

EXPLORACIÓN DEL PAPEL DE LA ESTÉTICA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Begoña Bosque, Isidoro Segovia y José Luis Lupiáñez

Presentamos una exploración del papel de la estética en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Primeramente, revisamos el estado de la cuestión. Posteriormente, obtenemos mediante un cuestionario, que de entre los criterios estéticos que aparecen en la literatura, el referido a la simplicidad es el que parece ser compartido por alumnos de educación secundaria con calificaciones académicas medias y bajas. Finalmente, observamos mediante un estudio de casos, que a través de contenidos matemáticos, en este caso las teselaciones del plano, se vislumbra en alumnos de educación secundaria la aparición de consideraciones y experiencias estéticas.

Términos clave: Belleza matemática; Educación Matemática; Estética; Motivación; Percepción

The Role of Aesthetics in the Teaching and Learning of Mathematics

We present an exploration of the role of aesthetics in the teaching and learning of Mathematics. Firstly, we review the state of the issue. Subsequently, through a questionnaire, we obtain that among the aesthetic criteria that appear in the literature is the one related to simplicity that seems to be shared by high school students of middle and low academic qualifications. Finally, through a case study, we observe that through mathematical contents, in this case the tessellations of the plane, we see in students of high school the appearance of aesthetic considerations and experiences.

Keywords: Aesthetics; Mathematical beauty; Mathematics Education; Motivation; Perception

PROBLEMA DE ESTUDIO Y SU JUSTIFICACIÓN

La Educación Primaria Obligatoria y la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) son ciclos educativos con vocación de estar al alcance de todos los estudiantes y por tanto es conveniente que los estudiantes de estos niveles aprecien las matemáticas. También en la educación secundaria no obligatoria e incluso en la universidad es necesario mejorar la visión negativa que muchos estudiantes tienen del aprendizaje de las matemáticas.

Bosque, B., Segovia, I. y Lupiáñez, J. L. (2017). Exploración del papel de la estética en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *PNA*, 12(1), 1-26.

Respecto a esta consideración, en el preámbulo de la Ley Orgánica de Educación (LOE) del Ministerio de Educación y Ciencia (2006) se menciona textualmente “la necesidad de proponerse la meta de conseguir el éxito escolar de todos los jóvenes” (p. 6). La Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2013) no menciona expresamente el objetivo de conseguir el éxito para todos, pero en cambio sí hace mención a la necesidad de reducir las tasas de abandono escolar a un 10% para el año 2020.

Ni el objetivo de la LOE, en vigor todavía en la ESO durante el curso 2014-2015, de conseguir el éxito para todos los escolares, ni el de la LOMCE, respecto a la tasa de abandono, se han alcanzado. Esto se muestra en el hecho de que esta sea del 23,6%, duplicando la media comunitaria situada en un 12%, según los datos del año 2013 (Subdirección de Estadística y Estudios del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014).

Junto a esta situación de fracaso subyace un rechazo a las matemáticas por parte de los alumnos que da lugar al círculo vicioso cognitivo-afectivo mencionado por Alonso, Sáez y Picos (2004): “dificultad-aburrimiento-suspenseo-fatalismo-bajo autoconcepto-desmotivación-rechazo-dificultad” (p. 75).

En otros trabajos se ha comprobado que la ansiedad y las respuestas afectivas juegan un papel esencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Pérez-Tyteca et al., 2009). Disciplinas como la Psicología se han ocupado en profundidad de indagar en las causas de esta aversión a las matemáticas por parte de los estudiantes.

Además de lo anterior, los valores asociados en general a las matemáticas como “fijas, inmutables, abstractas y no relacionadas con la realidad; un misterio accesible a pocos; una colección de reglas y de hechos que deben ser recordados; un conocimiento acultural, nada humanístico, libre de valores, etc.” (Gómez-Chacón, 2005, p. 286) no favorecen que se dé una actitud positiva hacia las matemáticas por parte del alumnado. Y sin embargo, esta visión de las matemáticas contrasta con los testimonios de muchos matemáticos que “confirman la existencia de un verdadero placer estético en la creación y contemplación matemática” (Gómez-Chacón, 2005, p. 295). De estas visiones contrapuestas nace nuestro interés por conocer el papel que las consideraciones estéticas podrían jugar en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El término *estética*, en una de sus acepciones recogidas en la Real Academia de la Lengua, figura como la ciencia que trata de la belleza y de la teoría filosófica del arte. Sin embargo, si atendemos al origen etimológico del término, *estética* deriva del griego *αἰσθητική* [*aisthētikē*], *sensación*, *percepción*, y este de *αἴσθησις* [*aísthēsis*], *sensación*, *sensibilidad*, e *-ικά* [*-icá*], *relativo a*. Así pues, el origen etimológico de la palabra *estética* solo hace referencia a aspectos relativos a la percepción, a las sensaciones y a la sensibilidad, sin ninguna referencia ni a la belleza ni al arte. Pelayo (1999) define la *estética* de manera más amplia como el estudio de las experiencias estéticas y los juicios estéticos en general, y no solo los relativos a la belleza. Por otra parte, Scruton y Munro (2017) subrayan que la *estética* es una disciplina más amplia que la filosofía del arte, en tanto que los juicios y las experiencias estéticas se pueden encontrar también fuera del arte. Y finalmente para otros autores como Malagón (2007), la *estética* es una rama de la Filosofía que estudia la percepción en general, sea sensorial o entendida de manera más amplia, tratando entre otros aspectos, el conocimiento sensible que se adquiere a

través de los sentidos, no solo los cinco comúnmente conocidos, también otros como la propiocepción y la termocepción. Las percepciones provocan emociones y sentimientos que están en la base de la toma de decisiones lógicas y racionales. Podríamos concluir que la estética trata de la belleza en la medida en que lo que se percibe como bello, o lo que simplemente agrada, provoca experiencias estéticas. De igual modo, podríamos decir que la estética trata sobre arte en la medida en que la belleza que se percibe en el arte provoca experiencias estéticas.

La vinculación de la estética con la actividad matemática está avalada no solo porque en sus orígenes históricos en relación al estudio de la belleza, conceptos matemáticos como el número, la proporción, la simetría, etc. hayan jugado un papel importante, sino también por la importancia que relevantes científicos y matemáticos han dado al sentimiento estético en su actividad. Root-Bernstein (2002) propone que los juicios estéticos influyen en la toma de decisiones de los investigadores que trabajan en diferentes áreas científicas, en particular en la investigación matemática. Algunos matemáticos, como por ejemplo Poincaré (1908/2012), piensan que la estética es un factor primordial en el pensamiento matemático.

En el ámbito de la educación matemática existen razones para que estas consideraciones estéticas sean tenidas en cuenta. En primer lugar, la vinculación entre la estética y la cognición, revelada tanto por estudios neurológicos (Damasio, 2005) como filosóficos (Dewey, 1934/2005), es importante en sí misma para la enseñanza en general. En segundo lugar, porque conocer matemáticas incluye conocer los valores estéticos asociados a esta ciencia, lo que llevaría a la necesidad de diseñar métodos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, adecuados a tal fin. Y finalmente, si la cualidad de estético se refiere a todo aquello que gusta, que atrae o despierta admiración (Tatarkiewicz, 2006), las consideraciones estéticas en la educación matemática pueden ser un elemento más que nos acerque al logro del objetivo educativo que hace alusión a conseguir el éxito para todos (Betts y McNaughton, 2004).

Así pues, la intención investigadora de este trabajo es explorar el papel que pueden jugar las consideraciones estéticas en la mejora del aprendizaje de los alumnos en la asignatura de matemáticas. Un primer objetivo ha sido realizar una revisión no sistemática (dado el carácter exploratorio del trabajo) del estado de la cuestión; el segundo objetivo, valorar hasta qué punto los criterios estéticos que aparecen en la literatura son compartidos por los alumnos de ESO; y el tercer objetivo, explorar en qué medida, a través de los contenidos matemáticos, se vislumbra en los alumnos la aparición de consideraciones y experiencias estéticas que favorezcan el aprendizaje de las matemáticas.

ANTECEDENTES Y FUNDAMENTACIÓN

Ferrater-Mora (1986) y Honderich (2001) comienzan su relato sobre la historia de la estética a partir de Kant y su obra “Crítica del Juicio” (Kant, 1790/2007). Ferrater-Mora (1986) también menciona la obra *Aesthetic* (Baumgarten, 1750) del filósofo alemán Alexander Gottlieb Baumgarten, como la primera obra en la que, con el título de Estética, se trata a esta como la ciencia del conocimiento sensible y sensorial y su expresión a través del arte. Baumgarten contraponen la estética a la Lógica, entendida esta última como la ciencia del saber cognitivo y racional (Marcos, 2003). Además,

Baumgarten separa el estudio del arte del estudio de la belleza en general, pero sigue considerando el conocimiento sensible como algo inferior y confuso. Ferrater-Mora (1986) y Honderich (2001) señalan a Kant como el primer filósofo que trata el estudio de la sensación en el sentido de la ciencia de los principios de la sensibilidad, sin relacionarlo directamente con el arte.

