"MAQUINAS DE TURING BORROSAS Y MODELOS DE W-CALCULABILIDAD"

BUENAVENTURA CLARES RODRIGUEZ

UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS

"MAQUINAS DE TURING BORROSAS Y MODELOS DE W-CALCULABILIDAD"

BUENAVENTURA CLARES RODRIGUEZ

TESIS DOCTORAL, Granada, Diciembre 1.982

Memoria presentada para optar al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Matemáticas, por Buenaventura Clares Rodriguez. Realizada bajo la dirección del Profesor Adjunto de Investigación Operativa Dr. D. Miguel Delgado Calvo-Flores en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

Juzgada en dicha Facultad el 26 de Febrero de 1.983 por el Tribunal siguiente:

Presidente:	Prof. Dr. D. Rafael Infante Macias
	(Univ. de Sevilla)
Vocales:	Prof. Dr. D. Enrique Trillas Ruiz
	(Univ. Politécnica de Barcelona)
	Prof. Dr. D. Ramón Gutierrez Jaimez
	(Univ. de Granada)
	Prof. Dr. D. Antonio Vaquero Sanchez
	(Univ. Complutense de Madrid)
Secretario:	Prof. Dr. D. Miguel Delgado Calvo-Flores
	(Univ. de Granada)

se le otorgó la calificación de Sobresaliente Cum Laude por unanimidad.

Deseo expresar mi mas sincera gratitud al profesor Dr. D. Miguel Delgado Calvo-Flores por su ayuda y continuado estímulo.

I N D I C E.

CAPITULO I: MAQUINAS DE TURING BORROSAS

1. Introducción 1
2. Definiciones 3
3. W-Máquinas de Turing elementales 20

CAPITULO II: W-CALCULABILIDAD

1. Introducción 34
2. W-Calculabilidad 35
3. Operaciones de composición, minimalización y recursión primitiva de funciones W-valuadas 38
4. W-Calculabilidad sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ 56
5. W-Calculabilidad sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ 63
6. W-Calculabilidad de conjuntos borrosos de funciones W-calculables con domínio $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ 75

CAPITULO III: ALGUNOS TIPOS PARTICULARES DE PROBLEMAS W-CALCULABLES

1. Introducción 82
2. Predicados W-valuados sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ 83

2.1. Introducción 83

2.2. W-Calculabilidad de Predicados W-valuados sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ 88

3. Predicados W-valuados sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ 98
4. Consideraciones sobre la Decidibilidad y Complejidad de problemas W-valuados 104

4.1. Decidibilidad W-valuada 104

4.2. Complejidad de problemas W-decidibles 108

5. Problemas W-valuados Calculables 110

INTRODUCCION

Uno de los campos en que con mayor intensidad se investiga actualmente es el de la Calculabilidad y Complejidad Algoritmica, esto es, el análisis y caracterización de aquellos problemas para los que es posible encontrar un procedimiento que efectívamente los resuelva y el estudio de la complejidad espacio-temporal que esta resolución lleva consigo. En esta memoria desarrollamos algunas propiedades de la Máquinas de Turing borrosas, caracterizamos los problemas que pueden ser calculados usando tales máquinas y exponemos algunos criterios sobre la complejidad de dichos problemas.

Intuitivamente se asocia la idea de "algoritmo" con la de "procedimiento efectivo" que nos permite "calcular" una cierta función. Relacionamos asi tres conceptos que, si bien tienen un significado claro, quedan imprecisos.

¿Qué se entiende por "efectividad" de un procedimiento?. Por una parte esta palabra es sinónimo de eficacia en el sentido de mejor, mas rápido, etc.: un procedimiento es mas efectivo que otro , dando por supuesto que ambos procedimientos proporcionan los mismos resultados. Por otra, que es la que nos interesa, se interpreta en la forma siguiente: cualesquiera que sean los datos de partida el procedimiento es capaz de proporcionarnos un resultado válido. Es evidente que no resulta fácil concretar y medir el concepto de "efectividad" y, mientras que no se defina matemáticamente este concepto, se tendrá que tanto la idea de "algoritmo" como la de "función calculable por un algoritmo" son conceptos imprecisos e informales.

Si bien el interés por estos temas es anterior, la década de los treinta es el periodo clave para su formalización. En ella se realizaron grandes esfuerzos dirigidos a estructurar matemáticamente el concepto intuitivo de "procedimiento efectivo de cálculo" culminando con los trabajos de A. Church (1.936), A. M. Turing (1.936,1.937), E. L. Post (1.936) y S. C. Kleene (1.936).

El trabajo de A. Church se refiere a la noción intuitiva de "efectividad" de procesos lógicos formales e introduce el concepto de "calculabilidad efectiva".

A. M. Turing define en su articulo el modelo de calculador que desde entonces es conocido como MAQUINA DE TURING. Mediante él caracteriza las denominadas FUNCIONES CALCULABLES demostrando la equivalencia de su concepto de "calculabilidad" con el de "calculabilidad efectiva" anteriormente introducido por A. Church. Concluye su trabajo postulando que:

"cualquier procedimiento que de una forma natural pueda ser calificado de "efectivo" puede llevarse a cabo empleando una Máquina de Turing".

No se puede probar que el modelo de Turing sea equivalente a la idea intuitiva de "calculador" pero, sin embargo, hay fuertes argumentos en favor de esta equivalencia. Quizas, el mas importante de ellos sea el hecho de que, a pesar de los años transcurridos, ninguna de las definiciones alternativas de "procedimiento efectivo de cálculo" ha caracterizado una clase esencialmente distinta de "funciones calculables". Asi, tanto los "sistemas canónicos" de E. Post (1.936) como las "funciones recursivas generales" de S. C. Kleene (1.936) o el concepto mas reciente de "función programable", inspirado en la idea de calculabilidad mediante ordenador, son equivalentes al modelo de Turing.

Por estos motivos, actualmente se considera a la Máquina de Turing como la formalización generalmente aceptada de lo que se entiende por procedimiento efectivo de cálculo.

Las funciones cuyo cálculo puede ser llevado a efecto por medio de alguno de los modelos anteriores son conocidas bajo el nombre de FUNCIONES RECURSIVAS. La suposición de que la idea intuitiva de función calculable puede identificarse con la de función recursiva es conocida como HIPOTESIS DE CHURCH o tesis de Church - Turing. Nosotros le aplicaremos el calificativo de "fuerte" entendiendo por hipótesis débil (ver J. P. Azra y B. Jaulin (1.973)) aquella mediante la que se identifica la clase de funciones Turing-calculables con la de las funciones recursivas.

No obstante la potencia de estos modelos, existen funciones para las que es imposible encontrar un procedimiento efectivo que las calcule. Mas concretamente, puede probarse que el conjunto de las Máquinas de Turing es numerable mientras que, como se sabe, el de las funciones no.

En un intento de modelizar la calculabilidad de problemas que contuvieran imprecisiones se introduce la Máquina de Turing probabilistica. Un importante estudio de la calculabilidad realizada por estas máquinas fué realizado por E. S. Santos (1.971). Ahora bien, la vida real demuestra que no todas las imprecisiones imaginables tienen un origen y/ó interpretación aleatorios. Existen multitud de situaciones en las que no es posible conocer con precisión el resultado de un experimento que, sin embargo, no es aleatorio por su naturaleza.

En 1.965 L. A. Zadeh introduce la idea de conjunto "borroso" como herramienta para manejar el tipo de problemas impreciso pero no aleatorio. En 1.968 este mismo autor analiza los elementos que debe contener un procedimiento de cálculo para ser calificado como "algoritmo borroso" señalando que un procedimiento tal ha de ser formalizado mediante el concepto de Máquina de Turing borrosa. Si bien indica como debe funcionar una máquina de estas características, no la construye explícitamente.

A partir de esta fecha surgen algunos trabajos de diversos autores sobre temas afines. Asi, por ejemplo, se tienen los siguientes sobre:

- Algebra borrosa: P. Albert (1.977); J. Nieminen (1.978) y los de D. Dubois y H. Prade (1.979, 1.980 y 1.981).

- Variables borrosas: S. Nahmias (1.978)

- Programación borrosa y ejecución de programas borrosos: S. K. Chang (1.972); C. L. Chang (1.975); K. Tanaka y M. Mizumoto (1.975); H. Prade (1.981) y W. Ostasiewicz (1.982).

- Gramáticas y lenguajes borrosos: G. F. DePalma y S. S. Yau (1.975); Y. Inagaki y T. Fukumura (1.975); N. Honda y S. Hirose (1.977) y J. M. Adamo (1.980 y 1.980 bis).

La primera definición rigurosa de Máquina de Turing borrosa se debe a E. S. Santos (1.977) quien la introduce bajo el nombre de W-Máquina de Turing, con $W=([0,1], \oplus, \otimes, \leq)$ un semianillo ordenado. En este trabajo se define también el concepto de "función W-calculable" si bien no se desarrollan sus propiedades.

No obstante el interés del tema, ninguno de los trabajos antes citados caracteriza el cálculo borroso, entendiendo por tal aquel que

i) bien realiza operaciones ordinarias sobre conjuntos borroso

ii) bien realiza operaciones borrosas (no perfectamente precisadas) sobre conjuntos ordinarios, ó

iii) bien realiza, a un tiempo, los dos tipos de cálculos anteriores.

Este es el objetivo principal de nuestra memoria.

En el capítulo primero introducimos la idea de Máquina de Turing borrosa extendiendo la definición de E. S. Santos (1.977). Estudiamos algunas de sus propiedades y concluímos construyendo una serie de máquinas que usaremos en los capítulos siguientes para demostrar ciertos resultados.

El segundo capítulo está dedicado a la W-calculabilidad. En él se introduce el conjunto $\tilde{\mathbf{Z}}^+$ de los W-valores enteros positivos y se estudia y caracteriza el W-cálculo de funciones que tienen por argumentos números enteros positivos y/ó W-valores enteros positivos. Tras discutir la existencia de funciones que son W-calculables pero no calculables, se obtiene una extensión de la hipótesis débil de Church. Por último se analiza la W-calculabilidad de conjuntos borrosos de funciones W-calculables.

En el tercer y último capítulo se introduce el concepto de predicado W-valuado estudiando su W-calculabilidad tanto sobre $\mathbf{Z}^+$ como sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^+$. Igualmente se estudian algunas cuestiones relativas a la W-decidibilidad y se hace un breve análisis sobre medidas de complejidad de W-algoritmos. Concluimos esta memoria discutiendo las condiciones bajo las cuales un problema W-calculable puede ser resuelto usando "medios de cálculo" ordinarios.

CAPITULO I: MAQUINAS DE TURING BORROSAS

1.- INTRODUCCION.

En este capítulo introducimos y desarrollamos los conceptos básicos en los que se fundamenta esta Memoria. Algunos de ellos se recogen tal y como aparecen en la literatura, otros son adaptaciones o modificaciones de conceptos ya existentes mientras que un tercer grupo ha sido desarrollado "ex profeso".

Para los del primero y segundo grupo citaremos su procedencia, destacando estos últimos mediante un * .

Globalmente, este capítulo se dedica a lo que denominaremos W-Máquina de Turing. Si consideramos que W=($[0,1]$, $\oplus$, $\otimes$, $\leq$) es un semianillo ordenado, siendo $\oplus$ y $\otimes$ operaciones calculables, la W-Máquina de Turing será la herramienta de cálculo capaz de implementar algoritmos borrosos W-valuados.

Las nociones de algoritmo y Máquina de Turing borrosos fueron introducidas por L. A. Zadeh en 1.968. El autor, textualmente, especifica que un algoritmo borroso puede contener instrucciones tales como:

" poner y <u>aproximadamente</u> igual a 10 si x es <u>aproximadamente</u> igual a 5 ",

" si x es <u>grande</u>, incrementar y en <u>varias</u> unidades ",

" mover <u>varios</u> pasos hacia adelante ",

" elegir <u>cualquier</u> elemento x en un conjunto A "

y que dicho tipo de algoritmos puede ser precisado, con restricciones, mediante el concepto de Máquina de Turing borrosa. Si bien indica su funcionamiento no define explícitamente una tal máquina.

Esta labor fué realizada por E.S. Santos en 1.977 y es este nuestro punto de partida.

Para poder desarrollar, en el capítulo II, la W-calculabilidad de funciones cuyos argumentos sean conjuntos borrosos de enteros, ha sido necesario modificar la definición de Santos introduciendo el concepto de " designador inicial de estados " inspirandonos en el empleado para autómatas probabilísticos (ver A. Paz (1.971)).

La primera parte de este capítulo se dedica al estudio de propiedades de las W-Máquinas de Turing en la versión modificada a la que hemos hecho mención anteriormente.

Posteriormente se introducen una serie de funciones que nos permitirán caracterizar la W-calculabilidad Turing.

Para terminar, se construyen una serie de W-Máquinas de Turing, que denominaremos elementales, que seran de utilidad mas adelante.

Básicamente, el funcionamiento de una W-Máquina de Turing es análogo al de una Máquina de Turing no deterministica, si bien, considerando como universo el conjunto de todos los movimientos posibles de una Máquina de Turing no deterministica, la W-Máquina de Turing elige cada movimiento con un cierto grado. Asi pues, al hablar de W-Máquina de Turing hay que distinguir entre resultado obtenido y el grado de este. Entendemos por resultado aquello que se calcula, aparece explícitamente escrito sobre la cinta al igual que la entrada, mientras que el grado de este resultado es algo que no es calculado, no está reflejado sobre la cinta, pero que, en alguna forma, nos es comunicado por la Máquina. Supondremos que este grado puede ser un valor culaquiera de $[0,1]$ no necesariamente calculable.

Es inmediato que la caracteristica esencial de una W-Máquina de Turing es la existencia de una valoración en [0,1] ya que en cuanto a los resultados siempre podría encontrarse una Máquina de Turing no deterministica que la simule.

Si denominamos U* y V*, respectivamente, los conjuntos de entradas y salidas, las funciones que pueden ser calculadas por una W-Máquina de Turing serán de la forma $f: U^* \longrightarrow V^* \times W$. Ahora bien, con objeto de establecer una clara distinción entre el grado y lo que se escribe explícitamente, dichas funciones serán empleadas en la forma $f: U^* \times V^* \longrightarrow W$, con la que tratamos de significar que a cada par (u,v) constituido por una entrada $u \varepsilon U^*$ y una salida asociada $v \varepsilon V^*$ le corresponde un grado que notaremos $f(v|u)$. Funciones de estas caracteristicas serán denominadas " W-valuadas ".

2.- DEFINICIONES.

Definición 1 (E. S. Santos (1.977))*.- Sea $W=([0,1], \oplus, \otimes, \leq)$ un semianillo ordenado. Una W-Máquina de Turing, W-MT en adelante, se especifica mediante una séptupla $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ donde:

- $S=\{ s_1,s_2, \ldots ,s_q \}$ es un conjunto no vacío y finito de estados internos,
- U es el alfabeto de entrada,
- V es el alfabeto de salida,
- C es el conjunto, finito, de símbolos sobre la cinta

  $$U \cup V \subseteq C, \quad S \cap C = \emptyset$$

- π es un vector q-dimensional $\pi=(\pi_{s_1},\pi_{s_2}, \ldots ,\pi_{s_q})$, $\pi_{s_i} \varepsilon W$, llamado el designador de estados inicial.
- F es el conjunto de estados finales. $F \subset S$,
- η^F es un vector q-dimensional cuya i-ésima componente es igual a 1 si $s_i \varepsilon F$ y 0 en otro caso. Es llamado el designador final de es-

tados.

- δ: $[CxS] \times [Sx(C\cup\{+,-,.\})] \longrightarrow W$, $+,-,.\notin C$, es la función de transferencia tal que $\delta(s',z|c,s)$ es el peso del "siguiente acto" de Z, esto es, el grado con el que Z pasa del estado s al s´ y

  i) reemplaza c por z si $z\in C$

  ii) se mueve una posición a la derecha si z=+

  iii) se mueve una posición a la izquierda si z=-

  iv) permanece en esa posición si z=.

  cuando está presente el simbolo $c\in C$ en la posición actual de la cinta.

Algunos autores, al definir la Máquina de Turing no determinista (MTND), consideran δ: $CxS \longrightarrow Sx(Cx\{+,-,.\})$ en lugar de δ: $CxS \longrightarrow Sx(C\cup\{+,-,.\})$. No obstante, y puesto que ambas caracterizaciones son equivalentes (observese que la segunda implica simplemente descomponer en dos pasos los movimientos de la máquina) en algún momento puede interesar el empleo de la primera, circunstancia que será explícitamente indicada.

Para $c\in C$ y $z\in C\cup\{+,-,.\}$, $\delta(s',z|c,s)$ es una matriz de orden q x q con elementos en $[0,1]$. Asi pues, la función δ se especifica mediante una colección de t^2+3t matrices cuadradas de dimensión q, siendo t el cardinal de C.

Como ya se ha indicado, la definición de W-MT que recogemos aqui se diferencia de la dada por E. S. Santos en que este autor no considera los designadores inicial y final de estados, sino que supone que la máquina parte de un único estado inicial s_o y se detiene cuando z=.

En el teorema 1 veremos que la existencia de un único estado inicial s_o no supone inconveniente alguno y, en cualquier caso, podremos pasar de un designador inicial de estados π a un único estado inicial s_o sin mas que añadir a la máquina un primer movimiento mediante el cual esta pase de s_o a la configuración de estados dada por π. En cuanto al designador final de estados η^F hemos preferido hacer uso de él porque parece mas congruente con la idea de "conjunto final de estados" empleada en la definición ordinaria de Máquina de Turing (ver, por ejemplo, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman (1.979)) ya que, en definitiva, η^F no es mas que la función caracteristica del conjunto F. No obstante, para pasar, en este sentido, de una W-MT dada por la definición 1 a una como la definida por E. S. Santos basta hacer z=. cuando sεF.

En lo que sigue notaremos U* el semigrupo libre generado por el conjunto finito U y la operación concatenación. Igual significado tendrán V* y C*. LLamaremos "palabra de entrada", o simplemente "entrada", "palabra de salida", o "salida", y "expresión sobre la cinta", a cualquier elemento de U*, V* y C* respectívamente. Se supondrá que existe un símbolo especial que notaremos $\not b$, y llamaremos "blanco", tal que $\not b \varepsilon C$ y $\not b \not\varepsilon U \cup V$.

<u>Definición 2</u> (E. S. Santos 1.977)).- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Diremos que aεC*SC* es una descripción instantánea de Z si y solo si

i) s no es el símbolo más a la derecha de a

ii) $\not b$ no es el símbolo más a la izquierda de a

iii) el simbolo más a la derecha de a no es $\not b$ salvo que sea el simbolo inmediatamente a la derecha de s.

La colección de todas las descripciones instantáneas de Z será notada D(Z).

Interpretación.- Mediante una descripción instantánea $a=\xi s c \gamma$ se caracteriza la siguiente situación: estando la W-MT en el estado s se dispone a analizar el simbolo cεC siendo $\xi\varepsilon C^*$ la colección de simbolos sobre la cinta que está a la izquierda de c y γ la colección de simbolos que está a la derecha. Evi dentemente a tiene exáctamente un estado $s\varepsilon S$.

<u>Definición 3</u> (E. S. Santos (1.977)).- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Definimos p^Z: $D(Z)xD(Z) \longrightarrow W$ como la función tal que para cualesquiera $a,b\varepsilon D(Z)$ toma el valor

$$
p^Z(b|a)=\begin{cases}
\delta(s',c'|c,s) \quad \text{si} & \begin{cases} a=\xi sc\gamma \;;\; b=\xi s'c'\gamma \;\text{ y }\; c'\gamma\neq \mathbf{e} \\ a=\xi sc \;;\; b=\xi s'\not{b} \;\text{ y }\; c'=\mathbf{e} \end{cases} \\
\delta(s',+|c,s) \quad \text{si} & \begin{cases} a=\xi scc'\gamma \;;\; b=\xi cs'c'\gamma \;\text{ y }\; \xi c\neq\not{b} \\ a=scc'\gamma \;;\; b=s'c'\gamma \;\text{ y }\; c=\not{b} \\ a=\xi sc \;;\; b=\xi cs'\not{b} \;\text{ y }\; \xi c\neq\not{b} \\ a=sc \;;\; b=s'\not{b} \;\text{ y }\; c=\not{b} \end{cases} \\
\delta(s',-|c,s) \quad \text{si} & \begin{cases} a=\xi c'sc\gamma \;;\; b=\xi s'c'c\gamma \;\text{ y }\; c\gamma\neq\not{b} \\ a=\xi c'sc \;;\; b=\xi s'c' \;\text{ y }\; c=\not{b} \\ a=sc\gamma \;;\; b=s'\not{b}c\gamma \;\text{ y }\; c\gamma\neq\not{b} \\ a=sc \;;\; b=s'\not{b} \;\text{ y }\; c=\not{b} \end{cases} \\
\delta(s',.|c,s) \quad \text{si} & a=\xi sc\gamma \;;\; b=\xi s'c\gamma \\
0 \text{ en otro caso,} &
\end{cases}
$$

donde ξ, $\gamma\varepsilon C^*$, **e** es el elemento neutro del semigrupo libre C^*, $c,c'\varepsilon C$ y $s,s'\varepsilon S$.

Interpretación.- $p^Z(b|a)$ nos dá el grado con el que la descripción instantánea a es seguida por la b cuando está corriendo la W-MT Z.

<u>Definición 4</u>.- Dadas $a,b\,\varepsilon D(Z)$, diremos que a precede a b y lo notaremos $a\vdash b$ si $p^Z(b|a)\neq 0$.

Notaremos por $\overset{*}{\vdash}$ la clausura reflexiva y transitiva de la relación $\vdash$ (ver J. E. Hopcroft y J. D. Ullman (1.979)), esto es,

i) para cualquier $a\,\varepsilon(D(Z),\overset{*}{\vdash})$, $a\overset{*}{\vdash}a$

ii) dados $a_1, a_k \varepsilon (D(Z), \models^*)$, $a_1 \models^* a_k$ cuando existen $a_2, a_3, \ldots, a_{k-1} \varepsilon D(Z)$ tales que

$$a_1 \vdash a_2 \vdash \ldots \vdash a_{k-1} \vdash a_k$$

Definición 5 (E. S. Santos (1.977))*.- Para una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ se define un cálculo Λ con entrada $(u,s)\varepsilon U^*xS$ y salida $(s',v)\varepsilon SxV^*$ como una secuencia finita $a_o, a_1, \ldots a_n \varepsilon D(Z)$, donde

i) $a_o = su$

ii) $a_n = \xi s' \gamma$, $\xi\gamma = v$

iii) $a_i \vdash a_{i+1}$ para $i=0,1,\ldots, n-1$, esto es, $a_o \models^* a_n$.

El grado con el que se realiza este cálculo es

$$\omega^a(s',v|u,s) = p^Z(a_1|a_o) \otimes p^Z(a_2|a_1) \otimes \ldots \otimes p^Z(a_n|a_{n-1})$$

donde el superíndice trata de significar que el valor $\omega^a(s',v|u,s)$ depende del cálculo $a_o, a_1, \ldots, a_n$.

Definición 6 (E. S. Santos (1.977))*.- Sea Z una W-MT. Definimos la función ω: $(U^* x\ S)\ x\ (S\ x\ V^*) \longrightarrow W$ de la forma

$$\omega(s',v|u,s) = \underset{a_o \models^* a_n}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \omega^a(s',v|u,s)$$

donde

i) $a_j \varepsilon D(Z)$, $j=0,1, \ldots, n$

ii) $a_o = su$, $a_n = \xi s' \gamma$ con $\xi\gamma = v$

iii) el simbolo $\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}$ indica que la operación $\oplus$ está extendida a todos aquellos cálculos que, partiendo de la entrada $u\varepsilon U^*$ y del estado $s\varepsilon S$, hacen que la W-MT produzca la salida $v\varepsilon V^*$ con estado $s'\varepsilon S$. Si no existen descripciones instantáneas en esas condiciones $\omega(s',v|u,s)$ queda indefinida.

Observemos que, dada una entrada $u\varepsilon U^*$, una W-MT puede:

- detenerse, tras realizar una serie de cálculos, produciendo diversas salidas $v \in V^*$ con igual o distinto grado,

- trabajar para siempre, situación que es esencialmente distinta de aquella en que la máquina produce todas las salidas con grado cero.

Para formalizar estas ideas introducimos unos conceptos semejantes a los definidos para autómatas probabilísticos (ver A. Paz (1.971)).

Notaremos $\omega(v|u)$ la matriz de orden qxq cuyo elemento en la fila s y columna s´ es $\omega(s',v|u,s)$.

Definición 7.- Dada la W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$, para cada $s \in S$ definimos $\eta_s : U^* \times V^* \longrightarrow W$ de acuerdo con

$$\eta_s(v|u) = [\omega(s_1,v|u,s) \otimes \eta^F_{s_1}] \oplus [\omega(s_2,v|u,s) \otimes \eta^F_{s_2}] \oplus \cdots$$

$$\cdots \qquad \oplus [\omega(s_q,v|u,s) \otimes \eta^F_{s_q}] =$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{q} \{\omega(s_i,v|u,s) \otimes \eta^F_{s_i}\}$$

siendo

$$\eta^F_{s_i} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \in F \\ 0 & \text{si } s_i \notin F \end{cases}$$

Interpretación.- $\eta_s(v|u)$ nos dá el grado con que la máquina, partiendo del estado s y de la palabra u, se detiene con la palabra v sobre su cinta independientemente de:

- la configuración inicial de estados
- los cálculos que haya realizado.

LLamaremos $\eta(v|u)$ al vector q-dimensional cuya i-ésima coordenada es $\eta_{s_i}(v|u)$, esto es,

$$\eta(v|u) = \omega(v|u) \otimes \eta^F$$

<u>Definición 8</u>.- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Definimos las funciones $\pi_{s'}: U^* \times V^* \longrightarrow W$, para s' S, y $p_\pi: U^* \times V^* \longrightarrow W$ como:

$$\pi_{s'}(v|u)= [\pi_{s_1} \otimes \omega(s',v|u,s_1)] \oplus [\pi_{s_2} \otimes \omega(s',v|u,s_2)] \oplus \ldots$$

$$\ldots \quad \oplus [\pi_{s_q} \otimes \omega(s',v|u,s_q)] =$$

$$= \underset{i=1}{\overset{q}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}} \{\pi_{s_i} \otimes \omega(s',v|u,s_q)\}$$

y

$$p_\pi(v|u)= [\pi_{s_1} \otimes \eta_{s_1}(v|u)] \oplus [\pi_{s_2} \otimes \eta_{s_2}(v|u)] \oplus \ldots$$

$$\ldots \quad \oplus [\pi_{s_q} \otimes \eta_{s_q}(v|u)] =$$

$$= \underset{i=1}{\overset{q}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}} \{\pi_{s_i} \otimes \eta_{s_i}(v|u)\} =$$

$$= [\pi_{s_1}(v|u) \otimes \eta^F_{s_1}] \oplus [\pi_{s_2}(v|u) \otimes \eta^F_{s_2}] \oplus \ldots$$

$$\ldots \quad \oplus [\pi_{s_q}(v|u) \otimes \eta^F_{s_q}] =$$

$$= \underset{i=1}{\overset{q}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}} \{\pi_{s_i}(v|u) \otimes \eta^F_{s_i}\}$$

respectívamente.

Interpretación.- $\pi_{s'}(v|u)$ es el grado con el que la máquina imprime, aunque no haya terminado sus cálculos, la palabra $v \in V^*$ y permanece en el estado $s' \in S$ habiendo comenzado con un designador π sobre sus estados y la palabra $u \in U^*$ escrita sobre su cinta. Si llamamos $\pi(v|u)$ al vector q-dimensional cuya i-ésima coordenada es $\pi_{s_i}(v|u)$, entonces

$$\pi(v|u)= \pi \otimes \omega(v|u)$$

El escalar $p_\pi(v|u)$ es el grado con el que la máquina <u>termina</u> con la palabra $v \in V^*$ impresa, supuesto que comenzó con un designador π sobre sus estados y la palabra $u \in U^*$ escrita sobre su cinta. Se tendrá que

$$p_\pi(v|u) = \pi \otimes \eta(v|u) = \pi(v|u) \otimes \eta^F$$

y se notará simplemente $p(v|u)$, siempre que no haya lugar a confusión, sobreentendiendo la dependencia del designador inicial π.

Demostraremos a continuación un teorema que permite pasar del modelo de W-MT que hemos definido al dado por E. S. Santos (1.977).

