineal Difusa. Proc. F.I.S.A.L.-83, 155-165.

VERDEGAY, J.L. (1983)
El Problema del Transporte con Parámetros Difusos. Rev. Acad. Ciencias Mat. Fis-Quim. y Nat. de Granada, 2, 47-56.

VERDEGAY, J.L. (1983)
Solving the Mathematical Programming Problem with a new formulation of Fuzzy Objectives. BUSEFALL, 15, 127-134.

VERDEGAY, J.L. (1984)
Applications of Fuzzy Optimization in Operational Research. Control and Cybernetic, 13, 229-240.

VERDEGAY, J.L. (1984)
A Dual Approach to solve the Fuzzy Linear Programming Problem. Fuzzy Sets and Systems, 14, 131-142.

von NEUMANN, J. and MORGENSTERN, O. (1977)
Theory of Games and Economic Behaviour. Princeton, Univ. Press.

WANG, P.P. and CHANG, S.K. (1980)
Fuzzy Sets. Theory and Applications to Policy Analysis and Information Systems. Plenum Press.

WATSON, S.R., WEISS, J.J. and DONNELL, M.L. (1979)
Fuzzy Decision Analysis. IEEE Trans. Systems Man. Cybernet., 9, 1-9.

WERNERFELT, B. (1986)
Semifuzzy games. Fuzzy Sets and Systems, 19, 21-29.

WIEDEY, G. and ZIMMERMANN, H.J. (1978)
Media Selection and Fuzzy Linear Programming. J. Opns. Res. Soc., 29, 1071-1084.

YAGER, R.R. (1978)
Ranking Fuzzy Subsets over the unit interval. Proc. CDC, 1435-1437.

YAGER, R.R. (1980)
On choosing between fuzzy subsets. Kybernetes, 9, 151-154.

YAGER, R.R. (1981)
A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval. Infor. Sci., 24, 143-161.

ZADEH, L.A. (1978)
Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.

ZADEH, L.A., FU, K.S., TANAKA, K. and SHIMURA, M. (1975)
Fuzzy Sets and their Application to Cognitive and Decision Processes. Academic Press.

ZELENY, M. (1982)
Multiple Criteria Decision-Making. McGraw-Hill.

ZIMMERMANN, H.J. (1974)
Optimization in fuzzy environments. Presentado al XXI Int. TIMS and 46th ORSA Conference, San Juan, Puerto Rico.

ZIMMERMANN, H.J. (1975)
Bibliography. Theory and Application of Fuzzy Systems. Lehrstuhl fur Unternemensforschung, RWTH, Aachen, Germany.

ZIMMERMANN, H.J. (1975)
Description and Optimization of Fuzzy Systems. Int. J. General Syst., 2, 209-215.

ZIMMERMANN, H.J. (1977)
Fuzzy Programming and Linear Programming with several Objective Functions. Fuzzy Sets and Systems, 1, 45-55.

ZIMMERMANN, H.J. (1978)
Theory and Applications of Fuzzy Sets. In "Operation Research 78" (K.B. Haley, Ed.), North-Holland, 1917-2033.

ZIMMERMANN, H.J. (1985)
Applications of Fuzzy Set Theory to Mathematical Programming. Infor. Sci., 36, 29-58.

ZIMMERMANN, H.J., ZADEH, L.A. and GAINES, B.R. (1984)
Fuzzy Set and Decision Analysis. North-Holland.