Ferrater-Mora (1986) y Honderich (2001) se refieren a lo que podría considerarse como los estudios, anteriores al siglo XVIII, correspondientes al ámbito de lo que posteriormente, en el siglo XVIII, fue llamado *estética*. Estos trabajos consistirían fundamentalmente en el estudio de la esencia de lo bello. Tatarkiewicz (1986/2006) apunta que el estudio de la belleza comienza con los pitagóricos y su “Gran Teoría” según la cual la belleza consiste en la proporción y el buen ordenamiento de las partes y el todo. Esta concepción de lo bello se arrastró a lo largo de la Antigüedad “identificando lo bello con lo bueno en una unidad de lo real perfecto, subordinando... el valor de la belleza a valores extraestéticos” (Ferrater-Mora, 1986, p. 1.032). De esta forma, la Gran Teoría pasa a la Edad Media y sigue vigente hasta el siglo XVIII. Durante todo este tiempo es completada con otras tesis: su carácter racional, ya que se percibe por la mente, no por los sentidos; su carácter numérico; su base metafísica, dado que responde a una ley universal que a partir del cristianismo adquiere un carácter teológico —Dios crea el mundo basándose en las proporciones— y finalmente la tesis objetivista, según la cual, la belleza es un rasgo objetivo de las cosas. La objetividad de esta teoría se va deteriorando a lo largo de los siglos a favor de una subjetividad que en el siglo XVI Petrarca expresa como “la belleza es un no sé qué” (Zaparaín, 2009, p. 10).

Kant (1790/2007) intenta aclarar el embrollo entre la objetividad y la subjetividad de la belleza. Según él, los enunciados sobre la belleza son generalizaciones inductivas de juicios individuales que, siendo subjetivos, tienen vocación de universalidad. Otros estudiosos de la *estética* se embarcarán en la tarea de la búsqueda de dichos universales estéticos.

Ferrater-Mora (1986) apunta que se puede hablar de concepciones objetivistas y subjetivistas dependiendo de que se consideren o bien la naturaleza de los objetos estéticos o bien el origen de los juicios estéticos. En el siglo XIX el empirismo inglés y el romanticismo alemán pasaron a centrarse en la experiencia estética y sus fases: (a) excitación, (b) pérdida de conciencia y concentración en la cualidad del objeto y (c) aprehensión de la cualidad.

Ferrater-Mora señala otras concepciones de la *estética* que surgen posteriormente en el siglo XX, considerando también la noción de esta como filosofía del arte: la formalista, la intuicionista, la axiológica, la semiótica, la psicológica, etc.

La *Estética Psicológica* o *Estética Empírica* tiene como objeto de estudio la experiencia estética y según Jacobsen (2010) cuenta entre sus influencias con las teorías de la Gestalt (Arnheim, 1974/2001) cuyo principio rector era “el todo es más que la suma de las partes” (Leone, 1998, p. 1). Según esta escuela, la información que llega a la mente, a través de los canales sensoriales y la memoria, es configurada por dicha mente usando ciertas leyes de percepción, llamadas leyes Gestalt; como por ejemplo, la ley de la *pregnancia*, según la cual un elemento es *pregnante* sobre los demás si es percibido con mayor rapidez por el ojo humano. Desde la perspectiva de la *estética empírica*, la *estética* no consiste únicamente en el estudio del arte y de la belleza, sino en el estudio de lo que se entiende por una experiencia estética. La experiencia estética

surge de la interacción de un objeto u entidad, un sujeto y una situación (Jacobsen, 2006). La experiencia estética, como indica Neisser (1967), es un estado subjetivo que no está directamente vinculado con una característica del objeto, ya que la percepción deja de ser entendida como un proceso pasivo sino como un proceso activo de construcción de una representación significativa del mundo, susceptible de características y eventos transitorios, contextuales y de objetivos e intenciones personales. Además, siguiendo a Shustermann (1997), la experiencia estética parece presentar tres características: (a) dimensión evaluativa, consistente en la valoración de un objeto; (b) dimensión fenomenológica o afectiva, ya que es subjetivamente sentida. Las emociones involucradas están relacionadas con el sistema de recompensa de gusto y placer; (c) dimensión semántica, en el sentido de que es una experiencia significativa, no una simple sensación.

Dentro de la Filosofía de la Ciencia, la estética pasa también de entenderse como el estudio de lo bello, a entenderse como una componente más que, junto a lo afectivo y lo cognitivo, da lugar al conocimiento. La estética proporciona un sentido del orden que supone un sistema inicial de aprendizaje al permitir detectar variaciones en el entorno y organizar las percepciones (Gombrich, 1979). Este sentido del orden es heredado en la anatomía, la psicología, la cognición y el comportamiento humano y dado que permite dominar el entorno, produce satisfacción emocional y consecuentemente bienestar físico.

En el terreno de las matemáticas, como indica Sinclair (2009), no existe ninguna teoría general de la estética, sin embargo, muchos expertos han descrito teoremas y demostraciones matemáticas en términos estéticos: Platón creía en la preexistencia de un orden matemático origen de la belleza y armonía del mundo; Hardy considera que las matemáticas son un arte; Krull considera que las matemáticas expresan la verdad de forma estética, inteligente, simple y concisa; Poincaré considera que el trabajo matemático se da a nivel subconsciente y que una especial sensibilidad estética permite seleccionar las mejores ideas que podrían llevar al resultado final. Sinclair (2009) señala que esta selección de ideas implica poner en juego valores y preferencias humanas. Además, en este proceso de selección tienen gran relevancia los juicios estéticos y en dicho proceso se ponen de manifiesto las distintas implicaciones en el tratamiento de la estética que tiene el hecho de preguntarse hasta qué punto estos juicios estéticos son o no objetivos.

Desde el punto de vista del objetivismo cuyos orígenes, como se ha indicado, están en la Antigua Grecia, se establecen las premisas: (a) los juicios estéticos son verdaderos e inmutables, (b) se pueden establecer criterios para identificar los objetos matemáticos, (c) estos criterios se aplican a los objetos estéticos en sí mismos, y (d) los matemáticos estarán de acuerdo en los valores estéticos de los objetos matemáticos.

Siguiendo estas premisas, Sinclair (2009) recoge que las investigaciones sobre estética en las matemáticas, realizadas desde el punto de vista del objetivismo, se plantean cuestiones como: ¿Qué criterios, cualidades o características estéticas determinan la belleza matemática? ¿Qué demostraciones matemáticas tienen valor estético?

Siguiendo las explicaciones de Honderich (2001), un objeto tiene valor estético si es capaz de provocar en el sujeto observador ciertas respuestas que dan lugar a una experiencia que se puede calificar de estética. Estas respuestas producen cierta

satisfacción al contemplar o experimentar el objeto, hay un agrado desinteresado, en el sentido de que no se da porque el objeto cumpla una función, colme un deseo o eleve a un nivel superior al sujeto que lo contempla o experimenta. Este tipo de respuestas están relacionadas con nuestra naturaleza común de sujetos que experimentan y fundamentadas en el placer provocado por la forma del objeto, tal y como es presentado a la percepción, provocando un juicio estético que si bien es individual, si la respuesta subjetiva está entre las que daría cualquier otro individuo, dicho juicio puede considerarse universal.

Las concepciones absolutistas u objetivistas de la estética, que son aquellas desarrolladas desde el objeto, entienden que los valores estéticos son objetivos y residen en el objeto (Ferrater-Mora, 1986). El criterio para determinar si un objeto tiene valor estético sería que este provoque experiencias estéticas y las cualidades estéticas serían aquellas cualidades del objeto que hacen que este provoque experiencias estéticas. Las concepciones subjetivistas o relativistas de la estética, que son aquellas desarrolladas desde el sujeto, entienden que los valores estéticos son subjetivos (Ferrater-Mora, 1986). Como se ha mencionado, desde la estética empírica se entiende que la experiencia estética surge de la interacción de un objeto u entidad, un sujeto y una situación (Jacobsen, 2006).