Teorema 1.- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Existe siempre una W-MT $Z'=(S',U,V,C,\delta',\pi',\eta^F)$, en la que π' se concentra en un único estado, equivalente a Z en el sentido de que para cualesquiera $u\varepsilon U^*$ y $v\varepsilon V^*$ se verifica

$$p_\pi(v|u) = p'_{\pi'}(v|u)$$

Demostración.- Si hacemos

i) $S' = S \cup \{s_0\}$

ii)
$$\delta'(s',z|c,s) = \begin{cases} \delta(s',z|c,s) & \text{si } s,s'\varepsilon S,\ c\varepsilon C,\ z\varepsilon C \cup \{+,-,.\} \\ \pi_{s'} & \text{si } s=s_0,\ s'\varepsilon S,\ c\varepsilon U,\ z=. \end{cases}$$

iii)
$$\pi'_s = \begin{cases} 1 & \text{si } s=s_0 \\ 0 & \text{si } s\neq s_0 \end{cases}$$

la W-MT $Z'=(S',U,V,C,\delta',\pi',\eta^F)$ es equivalente a la $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$.#

Observese que se puede cambiar el designador π de la W-MT Z sin afectar sus características (el algoritmo sigue siendo el mismo). Sin embargo la W-MT Z´ cuya existencia garantiza el teorema anterior sí depende de π en forma esencial.

Introducimos ahora el concepto de α-corte dentro del modelo de W-MT con el fin de estudiar la coherencia entre los conceptos que definimos para este modelo y los correspondientes al modelo ordinario.

Definición 9.- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Para $\alpha\in W$ se define la Máquina de Turing no determinista que llamaremos α-corte de Z como $Z=(S',U,V,C,\delta_\alpha,s_0,F)$, donde

i) $S'= S \cup \{s_0\}$

ii)
$$\delta_\alpha(s',z|c,s)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad \delta(s',z|c,s)\geq\alpha\ ,\ s\neq s_0 \\ 1 & \text{si} \quad \pi_{s'}\geq\alpha\ ,\ s=s_0,\ z=. \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

iii) s_0 es el estado inicial.

Esta definición puede restringirse considerando el α-corte estricto, que notaremos $Z_{\alpha'}$, cuando las desigualdades anteriores sean estrictas.

Interpretación.- Z_α será una MTND tal que empezando a trabajar en el estado s_0 pasará a aquellos estados con designador inicial mayor o igual que α, hará aquellos movimientos cuyo grado sea mayor o igual que α y se detendrá cuando llegue a un estado final. Observese que, para una W-MT Z dada, existe un conjunto de MTND $\{Z_\alpha\}$ con subíndice contínuo $\alpha\in W$.

Definición 10.- Dada una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$, denominaremos lenguaje generado por Z al subconjunto L_Z V* dado por

$$L_Z= \{v|\ v\in V^*,\ \ u\in U^*,\ p(v|u)\neq 0\}$$

Es inmediato que para $\alpha\in W$ el lenguaje generado por la MTND Z_α será

$$L_{Z_\alpha}=\{v|\ v\in V^*,\ \ u\in U^*,\ p_\alpha(v|u)=1\}$$

Teorema 2.- Sean $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT y

$$\alpha_m= \underset{\substack{u\in U^* \\ v\in V^*}}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}\ p(v|u)$$

Si $\alpha_m< 1$, entonces cualquier MTND del conjunto $\{Z_\beta|\alpha_m< \beta\leq 1\}$ no calcula ninguna salida cualquiera que sea la entrada, esto es, $L_{Z_\beta} = \emptyset$.

Demostración.- Consideremos la función $p^*: V^* \longrightarrow W$ definida por

$$p^*(v) = \underset{u \in U^*}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \; p(v|u)$$

Es evidente que $v \in L_{Z_\alpha}$ si y solo si existe al menos un $u \in U^*$ tal que $p(v|u) \geq \alpha$, lo que equivale a decir que $v \in L_{Z_\alpha}$ si y solo si $p^*(v) \geq \alpha$, y, por tanto, para cualquier $\beta \in W$ tal que

$$\beta > \alpha_m = \underset{\substack{u \in U^* \\ v \in V^*}}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \; p(v|u) = \underset{v \in V^*}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \; p^*(v)$$

no existe $v \in V^*$ tal que $p^*(v) \geq \beta$, de donde $L_{Z_\beta} = \emptyset$.#

Corolario 1.- Para cualquier W-MT Z se verifica que $L_0 = V^*$ siendo 0 el elemento neutro de W respecto a la operación $\oplus$.

Demostración.- Por la definición 9 para cualquier $\alpha \in W$ δ_α vale 1 si el movimiento correspondiente de Z tiene grado mayor o igual que α y cero en otro caso. Asi δ_α siempre es mayor o igual que cero y, por tanto, $p_0(v|u) \geq 0$ para cualquier $v \in V^*$, por lo que $v \in L_0$ de donde se sigue que $L_0 = V^*$.#

Corolario 2.- Dada una W-MT Z y dados $\alpha_1, \alpha_2 \in W$ tales que $\alpha_1 > \alpha_2$, entonces

$$L_{Z_{\alpha_1}} \subset L_{Z_{\alpha_2}}$$

Demostración.- Es inmediata debido a que si $v \in L_{Z_{\alpha_1}}$ entonces $p^*(v) \geq \alpha_1$ de donde $p^*(v) \geq \alpha_2$ y por consiguiente $v \in L_{Z_{\alpha_2}}$.#

Teorema 3.- Sea $\Xi = \{Z_\alpha \mid Z_\alpha = (S', U, V, C, \delta_\alpha, s_0, F),\ \alpha \in W\}$ una familia de MTND tal que para cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in W$ se cumple que

i) si $\alpha_1 > \alpha_2$ entonces $L_{Z_{\alpha_1}} \subset L_{Z_{\alpha_2}}$

ii) si $\alpha = 0$ entonces $L_{Z_0} = V^*$

Entonces existe una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^{F})$ tal que para cualquier $\alpha\varepsilon W$, $Z_{\alpha}\varepsilon\Xi$ es el α-corte de Z.

Demostración.- Haciendo

i) $S= S'-\{s_0\}$

ii) $\delta(s',z|c,s)=\max\{\alpha|\ \alpha\varepsilon W,\ \delta_{\alpha}(s',z|c,s)=1\}$ para $s,s'\varepsilon S$

iii) $\pi_s=\max\{\alpha\ |\ \alpha\varepsilon W,\ \delta_{\alpha}(s,z|c,s_0)=1\}$

iv) $$\eta^{F}_{s}=\begin{cases}1 & \text{si } s\varepsilon F\\ 0 & \text{si } s\not\varepsilon F\end{cases}$$

resulta evidente que, para cualquier $\alpha\varepsilon W$, $Z_{\alpha}\varepsilon\Xi$ es el α-corte de Z.#

Hay que destacar que, por simplificar la demostración del teorema anterior, hemos supuesto implícitamente que en el primer movimiento de todas las màquinas Z_{α} solo se cambia el estado de las mismas sin modificar el simbolo actual sobre la cinta ni desplazarse a la derecha o a la izquierda. Esto no supone restricción alguna pues en caso contrario basta descomponer dicho primer movimiento en dos consecutivos: el primero cambia de estado sin alterar el simbolo (z=.) y el segundo hace el movimiento sin alterar el estado.

Como puede observase el teorema 3 y los corolarios 1 y 2 del teorema 2 nos dicen que las MTND α-cortes de una W-MT cumplen las propiedades habituales de los α-cortes.

Definición 11 (E. S. Santos (1.977)*.- Diremos que una palabra $u\varepsilon U^*$ es W-calculable por una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^{F})$ cuando existe al menos una palabra de salida $v\varepsilon V^*$ tal que $p(v|u)\neq 0$.

Definición 12.- Diremos que L_f es un lenguaje W-valuado sobre U si L_f

es un conjunto difuso de U*.

Asociado a todo lenguaje W-valuado L_f existe una aplicación $f\colon U^* \longrightarrow W$ tal que $f(u)$, $u \in U^*$, es el grado con el que u pertenece a L_f.

<u>Definición 13</u>.- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT y L_f un lenguaje W-valuado sobre U. Diremos que Z acepta a L_f si para cualquier $u \in U^*$

i) u es W-calculable por Z,

ii) $f(u) = \bigoplus_v p(v|u)$, donde la suma está extendida a todos los resultados posibles con entrada u.

Observese que si L_f es aceptado por Z, entonces

a) Z se detiene para todo $u \in L_f$

b) Z puede o no detenerse para $u \notin L_f$.

Las definiciones anteriores pueden ser extendidas al caso de lenguajes k-dimensionales. En efecto, dado un entero $k \in \mathbf{Z}^+$,

$$u^k = (u_1, u_2, \ldots, u_k) \in (U^*)^k$$

designará la k-upla de palabras de entrada, y

$$\bar{u}^k = \overline{(u_1, u_2, \ldots, u_k)} = u_1 * u_2 * \ldots * u_k,$$

donde $* \in C$, $* \notin U \cup V$, designará la expresión sobre la cinta asociada a la k-upla u^k. Entonces

<u>Definición 14</u> (E. S. Santos (1.971))*.- Dada una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ y un entero positivo k, se define la función k-dimensional $p^k\colon (U^*)^k \times V^* \longrightarrow W$ como

$$p^k(v|u) = p(v|\bar{u}^k).$$

Interpretación.- $p^k(v|u^k)$ es el grado con que quedará escrita la palabra v sobre la cinta cuando se detenga la W-MT Z si esta empezó con un designador inicial de estados π teniendo la expresión $\bar{u}^k$ escrita sobre su cinta. En tal sentido debe interpretarse $\bar{u}^k$ como argumento de p.

Mas adelante, cuando tratemos de lenguajes k-dimensionales y siempre que no haya lugar a confusión, notaremos $p^k(v|u^k)$ como $p(v|u)$ con, $u\varepsilon(U^*)^k$, por motivos de simplificación.

Definición 15.- Un lenguaje W-valuado L_f k-dimensional sobre U es un conjunto borroso sobre $(U^*)^k$.

Asociado a L_f estará su función de pertenencia $f\colon (U^*)^k \longrightarrow W$.

Definición 16.- Diremos que una W-MT Z acepta un lenguaje W-valuado L_f k-dimensional sobre U si para cualquier $u^k \varepsilon L_f$

i) $\bar{u}^k$ es W-calculable por Z

ii) $f(u^k)= \underset{v}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}\, p^k(v|u^k)$

Definición 17.- Se llamará W-algoritmo al procedimiento de cálculo usado para evaluar una función W-valuada. La forma en que se implementa un W-algoritmo sobre una W-MT será llamada programa W-valuado.

Con el fin de fijar conceptos consideraremos el siguiente

Ejemplo.- Sea la función $f\colon \mathbf{Z}^{+2} \times \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow W$ definida por

$$f(v|(u_1,u_2))= \begin{cases} \alpha & \text{si} \quad v= u_1+ u_2,\ \alpha\varepsilon W \text{ fijo} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Intentaremos construir una W-MT que calcule esta sencilla función. Para ello deberemos indicar como aparecen codificadas sobre la cinta las palabras de entrada y salida y dar un W-algoritmo (que en este caso es ordinario) que describa los pasos de los cálculos. Despues el W-algoritmo será transformado en una tabla de transición de estados que nos definirá la función δ.

Para simplificar supondremos que los números estan codificados en unario. Asi, por ejemplo, si $u_1 = 2$ y $u_2 = 6$, sobre la cinta tendremos la siguiente expresión:

$$\overset{2}{\overline{00}}01\overset{6}{\overline{000000}}00$$
$$\uparrow$$

donde por $\uparrow$ significamos el simbolo actualmente analizado por la W-MT.

La W-MT que construimos comienza analizando el cero mas a la izquierda en la secuencia de entrada. Cada paso del W-algoritmo consta de una orden de transferencia caracterizada por el conjunto de pesos (o grados) con los que se envía nuevamente el control a cada uno de los posibles pasos. Asi:

PASO	ACCION	EJEMPLO
1	Mover a la derecha a lo largo de la cinta hasta encontrar un 1 e ir a Paso 2 con grado α	00010000000$\not b \not b \not b$.. ↑
2	Escribir un 0 e ir al Paso 3 con grado α	00000000000$\not b \not b \not b$.. ↑
3	Mover a la derecha hasta que un $\not b$ sea encontrado e ir al Paso 4 con grado α	00000000000$\not b \not b \not b$.. ↑
4	Mover a la izquierda una posición e ir al Paso 5 con grado α	00000000000$\not b \not b \not b$.. ↑
5	Escribir un $\not b$ e ir al Paso 6 con grado α	0000000000$\not b \not b \not b \not b$... ↑

6	Mover a la izquierda una posición e ir al Paso 7 con grado α	0000000000$\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$... ↑
7	Escribir un $\cancel{b}$ y parar el cálculo	000000000$\cancel{b}\cancel{b}\cancel{b}$.... ↑

Al término de este programa aparecerá sobre la cinta una expresión unária correspondiente a $u_1 + u_2$ a la que se asignará el mínimo de los grados asociados a las transferencias que nos han conducido a ella. Dicho valor será el grado con el que el W-algoritmo calcula $v = u_1 + u_2$. Con los valores numéricos del ejemplo será

$$000000000 \sim 8 \qquad \text{con grado } \alpha$$

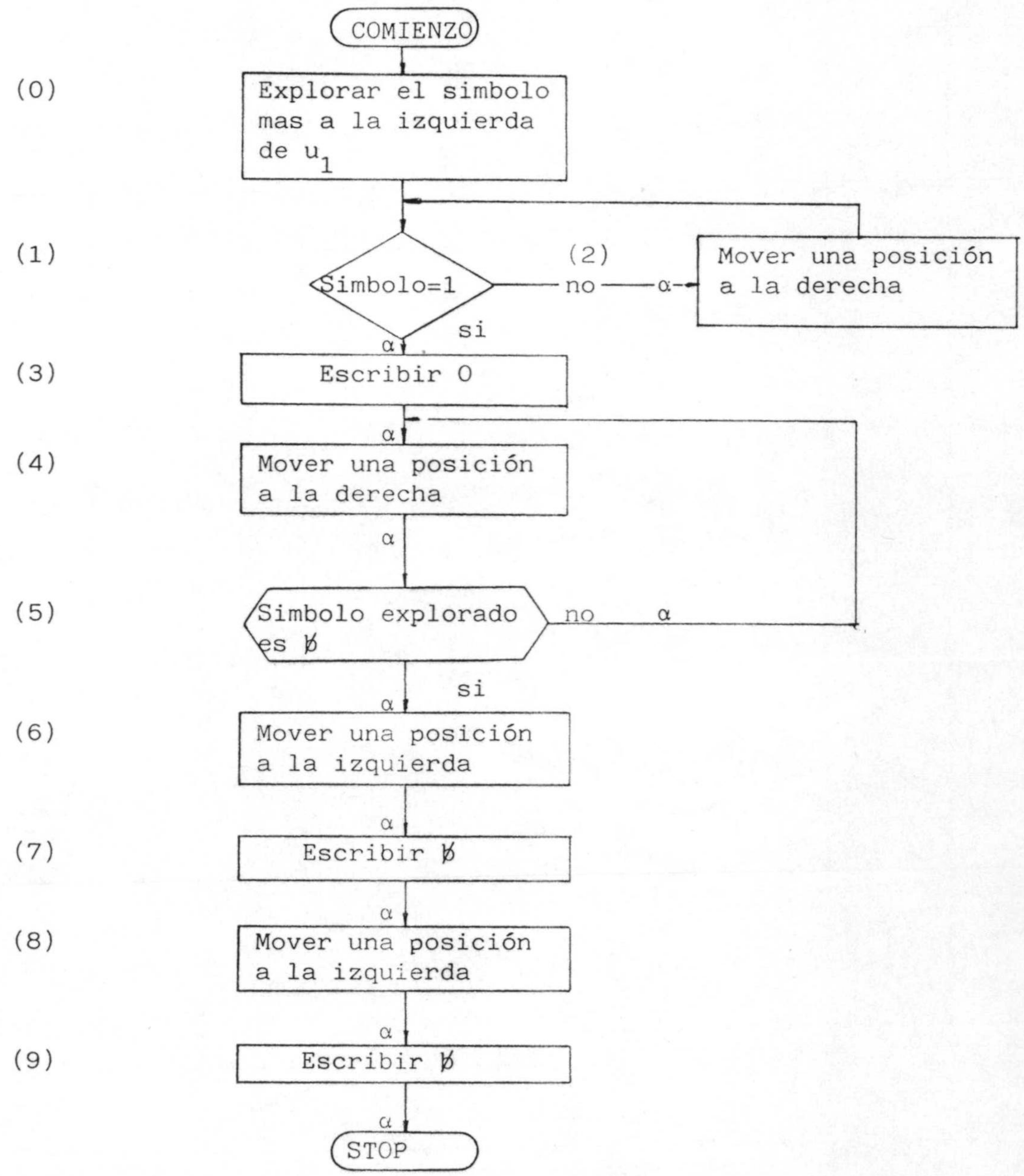
Recogemos este programa en la siguiente tabla donde usamos la notación $s/\ z/\delta$ para describir:

estado al que pasa/ simbolo ó movimiento/ grado

S \ C	0	1	$\cancel{b}$	Comentarios
s_1	$s_1/ + / \alpha$	$s_2/ 0 / \alpha$	-----	Operaciones (1), (2) y (3)
s_2	$s_2/ + / \alpha$	-----	$s_3/ - / \alpha$	Operaciones (4), (5) y (6)
s_3	$s_4/ \cancel{b} / \alpha$	-----	-----	Operación (7)
s_4	-----	-----	$s_5/ - / \alpha$	Operación (8)
s_5	$s_6/ \cancel{b} / \alpha$	-----	-----	Operación (9)

s_6 : ----- : ----- : ----- : Parar

En los comentarios a la tabla anterior las operaciones entre parentesis corresponden con el organigrama:



Podemos construir entonces una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ que calcule f haciendo:

i) $S=\{s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6\}$

ii) $U=\{0\}$

iii) $V=\{0\}$

iv) $C=\{0,1,\not b\}$

v) $\pi=(1,0,0,0,0,0)$

vi) $F=\{s_6\}$

vii) $\eta^F=(0,0,0,0,0,1)$

y la función de transferencia δ: $[C \times S] \times [S \times (C \cup \{+,-,.\})] \longrightarrow W$ es definida por la tabla anterior como

$$\delta(s',z|c,s)=\begin{cases} \alpha & \text{si} \quad s'=s_1,\ z=+,\ c=0,\ s=s_1 \\ \alpha & \text{si} \quad s'=s_2,\ z=0,\ c=1,\ s=s_1 \\ \alpha & \text{si} \quad s'=s_2,\ z=+,\ c=0,\ s=s_2 \\ \alpha & \text{si} \quad s'=s_3,\ z=-,\ c=\not b,\ s=s_2 \\ \alpha & \text{si} \quad s'=s_4,\ z=\not b,\ c=0,\ s=s_3 \\ \alpha & \text{si} \quad s'=s_5,\ z=-,\ c=\not b,\ s=s_4 \\ \alpha & \text{si} \quad s'=s_6,\ z=\not b,\ c=0,\ s=s_5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Hagamos notar que la aplicación δ podría haber tomado valores distintos entre sí y distintos de α con tal de que el mínimo de ellos fuera igual a α. Todas las W-MT asi definidas calcularían la función ejemplo. Otra implementación del algoritmo podría ser obtenida, por ejemplo, haciendo $\delta=1$ en todos los pasos y tomar un designador inicial de estados $\pi=(\alpha,0,0,0,0,0)$.

Observese que, a pesar de ser f una función muy sencilla (incluso ordinaria en su definición) ha sido necesaria una gran cantidad de trabajo para construir el W-algoritmo y la W-màquina que lo calcula. Es inmediato que para funciones mas complicadas el proceso será muy tedioso.

Para salvar en parte este problema, y al igual que en cálculo ordinario, vamos a introducir a continuación una serie de W-MT elementales que permitirán simplificar la descripción de cálculos mas complejos y que, por tanto, serán de gran utilidad para las demostraciones constructivas que desarrollaremos mas adelante.

3.- W-MAQUINAS DE TURING ELEMENTALES.

Citaremos en primer lugar algunas máquinas de Turing deterministas que pueden ser estudiadas en la literatura habitual (ver por ejemplo T. L. Booth (1.967) pag. 367-373). Estas son:

- Máquina "n-copia". Si tenemos la expresión

$$x= \not{b}c_1\not{b}c_2 \ldots \not{b}c_n\not{b}c_{n+1}\not{b} \ldots \not{b}c_m\not{b}$$

sobre la cinta, esta máquina produce la expresión

$$xc_n\not{b}.$$

- Máquina "mueve a la derecha" (izquierda). La máquina se mueve a la derecha (izquierda), sin cambiar de estado, hasta que encuentra el primer simbolo de separación de palabras. Asi pues se mueve una palabra a la derecha (izquierda).

- Máquina "rebobina a la derecha" (izquierda). Como el fin de una expresión de cinta es indicado por una sucesión de dos o mas blancos, la máquina se mueve a la derecha (izquierda) hasta que encuentra dos blancos consecutivos. Cuando el segundo blanco es leido la máquina se mueve dos cuadrados a la izquierda (derecha), esto es, se posiciona sobre el último simbolo distinto de blanco y se detiene.

- Máquina "desplazamiento". Esta máquina opera sobre la expresión de cinta

$$\not b c_1 c_2 \ldots c_n \not b c'_1 c'_2 \ldots c'_m \not b$$

Se supone que la máquina inicialmente explora el blanco mas a la derecha. Entonces, la máquina borra la primera palabra y desplaza la segunda a la izquierda hasta que el primer simbolo de la segunda palabra ocupa la posición que originalmente ocupaba el primer simbolo de la primera palabra, resultando

$$\not b c'_1 c'_2 \ldots c'_m \not b$$

- Máquina "sucesor". Calcula la función sucesor, esto es, si sobre la cinta aparece la expresión $\bar{u}$, $u \in \mathbf{Z}^+$, y comienza a trabajar la máquina, cuando se detiene aparece sobre la cinta la expresión $\overline{u+1}$.

Pasamos a describir ahora algunas W-MT. En primer lugar consideraremos la W-MT multicinta:

<u>Definición 18</u>.- Una W-MT con n cintas se especifica mediante la septupla $Z^n=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$, donde S, U, V, C, π y F tienen el mismo significado que en la definición 1 y δ: $[C^n \times S] \times [S \times (C \cup \{+,-,.\})^n] \longrightarrow W^n$.

Interpretación.- En un determinado instante la máquina está, para todas sus cintas, en el estado $s \varepsilon S$ y con el simbolo actual c_i sobre la cinta i. Entonces pasará al estado $s' \varepsilon S$, para todas sus cintas, y realizará el movimiento indicado por z_i sobre la cinta i con grado $\delta_i(s',(z_1,z_2,\ldots,z_n)|(c_1,c_2,\ldots c_n),s)$ que notaremos simplemente $\delta_i(s',z|c,s)$, entendiendo que $c \varepsilon C^n$ y que $z \varepsilon (C \cup \{+,-,.\})^n$. Observese que el grado del movimiento puede ser diferente para las distintas cintas.

Una descripción instantánea para esta máquina vendrá dada por un elemento de $(C^*)^n S(C^*)^n$ que verifique propiedades semejantes a las contenidas en la definición 2.

Todo lo anteriormente desarrollado para la W-MT de una cinta puede ser extendido de una forma natural a la multicinta. Notaremos por $\mathbf{p}$: $(U^*)^n x\ (V^*)^n \longrightarrow W$ la función correspondiente a la definición 8.

Se puede probar el siguiente teorema que relaciona la W-MT de una cinta con la multicinta. Omitiremos su demostración por ser totalmente semejante a la del caso determinista (ver por ejemplo J.E. Hopcroft y J. D. Ullman (1.979) pag 161-163).

<u>Teorema 4</u>.- Si un lenguaje W-valuado L_f sobre U es aceptado por una W-MT multicinta, entonces es aceptado por una W-MT con una única cinta.

Este teorema nos permite hacer construcciones de W-MT con n cintas que resultarán mas fáciles que sobre una cinta siendo ambas equivalentes desde un punto de vista teórico.

<u>Lema 1</u>.- Sean $Z_i=(S^i,U,V,C,\delta^i,\pi^i,\eta^{F^i})$, i= 1,2, ... ,n, una colección de W-MT y sean $\alpha_i \varepsilon W$, i= 1,2, ... ,n, un conjunto de valores. Entonces, si las W-MT son tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} S^i = \emptyset$$

o si para todos los subconjuntos de índices I tales que

$$\bigcap_{i \varepsilon I} S^i \neq \emptyset$$

se cumple que $\alpha_i = \alpha_j$, $\forall i,j \varepsilon I$, existe una W-MT con n cintas, que notaremos $Z^n = (\alpha_i | Z_i,\ i=1,2,\ \ldots\ ,n)$, tal que

$$p(v|u) = \bigodot_{i=1}^{n} \{\alpha_i \otimes p^i(v_i|u_i)\}$$

siendo $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \varepsilon (U^*)^n$, $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \varepsilon (V^*)^n$.

Demostración.- Construimos $Z^n = (S', U, V, C, \delta', \pi', \eta^{F'})$ de la siguiente forma:

i) $S' = \bigcup_{i=1}^{n} S^i$

ii) para $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \varepsilon C^n$ y $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \varepsilon (C \cup \{+,-,.\})^n$

$$\delta_i'(s', z | c, s) = \begin{cases} \delta^i(s', z_i | c_i, s) & \text{si} \quad s, s' \varepsilon S^i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

iii)

$$\pi_s' = \begin{cases} \alpha_i \otimes \pi_s^i & \text{si} \quad s \varepsilon S^i \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

iv) $F' = \bigcup_{i=1}^{n} F^i$

Entonces partiendo de la palabra u_i sobre la cinta i, Z^n trabajará sobre dicha cinta como si fuese Z^i por lo que, cuando se detenga, aparecerá el resultado v_i con un grado $\alpha_i \otimes p_i(v_i|u_i)$ puesto que sobre esa cinta se ha partido con un designador inicial de estados $\alpha_i \otimes \pi^i$. Al considerar todas las cintas habrá que tomar $\underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\scriptsize T}}}$. #

Lema 2.- Sean $N=\{i_1,i_2,\ \ldots\ ,i_n\}$, $M=\{j_1,j_2,\ \ldots\ ,j_m\}$ y $K=\{k_1,k_2,\ ..\ .\ ,k_n\}$, $N,M,K\subset \mathbb{Z}^+$, $n,m\geq 1$. Si $N\cap M=\emptyset$ es posible construir una MTD, que notaremos $C_k^{N,M}$, con al menos n+m cintas tal que, partiendo con expresiones

$$\bar{u}_{i_r}\in (C^*)^{k'_r},\quad k'_r\geq k_r,$$

donde

$$u_{i_r}=(u_{1i_r},u_{2i_r},\ \ldots\ ,u_{k'_r i_r}),\quad r=1,2,\ \ldots\ ,n,$$

sobre las cintas especificadas por el conjunto N y cualquier expresión sobre las restantes, termina con la misma expresión

$$\bar{v}\in (C^*)^{\sum_{r=1}^{n} k_r},$$

siendo

$$v=(u_{1i_1},u_{2i_1},\ \ldots\ ,u_{k_1i_1},u_{1i_2},u_{2i_2},\ \ldots\ ,u_{k_2i_2},\ \ldots$$

$$\ldots\ ,u_{1i_n},u_{2i_n},\ \ldots\ ,u_{k_ni_n}),$$

sobre todas las cintas especificadas por el conjunto M.

Supondremos que el simbolo de C que separa las distintas palabras de una k'_i-expresión sobre cinta es el "1".