Volviendo al campo de las matemáticas, Durán (2001), desde una visión objetivista de la estética, encuentra que los objetos matemáticos con valor estético son los razonamientos matemáticos, pero que estos requieren de estudio y análisis dado que no poseemos un sentido que nos permita su percepción. Siguiendo a Hardy (1940/1999), Durán (2001) propone como cualidades estéticas de los razonamientos matemáticos la generalidad, la profundidad y la capacidad de lo inesperado, de lo inevitable y la economía. También desde la perspectiva objetivista, Ernest (2015) entiende que las entidades matemáticas que proporcionan estímulos son los teoremas, los conceptos, métodos, pruebas, teorías, aplicaciones y modelos. Las cualidades estéticas de estas entidades propuestas son: economía, simplicidad, elegancia; generalización, abstracción, potencial; sorpresa, sagacidad, ingenio; patrón, estructura, simetría, regularidad, diseño visual; lógica, rigor, razonamiento y deducción estrictos, pensamiento puro; interconexión, vínculos, rigurosidad; aplicabilidad, posibilidad de modelado, generalidad empírica. Dreyfus y Eisenberg (1986) creen que la simplicidad, concisión y claridad son factores que contribuyen al valor estético de un argumento pero que la estructura, la potencia, el ingenio y la sorpresa son más relevantes.

Esta visión objetivista de la estética matemática ha sido puesta en entredicho por los resultados de los trabajos de otros investigadores, como Wells (1990) y Brinkmann y Sriraman (2009). Wells llega a la conclusión de que en la categorización estética de los teoremas matemáticos entran muchos factores en juego, empezando por las diferentes áreas de trabajo de los matemáticos, pasando por las modas temporales, y finalmente la propia idiosincrasia de los individuos. Brinkmann pone también de manifiesto la dificultad de clasificar las categorías estéticas relacionadas con las matemáticas, pero constata que los matemáticos profesionales encuentran una relación entre el grado de atracción estética y el grado de creatividad en la actividad matemática.

Así pues, dado que, como indica Wechsler (1978), la búsqueda de los criterios y/o méritos estéticos que hacen que un objeto, teorema, demostración, representación, o problema matemático sea *bello* se presenta difícil de acotar, ya en el siglo XIX, al igual

que ocurrió con la estética en general, dentro de la Filosofía de la Ciencia se ponen las bases para orientar las investigaciones sobre estética hacia los procesos de creación y actividad científica y matemática.

Según esta autora, si bien se entiende que lo estético es lo percibido por los sentidos, existen relaciones separadas de su sustrato perceptivo que siguen sujetas a consideraciones estéticas. Estas consideraciones estéticas juegan un papel generador de pautas y guías que afectan a la forma, desarrollo y adecuación de expresiones científicas. Además, la comprensión de ideas, de principios y de procesos de resolución de problemas provoca una clase de reacción que podemos calificar de deleite estético (Wechsler, 1978).

Otros investigadores como Root-Bernstein (2002) consideran la estética como una componente de la cognición humana, una forma de conocer con sus propias leyes que estudia lo bello, y lo bello se da en cualquier ámbito de la experiencia humana, provocando experiencias estéticas. En su artículo “Aesthetic cognition” presenta testimonios de científicos de alto nivel y de muy diversos ámbitos que manifiestan haberse dedicado a sus estudios científicos motivados por el placer estético que encontraban en ellos.

Según este autor, en el campo de la investigación científica el conocimiento intelectual comienza con una intuición, que se puede calificar de estética por estar basada en lo sensitivo, que provoca reacciones emocionales. Las emociones provocadas por lo percibido a través de los sentidos dan lugar a un tipo de conocimiento pre-lógico llamado *conocimiento estético* basado en la intuición y cargado de emoción. Este tipo de conocimiento es considerado pre-lógico en el sentido de que la persona conoce algo antes de poder expresarlo con palabras. Este conocimiento estético y pre-lógico debe ser posteriormente traducido al lenguaje formal con la dificultad que conlleva el hecho de que el conocimiento estético no es lineal, pero el lenguaje formal sí lo es. La cognición estética rompe con la creencia de que lo que no se puede expresar no se puede pensar, ignorando las formas de pensamiento visual, cenestésico y sensitivo. Muchos científicos entienden cosas antes de poder expresarlas. Root-Bernstein (2002) considera que el desarrollo de una meta-lógica formal permitiría una mejor comprensión de la actividad científica y tendría importantes implicaciones en el desarrollo de la inteligencia artificial.

La aproximación pragmática a la estética matemática también supone un reto al objetivismo, aunque no centrado en la valoración de productos acabados, sino en la práctica matemática de la investigación. Basándose en entrevistas con matemáticos, en la estructura de la investigación matemática y en los valores que caracterizan a las matemáticas, Sinclair (2004), poniendo la atención en los procesos de creación y actividad matemática, diseña un modelo tripartito del papel de la estética en la investigación matemática y describe de qué forma los valores estéticos están involucrados en la selección de problemas, en la generación de hipótesis y conjeturas y en la evaluación de las soluciones matemáticas. Concluyendo que los valores estéticos juegan un papel motivador para elegir la investigación entre los diversos campos de la Matemática, generador de ideas e hipótesis durante la investigación y evaluador de los productos matemáticos obtenidos y que no intervienen solamente en el juicio sobre productos acabados como los teoremas y sus demostraciones.

En el campo de la Educación Matemática, las investigaciones relacionadas con la concepción objetivista de la estética ponen de manifiesto hasta qué punto los criterios y juicios estéticos manifestados por los estudiantes coinciden con los de los matemáticos profesionales, concluyendo, en la mayoría de los casos, que la estética matemática es inaccesible para los estudiantes hasta que no adquieran un nivel avanzado de conocimientos. Poincaré (1908/2012) entiende que solo los matemáticos gozan de una sensibilidad estética especial para las matemáticas. Dreyfus y Eisenberg (1986) concluyen que los estudiantes manifiestan falta de sensibilidad estética al no coincidir sus preferencias estéticas con las de los matemáticos profesionales. Brinkmann (2009), preguntándose “hasta qué punto los criterios estéticos encontrados en la literatura coinciden con las emociones de los estudiantes” (p. 365), llega a la conclusión de que hay diferencias con respecto a los matemáticos profesionales. Como indica la autora, dentro de las limitaciones de su estudio, para los estudiantes los problemas deben referirse a aplicaciones prácticas y se les deben presentar problemas desafiantes pero que sean capaces de resolver. Brinkmann (2009) concluye que,

deberíamos crear fases en las clases, las cuales tengan una atmósfera en la que no predomine la demanda de éxito. Por el contrario, estas fases darían a los estudiantes tiempo para el ocio, tiempo y libertad para simplemente disfrutar de las Matemáticas. (p. 378)

Pero también en el ámbito de la Educación Matemática han sido desafiadas muchas de las creencias relacionadas con la perspectiva objetivista de la estética. Por ejemplo, Papert (1978) comprueba que personas no matemáticas pueden dejarse guiar por consideraciones estéticas que les lleven hacia ideas matemáticas que son correctas y dichas consideraciones estéticas están relacionadas con reacciones emocionales hacia la forma y la estructura de una ecuación (deseo de deshacerse de una raíz cuadrada, colocar la variable importante en un lugar destacado, etc.). Las consideraciones estéticas, parecen provocar reacciones emocionales que son guías para la acción.

Igualmente, los trabajos de Brown (1973) y Sinclair (2001, 2006) cuestionan las conclusiones obtenidas desde el punto de vista objetivista sobre la sensibilidad estética de los estudiantes de matemáticas. Brown comprueba que la diferencia entre los juicios estéticos utilizados por matemáticos profesionales y los utilizados por los estudiantes de matemáticas para elegir soluciones, no está relacionada con una falta de sensibilidad estética por parte de los estudiantes, como parecen sostener Dreyfus y Eisenberg (1986), sino con el hecho de que estos últimos prefieren sus propias soluciones porque en ellas recogen el proceso de resolución del problema, contribuyendo a una mejor comprensión del mismo por parte del alumno. Sinclair (2001), por su parte, aplica su modelo tripartito del papel de la estética en la investigación matemática a la resolución de problemas en el aula, comprobando que los estudiantes usan valores estéticos para elegir problemas, generar conjeturas y evaluar soluciones. Hay casos en los que coinciden con algunos de los valores estéticos entendidos como matemáticos, por ejemplo, la utilidad, el atractivo visual y la sorpresa.

El trabajo de Aizikovitsh-Udi (2014), como el modelo tripartito de Sinclair (2004), pone la atención en los procesos de creación y actividad matemática, investiga para hasta qué punto 57 alumnos de 12 y 13 años pertenecientes al programa “Mathematically Talented Youth Program” manifiestan creatividad y pensamiento

estético en la resolución de problemas no rutinarios. Dicho programa tiene como objetivo, por un lado, que los alumnos con especial talento para las matemáticas puedan hacer su examen final de matemáticas de bachillerato dos años antes de acabar el bachillerato y, por otro lado, que en caso de obtener la puntuación más alta, puedan durante los dos cursos últimos del bachillerato dedicarse al estudio de contenidos de matemáticas correspondientes al nivel universitario en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Bar Ilan, con el fin de dotar a los alumnos de una base matemática sólida y orientar sus estudios universitarios a grados de ciencias como Económicas, Medicina, Ciencias de la Salud, etc. La autora del estudio concluye, respecto al uso de la estética, que “los alumnos no parecen desarrollar un alto nivel de estética matemática cuando resuelven problemas, ya que confían en gran medida en el conocimiento previo requerido...” (Aizikovitsh-Udi, 2014, p. 239). Este resultado es interesante, ya que en otro estudio mencionado (Brinkmann y Sriraman, 2009) se refleja que, en el caso de los matemáticos profesionales, la estética es una importante componente de la creatividad matemática. Por ello, Aizikovitsh-Udi sugiere que “futuros estudios examinen el apoyo a la enseñanza y las experiencias de aula que ofrezcan el desarrollo de la creatividad y la estética matemática” (2014, p. 239).

Volviendo a los tres papeles que juega la estética en la actividad matemática de los matemáticos profesionales: motivador, generador y evaluador, Eberle (2011) ha argumentado que dichos papeles de la estética son jugados en la resolución de problemas también por los estudiantes de matemáticas de niveles básicos de enseñanza, ya que,

todos tenemos un sentido estético debido al deseo innato de imponer orden a nuestra percepción del mundo. Por tanto, es natural suponer que la estética, esta habilidad innata de ordenar nuestra experiencia, guiaría a todo el mundo que hace Matemáticas, entendidas estas como el estudio de patrones y estructuras. (p. 48)

Además propone que para que los estudiantes participen del pensamiento matemático es necesario trasladar los papeles de la estética a la resolución de problemas.

Respecto al papel motivador de la estética en las actividades matemáticas llevadas a cabo por los alumnos, las cualidades que llevan a los alumnos a percibir ciertas relaciones, patrones o estructuras y que por tanto juegan un papel motivador son, por ejemplo, la simplicidad aparente, la sorpresa, el hecho de que los problemas conecten con la experiencia y que sean atractivos a la vista, entre otras (Sinclair, 2006).

Entre los problemas mencionados por Sinclair (2006) que atraen a los estudiantes, se encuentran aquellos en los que se trabajan conjuntos de infinitos elementos, bien porque transforman lo dispar para encontrar algún tipo de unicidad, o bien porque logran exhaustividad, encuentran propiedades y relaciones que sirven para todos los casos.

Eberle (2011) sostiene que los alumnos se sienten atraídos por la exploración matemática en sí misma, que no es necesario crear artificiosos problemas relacionados con la vida cotidiana o añadir “actividades divertidas externas al problema, ya que el mensaje que reciben los alumnos es que las matemáticas son tan poco atractivas que necesitan extra de azúcar” (p. 50). También entiende que intentar atraer a los alumnos

mediante otras materias como el arte, la música, la economía, etc. es obviar el sentido estético de la propia Matemática.

Según Sinclair (2006) y Eberle (2011), hay que crear las condiciones que permitan a los alumnos la exploración necesaria en situaciones problemáticas que les lleven a plantearse los problemas. Se les deben proponer tareas con la dosis suficiente de falta de claridad, de indefinición y de confusión que les motive a indagar en situaciones problemáticas sin abandonar y dando lugar a la cadena: (a) sorpresa y atracción, (b) percepciones, (c) interpretaciones y conjeturas y (d) experimentación. En conclusión, se da el impulso estético de imponer estructura y orden, de organizar y crear patrones propios de la actividad matemática.

Tratando el papel generador de la estética en la Educación Matemática, Sinclair (2006) comenta que debido a que “ocurre en un proceso potencialmente largo de tiempo con infrecuentes manifestaciones observables,... es el más difícil de observar de los tres papeles” (p. 99). De hecho, Poincaré (1908/2012) señaló que en el trabajo de los matemáticos, este papel de la estética se da a nivel subconsciente. Papert (1978) refuta las ideas de Poincaré mostrando, a través de varias experiencias con personas que no son matemáticos profesionales, que cualquier persona puede mostrar sensibilidad estética en pensamientos matemáticos elementales y que todos podemos hacernos conscientes de nuestras respuestas estéticas a través de los sentimientos que generan. Se entiende que,

una respuesta estética a una cierta configuración es generadora cuando la respuesta conduce al investigador a seguir un cierto camino en su estudio porque siente que la configuración que le ha atraído le puede conducir a alguna señal o hecho relevante. (Sinclair, 2006, p. 100)

Eberle (2011) señala que, al igual que en el caso de los matemáticos profesionales, el papel generador de la estética es fundamental en la resolución de problemas para estudiantes de niveles básicos de enseñanza, ya que cuando los alumnos resuelven problemas abiertos tienden a examinar las posibilidades que les resultan atractivas y en muchas ocasiones estas les llevan a la solución. Sinclair (2006) muestra ejemplos en los que las posibilidades o configuraciones que los estudiantes tienen en cuenta les pueden resultar atractivas por su: simetría, simplicidad, precisión, exactitud,....

Respecto al papel evaluador de la estética en las matemáticas, los matemáticos profesionales evalúan estéticamente entidades matemáticas, como teoremas, para establecer valores personales fundamentalmente colectivos. Los escolares no tienen esta oportunidad de evaluar resultados, ya que a ellos se les presentan las matemáticas como algo acabado y cierto. Sin embargo, el uso de problemas abiertos con varias soluciones muestra a los alumnos que hay diversas formas de pensar y de enfrentarse a un problema o situación problemática. Sinclair (2006) ha encontrado que los alumnos usan criterios estéticos para valorar el método de resolución y las soluciones de problemas, como por ejemplo: que sean generalizables, novedosos, claros y transparentes, y visualmente atractivos. Este último criterio no suele ser considerado entre los matemáticos profesionales, pero como señala Eberle (2011):

Incluso los resultados no visuales son considerados más atractivos si se pueden explicar mediante gráficos, diagramas u otros medios visuales. La presencia de simetría visual, formas inusuales, una cantidad moderada de

complejidad visual o patrones que son claros a la vista hace los resultados más atractivos. (p. 39)

EXPERIENCIAS ESTÉTICAS DE LOS ALUMNOS EN MATEMÁTICAS

Mediante dos técnicas metodológicas, la encuesta y el estudio de casos, buscamos conocer si los criterios estéticos manifestados por matemáticos son compartidos por un grupo de alumnos cuando dichos criterios se refieren a la resolución de problemas —en el primer caso y en el segundo— si aparecen consideraciones estéticas cuando los estudiantes se enfrentan a la resolución de problemas de contenidos matemáticos. La técnica de la encuesta en busca de los criterios estéticos supondría una exploración del papel de la estética en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde una concepción objetivista de la estética y la del estudio de casos desde una concepción de la estética empírica que busca explorar el papel de la estética teniendo en cuenta el objeto, el sujeto y la situación (Jacobsen, 2010).

La encuesta

El objeto de esta encuesta ha sido contrastar hasta qué punto los criterios estéticos que son manifestados por matemáticos profesionales, y que aparecen en la literatura referidos a la actividad matemática y a los objetos matemáticos, son compartidos por un grupo de alumnos de ESO, cuando estos criterios se refieren a la resolución de problemas. Como instrumento de recogida de datos hemos utilizado una traducción del cuestionario desarrollado por Brinkmann (2009).

El cuestionario consta de tres preguntas, las dos primeras son abiertas y la tercera es cerrada. Las preguntas abiertas son:

1. Escribe uno o varios problemas matemáticos que te gusten, anota su contenido.
2. ¿Cuándo te parece que un problema matemático es “atractivo”?

En la tercera, la pregunta cerrada, los alumnos deben elegir entre un listado de 29 características relacionadas, por un lado, con las que los matemáticos profesionales manifiestan que hacen que un problema sea “bonito”; y por otro lado, con características sugeridas por profesores de matemáticas como: complejidad, simplicidad, elegancia, interés, sorpresa, novedad, simetría, regularidad, claridad, estructura y aplicabilidad. La última opción permite que los encuestados sugieran alguna otra característica de un problema bonito.

3. ¿Cuáles son desde tu punto de vista las características de un problema matemático “bonito”?
 1. El problema es ingenioso.
 2. La solución del problema es simple.
 3. El problema es complicado.
 4. El problema parece complicado pero tiene una solución simple.
 5. El problema es simple.
 6. La solución del problema es elegante.
 7. El problema es complejo.
 8. El problema y su solución son fáciles de entender.
 9. El problema no es familiar para mí.