Demostración.- La MTD $C_k^{N,M}=(S,U,V,C,\delta,s_0,s_F)$ vendrá dada por:

i) $S=\{s_0,s_1^1,s_2^1,\ \ldots\ ,s_{k_1}^1,s_1^2,s_2^2,\ \ldots\ ,s_{k_2}^2,\ \ldots\ ,s_1^n,s_2^n,\ \ldots\ ,s_{k_n}^n,s_{F_1},s_{F_2},s_F\}$

ii) δ: $[C^t\times S]\times[S\times (C\cup\{+,-,.\})^t]\longrightarrow W^t$, $t\geq m+n$, es tal que, para $i\in N$, $j\in M$, $l<k_i$,

$$\delta_j(s',z|c,s)=1 \text{ si } \begin{cases} s=s'=s^i_\ell, & c_j\neq c_i, \quad z_j=c_i \\ s=s^i_\ell, \; s'=s^i_{\ell+1}, \; \ell<k_i, & c_j=c_i=1, \quad z_j=+ \\ s=s'=s^i_\ell, & c_j=c_i\neq\not b, \; c_j=c_i\neq 1, \quad z_j=+ \\ s=s'=s^i_{k_i}, \; i\neq n, & c_j=c_i=\not b, \quad z_j=1 \\ s=s^n_{k_n}, \; s'=s_{F_1}, & c_j=c_i=\not b, \quad z_j=. \\ s=s^i_{k_i}, \; s'=s^{i+1}_1, i<n, & c_j=1, \quad z_j=+ \\ s=s'=s_{F_1}, & c_j\neq\not b, \quad z_j=\not b \\ s=s_{F_1}, \; s'=s_{F_2}, & c_j=\not b, \quad z_j=+ \\ s=s_{F_2}, \; s'=s_F, & z_j=\not b \end{cases}$$

$$\delta_i(s',z|c,s)=1 \text{ si } \forall j\varepsilon M \begin{cases} s=s'=s^i_\ell, & c_i\neq c_j, \quad z_i=. \\ s=s'=s^i_\ell, & c_i=c_j\neq\not b, \; c_i=c_j\neq 1, \quad z_i=+ \\ s=s^i_\ell, \; s'=s^i_{\ell+1}, l<k_i, & c_i=c_j=1 \quad z_i=+ \end{cases}$$

$\delta_k(s',z|c,s)=1$ si $s=s^i_\ell$, $z_k=.$ $\quad \forall k\varepsilon N/\; k\neq i$

$\delta_h(s',z|c,s)=0$ en otro caso $\quad \forall h\varepsilon M \cup N$

$\delta_h(s',z|c,s)=1$ si $z_h=.$ $\quad \forall h\not\varepsilon M \cup N.$ #

Interpretación.- La MT anterior es determinista con, al menos, m+n cintas. Cuando empieza a trabajar hay escrita sobre la cinta $i\varepsilon N$ la expresión correspondiente a la k_i'-upla de palabras de entrada $(u_{1i}, u_{2i}, \ldots, u_{k_i'i})$. Interesa copiar sobre todas las cintas $j\varepsilon M$ las k_i primeras coordenadas, $k_i \leq k_i'$. Esta operación de copia se hará sucesiva y ordenadamente para todas las cintas que indique el conjunto N de tal manera que, cuando la máquina se detenga, estará grabada la expresión correspondiente a la $\Sigma\, k_i$-upla

$$(u_{1i_1}, u_{2i_1}, \ldots, u_{k_1 i_1}, u_{1i_2}, u_{2i_2}, \ldots, u_{k_2 i_2}, \ldots, u_{1i_n}, u_{2i_n}, \ldots, u_{k_n i_n})$$

sobre todas las cintas del conjunto M.

Observese que la máquina ignora las cintas que no estan especificadas por los conjuntos N ó M.

A la MTD $C_K^{N,M}$ la llamaremos máquina de copia generalizada. En el caso que se desee copiar totalmente las cintas de entrada sobre las de salida ($k_i' = k_i$) no se empleará como subíndice el conjunto K y notaremos $C^{N,M}$.

Los lemas 3, 4 y 5 siguientes nos muestran diversas formas en las que se pueden "conectar" W-MT.

Lema 3.- Sean $Z_1 = (S_1, U, V_1, C, \delta_1, \pi_1, \eta^{F_1})$ y $Z_2 = (S_2, V_2, V, C, \delta_2, \pi_2, \eta^{F_2})$ dos W-MT. Si $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ y $(U \cup V_1 \cup V) \subset C$ entonces existe una W-MT $Z = (S, U, V, C, \delta, \pi, \eta^F)$ tal que $\forall u \varepsilon U$, $\forall v \varepsilon V$

$$p(v|u) = \bigoplus_{v' \varepsilon V_1^*} \{p_1(v'|u) \otimes \bigoplus_{a_0 \models^* a_n} [\pi_s \otimes \bigodot_{i=0}^{n-1} p^{Z_2}(a_{i+1}|a_i)]\}$$

donde $a_i \varepsilon D(Z_2)$ y la última $\oplus$ está extendida a todas las posibles formas en que $a_0 \models^* a_n$ siendo

$$a_0 = \xi s \gamma, \qquad a_n = \zeta s' \rho$$

tales que $s, s' \varepsilon S_2$, $s \varepsilon F_2$ y, además,

$$v' = \xi\gamma, \quad v = \zeta\rho.$$

Demostración.- Construimos $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^{F})$ de la siguiente forma:

i) $S= S_1 \cup S_2$

ii)

$$\delta(s',z\,|\,c,s)=\begin{cases} \delta_1(s',z\,|\,c,s) & \text{si } s,s'\varepsilon S_1 \\ \delta_2(s',z\,|\,c,s) & \text{si } s,s'\varepsilon S_2 \\ \pi_{2_{s'}} & \text{si } s\varepsilon F_1,\ s'\varepsilon S_2,\ z=. \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

iii)

$$\pi_s=\begin{cases} \pi_{1_s} & \text{si } s\,\varepsilon S_1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

iv) $F= F_2$. #

Interpretación.- La W-MT Z empieza a trabajar como si fuera Z_1 hasta que llega a alguno de los estados finales F_1. Entonces pasa a trabajar como Z_2 con un grado igual al designador inicial de estados π_2 y explorando el simbolo actual sobre la cinta que, en general podrá ser cualquiera de la expresión actual $\bar{v}'$. Z_1 ha podido alcanzar un estado final en cualquier posición de la expresión $\bar{v}'$.

En adelante notaremos a Z como $Z_1 \rightarrow Z_2$, esto es, "Z_1 seguida de Z_2".

Lema 4.- Sean $Z_1^m=(S^1,U,V',C,\delta^1,\pi^1,\eta^{F^1})$ y $Z_2^n=(S^2,V',V,C,\delta^2,\pi^2,\eta^{F^2})$ dos W-MT con m y n cintas respectívamente tales que $m\geq n\geq 1$, y sea

$$I= \{i_j\,|\, 1\leq i_j\leq m,\ i_j\neq i_k,\ j,k=1,2,\ \ldots\ ,n\}.$$

Entonces si $S^1 \cap S^2=\emptyset$ y $V' \subseteq V$, existe una W-MT con m cintas $Z^m=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^{F})$

tal que

$$\mathbf{p}(v|u)= \underset{\upsilon'\varepsilon(V'^{*})^{n}}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \{\mathbf{p}_2(\upsilon|\upsilon') \otimes \mathbf{p}_1(v'|u)\}$$

donde $\upsilon'_j= v'_{ij}$, $\upsilon_j= v_{ij}$, para j= 1,2, ... ,n, y $v_i= v'_i$ para $i\notin I$, $1\leq i\leq m$.

<u>Demostración</u>.- La W-MT $Z^m=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ viene dada por:

i) $S= S^1 \cup S^2 \cup \{s_r\}$

ii) para $c\varepsilon C^m$ y $z\varepsilon(C \cup \{+,-,.\})^m$

$$\delta_j(s',z|c,s)= \begin{cases} \delta^1_j(s',z|c,s) & \text{si } s,s'\varepsilon S^1,\ s\notin F^1, \quad j=1,2,\ \dots\ ,m \\ 1 & \text{si } s\varepsilon F^1,\ s'= s_r,\ z_j=-, \quad j=1,2,\ \dots\ ,m \\ 1 & \text{si } s=s'= s_r,\ c_j\neq\not b,\ z_j=-,\ j=1,2,\ \dots\ ,m \\ 1 & \text{si } s=s'= s_r,\ c_j=\not b,\ \exists k/\ c_k\neq\not b,\ z_j=.\ \ j=1,2,\ \dots\ ,m \\ \pi^2_{s'} & \text{si } s= s_r,\ s'\varepsilon S^2,\ c_j=\not b,\ \nexists k/\ c_k=\not b,\ z_j=+\ \ j\varepsilon I \\ \delta^2_j(s',z|c,s) & \text{si } s,s'\varepsilon S^2,\ j\varepsilon I \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

iii)

$$\pi_s= \begin{cases} \pi^1_s & \text{si } s\varepsilon S^1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

iv) $F= F^2$. #

Interpretación.- La W-MT Z^m empieza a trabajar como si fuera Z^m_1 hasta que alcanza un estado de F^1. Entonces, en lugar de detenerse, pasa a un estado intermedio s_r y rebobina a la izquierda todas sus cintas. Pasa a la configuración inicial de estados de Z_2^n y empieza a trabajar como Z_2^n con las cintas especificadas por el conjunto I ignorando las restantes.

Notaremos $Z^m = Z_1^m \underset{I}{\dot{-}} Z_2^n$. Si $I = \{1,2, \ldots ,n-1,n\}$, y no hay lugar a confusión, escribiremos simplemente $Z_1^m \dot{-} Z_2^n$

<u>Lema 5</u>.- Sean las W-MT $Z_i = (S^i, U, V, C, \delta^i, \pi^i, \eta^{F_i})$ y sean $\alpha_i \varepsilon W$, $i=1,2,\ldots,n$ Si las W-MT son tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} S^i = \emptyset$$

o bien para cualquier subconjunto de índices $I \subset \{1,2, \ldots ,n\}$ tal que si

$$\bigcap_{i \varepsilon I} S^i \neq \emptyset$$

se cumple que

$$\alpha_i = \alpha_j \qquad y \qquad \delta^i(s',z|c,s) = \delta^j(s',z|c,s), \quad s,s' \varepsilon S^i \cap S^j, \ \forall i,j \varepsilon I$$

entonces existe una W-MT con una cinta $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que

$$p(v|u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \{\alpha_i \otimes p_i(v|u)\}$$

<u>Demostración</u>.- La W-MT Z queda especificada por:

i) $S = \bigcup_{i=1}^{n} S^i$

ii)
$$\delta(s',z|c,s) = \begin{cases} \delta^i(s',z|c,s) & \text{si} \quad s,s' \varepsilon S^i, \ i=1,2, \ldots ,n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

iii) $\pi_s = \alpha_i \otimes \pi_s^i$, $\quad s \varepsilon S^i$

iv) $F = \bigcup_{i=1}^{n} F^i$. #

Interpretación.- Si se tiene inicialmente la expresión $\bar{u}$ sobre la cinta, al empezar a trabajar la W-MT Z es como si simultáneamente empezaran todas las W-MT Z_i. Cada una obtendrá, si es capaz de calcularlo, el resultado $v \varepsilon V^*$ con grado $p_i(v|u)$. Como los designadores iniciales de estados han sido alterados por los α_i y Z dá los resultados con el mayor grado de entre las distintas formas en que se obtiene, resultará

$$p(v|u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \{\alpha_i \otimes p_i(v|u)\}$$

Los lemas anteriores exigen como hipótesis que la intersección de los conjuntos de estados de las W-MT que intervienen sea vacía. Esta condición no es restrictiva en absoluto pues siempre será posible renombrar los estados de las distintas máquinas de forma que cada una continúe teniendo sus "mismos" estados pero que la intersección sea vacía.

Las funciones $\mathcal{N}$ y Ω que definimos a continuación, asi como los lemas 6 y 7, pueden ser estudiadas, por ejemplo, en E. S. Santos (1.971). Omitiremos la demostración de estos lemas.

Definición 19 (E. S. Santos (1.971)).- Sea $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un alfabeto finito. Definimos las aplicaciones $\mathcal{N}: U^* \longrightarrow \mathbf{Z}^+$ y $\Omega: \mathbf{Z}^+ \longrightarrow U^*$ de la forma siguiente:

i) $\mathcal{N}(x_1) = 0,\ \mathcal{N}(x_2) = 1,\ \ldots,\ \mathcal{N}(x_n) = n-1$

$$\mathcal{N}(u) = \sum_{i=1}^{r} k_i\, n^{i-1} \qquad \text{si} \qquad u = x_{k_r} x_{k_{r-1}} \ldots x_{k_1} \varepsilon U^*, \qquad r>0$$

$\mathcal{N}(u) = 0$ si $u = \mathbf{e}$ (elemento neutro de U^*)

ii) $\Omega(n) = u$ si y solo si $\mathcal{N}(u) = n$ para $n \in \mathbf{Z}^+$, $u \in U^*$.

Lema 6 (E. S. Santos (1.971)).- Para todo alfabeto finito U existe una MTD tal que:

i) su alfabeto de salida, V, es un subconjunto de $\{0,1,2, \ldots ,9\}$

ii) para cualquier entrada $u \in U^*$ la máquina se detiene proporcionando como salida $v = \mathcal{N}(u) \in V^*$. #

Esta máquina será llamada "codificadora" y la notaremos $\mathcal{N}$ siempre que no haya lugar a confusión.

Lema 7 (E. S. Santos (1.971)).- Para todo conjunto $U \subseteq \{0,1,2, \ldots ,9\}$ y todo alfabeto finito V existe una MTD tal que para cualquier entrada $u \in U^*$ la máquina se detiene con el resultado $\Omega(u) \in V^*$ como salida. #

Esta máquina será llamada "decodificadora" y, si no hay lugar a confusión, tambien la notaremos por Ω.

Las funciones definidas en 19 y los lemas 6 y 7 nos permiten hacer todo el desarrollo de los capítulos II y III sobre $\mathbf{Z}^+$ en lugar de considerar conjuntos U^* y V^* correspondientes a alfabetos finitos arbitrarios.

Lema 8.- Sea U un alfabeto finito e $I \subseteq \{1,2, \ldots ,n\}$. Existe una MTD, que notaremos E^{nI}, con n cintas y dos estados finales s_1 y s_2 tal que para cualquier n-upla $u = (u_1, u_2, \ldots ,u_n)$, $u \in (U^*)^n$, como entrada, E^{nI} se detiene en estado s_1 si $u_i = u_j$ $\forall i,j \in I$, y en estado s_2 en caso contrario.

Demostración.- La MTD $E^{nI} = (S,U,V,C,\delta,s_0,F)$ viene dada por:

i) $S = \{s_0, s_1, s_2\}$

ii) $F=\{s_1,s_2\}$

iii)
$$\delta_i(s',z|c,s)=\begin{cases} 1 & \text{si } s=s'=s_0,\ c_i=c_j\neq\not{b}\ \forall j\varepsilon I,\ z_i=+, \quad i\ \varepsilon\ I \\ 1 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c_i=c_j=\not{b}\ \forall j\varepsilon I,\ z_i=. \quad i\ \varepsilon\ I \\ 1 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_2,\ c_i\neq c_j\ \exists j\varepsilon I,\ z_i=. \quad i\ \varepsilon\ I \\ 1 & \text{si } z_i=. \quad i\not\varepsilon\ I \\ 0 & \text{en el resto. } \# \end{cases}$$

Interpretación.- La MTD E^{nI} comprueba si todas las cintas especificadas por el conjunto I tienen escrita la misma secuencia de símbolos. Si esto ocurre E^{nI} se detiene en el estado final s_1. En caso contrario entra en el estado final s_2.

Lema 9.- Sea U un alfabeto finito y sean $n,i,j\varepsilon\mathbf{Z}^+$ tales que $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$ Existe una MTD, que notaremos $G^{n\{i,j\}}$, con n cintas y dos estados finales s_1, s_2 tal que para cualquier n-upla de entrada $(u_1,u_2,\ \ldots\ ,u_n)\varepsilon(U^*)^n$, $G^{n\{i,j\}}$ se detiene en estado s_1 si $\mathcal{N}(u_i)\geq\mathcal{N}(u_j)$ y en estado s_2 en caso contrario.

Demostración.- La MTD $G^{n\{i,j\}}=(S,U,V,C,\delta,s_0,F)$ vendrá dada por

i) $S=\{s_0,s_1,s_2\}$

ii) $F=\{s_1,s_2\}$

iii)
$$\delta_i(s',z|c,s)=\begin{cases} 1 & \text{si } s=s'=s_0,\ \mathcal{N}(c_i)\geq\mathcal{N}(c_j),\ z_i=+ \\ 1 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c_i=c_j=\not{b},\ z_i=. \\ 1 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_2,\ \mathcal{N}(c_i)<\mathcal{N}(c_j),\ z_i=. \end{cases}$$

$\delta_j(s',z|c,s)= 1$ si $z_j=z_i$

$\delta_k(s',z|c,s)= 1$ si para $k\neq i$, $k\neq j$, $1\leq k\leq n$, $z_k=.$

$\delta_k(s',z|c,s)= 0$ en el resto para $1\leq k\leq n$. #

Definición 20 (ver, por ejemplo,T. L. Booth (1.967)).- Para u,v,u_1, ... $,u_n \varepsilon \mathbf{Z}^+$ definimos las funciones ordinarias siguientes:

i)
$$\mathcal{S}(v|u)=\begin{cases} 1 & \text{si } v=u+1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que será llamada función "sucesor"

ii)
$$\overset{0}{\mathcal{C}}(v|u)=\begin{cases} 1 & \text{si } v=0 \quad \forall u\varepsilon \mathbf{Z}^+ \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que será llamada "constante cero"

iii)
$$\mathcal{J}^{n,i}(v|u_1,u_2, \ldots u_n)=\begin{cases} 1 & \text{si } v=u_i \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que llamaremos función "identidad n a i".

CAPITULO II: W-CALCULABILIDAD

1.- INTRODUCCION.

En este capítulo desarrollamos el concepto de W-calculabilidad estudiando en qué condiciones existe un algoritmo borroso que permita el "cálculo" de una función W-valuada. En otros términos, tratamos de responder a la siguiente cuestión: dado un lenguaje borroso, ¿cuando existe una W-MT que lo acepta?. Para ello caracterizamos el conjunto de funciones W-calculables haciendo uso del enunciado débil de la hipótesis de Church.

Comenzamos introduciendo el concepto de W-calculabilidad y, tras definir la W-composición, W-minimalización y W-recursión primitiva, demostramos que la clase de funciones W-calculables (parciales) es cerrada con respecto a dichas operaciones.

A continuación se aborda el estudio de la W-calculabilidad de funciones con dominio en Z^{+n} comprobandose que, si mantenemos la definición de recursividad del cálculo ordinario (†), la hipótesis de Church no es extensible al W-cálculo. Con objeto de poder realizar dicha extensión introducimos la noción de W-recursividad que nos permite obtener para el W-cálculo un resultado análogo al enunciado débil de la hipótesis de Church.

El capítulo se termina estudiando la W-calculabilidad de funciones con dominio en $\tilde{Z}^{+n}$ (partes borrosas de Z^{+n}) y la de conjuntos borrosos de funcio-

---

(†) Se dice que una función es recursiva parcial si puede ser generada a partir de las funciones

- sucesor $\mathcal{S}(x) = x+1$
- constante cero $\mathcal{C}^0(x) = 0 \quad \forall x \in Z^+$
- identidad $\mathcal{I}^{n,i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$

aplicando un número finito de veces las operaciones composición, minimalización y recursión primitiva.

nes W-calulables con dominio $\tilde{Z}^{+n}$.

2.- W-CALCULABILIDAD.

Definición 1 (E. S. Santos (1.977))*- Sean U y V alfabetos finitos y $f: (U^*)^k \times V^* \longrightarrow W$, $k \geq 1$. Diremos que f es parcialmente W-calculable si existe $T \subseteq (U^*)^k$ y una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que

$$f(v|u^k)= p^k(v|u^k), \quad \forall u^k \in T,\ v \in V^* \qquad (1)$$

con $p^k(.|.)$ dada por la definición 1.14.

Si $T \equiv (U^*)^k$ diremos que f es W-calculable.

Interpretación.- La función f será parcialmente W-calculable si toda k-upla de entrada perteneciente al dominio T es W-calculable por una misma W-MT Z (según la definición 1.11) y además verifica la condición (1) para todas las posibles salidas correspondientes a esa entrada.

Observese que la diferencia entre función W-calculable y parcialmente W-calculable es que en la primera $\forall u^k \in (U^*)^k$ la W-MT calcula al menos una salida $v \in V^*$ con grado $p^k(v|u^k) \in W$, que puede ser cero, en un número finito de pasos, mientras que si es parcialmente W-calculable hay entradas $u^k \in (U^*)^k$ para las que la W-MT trabaja para siempre.

En lo que sigue, cuando una propiedad pueda ser postulada indistintamente para funciones W-calculables y parcialmente W-calculables escribiremos "(parcialmente) W-calculable". Por otra parte, y si no dá lugar a confusión, cuando se trate de funciones parcialmente W-calculables se eliminará la referencia explícita al dominio T.

Definición 2.- Sea $f: (U^*)^k \times V^* \longrightarrow W$ una función (parcialmente) W-calculable. Para $\alpha \varepsilon W$ se define la función ordinaria, que llamaremos α-corte de f, $f_\alpha: (U^*)^k \times V^* \longrightarrow \{0,1\}$ como:

$$f_\alpha(v|u^k) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(v|u^k) \geq \alpha \\ 0 & \text{si } f(v|u^k) < \alpha \end{cases} \qquad \forall u^k \varepsilon T$$

Si bien la imagen mediante f_α de una entrada u^k es un conjunto, nosotros nos referiremos a los elementos v de ese conjunto. En ese sentido escribiremos $f_\alpha(u^k)=v$ cuando $f_\alpha(v|u^k)=1$.

Teorema 1.- Si $f: (U^*)^k \times V^* \longrightarrow W$ es (parcialmente) W-calculable, entonces $\forall \alpha \varepsilon W$ f_α es (parcialmente) calculable.

Demostración.- Si f es (parcialmente) W-calculable existe una W-MT Z tal que (1) es cierta sobre el dominio de f. Sea, para $\alpha \varepsilon W$, Z_α dada por la definición 1.9 el α-corte de Z. Entonces si

$$f_\alpha(v|u^k) = 1 \iff f(v|u^k) \geq \alpha \iff p^k(v|u^k) \geq \alpha \iff p_\alpha^k(v|u^k) = 1$$

$$f_\alpha(v|u^k) = 0 \iff f(v|u^k) < \alpha \iff p^k(v|u^k) < \alpha \iff p_\alpha^k(v|u^k) = 0$$

y, por tanto, Z_α calcula (parcialmente) f_α. #

Teorema 2.- Sea $f: (U^*)^k \times V^* \longrightarrow W$ una función W-valuada. Si $\forall \alpha \varepsilon W$ el α-corte f_α es (parcialmente) calculable, entonces f es (parcialmente) W-calculable.

Demostración.- Si $\forall \alpha \varepsilon W$ f_α es (parcialmente) calculable, entonces existe una MTND $Z_\alpha=(S',U,V,C,\delta_\alpha,s_0,F)$ tal que

$$p_\alpha^k(v|u^k) = f_\alpha(v|u^k)$$

quedando indefinida si f lo está. Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que

i) $S = S' - \{s_0\}$

ii) $\delta(s',z|c,s) = \max\ \{\alpha|\ \alpha\varepsilon W,\ \delta_\alpha(s',z|c,s) = 1\}$, para $s,s'\varepsilon S\}$

iii) $\pi_s = \max\ \{\alpha|\ \alpha\varepsilon W,\ \delta_\alpha(s,z|c,s_0) = 1\}$

iv)
$$\eta_s^F = \begin{cases} 1 & \text{si } s\varepsilon F \\ 0 & \text{si } s\notin F \end{cases}$$

entonces, para cada $u^k\varepsilon(U^*)^k$ y cada $v\varepsilon V^*$, Z es tal que

$$p^k(v|u^k) = \max\ \{\alpha|\ \alpha\varepsilon W,\ p_\alpha^k(v|u^k) \text{ está definida}\}$$

y, por tanto,

$$f(v|u^k) = p^k(v|u^k)$$

que nos dice que f es (parcialmente) W-calculada por Z. #

Hay que hacer notar que, para simplificar la demostración, hemos supuesto implícitamente que el primer movimiento de todas las máquinas Z_α solo cambia el estado y no el simbolo actual sobre la cinta. Como se comentó en el teorema 1.3 esto no supone restricción alguna.

Observemos tambien que:

- en las hipótesis del teorema se exige que los f_α sean parcialmente calculables $\forall\alpha\varepsilon W$

- en la construcción de la W-MT Z intervienen todos los $\alpha\varepsilon W$ y, sin embargo, puesto que $W=([0,1], \oplus, \otimes, \leq)$, no todos los $\alpha\varepsilon W$ son calculables

lo que hace que el procedimiento mediante el que se construye f a partir de las f_α sea, en general, no calculable.

3.- OPERACIONES DE COMPOSICION, MINIMALIZACION Y RECURSION PRIMITIVA DE FUNCIONES W-VALUADAS

Estudiamos ahora las operaciones que pueden realizarse sobre funciones W-calculables para obtener nuevas funciones que, a su vez, sean W-calculables o parcialmente W-calculables. Los resultados de este apartado serán usados mas adelante para caracterizar la clase de todas las funciones (parcialmente) W-calculables.

En las demostraciones hemos usado máquinas con n cintas. Esto no supone restricción alguna pues, como se vió, el teorema 1.4 establece que cualquier algoritmo para una máquina con n cintas puede ser implementado sobre una máquina con una única cinta.

Definición 3.- Sean $g_i: (A^*)^{k_i} \times B^* \longrightarrow W$, $i=1,2, \ldots ,r$, y sea $f: (B^*)^r \times D^* \longrightarrow W$. Definimos la función compuesta $h: [(A^*)^{k_1} \times (A^*)^{k_2} \times \ldots \times (A^*)^{k_r}] \times D^* \longrightarrow W$ de la forma

$$h(d|a^k)= \bigoplus_{b^r \varepsilon (B^*)^r} \{f(d|b^r) \otimes [\bigodot_{i=1}^{r} g_i(b_i|a_i^{k_i})]\} \qquad (2)$$

donde $k= \sum_{i=1}^{r} k_i$, $a^k= (a_1^{k_1},a_2^{k_2}, \ldots ,a_r^{k_r})\varepsilon[(A^*)^{k_1} \times (A^*)^{k_2} \times \ldots \times (A^*)^{k_r}]$, $b_i \varepsilon B^*$, $d \varepsilon D^*$.

Esta operación será llamada W-composición y escribiremos

$$h= (f \circ g)$$

donde g nota la r-upla $(g_1,g_2, \ldots ,g_r)$.

Observemos que si las funciones son ordinarias la W-composición coinci de con la composición ordinaria.

<u>Teorema 3</u>.- El conjunto de las funciones W-calculables es cerrado bajo la operación W-composición.

<u>Demostración</u>.- Sean T_ℓ,σ y D las MTD "ℓ-copia", "desplazamiento" y "mover a la derecha una palabra" citadas en la sección 2 del capítulo I. Sean

$$k=\sum_{i=1}^{r} k_i,\quad k_0=0$$

$$\ell_i=\sum_{j=1}^{i-1} k_j+1,\ i=1,2,\ \dots\ ,r$$

$$R=\{2,3,\ \dots\ ,r\}$$

y sean Z_f, Z_1, Z_2, ... ,Z_r las W-MT que W-calculan las funciones f,g_1,g_2, ... ,g_r respectívamente. LLamemos

$$Z_i^*=T_{\ell_i}\ \dot{\rightarrow}\ T_{\ell_i+1}\ \dot{\rightarrow}\ \dots\ \dot{\rightarrow}\ T_{\ell_{i+1}-1}\ \dot{\rightarrow}\ (D)^k\rightarrow(\sigma)^k\rightarrow Z_i,\ i=1,2,\dots,r$$

donde

$$(D)^k=D\rightarrow D\rightarrow\overset{k}{\dots}\rightarrow D$$

$$(\sigma)^k\quad \sigma\rightarrow\sigma\rightarrow\overset{k}{\dots}\rightarrow\sigma$$

siendo $\rightarrow$ y $\dot{\rightarrow}$ las "conexiones" de máquinas dadas por los lemas 1.3 y 1.4 respectívamente. Entonces, h es W-calculada por la W-MT

$$Z_h=C^{\{1\},R}\ \dot{\rightarrow}\ (1|Z_i^*,\ i=1,2,\ \dots\ ,r)\ \dot{\rightarrow}\ C^{R,\{1\}}\ \dot{\rightarrow}\ Z_f$$

donde $(1|Z_i^*,\ i=1,2,\ \dots\ ,r)$ es la W-MT dada por el lema 1.1 y $C^{\{1\},R}$, $C^{R,\{1\}}$ las MTD del lema 1.2.

En efecto, Z_h es una W-MT con r cintas de las que las 2,3, ... ,r son de trabajo interno. Inicialmente está sobre la cinta 1 la expresión $\bar{a}^k$ que es copiada por $C^{\{1\},R}$ al resto de las cintas. La W-MT Z_i^* es tal que comienza de jando sobre la cinta i solamente la expresión $a_i^{k_i}$ actuando, posteriormente, la W-MT Z_i para calcular g_i. Por último se copian las cintas 2,3, ... ,r sobre la cinta 1 y actúa la W-MT Z_f. #

Corolario .- Si f y g_i, i=1,2, ... ,r, son funciones parcialmente W-cal culables tales que

$$\text{Dominio } (f) \subseteq \text{Imagen } (g_1) \times \text{Imagen } (g_2) \times \dots \times \text{Imagen } (g_r)$$

entonces h= (f o g) será tambien parcialmente W-calculable.