10. El tema del problema es interesante.
11. El problema tiene una solución sorprendente.
12. La solución del problema es evidente.
13. La naturaleza del problema es familiar para mí.
14. La naturaleza del problema es nueva para mí.
15. La solución del problema puede ser fácil de adivinar.
16. El problema parece simple pero su solución es complicada.
17. Se consideran patrones, modelos o estructuras regulares.
18. La solución del problema es complicada.
19. El problema es un rompecabezas.
20. El problema requiere de varios pasos de solución.
21. El problema está relacionado con figuras simétricas.
22. Es posible resolver el problema por consideraciones lógicas, sin hacer cálculos.
23. La solución del problema muestra regularidades que no esperabas.
24. El problema se refiere a aplicaciones de la vida real.
25. El problema tiene más de una solución posible.
26. El problema y su solución están claramente estructurados.
27. En el problema los hechos se presentan con claridad.
28. La solución del problema es significativa para otras aplicaciones.
29. El problema requiere un examen intelectual complejo.
30. Otras características...

Las características 1, 3, 7, 9, 18, 19 y 29 están relacionadas con la complejidad; las 2, 5, 8, 12, 13 y 15 están relacionadas con la simplicidad y las 4 y 16 con ambas. La 6 con la elegancia, la 10 con el grado de interés del problema, la 11 y 23 con la sorpresa, la 13 y la 14 con la característica de la novedad y las 17, 21 y 23 se refieren a la simetría y la regularidad. Las características 26 y 27 están relacionadas con la claridad y la estructura, las 24 y 28 hacen referencia a las aplicaciones de los problemas y la 25 a los problemas de final abierto. Las características 20 y 22 fueron añadidas por la autora del cuestionario como consecuencia de las respuestas de los estudiantes a las preguntas abiertas.

Las preguntas abiertas 1 y 2 proporcionan respuestas de tipo cualitativo para ayudar a interpretar las respuestas dadas a la pregunta cerrada 3 y para detectar otras características que no están recogidas entre las respuestas de la pregunta 3 y que hacen que los problemas sean bonitos desde el punto de vista de los estudiantes (Brinkmann, 2009).

Debido a razones de intencionalidad o conveniencia (Cohen, Manion y Rodríguez, 1990), en la encuesta han participado 15 alumnos de cuarto de ESO de Matemáticas opción A, no habiendo en la muestra alumnos de Matemáticas opción B que suelen estar considerados con mejores aptitudes y actitudes hacia las matemáticas. A este grupo se unieron dos de los alumnos del grupo de Refuerzo de Matemáticas de segundo de ESO que participaron también en el estudio de casos.

De los 17 alumnos, siete presentan calificaciones académicas medias en la asignatura de matemáticas y 10 presentan calificaciones académicas bajas. De los siete alumnos que representan calificaciones académicas medias, uno de ellos selecciona

todas las características de un problema bonito de la tercera pregunta del cuestionario, por ello se suprimen sus respuestas en el recuento de resultados.

Descripción y discusión de los resultados de la encuesta

Los resultados que aparecen en la tabla 1 reflejan que las características que más valoran los alumnos en un problema se refieren a la facilidad, simplicidad y claridad en la comprensión y la resolución del mismo, ya que siete de los nueve ítems más valorados (78%), se refieren a estas cuestiones.

Tabla 1

Resultados de las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario

Ítem	Enunciado	Calificaciones		
		Total	Mejores	Peores
8	El problema y su solución son fáciles de entender.	12 (75%)	5 (83%)	7 (70%)
2	La solución del problema es simple.	10 (63%)	3 (50%)	7 (70%)
5	El problema es simple.	10 (63%)	5 (83%)	5 (50%)
24	El problema se refiere a aplicaciones de la vida real.	10 (63%)	5 (83%)	5 (50%)
27	En el problema los hechos se presentan con claridad.	10 (63%)	5 (83%)	5 (50%)
10	El tema del problema es interesante.	9 (56%)	4 (67%)	5 (50%)
12	La solución del problema es evidente.	9 (56%)	4 (67%)	5 (50%)
15	La solución del problema puede ser fácil de adivinar.	9 (56%)	3 (50%)	6 (60%)
22	Es posible resolver el problema por consideraciones lógicas, sin hacer cálculos.	7 (44%)	2 (33%)	5 (50%)

La característica más importante de un problema bonito para estos estudiantes es que el problema y su solución sean fáciles de entender (característica 8) con 75%, seguido de que la solución del problema sea simple (2) con 63%, o bien que el problema sea simple (5) con 63%.

El mismo porcentaje de alumnos (63%), de las dos últimas características, opinan que los problemas bonitos deben referirse a problemas de la vida real (24) y deben presentar los hechos con claridad (27).

Seguidamente un 56% de los alumnos considera como características de los problemas bonitos que la solución del problema sea evidente (2), que la solución del

problema pueda ser fácil de adivinar (15) y que el tema del problema sea interesante (10).

La característica referida a que el problema bonito pueda resolverse por consideraciones lógicas, sin hacer cálculos (22) es seleccionada por un 44% de los alumnos.

Ningún alumno ha considerado como características propias de un problema bonito que el problema sea complicado, el problema sea complejo, el problema requiere un examen intelectual complejo o que se consideren patrones, modelos o estructuras regulares (características 3, 7, 29, 17).

Las respuestas dadas por los alumnos también se diferencian de acuerdo a sus calificaciones en la asignatura de matemáticas. Se considera por un lado al grupo formado por seis alumnos que son el primer tercio con calificaciones académicas medias y por otro lado a los dos tercios restantes que suponen 10 alumnos de los 16 que quedan al no contabilizar los datos correspondientes al alumno que selecciona todas las características propuestas para calificar a un problema como bonito.

La primera diferencia entre el grupo de alumnos con resultados académicos medios y el grupo con resultados académicos bajos es que los primeros seleccionan una media de ocho respuestas y los segundos una media de seis respuestas.

Entre los alumnos del grupo de mejores calificaciones de las cuatro características más seleccionadas (83%), solo una coincide con una de las tres más seleccionadas (70%), por el grupo de los alumnos con peores calificaciones, que es la característica más seleccionada: 8 (el problema y su solución son fáciles de entender). Las otras dos más seleccionadas por los alumnos del grupo con peores calificaciones son: 2 (la solución del problema es simple) con 70% y 15 (la solución del problema es fácil de adivinar) con 60%. Mientras que las otras tres características más seleccionadas por los alumnos del grupo con mejores calificaciones (83%), son: 5 (el problema es simple), 24 (se refiere a aplicaciones de la vida real) y 27 (en el problema los hechos se presentan con claridad).

Por tanto, se puede concluir que la simplicidad, las aplicaciones en la vida real y el interés del tema son las características más valoradas, poniendo de manifiesto que para los estudiantes y los matemáticos profesionales la simplicidad es un criterio valorado, pero con diferentes significados. Por un lado, los alumnos se refieren a la simplicidad de los problemas en el sentido de facilidad, mientras que los matemáticos profesionales se refieren a la economía de medios en contraposición a la complejidad, por ejemplo, soluciones sencillas de problemas complejos, demostraciones sencillas de teoremas sobre relaciones complejas o representaciones sencillas de estructuras complejas (Brinkmann, 2009).

El estudio de casos

Este estudio de casos es de carácter descriptivo e interpretativo donde el investigador y profesor es un observador participante (Cohen, Manion y Rodríguez, 1990). Los casos de este estudio son cuatro alumnos de ESO resolviendo tres tareas de teselación del plano. La hipótesis de trabajo es que las consideraciones estéticas influyen en los alumnos cuando trabajan contenidos matemáticos, en este caso, los teselados. Se entienden por consideraciones estéticas, los criterios de acción, unidades cualitativas,

percepciones sensoriales, intuiciones y conocimientos referidos a experiencias de la vida cotidiana anteriores al conocimiento formal.

En la tarea 1 deben decidir qué polígonos regulares teselan el plano, dibujar y comprobar sus hipótesis con material manipulativo o con un programa informático. Mediante esta tarea buscamos intuiciones previas al conocimiento formal. En la tarea 2 deben dar una explicación a la situación surgida en la tarea 1. Con esta segunda tarea queremos saber cómo se explica el alumno, si le atrae la confusión y si aparece algún elemento motivador o generador de actividad matemática. En la tarea 3 deben buscar teselados semirregulares y queremos observar qué estrategias usan y si tienen relación con algún tipo de percepción, intuición, etc.

Tanto en la primera como en la tercera tarea, el estudiante tiene la opción de hacer los teselados utilizando unos imanes con las formas poligonales regulares sobre una pizarra metálica (figura 1) o bien utilizando el software Tessellation Creator (figura 2). Proporcionando al alumno estas dos opciones para comprobar sus hipótesis buscamos saber cuáles son sus preferencias respecto al uso de materiales manipulativos y si estas preferencias tienen alguna relación con alguna consideración estética.



Figura 1. Teselados en pizarra magnética

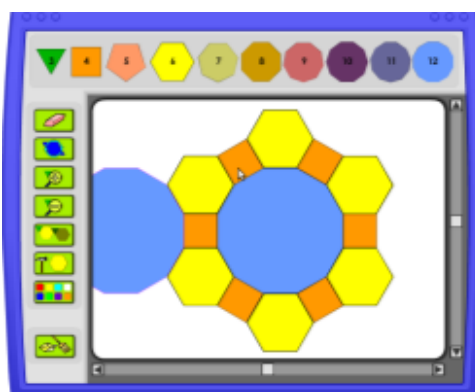


Figura 2. Programa informático Tessellation Creator

Durante todas las tareas, la investigadora observa cómo trabaja cada alumno y recoge sus comentarios. Además, en el transcurso de las tareas hace las preguntas y aclaraciones necesarias para evitar bloqueos que obstaculicen su desarrollo.

Posteriormente, una vez recogidos los datos durante la realización de cada tarea, mediante un análisis cualitativo, se intentan sacar a la luz las consideraciones estéticas que el alumno manifiesta seguir cuando está llevando a cabo las actividades. Dicho

análisis se ha realizado mediante la clasificación de los datos registrados de cada tarea, agrupándolos en temas y categorías de análisis. Después, se analizan las variaciones detectadas en cada categoría de forma transversal a los cuatro casos de estudio.

Se denominaron a los alumnos del estudio como A1, A2, A3 y A4. El alumno A1 tiene 16 años, es de cuarto de ESO y cursa la modalidad de Matemáticas A. En esta área tiene calificaciones medias. Los otros tres alumnos, A2, A3 y A4, de 15, 16 y 15 años respectivamente, cursan segundo de ESO y están en el grupo de Refuerzo de Matemáticas. El alumno A2 tiene buena capacidad para la asignatura de matemáticas, A3 tiene una capacidad baja y A4 presenta una capacidad media, pero todos ellos tienen problemas de comportamiento y malos hábitos de estudio. El criterio de selección de los casos de estudio ha sido la disponibilidad de horario de alumnos y profesores.

Descripción y discusión de resultados del estudio de casos

En la tarea 1 los alumnos deben responder si cada uno de los polígonos regulares teselan el plano, hacer un dibujo del teselado y comprobar si están o no en lo cierto. Disponen de una pizarra metálica con polígonos imantados, y el software Tessellation Creator.

En las respuestas verbales (ver tabla 2), se ha recogido si el alumno responde afirmativa o negativamente a la pregunta de si cada uno de los polígonos regulares tesela o no el plano y además, si al responder hace referencia a alguna situación que pudiera ser una consideración estética, como por ejemplo, consideraciones referidas a la percepción de la forma del polígono, referencias a conocimientos obtenidos de experiencias previas de la vida cotidiana, a intuiciones, etc. que influyan en su respuesta. El dibujo que realiza el alumno recoge si es capaz de dibujar un mosaico con el polígono regular correspondiente y si este hecho le hace cambiar su respuesta. Y en el apartado de prueba se recoge si realiza la comprobación con los polígonos manipulativos imantados o con los del programa informático.

Tabla 2

Respuestas de los alumnos a la tarea 1 sobre teselados regulares

Expresión	Alumnos			
	A1	A2	A3	A4
	Triángulo			
Verbal	Sí	Sí	Sí	Sí
Referencia estética	No	No	No	No
Dibujo	Sí	Sí	Sí	Sí
Prueba	Imanes	Software	Software	Imanes
	Cuadrado			
Verbal	Sí	Sí	Sí	Sí
Referencia estética	No	No	Sí, la experiencia (como un suelo)	No
Dibujo	Sí	Sí	Sí	Sí

Tabla 2
Respuestas de los alumnos a la tarea 1 sobre teselados regulares

Expresión	Alumnos			
	A1	A2	A3	A4
Prueba	Imanes	Software	Software	Imanes
Pentágono				
Verbal	Sí	No	No	Sí
Referencia estética	No	Sí, la forma (por las esquinas)	No	No
Dibujo	Sí	No	No sabe cómo dibujarlo	Sí
Prueba	Imanes	Ordenador	Ordenador	Imanes
Hexágono				
Verbal	Sí	No	Sí	Sí
Referencia estética	No	Sí, la forma (por las esquinas)	Sí, la experiencia (como las colmenas)	Sí, la experiencia (las colmenas, algún suelo)
Dibujo	Sí (dibuja primero un octógono)	No sabe cómo dibujar	Dibuja primero un octógono. Después dice no saber cómo dibujarlo	Sí
Prueba	Imanes	Software	Software	Imanes
Heptágono				
Verbal	Sí, tesela (no reconoce el heptágono, piensa que es un octógono)	No	No	No
Referencia estética	No	Sí, la forma (por las esquinas)	Sí, la experiencia (quedan trozos en blanco al juntar lados)	Sí, la intuición (más lados, va tirando a ser redondo)
Dibujo	No	No dibuja	No dibuja	No dibuja
Prueba	Imanes (alrededor del ángulo completo, solapamiento)	Software	Imanes (lados adjuntos, trozos en blanco)	No intenta

Tabla 2
Respuestas de los alumnos a la tarea 1 sobre teselados regulares

Expresión	Alumnos			
	A1	A2	A3	A4
Octógono				
Verbal	No sabe	No	No sabe	No
Referencia estética	No	Sí, la forma (por las esquinas)	No	Sí, la intuición (más lados, va tirando a ser redondo)
Dibujo	No sabe cómo dibujar	No dibuja	No dibuja	No dibuja
Prueba	Software (no es divisor de 360° y no queda ángulo)	Software	Imanes (solapamiento)	Imanes (lados adyacentes, en el hueco en blanco mete un cuadrado, hace un mosaico)
Eneágono				
Verbal	No sabe	No	No sabe, duda	No tesela
Referencia estética	No	Sí, la forma (por las esquinas)	No	Sí, la intuición (más lados, va tirando a ser redondo)
Dibujo	No sabe	No dibuja	No dibuja	No dibuja
Prueba	Software	No es necesario	Imanes (solapamiento)	No es necesario
Resto				
Verbal	No	No	No	No tesela
Referencia estética	No	No	Sí, la experiencia (van a quedar unos encima de otros)	Sí, la intuición (más lados, va tirando a ser redondo)
Dibujo	No es necesario	No es necesario	No es necesario	No es necesario
Prueba	No es necesario	No es necesario	No es necesario	No es necesario

En la tarea 1 hemos comprobado que los alumnos ante un problema matemático relacionado con teselados, presentan intuiciones previas al conocimiento formal, que se entienden como consideraciones estéticas. Estas intuiciones están relacionadas por un lado con la percepción visual y por otro con la experiencia previa. Respecto a la capacidad de percepción visual, esta parece condicionar las respuestas intuitivas ya que

cuando el número de lados aumenta las intuiciones fallan. Respecto a la experiencia previa, esta se presenta relacionada con vivencias de la vida cotidiana, como cuando los alumnos relacionan el hexágono con un panel de abejas —“con el de seis sí porque queda una colmena” (figura 3)—, y también se presenta relacionada con la experiencia obtenida previamente de la propia situación problemática, por ejemplo en los casos que el alumno responde según lo ocurrido en el caso anterior.

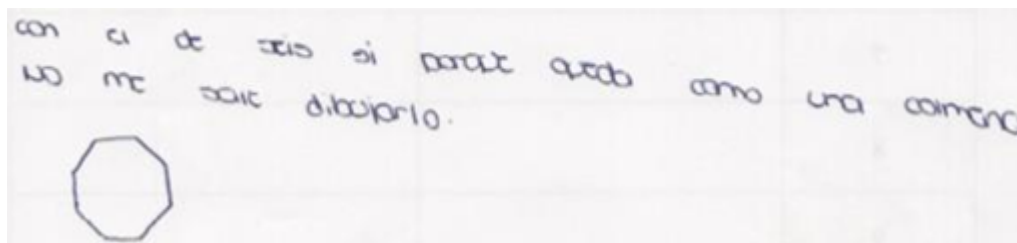


Figura 3. Experiencia previa. Colmena

En la tarea 2, en la que el alumno debía explicar la situación problemática que se produce en la tarea 1, hemos comprobado que, como sugiere Einav Aizikovitsh-Udi (2014), pudiera existir un condicionamiento entre conocimientos matemáticos previos y las intuiciones de tipo estético en una situación problemática, ya que los alumnos que manifiestan un conocimiento mayor sobre los ángulos de los polígonos son capaces de explicar mejor la situación. Esta circunstancia no difiere de lo que ocurre en el mundo del arte: cuantos más conocimientos se tienen sobre los movimientos artísticos más cualidades estéticas se pueden percibir en una obra dada.