Demostración.- Es consecuencia inmediata del teorema. #

Teorema 4.- Sea W=([0,1], sup, inf, $\leq$) y sean g_i: $(A^*)^{k_i} \times B^* \longrightarrow W$, i=1,.,r f: $(B^*)^r \times D^* \longrightarrow W$ funciones W-calculables ó W-calculables parciales en las condiciones de corolario del teorema 2.3. Para cualquier $\alpha \varepsilon W$ sean f_α, $g_{i\alpha}$ y $(f \text{ o } g)_\alpha$ los α-cortes estrictos de las funciones f, g_i y (f o g) respectívamente. Entonces se verifica

i) $(f \text{ o } g)_\alpha$ es parcialmente calculable

ii) $(f \text{ o } g)_\alpha = f_\alpha \text{ o } (g_{1\alpha}, \dots, g_{r\alpha})$

Demostración.- Tendremos que para $a^k = (a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_r^{k_r}) \varepsilon [(A^*)^{k_1} \times \times (A^*)^{k_2} \times \dots \times (A^*)^{k_r}]$, $d \varepsilon D^*$ se verifica (2). Entonces como

$$(f \text{ o } g)_\alpha (a^k) = d \iff (f \text{ o } g)(d|a^k) > \alpha$$

que, a su vez, nos dice que debe existir un $b^r \varepsilon (B^*)^r$ tal que

$$f(d|b^r) > \alpha \quad \text{y} \quad g_i(b_i|a_i^{k_i}) > \alpha, \ i=1,2, \dots ,r$$

llegamos a que

$$(f \circ g)_\alpha(a^k) = d \iff \begin{cases} f_\alpha(b^r) = d \\ g_\alpha^i(a_i^{k_i}) = b_i, \quad i=1,2,\ \dots\ ,r \end{cases}$$

y, por tanto, para las funciones ordinarias f_α y $g_{i\alpha}$, sucede que

$$f_\alpha(g_{1\alpha}(a_1^{k_1}), g_{2\alpha}(a_2^{k_2}),\ \dots\ , g_{r\alpha}(a_r^{k_r})) = d \iff (f_\alpha \circ g_\alpha)(a^k) = d$$

o, lo que es igual,

$$(f \circ g)_\alpha = f_\alpha \circ g_\alpha$$

Ademas, puesto que si f y g_i son W-calculables (parciales) (f o g) tambien lo es, se tendrá que $(f \circ g)_\alpha$ es (parcialmente) calculable. #

Puesto que $\mathbf{Z}^+$ está ordenado, podemos inducir un orden sobre cualquier $L \subseteq B^*$ mediante la función de codificación N definida en 1.19. Asi pues, tiene sentido hablar de "menor palabra de L" pudiendo definir la siguiente operación:

<u>Definición 4</u>.- Para $k \geq 1$ definimos la operación de minimalización como aquella que a cada función g: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$, cada $d_0 \in D^*$ y cada entero $q \in \mathbf{Z}^+$ asocia la función f: $(A^*)^k \times B^* \longrightarrow W$ dada por

$$f(b|a^k) = g(d_0|a^k, b)$$

si

$$b = \Omega(\min_{i \geq q} \{i |\ i \in \mathbf{Z}^+,\ g(d_0|a^k, \Omega(i)) = g(d_0|a^k, b)\})$$

siendo $\Omega: \mathbf{Z}^+ \longrightarrow U^*$ la aplicación definida en 1.19.

Notaremos $f = \min_{d_0, q} g$

Interpretación.- La función f hace corresponder a cada entrada $a^k \varepsilon (A^*)^k$ un resultado $b \varepsilon B^*$ con grado $f(b|a^k) \varepsilon W$ si b es la menor palabra de B^*, $b \geq \Omega(q)$, tal que g hace corresponder a la entrada (a^k,b) el valor d_0 con ese mismo grado. Si para d_0 y a^k fijos representamos B^* en abcisas y $g(d_0|a^k,b)$ en ordenadas tendremos

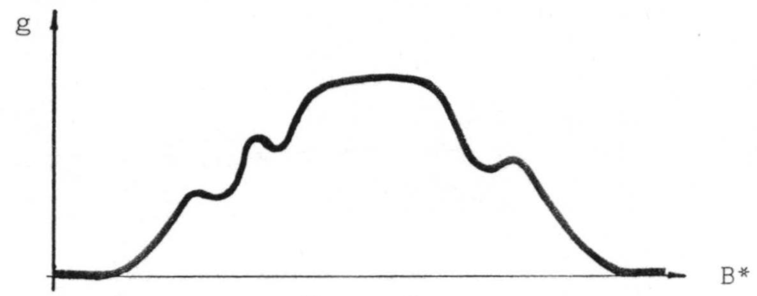


figura 1

siendo la representación gráfica de $f(b|a^k)$ la siguiente

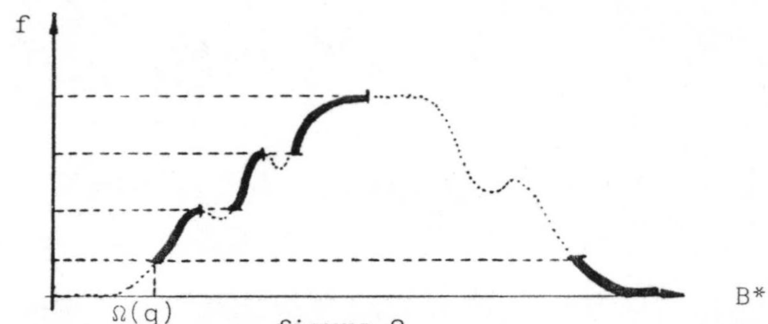


figura 2

En las gráficas observamos mas cláramente como a cada $a^k \varepsilon (A^*)^k$ f hace corresponder un conjunto de elementos $b \varepsilon B^*$, donde cada b es el mas pequeño entre los que tienen un mismo grado $g(d_0|a^k,b)$ y satisface $b \geq \Omega(q)$.

Hay que hacer constar que, aunque g sea una función total, f es parcial ya que no necesariamente todas las entradas (a^k,b) se aplican, mediante g, en d_0. Nuevamente distinguimos entre las entradas en que $g(d_0|a^k,b)=0$ para las que si estaría definida f y aquellas en que $g(d_0|a^k,b)$ queda indefinida. Estas últimas pueden existir, por ejemplo, cuando d_0 no sea un resultado posible, según g, para la (k+1)-upla (a^k,b).

Teorema 5.- Sea g: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$, $k \geq 1$, una función (parcialmente W-calculable. Entonces, $\forall d_0 \varepsilon D^*$ y $\forall q \varepsilon \mathbb{Z}^+$ fijos, la función f: $(A^*)^k \times B^*$ -

$\longrightarrow$ W definida como

$$f = \min_{d_0, q} g$$

es parcialmente W-calculable.

<u>Demostración</u>.- Sea $Z=(S, A \cup B, D, C, \delta, \pi, \eta^F)$ la W-MT que W-calcula g. Notaremos por:

- $\mathcal{N}^I$ la MTD, lema 1.6, que codifica lo que exista sobre el conjunto de cintas I
- Ω^I la MTD, lema 1.7, que decodifica lo que exista sobre el conjunto de cintas I
- $\mathcal{S}^I$ la MTD "sucesor" que suma 1 a los enteros positivos que esten en las cintas del conjunto I
- RI^I la MTD que rebobina las cintas del conjunto I a la izquierda
- $C^{I,J}$ la MTD, lema 1.2, que copia lo que existe en las cintas del conjunto I sobre las del J
- $\rightarrow$ la construcción del lema 1.3
- $\dot{\rightarrow}$ la construcción del lema 1.4
- E^I la MTD del lema 1.8

Para cualesquiera $q \varepsilon \mathbb{Z}^+$ y $d_0 \varepsilon D^*$, sea $Z'^5 = (S', A, B, C', \delta', \pi', \eta^{F'})$, con $C \cup \{0,1,2, \ldots ,9\} \subseteq C'$, definida por

$$Z'^5 = C^{\{1\}\{3\}} \dot{\rightarrow} \Omega^{\{4\}} \dot{\rightarrow} C^{\{3,4\}\{2\}} \dot{\rightarrow} Z^{\{2\}} \dot{\rightarrow} E^{\{2,5\}} \dot{\rightarrow} C^{\{4\}\{1\}} \dot{\rightarrow} \mathcal{N}^{\{4\}} \dot{\rightarrow} \mathcal{S}^{\{4\}} \rightarrow RI^{\{4\}}$$

una W-MT con 5 cintas en la que la entrada $a^k \varepsilon (A^*)^k$ está escrita sobre la cin ta 1 y las cuatro restantes son de trabajo interno. Inicialmente está escrito sobre la cinta 4 el entero q y sobre la cinta 5 la palabra $d_0 \varepsilon D^*$. Los resultados aparecen sobre la cinta 1.

Entonces f es W-calculada por la W-MT $Z''^5=(S',A,B,C',\delta'',\pi',\eta^{F''})$, donde

i) $F''=\{s_{F''}\}$

ii)

$$\delta''(s',z|c,s)=\begin{cases} 1 & \text{si } z_i=.,i=1,2,\dots,5, \quad s\varepsilon F^{RI},\ s'=s_0^{\Omega\{4\}} \\ 1 & \text{si } z_i=.,i=1,2,\dots,5, \quad s=s_2^{E\{2,5\}},\ s'=s_0^{\mathcal{N}\{4\}} \\ 1 & \text{si } z_i=.,i=1,2,\dots,5, \quad s=s_1^{E\{2,5\}},\ s'=s_0^{\mathcal{N}\{4\}} \\ & \text{y se satisface} \\ & \quad p^Z(d_0|a^k,b)\leq \bigoplus_{i=q}^{\mathcal{N}(b)-1} p^Z(d_0|a^k,\Omega(i)) \qquad (3) \\ 1 & \text{si } z_i=.,i=1,2,\dots,5, \quad s=s_F^{C\{4\}\{1\}},\ s'=s_{F''} \\ 1 & \text{si } z_i=.,i=1,2,\dots,5, \quad s=s_F^{C\{4\}\{1\}},\ s'=s_0^{\mathcal{N}\{4\}} \\ & \text{y se satisface} \\ & \quad p^Z(d_0|a^k,b)> \bigodot_{b'\varepsilon B^*} g(d_0|a^k,b') \qquad (4) \\ 0 & \text{si } s=s_2^{E\{2,5\}},\ s'=s_0^{C\{4\}\{1\}} \\ 0 & \text{si } s=s_1^{E\{2,5\}},\ s'=s_0^{C\{4\}\{1\}} \text{ y (3) es satisfecha} \\ 0 & \text{si } s \text{ y } s' \text{ estan en alguna de las condiciones anteriores pero } z_i\neq. \text{ para algún } i=1,2,\dots,5 \\ \delta'(s',z|c,s) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

siendo

d_0 la expresión actual sobre las cintas 2 y 5

a^k la expresión actual sobre la cinta 3

b la expresión actual sobre la cinta 4

$c \varepsilon C'^5$ y $z \varepsilon (C' \cup \{+,-,.\})^5$

En efecto Z´´ actúa como sigue:

Paso 1.- Copia la entrada a^k de la cinta 1 a la cinta 3

Paso 2.- Calcula Ω sobre la cinta 4

Paso 3.- Copia las cinta 3 y 4 sobre la cinta 2

Paso 4.- Calcula Z sobre la cinta 2

Paso 5.- Si la expresión de la cinta 2 es igual a la expresión de la cinta 5 y (3) no es satisfecha, copia la cinta 4 sobre la cinta 1 como resultado entrando en el estado final $s_{F''}$. Entonces, si (4) es cierta va, ademas, al paso 6 para seguir obteniendo posibles nuevos resultados correspondientes a la entrada a^k. Si (4) no es satisfecha la W-MT Z´´ queda totalmente detenida.

Paso 6.- Calcula $\mathcal{N}$ sobre la cinta 4

Paso 7.- Suma 1 a la expresión sobre la cinta 4

Paso 8.- Posiciona la cinta 4 al principio y se va al paso 2.

Observemos que, cada vez que se copia en la cinta 1 un b en las condiciones del paso 5, Z´´, simultáneamente, entra en el estado final y, si (4) es cierta, sigue trabajando para encontrar nuevos resultados $b \varepsilon B^*$. Cuando se alcanza aquel $b \epsilon B^*$ para el que (4) no se satisface la máquina se detiene. Si no existe ningun $b \epsilon B^*$ en las condiciones del paso 5 la máquina no se detendrá para la entrada $a^k \epsilon (A^*)^k$, lo que prueba que f es parcialmente W-calculable. #

La demostración del teorema anterior puede ser directamente extendida al caso en que la función g es estrictamente parcialmente W-calculable obteniendo de este modo el siguiente teorema general:

<u>Teorema 5.bis</u>.- El conjunto de las funciones parcialmente W-calculables es cerrado bajo la operación de minimalización.

<u>Demostración</u>.- Análoga a la del teorema 5. #

<u>Corolario 1</u>.- Sea g: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$,$k \geq 1$, una función parcialmente W-calculable. Sean $d_0 \epsilon D^*$ y $q \epsilon \mathbf{Z}^+$ arbitrarios pero fijos y

$$\tilde{D} = \{d \mid d \epsilon D^*, \mathcal{N}(d) \geq \mathcal{N}(d_0)\}$$

Entonces, la función f: $(A^*)^k \times B^* \longrightarrow W$ definida por

$$f(b \mid a^k) = \underset{d \epsilon \tilde{D}}{\textcircled{\Sigma}} g(d \mid a^k, b)$$

si

$$b = \Omega(\min_{i \geq q} \{i \mid i \epsilon \mathbf{Z}^+, \underset{d \epsilon \tilde{D}}{\textcircled{\Sigma}} g(d \mid a^k, \Omega(i)) = \underset{d \epsilon \tilde{D}}{\textcircled{\Sigma}} g(d \mid a^k, b)\})$$

es parcialmente W-calculable.

<u>Demostración</u>.- Usaremos la misma estructura de cintas que en el teorema anterior.

Consideremos la función ordinaria h: $D^* \times D^* \longrightarrow \{0,1\}$ definida por

$$h(d'|d)=\begin{cases} 1 & \text{si } \ d\varepsilon\tilde{D},\ d'=d_0 \\ 1 & \text{si } \ d\notin\tilde{D},\ d'=d \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Si llamamos

$$Z_h'=(S_h,D,D,C,\delta_h',s_0^G,s_F^G)=G^{\{2,5\}}\xrightarrow{\cdot}C^{\{5\}\{2\}},$$

siendo G la MTD dada por el lema 1.9, entonces h es calculada por la MTD con dos cintas $Z_h=(S_h,D,D,C,\delta_h,s_0^G,s_F^G)$ donde

$$\delta_h(s',z|c,s)=\begin{cases} 0 & \text{si } \ s=s_2^G,\ s'=s_0^C \\ 1 & \text{si } \ s=s_2^G,\ s'=s_F^C \\ \delta_h'(s',z|c,s) & \text{resto} \end{cases}$$

Definimos ahora la función g': $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$ como composición de h y g, esto es

$$g'=(h \text{ o } g)$$

por lo que

$$g'(d'|a^k,b)=\begin{cases} \underset{d\varepsilon\tilde{D}}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}\ g(d|a^k,b) & \text{si } \ d'=d_0 \\ g(d'|a^k,b) & \text{si } \ d'\neq d_0 \end{cases}$$

Puesto que h y g son W-calculables g' tambien lo será y, llamando Z''' a la W-MT que la W-calcula, la función f será W-calculada por la W-MT que resulta de sustituir Z por Z''' en la construcción realizada para demostrar el teorema 5. #

Corolario 2.- Sean g, d_0 y q en las condiciones del corolario 1 y sea

$$\tilde{D}' = \{d \mid d\varepsilon D^*,\ \mathcal{N}(d) \leq \mathcal{N}(d_0)\}$$

entonces la función f: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$ definida por

$$f(b|a^k) = \underset{d\varepsilon\tilde{D}'}{\textcircled{\Sigma}}\ g(d|a^k,b)$$

si

$$b = \Omega(\min_{i\geq q}\{i \mid i\varepsilon Z^+,\ \underset{d\varepsilon\tilde{D}'}{\textcircled{\Sigma}}\ g(d|a^k,\Omega(i)) = \underset{d\varepsilon\tilde{D}'}{\textcircled{\Sigma}}\ g(d|a^k,b)\})$$

es parcialmente W-calculable.

Demostración.- Es idéntica a la del corolario 1 sin mas que sustituir el conjunto $\tilde{D}$ por el $\tilde{D}'$ y considerar la MTD $G^{\{5,2\}}$ en lugar de la $G^{\{2,5\}}$. #

Como se deduce de la definición y teorema anteriores, la operación de W-minimalización permite definir funciones parcialmente W-calculables a partir de funciones totalmente W-calculables. No obstante, es posible que la función obtenida por W-minimalización tambien sea total. Entonces tendremos:

Definición 5.- Sea g: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$, $k\geq 1$, una función W-calculable. Si $\forall d_0 \varepsilon D^*$ y $\forall q\varepsilon Z^+$ fijos la función

$$f = \min_{d_0,q}\ g$$

es totalmente W-calculable, entonces se dirá que g es W-regular.

El conjunto de las funciones W-regulares no tiene porqué ser cerrado bajo W-minimalización pues f, aunque sea W-calculable total, no tiene porqué ser W-regular.

Pasamos a estudiar ahora como se comportan los α-cortes de una función W-calculable frente a la operación de W-minimalización.

Definición 6.- Sea $H=\{h_\alpha \mid h_\alpha : (A^*)^k \longrightarrow B^*,\ \alpha\varepsilon W\}$ una familia de funciones ordinarias. Para cada $\alpha_0 \varepsilon W$ definimos la función

$$\min_{\alpha \geq \alpha_0} h_\alpha : (A^*)^k \longrightarrow B^*$$

que notaremos $\hat{h}_{\alpha_0}$ como

$$\hat{h}_{\alpha_0} = \min_{\alpha \geq \alpha_0} h_\alpha$$

esto es,

$$\hat{h}_{\alpha_0}(a^k)= \Omega(\min \{j \mid j\varepsilon \mathbf{Z}^+,\ \Omega(j)=h_\alpha(a^k) \text{ para algún } \alpha \geq \alpha_0\})$$

Interpretación.- La imagen según $\hat{h}_{\alpha_0}$ de una k-upla a^k es la palabra "mas pequeña" del conjunto $\{h_\alpha(a^k) \mid \alpha \geq \alpha_0\}$.

Teorema 6.- Sean $g: [(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow W$ una función (parcialmente) W-calculable, $f: (A^*)^k \times B^* \longrightarrow W$ tal que

$$f= \min_{d_0,q} g$$

y, para $\alpha_0 \varepsilon W$, g_{α_0}, f_{α_0} los α_0-cortes de g y f respectívamente. Entonces se verifica que

$$\hat{f}_{\alpha_0} = \min_{d_0,q} g_{\alpha_0}$$

donde para obtener f aplicamos la operación de W-minimalización y para obtener $\hat{f}_{\alpha_0}$ la minimalización ordinaria.

Demostración.-

$$\hat{f}_{\alpha_0}(a^k)= b$$

equivale a decir que

$$b = \Omega(\min\{j \mid \Omega(j) = f_\alpha(a^k),\ \alpha \geq \alpha_0\})$$

esto es

$$b = \Omega(\min\{j \mid f(\Omega(j) \mid a^k) \geq \alpha_0\})$$

o bien

$$b = \Omega(\min\{j \mid j = \min_{i \geq q}\{i \mid g(d_0 \mid a^k, \Omega(i)) = g(d_0 \mid a^k, \Omega(j)) \geq \alpha_0\}\})$$

que, considerando el α_0-corte de g, se escribe como

$$b = \Omega(\min\{j \mid j = \min_{i \geq q}\{i \mid g_{\alpha_0}(a^k, \Omega(i)) = g_{\alpha_0}(a^k, \Omega(j)) = d_0\}\})$$

o, lo que es igual

$$b = \Omega(\min_{i \geq q}\{i \mid g_{\alpha_0}(a^k, \Omega(i)) = d_0\}) = (\min_{d_0, q} g_{\alpha_0})(a^k)$$

lo que prueba el teorema. #

Interpretación.- Para $d_0 \varepsilon D^*$, $q \varepsilon \mathbf{Z}^+$ fijos y un $a^k \varepsilon (A^*)^k$ consideremos las representaciones gráficas de las figuras 3 a 6. En ellas se considera B* sobre el eje de abcisas y en el de ordenadas el grado con el que las distintas funciones dan como resultado d_0 para a^k fijo y $b \varepsilon B^*$ variable.

Al definir la minimalización lo que se calcula es el mínimo de un conjunto borroso (figura 3)

$$\min_b \{b/g(d_0 \mid a^k, b) \mid b \varepsilon B^*\}$$

que será, igualmente, un conjunto borroso (figura 4)

$$\mathcal{B} = \{b/f(b \mid a^k) \mid b \varepsilon B^*\}$$

Ahora bien, para $\alpha_0 \varepsilon W$ el α_0-corte $\mathcal{B}_{\alpha_0}$ (figura 6) viene dado por

$$\mathcal{B}_{\alpha_0} = \{b \mid f(b \mid a^k) \geq \alpha_0\}$$

que, debido a que los α-cortes son conjuntos contráctiles, coincide (punto se-

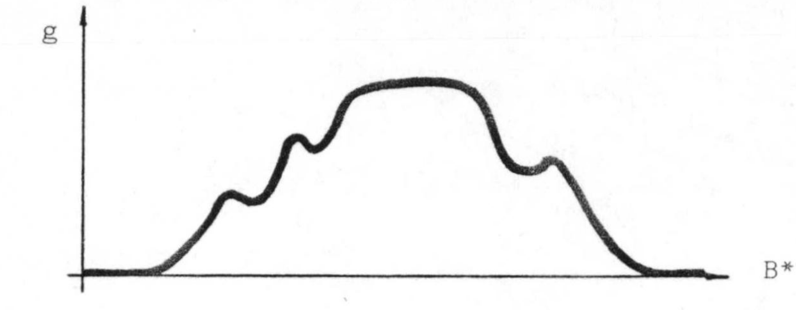


figura 3

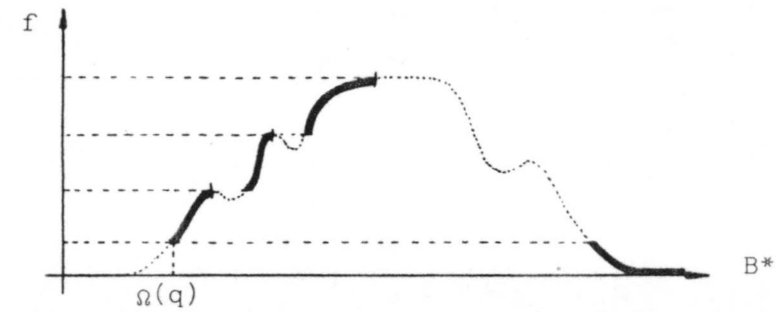


figura 4

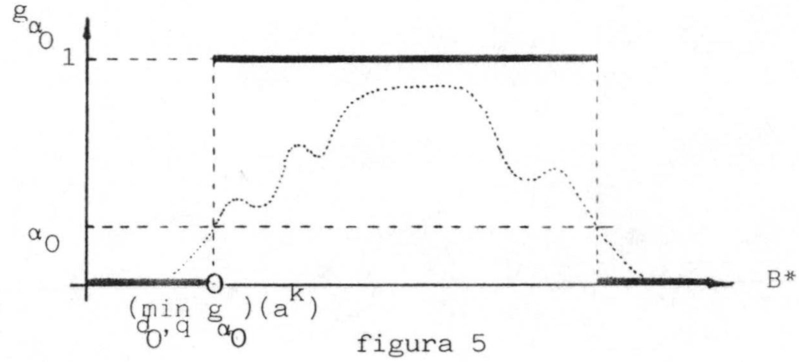


figura 5

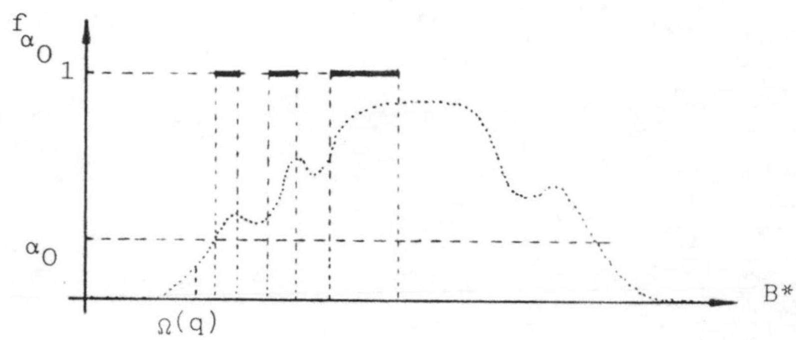


figura 6

ñalado con ⊙ en la figura 5) con el conjunto

$$\{b \mid (\min_{d_0,q} g_\alpha)(a^k) = b,\ \alpha \geq \alpha_0\}$$

de aquí que

$$\min_b \beta_{\alpha_0} = \hat{f}_{\alpha_0}(a^k) = (\min_{d_0,q} g_{\alpha_0})(a^k)$$

Corolario 1.- Si g: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \longrightarrow \{0,1\}$, $k \geq 1$, entonces para cualesquiera $d_0 \varepsilon D^*$, $q \varepsilon \mathbf{Z}^+$, la operación de W-minimalización de g coincide con la minimalización ordinaria.

Demostración.- Es inmediata ya que, en este caso, la imagen de a^k mediante f, si existe, se reduce al único punto

$$b = \Omega(\min_{i \geq q} \{i \mid i \varepsilon \mathbf{Z}^+,\ g(d_0 \mid a^k, b) = 1\})$$

siendo

$$f(b \mid a^k) = 1 = f_1(a^k) = \hat{f}_1(a^k) = (\min_{d_0,q} g_1)(a^k). \quad \#$$

Definición 7.- Sean f: $(A^*)^k \times A^* \longrightarrow W$ y g: $(A^*)^{k+2} \times A^* \longrightarrow W$ funciones W-valuadas. La operación de W-recursión primitiva asocia a cada f,g y $q \varepsilon \mathbf{Z}^+$ la función W-valuada h: $(A^*)^{k+1} \times A^* \longrightarrow W$ definida inductívamente sobre $\mathcal{N}(v)$, $v \varepsilon A^*$, por

$$h(v \mid a^k, \Omega(q)) = f(v \mid a^k)$$

$$h(v \mid a^k, \Omega(\mathcal{N}(x)+1)) = \bigoplus_{u \varepsilon A^*} \{g(v \mid a^k, u, x) \otimes h(u \mid a^k, x)\}$$

para $x \varepsilon A^*$, $\mathcal{N}(x) \geq q$.

Teorema 7.- Sean F y G las clases de funciones

$$F = \{f \mid f: (A^*)^k \times A^* \longrightarrow W,\ f \text{ W-calculable}\}$$

$$G= \{g \mid g: (A^*)^{k+2} \times A^* \longrightarrow W,\ g \text{ es W-calculable}\}$$

$k\varepsilon \mathbf{Z}^+$ fijo. Entonces, para cualesquiera $f\varepsilon F$, $g\varepsilon G$ y $\forall q\varepsilon \mathbf{Z}^+$, la función $h: (A^*)^{k+1} \times A^* \longrightarrow W$ obtenida por W-recursión primitiva a partir de f y g es W-calculable.

<u>Demostración</u>.- Sean Z_f y Z_g las W-MT que W-calculan f y g respectivamente. Construimos en primer lugar la W-MT $Z^5=(S,A,A,C,\delta,\pi,\eta^F)$, con cinco cintas, la cual, cuando empieza a trabajar, tiene el argumento (a^k,x) sobre su primera cinta y $\Omega(q)$ sobre su quinta cinta. El resultado aparece sobre la tercera y la segunda y cuarta son cintas de trabajo interno. Z^5 viene definida por:

$$Z^5= C^{\{1\}\{3\}}_{\{k\}} \longrightarrow C^{\{1\}\{2\}}_{\{1\}} \dot{\longrightarrow} Z_f^{\{3\}} \longrightarrow E^{\{2,5\}} \dot{\longrightarrow} \mathcal{N}^{\{5\}} \dot{\longrightarrow} \mathcal{S}^{\{5\}} \dot{\longrightarrow} \Omega^{\{5\}} \dot{\longrightarrow} C^{\{3\}\{4\}} \dot{\longrightarrow}$$

$$\dot{\longrightarrow} C^{\{1,4,5\}\{3\}}_{\{k,1,1\}} \dot{\longrightarrow} Z_g^{\{3\}}$$

Entonces, llamando $Z'^5=(S\ ,A,A,C,\delta',\pi\ ,\eta^{F'})$ a la W-MT tal que

i) $F'= \{s_1^E\}$

ii)

$$\delta'(s',z|c,s)=\begin{cases} \delta(s',z|c,s) & \text{si } s\neq s_1^E \text{ ó } s\notin F^{Z_g} \\ 1 & \text{si } s\varepsilon F^{Z_g},\ s'=s_0^E,\ z_i=.,\ i=1,2,\ \dots\ ,5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función h es W-calculada por

$$Z_h^5= Z'^5 \dot{\longrightarrow} C^{\{3\}\{1\}}$$

En efecto, esta W-MT actúa de la forma siguiente:

Paso 1.- Copia las k primeras palabras de la cinta 1 sobre la cinta 3.

Paso 2.- Copia la última palabra de la cinta 1 sobre la cinta 2 y rebobina todas las cintas.

Paso 3.- Actúa la W-MT Z_f sobre la cinta 3.

Paso 4.- Se compara si la expresión sobre la cinta 5 coincide con la expresion sobre la cinta 2. Si son iguales se copia sobre la cinta 1 el resultado de la cinta 3 y la W-MT Z_h se detiene. Si son distintos se rebobina y prosigue.

Paso 5.- Actúa la MTD $\mathcal{N}$ sobre la cinta 5 para obtener su representación numérica y rebobina.

Paso 6.- Se incrementa en 1 el valor numérico sobre la cinta 5 y se rebobina.

Paso 7.- Actúa la MTD Ω sobre la cinta 5.

Paso 8.- Se copia la cinta 3 sobre la cinta 4 y se rebobinan todas las cintas.

Paso 9.- Se copian ordenadamente las k primeras palabras de la cinta 1 y la única palabra que hay en la cinta 4 y en la cinta 5 sobre la cinta 3.

Paso 10.-Se W-calcula g sobre el argumento actual de la cinta 3 y se vuelve al paso 4. #

<u>Teorema 8</u>.- Sea $W=([0,1], \sup, \inf, \leq)$ y consideremos las funciones W-calculables $f\colon (A^*)^k \times A^* \longrightarrow W$, $g\colon (A^*)^{k+2} \times A^* \longrightarrow W$ y, para $q\in\mathbf{Z}^+$, la función $h\colon (A^*)^{k+1} \times A^* \longrightarrow W$ obtenida por W-recursión primitiva sobre f y g. Para cualquier $\alpha\in W$ sean f_α, g_α, y h_α los α-cortes estrictos de f, g y h respectívamente. Si notamos por $\tilde{h}_\alpha\colon (A^*)^{k+1} \longrightarrow A^*$ la función obtenida a partir de la recursión primitiva ordinaria sobre f_α y g_α para $q\in\mathbf{Z}^+$, entonces se verifica que

$$h_\alpha = \tilde{h}_\alpha$$

Demostración.- Puesto que

$$\tilde{h}_\alpha(a^k,\Omega(q))=v \iff f_\alpha(a^k)=v \iff f(v|a^k)\geq\alpha \iff h_\alpha(a^k,\Omega(q))=v$$

se tiene

$$h_\alpha(a^k,x)=\tilde{h}_\alpha(a^k,x), \quad \text{para } x=\Omega(q).$$

Supongamos ahora que esta igualdad es cierta para un $x\varepsilon A^*$ arbitrario pero fijo y probemos que tambien se verifica para $\Omega(\mathcal{N}(x)+1)$. Sea I: $(A^*)^{k+1} \times (A^*)^{k+2} \longrightarrow W$ definida por

$$I(a^k,u,x|a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1))=h(u|a^k,x), \qquad \forall x\varepsilon A^*,\ \forall a^k\varepsilon(A^*)^k$$

La función I será W-calculable puesto que h lo es. Ademas, h puede ser definida como

$$h(v|a^k,\Omega(q))=f(v|a^k)$$

$$h(v|a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1))=(g \text{ o } I)(v|a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1)), \text{para } \mathcal{N}(x)\geq q$$

Consideremos el α-corte de I. $I_\alpha: (A^*)^{k+1} \longrightarrow (A^*)^{k+2}$ será tal que

$$I_\alpha(a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1))=(a^k,h_\alpha(a^k,x),x)=(a^k,\tilde{h}_\alpha(a^k,x),x)$$

para aquellos

$$u=h_\alpha(a^k,x)=\tilde{h}_\alpha(a^k,x)$$

tales que

$$h(u|a^k,x)\geq\alpha$$

Entonces, para $\Omega(\mathcal{N}(x)+1)\varepsilon A^*$ se tiene que

$$h_\alpha(a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1))=(g \text{ o } I)_\alpha(a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1)), \qquad \mathcal{N}(x)\geq q$$

y por tanto

$$\tilde{h}_\alpha(a^k,\Omega(\mathcal{N}(x)+1))=g_\alpha(a^k,\tilde{h}_\alpha(a^k,x),x)=g_\alpha(a^k,h_\alpha(a^k,x),x)=$$

$$= (g_{\alpha} \text{ o } I_{\alpha})(a^k, \Omega(\mathcal{N}(x)+1)) =$$

$$= (g \text{ o } I)_{\alpha}\ (a^k, \Omega(\mathcal{N}(x)+1)) =$$

$$= h_{\alpha}(a^k, \Omega(\mathcal{N}(x)+1))$$

como se trataba de demostrar. #

4.- W-CALCULABILIDAD SOBRE $\mathbb{Z}^{+n}$.

Hasta aquí hemos definido el concepto de W-calculabilidad y estudiado algunas de sus propiedades. Tambien, definición 1.19 y lemas 1.6 y 1.7, sabemos que se puede desarrollar el estudio de la W-calculabilidad utilizando $\mathbf{Z}^+$ en lugar de U*, siendo U un alfabeto finito cualquiera.

En esta sección intentaremos caracterizar al conjunto de las funciones W-calculables partiendo del concepto de recursividad. Como primera aproximación podríamos introducir la recursividad a partir de las funciones elementales sucesor, constante cero e identidad,definidas en 1.20, y de las operaciones W-composicón, W-minimalización y W-recursión primitiva. Ahora bien, como estas operaciones coinciden, teoremas 4, 8 y corolario 1 del teorema 6, con las de composición, minimalización y recursión primitiva cuando son aplicadas sobre funciones ordinarias, solo serían recursivas las funciones W-calculables ordinarias, esto es, las calculables. Si tenemos en cuenta, por ejemplo, que una función W-calculable cualquiera f: $\mathbf{Z}^{+n} \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ puede tomar como grado cualquier valor de $[0,1]$ y que los resultados de las funciones calculables solo pueden pertenecer al conjunto de números reales calculables, en cuyo caso el grado estaría propiamente contenido en $[0,1]$, resulta que puede haber funciones W-calculables que no son calculables y, por tanto, no serán recursivas. Asi pues esta caracterización no es válida.

Con el propósito de obtener para el W-cálculo un resultado análogo a la tesis de Church-Turing proponemos una extensión del concepto de recursividad, introduciendo W-valuación en las funciones $\mathcal{S}, \mathcal{C}^0$ ó $\mathcal{J}^{n,i}$, en la que se ha procurado alterar lo mínimo posible su definición.

Parece claro que la función $\mathcal{C}^0$, constante cero, deba seguir manteniendo su caracter ordinario, esto es, tomar el valor cero con grado uno y el resto de posibles valores con grado cero.

Igual se podría decir de la función sucesor. Esta función, dado su caracter, debe ser tal que a una entrada x le asigne como salida su sucesor x+1 con grado uno y el resto de valores con grado cero, lo que, aplicado en el correspondiente proceso W-valuado de cálculo, hará que se obtenga la salida x+1 con el mismo grado que la entrada.

Todo esto nos induce a pensar que la función que admite sobre su salida un grado de creencia variable en [0,1] es la función $\mathcal{J}^{n,i}$. Pensemos que esta función es la proyección de un punto $(u_1,u_2, \ldots ,u_n)$ n-dimensional sobre el i-ésimo eje. Si esta "proyección" en lugar de dar un punto produce una zona sombreada de puntos relacionados con u_i, se podría establecer un grado de pertenencia de cada punto $u \in \mathbf{Z}^+$ a la "sombra". Por otra parte, en 1.20 apartado iii), realmente se define

$$\mathcal{J}^{n,i}(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)= \delta(v|u_i)$$

siendo δ la función de Kronecker

$$\delta(v|u_i)= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad v= u_i \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

que es calculable.

Teniendo en cuenta todo esto hemos sustituido la función $\{0,1\}$-valuada δ por una del conjunto $\Phi=\{\psi |\ \psi: \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W,\ \psi \text{ es W-calculable}\}$ llegando a:

Definición 8.- Para $u,v,u_1,u_2, \ \ldots \ ,u_n \varepsilon \mathbf{Z}^+$ se define

i)
$$\mathcal{S}(v|u)=\begin{cases} 1 & \text{si } v= u+1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

ii)
$$\mathcal{C}^0(v|u)=\begin{cases} 1 & \text{si } v= 0 \quad \forall u \varepsilon \mathbf{Z}^+ \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

iii) $\mathcal{J}^{n,i}_{\rho}(v|u_1,u_2, \ \ldots \ ,u_i, \ \ldots \ ,u_n)= \rho(v|u_i)$,

donde $\rho\varepsilon\Phi= \{\psi |\ \psi: \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow [0,1],\ \psi \text{ es W-calculable}\}$

Interpretación.- En iii) hemos sustituido una "identidad" por una función de "parecido", "semejanza" o, en general, relación entre puntos de $\mathbf{Z}^+$. Esta semejanza, puesta explícitamente de manifiesto por ρ, dependerá del problema en estudio: dos puntos pueden ser mas o menos semejantes según el criterio que fije cada observador para relacionarlos. De aqui que se deba considerar el conjunto Φ de todas las posibles funciones.

Teorema 9.- Para cualesquiera $n,i\varepsilon\mathbf{Z}^+$ finitos, $i\leq n$, y cualquier $\psi\varepsilon\Phi$ la función $\mathcal{J}^{n,i}_{\psi}$ es W-calculable.

Demostración.- Usaremos una W-MT con dos cintas. En la primera aparecerá la entrada y la salida, siendo la segunda de trabajo interno. Si Z_{ψ} es la W-MT que W-calcula la función ψ, entonces

$$Z^2= \mathcal{D}^{\{1\}} \rightarrow \mathcal{D}^{\{1\}} \rightarrow \overbrace{\ldots}^{i-1} \rightarrow \mathcal{D}^{\{1\}} \rightarrow C^{\{1\}\{2\}}_{\{1\}} \rightarrow Z^{\{2\}}_{\psi} \rightarrow C^{\{2\}\{1\}}$$

siendo $\mathcal{D}$ la MTD que mueve una palabra a la derecha. En efecto, primero aplica mos i-1 veces la máquina $\mathcal{D}$ sobre la cinta 1 con lo que estaremos posicionados al principio de la palabra u_i. Copiamos una palabra, u_i, de la cinta 1 a la 2, rebobinamos y aplicamos la W-MT Z_ψ sobre la cinta 2. Cuando esta se detiene se rebobina y se copia el resultado sobre la cinta 1. Es obvio que Z^2 W-calcula la función $\mathcal{T}_\psi^{n,i}$. #

Definición 9.- Se dirá que una función f: $Z^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ es W-recursiva primitiva si puede ser obtenida a partir de las funciones $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}^0$ e $\mathcal{T}_\psi^{n,i}$, para $\psi \epsilon \Phi$, aplicando un número finito de veces las operaciones W-composición y W-recursión primitiva.

Nota.- En cada aplicación de la función $\mathcal{T}_\psi^{n,i}$ la función ψ puede ser distinta.

Teorema 10.- Toda función f: $Z^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ W-recursiva primitiva es W-calculable total.

Demostración.- Es inmediata a partir de la definición 2.9 teniendo presente que la clase de las funciones W-calculables es cerrada bajo las operaciones de W-composición y W-recursión primitiva. #

Teorema 11.- El conjunto de las funciones W-recursivas primitivas es cerrado bajo las operaciones W-composición y W-recursión primitiva.

Demostración.- Tambien es evidente dado que toda función obtenida a partir de funciones W-recursivas primitivas por aplicación de estas operaciones se habrá obtenido, en definitiva, a partir de $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}^0$ e $\mathcal{T}_\psi^{n,i}$ empleando W-composición y W-recursión primitiva. #

Ya que toda función W-recursiva primitiva es W-calculable total, necesitamos introducir la operación W-minimalización para poder caracterizar a las funciones parciales. Asi se tiene:

Definición 10.- Diremos que una función f: $Z^{+n} \times Z^{+} \longrightarrow W$ es W-recursiva parcial si puede ser generada a partir de las funciones $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}^{0}$ e $\mathcal{I}_{\psi}^{n,i}$ empleando un número finito de veces las operaciones W-composición, W-recursión primitiva y W-minimalización. Si la operación W-minimalización se aplica solamente a funciones W-regulares entonces f será total y la llamaremos W-recursiva.

Interpretación.- Una función W-recursiva parcial se obtiene a partir de funciones W-recursivas primitivas por aplicación de las operaciones antes citadas un número finito de veces.

De las definiciones anteriores se sigue que el conjunto de las funciones W-recursivas primitivas es un subconjunto del de las funciones W-recursivas que, a su vez, está contenido en el de las funciones W-recursivas parciales.

Mediante una demostración idéntica a la de los teoremas 2.10 y 2.11 se prueban los siguientes enunciados:

Teorema 12.- Toda función f: $Z^{+n} \times Z^{+} \longrightarrow W$ W-recursiva (parcial) es W-calculable (parcialmente).

Teorema 13.- El conjunto de las funciones W-recursivas parciales es cerrado bajo las operaciones W-composición, W-recursión primitiva y W-minimalización.

El teorema 12 nos dice que el conjunto de las funciones W-recursivas (parciales) está contenido en el de las W-calculables (parciales).

Demostraremos ahora que si la hipótesis débil de Church es cierta para funciones ordinarias (ver demostración por ejemplo en J. P. Azra y B. Jaulin (1.973) capítulo I), entonces tambien se cumple para el W-cálculo en los siguientes términos:

" para toda función W-calculable existirá otra equivalente que es W-recur siva. "

Dicha equivalencia se define de acuerdo con:

Definición 11.- Sean f_1, f_2: $\mathbf{Z}^{+n} \times \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow W$ tales que sus dominios coinciden. Se dirá que f_1 es equivalente a f_2 si y solo si para toda n-upla $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en la que ambas funciones esten definidas y $\forall v \varepsilon \mathbf{Z}^{+}$ se cumple:

$$f_1(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)= f_2(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)$$

Es evidente que esta relación es de equivalencia.

Teorema 14.- Para toda función W-calculable f: $\mathbf{Z}^{+n} \times \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow W$ existe otra f' equivalente que es W-recursiva.

Demostración.- Sea $f_{0'}$ el 0-corte estricto de f, esto es,

$$f_{0'}(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)= \begin{cases} 1 & \text{si } f(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)> 0 \\ 0 & \text{si } f(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)= 0 \end{cases}$$

$f_{0'}$ es una función ordinaria y, según el teorema 2.1, calculable. Por la hipótesis débil de Church es recursiva y, de ahí, W-recursiva. Sea σ: $\mathbf{Z}^{+(n+1)} \longrightarrow \mathbf{Z}^{+}$ una función total, inyectiva, calculable y tal que σ^{-1} es calculable sobre $\sigma(\mathbf{Z}^{+(n+1)})$. Tanto σ sobre $\mathbf{Z}^{+(n+1)}$ como σ^{-1} sobre $\sigma(\mathbf{Z}^{+(n+1)})$ serán W-recursivas

Sean δ, ψ: $\mathbf{Z}^{+} \times \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow W$ tales que δ es la función de Kronecker y

$$\psi(x|y)= \begin{cases} f(v|u ,u , \ldots ,u) & \text{si } x= \sigma(v,u , \ldots ,u), \\ & \quad y= \sigma(v',u , \ldots ,u),\ \forall v' \varepsilon \mathbf{Z}^{+} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Puesto que f es W-calculable y σ^{-1} está definida, es inyectiva sobre $\sigma(\mathbf{Z}^{+(n+1)})$

y es calculable, ψ será W-calculable. Asi pues $\delta,\psi\epsilon\Phi=\{\rho|\rho: \mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$, ρ es W-calculable$\}$. Por último, sea I: $\mathbf{Z}^{+n} \times \mathbf{Z}^{+n} \longrightarrow \{0,1\}$ la función identidad, esto es

$$I(u_1',u_2', \ldots ,u_n'|u_1,u_2, \ldots ,u_n)= \begin{cases} 1 & \text{si } u_i'=u_i, 1=1,\ldots,n \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

I es calculable y, por consiguiente, W-recursiva.

Entonces, por W-composición, obtenemos la función f': $\mathbf{Z}^{+n} \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ definida como

$$f'= \mathcal{I}_\delta^{n,1} \circ (\sigma^{-1},\sigma^{-1}, \overset{n}{\smile}\!\!\!\ldots ,\sigma^{-1}) \circ \mathcal{I}_\psi^{n,1} \circ (\sigma,\sigma, \overset{n}{\smile}\!\!\!\ldots ,\sigma) \circ (f_\sigma,I)$$

que es equivalente a f.

Para completar la demostración falta probar que es posible encontrar una función σ en las condiciones antes citadas. En efecto esto es posible. Por ejemplo podemos considerar σ tal que, dada una (n+1)-upla $(v,u_1,u_2, \ldots ,u_n)$ de números enteros positivos, expresa cada coordenada en sistema unario((u_i+1) ceros)y, comenzando por un 1, escribe las coordenadas una a continuación de otra separadas por un 1. Entonces, interpretando este valor como la representación de un número en sistema binario, lo traduce a decimal y esta es la imagen de la (n+1)-upla de entrada. #

Este teorema nos permite dar una versión extendida de la hipótesis débil de Church en el sentido siguiente:

" Toda función W-recursiva es W-calculable y para toda función W-calculable existe otra equivalente que es W-recursiva ".

Haciendo uso de la operación de W-minimalización puede obtenerse un resultado análogo que relaciona las funciones parcialmente W-calculables y las parcialmente W-recursivas.

Como consecuencia de la extensión propuesta del concepto de W-recursividad podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 15.- El conjunto de W-Máquinas de Turing no es numerable.

Demostración.- Por el teorema 2.12 para toda función W-recursiva existe una W-MT que la calcula. Puesto que la definición de W-recursividad tiene en cuenta el conjunto Φ, y este no es numerable, resulta que el conjunto de W-MT no es numerable. #

Corolario.- El conjunto de problemas calculables es un subconjunto propio del conjunto de problemas W-calculables.

Demostración.- Toda función calculable es W-calculable, de ahí que los problemas calculables constituyan un subconjunto de los W-calculables. Ademas esta inclusión es estricta dado que el conjunto de MT es numerable y el de W-MT no. #

5.- W-CALCULABILIDAD SOBRE $\tilde{Z}^{+n}$.

En las secciones 1 a 4 hemos estudiado la W-calculabilidad de funciones definidas sobre dominios ordinarios y hemos visto que, en general, a una n-upla ordinaria le hacen corresponder un conjunto borroso. No obstante, lo natural en el W-cálculo es que tanto los elementos de la imagen como los del dominio sean conjuntos borrosos. Es la W-calculabilidad de funciones en estas condiciones la que será objeto de estudio en este apartado.

Introduciremos en primer lugar el conjunto $\tilde{Z}^{+}$ cuyos elementos son conjuntos borrosos W-calculables de enteros positivos. Es inmediato que $\mathbf{Z}^+ \subset \tilde{Z}^+$. $\tilde{Z}^+$ jugará en el W-cálculo el mismo papel que Z^+ en el cálculo ordinario, esto es, será el conjunto inicial de las funciones W-calculables.

<u>Definición 12</u>.- LLamaremos $\mathcal{F}$ al conjunto de funciones W-calculables $f\colon (U^*)^k \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$, $k\geq 1$ finito y U un alfabeto finito cualquiera, tales que:

$$\forall u^k \varepsilon (U^*)^k,\ \forall x \varepsilon \mathbf{Z}^+\ \nexists v^k \varepsilon (U^*)^k /\ \ f(x|u^k) \neq f(x|v^k) \text{ para } f(x|u^k) \neq 0 \neq f(x|v^k) \quad (5)$$

Interpretación.- En general cualquier función $f\colon (U^*)^k \times V^* \longrightarrow W$ W-calculable será tal que:

i) puede hacer corresponder a una k-upla de entrada mas de una salida con igual o distinto grado

$$f(v_1|u^k),\ f(v_2|u^k),\ \ldots$$

ii) un mismo resultado de salida puede tener distintos grados según la k-upla de entrada

$$f(v|u_1^k),\ f(v|u_2^k),\ \ldots..$$

Una función W-valuada f pertenecerá a $\mathcal{F}$ si y solo si es W-calculable, la imagen está contenida en $\mathbf{Z}^+$ y salidas iguales tienen el mismo grado cualquiera que sea la entrada. En otras palabras, cuando verifica

ii´) si varias entradas tienen la misma salida con grado distinto de cero, entonces dichos grados coinciden, esto es

$$\left.\begin{array}{ll} f(x|u^k)= f(x|v^k), & \forall u^k, v^k \varepsilon T \subseteq (U^*)^k \\ f(x|u^k)= 0 & \forall u^k \varepsilon (U^*)^k - T \end{array}\right. \quad (6)$$

En virtud de las funciones definidas en 1.19 y los lemas 1.6 y 1.7 podemos considerar que $\mathcal{F} = \{f|\ f\colon \mathbf{Z}^{+k} \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$, k finito cualquiera, f W-calcula ble parcial y satisface (5)}.

Definición 13.- Dadas dos funciones $f_i: (U_i^*)^{k_i} \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$, $f_i \varepsilon \mathcal{F}$, $i=1,2$, diremos que estan relacionadas si

$$f_1((U_1^*)^{k_1}) = f_2((U_2^*)^{k_2}) \subseteq \mathbf{Z}^+$$

y

$$\forall v \varepsilon f_i((U_i^*)^{k_i}),\ \forall u_i^{k_i} \varepsilon (U_i^*)^{k_i} / \ f_i(v|u_i^{k_i}) \neq 0,\ \text{y}\ \forall u_j^{k_j} \varepsilon (U_j^*)^{k_j} / \ f_j(v|u_j^{k_j}) \neq 0$$

se verifica que

$$f_i(v|u_i^{k_i}) = f_j(v|u_j^{k_j})$$

Interpretación.- f_1 está relacionada con f_2 si las imagenes sobre $\mathbf{Z}^+$ coinciden y tienen igual grado. Es inmediato probar que esta es una relación de equivalencia que notaremos R.

Definición 14.- Dado un conjunto borroso N sobre $\mathbf{Z}^+$ con función de pertenencia $\mu_N: \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ diremos que es W-calculable si existe un alfabeto finito U y una función $f: (U^*)^k \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$, $k \varepsilon \mathbf{Z}^+$ finito, tal que $f \varepsilon \mathcal{F}$ y para cualquier entero positivo x existe una k-upla $u^k \varepsilon (U^*)^k$ tal que

$$f(x|u^k) = \mu_N(x)$$

A un conjunto en estas condiciones lo llamaremos W-valor entero positivo (W-v.e.p.).

Definición 15.- Diremos que dos W-v.e.p. M y N son equivalentes si para cualquier $x \varepsilon \mathbf{Z}^+$ se verifica que

$$\mu_M(x) = \mu_N(x)$$

y notaremos M R´ N.

Es inmediato probar que R´ es una relación de equivalencia.

Si notamos $\mathcal{F}'$ y $\tilde{Z}^+$ a los conjuntos cocientes de $\mathcal{F}$ con la relación R y al de los W-v.e.p. con la R´, es posible establecer una biyección entre ambos del siguiente modo:

i) a cada $N\in\tilde{Z}^+$ se hace corresponder la clase de $\mathcal{F}'$, en la que está contenida la función $f\in\mathcal{F}$, que establece la definición 2.14.

ii) a cualquier $f\in\mathcal{F}'$ se hace corresponder el W-v.e.p. tal que

Soporte N= Imagen (f)

$$\forall x\in Z^+,\ \mu_N(x)= \begin{cases} f(x|u) & \text{si } x\in \text{Sop.N} \\ 0 & \text{si } x\notin \text{sop.N} \end{cases}$$

En base a esto en lo que sigue usaremos la notación $N\in\tilde{Z}^+$ indistintamente para conjuntos borrosos W-calculables sobre Z^+ o para las correspondientes funciones $f\in\mathcal{F}'$. Solo se especificará explícitamente si se trata de una u otro cuando haya lugar a confusión. Tambien,notaremos N(x) el grado de pertenencia de x al W-v.e.p. N, para $x\in Z^+$.

Interpretación.- Un W-v.e.p. puede ser considerado como una función tal que a partir de un símbolo de entrada, en cualquier alfabeto, es capaz de darnos como salida un conjunto de números enteros positivos con un cierto grado cada uno. Consideremos los siguientes ejemplos:

<u>Ejemplo 1</u> (Reconocimiento de patrones).- Sea U= { 7,8}, podemos definir la W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que

i) $S=\{s_0,s_1\}$

ii) $V=\{0,1,2,\ ...\ ,9\}$

iii) $C= U \cup V \cup \{\not b\}$

iv) $\pi= (1,0)$

v) $F= \{s_1\}$

vi)

$$\delta(s',z|c,s)= \begin{cases} 0.7 & \text{si } s=s'=s_0, \quad c= 7, \quad z= 7 \\ 0.4 & \text{si } s=s'=s_0, \quad c= 7, \quad z= 9 \\ 0.2 & \text{si } s=s'=s_0, \quad c= 7, \quad z= 2 \\ 0.9 & \text{si } s=s'=s_0, \quad c= 8, \quad z= 3 \\ 0.5 & \text{si } s=s'=s_0, \quad c= 8, \quad z= 8 \\ 1 & \text{si } s=s'=s_0, \quad c\varepsilon V \\ 1 & \text{si } s=s_0, \; s'=s_1, \quad c= \not b, \quad z=. \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

La función que W-valúa Z será tal que, por ejemplo, para una entrada 788 nos dará como salida

N= {0.7/733, 0.4/933, 0.2/233, 0.5/783, 0.4/983, 0.2/283, 0.5/738
0.4/938, 0.2/238, 0.5/788, 0.4/988,0.2/288}

Ejemplo 2.- Consideremos los resultados de un cierto experimento que, al ser repetido un número de veces, nos hacen pensar en el conjunto borroso N obtenido en el ejemplo anterior. Este puede ser W-calculado considerando, por ejemplo, una W-MT tal que

i) $S= \{s_0,s_1\}$

ii) $U = \{233,238,283,288,733,738,783,788,933,938,983,988\}$

iii) $V = \{0,1,2, \dots ,9\}$

iv) $C = U \cup V \cup \{\not b\}$

v) $\pi = (1,0)$

vi) $F = \{s_1\}$

vii)

$$\delta(s',z|c,s) = \begin{cases} 0.2 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c\varepsilon\{233,238,283,288\},\ z=. \\ 0.4 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c\varepsilon\{933,938,983,988\},\ z=. \\ 0.7 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c= 733,\ z=. \\ 0.5 & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c\varepsilon\{738,783,788\},\ z=. \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Ejemplo 3.- Consideremos la imagen de una función W-calculable definida sobre un dominio ordinario de $\mathbf{Z}^{+n}$, $f\colon \mathbf{Z}^{+n} \times \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow W$, del tipo estudiado en la sección 4. Dicha función puede interpretarse del siguiente modo: realizamos un experimento y obtenemos un resultado $(x_1,x_2, \dots ,x_n)$, perfectamente conocido y determinado, al que aplicamos un proceso de cálculo borroso que nos proporciona, definitivamente, las salidas $y_1,y_2, \dots$ con grados $f(y_1|x_1,x_2,\dots,x_n)$ $f(y_2|x_1,x_2,\dots,x_n)$ ...

En general un W-valor entero positivo puede ser imaginado como fruto de un experimento cuya valoración no es determinista. La realización del experimento produce un resultado único pero, sin embargo, el proceso de valoración o adaptación a nuestro modelo de cuantificación produce un conjunto de valores a los que, en base a algún argumento, somos capaces de asignar un grado de posibilidad creencia, pertenencia, etc..

Pasaremos a estudiar ahora las funciones W-valuadas que tienen como dominio $\tilde{Z}^{+n}$ y rango Z^+. Una función $\tilde{f}$: $\tilde{Z}^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ define una aplicación de $\tilde{Z}^{+n}$ en Z^+ de forma que a un W-v.e.p. N le hace corresponder otro M tal que

$$\text{Soporte } M = \{v \mid v \in Z^+,\ \tilde{f}(v|N) \neq 0\}$$

$$\mu_M(v) = \tilde{f}(v|N)$$

En particular, puesto que $\mathcal{P}(Z^+) \subset \tilde{Z}^+$, las aplicaciones de Z^+ en $\tilde{Z}^+$, estudiadas en la sección 4, que son funciones W-valuadas sobre dominios ordinarios o las aplicaciones de $\tilde{Z}^+$ en $\mathcal{P}(Z^+)$, serán casos particulares de este tipo de funciones W-valuadas.

Una $\tilde{f}$: $\tilde{Z}^+ \times Z^+ \longrightarrow W$ podrá asignar resultados distintos a argumentos distintos. Ahora bien, sobre $\tilde{Z}^+$ dos W-v.e.p. N_1 y N_2 son distintos si no satisfacen la relación definida en 2.15, esto es, si

i) Soporte $N_1 \neq$ Soporte N_2, cualesquiera que sean los grados, o bien

ii) Soporte $N_1 =$ Soporte N_2 pero existe al menos un entero $u \in$ Soporte N_i tal que

$$N_1(u) \neq N_2(u)$$

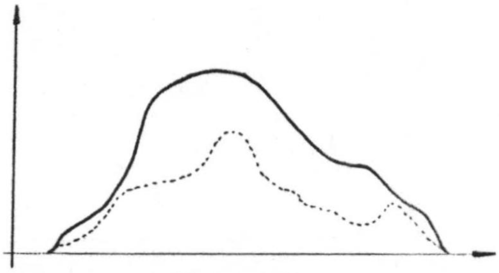


figura 7

Asi, si $N_1, N_2 \in \tilde{Z}^+$ estan en el caso ii) sus imagenes mediante $\tilde{f}$ podran ser iguales o distintas y, si son distintas, pueden ser tales que sus soportes coincidan o no:

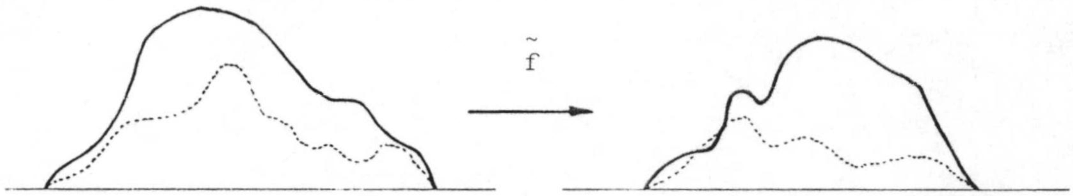


figura 8

o bien

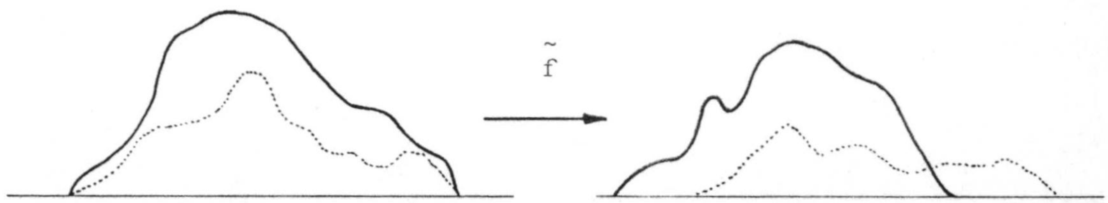


figura 9

Concluimos pues que un mismo entero $u \varepsilon \mathbf{Z}^+$ puede tener distintas imagenes y, posiblemente, con distintos grados según cual sea el W-v.e.p. al que se s$\underline{u}$ ponga que pertenece.

<u>Ejemplo</u>.- Sea $\tilde{f}$: $\tilde{\mathbf{Z}}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ tal que si

$$\text{Soporte } N_1 = \text{Soporte } N_2$$

entonces

$$\text{Soporte (Imagen } N_1) = \text{Soporte (Imagen } N_2)$$

cualesquiera que sean $N_1, N_2 \varepsilon \tilde{\mathbf{Z}}^+$. Ademas los grados con los que toma las disti$\underline{n}$ tas salidas depende de la entrada en forma tal que se puede escribir

$$\tilde{f}(v|N) = \underset{u \varepsilon \mathrm{Sop.}N}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \{f(v|u) \times N(u)\}$$

donde f: $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$. Aqui, dado un $u \varepsilon \mathbf{Z}^+$, los valores $v \varepsilon \mathbf{Z}^+$ tales que $f(v|u) \neq 0$ siempre perteneceran a la imagen mediante $\tilde{f}$ de todo $N \varepsilon \tilde{Z}^+$ tal que $u \varepsilon$Soporte N.

El grado de esta pertenencia dependerá por una parte de N(u) y por otra, e independientemente, de $f(v|u)$ que será el mismo cualquiera que sea N. No obstante, en general no tiene por que darse esta independencia y la imagen de u mediante $\tilde{f}$ puede depender tanto de u como de N(u). Pensemos, por ejemplo, que si en un proceso de cálculo el grado de un cierto $u\varepsilon\mathbf{Z}^+$ es muy pequeño podemos despreciarlo para el resto de los cálculos. Es mas, si $\tilde{f}$ fuera una aplicación de $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^+)$ en $\mathbf{Z}^+$ ya no solo dependería de cada $u\varepsilon\mathbf{Z}^+$ individualmente, sino de él y de todos los elementos del soporte. Entonces si $\tilde{f}$: $\tilde{\mathbf{Z}}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ cualquiera, la imagen de un $N\varepsilon\tilde{\mathbf{Z}}^+$ puede depender simultáneamente de todos los $u\varepsilon$Soporte N y de los grados de estos, en resumen, de la totalidad de N.

Veamos ahora como puede interpretarse una función parcial $\tilde{f}$: $\tilde{\mathbf{Z}}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ y como pensamos que puede ser W-calculada.

Consideremos el siguiente ejemplo. Sea f: $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^+) \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ una función total. f puede ser en, particular, ordinaria ({0,1}-valuada). Si se considera que el conjunto inicial es $\tilde{\mathbf{Z}}^+$, entonces f: $\tilde{\mathbf{Z}}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ sería una función parcial. Si consideramos que f está definida solo sobre $\mathcal{P}(\mathbf{Z}^+)$ y es W-calculable, entonces para un W-v.e.p. $N_1\varepsilon\tilde{\mathbf{Z}}^+$ tal que

$$\mu_{N_1} : \mathbf{Z}^+ \longrightarrow \{0,1\}$$

f debe estar definida, mientras que para otro $N_2\varepsilon\tilde{\mathbf{Z}}^+$ tal que

$$\mu_{N_2} : \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$$

debe quedar indefinida aunque

$$\text{Soporte } N_1 = \text{Soporte } N_2$$

Evidentemente al W-calcular f por una W-MT el hecho de que esta se detenga con un cierto resultado para N_1 o corra para siempre en el caso de N_2 no puede depender sola y exclusivamente de la expresión inicial que tenga sobre su cinta dado que, si los soportes coinciden, esta sería la misma para ambas entradas. Ahora bien, antes de que la W-MT comienze a trabajar lo único que nos está permitido variar es la entrada o el designador inicial de estados, ya que tanto el conjunto de estados S como la función de transición δ y el conjunto F de estados finales son fijos para esa W-MT. Concluimos asi que lo único que puede hacer discernir entre que la W-MT se detenga para N_1 y no lo haga para N_2 es permitir que el designador inicial de estados dependa del W-v.e.p. que se dé como entrada. Como caso particular estarían aquellas funciones en las que el designador inicial de estados fuese el mismo con independencia de la entrada.

Generalizando el ejemplo anterior tendríamos que si $\tilde{f}$: $\tilde{Z}^+ \times Z^+ \longrightarrow W$ es parcial, entonces puede estar definida para un W-v.e.p. $N \in \tilde{Z}^+$ e indefinida para otro $M \in \tilde{Z}^+$ aunque

$$\text{Soporte } M \cap \text{Soporte } N \neq \emptyset.$$

Asi pues, para estudiar la W-calculabilidad de una función $\tilde{f}$: $\tilde{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ tendremos que basarnos en:

i) la de las funciones f: $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$

ii) que una función f de este tipo es tal que para cada $u \in \mathbf{Z}^+$ queda determinado el conjunto de salidas $v \in \mathbf{Z}^+$ y los grados respectivos $f(v|u)$

iii) las propiedades de $\tilde{f}$ analizadas en la discusión anterior.

<u>Definición 16</u>.- Diremos que una función $\tilde{f}$: $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n} \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow W$ es (parcialmente) W-calculable cuando exista una W-MT Z tal que

$$\tilde{f}(v|N_1,N_2, \ldots ,N_n) = \bigoplus_{(u_1,\ldots,u_n)} \{[\pi \otimes \eta(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n)] \otimes \otimes \bigodot_{i=1}^{n} N_i(u_i)\}$$

o, lo que es igual,

$$\tilde{f}(v|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= \underset{(u_1,\ldots,u_n)}{\textcircled{\scriptsize Σ}} \{p_\pi(v|u_1,u_2, \ldots ,u_n) \otimes \overset{n}{\underset{i=1}{\textcircled{\scriptsize Π}}} N_i(u_i)\} \quad (7)$$

donde $p_\pi : Z^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ es la función definida en 1.8 para la W-MT Z y π es un designador inicial de estados para Z que puede depender de la n-upla de entrada $(N_1,N_2, \ldots ,N_n)$.

Interpretación.- $\tilde{f}$ es W-calculable si existe una W-MT que trabaja del siguiente modo. Parte de una n-upla de entrada en alfabetos diversos. Tras calcular los W-v.e.p. $N_1,N_2, \ldots ,N_n$ prosigue hasta obtener el resultado v con grado $f(v|N_1,N_2, \ldots ,N_n)$.

Es obvio que la forma en que se continúan los cálculos a partir de $(N_1, \ldots, N_n)$ dependerá de tres factores:

i) la n-upla $(u_1,u_2, \ldots ,u_n) \in U_1^* \times U_2^* \times \ldots \times U_n^*$

ii) la configuración actual de estados

iii) el grado con que se hayan realizado los cálculos (que incluyen a todos u_i) hasta el momento

Asi pues, la W-MT que calcula $\tilde{f}$ puede imaginarse como la W-composición de otras dos:

i) la formada por las n W-MT que permiten obtener $(N_1,N_2, \ldots ,N_n) \in \tilde{Z}^{+n}$ a partir de $(u_1,u_2, \ldots ,u_n) \in U_1^* \times U_2^* \times \ldots \times U_n^*$

ii) la W-MT Z que proporciona v con grado $f(v|N_1,N_2, \ldots ,N_n)$ comenzando con la n-upla $(N_1,N_2, \ldots ,N_n)$.

El designador inicial de estados de Z estará influenciado por los tres factores antes citados y, por tanto, puede depender de $(N_1,N_2, \dots ,N_n)$. Evidentemente al cambiar π puede variar el valor v del resultado y el grado de este para una misma n-upla de entrada $(u_1,u_2, \dots ,u_n)$.

Teorema 16.- Sea $W=([0,1],\sup,\inf,\leq)$ y $\tilde{f}: \tilde{Z}^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ una función W-calculable. Si la W-MT asociada Z es una MTD con un único estado inicial, entonces $\tilde{f}$ es coherente con el Principio de Extensión de Zadeh.

Demostración.- Si $\tilde{f}$ está en tales condiciones entonces a una n-upla de entrada le corresponderán las diversas salidas con grado 0 ó 1 según que sean calculadas o no por Z. Asi se tiene que

$$\tilde{f}(v|N_1,N_2, \dots N_n) = \underset{(u_1,\dots,u_n)}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \{p(v|u_1,u_2, \dots ,u_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\scriptsize$\Pi$}}} N_i(u_i)\}$$

$$= \underset{(u_1,\dots,u_n)\in\mathcal{U}}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}} \; \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\scriptsize$\Pi$}}} N_i(u_i),$$

siendo $\mathcal{U} = \{(u_1,u_2, \dots ,u_n) | \; p(v|u_1,u_2, \dots ,u_n) = 1\}$, lo que prueba el teorema. #

Este resultado puede ser inmediatamente extendido al caso en que Z es una MTND teniendo presente que toda MTND puede ser simulada por una MTD.

Las funciones que verifican las hipótesis del teorema anterior son funciones ordinarias con dominio borroso.

Las definiciones 2.9 a 2.11 sobre funciones W-recursivas primitivas y W-recursivas pueden ser directamente extendidas a funciones $\tilde{f}: \tilde{Z}^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ verificandose unos resultados análogos a los teoremas 2.10 a 2.13.

En tales condiciones es inmediato probar que si se verifica la hipótesis débil de Church para funciones ordinarias, entonces tambien se verifica para clases de equivalencia de funciones $\tilde{f}: \tilde{Z}^{+n} \times Z^+ \longrightarrow W$ que sean W-recursi vas en el sentido de la extensión de la definición 2.10.

En efecto, si $\tilde{f}$ es W-calculable verifica la condición (7) la cual pone de manifiesto que $\tilde{f}$ puede obtenerse como W-composición de las funciones W-calculables $p_\pi : \mathbb{Z}^{+n} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W$ y $N_i : \mathbb{Z}^{+^{k_i}} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W$, $i=1,2,\ldots,n$. Por el teorema 2.14 existen otras $p'_\pi : \mathbb{Z}^{+n} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W$, $N'_i : \mathbb{Z}^{+^{k_i}} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W$, equivalentes a las anteriores según la relación definida en 2.11, que son W-recursivas. Entonces, por W-composición de estas últimas, concluimos que para toda función W-calculable $\tilde{f}: \tilde{\mathbb{Z}}^{+n} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W$ existe otra $\tilde{f}': \tilde{\mathbb{Z}}^{+n} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W$ W-recursiva (en el sentido de la extensión de la definición 2.10) que es equivalente a ella (en el sentido de la extensión de la definición 2.11).

6.- W-CALCULABILIDAD DE CONJUNTOS BORROSOS DE FUNCIONES W-CALCULABLES CON DOMINIO $\tilde{\mathbb{Z}}^{+n}$.

Consideremos el conjunto

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\tilde{f} \mid \tilde{f}:\tilde{\mathbb{Z}}^{+n} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow W,\ \tilde{f} \text{ es W-calculable parcial}\}$$

Tomando $\tilde{\mathcal{F}}$ como universo podemos definir conjuntos borrosos de funciones. Sea F uno de estos conjuntos. Entonces Soporte $F \subset \tilde{\mathcal{F}}$ y existirá $\mu_F : \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow W$ tal que, para cada $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\mu_F(\tilde{f})$ es el grado con que $\tilde{f}$ pertenece a F. ¿Como se interpreta F?. Dada una n-upla de entrada $(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \tilde{\mathbb{Z}}^{+n}$ y un resultado $v \in \mathbb{Z}^+$, cada $\tilde{f} \in$ Soporte F proporcionará este resultado con un grado $\tilde{f}(v \mid N_1, N_2, \ldots, N_n)$. Entonces

$$F(v \mid N_1, N_2, \ldots, N_n) = \{w \mid w = \mu_F(\tilde{f}) \otimes \tilde{f}(v \mid N_1, N_2, \ldots N_n),\ \tilde{f} \in \text{Soporte } F\}$$

esto es, $F: \tilde{\mathbb{Z}}^{+n} \times \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{P}(W)$. La diferencia conceptual entre una función $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{F}}$ y un conjunto borroso F es que, fijada una n-upla de entrada, $\tilde{f}$ obtiene todos y cada uno de los posibles resultados $v \varepsilon Z^+$ con un único grado $\tilde{f}(v|N_1,N_2, \ldots$ $\ldots ,N_n)$, mientras que F no. Observemos tambien que cualquier $\tilde{f}\varepsilon\tilde{F}$ puede ser considerada como un conjunto borroso de funciones tal que su soporte tiene cardinalidad uno y su función de pertenencia es la δ de Kronecker.

Para estudiar la W-calculabilidad de estos conjuntos borrosos de funciones W-calculables debemos ver la forma en que una W-MT puede multivaluar el grado de un resultado.

Recordemos que el funcionamiento de una W-MT (definiciones 1.1 a 1.5) fué interpretado del siguiente modo: antes de empezar a trabajar dicha máquina se encuentra, simultáneamente, en un conjunto de estados determinado por alguna de las configuraciones iniciales posibles. Si suponemos que el conjunto de estados de la W-MT es $S= \{s_1,s_2, \ldots ,s_q\}$, cualquiera de estas configuraciones puede ser considerada como un W-v.e.p. $\pi\varepsilon\tilde{Z}^+$ tal que

$$\text{Soporte } \pi \subseteq \{1,2, \ldots ,q\}$$

A partir de aqui, y siguiendo simultáneamente todos los posibles movimientos que permita la función de transición δ, la W-MT trabaja hasta alcanzar por cada camino un estado final. LLamábamos resultado a la expresión que aparecía entonces sobre la cinta y cálculo a cada uno de estos caminos. El grado con que se obtiene el resultado de cada cálculo es el mínimo de los grados de los movimientos que lo constituyen. Es posible que, partiendo de una misma entrada e incluso de un mismo estado inicial, distintos cálculos obtengan el mismo resultado acabando, incluso, en el mismo estado final. Obviamente existiran cálculos que produzcan el mismo resultado con distinto grado.

LLegados aqui considerábamos que la W-MT calculaba una única función y asi construíamos (definición 1.8) p_π. Esta función asigna a cada pareja entrada-resultado el máximo de los grados entre todos los cálculos que producen di cho resultado con independencia de los estados inicial y final. Decíamos entonces que una función era W-calculable si coincidía con p_π para alguna W-MT.

Ocurre pues que, fijada una entrada, una W-MT obtiene realmente un mismo resultado con distintos grados, momento en el que se detiene. Es entonces cuando nosotros, según un criterio optimista, asignamos a este resultado el máximo de dichos grados. Ahora bien, podemos sustituir este criterio por otro que, siguiendo ciertos preceptos, agrupe los cálculos y obtenga el máximo de los grados de cada grupo. Estos preceptos para formar los grupos pueden ser, por ejemplo, que los cálculos pertenezcan a una misma función $\tilde{f}$. En esta forma podría ser W-calculado un conjunto borroso F. Formalizaremos ahora estos conceptos.

Dada una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ sean:

1) D(Z) el conjunto de descripciones instantáneas

2) $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,\ \ldots\ ,a_t\}\epsilon\mathcal{P}(D(Z))$ un cálculo

3) $\omega^{\mathbf{a}}(s',v|u,s)$ el grado con el que Z realiza el cálculo **a** (definición 1.5)

Para cualquier conjunto de cálculos $\Lambda c\mathcal{P}(D(Z))$ definimos las funciones:

i) $\omega^\Lambda: (U^* \times S) \times (S \times V^*) \longrightarrow W$ de la forma

$$\omega^\Lambda(s',v|u,s)= \underset{\mathbf{a}\epsilon\Lambda}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}\ \omega^{\mathbf{a}}(s',v|u,s)$$

ii) para cada $s\epsilon S$, $\eta^\Lambda_s: U^* \times V^* \longrightarrow W$ como

$$\eta^\Lambda_s(v|u)= \overset{q}{\underset{i=1}{\textcircled{\scriptsize$\Sigma$}}}\ \{\omega^\Lambda(s_i,v|u,s) \otimes \eta^F_{s_i}\}$$

y llamamos $\eta^\Lambda(v|u)$ al vector q-dimensional cuya i-ésima coordenada es $\eta^\Lambda_{s_i}(v|u)$

iii) para un designador inicial de estados π, p_π^Λ: $U^* \times V^* \longrightarrow W$ como

$$p_\pi^\Lambda(v|u) = \bigoplus_{i=1}^{q} \{\pi_{s_i} \otimes \eta_{s_i}^\Lambda(v|u)\} = \pi \otimes \eta^\Lambda(v|u)$$

Básicamente las funciones ω^Λ, η^Λ, p_π^Λ anteriores coinciden con las defi nidas, respectívamente, en 1.6, 1.7 y 1.8 salvo que en i) la operación $\bigoplus$ es tá extendida únicamente a los cálculos englobados en el conjunto Λ. Observemos que si $\Lambda, \Lambda' \subset \mathcal{P}(D(Z))$, $\Lambda \neq \Lambda'$, entonces es posible que, para un mismo desig nador inicial de estados

$$p_\pi^\Lambda(v|u) \neq p_\pi^{\Lambda'}(v|u)$$

Definición 17.- Denominaremos agrupación borrosa de cálculos a cualquier subconjunto borroso $\mathcal{A}$ definido sobre $\mathcal{P}(D(Z))$.

Definición 18.- Sea F: $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n} \times \mathbf{Z}^+ \longrightarrow \mathcal{P}(W)$. Diremos que F es W-calculable si existe una W-MT Z y una agrupación borrosa de cálculos $\mathcal{A}$ de esa W-MT tal que para cada n-upla $(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ se verifica

$$F(v|N_1, N_2, \ldots, N_n) = \{w \mid w = \mu_{\mathcal{A}}(\Lambda) \otimes \bigoplus_{u_1,..,u_n} [p_\pi^\Lambda(v|u_1,..,u_n) \otimes \bigodot_{i=1}^{q} N_i(u_i)], \Lambda \subset \mathcal{P}(D(Z))\}$$

con π un designador inicial de estados para Z, que puede depender de la n-upla $(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ en el sentido dado el la definición 2.16, y $\mu_{\mathcal{A}}$ la función de pertenencia de la agrupación $\mathcal{A}$.

Interpretación.- F es un conjunto borroso de funciones $\tilde{f}$ W-valuadas. Cada una de estas funciones define grupos de cálculos en la W-MT $Z_{\tilde{f}}$ que la calcu la. Asi pues hablamos de la W-calculabilidad de F en el sentido de que para una sola W-MT Z somos capaces de, por una parte, agrupar los cálculos y por otra, puesto que cada $\tilde{f}$ pertenece a F con grado $\mu_F(\tilde{f})$, asignar a cada grupo de cálculos un cierto grado de creencia.

Veamos ahora en qué condiciones es W-calculable, en el sentido anterior, un conjunto borroso de funciones W-calculables.

<u>Teorema 17</u>.- Sea F un conjunto borroso de funciones W-calculables con función de pertenencia $\mu_F: \tilde{F} \longrightarrow W$. Para cada $\tilde{f} \varepsilon$Soporte F sea

$$Z_{\tilde{f}}=(S_{\tilde{f}},U,V,C,\delta_{\tilde{f}},\pi_{\tilde{f}},\eta^{G_{\tilde{f}}})$$

la W-MT que la W-calcula. Entonces F es W-calculable si

i) Cardinal $\left(\bigcup_{\tilde{f} \varepsilon \mathrm{Sop.F}} S_{\tilde{f}} \right)$ es finito

ii) $\forall \tilde{f}, \tilde{f}' \varepsilon$Soporte F $\quad S_{\tilde{f}} \cap S_{\tilde{f}'} = \emptyset$

iii) el designador inicial de estados de todas las W-MT correspondientes a las funciones del soporte de F depende en la misma forma de la n-upla de entrada.

<u>Demostración</u>.- Bajo las hipótesis del teorema F satisface las condiciones de la definición 2.18 para

a) la W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^{G})$ dada por:

i) $S= \bigcup_{\tilde{f} \varepsilon \mathrm{Sop.F}} S_{\tilde{f}}$

ii) $$\delta(s',z|c,s)= \begin{cases} \delta_{\tilde{f}}(s',z|c,s) & \text{si } \quad s,s' \varepsilon S_{\tilde{f}} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

iii) un designador inicial de estados π formado por la colección de todos los designadores $\pi_{\tilde{f}}$

iv) un conjunto de estados finales

$$G = \bigcup_{\tilde{f} \in Sop.F} G_{\tilde{f}}$$

b) la agrupación de cálculos $\mathcal{A}$ de función de pertenencia

$$\mu_{\mathcal{A}}(\Lambda) = \begin{cases} \mu_F(\tilde{f}) & \text{si } \Lambda \text{ es el conjunto de cálculos de } Z_{\tilde{f}} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y esto para cualquier $\Lambda \subset \mathcal{P}(D(Z))$. #

Inversamente se puede enunciar el siguiente resultado

Teorema 18.- Si F: $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n} \times \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow \mathcal{P}(W)$ es W-calculable, entonces F es un conjunto borroso sobre $\tilde{\mathcal{F}}$.

Demostración.- Sean $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^G)$ la W-MT que W-calcula F y $\mathcal{A}$ la correspondiente agrupación borrosa de cálculos. Entonces, para cualquier conjunto de cálculos $\Lambda \varepsilon \mathcal{A}$, definimos la función

$$\tilde{f}_\Lambda(v|N_1,N_2,\ \ldots\ ,N_n) = \bigcirc\!\!\!\!\Sigma_{u_1,..,u_n} \{p_\pi^\Lambda(v|u_1,u_2,\ldots,u_n) \otimes \bigcirc\!\!\!\!\Pi_{i=1}^{q} N_i(u_i)\}$$

cuyo grado de pertenencia a F viene dado por

$$\mu_F(\tilde{f}_\Lambda) = \mu_{\mathcal{A}}(\Lambda)$$

Observemos que si no hay ningún cálculo en Λ que admita una n-upla $(u_1,u_2,\ ..$ $\ldots\ ,u_n)$, con $u_i \varepsilon Sop.N_i$, $i=1,\ldots,n$, entonces $\tilde{f}_\Lambda$ quedaría indefinida para esa entrada.

Para completar la demostración deberemos probar la W-calculabilidad de $\tilde{f}_\Lambda$. Para ello consideramos la W-MT

$$Z_{\tilde{f}_\Lambda} = (S,U,V,C,\delta_{\tilde{f}_\Lambda},\pi,\eta^G).$$

tal que

i) S,U,C,π,η^G coinciden con los de Z

ii)

$$\delta_{\tilde{f}_\Lambda}(s',z|c,s)=\begin{cases} p^Z(a_{i+1}|a_i) & \text{si } \exists \mathbf{a}\in\Lambda /\ a_i,a_{i+1}\in\mathbf{a},\ a_i=\xi sc\gamma,\ a_{i+1}\vdash a_i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esta función de transferencia, $Z_{\tilde{f}_\Lambda}$ solo realiza los cálculos contenidos en Λ y, por tanto, W-calcula $\tilde{f}_\Lambda$. #

CAPITULO III: Algunos Tipos Particulares De Problemas W-Calculables

1.- INTRODUCCION.

Dedicamos este tercer y último capítulo al estudio de ciertos temas, afines al de la W-calculabilidad, que por su naturaleza o importancia hemos creido conveniente tratar.

Introducimos en primer lugar el concepto de predicado W-valuado sobre Z^{+n} analizando algunas de sus propiedades y desarrollando su W-calculabilidad. Tras definir la semiW-calculabilidad de un predicado con dominio en Z^{+n}, procedemos a la caracterización de los predicados W-calculables a través de los semiW-calculables.

A continuación se estudian los predicados W-valuados sobre $\tilde{Z}^{+n}$ y algunas de sus propiedades . Es de destacar la no conmutatividad de las operaciones unión ó intersección con la de "extensión".

Dada la importancia y actualidad de los temas relacionados con la decidibilidad y complejidad algorítmica hemos creido adecuado exponer algunos criterios relativos a:

- posibles formas de extender el concepto de decidibilidad al W-cálculo

- posibles medidas de complejidad de W-algorítmos

Si bien ambos temas tienen la entidad suficiente como para ser objeto de estudios mas profundos que abordaremos en un futuro, nuestro tratamiento actual se ha limitado a presentar las ideas básicas sobre estas cuestiones.

Para concluir analizamos aquellos problemas que, perteneciendo al W-cálculo, pueden ser llevados a efecto por "medios de cálculo ordinarios".

2.- PREDICADOS W-VALUADOS SOBRE $\mathbb{Z}^{+n}$.

2.1.- INTRODUCCION.

Definición 1.- Para $n\geq 1$ un predicado $P(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ W-valuado sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ es una relación entre las variables de la n-upla ordenada $(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ $\varepsilon \mathbf{Z}^{+n}$ que puede ser simultáneamente cierta con grado $\alpha_T \varepsilon W$ y falsa con grado $\alpha_F \varepsilon W$.

Empleando, como es habitual, los símbolos T y F para los valores lógicos "cierto" y "falso" respectívamente, podemos definir para cada predicado W-valuado su función característica $c_p : \mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ de forma que $c_p(T|x_1,x_2, \ldots$ $\ldots ,x_n)$ es el grado con el que P es cierto para la n-upla $(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ y $c_p(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ es el grado con el que es falso. En general, para cualquier n-upla $(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ para la que esté definido P se tiene que

$$0\leq c_p(T|x\ ,x\ , \ldots ,x\ ) + c_p(F|x\ ,x\ , \ldots ,x\ ) \lesseqgtr 1$$

Un predicado W-valuado P define dos conjuntos borrosos $\tilde{T}_p$ y $\tilde{F}_p$ tales que

$$\text{Soporte } \tilde{T}_p = \{(x_1,x_2, \ldots ,x_n) \mid (x_1, \ldots ,x_n)\varepsilon \mathbf{Z}^{+n},\ c_p(T|x_1, \ldots ,x_n)>0\}$$

$$\text{Soporte } \tilde{F}_p = \{(x_1,x_2, \ldots ,x_n) \mid (x_1, \ldots ,x_n)\varepsilon \mathbf{Z}^{+n},\ c_p(F|x_1, \ldots ,x_n)>0\}$$

y sus funciones de pertenencia son, respectívamente,

$$\mu_T(x_1,x_2, \ldots ,x_n)= c_p(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)$$

$$\mu_F(x_1,x_2, \ldots ,x_n)= c_p(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n)$$

cumpliendose, en general, que

$$\text{Soporte } \tilde{T}_p \cap \text{Soporte } \tilde{F}_p \neq \emptyset$$

$$\text{Soporte } \tilde{T}_p \cup \text{Soporte } \tilde{F}_p \neq Z^{+n}$$

ya que puede haber n-uplas para las que P sea simultáneamente cierto y falso con grado no nulo y puede haber otras para las que c_p no esté definida, (no pueden ser relacionadas por el predicado) o lo está con grado cero para los valores cierto y falso.

Ejemplo 1.- Consideremos como alfabeto de entrada el conjunto de los 7 coloreselementales. U* estará formado por todas las posibles combinaciones de colores. En U* x U* definimos la relación: "u_1 está relacionado con u_2 si colocado el color u_1 junto al u_2 la pareja de colores resulta agradable". En ese caso decimos que el predicado $P_1(u_1,u_2)$ es cierto. Si resulta no agradable diremos que es falso. Para cuantificar el grado de la relación preguntamos a 100 personas y consideramos como grado el tanto por uno de las respuestas "agradable" o "no agradable" respectívamente. Resulta evidente que habrá combinaciones de colores para los que el predicado sea simultáneamente cierto y falso con grado distinto de cero. Este predicado P_1 verifica que

$$0 < c_{p_1}(T|u_1,u_2) + c_{p_1}(F|u_1,u_2) = 1$$

Si consideramos un nuevo predicado P_2 en el que al interrogar al grupo de personas permitimos que un individuo no conteste en caso de duda entre "agradable" o "no agradable", tendremos que

$$0 \leq c_{p_2}(T|u_1,u_2) + c_{p_2}(F|u_1,u_2) \leq 1$$

y si, ademas, permitimos que cada individuo cuantifique su grado de "agradabilidad" y posteriormente hallamos la media de todos los individuos podremos encontrarnos que

$$0 \leq c_{p_3}(T|u\ ,u\ ) + c_{p_3}(F|u\ ,u\ ) \lesseqgtr 1 \qquad \#$$

Veamos como se comportan los predicados W-valuados sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ al considerar sus α-cortes. Sea P un predicado W-valuado con función caracteristica $c_p : \mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$. Parece lógico pensar que, para cualquier $\alpha \varepsilon W$, P induce un predicado ordinario P_α definido por

$$c_{p_\alpha}(\chi|x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c_p(\chi|x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n) \geq \alpha \\ & \\ 0 & \text{si} \quad c_p(\chi|x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n) < \alpha \end{cases}$$

con $\chi\varepsilon\{T,F\}$. Ahora bien, aunque sobre las n-uplas para las que P está definido la función c_{p_α} esté bien caracterizada, en el sentido de que cada argumento $(\chi|x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n)$ tiene una única imagen en $\{0,1\}$, puede ocurrir que existan n-uplas para las que $P_\alpha(x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n)$ sea cierto y falso a la vez con grado 0 ó 1, o sea

$$c_{p_\alpha}(T|x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n) = c_{p_\alpha}(F|x_1,x_2, \; \ldots \; ,x_n) = 0 \text{ ó } 1$$

Asi, P_α sería un predicado W-valuado (con grado 0 ó 1) pero no sería un predicado ordinario.

Concluimos de este modo que es posible definir predicados W-valuados para los que no todos sus α-cortes sean predicados ordinarios, o lo que es igual, que solo un subconjunto propio de los predicados W-valuados son extensiones de los ordinarios. Observese que esto es consecuencia de no imponer que

$$\alpha_T + \alpha_F = 1$$

Es obvio que si P cumple esta condición entonces cualquier P_α, $\alpha\varepsilon W$, es un predicado ordinario.

Podemos definir varias operaciones que pueden emplearse para construir nuevos predicados W-valuados

Definición 2.- Diremos que dos predicados W-valuados n-arios $P_1(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ y $P_2(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ son iguales si, para cualquier $(x_1,x_2, \dots ,x_n) \in Z^{+n}$, c_{p_1} y c_{p_2} estan ambas definidas o indefinidas y si estan definidas

$$c_{p_1}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_{p_2}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

$$c_{p_1}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_{p_2}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

Definición 3.- Sean $P(x_1,x_2, \dots ,x_n)$, $Q(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ y $R(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ predicados W-valuados sobre $\mathbf{Z}^{+n}$, definimos

i) Negación o complemento de P, y lo notamos $\bar{P}$, como

$$c_{\bar{p}}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_p(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

$$c_{\bar{p}}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_p(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

ii) Unión

$$R(x_1,x_2, \dots ,x_n)= P(x_1,x_2, \dots ,x_n) \nabla Q(x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

de la forma

$$c_R(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) \oplus c_Q(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

$$c_R(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) \otimes c_Q(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

iii) Intersección

$$R(x_1,x_2, \dots ,x_n)= P(x_1,x_2, \dots ,x_n) \Delta Q(x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

como

$$c_R(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) \otimes c_Q(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

$$c_R(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) = c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) \oplus c_Q(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

Interpretación.- Debemos destacar que esta definición se hace sobre n-uplas de Z^{+n}. Asi pues, tiene sentido que, al hablar de negación, el grado con el que $\bar{P}$ es cierto sea igual al grado con el que P es falso y viceversa. Tambien, el grado con el que la unión de dos predicados (uno u otro) toma el valor "cierto" sea la $\oplus$ de los grados con que cada uno lo toma, mientras que si toma el valor "falso" ambos deben ser "falsos" y esto se podrá asegurar con la $\otimes$ de los grados. Cambiando los valores "cierto" por "falso" se puede razonar de forma análoga para la intersección.

Teorema 1.- $\overline{P \vee Q} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$; $\overline{P \wedge Q} = \bar{P} \vee \bar{Q}$

Demostración.-

$$c_{\overline{P\vee Q}}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) = c_{P\vee Q}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) =$$

$$= c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) \otimes c_Q(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) =$$

$$= c_{\bar{P}}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) \otimes c_{\bar{Q}}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) =$$

$$= c_{\bar{P}\wedge\bar{Q}}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

$$c_{\overline{P\vee Q}}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) = c_{P\vee Q}(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) =$$

$$= c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) \oplus c_Q(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) =$$

$$= c_{\bar{P}}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) \oplus c_{\bar{Q}}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n) =$$

$$= c_{\bar{P}\wedge\bar{Q}}(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

Análogamente

$$c_{\overline{P\Delta Q}}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)= c_{P\Delta Q}(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n)=$$

$$= c_P(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \oplus c_Q(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n)=$$

$$= c_{\overline{P}}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \oplus c_{\overline{Q}}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)=$$

$$= c_{\overline{P}\nabla\overline{Q}}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)$$

$$c_{\overline{P\Delta Q}}(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n)= c_{P\Delta Q}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)=$$

$$= c_P(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes c_Q(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)=$$

$$= c_{\overline{P}}(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes c_{\overline{Q}}(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n)=$$

$$= c_{\overline{P}\nabla\overline{Q}}(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n). \quad \#$$

Corolarío.-

$$\overline{\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} P_i} = \mathop{\Delta}_{i=1}^{n} \overline{P_i}; \qquad \overline{\mathop{\Delta}_{i=1}^{n} P_i} = \mathop{\nabla}_{i=1}^{n} \overline{P_i}$$

Demostración.- Inmediata a partir del teorema anterior. #

2.2.- W-CALCULABILIDAD DE PREDICADOS W-VALUADOS SOBRE $\mathbb{Z}^{+n}$.

Definición 4.- Se dice que un predicado W-valuado $P(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ es W-calculable si lo es su función característica c_P: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$.

Ejemplo 2.- Consideremos la conocida paradoja del barbero basada en la paradoja de Russell. Dado un conjunto de n+1 individuos notados $x_0,x_1, \ldots ,x_n$ distinguiremos uno, x_0, al que llamaremos barbero. Definimos el siguiente predicado: "el barbero afeita al individuo x_i si este no se afeita a sí mismo".

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de individuos que son afeitados por el barbero y sea $\mathcal{F}$ el de aquellos que son afeitados por sí mismos. Cabe pensar que

$$\mathcal{T} \cup \mathcal{F} = \{x_0, x_1, \ldots , x_n\}$$

y si un individuo pertenece a $\mathcal{T}$ no debería, en principio, pertenecer a $\mathcal{F}$. La función caracteristica de este predicado ordinario será

$$c_P(T|x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \varepsilon \mathcal{T} \\ \\ 0 & \text{si } x_i \varepsilon \mathcal{F} \end{cases}$$

$$c_P(F|x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \varepsilon \mathcal{F} \\ \\ 0 & \text{si } x_i \varepsilon \mathcal{T} \end{cases}$$

Esta función parcial no es calculable pues resulta imposible calcular $c_P(T|x_0)$ que sería 0 y 1 a la vez ya que si el barbero se afeita a sí mismo está en $\mathcal{F}$, $c_P(T|x_0)=0$ $c_P(F|x_0)=1$, pero como es el barbero está en $\mathcal{T}$ y entonces $c_P(T|x_0)=1$ $c_P(F|x_0)=0$.

Consideremos ahora que este predicado es W-valuado y que su función caracteristica es la función parcial $c^*_P: \mathbb{Z}^+ \times \{T,F\} \longrightarrow W$ definida por

$$c^*_P(T|x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } x_i \text{ es afeitado por} \\ & \quad \text{el barbero} \\ \\ 0 & \text{si el individuo } x_i \text{ no es afeitado} \\ & \quad \text{por el barbero} \end{cases}$$

$$c^*_P(F|x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si el individuo } x_i \text{ es afeitado por} \\ & \text{sí mismo} \\ 0 & \text{si el individuo } x_i \text{ no se afeita a} \\ & \text{sí mismo} \end{cases}$$

Aqui $\mathcal{T}$ y $\mathcal{F}$ serían conjuntos borrosos con función de pertenencia

$$\mu_{\mathcal{T}}(x) = c^*_P(T|x)$$

y

$$\mu_{\mathcal{F}}(x) = c^*_P(F|x)$$

respectívamente, y, aunque

$$c^*_P(T|x_0) = 1, \quad c^*_P(F|x_0) = 1$$

c^*_P será parcialmente W-calculable.

Es conveniente aclarar que sigue existiendo un predicado que es verdad y mentira a un tiempo. Lo que se aporta al problema con el cálculo borroso es que en él esto es un resultado posible mientras que en el cálculo ordinario no.

En este mismo orden de ideas existe un problema clásico que por su importancia y complejidad hemos preferido dejar para estudios posteriores aunque, no obstante, discutiremos aqui su planteamiento. Se trata del "problema de la parada". Las demostraciones que dan de su irresolubilidad M. Minsky (1.972) pag. 148-149 y J.E. Hopcroft y J.D Ullman (1.979) pag 181-183 se basan en la construcción de una MTD o de un lenguaje, respectívamente, en forma tal que se llega a unos términos semejantes a la paradoja de Russell por lo que, consecuentemente, no es calculable. Si se considera una W-MT, el desarrollo y planteamiento de estas demostraciones no sería válido si bien esta no es razón suficiente para afirmar que el problema de la parada sea W-calculable.

El problema que dejamos abierto es el siguiente: "no existe ninguna MTD que acepte el lenguaje correspondiente al problema de la parada, pero ¿existe alguna W-MT?".

Teorema 2.- Sea $P(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ un predicado W-valuado W-calculable. Si, para $\alpha \varepsilon W$, P_α es un predicado ordinario, entonces es calculable.

Demostración.- Si P es W-calculable su función caracteristica es W-calculable y, por el teorema 2.1, su α-corte será calculable. #

Teorema 3.- Si P y Q son predicados W-calculables sobre Z^{+n} entonces también son W-calculables los predicados

i) $\bar{P}$

ii) $P \triangledown Q$

iii) $P \vartriangle Q$

Demostración.- Sean $Z_P=(S_P,U,V,C,\delta_P,\pi_P,\eta^{F_P})$ y $Z_Q=(S_Q,U,V,C,\delta_Q,\pi_Q,\eta^{F_P})$ las W-MT que calculan c_P y c_Q respectívamente. Puesto que aplicaremos el lema 1.5 supondremos que

$$S_P \cap S_Q = \emptyset$$

Esta condición no es restrictiva ya que si la intersección no fuera vacía bastará renombrar los estados de una de las W-MT para que lo sea. Entonces:

i) Para probar que $\bar{P}$ es W-calculable construimos la W-MT $Z_{\bar{P}}=(S_{\bar{P}},U,V,C,\delta_{\bar{P}},\pi_{\bar{P}},\eta^{F_{\bar{P}}})$ donde

1) $S_{\bar{P}}= S_P \cup \{s_{\bar{F}}\}$

2) $F_{\bar{P}}= \{s_{\bar{F}}\}$

3)

$$\delta_{\overline{P}}(s',z|c,s)=\begin{cases}\delta_P(s',z|c,s) & \text{si } s\notin F_P,\ s,s'\in S_P\\ 1 & \text{si } s\in F_P,\ s'=s_{\overline{F}},\ c=T,\ z=F\\ 1 & \text{si } s\in F_P,\ s'=s_F,\ c=F,\ z=T\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

que, efectívamente, W-calcula $\overline{P}$.

ii) Para probar que $P \triangledown Q$ es W-calculable definimos en primer lugar la W-MT $Z_P'=(S_P',U,V,C,\delta_P',\pi_P,\eta^{F_P'})$ donde

1) $S_P'=S_P \cup \{s_{F_P'}\}$

2) $F_P'=\{s_{F_P'}\}$

3)

$$\delta_P'(s',z|c,s)=\begin{cases}\delta_P(s',z|c,s) & \text{si } s,s'\in S_P,\ s\notin F_P\\ 1 & \text{si } s\in F_P,\ s'=s_{F_P'},\ c=T,\ z=.\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

o sea, Z_P' solo calcula el valor T. Si de una forma análoga definimos la W-MT Z_Q', entonces la W-MT

$$Z^*=\{(Z_P',1),(Z_Q',1)\}$$

dada por el lema 1.5 actuará como si estuvieran trabajando simultáneamente Z_P' y Z_Q' por lo que para una entrada $(x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)$ se producirá la salida T con grado

$$p^*(T|x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)=p_P'(T|x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)\oplus p_Q'(T|x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)=$$

$$=c_P(T|x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)\oplus c_Q(T|x_1,x_2,\ \ldots\ ,x_n)$$

Consideremos ahora la W-MT $Z''_P=(S''_P,U,V,C,\delta''_P,\pi''_P,\eta^{F''_P})$ construida de forma análoga a la Z'_P pero sustituyendo T por F al definir su función de transferencia δ''_P y en la que se han renombrado los estados con el fin de poder aplicar nuevamente el lema 1.5. De idéntica manera se construye la W-MT $Z''_Q=(S''_Q,U,V,C,\delta''_Q,\pi''_Q,\delta^{F''_Q})$. Sea

$$Z'''_P = C^{\{1\}\{2\}} \dot{-} Z''^{\{1\}}_P \dot{-} C^{\{2\}\{1\}}$$

con $C^{\{1\}\{2\}}$ y $C^{\{2\}\{1\}}$ MTD dadas por el lema 1.2, una W-MT con dos cintas, la primera de trabajo y la segunda de almacenamiento interno. Inicialmente copia la entrada $\overline{x_1x_2\ \dots\ x_n}$ sobre la cinta 2, trabaja como la W-MT Z''_P sobre la cinta 1 y cuando esta se detiene, con resultado F, vuelve a copiar la entrada. Asi pues, la entrada volverá a estar sobre la cinta 1 con un grado igual al que Z''_P, esto es Z_P, haya calculado el valor F para dicha entrada. Entonces, la composición Z** de las W-MT Z'''_P y Z''_Q calculará el valor F con grado

$$c_P(F|x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n) \otimes c_Q(F|x_1,x_2,\ \dots\ ,x_n)$$

y la función caracteristica del predicado P ∇ Q será W-calculada por

$$Z= \{(Z^*,1),\ (Z^{**},1)\}$$

iii) La W-calculabilidad de P Δ Q se sigue de modo inmediato de i), ii) y los resultados del teorema 1. #

<u>Corolario</u>.- Sea P_i, $i=1,2,\dots,n$ un conjunto finito de predicados W-calculables sobre $\mathbf{Z}^{+n}$. Entonces tambien son W-calculables los predicados

$$P= \mathop{\nabla}_{i=1}^{n} P_i;\quad P'= \mathop{\Delta}_{i=1}^{n} P_i$$

<u>Demostración</u>.- Inmediata a partir del teorema anterior. #

Definición 5.- Se dice que un predicado W-valuado $P(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ es semiW-calculable si existe una función c_P^*: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ parcialmente W-calculable cuyo dominio de definición son las n-uplas para las que el predicado toma el valor T con grado distinto de cero y que lo evalúa para esas n-uplas

Interpretación.- Observemos que la función c_P^* está definida solo para aquellas n-uplas tales que el predicado P es cierto con grado distinto de cero aunque tambien sea falso con grado distinto de cero y, sin embargo, no lo está para aquellas en que P es cierto con grado cero independientemente del grado con el que sea falso. En particular, todo predicado ordinario semicalculable es semiW-calculable.

Definición 6.- Dado un predicado W-valuado $P(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ con función caracteristica c_P: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$, llamaremos función caracteristica TF-equivalente a la función c_P': $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F,TF\} \longrightarrow W$ definida por

$$c_P'(\chi'|x_1,x_2, \dots ,x_n)= \begin{cases} c_P(\chi'|x_1,x_2, \dots ,x_n) & \text{si } c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)\neq \\ & \neq c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n),\ \chi'\varepsilon\{T,F\} \\ 0 \ \text{ si } c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) \neq c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n),\ \chi'=TF & \\ c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n) & \text{si } c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= \\ & =c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n),\ \chi'=TF \\ 0 \ \text{ si } c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)=c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n),\ \chi'\varepsilon\{T,F\} & \end{cases}$$

Interpretación.- c_P' coincide con c_P en todas las n-uplas para las que está definido el predicado P salvo en aquellas donde

$$c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

en las que c_P' toma el valor que llamaremos "cierto-falso" con grado $c_p(T|x_1,x_2,$

$\ldots ,x_n)$. Observese que si

$$c'_P(TF|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \neq 0$$

entonces

$$c'_P(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) = c'_P(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) = 0$$

y si

$$c'_P(\chi|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \neq 0 \quad \text{para } \chi = T \text{ ó } F$$

entonces

$$c'_P(TF|x_1,x_2, \ldots ,x_n) = 0$$

Resulta evidente que si c_P es W-calculable entonces c'_P tambien lo es.

Teorema 4.- Si $P(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ es un predicado W-calculable sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ entonces P y $\overline{P}$ son semiW-calculables.

Demostración.- Para probar este resultado debemos encontrar una función c^*_P: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ en las condiciones de la definición 3.5. Sean c'_P: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F,TF\} \longrightarrow W$ la función caracteristica TF-equivalente de P, D un alfabeto finito cualquiera y $d_0 \epsilon D^*$ fijo. Definimos la función g_p: $(\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\}^*) \times D^* \longrightarrow W$ de la forma

$$g_P(d|x_1,x_2, \ldots ,x_n,\chi) = \begin{cases} c_P(\chi'|x_1,x_2, \ldots ,x_n) & \text{si } c'_P(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \neq 0 \\ & \text{ó } c'_P(TF|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \neq 0 \\ & d=d_0 \text{ y } \chi \epsilon \{T,F,TF\} \\ & \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Puesto que P es W-calculable c'_P lo será y, por tanto, g_P tambien será W-calculable total.

Construimos por minimalización de g_P la función f_P: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\}^* \longrightarrow W$ como

$$f_P = \min_{d_0,0} g_P$$

esto es, f_P hace corresponder a la n-upla $(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ un valor $\chi\varepsilon\{T,F\}^*$ con grado $g(d_0|x_1,x_2, \dots ,x_n,\chi)$ si χ es la menor palabra de $\{T,F\}^*$ tal que g_P hace corresponder a $(x_1,x_2, \dots ,x_n,\chi)$ el valor d_0. Como hemos fijado $q=0$ y la función g_P toma grado distinto de cero solo para valores T,F,TF si $c_P(T|x_1, x_2, \dots ,x_n)\neq 0$, cualquiera que sea la función codificadora N: $\{T,F\}^* \longrightarrow Z^+$, el mínimo valor χ será:

- T con grado $c_P'(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)$ y F con grado $c_P'(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$ si

$$c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)\neq c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

- TF con grado $c_P'(TF|x_1,x_2, \dots ,x_n)$ si

$$c_P(T|x_1,x_2, \dots ,x_n)= c_P(F|x_1,x_2, \dots ,x_n)$$

- $\hat{\chi}\varepsilon\{T,F\}^*$ con grado cero en otro caso.

Puesto que g_P es W-calculable, por el teorema 2.5, f_P será parcialmente W-calculable. Definimos ahora la función c_P^*: $Z^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ de la forma

$$c_P^*(\chi|x_1,x_2, \dots ,x_n)=\begin{cases} f_P(\chi|x_1,x_2, \dots ,x_n) & \text{si } f_P(TF|x_1,x_2, \dots ,x_n)=0 \\ & \chi\varepsilon\{T,F\} \\ f_P(TF|x_1,x_2, \dots ,x_n) & \text{si } f_P(TF|x_1,x_2, \dots ,x_n)\neq 0 \\ & \chi\varepsilon\{T,F\} \end{cases}$$

que será igualmente W-calculable parcial y prueba que P es semiW-calculable.

Por último, si P es W-calculable, por el teorema 3.3, $\bar{P}$ será W-calculable y, basandonos en la demostración de la primera parte de este teorema, semi W-calculable. #

<u>Teorema 5</u>.- Un predicado $P(x_1,x_2, \dots ,x_n)$ es W-calculable si P y $\bar{P}$ son

semiW-calculables.

Demostración.- Sea c_P^*: $\mathbf{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ la función parcialmente W-calculable asociada a P y sea $Z_P=(S_P,U,V,C,\delta_P,\pi_P,\eta^{F_P})$ la W-MT que la W-calcula. Z_P solo se detendrá para las n-uplas en el dominio de c_P^*, esto es, aquellas n-uplas de $\mathbf{Z}^{+n}$ para las que P es cierto con grado distinto de cero. Sea $c_{\bar{P}}^*$ la función asociada a $\bar{P}$ y $Z_{\bar{P}}=(S_{\bar{P}},U,V,C,\delta_{\bar{P}},\pi_{\bar{P}},\eta^{F_{\bar{P}}})$ la correspondiente W-MT. $Z_{\bar{P}}$ solo se detiene sobre las n-uplas para las que $\bar{P}$ es cierto, esto es, P es falso, con grado distinto de cero. Definimos la W-MT $Z'_{\bar{P}}=(S'_{\bar{P}},U,V,C,\delta'_{\bar{P}},\pi'_{\bar{P}},\eta^{F'_{\bar{P}}})$ como

i) $S'_{\bar{P}}= S_{\bar{P}} \cup \{s_{F'_{\bar{P}}}\}$

ii) $F'_{\bar{P}}= \{s_{F'_{\bar{P}}}\}$

iii)
$$\delta'_{\bar{P}}(s',z|c,s)=\begin{cases} \delta_{\bar{P}}(s',z|c,s) & \text{si} \quad s',s\in S_{\bar{P}}, \quad s\notin F_{\bar{P}} \\ 1 & \text{si} \quad s\in F_{\bar{P}}, \quad s'=s_{F'_{\bar{P}}}, \quad c=T, \quad z=F \\ 1 & \text{si} \quad s\in F_{\bar{P}}, \quad s'=s_{F'_{\bar{P}}}, \quad c=F, \quad z=T \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

y renombramos los estados de $S'_{\bar{P}}$ de forma que

$$S'_{\bar{P}} \cap S_P= \emptyset$$

con lo que podemos aplicar el lema 1.5. Entonces la función característica de P es W-calculada por

$$Z= \{(Z_P,1),\ (Z'_{\bar{P}},1)\} \qquad \#$$

Resumiendo los teoremas 3.4 y 3.5 podemos enunciar el siguiente resultado do:

" Un predicado P W-valuado sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ es W-calculable si y solo si P y $\bar{P}$ son semiW-calculables ".

3.- PREDICADOS W-VALUADOS SOBRE $\tilde{\mathbb{Z}}^{+n}$.

Por extensión de la definición 3.1 tendremos

Definición 7.- Un predicado $\tilde{P}$ W-valuado sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ es una relación W-valuada definida sobre n-uplas de W-v.e.p. con función característica $c_{\tilde{P}}$: $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ x x {T,F} $\longrightarrow$ W.

Interpretación.- Estos predicados se refieren a relaciones W-valuadas sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ tales como decir si dos W-v.e.p. son más o menos "parecidos", si uno es "casi mayor" que el otro, si uno es "mucho mayor" que otro, etc. Casos particulares de estos predicados W-valuados son:

i) las relaciones ordinarias sobre $\mathbf{Z}^{+n}$, ya que $\mathbf{Z}^{+n} \subset \tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ y cualquier relación ordinaria ({0,1}-valuada) es W-valuada

ii) las relaciones ordinarias sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ como, por ejemplo, dados dos W-v.e.p. determinar si son iguales o si uno es mayor que otro

iii) las relaciones W-valuadas sobre $\mathbf{Z}^{+n}$ estudiadas en la sección anterior.

Mediante una discusión análoga a la desarrollada en el apartado 5 del capítulo II concluimos que el resultado de un predicado con función característica $c_{\tilde{P}}$: $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ x {T,F} $\longrightarrow$ W depende tanto del soporte de cada n-upla como del grado de esta.

Ejemplo.- Para n=1 sea el predicado:

"Dado $\alpha\varepsilon W$, un W-v.e.p. $N\varepsilon\tilde{Z}^{+n}$ con soporte finito es válido para nuestros cálculos si al menos el 70% de los elementos de dicho soporte tienen grado superior a α".

Es inmediato que su función caracteristica puede evaluarse del siguiente modo:

$$c_{\tilde{P}}(T|N)=\begin{cases} 1 & \text{si } \ \mathrm{Card.}\{x|\ x\varepsilon \mathrm{Sop.}N,\ N(x)\geq\alpha\}\geq \\ & \geq 0.7\ \mathrm{Cardinal(Sop.}N) \\ \dfrac{\mathrm{Cardinal}\ \{x|x\varepsilon \mathrm{Sop.}N,\ N(x)\geq\alpha\}}{\mathrm{Cardinal(Sop.}N)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$c_{\tilde{P}}(F|N)=\begin{cases} 1 & \text{si } \ \mathrm{Card.}\{x|\ x\varepsilon \mathrm{Sop.}N,N(x)\geq\alpha\}< \\ & < 0.7\ \mathrm{Cardinal(Sop.}N) \\ \dfrac{\mathrm{Cardinal}\ \{x|\ x\varepsilon \mathrm{Sop.}N,\ N(x)<\alpha\}}{\mathrm{Cardinal(Sop.}N)} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Obviamente, el predicado $\tilde{P}$ tomará distintos valores según los W-V.e.p. que se analicen aunque estos tengan el mismo soporte (finito). Asi, para N_1, $N_2,N_3\varepsilon\tilde{Z}^{+}$ como los de la figura 10

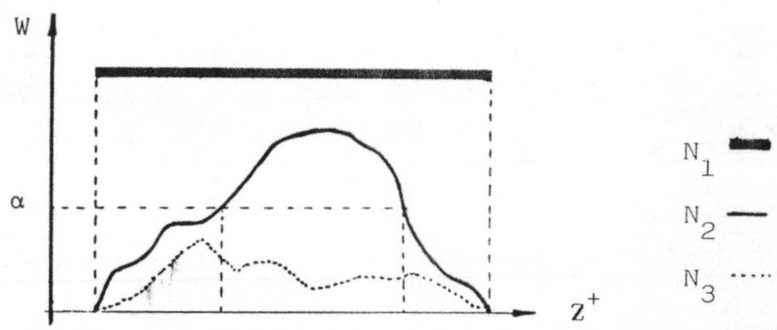


figura 10

se tiene que

$$\text{Soporte } N_1 = \text{Soporte } N_2 = \text{Soporte } N_3$$

y, sin embargo,

$$c_{\tilde{P}}(\chi|N_1) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \chi=T \\ 0 & \text{si} \quad \chi=F \end{cases}$$

$$c_{\tilde{P}}(\chi|N_2) = \begin{cases} \alpha_1 & \text{si} \quad \chi=T, \quad 0\neq\alpha_1\neq 1 \\ \alpha_2 & \text{si} \quad \chi=F, \quad 0\neq\alpha_2\neq 1 \end{cases}$$

$$c_{\tilde{P}}(\chi|N_3) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \chi=T \\ 1 & \text{si} \quad \chi=F \end{cases} \qquad \#$$

<u>Definición 8</u>.- Para $n\geq 1$ decimos que $\tilde{P}$ es un predicado W-calculable sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ si su función caracteristica $c_{\tilde{P}}: \tilde{\mathbf{Z}}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ es W-calculable en el sentido de la definición 2.16, esto es, si

$$c_{\tilde{P}}(\chi|N_1,N_2, \ldots ,N_n) = \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\scriptsize Σ}} \{[\pi \otimes n(\chi|x_1,x_2, \ldots ,x_n)] \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\scriptsize Π}}} N_i(x_i)\}$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\scriptsize Σ}} \{p_\pi(\chi|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\scriptsize Π}}} N_i(x_i)\} \qquad (1)$$

Pasaremos ahora a estudiar algunas propiedades de estos predicados. En primer lugar, dados dos predicados $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$ W-calculables sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$, podemos extender las definiciones 3.2 y 3.3 obteniendo

$$\overset{\approx}{P}, \quad \tilde{P} \mathrel{\underline{\nabla}} \tilde{Q} \quad \text{y} \quad \tilde{P} \mathrel{\Delta} \tilde{Q}$$

Igualmente se verifica para estos predicados los teoremas 3.1 y 3.3 teniendose, además, los siguientes resultados.

Teorema 6.- Sea $\tilde{P}$ un predicado W-calculable sobre $\tilde{Z}^{+n}$. Si la relación que lo define es ordinaria, entonces $c_{\tilde{P}}$: $\tilde{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ es coherente con el Principio de Extensión de Zadeh.

Demostración.- Bajo esta hipótesis $c_{\tilde{P}}$ estará en las condiciones del teorema 2.16 y, por consiguiente, es coherente con el citado Principio. #

Definición 9.- Sea P un predicado W-valuado sobre Z^{+n} con función característica c_P: $Z^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$. Denominaremos "extensión de P" al predicado $\tilde{P}$ sobre $\tilde{Z}^{+n}$ de función caracteristica

$$c_{\tilde{P}}(\chi|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_P(\chi|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \overset{n}{\underset{i=1}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\} \tag{2}$$

Resulta evidente que si P es W-calculable entonces $\tilde{P}$ tambien lo es puesto que (2) es un caso particular de (1) en donde el designador inicial de estados no depende de la n-upla de entrada.

Teorema 7.- Sean P y Q predicados W-valuados sobre Z^{+n} y $\tilde{P}$ y $\tilde{Q}$, respectivamente, sus extensiones sobre $\tilde{Z}^{+n}$. Entonces se verifica que:

i) $\overline{\text{Ext }(P)} = \text{Ext }(\bar{P})$

ii) $\text{Ext }(P) \triangledown \text{Ext }(Q) \neq \text{Ext }(P \triangledown Q)$

iii) $\text{Ext }(P) \vartriangle \text{Ext }(Q) \neq \text{Ext }(P \vartriangle Q)$

Demostración.- Si notamos

$$\tilde{P}= \text{Ext }(P);\ \tilde{Q}= \text{Ext }(Q);\ P \mathbin{\tilde{\triangledown}} Q= \text{Ext }(P \triangledown Q);\ P \mathbin{\tilde{\vartriangle}} Q= \text{Ext }(P \vartriangle Q)$$

entonces, para $X=T$, $\bar{X}=F$ ó $X=F$, $\bar{X}=T$, se tiene:

i) $$c_{\approx P}(X|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= c_{\tilde{P}}(\bar{X}|N_1,N_2, \ldots ,N_n)=$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_P(\bar{X}|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\}$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_{\bar{P}}(X|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\}$$

$$= c_{\tilde{\bar{P}}}(X|N_1,N_2, \ldots ,N_n).$$

ii) $$c_{\tilde{P}\nabla\tilde{Q}}(T|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= c_{\tilde{P}}(T|N_1,N_2, \ldots ,N_n) \oplus c_{\tilde{Q}}(T|N_1,N_2, \ldots ,N_n)=$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_P(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\} \oplus$$

$$\oplus \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_Q(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\}=$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{ [c_P(T|x_1,\ldots,x_n) \oplus c_Q(T|x_1,\ldots,x_n)] \otimes$$

$$\otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\}=$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_{P\nabla Q}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\}=$$

$$= c_{P\tilde{\nabla}Q}(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)$$

...

$$c_{\tilde{P}\nabla\tilde{Q}}(F|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= c_{\tilde{P}}(F|N_1,N_2, \ldots ,N_n) \otimes c_{\tilde{Q}}(F|N_1,N_2, \ldots ,N_n)=$$

$$= \underset{(x_1,\ldots,x_n)}{\textcircled{\Sigma}} \{c_P(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\Pi}}} N_i(x_i)\} \otimes$$

$$\otimes \bigoplus_{(x_1,..,x_n)} \{c_Q(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \mathop{\text{Ⓣ}}_{i=1}^{n} N_i(x_i)\}\neq$$

$$\neq \bigoplus_{(x_1,..,x_n)} \{[c_P(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \mathop{\text{Ⓣ}}_{i=1}^{n} N_i(x_i)] \otimes$$

$$\otimes [c_Q(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \mathop{\text{Ⓣ}}_{i=1}^{n} N_i(x_i)]\}=$$

$$= \bigoplus_{(x_1,..,x_n)} \{[c_P(F|x_1,\ldots,x_n) \otimes c_Q(F|x_1,\ldots,x_n)] \otimes$$

$$\otimes \mathop{\text{Ⓣ}}_{i=1}^{n} N_i(x_i)\}=$$

$$= \bigoplus_{(x_1,..,x_n)} \{c_{P\nabla Q}(F|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \mathop{\text{Ⓣ}}_{i=1}^{n} N_i(x_i)\}=$$

$$= c_{P\tilde{\nabla}Q}(F|N_1,N_2, \ldots ,N_n)$$

iii) se demuestra igual que ii) obteniendose que

$$c_{\tilde{P}\Delta\tilde{Q}}(T|N_1,N_2, \ldots ,N_n)\neq c_{P\tilde{\Delta}Q}(T|N_1,N_2, \ldots ,N_n)$$

$$c_{\tilde{P}\Delta\tilde{Q}}(F|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= c_{P\tilde{\Delta}Q}(F|N_1,N_2, \ldots ,N_n) \quad \#$$

Es interesante resaltar este último resultado ya que a menudo se hacen cálculos prácticos sobre n-uplas de W-v.e.p. aplicando predicados que son extensiones de predicados ordinarios ó predicados W-valuados sobre $\mathbf{Z}^{+n}$. Hay que tener presente entonces que la operación "extensión" no es conmutativa con las operaciones lógicas union "o", e intersección "y".

Por otra parte podemos extender la definición 3.5 al caso de n-uplas sobre $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ sin necesidad de imponer ninguna nueva condición obteniendo, de esta forma, predicados semiW-calculables sobre n-uplas de W-v.e.p.. Para tales predicados son válidas las correspondientes extensiones de los teoremas 3.4 y 3.5.

4.- CONSIDERACIONES SOBRE LA DECIDIBILIDAD Y COMPLEJIDAD DE PROBLEMAS W-VALUADOS.

El tema de este apartado es lo suficientemente atractivo y actual como para dedicarle todo un estudio monográfico. En él se analizarían las condiciones bajo las cuales son extensibles los resultados sobre problemas ordinarios y se intentaría obtener, si fuera posible, resultados propios de problemas W-valuados. Sin embargo esto se sale un poco del tema objeto de esta memoria, que es la W-calculabilidad, y será materia para investigaciones posteriores. No obstante, dada su importancia, hemos creido conveniente hacer una breve introducción al tema en la que exponemos algunos criterios sobre la extensión de la decidibilidad y de la complejidad algorítmica.

4.1.- DECIDIBILIDAD W-VALUADA.

Podemos analizar el significado de los predicados W-valuados desde otro punto de vista. Dado un conjunto borroso G definido por una propiedad $\mathcal{G}$, podemos asociarle un predicado W-valuado $P_{\mathcal{G}}(N_1,N_2, \ldots ,N_n)$ que será cierto/falso con grado α si la n-upla $(N_1,N_2, \ldots ,N_n)$ pertenece/no pertenece a G con grado α, esto es, si satisface/no satisface la propiedad $\mathcal{G}$ con ese grado. Puesto que Z^{+n} está contenido propiamente en $\tilde{Z}^{+n}$, mientras que no se indique lo contrario, consideraremos $\tilde{Z}^{+n}$.

El problema de la decidibilidad W-valuada consiste en: "dada una n-upla

$(N_1,N_2, \ldots ,N_n)\varepsilon \tilde{Z}^{+n}$, ¿ con qué grado se satisface el predicado $P_{\mathcal{G}}$?. Mas concretamente podemos decir

Definición 10.- Dado un conjunto $G\subset\tilde{Z}^{+n}$ definido por una propiedad $\mathcal{G}$, el problema de decisión W-valuada consiste en determinar el grado con el que una n-upla $(N_1,N_2, \ldots ,N_n)\varepsilon\tilde{Z}^{+n}$ cualquiera pertenece a G.

Como hemos dicho, para resolver el problema podemos definir un predicado $\tilde{P}_{\mathcal{G}}(N_1,N_2, \ldots ,N_n)$ que indique las condiciones que debe cumplir una n-upla para satisfacer/no satisfacer la propiedad $\mathcal{G}$ con grado

$$c_{\tilde{P}_{\mathcal{G}}}(\chi|N_1,N_2, \ldots ,N_n)$$

Entonces, la decidibilidad del problema dependerá de la W-calculabilidad de la función $c_{\tilde{P}_{\mathcal{G}}} : \tilde{Z}^{+n} \times \{T,F\} \longrightarrow W$.

Definición 11.- Diremos que un problema de decisión W-valuada es W-decidible, o W-resoluble, si el predicado $\tilde{P}$ asociado a él es W-calculable. En otro caso se dirá que es W-indecidible.

Evidentemente todo problema ordinario decidible es W-decidible. Ahora bien, puesto que el conjunto de funciones W-calculables contiene propiamente al de las calculables, existirán problemas W-decidibles propios del W-cálculo que no procederán de la difuminación de problemas decidibles ordinarios.

Para aclarar el concepto de W-decidibilidad consideraremos dos extensiones de un problema clásico en la Optimización Combinatoria:

El problema del viajante de comercio.-

En su forma ordinaria está caracterizado por

ENTRADA: Un conjunto de m ciudades $\{k_i, i=1,2,\ldots,m\}$ y un conjunto de costos asociados a cada par de ciudades $\{t(k_i,k_j) \mid t(k_i,k_j) \neq 0,$ $i \neq j,\ i,j=1,2,\ldots,m\}$. Por simplicidad supondremos que para cualesquiera $i,j,\ t(k_i,k_j) \varepsilon Z^+$

PROPIEDAD A SOLUCIONAR: Encontrar una ordenación

$$\theta = \{k_{\theta(1)}, k_{\theta(2)}, \ldots, k_{\theta(m)}\}$$

que tenga un coste total

$$K_\theta = \sum_{i=1}^{m-1} t(k_{\theta(i)}, k_{\theta(i+1)}) + t(k_{\theta(m)}, k_{\theta(1)})$$

mínimo en el conjunto Ξ de todas las posibles ordenaciones.

Una forma de codificar las entradas de este problema sobre $\mathbf{Z}^{+(m-1)}$ sería:

- la dimensión de la (m-1)-upla mas 1 dá el número de ciudades
- el valor de las coordenadas de la (m-1)-upla nos dá los costos asociados de la siguiente manera

$$(t_{12}\mathbf{1}t_{13}\mathbf{1} \ldots \mathbf{1}t_{1m}, t_{23}\mathbf{1}t_{24}\mathbf{1} \ldots \mathbf{1}t_{2m}, \ldots, t_{m-1,m})$$

donde $t_{ij} = t(k_i,k_j)$ está representado en sistema unario.

La forma decisional ordinaria de este problema está caracterizada por

ENTRADA: Un conjunto de m ciudades $\{k_1,k_2, \ldots, k_m\}$, un conjunto de costos asociados $\{t_{ij}\}$ y una constante $H \varepsilon \mathbf{Z}^+$

PROPIEDAD A SOLUCIONAR: Encontrar una ordenación θ de las ciudades tal que

$$K_\theta = \sum_{i=1}^{m-1} t(k_{\theta(i)}, k_{\theta(i+1)}) + t(k_{\theta(m)}, k_{\theta(1)}) \leq H$$

El predicado ordinario asociado sería cierto si existe al menos una ordenación cuyo costo es menor o igual que H y falso en caso contrario.

Una primera extensión de este predicado es construir uno sobre Z^{+n} tal que no difumine el conjunto de entradas pero sí la evaluación del predicado, esto es, la frontera H se hace borrosa. Esto puede hacerse, por ejemplo, con un predicado P cuya función característica c_P: $Z^{+(m-1)} \times \{T,F\} \longrightarrow W$ venga dada por

$$c_P(\chi \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 \otimes \underset{\theta \in \Xi}{\textcircled{\scriptsize T}} \left(\dfrac{H}{k_\theta}\right)^r & \text{si } \chi = T \\ \\ \underset{\theta \in \Xi}{\textcircled{\scriptsize T}} \{0 \oplus [1-\left(\dfrac{H}{k_\theta}\right)^r]\} & \text{si } \chi = F \end{cases}$$

siendo $r \geq 1$.

Este predicado sería cierto con grado 1 y falso con grado 0 si entre todas las ordenaciones existe al menos una con costo menor o igual que H, e irá tomando el valor cierto con grado cada vez más próximo a 0 y falso cada vez más próximo a 1 conforme el menor costo posible vaya aumentando a partir de H. La rapidez de esta convergencia a 0, respectívamente a 1, dependerá del valor elegido para la constante r.

Evidentemente este problema es W-decidible puesto que el problema ordinario es decidible y Ξ es finito, lo que hace que c_P sea W-calculable. Incluso, en algun caso, puede tener un tiempo de cálculo menor que el problema ordinario. Pensemos que en algunas ocurrencias del problema ordinario puede ser muy costoso en tiempo encontrar una solución con costo menor o igual que H pero que, quizás, nos podamos "conformar" con alguna solución "aproximada". Entonces iríamos construyendo ordenaciones hasta que encontrasemos una para la que el predicado tomara el valor cierto con un grado lo suficentemente alto como para que nos satisfaga. Esto podría tener un tiempo real de cálculo inferior, si bien el tipo de complejidad del problema no cambia.

Una segunda extensión del problema del viajante surge cuando se difumina la entrada considerandose predicados con función característica $c_{\tilde{P}}: \tilde{\mathbf{Z}}^{+(m-1)} \times \{T,F\} \longrightarrow W$. Esto equivale a decir que los datos del problema estan afectados de una imprecisión no aleatoria, situación facilmente imaginable en la práctica y que ya ha sido estudiada en relación con problemas análogos (ver M. Oheigeartaigh (1.982)).

En estas condiciones la (m-1)-upla que codifica una entrada al problema pertenecerá a $\tilde{\mathbf{Z}}^{+(m-1)}$, pudiendose, además, difuminar simultáneamente la frontera de costo H. El predicado $\tilde{P}$ correspondiente podría entonces venir definido por una función caracterítica de la forma

$$c_{\tilde{P}}(\chi|N_1,N_2, \ldots ,N_n)= \bigoplus_{(x_1,\ldots,x_n)} \{c_P(\chi|x_1,x_2, \ldots ,x_n) \otimes \bigodot_{i=1}^{m-1} N_i(x_i)\}$$

donde c_P es la función característica del predicado correspondiente a la primera extensión del problema que hemos considerado.

4.2.- Complejidad De Problemas W-Decidibles.

Al estudiar la complejidad de estos problemas hay que tener presente que el modelo de W-MT no es mas que una extensión de la MTND en la que se permite que cada movimiento de la máquina se haga con un cierto grado. Asi pues, en cuanto al número de movimientos se refiere, el funcionamiento es el mismo y, por tanto, en un principio todo problema W-decidible debería estar en la clase NP. Ahora bien, puesto que los problemas decidibles son tambien W-decidibles, esta afirmación no es totalmente cierta pues debe haber problemas W-decidibles en la clase P.

Podríamos establecer entonces la siguiente clasificación de problemas:

1.- Problemas correspondientes a extensiones de problemas ordinarios. Dentro de ellos hay que considerar

1.1.- Problemas en los que el predicado es W-valuado pero las entradas pueden ser codificadas sobre $\mathbf{Z}^{+n}$.

1.2.- Problemas en los que, necesariamente, la codificación de las entradas pertenece a $\tilde{\mathbf{Z}}^{+n}$ pudiendo ser o no W-valuado el predicado correspondiente.

2.- Problemas propios del W-cálculo que no surgen como extensión de uno ordinario.

Empezaremos por analizar los del tipo 2. Tradicionalmente el estudio de la complejidad de un problema se hace por reducción a uno conocido y que, por tanto, tendrá que ser ordinario. Si el problema en estudio no es decidible, aunque si W-decidible, parece poco probable poder encontrar una reducción de él a un problema ordinario. Creemos que habría que definir entonces unas medidas de complejidad propias para estos problemas.

Cabe pensar que los problemas de tipo 1.1 no deben tener mayor complejidad que el problema ordinario del que proceden. Volviendo al ejemplo del viajante de comercio observemos que:

i) cuando el predicado ordinario es cierto para una entrada entonces, automáticamente, $c_P(T|x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ vale 1 para la solución encontrada.

ii) para comprobar que el predicado ordinario es falso hay que analizar el cos to de todas las posibles ordenaciones pudiendo, simultáneamente, evaluar la función caracteristica c_p del predicado.

Asi pues no aumentará el tiempo (número de pasos) requerido para resolver el problema.

En cambio, para los problemas del tipo 1.2 hay que repetir el proceso para cada una de las posibles combinaciones de las (m-1)-uplas $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n) \in Z^{+(m-1)}$ correspondientes a una misma entrada $(N_1, N_2, \ldots, N_n) \in \tilde{Z}^{+(m-1)}$. Esto hace que el tiempo de cálculo crezca en forma exponencial, respecto al del problema ordinario, en función del cardinal de los soportes de los N_i, para $i=1,2, \ldots, (m-1)$.

5.- PROBLEMAS W-VALUADOS CALCULABLES.

Hasta aqui hemos estudiado las posibilidades del W-cálculo empleando una herramienta propia introducida por L. A. Zadeh (1.968): la Máquina de Turing borrosa. No obstante, en la actualidad solo se dispone de las herramientas desarrolladas para el cálculo ordinario y es innegable que cualquier problema sobre conjuntos borrosos deberá ser atacado usando dichos medios.

Con el fin de delimitar las caracteristicas de los problemas W-valuados que pueden resolverse usando "medios" de cálculo ordinarios es necesario discernir entre:

i) desarrollo de un proceso de cálculo

ii) interpretación de cualquiera de los resultados, parciales o totales, de un proceso de cálculo.

Asi, es posible que un determinado algoritmo pueda ser implementado sobre una

W-MT y sobre una MTND, por lo que podríamos decir que, para ese algoritmo, la MTND simula a la W-MT. Ahora bien, el resultado obtenido por ese algoritmo a partir de una cierta entrada puede que solo sea interpretable desde la óptica del W-cálculo no siendolo, en cambio, desde el punto de vista del cálculo ordinario (ver ejemplos 3.1 y 3.2).

En este apartado pretendemos extrapolar el trabajo de N. Honda, M. Nasu y S. Hirose (1.977) en el que se desarrolla el concepto de f-reconocimiento de lenguajes borrosos por máquinas ordinarias empleando los axiomas propios del cálculo ordinario. Los autores prueban tambien que, en lo que a f-reconocimiento se refiere, las MTND son más potentes que las MTD.

En lo que sigue estudiaremos los algoritmos que, resolviendo problemas W-valuados, son implementables sobre MTND definiendo lo que denominaremos W-Máquina de Turing Calculable (W-MTC). Asociados a estos algoritmos estarán los problemas que puedan ser resueltos por ellos, esto es, los lenguajes aceptados por W-MTC. A estos problemas los llamaremos "Problemas W-valuados Calculables".

Notaremos W^c W al conjunto de elementos pertenecientes al semianillo W que son calculables. Es evidente que $W^c=([0,1]^c, \oplus, \otimes, \leq)$ tiene, igualmente, estructura de semianillo ordenado, supuesto que $\oplus$ y $\otimes$ son calculables.

<u>Definición 12</u>.- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Diremos que Z es calculable si tanto π como la función δ': $C \times S \longrightarrow [S \times (C \cup \{+,-,.\})] \times W$ tal que

$$\delta'(c,s)= ((s',z),\ \delta(s',z|c,s)) \qquad \text{para } z\in C \cup \{+,-,.\}$$

son calculables.

Interpretación.- La definición anterior establece que Z es calculable si

i) el designador inicial de estados es un vector q-dimensional cuyos componen tes son elementos de W^c, es decir, $\pi\varepsilon(W^c)^q$.

ii) existe una MTND que calcula δ' lo que implica, a su vez, que $\delta(s',z|c,s)\varepsilon W^c$

Hagamos constar que, en el tratamiento de problemas W-valuados calculables definidos sobre $\tilde{Z}^{+n}$, habría que considerar en la definición anterior cualquier designador inicial de estados que pudiera presentarse para ese problema.

Probaremos a continuación que para cualquier W-MTC existe una MTND capaz de calcular, a partir de una entrada $u\varepsilon U^*$ dada, los mismos resultados $v\varepsilon V^*$ y, además, los grados con los que estos son obtenidos. Mas concretamente se tiene

Teorema 8.- Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT calculable. Entonces la función ordinaria $p': U^* \longrightarrow V^* \times W$ definida como

$$p'(u)= (v,\ p(v|u)) \qquad \text{si} \quad p(v|u)\neq 0$$

es parcialmente calculable.

Demostración.- Para cualquier entrada $u\varepsilon U^*$ y salida $v\varepsilon V^*$ tal que $p(v|u)\neq 0$ v es calculado por la MTND $Z_{0'}$ cero-corte estricto de Z (ver definición 1.9). Por otra parte $p(v|u)$ tambien será calculable puesto que δ',π y las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ sobre un conjunto finito de valores son calculables. Sea Z' la Máquina de Turing que calcula $p(v|u)$. Entonces $(v,\ p(v|u))$ es calculado a partir de u por la MTND

$$Z^*= C^{\{1\}\{2\}} \xrightarrow{\cdot} Z_{0'}^{\{1\}} \xrightarrow{\cdot} D^{\{2\}} \longrightarrow P^{\{2\}} \longrightarrow C^{\{1\}\{2\}} \xrightarrow{\cdot} Z'^{\{2\}} \xrightarrow{\cdot} D^{\{1\}} \longrightarrow P^{\{1\}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow C^{\{2\}\{1\}}$$

que tiene una cinta sobre la que aparece la entrada u y el resultado $(v\ ,p(v|u))$ y otra cinta de trabajo interno. C es la MTD "copia", D es la MTD "rebobina a la derecha" y P es una MTD que imprime el simbolo usado para separar las coordenadas de la 2-upla cuando son escritas sobre la cinta correspondiente.

Por otra parte, si $p(v|u)=0$ entonces $p'(u)$ queda indefinido. De ahí que p'sea parcialmente calculable. #

Un corolario inmediato de este teorema es el siguiente

Corolario.- El conjunto de W-MTC es numerable.

Demostración.- Inmediata. #

Definición 13.- Diremos que una función $\tilde{f}: \tilde{Z}^{+n} \times Z^{+} \longrightarrow W$ es calculable si existe una W-MTC que la calcula en el sentido de la definición 2.16.

El teorema 3.8 nos puede llevar a pensar que cualquier $\tilde{f}: \tilde{Z}^{+n} \times Z^{+} \longrightarrow W$ calculable en el sentido de la definición 13 es calculable en el sentido del cálculo ordinario. Aunque esto sea cierto desde un punto de vista puramente formal, hay que tener en cuenta que una función de este tipo puede proporcionar, para determinadas entradas, resultados que sean absurdos desde el punto de vista del cálculo ordinario, pero que no lo sean bajo el del W-cálculo.

BIBLIOGRAFIA.-

ABERTH, O.: " Computable Analysis ", McGraw Hill (1.980).

ADAMO, J. M.: " L.P.L. A Fuzzy Programming Languaje: 1. Syntastic Aspect ", Fuzzy Sets and Systems 3, 151-179, (1.980).

ADAMO, J. M.: " L.P.L. A Fuzzy Programming Languaje: 2. Semantic Aspect ", Fuzzy Sets and Systems 3, 261-289, (1.980).

AHO, A. V.; HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D.: " The Design and Analysis of Computer Algorithm ", Addison Wesley, (1.974).

ALBERT, P.: " The Algebra of the Fuzzy Logic ", Fuzzy Sets and Systems 1, 203-230, (1.979).

AZRA, J. P.; JAULIN, B.: " Recursivité ", Gauthier- Villars (1.973).

BOOTH, T. L.: "Sequential Machines and Automata Theory ", John Wiley (1.967).

COHEN, J.: " Non-Deterministic Algorithms ", ACM Computing Surveys,Vol 11, No. 2, 79-94, (Junio 1.979).

CHANG, C. L.: " Interpretation and Execution of Fuzzy Program ", en "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes", Zadeh,L.A., Fu,K.S., Tanaka,K., Shimura,M. (Eds.), Academic Press, 191-218, (1.975).

CHANG, S. K.: " On the Execution of Fuzzy Program Using Finite-State Machines", IEE Transaction on Computers, Vol C-21, No. 3, 241-253, (Marzo 1.972).

CHURCH, A.: " An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory ", Amer. J. Math., 58, 3457363, (1.936).

DePALMA, G. F.; YAU, S.S.: " Fractionally Fuzzy Grammars with Applications to Pattern Recognition ", en "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes", Zadeh,L.A., Fu,K.S.,Tanaka,K., Shimura,M. (Eds.), Academic Press, (1.975).

DIAZ CORT, J.: " Complejidad Concreta y Complejidad Abstracta de Algoritmos: Un Panorama Actual ", IV Escuela de Verano de Informática de la A.E. I.A. (Julio 1.982).

DUBOIS, D.; PRADE, H.: " Fuzzy Real Algebra: Some Results ", Fuzzy Sets and Systems 2, 327-348, (1.979).

DUBOIS, D.; PRADE, H.: " Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications ", Academic Press (1.980).

DUBOIS, D.; PRADE, H.: " Additions of Interactive Fuzzy Numbers ", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol AC-26, No. 4,926-936, (Agosto 1.981)

HONDA, N.; NASU, M.; HIROSE, S.: " F-Recognition of Fuzzy Languajes ", en "Fuzzy Automata and Decision Processes", Gupta,M.M., Saridis,G.N., Gaines,B.R. (Eds.), North-Hollands, 149-168, (1.977).

HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D.: " Introducction to Automata Theory, Languajes and Computation ", Addison Wesley, (1.979).

INAGAKI, Y.; FUKUMURA, T.: " On the Description of Fuzzy Meaning of Contex-Free Languajes ", en "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes", Zadeh,L.A., Fu,K.S., Tanaka,K., Shimura,M. (Eds.), Academic Press, (1.975).

KANDEL, A.; LEE, S. C.: " Fuzzy Switching and Automata: Theory and Aplications " Crane-Russak & Company (1.979).

KLEENE, S. C.: " General Recursive Functions of Natural Numbers ", Mathematische Annalen 112, 340-353, (1.936).

MINSKY, M.: " Computation: Finite and Infinite Machines ", Prentice-Hall International, (1.972).

NIEMINEN, J.: " Fuzzy Mappings and Algebraics Structures ", Fuzzy Setes and Systems 1,231-235, (1.978).

NAHMIAS, S.: " Fuzzy Variables ", Fuzzy Sets and Systems 1, 97-110,(1.978).

OhEIGEARTAIGH, M.: " A Fuzzy Transportation Algorithm ", Fuzzy Sets and Systems Vol 8,No.3 , 235-244 (1.982).

OSTASIEWICZ, W.: " A New Aproach to Fuzzy Programming ", Fuzzy Sets and Systems 7, 139-152, (1.982).

PAZ, A.: " Introduction to Probabilistic Automata ", Academic Press (1.971).

POST, E.L.: " Finite Combinatory Processes Formulation ", J. Symbolic Logic 1, 103-105,(1.936).

PRADE, H.: " Fuzzy Programming: Why and How ? ", BUSEFAL No. 5, 76-89, (Invierno 1980-81).

ROGERS, H. Jr.: " Theory of Recursive Functions and Effective Computability ", McGraw-Hill, (1.967).

SANTOS, E. S.: " Maximin Automata ", Information and Control, 13, 363-377, (1.968).

SANTOS, E. S.: " Computability by Probabilistic Turing Machines ", Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 159, 165-184, (Septiembre 1.971).

SANTOS, E. S.: " Fuzzy and Probabilistic Programs ", en "Fuzzy Automata and Decision Processes", Gupta,M.M., Saridis,G.N., Gaines,B.R. (Eds.), North Holland, 133-148, (1.977).

TANAKA, K.; MIZUMOTA, M.: " Fuzzy Programs and Their Execution ", en "Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes", Zadeh,L.A., Fu,K.S., Tanaka,K., Shimura,M. (Eds.), Academic Press, (1.975).

TURING, A. M.: " On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungproblem ", Proc. London Mathematical Society (2) 42, 230-265, (1.936).

TURING, A. M.: " A Correction ", Proc. Lond. Math. Soc. (2) 43, 544-546, (1.937).

ZADEH, L. A.: " Fuzzy Sets ", Information and Control 8,338-353, (1.965).

ZADEH, L. A.: " Fuzzy Algorithms ", Information and Control 12, 94-102, (1.968).