También, podría estar ocurriendo que la falta de conocimientos previos pudiera llevar a que la confusión que genera un problema matemático provoque rechazo en el alumno en lugar de atracción, malogrando el papel motivador de la estética.

Finalmente, como sugiere Sinclair (2006), hemos encontrado que los procesos infinitos pudieran estar entre las cualidades que funcionan como papel motivador en problemas matemáticos. Un alumno comprueba que con seis triángulos de ángulo interior con medida de 60° se rellena un ángulo completo y se tesela el plano, lo mismo con cuatro cuadrados (ángulo interior de 90°) y con tres hexágonos (ángulo interior de 120°), deduciendo que tiene que haber un polígono de n lados y ángulo interior de 180° que permita con solo dos unidades cubrir un ángulo completo y teselar el plano. Decide buscar cuánto tiene que valer n para que al sustituir en la fórmula $\alpha = \frac{[(n-2) \cdot 180]}{n}$

obtenemos $\alpha = 180^\circ$. Prueba con $n = 15, 20, 30, 60, 120$ y 150 , viendo que cada vez se acerca más a 180° pero que nunca lo alcanza. Cuando se le pregunta que porqué sigue aumentando el número de lados contesta: “me he rallado y ya lo quiero encontrar”. Seguidamente se le hace ver que no puede existir un polígono cuyo ángulo interior mida 180° . A pesar de que en este caso el proceso reiterativo no lleva al alumno a la solución quizás podamos hablar también de una experiencia estética al darse esta atracción hacia un proceso infinito.

La tarea 3 no nos ha permitido observar en los alumnos estrategias basadas en consideraciones de tipo estético. Las estrategias usadas son el ensayo-error y otra estrategia basada en conocimientos matemáticos formales. La única estrategia que podemos interpretar como basada en una consideración estética es la atracción por los

colores. Pero, como en este caso el color no está relacionado con la situación matemática problemática planteada, este no da lugar a una estrategia que permita encontrar los mosaicos que se buscan.

Tanto en la tarea 2 como en la tarea 3 parece ponerse de manifiesto la Ley de la pregnancia de la escuela Gestalt, según la cual, el lado de los polígonos, y no el ángulo interior, es el elemento pregnante que atrae a los alumnos condicionando sus percepciones, razonamientos y respuestas ante el problema.

Respecto al uso de materiales manipulativos, los alumnos eligen más veces usar los imanes con las formas poligonales sobre una pizarra metálica que el software Tessellation Creator. Parece que prefiriesen aquellos materiales que ponen en juego diferentes tipos de percepciones sensoriales. Quizás esto se deba a que, a más tipos de percepciones, más información disponible y más posibilidades de intuiciones acertadas.

CONCLUSIONES

El primer objetivo planteaba conocer el estado de la cuestión a través de una revisión bibliográfica. Esta revisión nos ha permitido repasar el desarrollo de la estética como concepto y como área de estudio. Este desarrollo ha transitado desde considerar la estética como lo referido a lo bello y artístico, hasta entenderla como aquello relacionado con la percepción sensible, con la intuición, con la experiencia, aquello ajeno al conocimiento formal, que junto a lo afectivo y lo cognitivo da lugar al conocimiento.

En este tránsito, la estética trasciende la Filosofía del Arte encontrando un lugar en la Filosofía de la Ciencia. De esta forma, si la estética es una componente del conocimiento y además tiene un papel en la actividad científica y matemática, tiene sentido estudiar su influencia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La revisión bibliográfica que hemos realizado muestra cómo esta componente, aunque se empezó a estudiar en el siglo XX, está empezando a ser investigada y tenida en cuenta en la Educación Matemática con más relevancia en lo que llevamos de siglo XXI. Siguiendo las líneas de investigación de la estética dentro de la Filosofía de la Ciencia que han buscado los elementos de carácter estético en la actividad profesional de los científicos, hemos presentado estudios dentro de la Educación Matemática orientados a la búsqueda de las cualidades o propiedades de los objetos matemáticos que resultan atractivos para los estudiantes y que puedan provocar en los estudiantes experiencias estéticas que tengan un papel motivador, generador y evaluador en su actividad matemática durante el aprendizaje de las mismas.

El segundo objetivo consistía en valorar si los criterios estéticos de los estudiantes respecto a los problemas matemáticos escolares se asemejan a los que aparecen en la literatura del tema mencionados por matemáticos profesionales. En este caso, a la vista de los resultados, se puede sacar la conclusión de que el criterio más valorado ha sido la simplicidad. Los problemas deben ser simples o resultar simples, al leer, al resolver, hasta los propios resultados si son números deben ser números simples. Este resultado no es generalizable ya que puede haberse debido a las calificaciones académicas medias y bajas en matemáticas de los estudiantes encuestados. Quizás para alumnos de calificaciones académicas altas en matemáticas este resultado podría no ser válido. Por lo demás, en el caso de los científicos y matemáticos profesionales la simplicidad

también es un criterio valorado pero quizás en la acepción de “economía de medios” no en la de que “algo sea fácil”.

El tercer objetivo tenía como meta explorar hasta qué punto se vislumbran consideraciones que puedan ser calificadas de estéticas, es decir, relacionadas con percepciones sensoriales, con intuiciones o con experiencias previas de la vida cotidiana de los alumnos no relacionadas con el conocimiento formal. La realización de la experiencia con los alumnos nos ha permitido observar cómo las percepciones sensoriales, ciertas experiencias previas y el conocimiento formal previo se afectan entre sí a la hora de resolver y explicar situaciones problemáticas relacionadas con las matemáticas. También hemos observado que en una situación problemática relacionada con las matemáticas, si la atracción estética se produce hacia elementos que no tienen relación con ella, estos pueden dar lugar a distracciones. En este sentido, como apunta Sinclair (2006) se hace necesario diseñar actividades en las que se busque atraer a los alumnos por medio de la estética de la propia Matemática y no solo de la de aspectos externos. Finalmente, señalar que hemos podido comprobar que ciertas características de objetos matemáticos, como por ejemplo, los procesos infinitos podrían dar lugar a experiencias de tipo estético en los alumnos.

Respecto a las líneas abiertas que surgen a partir de la exploración bibliográfica, creemos necesario estudiar más profundamente el papel de la estética como componente del conocimiento en general, y de la actividad científica y matemática en particular. El propósito sería determinar qué protagonismo debe tener la estética en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y cómo darle dicho protagonismo a través del diseño del currículo, de los materiales de aprendizaje, de las sesiones de clase, de los métodos de enseñanza colaborativa, de la comunicación entre el profesor y los alumnos y, en general, de los diferentes factores que influyen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, sin olvidar los procesos de globalización que afectan a los ámbitos económicos, tecnológicos, sociales y culturales y por tanto también a la educación.

Por otro lado, relacionado con lo apuntado en el párrafo anterior, creemos necesaria una mejor definición de qué es lo que se entiende por consideraciones, criterios, cualidades estéticas, en general, y referidas al aprendizaje de las matemáticas en particular, ya que la ambigüedad en los términos dificulta fijar qué es lo que se busca y propicia más una actitud consistente en ver si se encuentra algo que pudiera ser una consideración estética. Además, sería necesario conocer si dichas consideraciones dependen de, por ejemplo, la edad de los individuos, de su entorno, y de cualesquiera otros factores en general y en el caso de ser así, necesitaríamos saber de qué forma dichos factores afectan a las posibles consideraciones estéticas que influyen en el conocimiento del entorno por parte de las personas. Esto permitiría diseñar experiencias con alumnos de diferentes edades, niveles de conocimientos, entornos socio-culturales, etc.

Además, la limitación de tiempo para la realización de las tareas parece ser que no propicia el ambiente que se considera adecuado para que los alumnos entren en la situación que se requiere para la reflexión y la búsqueda placentera de soluciones frente a situaciones problemáticas. Por tanto, otra línea abierta a la investigación es el estudio de los tiempos efectivos para que se puedan dar situaciones de deleite estético ante la resolución de problemas matemáticos en un contexto de enseñanza-aprendizaje en los distintos niveles de enseñanza.

Por último, ya mencionamos que los procesos reiterativos hasta el infinito pueden provocar una atracción estética. Así pues, respecto a las líneas abiertas que nos ha sugerido la experiencia con los alumnos, sería interesante investigar cómo deben ser presentados otros conceptos y procesos dentro del currículo de matemáticas para que den lugar a una atracción estética.

La realización de la encuesta nos ha planteado otra serie de líneas abiertas. Por un lado, nos planteamos hasta qué punto los resultados de la misma están condicionados por las experiencias académicas de los estudiantes que han participado. Por otro lado, la realización de encuestas con diferentes muestras de la población permitiría además contrastar cuales serían los resultados con alumnado de diferentes edades, contextos socio-culturales, etc.

Al hilo de lo anterior, se cita la reflexión de Sánchez (s.f.) sobre cómo el cerebro humano construye la belleza.

A su vez resulta interesante entender cómo la cultura ofrece el soporte necesario para que la creación artística alcance la vertiente de belleza. Quiero decir, tengo la hipótesis, sin haberla probado científicamente, de que cuando una persona entiende como bello un cuadro de Van Gogh y otra entiende como belleza una Harley Davidson, ambas están activando la misma parte de su cerebro frente a elementos dispares. Muy probablemente, una y otra persona hayan desarrollado durante muchos años la conexión de “belleza=cuadro de Van Gogh” o de “belleza=moto de Harley Davidson”. Sea como sea, existe un factor neurobiológico, más allá del cultural. (p. 5)

Esta reflexión nos parece interesante porque nos hace plantearnos la cuestión de si hay cualidades que dan lugar a juicios estéticos que sean opuestos entre sí, es decir, si belleza es igual a cuadro de Van Gogh ¿puede ser igual a Harley Davidson y viceversa? Si esto ocurre ¿cuáles son las cualidades que dan lugar a juicios estéticos que hagan que los estudiantes aprecien la belleza de las matemáticas?, ¿cuáles son las cualidades que dan lugar a juicios que les llevan a no apreciarla?, ¿cómo condicionaría esto la educación matemática de los alumnos desde los niveles de infantil y primaria?

REFERENCIAS

- Aizikovitsh-Udi, E. (2014). The extent of mathematical creativity and Aesthetics in solving problems among students attending the mathematically talented youth program. *Creative Education*, 5(4), 228-241. doi:10.4236/ce.2014.54032.
- Alonso, S. H., Sáez, A. M. y Picos, A. P. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. *Revista de educación*, 334, 75-95.
- Arnheim, R. (2001). *Arte y percepción visual: psicología del ojo creador*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Baumgarten, A. G. (1750). *Aesthetica*, 2 vol. Frankfurt a. d. Oder (1750-1758, vol. 1, pp. 18-27). Hamburgo, Alemania: Meiner.
- Betts, P. y McNaughton, K. (2004). Adding an aesthetic image to mathematics education. *International Monographs on Mathematics Teaching Worldwide*, 1, 59-75.

- Boletín Oficial del Estado (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (Vol. BOE N° 106, pp. 17158-17207). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Boletín Oficial del Estado (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (Vol. BOE, N° 295, pp. 97858-97921). Madrid, España: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.
- Brinkmann, A. (2009). Mathematical beauty and its characteristics. A study of the students' points of view. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 365-380.
- Brinkmann, A. y Sriraman, B. (2009). Aesthetics and creativity: An exploration of the relationships between the constructs. En B. Sriraman y S. Goodchild (Eds.), *Relatively and philosophically earnest: Festschrift in honor of Paul Ernest's 65th birthday* (pp. 57-80). Missoula, MT: Information Age Publishing.
- Brown, S. I. (1973). Mathematics and humanistic themes: Sum considerations. *Educational Theory*, 23(3), 191-214.
- Cohen, L., Manion, L. y Rodríguez, M. A. C. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: La Muralla.
- Damasio, A. R. (2005). *En busca de Spinoza: neurobiología de la emoción y los sentimientos*. Barcelona, España: Editorial Crítica.
- Dewey, J. (1934/2005). *Art as experience*. New York, NY: Penguin.
- Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1986). On the aesthetics of mathematical thought. *For the Learning of Mathematics*, 6(1), 2-10.
- Durán, A. J. (2001). El valor estético de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4(2), 329-354.
- Eberle, R. S. (2011). *Children's mathematical understandings of tessellations: A cognitive and aesthetic synthesis*. Austin, TX: The University of Texas.
- Ernest, P. (2015). Mathematics and beauty. *Mathematics Teaching*, 248, 23-27
- Ferrater-Mora, J. (1986). *Diccionario de Filosofía (Vols. 1-4)*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Gombrich, E. (1979). *The sense of order*. Ithaca, NY: Cornell University Press.
- Gómez-Chacón, I. M. (2005). Valores y conocimiento matemático: la belleza matemática. *Diálogo filosófico*, 62, 285-306.
- Hardy, G. H. (1999). *Apología de un matemático*. Madrid, España: Nivola. (Obra original publicada en 1940)
- Honderich, T. (2001). *Enciclopedia Oxford de filosofía*. Madrid, España: Oxford University Press.
- Jacobsen, T. (2006). Bridging the arts and sciences: A framework for the psychology of aesthetics. *Leonardo*, 39(2), 155-162.
- Jacobsen, T. (2010). Beauty and the brain: Culture, history and individual differences in aesthetic appreciation. *Journal of Anatomy*, 216(2), 184-191.
- Kant, I. (2007). *Crítica del juicio* (Manuel García Morente Trad.). Madrid, España: Tecnos.
- Leone, G. (1998). *Leyes de la Gestalt*. Recuperado de <http://www.guillermoleone.com.ar/leyes.htm>
- Malagón, J. E. P. (2007). Introducción a la historia de la estética. *Clío: History and History Teaching*, 33. Recuperado de <http://clio.rediris.es/n33/n33/historiaestetica.htm>

- Marcos, M. H. (2003). Teoría de la sensibilidad, teoría de las humanidades: el proyecto filosófico de la estética de A. G. Baumgarten. *Cuadernos Dieciochistas*, 4, 81-121.
- Neisser, U. (1967). *Cognitive Psychology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Papert, S. (1978). The mathematical unconscious. En J. Wechsler (Ed.), *On aesthetics and science*. Boston, MA: Birkhauser.
- Pérez-Tyteca, P., Castro, E., Segovia, I., Castro, E., Fernández, F. y Cano, F. (2009). El papel de la ansiedad matemática en el paso de la Educación Secundaria a la Educación Universitaria. *PNA*, 4(1), 23-35.
- Poincaré, H. (1908/2012). Mathematical creation. En R. Smith (Ed.), *Scientific Work and Creativity: Advice from the Masters* (Vol. 1, pp. 177-183). Clearwater, FL: Citizen Scientist League.
- Root-Bernstein, R. S. (2002). Aesthetic cognition. *International Studies in the Philosophy of Science*, 16(1), 61-77.
- Sánchez, C. A. (s. f.). *Neuroestética: cómo el cerebro humano construye la belleza*. Recuperado de http://www.neuro-com.es/NeuroscienceCommunication/Papers_files/celia%20andreu%20Neuroeste%CC%81tica.pdf
- Scruton, R. y Munro, T. (2017). *Aesthetics*. Recuperado de <https://www.britannica.com/topic/aesthetics>
- Shusterman, R. (1997). The end of aesthetic experience. *The Journal of Aesthetics and Art Criticism*, 55, 29-41.
- Sinclair, N. (2001). The aesthetic "is" relevant. *For the Learning of Mathematics*, 21(1), 25-32.
- Sinclair, N. (2004). The roles of the aesthetic in mathematical inquiry. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(3), 261-284.
- Sinclair, N. (2006). *Mathematics and beauty: Aesthetic approaches to teaching children*. Nueva York, NY: Teachers College Pr.
- Sinclair, N. (2009). Aesthetics as a liberating force in mathematics education? *ZDM*, 41(1), 45-60.
- Subdirección de Estadística y estudios del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2014). *Estadísticas*. Recuperado de <https://www.mecd.gob.es/servicios-al-ciudadano-mecd/estadisticas/educacion/ultimas-estadisticas.html>
- Tatarkiewicz, W. (2006). *Historia de seis ideas*. Madrid, España: Tecnos/Alianza Editorial.
- Wechsler, J. (1978). *On aesthetics in science*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer*, 12(3), 37-41.
- Zaparaín, F. (2009). *Idea, forma y experiencia*. Valladolid, España: MATA digital.

Begoña Bosque
 Universidad de Granada
 alexiabosque919@hotmail.com

Isidoro Segovia
 Universidad de Granada
 isegovia@ugr.es

José Luis Lupiáñez
 Universidad de Granada
 lupi@ugr.es

Recibido: Agosto 2017. Aceptado: Septiembre 2017.
Handle:

