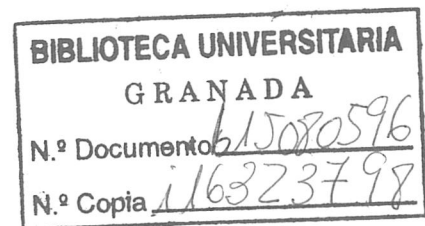


~~T-proc-21/97~~

T 10/20

UNIVERSIDAD DE GRANADA

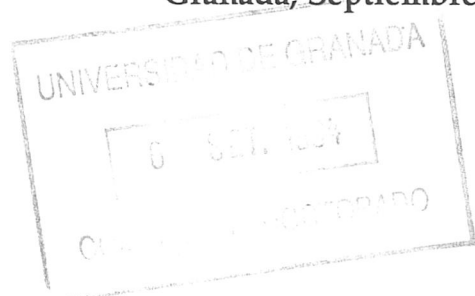
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA



TESIS DOCTORAL

CONTRIBUCIONES AL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

SALVADOR GONZÁLEZ GARCÍA
Granada, Septiembre 1994





UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA APLICADA

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Facultad de Ciencias
Fecha 16-9-94
ENTRADA NUM. 1326

CONTRIBUCIONES AL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Memoria presentada por Salvador González García para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas por la Universidad de Granada.

Fdo. Salvador González García

D. Bernardo García Olmedo, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático de Electromagnetismo del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada

y

D. Rafael Gómez Martín, Doctor en Ciencias Físicas, Catedrático de Electromagnetismo del Departamento de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada,

CERTIFICAN

Que el trabajo de investigación que se presenta en esta Memoria, titulado *CONTRIBUCIONES AL MÉTODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS PARA LA RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO*, ha sido realizado en este Departamento por el Licenciado en Ciencias Físicas D. Salvador González García bajo nuestra dirección, y constituye su Tesis Doctoral.

Con esta fecha autorizamos su presentación ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de Granada.

Granada, cinco de Septiembre de mil novecientos noventa y cuatro.



Fdo. Bernardo García Olmedo

Fdo. Rafael Gómez Martín

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero expresar mi sincero agradecimiento a los Profesores Bernardo García Olmedo y Rafael Gómez Martín, sin cuya dirección y dedicación este trabajo no hubiese sido posible.

Al Prof. Korada Umashankar de la Universidad de Illinois en Chicago (EEUU), por su consejo y disposición.

Al Prof. Juan Soler por la orientación bibliográfica prestada en los fundamentos matemáticos del método.

A Amelia Rubio y Alfonso Salinas por su constante apoyo y confianza.

A Ignacio Sánchez y Jesús Fornieles por todos los momentos gratos e ingratos que han compartido conmigo durante estos cuatro años.

A Jesús Díaz por toda su ayuda, especialmente con los medios informáticos.

Finalmente, a todos aquellos que de forma directa o indirecta contribuyeron a la realización de este trabajo.

ESTE TRABAJO HA SIDO PARCIALMENTE FINANCIADO POR LA COMISIÓN INTERMINISTERIAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA A TRAVÉS DE LOS PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN TIC-92-0596 Y TIC-93-0671-C06-05.

*A mis padres,
por su amor*

*A mis padres,
por su amor*

*A María de los Ángeles,
por su paciencia*

*La pura y simple verdad
es raramente pura
y nunca simple*

OSCAR WILDE

Indice

ABSTRACT	1
1 Justificación y precedentes	3
1.1 Introducción	3
1.2 Objetivos y desarrollo del trabajo	4
1.3 Antecedentes	5
1.3.1 Mejoras, modificaciones y alternativas	6
1.3.2 Aplicaciones	12
2 Esquemas en diferencias	15
2.1 Introducción	15
2.2 Solución general del problema de Cauchy	17
2.3 Problema de valores iniciales y de frontera	17
2.4 Esquemas en diferencias	18
2.5 Consistencia, convergencia y estabilidad	24
2.5.1 Estabilidad	26
2.6 Disipación y dispersión	36
2.7 Extensión a problemas multidimensionales	37
2.7.1 Consistencia, convergencia y estabilidad	41
2.7.2 Disipación y dispersión	48
2.8 Estabilidad de las condiciones de frontera	50
2.9 Dominios de solución	51
3 Dispersión mediante objetos bidimensionales	55
3.1 Propagación	57
3.1.1 Aproximación espacial y temporal de segundo orden	57
3.1.2 Segundo orden temporal y cuarto espacial	62
3.2 Iluminación	63
3.2.1 Segundo orden temporal y cuarto espacial	70
3.3 Condiciones absorbentes	71

3.3.1	Tratamiento de las esquinas	74
3.3.2	Segundo orden temporal y cuarto espacial	75
3.4	Dispersión y Estabilidad	77
3.4.1	Segundo orden espacial y temporal	78
3.4.2	Cuarto orden espacial y segundo temporal	80
3.5	Conformación	81
3.5.1	Estabilidad	87
3.6	Conversión campo cercano–campo lejano	90
3.6.1	Iluminación armónica	94
3.6.2	Iluminación no armónica	96
3.7	Resultados	101
4	Dispersión mediante objetos tridimensionales	121
4.1	Propagación	122
4.2	Iluminación	125
4.3	Condiciones absorbentes	127
4.4	Dispersión y Estabilidad	129
4.5	Conformación	131
4.5.1	Estabilidad de la conformación volúmica	136
4.6	Conversión campo cercano–campo lejano	137
4.7	Resultados	139
	CONCLUSIONES	151
	A Álgebra matricial	153
	B Necesidades computacionales	157
B.1	Programas bidimensionales	157
B.2	Programas tridimensionales	160
	Bibliografía	163

Indice de Figuras

2.1	Dominio de dependencia de la solución del esquema en diferencias en (6,4)	35
2.2	Dominios de dependencia de las soluciones teóricas y numérica, para las ecuaciones bidimensionales de Maxwell	49
2.3	Cubo de Yee	53
3.1	Disposición espacial de las componentes del campo eléctrico y magnético	60
3.2	División de la región de cálculo en 2 zonas: una de campo dispersado y otra de campo total. Iluminación TE	65
3.3	Utilización del principio de equivalencia para generar una región con un campo incidente dado	67
3.4	Implementación de la iluminación para polarización TM	67
3.5	Interpolación del campo en un punto a partir de una tabla de valores . . .	69
3.6	Absorción en la esquina (0,0)	75
3.7	Componentes que deben ser absorbidas en la aproximación de cuarto orden a las derivadas espaciales. Polarización TM.	76
3.8	Celda unitaria para la polarización TE	83
3.9	Intersección entre los contornos de Faraday y Ampère para una celda deformada	85
3.10	Sección transversal de un cilindro circular perfectamente conductor, conformado. Sólo se muestran los contornos de Faraday deformados.	86
3.11	Superposición de celdas en la conformación bidimensional.	90
3.12	Imposibilidad geométrica de adaptar las celdas al dispersor en el método de la integral de línea modificado.	90
3.13	Conversión campo cercano–campo lejano haciendo uso del teorema de equivalencia	92
3.14	Vista tridimensional del problema bidimensional de cálculo del campo lejano a partir de las corrientes superficiales	93
3.15	Descomposición de la distancia entre el punto fuente y el punto campo .	100
3.16	Diferencia de fase tras 100 celdas recorridas en función del ángulo de propagación. Segundo orden espacial y temporal	102

3.17	Diferencia de fase tras 100 celdas recorridas en función del ángulo de propagación. Segundo orden espacial y cuarto temporal	102
3.18	Diagrama polar de los errores de fase tras 100 celdas recorridas	103
3.19	Diagrama polar de los errores de fase tras 100 celdas recorridas	103
3.20	Diagrama polar de los errores de fase tras 100 celdas recorridas	104
3.21	Coefficiente de reflexión para distintos órdenes de aproximación al operador de absorción	104
3.22	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 0.3λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TM. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ	105
3.23	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 0.3λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TE. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ	105
3.24	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 18.8λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TM. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ	106
3.25	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 18.8λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TE. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ	106
3.26	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 1.2λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ	107
3.27	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 5.02λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ	108
3.28	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 1.2λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ	108
3.29	Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 5.02λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ	109
3.30	Perfil de ala perfectamente conductora de 14.15λ de perímetro	109
3.31	Convergencia de la RCS monoestática del ala de la Figura (3.30) iluminada con polarización TM y ángulo $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 118$ celdas/ λ	110
3.32	Convergencia de la RCS monoestática del ala de la Figura (3.30) iluminada con polarización TE y ángulo $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 118$ celdas/ λ	110
3.33	Convergencia de la RCS ortoestática de un cilindro de sección cuadrada de perímetro 18.8λ iluminada a $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ	111
3.34	Cilindro conductor de sección circular y 50 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.598 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.12 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.2 \text{ nseg.}$ Resultados frecuenciales.	114
3.35	Cilindro conductor de sección circular. Comparación de la DCR para los tres métodos. Ancho de la ventana=2.5. (Ver la Figura (3.37)).	115
3.36	Cilindro conductor de sección circular y 50 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.598 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.12 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.2 \text{ nseg.}$ Resultados en el dominio del tiempo.	115

3.37 Cilindro conductor de sección circular y 10 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.12 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.6 \text{ m.}$, $\Delta t = 1 \text{ nseg.}$ Resultados frecuenciales. 116

3.38 Cilindro conductor de sección circular. Comparación de la DCR para los tres métodos. Ancho de la ventana=0.5. (Ver la Figura (3.37)). 117

3.39 Cilindro conductor de sección circular y 10 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.12 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.6 \text{ m.}$, $\Delta t = 1 \text{ nseg.}$ Resultados en el dominio del tiempo. 117

3.40 Cilindro conductor de sección circular y 5 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 5.98 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 1.2 \text{ m.}$, $\Delta t = 2 \text{ nseg.}$ Resultados frecuenciales. 118

3.41 Cilindro conductor de sección circular. Comparación de la DCR para los tres métodos. Ancho de la ventana=0.25. (Ver la Figura (3.37)). 119

3.42 Cilindro conductor de sección circular y 5 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 5.98 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 1.2 \text{ m.}$, $\Delta t = 2 \text{ nseg.}$ Resultados en el dominio del tiempo. 119

4.1 Caras y aristas de la superficie de truncamiento 128

4.2 Interpolación de una componente entre sus ocho vecinas 129

4.3 Incidencia de una onda sobre una arista en el eje Z 130

4.4 Deformación de las celdas cúbicas para conformar una superficie 133

4.5 Dispersión hacia atrás mediante una esfera perfectamente conductora de 3 m. de radio (14 celdas). $\Delta_{principal} = 3/14 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.357 \text{ nseg.}$ Iluminada con un pulso gaussiano $0.01 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 3.34 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$ Resultados frecuenciales. Comparación para distintos cocientes $F = \frac{\Delta_{principal}}{\Delta_{auxiliar}}$ 135

4.6 Celda tridimensional deformada 135

4.7 Campo lejano dispersado hacia atrás por una ojiva ($\theta = 120^\circ$, $D = 36.00$ celdas), iluminada con un pulso gaussiano $E_z(\vec{r}, t) = 0.01 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$. $\Delta = 1/60 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.028 \text{ nseg.}$ 137

4.8 Dispersión hacia atrás mediante una esfera perfectamente conductora de 3 m. de radio (14 celdas). $\Delta = 3/14 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.357 \text{ nseg.}$ Iluminada con un pulso gaussiano $0.01 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 3.34 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$ Resultados frecuenciales 140

4.9 Dispersión hacia adelante mediante una esfera perfectamente conductora de 3 m. de radio (14 celdas). $\Delta = 3/14 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.357 \text{ nseg.}$ Iluminada con un pulso gaussiano $0.01 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 3.34 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$ Resultados frecuenciales 141

4.10 Comparación de las DCR para distintos métodos. Ancho de la ventana=2. Ver Figuras (4.8 y 4.9) 142

4.11 Esfera perfectamente conductora. Iluminación monocromática. Barrido angular sobre el plano H. $f=1.88$ GHz (10 celdas/ λ) $R=0.22$ m. $=14/10 \lambda$. $\Delta = 1/20\pi$ m., $\Delta t = 0.026$ nseg.	142
4.12 Esfera perfectamente conductora. Iluminación monocromática. Barrido angular sobre el plano E. $f=1.88$ GHz (10 celdas/ λ) $R=0.22$ m. $=14/10 \lambda$. $\Delta = 1/20\pi$ m., $\Delta t = 0.026$ nseg.	143
4.13 Sección transversal de una ojiva de ángulo θ°	143
4.14 Dispersión hacia atrás mediante una ojiva conductora $\theta = 40^\circ$, $D = 9.64$ celdas. $\Delta = 1/60$ m., $\Delta t = 0.028$ nseg. iluminada con un pulso gaussiano $E_z = 0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8$ seg $^{-2}$. Resultados frecuenciales . . .	144
4.15 Comparación de la DCR para ambos métodos en 3D. Ojiva de 40 grados. (Ver Figura 4.14)	145
4.16 Dispersión hacia atrás mediante una ojiva conductora $\theta = 75^\circ$, $D = 8.27$ celdas. $\Delta = 0.05$ m., $\Delta t = 0.083$ nseg. iluminada con un pulso gaussiano $E_z = 0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8$ seg $^{-2}$. Resultados frecuenciales . . .	146
4.17 Comparación de la DCR para ambos métodos en 3D. Ojiva de 75 grados. (Ver Figura 4.16)	147
4.18 Dispersión hacia atrás mediante una ojiva conductora $\theta = 120^\circ$, $D = 15.00$ celdas. $\Delta = 0.05$ m., $\Delta t = 0.083$ nseg. iluminada con un pulso gaussiano $E_z = 0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8$ seg $^{-2}$. Resultados frecuenciales . . .	148
4.19 Comparación de la DCR para ambos métodos en 3D. Ojiva de 120 grados. (Ver Figura 4.18)	149

ABSTRACT

This work presents finite difference methods applied to the solution of Maxwell's equations. First, a revision of the difference schemes for the solution of systems of partial differential equations in an initial boundary value form, is done. Though the concepts are applied to hyperbolic systems, many of them are also useful for elliptic or parabolic problems.

The consistency, convergency and stability of a difference scheme, are defined and related via Lax theorem. Several criteria for the treatment of stability are studied: Von-Neumann, Courant-Friedrichs-Lewy and a matrix method which treats the whole initial boundary value problem, in a systematic basis. Extensions of these methods to three-dimensional problems is performed. The extension of the matrix method allows a complete treatment of asymmetric schemes.

The classical second order in time and space (Yee) and a second order in time and fourth order in space schemes, have been treated to study the interaction of an electromagnetic plane wave with a perfect electrically conducting scatterer. Also, the influence of the second order Mur radiation boundary conditions, on the accuracy and convergence of the RCS, is presented.

In order to model the scattering by curved surfaces in two dimensions, the Faraday law is applied to cells which are distorted and adapted to the surface of the scatterer. The appearance of a late time non physical growth of the solution in a number of cases, suggests possible instabilities of this treatment. Some corrections to this method are used to delay them. A simplified way to apply the Von-Neumann necessary condition for stability, is derived to explain this behaviour.

An extension of this method to three dimensions, based on a volume equation similar to Faraday's law, is proposed. The stability problem is studied in a very simplified manner, to deal with the instabilities numerically observed. Some corrections are made to delay them.

A method based on the subgridding of the main grid, both in two and three dimensions, is used in order to obtain the parameters needed by Faraday's law (contour and volume form) in the distorted cells. This provides a simple and automatic way of modeling. A ratio of four, between both grids, is showed to improve greatly the results,

when it is compared with the Yee algorithm.

Results for perfectly conducting cylinders and spheres validate the method. An ogive is also studied to show its behaviour with sharpen objects.

Capítulo 1

Justificación y precedentes

1.1 Introducción

En esta memoria se proponen nuevas aportaciones al método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD ¹) para la resolución de las ecuaciones de Maxwell y, en particular, a su aplicación para el cálculo de la sección eficaz radar (RCS ²) de estructuras conductoras arbitrarias. Los resultados aquí presentados son fruto parcial de la colaboración, dentro del Grupo de Electromagnetismo de la Universidad de Granada, en los proyectos de investigación *PRONTIC: Desarrollo y validación de métodos de cálculo numérico para la predicción y análisis de las características de los ecos de radar (RCS) y su reducción*, financiado por la DGT y coordinado por la empresa CASA y *Desarrollo y aplicación de métodos en el dominio del tiempo*, financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología.

La participación en el primero de los proyectos se concreta en el desarrollo de un conjunto de programas para el modelado y el cálculo de la RCS de blancos bidimensionales mediante el método FDTD, a partir de los cuales, mediante la extensión de su estructura, se han elaborado los programas tridimensionales posteriores. Estos programas modelan escalonadamente los blancos y hacen uso de una excitación armónica, modulada con la función escalón, cuya respuesta estacionaria es utilizada para calcular la RCS para una sola frecuencia. Dentro del segundo proyecto, los programas bi y tridimensionales han sido generalizados para la extracción de información puramente temporal y para la modelación de superficies con radios de curvatura del orden de la dimensión de una celda.

Este capítulo ofrece una primera perspectiva del tema de investigación abordado: describe sus antecedentes y sus objetivos y justifica la vigencia del mismo dentro del

¹Finite Difference Time Domain

²Radar Cross Section

panorama actual de la investigación sobre el método FDTD y sus aplicaciones.

1.2 Objetivos y desarrollo del trabajo

El método FDTD se basa en la discretización de las ecuaciones rotacionales de Maxwell mediante la aproximación de las derivadas por diferencias finitas centradas y el muestreo de los medios y de las componentes en las posiciones espaciales y temporales especificadas en (Yee, 1966). El esquema numérico resultante es explícito, del tipo del salto de la rana, y permite expresar los valores del campo electromagnético en un instante dado, y en todos los puntos del espacio problema, en función de los que tuvo dicho campo en los instantes inmediatamente anteriores. La relativa simplicidad del método le confiere una gran versatilidad y un gran potencial pero, al mismo tiempo, le marca un cierto número de limitaciones, algunas de las cuales motivan los objetivos de este trabajo:

- El método es exigente en memoria y tiempo de computación. Tanto el uno como el otro crecen con la resolución empleada (el número de celdas, de longitud Δ , por longitud de onda).
- Normalmente se emplea una aproximación de orden dos en los incrementos para las derivadas espaciales y temporales, lo que da como resultado una alta dispersión numérica de la fase para resoluciones bajas.
- El muestreo de los medios dentro de una red ortogonal y regular conduce a un modelado en escalera de los mismos que sólo permite representar curvaturas superficiales de orden superior al incremento espacial Δ y que, por consiguiente, requiere el uso de resoluciones elevadas.
- Por último, durante una iteración, los nuevos valores de los campos en cada punto del espacio del problema pueden almacenarse en el mismo lugar ocupado por los valores correspondientes al instante anterior, con lo que puede ahorrarse gran cantidad de memoria si no es necesario disponer de la historia temporal de cada punto. Esta circunstancia, junto con la fuerte dispersión para las componentes de frecuencia superior de la señal, hace que el mayor número de las aplicaciones se limite al estudio de la respuesta estacionaria a una iluminación armónica, lo que viene a convertir al método, que esencialmente está definido en el dominio del tiempo, en una variante más de los definidos en el dominio de la frecuencia.

De lo anterior se deduce que es importante buscar extensiones al FDTD que permitan emplear resoluciones inferiores para el modelado de medios, que sean menos dispersivos y que, sin requerimientos excesivos de memoria, faciliten el uso pleno del mismo como método en el dominio temporal. Es en este sentido en el que se han fijado los objetivos

de esta memoria, los cuales, como se muestra más adelante, se sitúan plenamente dentro del panorama actual de la investigación en este campo.

En el capítulo segundo se establecen los principios generales para el estudio de los esquemas en diferencias, especialmente en lo que respecta a su aplicación a ecuaciones hiperbólicas. Se abordan los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad de los esquemas, así como la dispersión numérica.

En el capítulo tercero se presentan los fundamentos de los programas bidimensionales y los resultados obtenidos con los mismos. Se utilizan aproximaciones de segundo orden en tiempo y espacio y de cuarto orden en espacio y segundo en tiempo, también se presentan técnicas de modelado, o *conformación*, basadas en la de *Contour Path* de (Jurgens *et al.*, 1992). Un análisis teórico y experimental de las posibles inestabilidades asociadas al proceso de conformación sugiere modificaciones del método de conformación que disminuyen dicha inestabilidad. Cabe también resaltar el tratamiento dado a la conversión de campo cercano a campo lejano en el dominio del tiempo para el cálculo de la RCS.

En el capítulo cuarto se trata el problema tridimensional y se propone una nueva interpretación del FDTD basada en la formulación de las ecuaciones de Maxwell como una relación entre las integrales de superficie y de volumen de los campos, que lleva a la extensión del método *Contour Path* a tres dimensiones. La verificación de este método se ha llevado a cabo mediante su aplicación a una familia de ojivas metálicas.

1.3 Antecedentes

El método FDTD genera una bibliografía numerosa y creciente de la cual sólo se da a continuación una referencia selectiva. Sin pretender ser exhaustivos, se prestará una mayor atención a las aportaciones más recientes y a aquellas directamente relacionadas con el objeto central de esta memoria.

Aunque la aplicación de diferencias finitas a las ecuaciones de Maxwell fue introducida a la comunidad electromagnética por Yee en (1966), los orígenes de la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante diferencias finitas se remontan a 1928 en un artículo de Courant, Friedrichs y Lewy (Courant *et al.*, 1928). No fue hasta quince años después, en tiempos de la Segunda Guerra Mundial, cuando se aplicó, con ayuda de las primeras computadoras, a problemas de dinámica de fluidos. Después de la guerra se amplió su campo a problemas de difusión y transporte de neutrones, reacciones termonucleares, radiación, etc.

Progresivamente el número de problemas abordado mediante diferencias finitas se ha ido expandiendo con el avance la microelectrónica, así como han ido apareciendo nuevos algoritmos basados muy a menudo más en la intuición que en fundamentos

matemáticos. Cuestiones como la convergencia, estabilidad, estimaciones de error, no han sido tratadas de forma paralela al desarrollo computacional de los métodos. Por ello, el segundo capítulo de esta memoria pretende dar una visión general de los métodos en diferencias aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, particularmente de tipo hiperbólico. Los conceptos allí expuestos están basados en los trabajos de Courant, Von-Neumann, Lax, Richtmyer y Morton, entre otros, durante los años 40 y 50 (Lax y Richtmyer, 1956) (Richtmyer y Morton, 1967). Textos básicos sobre esquemas en diferencias pueden hallarse en (Mitchell y Griffiths, 1980) (Smith, 1985) (Godunov y Ryabenkii, 1987). Otros textos más recientes recopilan trabajos de investigación matemáticos más elaborados (Dautray y Lions, 1984). Aunque el punto de partida clásico de algunos textos suele ser la solución de la ecuación parabólica unidimensional, los conceptos se han trasladado a ecuaciones hiperbólicas en una o más dimensiones.

Su aplicación en electromagnetismo computacional³, a partir del trabajo de Yee, se ha desarrollado unida a nombres como los de Taflove, Umashankar o Holland, entre otros: (Taflove y Brodwin, 1975b), (Holland, 1977), (Umashankar y Taflove, 1982), (Taflove y Umashankar, 1983), (Holland, 1983), (Taflove *et al.*, 1985). Trabajos de recopilación como los de (Taflove y Umashankar, 1987), (1990b) constituyen referencias tutoriales del método.

Desde su nacimiento, los esfuerzos en la investigación en la aplicación de los métodos en diferencias para resolver las ecuaciones de Maxwell, han seguido dos direcciones fundamentales:

- Mejoras, modificaciones y alternativas al método: refinamiento de los esquemas en diferencias, métodos próximos que superen algunas de sus limitaciones, búsqueda de condiciones de truncamiento de la región de cálculo, modelado.
- Aplicaciones a problemas concretos.

1.3.1 Mejoras, modificaciones y alternativas

Una de las ventajas principales de los métodos en diferencias es la de su sencillez y adaptabilidad al cálculo por ordenador. Los algoritmos explícitos presentan además la ventaja de ser secuenciales en el tiempo, y no precisar inversión matricial. Dentro de las mejoras del método es necesario destacar tres líneas de investigación:

- Tratamiento de la dispersión del método.
- Búsqueda de condiciones de truncamiento de la región de solución adecuadas.

³Una revisión de los métodos computacionales en electromagnetismo puede encontrarse en (Miller, 1988)

- Modelación de las características materiales electromagnéticas de objetos curvos de forma no-escalonada.

Acompañando estas líneas de trabajo, existe un esfuerzo constante por cimentar matemáticamente los avances que el motor del desarrollo de aplicaciones necesita.

Los tres puntos clave a tener en cuenta en la aplicación de esquemas en diferencias a problemas diferenciales son la consistencia, la convergencia y la estabilidad del método. Desde el trabajo (Lax y Ritchmyer, 1956), donde se prueba formalmente la relación entre estos conceptos, ha sido preocupación constante la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad de los esquemas y las modificaciones que se han ido sucediendo. La aplicación de esquemas uniformes a problemas de valores iniciales da lugar a métodos bien conocidos y de fácil puesta en práctica, como los de Von-Neumann (VN) y Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) ((Wilson, 1972), (Abarbanel y Gottlieb, 1979)).

Sin embargo cuando se trata de resolver problemas de valores iniciales y de frontera, el tratamiento de la estabilidad se torna matemáticamente más complicado, y es preciso esperar a los trabajos de (Kreiss, 1968) (1970) y al trabajo de Gustafsson, Kreiss y Sundström (Gustafsson *et al.*, 1972), para obtener criterios rigurosos del estudio de la estabilidad de estos problemas. Este último trabajo, que ha dado lugar al llamado método GKS, es de referencia obligada y en él se ha basado gran cantidad del trabajo posterior en este campo (ver (Goldberg y Tadmor, 1978) (1981) (1985) (1987), (Burns, 1978) y (Abarbanel y Gottlieb, 1979)). Siendo el método GKS un método de difícil aplicación, son de resaltar los artículos (Trefethen, 1982)(1983)(1984)(1986) en la línea de dar una interpretación física al mismo, en términos de velocidad de grupo. Una recopilación de distintos métodos para discretizar la ecuación de ondas, planteada como un problema de frontera y valores iniciales, y de su estabilidad, puede encontrarse en (Twizell y Tirmizi, 1985).

Tratamiento de la dispersión del método

Cada esquema en diferencias presenta unas características dispersivas, que se traducen en diferencias de fase de su solución respecto de la solución del problema diferencial. El orden de aproximación del esquema es fundamental para incrementar la eficiencia del método en este sentido. En (Zwas y Abarbanel, 1971), para el esquema de Lax-Wendroff ⁴, ó en (Oliger, 1974), ya se presentan algoritmos de orden superior aplicados a ecuaciones hiperbólicas. Recientemente (Fang, 1989) y (Deveze, 1992) han estudiado algoritmos centrados de cuarto orden en espacio y segundo o cuarto en tiempo, comparándolos con el algoritmo de Yee. En esta memoria se presentan resultados en dos dimensiones del algoritmo centrado de cuarto orden en espacio y segundo en tiempo.

⁴(Lax y Wendroff, 1960)

Las características dispersivas de otros esquemas, basados en una disposición espacial de los campos diferente a la de Yee, han sido tratadas en (Materdey Bao-Hung, 1993).

Otra vías de reducción de la dispersión se basan en la adición a las ecuaciones de un término difusivo ficticio (Omick y Castillo lo hacen en un algoritmo de un nudo (1993)), y corrigiendo además los errores de amplitud debidos a este término (Watanabe, 1987). La reducción de la dispersión se hace especialmente necesaria en el estudio en el dominio del tiempo de transitorios cortos.

Búsqueda de condiciones de truncamiento de la región de solución adecuadas

El problema de buscar condiciones de truncamiento estables del espacio de solución ha generado una bibliografía extensa, que continúa incrementándose. (Lindman, 1975), (Bayliss y Turkel, 1980), (Engquist y Majda, 1977), (Gottlieb y Turkel, 1978), (Engquist y Majda, 1979), (Bayliss y Turkel, 1980), (Mur, 1981), (Sloan, 1983), (Ziolkowsky *et al.*, 1983), (Liao *et al.*, 1984), (Keys, 1985), (Higdon, 1986), (Higdon, 1987), (Fang y Mei, 1989), (Canning, 1990), (Ramahi *et al.*, 1991), (Olivier, 1992), (Tirkas *et al.*, 1992), (Mei y Fang, 1992), (Betz y Mittra, 1993), (McInturff y Simon, 1993), (Railton *et al.*, 1993) son algunos de los trabajos involucrados en este estudio. En todos los casos es crítico el estudio de la estabilidad, para el cual el método GKS provee un forma sistemática.

Modelación de las características materiales electromagnéticas de objetos curvos de forma no-escalonada

Los casos de interés práctico de resolución de las ecuaciones de Maxwell, surgen de permitir variaciones de los coeficientes de las ecuaciones, a fin de estudiar su solución en presencia de medios materiales. Cuando se utilizan esquemas de paso constante, las variaciones de los mismos es permitida con la resolución de un paso espacial. Para una red cartesiana (con incrementos espaciales iguales en las tres direcciones), por ejemplo, esto implica que el objeto material es una colección de celdas cúbicas en las que están definidas las características del material. Si el objeto es curvo, este modelo puede conducir a soluciones erróneas. (Cangellaris y Wright, 1991) y (Holland, 1993) han estudiado el error asociado con el uso de una aproximación en escalera para modelar paredes conductoras.

Un gran esfuerzo se ha dedicado y se está dedicando a este problema: de un lado la utilización de métodos de volumen finito, que implican deformaciones complejas de las celdas espaciales y recuerdan en su planteamiento al de los elementos finitos⁵ y que han motivado trabajos donde se da una visión unificada de los métodos de diferencias, volúmenes y elementos finitos (Selmin, 1993), (Lahrman, 1992), (Vinokur, 1989)), y de

⁵En (Zienkiewicz, 1977) se halla una revisión del mismo.

otro lado métodos que intentan deformar localmente la red espacial para *conformar* el objeto, utilizando los algoritmos usuales lejos del mismo.

Una de las motivaciones de la presente memoria ha sido el desarrollo de algoritmos locales de conformación que sean fácilmente automatizables y que intenten mantener la simplicidad general del método. Por ello, y sin ánimo de ser exhaustivo, se recogen a continuación las principales aportaciones al problema existentes en la literatura.

Las primeras contribuciones, dentro de la primera línea citada más arriba, al tratamiento de dispersores curvos hay que buscarlas en un trabajo de Holland (1983). Su método está basado en un planteamiento covariante de las ecuaciones diferenciales de Maxwell, que permite expresarlas en coordenadas curvilíneas generalizadas no ortogonales. Basándose en este trabajo, (Fusco, 1990) y (Fusco *et al.*, 1991) plantean las ecuaciones de Maxwell diferenciales en coordenadas curvilíneas y estudian a problemas tanto bi como tridimensionales respectivamente. Diversas aplicaciones basadas en el algoritmo de Holland y extensiones a él, se pueden encontrar; entre ellas: (Lee *et al.*, 1992) generaliza el método de Holland y lo aplica a la modelación de discontinuidades en guías de onda, (Harms *et al.*, 1992) lo aplica a calcular las frecuencias de resonancia en cavidades cilíndricas, (Kashiwa *et al.*, 1994) trata antenas de microstrip en superficies curvas.

Madsen y Ziolkowski (1988), utilizando las formas integrales de las ecuaciones de Maxwell, rompieron con la necesidad de resolver las ecuaciones en sistemas de coordenadas donde existiese una métrica, imposición necesaria en el método de Holland. Holland *et al.* en (1991) retoman el método de Madsen y Ziolkowski aplicándolo a problemas bidimensionales y, aunque no hacen un estudio formal de la estabilidad del método, para redes ortogonales no encuentran inestabilidades si imponen el criterio CFL a cada celda. En (Madsen y Ziolkowski, 1990) se extiende el trabajo de (1988) a tres dimensiones y se comenta la aparición de un crecimiento no físico tardío de la evolución temporal, cuando la red es extremadamente distorsionada.

Estos métodos, que aprovechan en gran parte técnicas del campo de la física de fluidos computacional, encuentran continuación en trabajos como (Shankar *et al.*, 1989), (Shankar *et al.*, 1990) y (Mohammadian *et al.*, 1991) donde se describe un método de volúmenes finitos similar al primero de Holland, pero discretizando las ecuaciones diferenciales de Maxwell en forma de ley de conservación, mediante el algoritmo de Lax-Wendroff; aunque no se prueba formalmente, también se dan criterios de estabilidad basados en el jacobiano de la transformación de coordenadas.

En una línea próxima al del método de los elementos finitos, (Cangellaris *et al.*, 1987) presenta un método en dos dimensiones, aplicado tanto a conductores como a dieléctricos, basado en la discretización de las ecuaciones diferenciales de Maxwell en una red que se deforma gradualmente para conformar localmente al objeto. Básicamente,

discretiza las derivadas temporales mediante diferencias centradas y propone una expansión de las dependencias espaciales de los campos en suma de unas funciones base dadas. No se derivan condiciones de estabilidad, por ser difíciles para elementos irregulares, pero se afirma que ciertas configuraciones violan el criterio CFL. Un antecedente a este trabajo, pero utilizando redes globalmente distorsionadas, se encuentra en (Mei *et al.*, 1984).

Aparte de las complejidades intrínsecas, y de la dificultad de construir códigos de modelación automática, uno de los inconvenientes del uso de redes no estructuradas surge de las necesidades debidas al almacenamiento de los tensores métricos, los vectores directores y otras cantidades necesarias en cada nudo para hacer avanzar el algoritmo. Una solución intermedia se propone en (Yee *et al.*, 1992), que utiliza redes conformadas en la que se discretizan las ecuaciones en coordenadas curvilíneas (aunque es posible utilizar cualquier otro método) cerca del objeto, y la red usual para el resto de la región. Ambas redes se superponen y mediante interpolación, se especifican las condiciones de conexión entre ambas.

Otro problema de estos métodos es la dificultad de obtención de criterios rigurosos sobre su estabilidad, sobre todo para redes no estructuradas; en cuanto a los algoritmos en coordenadas curvilíneas, recientemente (Lee *et al.*, 1992) han reformulado el método original de Holland y han derivado las condiciones de estabilidad. También en (Ray, 1993) se estudia, mediante el criterio de VN, la estabilidad de los algoritmos en coordenadas no ortogonales, de modo simplificado suponiendo que todo el espacio está mallado con celdas deformadas de una determinada forma.

Otra aproximación diferente al problema de modelado de contornos curvos es la de utilizar los algoritmos para redes ortogonales, efectuando un submallado cerca del objeto, que de cuenta de las variaciones en su contorno, y una red menos densa en el resto. Mediante unas condiciones de conexión, se ensamblan ambas redes. Esta técnica de simple aplicación, cuya estabilidad fue estudiada mediante el método GKS, para el caso de refinamiento espacial, en (Ciment, 1971), y para el caso de refinamiento espacial y temporal, en (Berger, 1985), fue aplicada en electromagnetismo computacional en (Kunz y Simpson, 1981). Recientemente otros autores ((Li *et al.*, 1993), (Kim y Hoefler, 1990), (Zivanovic *et al.*, 1991) y (Prescott y Shuley, 1992) extendiendo el trabajo del anterior) la han aplicado a diversos problemas. Es de hacer notar el estudio hecho en (Trefethen, 1982) de la estabilidad de la conexión de redes de distinto paso. En este trabajo Trefethen explica en términos de *parásitos*, compatibles con la relación de dispersión, y que son excitados en las interfases que entre redes (y en entre medios), la aplicación de la teoría GKS a este problema. Un remedio para estos parásitos es propuesto en (Browning *et al.*, 1973) utilizando esquemas disipativos.

Finalmente, una solución simple al problema surge de deformar sólo las celdas

próximas al objeto adaptándolas a su superficie, aplicando el algoritmo usual para el resto de las celdas. En estas celdas deformadas los campos se sitúan en los mismos puntos que en las celdas sin deformar, y, para calcular los situados en el centro de las mismas, se hace uso de las leyes de Ampère y Faraday en forma integral. Este método ha sido utilizado en diversos problemas, donde para tener en cuenta el detalle del objeto (hilos, láminas, rendijas, etc.), se precisaría un mallado excesivamente fino, que, de ser utilizado en toda la red, haría inviable computacionalmente el método.

En (Umashankar *et al.*, 1987) se utiliza la ley de Faraday para estudiar el acoplamiento entre hilos y cavidades mediante un método híbrido EFIE-FDTD. En (Taflove *et al.*, 1988) se presenta formalmente el método bajo el nombre de *Contour Path*⁶ y es aplicado a dispersión mediante hilos rectos y a penetración a través de rendijas. Para ello se añade información adicional de la variación según $1/r$ de los campos en la cercanía del hilo, a fin de llevar a cabo la integración. En (Jurgens *et al.*, 1992) se da forma final al método en dos dimensiones y se introduce la llamada *aproximación de vecino más cercano* como un medio de evitar el cálculo de las corrientes y la utilización de la ley de Ampère. El método es aplicado a dispersión por conductores y dieléctricos.

En esta aproximación se han basado trabajos que tratan problemas donde se involucran hilos delgados: (Luebbers *et al.*, 1992a), (Luebbers *et al.*, 1993)); y láminas y rendijas delgadas: (Kats *et al.*, 1991) (radiación mediante antenas de bocina), (Tirkas y Demarest, 1991), (Maloney y Smith, 1992), (Shorthouse y Railton, 1992) (circuitos integrados de microondas, introduciendo información a priori de factores de corrección basados en el conocimiento de la forma de los campos cerca de la estructura), (Railton, 1993), etc. Los distintos métodos de tratar láminas delgadas utilizando variantes del método CP se resumen en el trabajo (Maloney y Smith, 1993a).

Recientemente se han propuesto generalizaciones a tres dimensiones: (Jurgens y Taflove, 1993) lo hace de forma directa y (González *et al.*, 1993) utiliza una forma volúmica de la ley de Faraday, en la que se utilizan celdas adaptadas a la superficie superponiéndose entre sí, a fin de evitar, en lo posible, la utilización de la aproximación de vecino más cercano. (Fang y Ren, 1993), también con esta finalidad, aplica el método CP localmente de una forma similar a como lo hace (Jurgens *et al.*, 1992), para modelar láminas planas de contorno alabeado en tres dimensiones. La diferencia radica en que, para ciertas celdas, es posible escoger dos deformaciones distintas, y evaluar la circulación de los campos eléctricos en su contorno. Con una de las circulaciones se calcula el campo magnético, y con la otra se despeja el campo eléctrico sobre alguno de los lados, que más tarde se precisará para el cálculo de otros campos magnéticos, sin necesidad de utilizar la antedicha aproximación.

Por último, es interesante citar el trabajo (Rappaport, 1991) que aplica las formas

⁶ Abreviadamente CP

integrales de las leyes de Ampère y Faraday a regiones malladas triangularmente.

En todos estos trabajos, es de hacer notar la ausencia de referencias específicas a la estabilidad del método.

1.3.2 Aplicaciones

El método ha sido, y continúa siendo actualmente, aplicado a numerosos casos prácticos, siendo éste el campo de más actividad en torno al mismo. Una revisión del método y de la bibliografía puede encontrarse en los trabajos de Taflove y Umashankar (1990b) y (1990a).

Uno de las aplicaciones más consolidadas es la de aplicación del método a dispersión y cálculo de RCS ((Umashankar y Taflove, 1982), (Furse *et al.*, 1990), (Tirkas y Demarest, 1991)). El estudio de la interacción y absorción de ondas electromagnéticas mediante tejidos vivos ha sido llevada a cabo en (Taflove y Brodwin, 1975a), (Sullivan *et al.*, 1987), (Sullivan, 1991), (Chen y Gandhi, 1991), (Shaw *et al.*, 1991) y (Dimbylow, 1991).

Medios dispersivos han sido tratados en (Luebbers *et al.*, 1990), (Luebbers *et al.*, 1991b), (Hunsberger *et al.*, 1992), (Gandhi *et al.*, 1993), (Petropulos, 1994).

Al análisis de circuitos de microondas se ha aplicado en (Gwarek, 1985), (1988), (Gwarek *et al.*, 1993), (Fang *et al.*, 1987), (Zhang *et al.*, 1988), (Sheen *et al.*, 1990), (Jarem, 1991), (Ko y Mittra, 1991), (Pereda *et al.*, 1993), (Feix *et al.*, 1992).

En antenas (Reineix y Jecko, 1989), (Maloney *et al.*, 1990), (Kats *et al.*, 1991), (Tirkas y Balanis, 1992), (Luebbers *et al.*, 1992a), (Luebbers *et al.*, 1993), (Maloney y Smith, 1993b), (Tirkas *et al.*, 1993).

En cuanto al estudio de medios anisótropos, al no ser el esquema de Yee adecuado dado el entremezclamiento de componentes que se produce, la búsqueda de otros algoritmos es punto fundamental de la investigación. En (Bi *et al.*, 1991) se utiliza una algoritmo bidimensional de dos nudos (todas las componentes eléctricas en un nudo y todas la magnéticas en otro) para resolver el problema. (Chen *et al.*, 1991) propone un tipo de celda compleja y relaciona el método con el TLM. (Omick y Castillo, 1993) utilizan un algoritmo de un solo nudo. (Schneider y Hudson, 1993) estudian medios anisótropos no diagonales. (Reinex *et al.*, 1992) analizan una guía bidimensional de ferrita. (Pereda *et al.*, 1993) tratan también ferritas magnetizadas mediante un algoritmo modificado. (Asi y Shafai, 1992) y (Xiao *et al.*, 1992) utilizan la red de Yee, en la que se han *colapsado* dos planos de un octante del cubo de Yee, para producir un algoritmo bidimensional que permite tratar problemas tridimensionales de guías homogéneas en la dirección de propagación, reduciéndolos a dos dimensiones. (Xiao y Vahldieck, 1993) extiende al anterior método y lo aplica a medios anisótropos con elementos no diagonales. (Materdey Bao-Hung, 1993)(1993a)(Materdey *et al.*, 1993b)(Materdey *et al.*, 1994) hace una estudio de diversos esquemas útiles en el tratamiento de guías anisótropas,

así como de su estabilidad y dispersión. En (Shlager *et al.*, 1993) se hace un estudio comparativo, entre otros, de los métodos de Bi y Chen citados anteriormente, en cuanto a sus necesidades computacionales, estabilidad y dispersión.

Capítulo 2

Esquemas en diferencias

2.1 Introducción

En este capítulo se van a tratar de forma general métodos basados en esquemas en diferencias finitas, aplicados a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Las ecuaciones rotacionales de Maxwell constituyen un caso particular de ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas que se puede resolver adecuadamente mediante esquemas en diferencias. Primeramente se presentarán los elementos básicos del desarrollo de esquemas en diferencias particularizados a una dimensión, y se introducirán los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad de un esquema en diferencias. Aunque el estudio se centrará en ecuaciones diferenciales hiperbólicas, una gran parte de los conceptos son directamente aplicables a ecuaciones parabólicas (por ejemplo la ecuación del calor) o ecuaciones elípticas (ecuación de Laplace).

Sea, primeramente, el problema unidimensional de encontrar una función vectorial de Q componentes $\mathbf{V} = (V_1, \dots, V_Q)$ con

$$V_i(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

solución de

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0 \quad , \quad \mathbf{V}(x, 0) = \mathbf{V}_0(x) \quad (2.1)$$

con A matriz de constantes reales cuadrada de $Q \times Q$. A este problema se le llama problema de valores iniciales o de Cauchy. El problema está bien planteado si admite solución única, dependiente de forma continua de los valores iniciales $\forall x, t$ ¹.

El sistema se dice hiperbólico si A es diagonalizable con autovalores reales (no necesariamente distintos entre sí) y tiene exactamente Q autovectores linealmente independientes, es decir, si existe una matriz P no singular (con determinante no nulo) tal

¹Equivalente a imponer que las soluciones sean estables en el sentido de Liapunov.

que

$$P^{-1}AP = D$$

donde D es una matriz diagonal cuyos elementos $D_{ii} = \lambda_i$ son los autovalores de A . En estas condiciones el sistema de ecuaciones (2.1) se desacopla en un conjunto de Q ecuaciones escalares, ya que

$$\frac{\partial PV}{\partial t} + PAP^{-1} \frac{\partial PV}{\partial x} = 0$$

si $U = PV$, el sistema se reduce a

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{con } U_i(x, 0) = U_{i_0}(x) \quad , \quad \forall i = 1, \dots, Q$$

Un ejemplo de ecuaciones hiperbólicas son las ecuaciones rotacionales de Maxwell en una dimensión, planteadas para medios lineales y en ausencia de fuentes. Redefiniendo

$$\tau = ct \quad , \quad \vec{B} = c\vec{B} \quad (2.2)$$

con c la velocidad de la luz en el medio, y poniendo

$$\mathbf{V} = (E_z, B_y)^T \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

queda

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} + A \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0$$

A es diagonalizable con autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ y una base de autovectores formada por $\{(1, 1)^T, (1, -1)^T\}$. La matriz P que diagonaliza a A es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y, por tanto

$$U_1 = E_z - B_y \quad , \quad U_2 = E_z + B_y$$

con lo que el sistema queda desacoplado en dos ecuaciones linealmente independientes

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial \tau} = 0$$

que admite solución única cuando se especifican $U_1(x, 0) = U_{1_0}(x)$ y $U_2(x, 0) = U_{2_0}(x)$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$ y $\forall \tau \in [0, \infty)$.

2.2 Solución general del problema de Cauchy

El problema (2.1) ha quedado, así, reducido al de la resolución de Q ecuaciones escalares de la forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad U(x, 0) = U_0(x) \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \quad , \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Se dedicará este apartado a la obtención de la solución general de esta ecuación. Para ello se considera el campo vectorial $\vec{E} = \hat{t} + a\hat{x} + 0\hat{U}$ cuyas líneas de campo son rectas de la forma

$$\begin{cases} x = at + C \\ U = C' \end{cases}$$

con C y C' constantes arbitrarias. A las superficies formadas por líneas vectoriales se las denomina superficies vectoriales, y, en general, se obtienen considerando el conjunto de puntos que pertenecen a una familia paramétrica de líneas vectoriales arbitraria, que depende de forma continua del parámetro. La superficie vectorial se caracteriza por un vector \vec{N} normal a la misma, que cumple $\vec{N} \cdot \vec{E} = 0$ en todo punto. Si la superficie vectorial es de la forma $U = U(x, t)$

$$\vec{N} = \frac{\partial U}{\partial t} \hat{t} + \frac{\partial U}{\partial x} \hat{x} + \hat{U} \quad , \quad \vec{N} \cdot \vec{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

luego la resolución de la ecuación diferencial original se reduce al cálculo de las superficies vectoriales. Una familia monoparamétrica de líneas que constituyen una superficie vectorial, se obtiene estableciendo una dependencia continua entre C y C' , $\phi(C, C') = 0 \implies \phi(x - at, U) = 0$, y, en general, cualquier función derivable arbitraria de la forma $U = U_0(x - at)$ es una superficie vectorial, y, en consecuencia, una solución de la ecuación diferencial. A la recta $x = at$ se la denomina *característica* de la ecuación diferencial.

Resumiendo, el problema de Cauchy

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

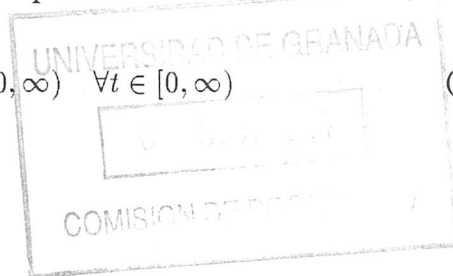
admite solución única $\forall x \in (-\infty, \infty)$, si se especifica en un instante de tiempo (por ejemplo, $t=0$) $U(x, 0) = U_0(x) \quad \forall x$ con $U_0(x)$ función derivable; tal solución vale

$$U(x, t) = U_0(x - at) \quad \forall x \in (-\infty, \infty) \quad , \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2.3)$$

2.3 Problema de valores iniciales y de frontera

Un problema más usual se tiene cuando la región espacial de cálculo está acotada, como, por ejemplo, en

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad \forall x \in [0, \infty) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2.4)$$



El problema puro de valores iniciales, con la condición inicial $U(x, 0) = U_0(x) \forall x \in [0, \infty)$ tendría por solución $U(x, t) = U_0(x - at)$. Esta solución sigue siendo válida para el problema (2.4) cuando $a < 0$. Si $a > 0$ la validez de esa solución se restringe a puntos (x, t) que cumplan $x - at \geq 0$, ya que la región de cálculo está acotada y los valores iniciales no están definidos para $x < at$. Es preciso, por tanto, añadir una condición de frontera en $x = 0$, por ejemplo del tipo $U(0, t) = U_b(t) \quad \forall t \geq 0$. Dada la simetría del problema, $U(x, t) = U_b(t - \frac{x}{a})$ será una solución del problema cuando $t - \frac{x}{a} \geq 0$. Por tanto, la solución general única del problema es

$$\begin{cases} U_0(x - at) & \text{si } x - at \geq 0 \\ U_b(t - \frac{x}{a}) & \text{si } x - at \leq 0 \end{cases}$$

donde se cumple, por continuidad, $U_0(0) = U_b(0)$.

Generalizando el resultado a un sistema hiperbólico desacoplado de la forma

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, Q, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \lambda_i > 0 & i = 1, \dots, k \\ \lambda_i < 0 & i = k + 1, \dots, Q \end{cases} \quad (2.5)$$

que tendrá solución única $\forall t \geq 0$ y $x_0 \leq x \leq x_1$ si se especifican k condiciones de frontera en $x = x_0$ de la forma

$$U_i(x = x_0, t) = U_{i_{b_0}}(t) \quad i = 1, \dots, k \quad (2.6)$$

y $Q - k$ condiciones de frontera en $x = x_1$ de la forma

$$U_i(x = x_1, t) = U_{i_{b_1}}(t) \quad i = k + 1, \dots, Q \quad (2.7)$$

además de Q condiciones iniciales

$$U_i(x, t = 0) = U_{i_0}(x) \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

Tal solución es

$$U_i(x, t) = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} U_{i_0}(x - \lambda_i t) \quad \text{si } x - \lambda_i t \geq x_0 \\ U_{i_{b_0}}(t - \frac{x}{\lambda_i}) \quad \text{si } x - \lambda_i t \leq x_0 \end{array} \right\} i = 1, \dots, k \quad (\lambda_i > 0) \\ \left. \begin{array}{l} U_{i_0}(x - \lambda_i t) \quad \text{si } x - \lambda_i t \leq x_1 \\ U_{i_{b_1}}(t - \frac{x}{\lambda_i}) \quad \text{si } x - \lambda_i t \geq x_1 \end{array} \right\} i = k + 1, \dots, Q \quad (\lambda_i < 0)$$

A este tipo de problema se le denomina problema de valores iniciales y de frontera.

2.4 Esquemas en diferencias

En este apartado se hará una introducción a la solución numérica de un problema unidimensional de condiciones iniciales y de frontera mediante el método de diferencias

finitas. El punto de partida será la búsqueda de una solución numérica que aproxime a la solución exacta de la ecuación (ya desacoplada)

$$L(U(x, t)) \equiv \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad , \quad \forall x \in [0, X] \quad (2.8)$$

con condiciones iniciales $U(x, 0) = U_0(x)$, y de contorno expresadas operacionalmente de forma general como

$$\{\mathcal{B}_0(U(x))\}_{x=0} = 0 \quad , \quad \{\mathcal{B}_1(U(x))\}_{x=X} = 0$$

donde \mathcal{B}_0 y \mathcal{B}_1 son los operadores que describen las condiciones impuestas en la frontera². Por ejemplo, las condiciones del tipo (2.6) y (2.7) se dicen de tipo Dirichlet. Si son del tipo

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x = 0, t) = \mathcal{U}_{b_0}(t) \quad \frac{\partial U}{\partial x}(x = X, t) = \mathcal{U}_{b_1}(t)$$

se denominan de tipo Neumann³.

Se trata, pues, de describir la simulación numérica de este problema, para lo cual se harán las siguientes definiciones previas.

Definición 1 (Aproximación de orden n de una función) Una función real $F(x)$ se dice aproximada mediante $F_{ap}(x)$ en x hasta orden n , cuando

$$|F(x) - F_{ap}(x)| \leq k\Delta^n$$

con k constante independiente de Δ . También se suele notar mediante

$$|F(x) - F_{ap}(x)| = O(\Delta^n)$$

Definición 2 (Red espacio temporal) Para resolver (2.8) numéricamente se introduce una red espacio-temporal formada por el conjunto de nudos

$$(m, n) \equiv (x = m\Delta, t = n\Delta t) \quad , \quad m \in [0, M] \quad , \quad n \in [0, \infty)$$

La solución exacta de la ecuación diferencial en el nudo (m, n) se notará como $U^n(m)$.

Definición 3 (Esquema en diferencias) Se denominará esquema en diferencias de la ecuación diferencial $L(U(x, t)) = 0$ a una ecuación

$$L_{ap}(u^n(m)) \equiv L_{ap}(u^n(m), u^{n-i}(m')) = 0 \quad , \quad i = 1 \dots p \quad , \quad m' = 0, \dots, M$$

cuya solución exacta $u^n(m)$ en cada punto (m, n) de la red aproxima a la correspondiente de la ecuación diferencial⁴.

²Por simplicidad se han puesto los puntos frontera en $x_0 = 0$ y $x_1 = X$

³Para construir la solución general del problema de Cauchy, con estas condiciones, ver (Courant y Hilbert, 1962)

⁴En lo sucesivo se considerarán sólo relaciones lineales

Definición 4 (Esquemas explícitos e implícitos) Si el esquema permite obtener $u^n(m)$ como una función explícita de $u^{n-i}(m')$ se dice explícito, e implícito en caso contrario.

En adelante, salvo que se diga lo contrario, se utilizarán esquemas explícitos.

Definición 5 (Orden de aproximación de un esquema) Un esquema en diferencias

$$L_{ap}(u^n(m)) = 0$$

se dice que es de orden q_1 espacial y q_2 temporal si

$$T^n(m) \equiv L_{ap}(U^n(m)) = O(\Delta^{q_1} + \Delta t^{q_2})$$

donde $U^n(m)$ es la solución exacta de la ecuación diferencial en $(x = m\Delta, t = n\Delta t)$. $T^n(m)$ recibe el nombre de error de truncamiento local.

Definición 6 (Esquema a $p + 1$ niveles) Es aquel que permite obtener $u^n(m)$ a partir de $u^{n-i}(m')$ con $i = 1, \dots, p$.

Definición 7 (Operador Adelanto)

$$A_{p\alpha} \cdot F(\alpha, \beta, \dots) = F(\alpha + p\Delta\alpha, \beta, \dots) \quad (2.9)$$

Definición 8 (Operador Retraso)

$$R_{p\alpha} \cdot F(\alpha, \beta, \dots) = F(\alpha - p\Delta\alpha, \beta, \dots) \quad (2.10)$$

Cualquier operación que aparece en un esquema en diferencias involucra la evaluación de funciones en puntos diversos de la red espacio-temporal, y, por tanto, puede ser puesta como combinación lineal de los operadores *retraso* y *adelanto* (Materdey Bao-Hung, 1993). Estos operadores básicos dan lugar a su vez a los siguientes:

Definición 9 (Diferenciación centrada de segundo orden)

$$\begin{aligned} D_{p\alpha} \cdot F(\alpha, \beta, \dots) &\equiv \frac{1}{2p\Delta\alpha} (A_{p\alpha} - R_{p\alpha}) \cdot F(\alpha, \beta, \dots) \\ &= \frac{1}{2p\Delta\alpha} (F(\alpha + p\Delta\alpha, \beta, \dots) - F(\alpha - p\Delta\alpha, \beta, \dots)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Definición 10 (Promedio centrado de segundo orden)

$$\begin{aligned} P_{p\alpha} F(\alpha, \beta, \dots) &\equiv \frac{1}{2} (A_{p\alpha} + R_{p\alpha}) \cdot F(\alpha, \beta, \dots) \\ &= \frac{1}{2} (F(\alpha + p\Delta\alpha, \beta, \dots) + F(\alpha - p\Delta\alpha, \beta, \dots)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Estos operadores aproximan hasta segundo orden en $p\Delta\alpha$ (si $p \neq 0$) a los operadores derivación e identidad analíticos. En particular $P_{0\alpha}$ es el operador identidad.

La resolución numérica de (2.8) implica la simulación de dicha ecuación mediante un esquema numérico consistente en la ecuación

$$(\mathcal{D}_t + a\mathcal{D}_x) \cdot u^n(m) = 0 \quad \forall m \in [0, M] \quad , \quad n \in [0, \infty) \quad (2.13)$$

donde \mathcal{D}_t y \mathcal{D}_x son, en general, operadores numéricos de derivación (por ejemplo $\mathcal{D}_t = D_{1t}$ y $\mathcal{D}_x = D_{1x}$). En lo sucesivo se hará uso preferentemente de los operadores centrados, aunque para conformar superficies será conveniente recurrir a operadores no centrados.

Un método muy general de obtener esquemas numéricos a diferentes niveles y diferentes órdenes de aproximación se basa en el uso del desarrollo en serie de Taylor (puede también utilizarse otro tipo de desarrollos como el de fracciones de Padé).

Haciendo uso de la notación abreviada

$$\frac{\partial^q U^n(m)}{\partial \alpha^q} \equiv \left. \frac{\partial^q U(x, t)}{\partial \alpha^q} \right|_{\substack{x=m\Delta \\ t=n\Delta t}}$$

puede escribirse

$$U^{n+1}(m) = U^n(m) + \Delta \frac{\partial U^n(m)}{\partial t} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 U^n(m)}{\partial t^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 U^{n+\theta}(m)}{\partial t^3} \quad (2.14)$$

y

$$U^{n-1}(m) = U^n(m) - \Delta \frac{\partial U^n(m)}{\partial t} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{\partial^2 U^n(m)}{\partial t^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{\partial^3 U^{n-\theta'}(m)}{\partial t^3} \quad (2.15)$$

con $\theta, \theta' \in (0, 1)$.

Con los dos primeros términos de (2.14), y teniendo en cuenta (2.8), se tiene una aproximación a la derivada temporal de primer orden

$$\begin{aligned} U^{n+1}(m) &= U^n(m) + \Delta t \frac{\partial U^n(m)}{\partial t} + R_2 \\ &= U^n(m) - a\Delta t \frac{\partial U^n(m)}{\partial x} + R_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

con

$$R_2 = \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 U^{n+\theta}(m)}{\partial t^2}$$

y $\theta \in (0, 1)$.

Restando miembro a miembro (2.14) y (2.15) se obtiene una aproximación de segundo orden

$$\begin{aligned} U^{n+1}(m) &= U^{n-1}(m) + 2\Delta t \frac{\partial U^n(m)}{\partial t} + R_3 \\ &= U^{n-1}(m) - 2a\Delta t \frac{\partial U^n(m)}{\partial x} + R_3 \end{aligned} \quad (2.17)$$

con

$$R_3 = \frac{2}{6} \Delta t^3 \left(\frac{\partial^3 U^{n+\theta}(m)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 U^{n-\theta'}(m)}{\partial t^3} \right)$$

y $\theta, \theta' \in (0, 1)$.

Con los tres primeros términos, la derivada temporal resulta aproximada hasta cuarto orden

$$U^{n+1}(m) = U^{n-1}(m) + 2\Delta t \frac{\partial U^n(m)}{\partial t} + \frac{\Delta t^3}{3} \frac{\partial^3 U^n(m)}{\partial t^3} + R_5 \quad (2.18)$$

con

$$R_5 = \frac{1}{60} \Delta t^5 \left(\frac{\partial^5 U^{n+\theta}(m)}{\partial t^5} - \frac{\partial^5 U^{n-\theta'}(m)}{\partial t^5} \right)$$

Dada la homogeneidad del problema de Cauchy, se prueba por inducción que, si se cumple la Ec. (2.8), también se cumple

$$\frac{\partial^n U}{\partial t^n} + (-1)^{n+1} a^n \frac{\partial^n U}{\partial x^n} = 0 \quad (2.19)$$

con lo que (2.18) queda también como

$$U^{n+1}(m) = U^{n-1}(m) - 2a\Delta t \frac{\partial U^n(m)}{\partial x} - \frac{a^3 \Delta t^3}{3} \frac{\partial^3 U^n(m)}{\partial x^3} + R_5 \quad (2.20)$$

Este método da una forma sistemática de obtener un orden de aproximación temporal arbitrario, mediante derivadas espaciales sucesivas gracias a (2.19). Estos órdenes de aproximación mayores a las derivadas temporales podrían tenerse tomando más términos en la expansión de la derivada temporal pero, dado que en la simulación computacional se itera sobre la variable temporal, esto último supondría almacenar tantos más instantes temporales hacia atrás, para toda la región espacial de cálculo, cuantos más términos temporales se tomen, con los consiguientes problemas de almacenamiento en memoria. Por el contrario, al ser preciso almacenar en cada instante el valor de U en todas las posiciones, no supone requerimiento extra de memoria el utilizar un mayor número de valores espaciales de U para obtener órdenes de aproximación mayores a las derivadas temporales.

Dependiendo del orden de aproximación de las derivadas espaciales en (2.16), (2.17), (2.20) se obtienen distintas aproximaciones a la ecuación diferencial original. He aquí algunos.

El operador *Diferenciación centrada de segundo orden* definido en (2.11) aplicado a la derivación espacial de funciones espacio-temporales, cumple

$$\begin{aligned} D_{px} \cdot F(x, t) &= \frac{\partial F(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{3!} p^2 \Delta^2 \frac{\partial^3 F(x, t)}{\partial x^3} + \dots \\ &+ \frac{1}{(2n-1)!} p^{2n-2} \Delta^{2n-2} \frac{\partial^{2n-1} F(x, t)}{\partial x^{2n-1}} + R_{2n+1} \end{aligned} \quad (2.21)$$

con

$$R_{2n+1} = \frac{1}{2(2n+1)!} p^{2n} \Delta^{2n} \left(\frac{\partial^{2n+1} F(x+\theta, t)}{\partial x^{2n+1}} - \frac{\partial^{2n+1} F(x+\theta', t)}{\partial x^{2n+1}} \right)$$

y

$$\theta \in (0, p\Delta) \quad , \quad \theta' \in (-p\Delta, 0)$$

Por tanto $D_{px} \cdot F(x, t)$ aproxima hasta segundo orden a la primera derivada espacial de $F(x, t)$. Mediante combinaciones lineales de operadores en diferencias centradas es posible obtener órdenes de aproximación superiores; por ejemplo

$$\left(\frac{9}{8} D_{1x} - \frac{1}{8} D_{3x} \right) \cdot F(x, t) \quad (2.22)$$

constituye una aproximación de cuarto orden de $\frac{\partial F(x, t)}{\partial x}$

Análogamente,

$$(D_{1x} \circ D_{1x}) \cdot F(x, t)$$

aproxima a hasta segundo orden a $\frac{\partial^2 F(x, t)}{\partial x^2}$ y

$$(D_{1x} \circ D_{1x} \circ D_{1x}) \cdot F(x, t) = \frac{3}{4\Delta^2} (D_{3x} - D_{1x}) \cdot F(x, t) \quad (2.23)$$

es una aproximación de segundo orden de $\frac{\partial^3 F(x, t)}{\partial x^3}$.

Introduciendo en la ecuación diferencial las anteriores aproximaciones, despreciando los restos R_α y substituyendo las variables en mayúscula por minúsculas, quedan, lo que se ha llamado propiamente, esquemas en diferencias de la ecuación original, cuya solución aproximará en mayor o menor medida, según se estudiará posteriormente, a la solución analítica. He aquí algunos esquemas útiles a dos y a tres niveles, que se usarán a lo largo de esta memoria:

- Esquema hacia adelante de primer orden temporal y centrado en espacio de segundo orden

$$u^{n+1}(m) = u^n(m) - a\Delta t D_{1x} \cdot u^n(m)$$

- Esquema centrado de segundo orden en tiempo y en espacio ⁵:

$$u^{n+1}(m) = u^{n-1}(m) - 2a\Delta t D_{1x} \cdot u^n(m) \quad (2.24)$$

- Esquema centrado de segundo orden en tiempo y cuarto en espacio:

$$u^{n+1}(m) = u^{n-1}(m) - 2a\Delta t \left(\frac{9}{8} D_{1x} - \frac{1}{8} D_{3x} \right) \cdot u^n(m)$$

⁵ Este esquema también se conoce propiamente como del salto de la rana

- Esquema centrado de cuarto orden en tiempo y cuarto en espacio:

$$u^{n+1}(m) = u^{n-1}(m) - 2a\Delta t \left(\frac{9}{8}D_{1x} - \frac{1}{8}D_{3x} \right) \cdot u^n(m) - \frac{a^3\Delta t^3}{4\Delta^2} (D_{3x} - D_{1x}) \cdot u^n(m)$$

Dado que, para que un esquema a $p + 1$ (con $p \geq 2$) niveles se ‘automantenga’, es necesario especificar $u^0(m), u^1(m), \dots, u^{p-1}(m) \forall m$, y la ecuación diferencial sólo permite obtener $u^0(m) = U^0(m)$, se necesita obtener el resto de alguna otra forma. Un método puede ser obtener $u^1(m)$ a partir de $u^0(m)$ mediante un esquema a dos niveles, $u^2(m)$ mediante un esquema a tres niveles, ..., $u^{p-1}(m)$ mediante un esquema a p niveles.

2.5 Consistencia, convergencia y estabilidad

Cuando se utilizan ecuaciones en diferencias como substitución de un problema diferencial, es indispensable conocer:

- Si la ecuación en diferencias realmente aproxima al problema diferencial cuando los incrementos disminuyen (*consistencia*).
- Si la solución de las ecuaciones en diferencias converge, cuando los incrementos disminuyen, a la solución del problema diferencial (*convergencia*).
- Si una perturbación acotada de las condiciones iniciales del proceso numérico produce variaciones acotadas en la solución del mismo. (*estabilidad*).

Los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad están estrechamente ligados a través del teorema de equivalencia de Lax, que se enunciará en esta sección.

Definición 11 (Consistencia) *Un esquema en diferencias es consistente con un problema diferencial cuando el error de truncamiento local se anula en el límite de incrementos nulos. Como quiera que este límite depende de cómo se hagan tender los mismos a cero, es preciso establecer una ligadura entre los mismos.*

En la práctica esta ligadura dará un procedimiento de refinado de la discretización a través del cual se pretenderá obtener esquemas que cada vez aproximen mejor al problema inicial. Por ejemplo el esquema en diferencias del salto de la rana Ec. (2.24) para la solución del problema de Cauchy (2.8), puede expresarse de la forma

$$\frac{u^{n+1}(m) - u^{n-1}(m)}{\Delta t} + a \frac{u^n(m+1) - u^n(m-1)}{\Delta} = 0$$

Sustituyendo $u^n(m)$ por $U^n(m)$ y desarrollando $U^{n\pm 1}(m \pm 1)$ alrededor de $U^n(m)$ se obtiene el error de truncamiento local

$$T^n(m) = \frac{1}{6}\Delta t^2 \left(\frac{\partial^3 U^{n+\theta_1}(m)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 U^{n-\theta_2}(m)}{\partial t^3} \right) + \frac{a}{6}\Delta^2 \left(\frac{\partial^3 U^n(m+\theta_3)}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 U^n(m-\theta_4)}{\partial x^3} \right)$$

con

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in (0, 1)$$

en este caso para cualquier ligadura $\Delta = f(\Delta t)$ con la condición

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(\Delta t) = \Delta = 0$$

el esquema es consistente con la ecuación diferencial

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta = f(\Delta t) = 0 \rightarrow 0}} T^n(m) = 0$$

Si la consistencia viene definida mediante la anulación del error de truncamiento local al refinar indefinidamente la red, la convergencia se relaciona con la tendencia de la solución numérica a la exacta en dicho proceso de refinamiento.

Definición 12 (Error de discretización) Si $U^n(m)$ es la solución exacta de la ecuación diferencial y $u^n(m)$ la de la ecuación en diferencias, a la diferencia

$$e^n(m) \equiv U^n(m) - u^n(m)$$

se le llama error de discretización.

Definición 13 (Convergencia) Un esquema se dice convergente si, haciendo tender Δ y Δt hacia cero simultáneamente ligados por $\Delta = f(\Delta t)$, de tal modo que cuando $n \rightarrow \infty$ y $m \rightarrow \infty$, $m\Delta = x$ y $n\Delta t = t$, el error de discretización tienda a cero.

Por ejemplo, para el esquema de salto de la rana, el error de truncamiento local está relacionado con el discretización mediante

$$e^{n+1}(m) = -\Delta t T^n(m) + e^{n-1}(m) - \frac{a\Delta t}{\Delta} (e^n(m+1) - e^n(m-1))$$

Dado que, para que un esquema a tres niveles se 'automantenga', es necesario hacerlo a partir de $u^0(m)$ y $u^1(m) \forall m$, y el problema de valores iniciales sólo proporciona $u^0(m) = U^0(m)$, se puede obtener $u^1(m)$ a partir de $u^0(m)$ mediante un esquema a dos niveles. En este caso el error de discretización será:

$$e^0(m) = 0 \quad , \quad e^1(m) \neq 0 \quad \forall m$$

y en general, planteando la relación de recurrencia $\forall n \geq 2$

$$\begin{aligned} e^n(m) &= \Delta t \sum_{i=0}^{n-2} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta} \right)^i \left(\sum_{j=-i, -i+2, \dots, i-2, i} \left(\sum_{\substack{k=n-1-i, n-1-i-2, \dots \\ k \geq 1}} \alpha_{ijk} T^k(m+j) \right) \right) \\ &+ \sum_{\substack{i=n-1, n-3, \dots \\ i \geq 0}} \left(\frac{a\Delta t}{\Delta} \right)^i \left(\sum_{j=-i, -i+2, \dots, i-2, i} \left(\beta_{ij} e^1(m+j) \right) \right) \end{aligned}$$

con α_{ijk} y β_{ij} constantes independientes de los incrementos. Una condición necesaria para que la serie $e^n(m)$ converja a cero es que su término general también lo haga, lo cual sucede al hacer tender Δ y Δt ligados linealmente hacia cero (manteniendo $n\Delta t = t$ y $m\Delta = x$) de modo que

$$r \equiv \frac{a\Delta t}{\Delta} \leq 1$$

Por tanto, el esquema del salto de la rana de segundo orden temporal y espacial es incondicionalmente consistente con el problema diferencial, pero condicionalmente convergente.

2.5.1 Estabilidad

El concepto de estabilidad puede ser abordado desde distintas perspectivas. Aquí se hará uso de dos definiciones distintas: una de ellas traducción directa de la de Liapunov (Elsgolts, 1983) para las soluciones de ecuaciones diferenciales, y otra debida a Lax asociada a la consistencia de la ecuación en diferencias con la ecuación diferencial.

La estabilidad en el sentido de Liapunov impone que si se obtiene una solución de la ecuación diferencial para unas condiciones iniciales dadas, variaciones continuas en las condiciones iniciales, deben producir variaciones también continuas en las soluciones $\forall t$.

Definición 14 (Estabilidad) *Un esquema en diferencias*

$$L_{ap}(u^n(m)) = 0 \quad m = 0, \dots, M \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty$$

con las condiciones iniciales y de frontera

$$u^0(m) = u_0(m) \quad m = 0, \dots, M \quad \{B_0 u^n(m)\}_{m=0} = 0 \quad \{B_1 u^n(m)\}_{m=M} = 0$$

es estable si, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$, tal que la solución del esquema en diferencias con condiciones iniciales perturbadas $u_0^{*n}(m)$, $u^{*n}(m)$ cumple

$$|u^n(m) - u^{*n}(m)| < \epsilon \quad m = 0, \dots, M \quad , \quad n = 1, \dots, \infty$$

siempre que las condiciones iniciales cumplan

$$|u_0(m) - u_0^*(m)| < \delta(\epsilon) \quad m = 0, \dots, M$$

Definición 15 (Estabilidad en el límite) *Se dice que un esquema es estable en el límite cuando, para cualquier perturbación de las condiciones iniciales se cumple*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u^n(m) - u^{*n}(m)| = 0$$

Definición 16 (Estabilidad asintótica) *Un esquema estable se dirá asintóticamente estable cuando sea estable en el límite.*

Nótese que un esquema estable en el límite no es necesariamente estable.

Es importante observar que, a priori, el concepto de estabilidad se puede plantear directamente sobre cualquier ecuación en diferencias. Lax y Richtmyer, a efectos de relacionar la estabilidad con la convergencia, la definen del siguiente modo:

Definición 17 (Estabilidad (Lax–Richtmyer)) *Un esquema en diferencias es estable si haciendo tender $\Delta t, \Delta \rightarrow 0$ ligados mediante una relación dada, y fijados $n\Delta t$ y $m\Delta$ (haciendo, por tanto, $n, m \rightarrow \infty$), la solución del esquema $u^n(m)$ se mantiene acotada.*

En particular si la solución de un esquema se mantiene acotada cuando $\forall n = 1, \dots, \infty$ para cualesquiera condiciones iniciales, también lo estará la diferencia entre dos soluciones para condiciones iniciales distintas. Por tanto la estabilidad en el sentido de Lax implica la estabilidad en el sentido de la definición (14) para cada $\Delta, \Delta t$ ligados, y, además, permite enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1 (Lax) *Dado un problema de Cauchy de frontera y valores iniciales bien planteado, y un esquema en diferencias que lo aproxime consistente con él, el esquema es convergente si, y sólo si, es estable en el sentido de Lax.*

(La demostración de este teorema puede encontrarse en (Richtmyer y Morton, 1967)).

El resto de este apartado se dedicará a presentar condiciones necesarias y/o suficientes de estabilidad de un esquema en diferencias, en el sentido de la definición (14).

Sea un problema de frontera y valores iniciales típico en el que las condiciones de contorno se establecen fijando los valores de las variables en la misma. Cualquier esquema a dos niveles que aproxime al problema diferencial puede ponerse formalmente como

$$\underline{u}^{n+1} = \tilde{G}\underline{u}^n + \underline{b}^n \quad (2.25)$$

con \underline{u}^n vector columna de $M - 1$ componentes

$$\underline{u}^n = (u^n(1), \dots, u^n(M - 1))^T \quad (2.26)$$

supuesto el intervalo espacial de solución mallado con una red de $M + 1$ nudos numerados de 0 a M . La matriz \tilde{G} cuadrada de $(M - 1) \times (M - 1)$ elementos es la matriz

de evolución, y \underline{b}^n un vector columna de $M - 1$ elementos con ceros y las condiciones de frontera $u^n(0)$ y $u^n(M)$ necesarias para completar el esquema (condiciones tipo Dirichlet). Si en (2.25) los valores en la frontera $u^n(0)$, $u^n(M)$ se obtuvieron en función de los valores de las variables en puntos interiores, como es usual en la simulación de problemas abiertos mediante condiciones de frontera en derivadas (condiciones tipo Neumann), la matriz \underline{b}^n se incluiría dentro de \tilde{G} . Se construiría una nueva matriz columna \underline{u}^n de orden $(M + 1)$ que incluyera los valores $u^n(0)$, $u^n(M)$ y su obtención a partir de los valores interiores se reflejaría en la nueva matriz \tilde{G} de orden $(M + 1)$.

Los esquemas en diferencias implícitos

$$\tilde{B}\underline{u}^{n+1} = \tilde{F}\underline{u}^n + \underline{b}^n \quad (2.27)$$

con \tilde{B} matriz de $(M - 1) \times (M - 1)$, se pueden dejar en la forma (2.26) multiplicando ambos miembros de (2.27) por \tilde{B}^{-1} , con lo que $\tilde{G} = \tilde{B}^{-1}\tilde{F}$

El tratamiento de los esquemas explícitos a más de un nivel

$$\underline{u}^{n+1} = \tilde{F}\underline{u}^n + \tilde{H}\underline{u}^{n-1} + \underline{b}^n$$

puede reducirse al de dos niveles, redefiniendo

$$\underline{\underline{u}}^n = (\underline{u}^n, \underline{u}^{n-1})^T, \quad \underline{\underline{b}}^n = (\underline{b}^n, \underline{0})^T, \quad \tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{F} & \tilde{H} \\ \tilde{I} & \tilde{0} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

de la forma

$$\underline{\underline{u}}^{n+1} = \tilde{G}\underline{\underline{u}}^n + \underline{\underline{b}}^n$$

Por ejemplo, el esquema del salto de la rana, se puede poner

$$\begin{pmatrix} u^{n+1}(1) \\ u^{n+1}(2) \\ \vdots \\ u^{n+1}(M-2) \\ u^{n+1}(M-1) \\ u^n(1) \\ u^n(2) \\ \vdots \\ u^n(M-2) \\ u^n(M-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F} & \tilde{I} \\ \tilde{I} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^n(1) \\ u^n(2) \\ \vdots \\ u^n(M-2) \\ u^n(M-1) \\ u^{n-1}(1) \\ u^{n-1}(2) \\ \vdots \\ u^{n-1}(M-2) \\ u^{n-1}(M-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u^n(0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u^n(M-1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con \tilde{I} matriz identidad de orden $(M - 1)$, $\tilde{0}$ matriz nula de orden $(M - 1)$ y

$$\tilde{F} = -r \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 & 1 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 0 & \end{pmatrix}_{(M-1) \times (M-1)}$$

y

$$r = \frac{a\Delta t}{\Delta}$$

Volviendo a (2.25)

$$\underline{u}^{n+1} = \tilde{G}(\tilde{G}\underline{u}^{n-1} + \underline{b}^{n-1}) + \underline{b}^n = \dots = \tilde{G}^{n+1}\underline{u}^0 + \underline{b}^n + \tilde{G}\underline{b}^{n-1} + \dots + \tilde{G}^n\underline{b}^0$$

con \underline{u}^0 vector de valores iniciales en los puntos interiores, y \underline{b}^0 vector de valores iniciales en la frontera. Si se perturban las condiciones iniciales

$$\underline{u}^{*0} = \underline{u}^0 - \underline{p}^0$$

la nueva solución es

$$\underline{u}^{*n+1} = \underline{u}^{n+1} - \tilde{G}^{n+1}\underline{p}^0$$

La definición (14) de estabilidad se traduce en condiciones algebraicas sobre la matriz de evolución \tilde{G} ya que, para que de la acotación de las condiciones iniciales mediante algún $\delta(\epsilon)$

$$\|\underline{u}^0 - \underline{u}^{*0}\| = \|\underline{p}^0\| < \delta(\epsilon)$$

se deduzca la acotación de la solución mediante algún ϵ escogido arbitrariamente

$$\|\underline{u}^n - \underline{u}^{*n}\| = \|\tilde{G}^n\underline{p}^0\| < \epsilon \quad , \quad n = 1, \dots, \infty$$

debe existir un C tal que $\|\tilde{G}^n\underline{p}^0\| \leq C \forall n$, para cualquier norma $\|\cdot\|$ que se defina sobre un espacio lineal $M - 1$ dimensional \mathcal{V} .

Dado que cualquier perturbación sobre las condiciones iniciales se propaga de análogo modo al de \underline{u}^0 , esta condición equivale a imponer que el proceso de solución limite el crecimiento de las componentes de las condiciones iniciales.

Este es el punto de partida de un método riguroso de tratar la estabilidad de problemas de frontera y valores iniciales, aunque difícil de generalizar a problemas multidimensionales.

Para toda norma $\|\cdot\|$ definida sobre \mathcal{V} , y para su correspondiente norma matricial subordinada definida de la forma (A.1) (ver Apéndice A), se demuestra que es equivalente acotar $\|\tilde{G}^n\underline{p}^0\|$ a acotar $\|\tilde{G}^n\|$. En efecto, debido a la propiedad de las normas matriciales compatibles con las vectoriales, si $\|\tilde{G}^n\| \leq C$ entonces

$$\|\tilde{G}^n\underline{p}^0\| \leq \|\tilde{G}^n\|\|\underline{p}^0\| \leq D \quad \text{con} \quad D = C\|\underline{p}^0\|$$

y, recíprocamente, si $\|\tilde{G}^n\| > E \forall E$, por la definición de la norma

$$\exists \underline{p}_* \in \mathcal{V} \quad / \quad \|\tilde{G}^n\| = \frac{\|\tilde{G}^n \underline{p}_*\|}{\|\underline{p}_*\|}$$

al ser \mathcal{V} un espacio lineal de dimensión finita, cualquier perturbación \underline{p}^0 tendrá una cierta componente en \underline{p}_* , pero $\|\tilde{G}^n \underline{p}_*\|$ no está acotada, y con menos razón lo estará $\|\tilde{G}^n \underline{p}^0\|$.

Una condición necesaria de estabilidad sobre el radio espectral de \tilde{G} será, debido a (A.2) de forma inmediata

$$\rho(\tilde{G}) \leq 1 \tag{2.29}$$

y, en virtud de (6) una condición necesaria y suficiente de estabilidad en el límite es

$$\rho(\tilde{G}) < 1$$

que no implica que la diferencia entre las soluciones para distintas condiciones iniciales, sea pequeña para n finitos.

Una condición suficiente de estabilidad es

$$\|\tilde{G}\| \leq 1 \quad \forall \|\cdot\| \text{ subordinada} \tag{2.30}$$

que, aunque difícil de llevar a la práctica, garantiza que la norma de la perturbación disminuye con n cuando se da la desigualdad estricta.

Cuando \tilde{G} sea hermítica o semejante a una matriz hermítica, la condición (2.29) será necesaria y suficiente para estabilidad con la norma $\|\cdot\|_2$, ya que $\rho(\tilde{G}) = \|\tilde{G}\|_2$, aunque, en el segundo caso, las distancias entre las soluciones, tampoco son necesariamente pequeñas al no cumplirse (2.30).

La matriz de evolución del salto de la rana está compuesta de cuatro submatrices. Los $M - 1$ autovalores de \tilde{F} son (Lema 3, Apéndice A) diferentes entre sí

$$\lambda_i = j \, 2r \cos \frac{i\pi}{M} \quad i = 1, \dots, M - 1$$

y, por tanto, \tilde{F} tiene exactamente $M - 1$ autovectores independientes, que también son autovectores triviales de las matrices nula e identidad. Así los autovalores de \tilde{G} salen de resolver las $M - 1$ ecuaciones

$$\begin{vmatrix} j \, 2r \cos \frac{i\pi}{M} - \lambda_i & 1 \\ 1 & -\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

y el radio espectral

$$\rho(\tilde{G}) = \max_i \left\{ j \, r \cos \frac{i\pi}{M} \pm \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \frac{i\pi}{M}} \right\} = \begin{cases} 1 & \text{si } |r \cos \frac{i\pi}{M}| \leq 1 \\ > 1 & \text{si } |r \cos \frac{i\pi}{M}| > 1 \end{cases} \quad \forall i \quad \text{para algún } i$$

Por tanto, una condición necesaria de estabilidad es

$$r \leq \frac{1}{\cos \frac{\pi}{M}} \quad M = 2, \dots$$

que, si $M \gg$, se puede poner como $r \leq 1$.

La estabilidad de un esquema en diferencias se ha planteado como un atributo interno del mismo. En particular, la estabilidad también puede relacionarse con la propagación de los errores de redondeo en el proceso de solución iterativo en una de las variables (usualmente el tiempo).

Definición 18 (Error de redondeo) *Se define el error de redondeo*

$$Z^n(m) = u^n(m) - v^n(m)$$

con $v^n(m)$ el valor resultante de resolver con precisión finita las ecuación en diferencias del esquema.

Lema 1 *Un esquema estable limita el crecimiento de los errores de redondeo*

$$|Z^n(m)| \leq C \quad \forall m \quad \text{con} \quad C \neq C(n)$$

Supóngase, por comodidad, que el error de redondeo en las condiciones de frontera es nulo. Si con variables subrayadas se representan los vectores columna con las $(M - 1)$ componentes espaciales de las mismas, se obtiene recursivamente x''

$$\begin{aligned} \underline{v}^{n+1} &= \tilde{G}^{n+1} \underline{v}^0 + \underline{b}^n + \tilde{G} \underline{b}^{n-1} + \dots + \underline{b}^0 - \underline{Z}^{n+1} - \tilde{G} \underline{Z}^n - \dots - \tilde{G}^{n+1} \underline{Z}^0 \\ \underline{Z}^{n+1} &= \tilde{G}^{n+1} \underline{Z}^0 + \tilde{G}^n \underline{Z}^1 + \dots + \tilde{G} \underline{Z}^n + \underline{Z}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Considérese, por simplicidad, la contribución al error de redondeo en $n + 1$ del error cometido en un instante de tiempo (en $n = 0$, por ejemplo); suponiendo que en instantes sucesivos no se comete error de redondeo alguno, según (2.31)

$$\underline{Z}^{n+1} = \tilde{G}^{n+1} \underline{Z}^0 \quad \implies \quad \|\underline{Z}^{n+1}\| = \|\tilde{G}^{n+1} \underline{Z}^0\|$$

Por tanto el error de redondeo cometido localmente en una iteración se propaga hacia adelante del mismo modo que la solución de la ecuación en diferencias. Este error puede ser visto como una perturbación de las condiciones iniciales, y, por tanto, un esquema estable no lo amplificará indefinidamente.

Este resultado da lugar a que sea usual encontrar en la bibliografía la definición de estabilidad como una imposición de no crecimiento sobre los errores de redondeo.

Criterio de Von-Neumann

El criterio de estabilidad de Von-Neumann impone que, si se descompone una perturbación de las condiciones iniciales en modos espaciales, para un determinado instante de tiempo n , mediante serie de Fourier, una condición necesaria y suficiente de estabilidad, para esquemas a dos niveles, y sólo necesaria para esquemas más de dos niveles, viene dada al imponer que ninguno de esos modos espaciales crezca indefinidamente.

Para el problema de valores de frontera en el que el intervalo espacial se ha dividido en celdas numeradas de 0 a M , la perturbación de las condiciones iniciales en $n = 0$, para cada celda m se puede poner como

$$p^0(m) = \sum_{k=0}^{M+1} B_k e^{j\beta_k m \Delta} \quad \forall m = 0, \dots, M+1 \quad (2.32)$$

con $(M+1) \beta_k$ reales, arbitrarios en general (en particular se puede poner $\beta_k = \frac{k\pi}{(M+1)\Delta}$ con $k = 0, \dots, M+1$).

Los coeficientes B_k se obtienen resolviendo el sistema de $(M+1)$ ecuaciones con $(M+1)$ incógnitas resultante de aplicar (2.32) a cada celda. Si en vez de un problema de frontera y de valores iniciales, se tiene un problema de valores iniciales puro, la expansión de la perturbación se hace en una serie infinita

$$p^0(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k e^{j\beta_k m \Delta} \quad \forall m = -\infty, \dots, \infty$$

Para estudiar la propagación de la perturbación en $n = 0$ mediante el proceso iterativo bastará estudiar la de un armónico. Sea una evolución del tipo

$$\varphi^n(m) = e^{\Omega n \Delta t} e^{j\beta m \Delta} \quad \text{con} \quad \Omega = \Omega(\beta) \in \mathbb{C} \quad (2.33)$$

la cual se reduce al modo espacial puro propuesto para $n = 0$. La condición de Von-Neumann puede imponerse entonces como

$$|e^{\Omega \Delta t}| \leq 1 \quad (2.34)$$

a esta magnitud se la conoce como factor de crecimiento.

Como quiera que la expansión en serie (2.32) es también válida para desarrollar la solución del esquema en diferencias, la limitación en amplitud para cada armónico, en los que se descompone la perturbación, también limita la solución del esquema.

Se observa que la propagación de la perturbación tiene en cuenta las condiciones de frontera, por tanto el criterio de Von-Neumann es aplicable, en general, para estudiar la estabilidad del esquema como un problema de valores iniciales y de frontera con coeficientes constantes. Si los coeficientes de la ecuación en diferencias son variables, el

criterio deja de ser aplicable. Sin embargo, se evidencia numéricamente que el método es estable si se cumple la condición de Von-Neumann aplicada en cada punto del espacio como si los coeficientes fuesen constantes en todo el espacio e iguales a los de ese punto.

Las funciones del tipo (2.33) son autofunciones de los operadores básicos *retraso* y *adelanto* espacial y temporal, con autovalores

$$\begin{aligned} A_{px} \cdot \varphi^n(m) &= e^{j\beta p \Delta} \varphi^n(m) \quad , \quad R_{px} \cdot \varphi^n(m) = e^{-j\beta p \Delta} \varphi^n(m) \\ A_{pt} \cdot \varphi^n(m) &= e^{\Omega p \Delta t} \varphi^n(m) \quad , \quad R_{pt} \cdot \varphi^n(m) = e^{-\Omega p \Delta t} \varphi^n(m) \end{aligned}$$

Como cualquier esquema finito de la forma (2.13) se obtiene aplicando combinaciones lineales de estos operadores

$$\mathcal{D}_\alpha = \sum_i (\mu_i A_{p_i \alpha} + \rho_i R_{p_i \alpha}) \quad \alpha = x, t$$

también serán autofunciones de \mathcal{D}_α , por lo que la ecuación en diferencias genérica (2.13) se reduce a una ecuación de autovalores

$$\lambda_t + a \lambda_x = 0 \tag{2.35}$$

con

$$\mathcal{D}_x \cdot \varphi^n(m) = \lambda_x \varphi^n(m) \quad , \quad \mathcal{D}_t \cdot \varphi^n(m) = \lambda_t \varphi^n(m)$$

Por ejemplo para el esquema del salto de la rana con condiciones iniciales tipo Dirichlet

$$\mathcal{D}_x = D_{1x} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}_t = D_{1t}$$

los autovalores son

$$\lambda_x = j \frac{\sin(\beta \Delta)}{\Delta} \quad , \quad \lambda_t = \frac{\sinh(\Omega \Delta t)}{\Delta t}$$

y la relación entre los autovalores

$$\frac{\sinh(\Omega \Delta t)}{\Delta t} = -a j \frac{\sin(\beta \Delta)}{\Delta}$$

A fin de obtener una condición equivalente a (2.34) sobre el autovalor temporal λ_t , es preciso resolver

$$e^{2\Omega \Delta t} - 2\Delta t \lambda_t e^{\Omega \Delta t} - 1 = 0$$

ecuación de segundo grado en $e^{\Omega \Delta t}$ cuyas soluciones son en módulo menores que 1 si, y solo si $\lambda_t \leq \frac{1}{\Delta t}$. En efecto,

$$e^{\Omega \Delta t} = \lambda_t \Delta t \pm \sqrt{\lambda_t^2 \Delta t^2 + 1}$$

y haciendo el cambio de variable

$$\sinh u = \lambda_t \Delta t$$

nos queda

$$e^{\Omega\Delta t} = \sinh u \pm \cosh u = \begin{cases} e^u \\ e^{-u} \end{cases}$$

Descomponiendo u en parte real e imaginaria $u = u_r + ju_i$,

$$|e^{\Omega\Delta t}| = \begin{cases} e^{u_r} \\ \frac{1}{e^{u_r}} \end{cases} \quad (2.36)$$

es decir, para cualquier valor de u_r , una de las dos soluciones es mayor que la unidad. La igualdad se da cuando $u_r = 0$, en cuyo caso

$$\lambda_t \Delta t = \frac{e^{ju_i} - e^{-ju_i}}{2} = j \sin u_i$$

Por tanto, el factor de crecimiento es, en módulo, igual a la unidad cuando λ_t es imaginario puro, y mayor que la unidad si tiene parte real no nula. Luego una condición necesaria de estabilidad

$$\begin{aligned} \Re\{\lambda_t\} &= 0 \\ |\Im\{\lambda_t\}| &\leq \frac{1}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.37)$$

en cuyo caso Ω es imaginario puro.

Como para cualquier modo espacial (β real) en los que se ha descompuesto la perturbación de las condiciones iniciales cumple (2.35), la condición de estabilidad (2.37) es equivalente a

$$|a\lambda_x| = \left| \frac{a \sin(\beta\Delta)}{\Delta} \right| \leq \frac{1}{\Delta t} \quad \forall \beta \iff \frac{a\Delta t}{\Delta} \leq 1$$

Criterio de Courant-Friedrichs-Lewy

Se han presentado hasta aquí dos métodos para el estudio de la estabilidad: por un lado el de Von-Neumann que proporciona condiciones necesarias, y a veces suficientes, fácil de aplicar a problemas de valores iniciales, y generalizable a problemas multidimensionales, y un método matricial que permite tratar el problema completo de frontera y valores iniciales, pero de difícil aplicación a más de una dimensión. Ambos métodos se utilizan con esquemas que aproximen problemas parabólicos e hiperbólicos.

En una línea totalmente diferente de los anteriores, existe un método que es sólo aplicable a problemas hiperbólicos y que da condiciones necesarias de convergencia basándose en el principio de causalidad. Este criterio, llamado de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), estudia el problema puro de valores iniciales, e impone que el dominio de dependencia de la solución de la ecuación en diferencias incluya al de la ecuación diferencial, para que la solución del esquema converja a la del problema diferencial.

Dado que, para esquemas consistentes, convergencia y estabilidad son equivalentes, la condición CFL será también necesaria para la estabilidad de los mismos.

Según la solución del problema de Cauchy dada en (2.3), el valor de la solución en un instante de tiempo t en un punto del espacio x , es la condición inicial que había en el punto $(x - at, 0)$, es decir, cualquier cambio en esa condición inicial, cambia el valor de la solución en (x, t) . Supóngase, por ejemplo, que se malla el espacio de solución con una red espacio-temporal de pasos Δ y Δt , respectivamente, y que se usa un esquema centrado de segundo orden en tiempo y en espacio (salto de la rana) para resolver el problema de valores iniciales; si se sigue hacia atrás la evolución de los nudos involucrados en el cálculo de la solución en $(x = m\Delta, t = n\Delta t)$ del esquema en diferencias, se obtiene un conjunto de nudos que acaban yaciendo sobre la recta de condiciones iniciales. La condición CFL impone que ese conjunto de nudos incluya entre dos de ellos, al punto $(x - at, 0)$. De no cumplirse esta condición, la solución del esquema no convergería hacia la solución del problema ya que el esquema no acusaría un cambio en las condiciones iniciales, que el problema original sí acusaría.

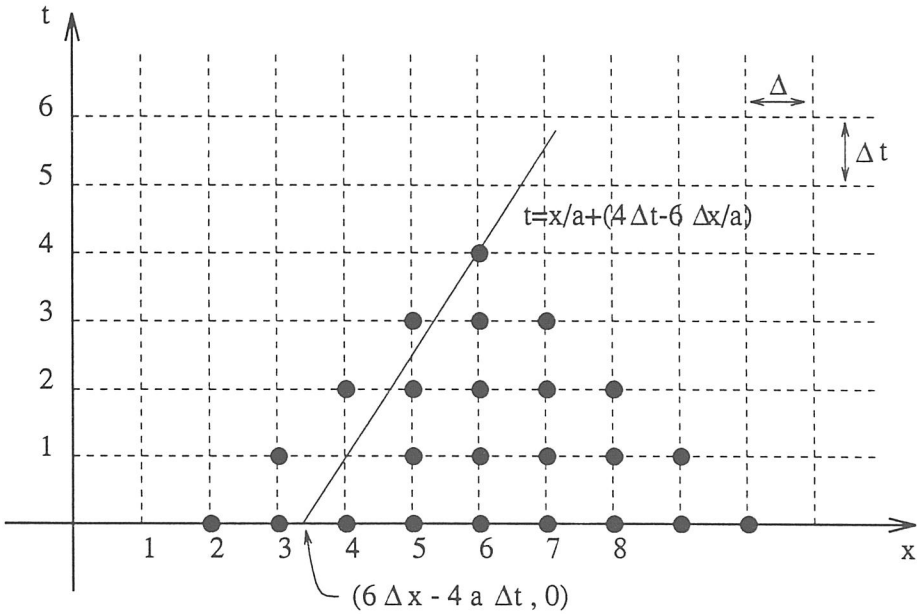


Figura 2.1: Dominio de dependencia de la solución del esquema en diferencias en (6,4)

Por ejemplo, en la Figura (2.1) la solución $U^4(6)$ depende de todos los nudos en negrita; el corte de la característica sobre el eje X debe estar entre los nudos de los que depende la solución en $x = 0$.

Se puede enunciar de forma compacta la condición CFL imponiendo que la característica de la ecuación diferencial, que pasa por $U^n(m)$ esté dentro de la zona de dependencia de la solución de la ecuación en diferencias. En el caso anterior, esto se

traduce en que $\frac{a\Delta t}{\Delta} \leq 1$.

La extensión del criterio CFL al problema del sistema hiperbólico (2.5) impone que el dominio de solución de la ecuación en diferencias incluya a la región comprendida entre el punto de mínima intersección de las características, con el eje X , y el punto de máxima intersección. Para el caso de las ecuaciones de Maxwell unidimensionales, esta región es un triángulo limitado por rectas de pendientes $\pm 1/c$, y, por tanto, la condición CFL impone $\frac{c\Delta t}{\Delta} \leq 1$. A la cantidad $\frac{c\Delta t}{\Delta}$ se también se le denomina *número de Courant*, y, a su inversa *velocidad numérica relativa*.

2.6 Disipación y dispersión

Suponiendo que las condiciones iniciales del problema de valores iniciales puro son desarrollables en serie de Fourier

$$U(x, 0) = \sum_k B_k e^{j\beta_k x}$$

dada la linealidad de la ecuación diferencial, y teniendo en cuenta que la solución del problema viene dada por (2.3), la contribución de un modo $e^{j\beta x}$ a la solución total en el punto (x, t) es

$$U(x, t) = e^{j\beta(x-at)} = e^{j\beta x} e^{j\omega t} \quad \text{con} \quad \omega = -a\beta$$

es decir, cada modo de la forma propuesta se propaga con amplitud unidad.

Al propagar mediante el esquema en diferencias el mismo modo, cabe esperar una evolución en $(x = m\Delta, t = n\Delta t)$ similar

$$u^n(m) = e^{j\beta m\Delta} e^{\Omega n\Delta t}$$

con $\Omega = \omega_r + j\omega_i$, en principio complejo.

El estudio de la evolución de este modo es el mismo punto de partida del estudio de la estabilidad por el método de Von-Neumann, aunque en el segundo caso se pretendía ver la evolución de una perturbación de las condiciones iniciales y aquí se trata de la evolución de las condiciones iniciales propiamente; al ser las expresiones de evolución similares, a partir de este punto, ambos estudios tienen mucho en común.

Para que el esquema fuese estable se precisaba que $e^{\omega_r} \leq 1$; cuando no se da la igualdad, el modo espacial no se propaga con amplitud unidad, al igual que lo hacía con la ecuación diferencial; se dice, entonces, que el esquema es disipativo.

La dispersión del método está relacionada, en cambio, con los errores en la fase de la propagación del modo. Un esquema se dice dispersivo cuando $\frac{\omega}{\beta}$ es función de β . A la relación que liga a ω y β se le denomina relación de dispersión. Para el caso analítico la relación de dispersión era $\omega = -a\beta$.

Un método sistemático de estudio de la relación de dispersión surge al plantear tanto los problemas en diferencias como diferenciales en forma operacional. Como quiera que la solución del problema diferencial en un punto (x, t) es suma de términos de la forma

$$\varphi(x, t) = e^{j\beta x} e^{j\omega t} \quad (2.38)$$

y tales funciones son autofunciones de los operadores analíticos derivada temporal y espacial con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} &= \Lambda_x \varphi(x, t) \quad \text{con} \quad \Lambda_x = j\beta \\ \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} &= \Lambda_t \varphi(x, t) \quad \text{con} \quad \Lambda_t = j\omega \end{aligned}$$

la ecuación diferencial se escribe para cada modo

$$\Lambda_t + a\Lambda_x = 0 \implies \omega + a\beta = 0$$

Análogamente, al ponerse la solución del esquema en diferencias (2.13) como suma de funciones (discretización de (2.38))

$$\varphi^n(m) = e^{j\beta m \Delta} e^{\Omega n \Delta t}$$

se obtiene la relación entre los autovalores temporales y espaciales λ_t y λ_x de \mathcal{D}_t y \mathcal{D}_x , que se vio en el estudio de la estabilidad mediante el método de Von-Neumann

$$\lambda_t + a\lambda_x = 0$$

llamada *relación de dispersión del esquema*.

Para el salto de la rana, supuesto estable ($\Omega = j\omega$ imaginario puro), la relación de dispersión queda

$$\frac{\sin(\Omega \Delta t)}{\Delta t} = -a \frac{\sin(\beta \Delta)}{\Delta}$$

Ésta tiende a la analítica, como cabía esperar, cuando $\Delta t, \Delta$ tienden a cero, ligados linealmente.

2.7 Extensión a problemas multidimensionales

Los conceptos introducidos por simplicidad para problemas unidimensionales van a ser extendidos a casos tridimensionales. La reducción al caso bidimensional (tratado en el siguiente capítulo) será obvia. El esquema de exposición que se va a seguir va a ser similar en todo al de la sección anterior.

Se quiere resolver el problema de valores iniciales de encontrar una función vectorial de Q componentes $U = (U_1, U_2, \dots, U_Q)$

$$U(x, y, z, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^Q$$

solución de

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + A_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \mathbf{U}(x, y, z, 0) = \mathbf{U}_0(x, y, z) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (2.39)$$

con A_1, A_2 y A_3 matrices $Q \times Q$ de constantes.

El problema estará bien planteado si admite solución única dependiente de forma continua de las condiciones iniciales.

Este problema se dice hiperbólico si $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \exists P$ no singular, tal que

$$P^{-1}(\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3)P = D$$

con D matriz diagonal real, lo cual se cumple, en particular, si las A_i son simétricas.

Por ejemplo, las ecuaciones rotacionales de Maxwell en tres dimensiones en el dominio del tiempo, en ausencia de fuentes y para medios lineales, con las redefiniciones (2.2)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau} \quad \nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial \tau}$$

y tomando

$$\mathbf{U} = (E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z)^T \quad (2.40)$$

quedan de la forma (2.39), con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Análogamente, es usual buscar la solución de la ecuación (2.39) en una región acotada del espacio Γ , en cuya superficie que la rodea, S_Γ , que se imponen condiciones de contorno

$$\mathcal{B}_{S_\Gamma} \{ \mathbf{U}(x, y, z, t) \} = 0 \quad (2.44)$$

con \mathcal{B}_{S_Γ} operador que describe el tipo de las mismas. En el tratamiento computacional de problemas abiertos mediante regiones acotadas se tratará de buscar operadores que simulen espacio libre, imponiendo condiciones idealmente *transparentes* en S_Γ .

Para resolver el problema numéricamente se introduce una red espacio-temporal análoga a la unidimensional

$$(\vec{m}, n) = (m_x, m_y, m_z, n) \equiv (x = m_x \Delta x, y = m_y \Delta y, z = m_z \Delta z, t = n \Delta t) \quad (2.45)$$

en cada uno de cuyos nudos la solución exacta se notará mediante $\mathbf{U}^n(\vec{m})$ y se plantea un esquema a $p + 1$ niveles, como un sistema de ecuaciones

$$\mathbf{L}_{\text{ap}}(\mathbf{u}^n(\vec{m}), \mathbf{u}^{n-i}(\vec{m})) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, p$$

cuya solución \mathbf{u} aproxima a la solución \mathbf{U} del problema diferencial $\mathbf{L}(\mathbf{U}) = 0$.

El orden del esquema pasa por extender la definición del vector error de truncamiento como

$$\mathbf{T}^n(\vec{m}) = \mathbf{L}_{\text{ap}}(\mathbf{U}^n(\vec{m}))$$

El esquema se dirá de orden $q_{1_x}, q_{1_y}, q_{1_z}$ espacial y q_2 temporal si

$$\|\mathbf{T}^n(\vec{m})\|_\infty = O(\Delta x^{q_{1_x}} + \Delta y^{q_{1_y}} + \Delta z^{q_{1_z}} + \Delta t^{q_2})$$

Mediante los operadores definidos en (2.11) y (2.12), y haciendo uso de las expansiones en serie de Taylor similar a (2.16) y (2.17) se tienen

- Esquema hacia adelante de primer orden temporal y centrado de segundo orden espacial

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1}(\vec{m}) &= \mathbf{u}^n(\vec{m}) - \Delta t \\ & (A_1 D_{1x} \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m}) + A_2 D_{1y} \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m}) + A_3 D_{1z} \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m})) \end{aligned}$$

- Esquema centrado de segundo orden espacial y temporal

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1}(\vec{m}) &= \mathbf{u}^{n-1}(\vec{m}) - 2\Delta t \\ & (A_1 D_{1x} \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m}) + A_2 D_{1y} \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m}) + A_3 D_{1z} \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m})) \end{aligned}$$

(2.46)

- Esquema centrado de segundo orden temporal y cuarto espacial (salto de la rana)

$$\mathbf{u}^{n+1}(\vec{m}) = \mathbf{u}^{n-1}(\vec{m}) - 2\Delta t \left(A_1 \left(\frac{9}{8}D_{1x} - \frac{1}{8}D_{3x} \right) + A_2 \left(\frac{9}{8}D_{1y} - \frac{1}{8}D_{3y} \right) + A_3 \left(\frac{9}{8}D_{1z} - \frac{1}{8}D_{3z} \right) \right) \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m})$$

- Esquema centrado de cuarto orden espacial y temporal. Las derivadas temporales se aproximan hasta cuarto orden mediante (2.18), en dicha expansión se pueden eliminar las primeras y las terceras derivadas temporales, transformándolas en espaciales, haciendo uso de la relación (2.39). La expresión general del esquema resultante se complica considerablemente, por lo que se particularizará al caso de las ecuaciones de Maxwell, cuyas matrices A_1 , A_2 y A_3 cumplen

$$A_i^3 = A_i \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad A_\alpha A_\beta A_\gamma = 0$$

para cualquier (α, β, γ) permutación de $(1, 2, 3)$. Así, la relación entre la tercera derivada temporal y las espaciales queda

$$\frac{\partial^3 \mathbf{U}}{\partial \tau^3} = - \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \nabla^2 \mathbf{U}$$

con

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Aproximando las terceras derivadas espaciales en la anterior expresión hasta segundo orden mediante (2.23), se obtiene una aproximación total de cuarto orden. Una aproximación de segundo orden a

$$\frac{\partial^3 F(\alpha, \beta, \dots)}{\partial \alpha^2 \beta}$$

la constituye la composición de operadores

$$(D_{1\alpha} \circ D_{1\alpha} \circ D_{1\beta}) \cdot F(\alpha, \beta, \dots)$$

y el esquema queda

$$\mathbf{u}^{n+1}(\vec{m}) = \mathbf{u}^{n-1}(\vec{m}) - 2\Delta \tau \left(A_1 \left(\frac{9}{8}D_{1x} - \frac{1}{8}D_{3x} \right) + A_2 \left(\frac{9}{8}D_{1y} - \frac{1}{8}D_{3y} \right) + A_3 \left(\frac{9}{8}D_{1z} - \frac{1}{8}D_{3z} \right) \right) \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m}) + \frac{\Delta \tau^3}{3} \left(A_1 D_{1x} + A_2 D_{1y} + A_3 D_{1z} \right) \circ \left(D_{1x} \circ D_{1x} + D_{1y} \circ D_{1y} + D_{1z} \circ D_{1z} \right) \cdot \mathbf{u}^n(\vec{m})$$

2.7.1 Consistencia, convergencia y estabilidad

Los conceptos de convergencia, consistencia y estabilidad se extrapolan de los unidimensionales sin más que utilizar vectores en vez escalares. El error de discretización se define como

$$\mathbf{e}^n(\vec{m}) = \mathbf{U}^n(\vec{m}) - \mathbf{u}^n(\vec{m})$$

Las definiciones de convergencia y de consistencia no cambian para problemas multidimensionales (Defs.(11) y (13)).

La definición de estabilidad surge de imponer estabilidad para cada una de las componentes del vector \mathbf{u} .

Definición 19 (Estabilidad en más de una dimensión) *Un esquema en diferencias*

$$\mathbf{L}_{ap}(\mathbf{u}^n(\vec{m})) = 0 \quad \vec{m} \in \Gamma \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty$$

con las condiciones iniciales y de frontera

$$\mathbf{u}^0(\vec{m}) = \mathbf{u}_0(\vec{m}) \quad \vec{m} \in \Gamma \quad \{\mathcal{B}_{S_T} \mathbf{u}^n(\vec{m})\} = 0$$

*es estable si, para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta(\epsilon) > 0$, tal que para la solución del esquema en diferencias con condiciones iniciales perturbadas $\mathbf{u}_0^{*n}(\vec{m})$, $\mathbf{u}^{*n}(\vec{m})$ cumple*

$$|u_i^n(\vec{m}) - u_i^{*n}(\vec{m})| < \epsilon \quad \vec{m} \in \Gamma \quad , \quad n = 1, \dots, \infty \quad , \quad i = 1, \dots, Q$$

siempre que las condiciones iniciales cumplan

$$|u_{i_0}^n(\vec{m}) - u_{i_0}^{*n}(\vec{m})| < \delta(\epsilon) \quad \vec{m} \in \Gamma \quad , \quad i = 1, \dots, Q$$

y similarmente para el resto de las definiciones:

Definición 20 (Estabilidad en el límite) *Se dice que un esquema es estable en el límite cuando, para cualquier perturbación de las condiciones iniciales se cumple*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_i^n(\vec{m}) - u_i^{*n}(\vec{m})| = 0 \quad \vec{m} \in \Gamma \quad , \quad i = 1, \dots, Q$$

Definición 21 (Estabilidad asintótica) *Un esquema estable se dirá asintóticamente estable cuando sea estable en el límite.*

Definición 22 (Estabilidad (Lax-Richtmyer)) *Un esquema en diferencias es estable si haciendo tender Δt , $\Delta \rightarrow 0$ ligados mediante una relación dada, y fijado $n\Delta t$ (haciendo, por tanto, $n, m \rightarrow \infty$), la solución del esquema $u_i^n(m)$ se mantiene acotada $\forall i$.*

El estudio de la convergencia es equivalente al de la estabilidad para esquemas consistentes, si la estabilidad se define en este último sentido.

El método matricial descrito para problemas monodimensionales es igualmente válido para problemas tridimensionales. Estableciendo una ordenación en las componentes de \mathbf{u} , se puede poner formalmente, para esquemas a dos niveles

$$\underline{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{G}\underline{\mathbf{u}}^n + \underline{\mathbf{b}}^n$$

con $\underline{\mathbf{u}}$ vector de tantas componentes como puntos de la red espacial en la que se ha mallaado Γ , ordenadas de modo arbitrario. \tilde{G} matriz cuadrada de evolución, y $\underline{\mathbf{b}}$ vector con las condiciones en la frontera, si son de tipo Dirichlet. Para condiciones tipo Neumann, los efectos de la discretización mediante diferencias finitas de las mismas se incluirían en \tilde{G} .

Si el esquema espacial es el centrado de segundo orden, la región de solución un cubo $[0, M_x] \times [0, M_y] \times [0, M_z]$, y la ordenación escogida

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{n+1} = & \left(\mathbf{u}^n(1, 1, 1), \dots, \mathbf{u}^n(1, 1, M_z - 1), \mathbf{u}^n(1, 2, 1), \dots, \mathbf{u}^n(1, 2, M_z - 1), \dots, \right. \\ & \dots, \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, 1), \dots, \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, M_z - 1), \mathbf{u}^n(2, 1, 1), \dots, \mathbf{u}^n(2, 1, M_z - 1), \dots, \\ & \left. \dots, \dots, \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, 1), \dots, \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, M_z - 1) \right)^T \end{aligned} \quad (2.47)$$

la matriz \tilde{G} se escribe como

$$\tilde{G} = -r \tilde{P}_{33}^{-1} \begin{pmatrix} {}^3\tilde{L}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} \\ \tilde{O}_{M_z-1} & {}^3\tilde{L}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \tilde{O}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & {}^3\tilde{L}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} \\ \tilde{O}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} & {}^3\tilde{L}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \tilde{O}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & \tilde{O}_{M_z-1} & \tilde{O}_{M_z-1} & \cdots & \cdots & {}^3\tilde{L}_{M_z-1} \end{pmatrix} \tilde{P}_{33}$$

inversa. Explicitamente:

$$\tilde{P}_{32} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n(1, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, 1, M_z - 1) \\ \mathbf{u}^n(1, 2, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, 2, M_z - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, M_z - 1) \\ \mathbf{u}^n(2, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(2, 1, M_z - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, M_z - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n(1, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, 1) \\ \mathbf{u}^n(1, 1, 2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, 2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, 1, M_z - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, M_z - 1) \\ \mathbf{u}^n(2, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(2, M_y - 1, 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, 1, M_z - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, M_z - 1) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}_{31} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n(1, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, 1, M_z - 1) \\ \mathbf{u}^n(1, 2, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, 2, M_z - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, M_z - 1) \\ \mathbf{u}^n(2, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(2, 1, M_z - 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, M_z - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}^n(1, 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, 1, 1) \\ \mathbf{u}^n(1, 2, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, 2, 1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, 1) \\ \mathbf{u}^n(1, 1, 2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, 1, 2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(1, M_y - 1, M_z - 1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^n(M_x - 1, M_y - 1, M_z - 1) \end{pmatrix}$$

La matriz \underline{b} de condiciones de frontera se construiría, asimismo, de acuerdo con la ordenación (2.47).

Este planteamiento matricial, trasladable mediante (2.28) a esquemas a tres niveles, provee un mecanismo riguroso de estudio de la estabilidad haciendo uso de las condiciones sobre el radio espectral y la norma de \tilde{G} (2.29) y (2.30). Dada la complejidad del estudio analítico del mismo, se centrará el estudio de la estabilidad de problemas multidimensionales en la generalización de los criterios de Von-Neumann y CFL.

Extensión tridimensional del criterio de Von-Neumann

Supóngase que se toman condiciones iniciales perturbadas $\mathbf{u}^{*0}(\vec{m})$, y que el vector de Q componentes que describe la perturbación

$$\mathbf{p}^0(\vec{m}) = \mathbf{u}^0(\vec{m}) - \mathbf{u}^{*0}(\vec{m})$$

se expande en el instante inicial en armónicos espaciales

$$\mathbf{p}^0(\vec{m}) = \sum_{k=0}^{N_\Gamma} \mathbf{B}_k e^{\vec{\beta}_k \cdot \vec{r}_k} \quad \vec{\beta}_k = (\beta_{x_k}, \beta_{y_k}, \beta_{z_k}) \quad , \quad \vec{r}_k = (m\Delta x, m\Delta y, m\Delta z)$$

donde N_Γ es el número de nodos en que se malla el dominio de solución Γ , $\vec{\beta}_k$ son N_Γ vectores reales arbitrarios, y \mathbf{B}_k son $N_\Gamma Q$ coeficientes que se obtienen resolviendo el sistema de $N_\Gamma Q$ ecuaciones resultante de hacer la transformación de Fourier.

Se supone que un armónico genérico se propaga temporalmente según

$$\mathbf{B} e^{\Omega m \Delta t} e^{j\vec{\beta} \cdot \vec{r}} \quad \text{con} \quad \Omega = \Omega(\vec{\beta}) \in \mathbb{C} \quad (2.48)$$

la condición necesaria de Von-Neumann impone que no hay estabilidad si no se cumple $|e^{\Omega \Delta t}| \leq 1$.

Análogos considerandos a los del problema unidimensional son aquí aplicables.

Para el salto de la rana tridimensional (2.46), el esquema interior (es decir sin tener en cuenta las condiciones de frontera) propaga al armónico (2.48) según

$$\lambda_t I_Q \mathbf{B} = -(\lambda_x A_1 + \lambda_y A_2 + \lambda_z A_3) \mathbf{B} \quad (2.49)$$

con λ_α los autovalores de los operadores $D_{1\alpha}$, dados por

$$\lambda_t = \frac{e^{\Omega \Delta t} - e^{-\Omega \Delta t}}{2\Delta t} = \frac{\sinh(\Omega \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.50)$$

$$\lambda_x = \frac{j \sin(\beta_x \Delta x)}{\Delta x} \quad , \quad \lambda_y = \frac{j \sin(\beta_y \Delta y)}{\Delta y} \quad , \quad \lambda_z = \frac{j \sin(\beta_z \Delta z)}{\Delta z} \quad (2.51)$$

propagación que, dado un \mathbf{B} no nulo será sólo posible si se cumple que el sistema de ecuaciones no admite como única a la solución trivial, es decir, si

$$\det(I_Q \lambda_t + \lambda_x A_1 + \lambda_y A_2 + \lambda_z A_3) = 0 \quad (2.52)$$

que es la relación de dispersión del método.

Análogamente al caso unidimensional, la condición suficiente de estabilidad se da cuando

$$|e^{\Omega \Delta t}| \leq 1 \iff \begin{cases} \Re\{\lambda_t\} = 0 \\ |\Im\{\lambda_t\}| \leq \frac{1}{\Delta t} \end{cases}$$

condición que se impone en la práctica a través de (2.52).

Para las ecuaciones de Maxwell resueltas mediante el salto de la rana, (2.52) se escribe

$$\begin{vmatrix} \lambda_\tau & 0 & 0 & 0 & \lambda_z & -\lambda_y \\ 0 & \lambda_\tau & 0 & -\lambda_z & 0 & \lambda_x \\ 0 & 0 & \lambda_\tau & \lambda_y & -\lambda_x & 0 \\ 0 & -\lambda_z & \lambda_y & \lambda_\tau & 0 & 0 \\ \lambda_z & 0 & -\lambda_x & 0 & \lambda_\tau & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & \lambda_\tau \end{vmatrix} = \lambda_\tau^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - \lambda_\tau^2) = 0$$

y la condición de estabilidad

$$\Re\{\lambda_\tau\} = 0 \quad \forall \vec{\beta}$$

y

$$|\Im\{\lambda_\tau\}| = \sqrt{\frac{\sin^2(\beta_x \Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\beta_y \Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\beta_z \Delta z)}{\Delta z^2}} \leq \frac{1}{\Delta \tau}$$

condición que se cumple $\forall \vec{\beta}$ si y solo si

$$c\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \leq 1$$

y si $\Delta \equiv \Delta x = \Delta y = \Delta z$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Extensión tridimensional del criterio Courant-Friedricks-Lewy

Según se vio, el criterio CFL impone, básicamente, que la aproximación numérica de la ecuación diferencial sea causal, en el sentido de que cualquier variación producida en la solución de la ecuación diferencial, debida a variaciones de las condiciones iniciales, también debe producirse en la solución de la ecuación en diferencias. Es, en consecuencia, una condición necesaria de convergencia.

Aquí se va tratar la extensión al problema hiperbólico tridimensional de valores iniciales puros, para las ecuaciones de Maxwell. Una discusión general del criterio CFL para ecuaciones hiperbólicas multidimensionales puede encontrarse en (Wilson, 1972).

La solución general de las ecuaciones de Maxwell tridimensionales planteadas como un problema puro de valores iniciales, en un punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para un instante t_0 , es la combinación de las condiciones iniciales $U_0(\vec{r})$, con $\vec{r} = (x, y, z)$, en los puntos que distan ct_0 de \vec{r}_0 . Es decir, $U(\vec{r}_0, t_0)$ se obtiene como suma (salvo constantes y términos de atenuación) de los $U_0(x, y, z)$ en la superficie de una esfera de ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 t_0^2$$

Lugar geométrico que puede ser visto en el espacio tetradimensional (x, y, z, t) como la intersección del doble hipercono (superficie característica) con vértice en (x_0, y_0, z_0, t_0)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2$$

con el hiperplano de condiciones iniciales

$$t = 0$$

El principio de causalidad impone sobre cualquier esquema en diferencias que resuelva al diferencial, que su dominio de dependencia incluya al hipercono característico.

Considérese el esquema del salto de la rana. Aunque las ecuaciones bidimensionales de Maxwell no se presentan hasta el siguiente capítulo, se va a obtener el criterio CFL para el caso bidimensional previamente, dado que es más fácil visualizarlo.

En dos dimensiones el cono característico es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2(t - t_0)^2$$

y la solución $U(x_0, y_0, t_0)$ será contribución de las condiciones iniciales en su intersección con el plano $t = 0$.

El esquema del salto de la rana hace depender la solución del esquema numérico $u^{n_0+1}(m_{x0}, m_{y0})$ de los nodos $u^{n_0}(m_{x0} \pm 1, m_{y0} \pm 1)$ que están situados en los vértices de un rombo en el plano $t_0 = n_0 \Delta t$ centrado en $(m_{x0} \Delta x = x_0, m_{y0} \Delta y = y_0)$ y semidiagonales $\Delta x, \Delta y$, y del nodo $u^{n_0-1}(m_{x0}, m_{y0})$

La superficie característica intersecta al plano $t = t_0$ en una circunferencia de centro $(m_{x0} \Delta x = x_0, m_{y0} \Delta y = y_0)$ y radio $c \Delta t$. El criterio CFL impone que la pirámide de dependencia incluya al cono característico, lo cual se cumple si el rombo intersectado en cualquier instante de tiempo, circunscribe a la circunferencia intersectada, es decir, si

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}} \quad (2.53)$$

Análogamente, en el caso tridimensional, el paralelepípedo romboidal de semidiagonales $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ debe incluir a la esfera de radio $c \Delta t$, es decir

$$c \Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

Aunque, en general, el criterio CFL, al dar sólo condiciones necesarias, puede imponer criterios distintos (usualmente menos estrictos) a los que se obtienen mediante Von-Neumann, para el esquema del salto de la rana, ambos coinciden.

2.7.2 Disipación y dispersión

Los conceptos de disipación y dispersión son directamente traducibles de una dimensión a problemas multidimensionales. Para la disipación bastará estudiar la propagación mediante la ecuación en diferencias de un armónico espacio-temporal del tipo

$$\varphi^n(\vec{m}) = e^{\Omega n \Delta t} e^{j \vec{\beta} \vec{r}} \quad \text{con} \quad \vec{r} = (m_x \Delta x, m_y \Delta y, m_z \Delta z)$$

y en función de la parte real de Ω se tendrá un esquema disipativo o no.

La relación de dispersión del problema diferencial surge de poner la solución en (x, t) como suma de armónicos de la forma

$$\varphi(\vec{r}, t) = e^{j \omega t} e^{j \vec{\beta} \vec{r}}$$

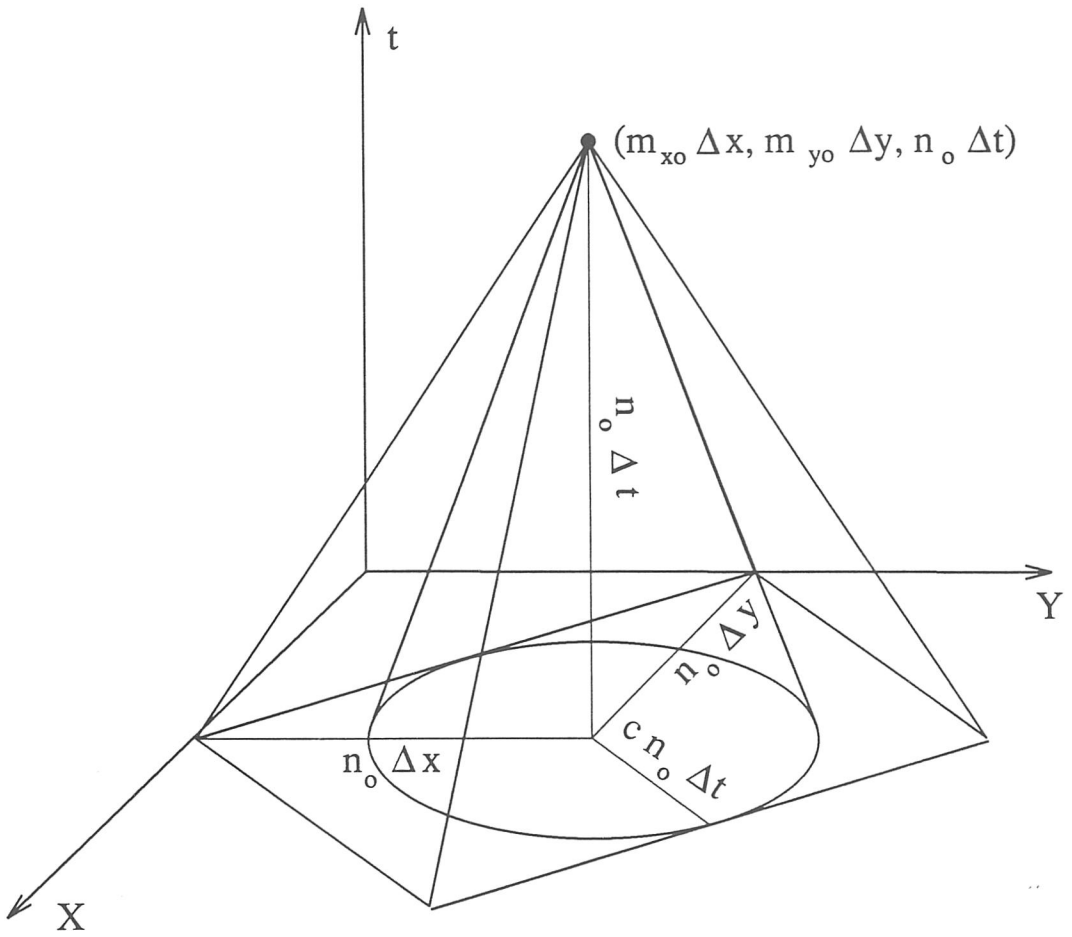


Figura 2.2: Dominios de dependencia de las soluciones teóricas y numérica, para las ecuaciones bidimensionales de Maxwell

y de obtener la relación entre ω y $\vec{\beta}$. Ese armónico es solución de la ecuación diferencial si la ecuación matricial

$$(cI_Q\Lambda_t + A_1\Lambda_x + A_2\Lambda_y + A_3\Lambda_z)\varphi(x, t) = 0$$

tiene solución no trivial, es decir, cuando

$$\det(cI_Q\Lambda_t + A_1\Lambda_x + A_2\Lambda_y + A_3\Lambda_z) = 0 \quad (2.54)$$

Donde Λ_α son los autovalores de los operadores derivada respecto a α . De la anterior condición se saca la relación de dispersión.

En el caso de las ecuaciones de Maxwell (deshaciendo el cambio $t = \frac{\tau}{c}$)

$$\frac{1}{c^2}\omega^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$$

y resueltas mediante el salto de la rana la condición (2.54) se traduce en

$$\det(cI_Q\lambda_t + A_1\lambda_x + A_2\lambda_y + A_3\lambda_z) = 0$$

con λ_α autovalores de los operadores $D_{1\alpha}$ dados por (2.50) y (2.51). Con lo que la relación de dispersión, para esquemas estables ($\Omega = j\omega$), queda

$$\frac{\sin^2(\omega\Delta t)}{c^2\Delta t^2} = \frac{\sin^2(\beta_x\Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\beta_y\Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\beta_z\Delta z)}{\Delta z^2}$$

2.8 Estabilidad de las condiciones de frontera

El método matricial expuesto permite estudiar el problema completo de valores iniciales y de frontera, aunque para problemas multidimensionales puede resultar farragoso de aplicar. El método GKS basado en (Gustafsson *et al.*, 1972) da un procedimiento sistemático del estudio del problema completo. Brevemente se suman los principales resultados de esta teoría utilizando el lenguaje de Trefethen ((Trefethen, 1982), (1983), (1984), (Trefethen y Halpern, 1986)). Para que un problema de valores iniciales y de frontera sea estable, ha de cumplir:

1. La discretización del problema de Cauchy puro es estable.
2. El modelo total, incluyendo las condiciones de frontera (2.44), no admite soluciones de onda plana que crezcan de un instante a otro mediante un factor constante z con $|z| > 1$.
3. El modelo total, incluyendo las condiciones de frontera, no admite soluciones en forma de onda con velocidades de grupo que impliquen radiación desde la frontera hacia dentro del dominio de cálculo.

2.9 Dominios de solución

Se ha visto que cualquier esquema a dos o tres niveles que aproxime a un sistema de Q ecuaciones en derivadas parciales tridimensional, puede ser puesto de la forma

$$\underline{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{G}\underline{\mathbf{u}}^n + \underline{\mathbf{b}}^n \tag{2.55}$$

con $\underline{\mathbf{u}}$ vector con N_Γ componentes (tantas como nudos de la red sean precisos para resolver el problema interior). Cada componente u del vector $\underline{\mathbf{u}}$ es, a su vez, un vector con las Q incógnitas que se calculan en cada nudo. Esto hace un total de $Q N_\Gamma$ incógnitas en la relación matricial. A efectos computacionales es conveniente poder reducir el número de nudos espacio-temporales en los que hay que calcularlas. Una elección apropiada de los operadores finitos que aproximan a los diferenciales, en función de las características de \tilde{G} es fundamental para conseguirlo. Por ejemplo, el esquema del salto de la rana aplicado a las ecuaciones de Maxwell para medios lineales isótropos, y en ausencia de fuentes, desacopla la ecuación (2.55) en dieciseis conjuntos, independientes entre sí, de ecuaciones matriciales. En efecto, notando por P los números pares y por I los impares, los siguientes conjuntos de componentes de $\underline{\mathbf{u}}$ (aproximación del $\underline{\mathbf{U}}$ definido en (2.40)) avanzan mediante (2.55) independientes los unos de los otros cuando se definen en las subredes (n, m_x, m_y, m_z) dadas por

	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z
E_x	P	I	P	P	P	P	I	P	P	P	P	I	P	P	I	I
E_y	P	P	I	P	P	I	P	P	P	I	I	I	P	I	P	I
E_z	P	P	P	I	P	I	I	I	P	I	P	P	P	I	I	P
\mathcal{B}_x	I	P	I	I	I	I	P	I	I	I	I	P	I	I	P	P
\mathcal{B}_y	I	I	P	I	I	P	I	I	I	P	P	P	I	P	I	P
\mathcal{B}_z	I	I	I	P	I	P	P	P	I	P	I	I	I	P	P	I

	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z
E_x	P	I	P	I	P	I	I	P	P	I	I	I	P	P	P	P
E_y	P	P	I	I	P	P	P	P	P	P	P	I	P	I	I	P
E_z	P	P	P	P	P	P	I	I	P	P	I	P	P	I	P	I
\mathcal{B}_x	I	P	I	P	I	P	P	I	I	P	P	P	I	I	I	I
\mathcal{B}_y	I	I	P	P	I	I	I	I	I	I	I	P	I	P	P	I
\mathcal{B}_z	I	I	I	I	I	I	P	P	I	I	P	I	I	P	I	P

	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z
E_x	I	I	P	P	I	P	I	P	I	P	P	I	I	P	I	I
E_y	I	P	I	P	I	I	P	P	I	I	I	I	I	I	P	I
E_z	I	P	P	I	I	I	I	I	I	I	P	P	I	I	I	P
\mathcal{B}_x	P	P	I	I	P	I	P	I	P	I	I	P	P	I	P	P
\mathcal{B}_y	P	I	P	I	P	P	I	I	P	P	P	P	P	P	I	P
\mathcal{B}_z	P	I	I	P	P	P	P	P	P	P	I	I	P	P	P	I

	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z	n	m_x	m_y	m_z
E_x	I	I	P	I	I	I	I	P	I	I	I	I	I	P	P	P
E_y	I	P	I	I	I	P	P	P	I	P	P	I	I	I	I	P
E_z	I	P	P	P	I	P	I	I	I	P	I	P	I	I	P	I
\mathcal{B}_x	P	P	I	P	P	P	P	I	P	P	P	P	P	I	I	I
\mathcal{B}_y	P	I	P	P	P	I	I	I	P	I	I	P	P	P	P	I
\mathcal{B}_z	P	I	I	I	P	I	P	P	P	I	P	I	P	P	I	P

(2.56)

Es decir, hay ocho colocaciones distintas de las componentes eléctricas evaluadas en instantes pares y magnéticas evaluadas en los impares, y otras ocho con esas mismas colocaciones espaciales evaluadas en instantes impares las eléctricas, y en pares las magnéticas. Todas estas colocaciones se hallan dispuestas en el espacio según la Figura (2.3) también conocida como cubo de Yee

El hecho de que no sea preciso tener definidas todas las componentes en todos los puntos de la red da lugar a la siguiente definición

Definición 23 (Red de las componentes) *Subconjunto de la red (n, m_x, m_y, m_z) definida en (2.45) en el que se necesita cada componente u_i de \mathbf{u} para hacerlo avanzar mediante (2.55).*

Por contraposición, se denominará, de aquí en adelante, a la red total de (2.45) *red virtual*, al no ser precisas, en general, calcular todas las u_i en cada uno de sus nudos.

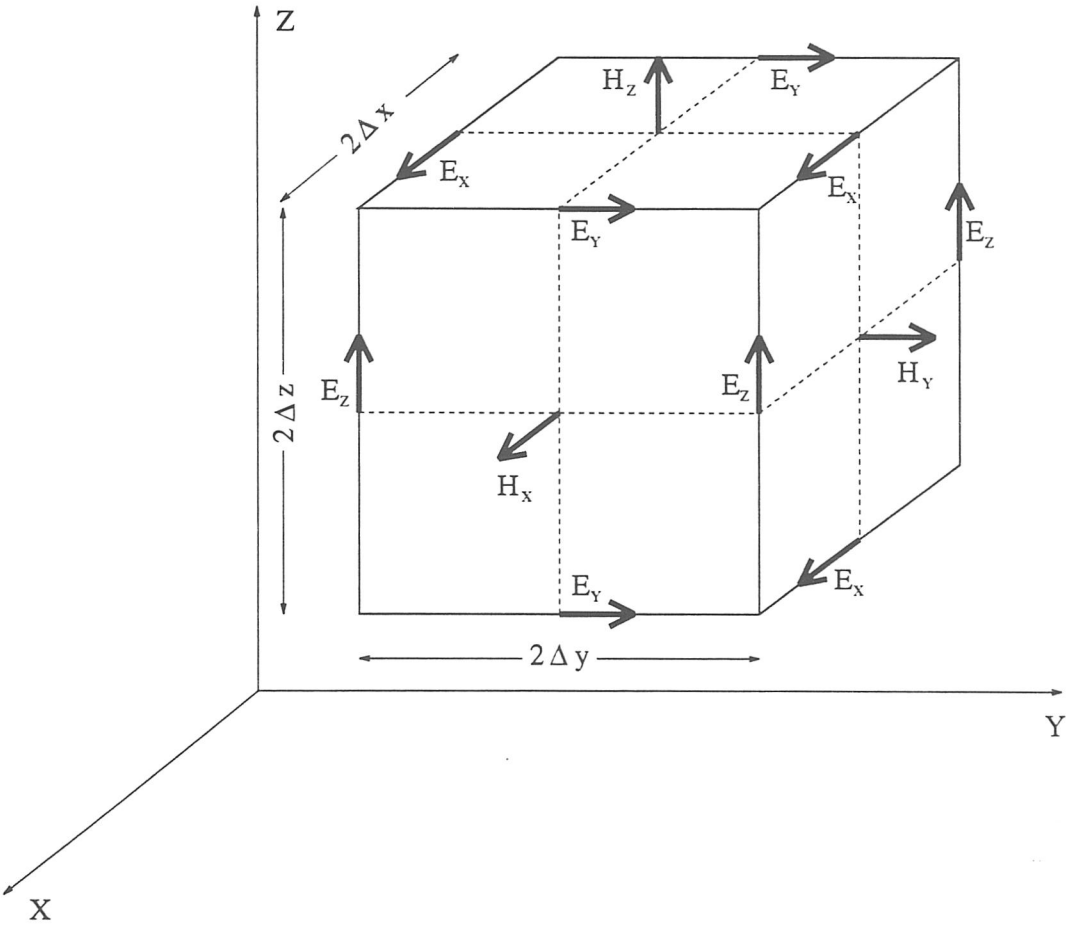


Figura 2.3: Cubo de Yee

Capítulo 3

Dispersión mediante objetos bidimensionales

En este capítulo se van a aplicar esquemas en diferencias a tres niveles centrados de primer y segundo orden para resolver las ecuaciones bidimensionales de Maxwell en el dominio del tiempo. El objetivo principal es el estudio de la dispersión de ondas electromagnéticas (OEMs) mediante estructuras bidimensionales (González García, 1990). En el sistema MKS las ecuaciones de Maxwell, en presencia de cargas y corrientes, se escriben como:

$$\begin{aligned}\nabla \vec{D} &= \rho \\ \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

con ρ densidad de carga, \vec{J} densidad de corriente, \vec{E} intensidad de campo eléctrico, \vec{D} desplazamiento eléctrico, \vec{H} intensidad de campo magnético, \vec{B} inducción magnética.

Estas ecuaciones pueden ser simetrizadas introduciendo las magnitudes ficticias ρ_m (densidad magnética de carga) y \vec{M} (densidad de corriente magnética)

$$\nabla \vec{D} = \rho \tag{3.1}$$

$$\nabla \vec{B} = \rho_m \tag{3.2}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{3.3}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{M} \tag{3.4}$$

Análogamente se cumple una ecuación de continuidad para tales magnitudes

$$\frac{\partial \rho_m(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{M}(\vec{r}, t) = 0$$

Para estructuras indefinidas y con simetría traslacional a lo largo de un eje, estas ecuaciones se desacoplan en dos conjuntos cuando las variaciones de los campos a lo largo de ese eje son nulas. Éste es el caso cuando se propagan ondas planas perpendiculares al mismo, bien con el campo eléctrico en la dirección del eje, y el magnético en el plano perpendicular al mismo (polarización transversal magnética TM), bien con el campo magnético en dirección del eje, y el eléctrico en el plano perpendicular (polarización transversal eléctrica TE). Haciendo coincidir el eje de simetría con la dirección Z, en un sistema de coordenadas rectangular y para medios lineales

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{M} = \sigma_m \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$

cuyos parámetros μ (permeabilidad magnética), ε (constante dieléctrica), σ (conductividad eléctrica) y σ_m (conductividad magnética) no dependan del tiempo, aunque sí, en general, del espacio, se pueden escribir las ecuaciones rotacionales de la siguiente forma:

Polarización TM:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_m H_x \right) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \sigma_m H_y \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (3.7)$$

Polarización TE:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma E_x \right) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_m H_z \right) \quad (3.10)$$

El objetivo de este capítulo es resolver el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, con condiciones iniciales dadas, y condiciones de frontera que simulen un problema abierto, para estudiar la interacción de una onda electromagnética plana que incide normalmente sobre un objeto material. Se estructurará el capítulo en los siguientes puntos:

- Descripción de las aproximaciones mediante diferencias finitas a las derivadas de las Ecs. (3.5)–(3.10) que permitan obtener numéricamente su solución mediante un algoritmo de ordenador.
- Obtención de un método de introducir una onda plana electromagnética que ilumine el objeto.
- Estudio de la estabilidad y la dispersión del método.
- Truncamiento del dominio de cálculo mediante condiciones de frontera apropiadas.
- Cálculo del campo de radiación.
- Aproximación de las ecuaciones rotacionales en forma integral

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_L} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.11)$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_L} \vec{H} \cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{M} \cdot d\vec{S} \quad (3.12)$$

para evitar el modelo escalonado del objeto.

Dada la dualidad que existe entre las ecuaciones para la polarización TE y TM, a menudo se expresarán sólo los algoritmos para una de las polarizaciones. Bastará tener en cuenta la siguiente correspondencia junto con la distinta situación en la red de las componentes, para obtener los algoritmos correspondientes a la otra polarización

Polarización TM \longleftrightarrow Polarización TE		
ϵ	\longleftrightarrow	μ
σ	\longleftrightarrow	σ_m
E_z	\longleftrightarrow	H_z
H_x	\longleftrightarrow	$-E_x$
H_y	\longleftrightarrow	$-E_y$

3.1 Propagación

3.1.1 Aproximación espacial y temporal de segundo orden

Si las Ecs. (3.5)–(3.10) no contienen términos de conducción, es decir, son homogéneas, y se aplican a medios lineales isótropos, pueden ser escritas en la forma (2.39) con A_3 matriz nula de orden seis. Si se resuelven mediante el esquema del salto de la

rana, se desacoplan en la forma descrita en (2.56), pudiendo obtenerse, además, los conjuntos de componentes (E_z, H_x, H_y) y (H_z, E_x, E_y) separadamente en función de ellos mismos. Es usual, además, en la literatura trabajar con los incrementos espaciales y temporales divididos por dos, y resolver las ecuaciones en diferencias en las redes de las componentes dadas por

	n	m_x	m_y	m_z
E_x	P	I	P	P
E_y	P	P	I	P
H_z	I	I	I	P
E_z	P	P	P	I
H_x	I	P	I	I
H_y	I	I	P	I

(3.13)

donde P indicará ahora ‘múltiplos enteros’ de Δ o Δt y I indicará ‘múltiplos semienteros’. Por tanto la notación $\varphi^{n+\frac{\alpha}{2}}(m+\frac{\beta}{2}, \dots)$ con m, n enteros, será equivalente a $\varphi((n+\frac{\alpha}{2})\Delta t, (m+\frac{\beta}{2})\Delta, \dots)$

A efectos de aplicar la notación operacional introducida en el capítulo anterior, se utilizarán los operadores definidos en (2.9) – (2.12) con p entero o semientero.

Aunque la teoría presentada en el capítulo anterior ha sido aplicada a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales homogéneas y con coeficientes constantes, se puede aplicar de modo formalmente análogo a las ecuaciones (3.5)-(3.10) no homogéneas con coeficientes no constantes en el espacio (sí en el tiempo). Un método de estudiar la estabilidad según Von-Neumann, es tratar, por un lado, el problema interior de coeficientes constantes donde lo sean, y por otro, tratar las condiciones de conexión entre las regiones mediante el método GKS, o bien, si el estudio es matricial, siempre es posible estudiar el problema global, condiciones de conexión incluidas.

Otra cuestión que se ha de tener en cuenta para las ecuaciones no homogéneas (con conductividad magnética o eléctrica) es que al aplicar los operadores centrados a las derivadas, el problema no se desacopla de la forma (3.13), sino que se hace necesario calcular los campos eléctricos y magnéticos tanto en instantes pares como impares, para cada polarización, con la consiguiente duplicación del tiempo de cálculo computacional. Por ejemplo, para la polarización TM y suponiendo que hay un término de conductividad

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) = \frac{1}{\varepsilon(i, j)} \left(D_{\frac{1}{2}x} \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - D_{\frac{1}{2}y} \cdot H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \sigma(i, j) E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \right) \quad (3.14)$$

aparece E_z evaluado en múltiplos tanto enteros como semienteros de Δt . Para mantener el desacoplo de (3.13) se hace uso del operador promedio de segundo orden definido

en (2.12) que obtiene $E_z^{n+\frac{1}{2}}$ como el promedio de E_z^{n+1} y E_z^n , con lo que todos los E_z de (3.14) están evaluados en instantes temporales enteros.

Resumiendo: las funciones de red sobre las que se van a aplicar los operadores promedio y diferencia serán tales que las ecuaciones finales sólo involucren a

- Polarización TE $\longrightarrow \{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j), E_y^n(i, j + \frac{1}{2}), H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})\}$
- Polarización TM $\longrightarrow \{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}), H_y^n(i + \frac{1}{2}, j), E_z^n(i, j)\}$

con n, i, j enteros.

Esto se consigue mediante el siguiente esquema:

Polarización TM:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\mu(i, j + \frac{1}{2})} \\ \left(-D_{\frac{1}{2}y} \cdot E_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - \sigma_m(i, j + \frac{1}{2}) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) &= \frac{1}{\mu(i + \frac{1}{2}, j)} \\ \left(D_{\frac{1}{2}x} \cdot E_z^n(i + \frac{1}{2}, j) - \sigma_m(i + \frac{1}{2}, j) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) &= \frac{1}{\varepsilon(i, j)} \\ \left(D_{\frac{1}{2}x} \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - D_{\frac{1}{2}y} \cdot H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \sigma(i, j) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Polarización TE:

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) &= \frac{1}{\varepsilon(i + \frac{1}{2}, j)} \\ \left(D_{\frac{1}{2}y} \cdot H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - \sigma(i + \frac{1}{2}, j) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\varepsilon(i, j + \frac{1}{2})} \\ \left(-D_{\frac{1}{2}x} \cdot H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \sigma(i, j + \frac{1}{2}) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\mu(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})} \\ \left(D_{\frac{1}{2}y} \cdot E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - D_{\frac{1}{2}x} \cdot E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right. \\ \left. - \sigma_m(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

en el que se utiliza el vector H en vez del B y se han deshecho los cambios $\tau = ct$ y $B = cB$.

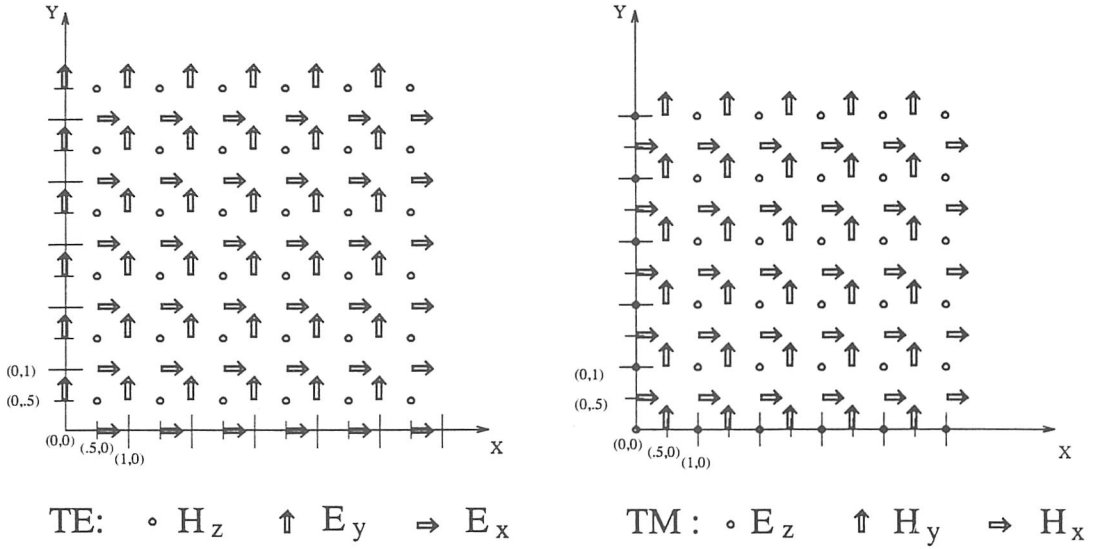


Figura 3.1: Disposición espacial de las componentes del campo eléctrico y magnético

La colocación espacial de las componentes en el plano queda según la red de la Figura (3.1), y temporalmente separadas por medio intervalo. Este esquema fue el utilizado por primera vez por Yee en (1966).

Es posible escoger de otros modos las redes de cada componente; mediante composición de los operadores promedio y diferencia se pueden obtener aproximaciones a las derivadas que, introducidas en las ecuaciones de Maxwell, den esquemas en los que sólo intervenga las funciones definidas en los nodos escogidos. Este tratamiento resulta especialmente útil cuando se tratan medios anisótropos (Materdey Bao-Hung, 1993).

En las anteriores expresiones se ha supuesto, en general, que los coeficientes μ , ε , σ y σ_m pueden ser funciones espaciales (medios no homogéneos), de ahí, que se haya expresado la dependencia con las coordenadas de la red. Con el fin de obtener expresiones más compactas se pueden definir las siguientes constantes:

$$C_a(\alpha, \beta) = \frac{1 - \frac{\sigma(\alpha, \beta) \Delta t}{2\varepsilon(\alpha, \beta)}}{1 + \frac{\sigma(\alpha, \beta) \Delta t}{2\varepsilon(\alpha, \beta)}}$$

$$C_b(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon(\alpha, \beta)}}{1 + \frac{\sigma(\alpha, \beta) \Delta t}{2\varepsilon(\alpha, \beta)}}$$

$$D_a(\alpha, \beta) = \frac{1 - \frac{\sigma_m(\alpha, \beta) \Delta t}{2\mu(\alpha, \beta)}}{1 + \frac{\sigma_m(\alpha, \beta) \Delta t}{2\mu(\alpha, \beta)}}$$

$$D_b(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Delta} \frac{\frac{\Delta t}{\mu(\alpha, \beta)}}{1 + \frac{\sigma_m(\alpha, \beta) \Delta t}{2\mu(\alpha, \beta)}}$$

donde α y β pueden ser enteros o semienteros, con lo que las ecuaciones (3.15)–(3.20) quedan:

Polarización TE:

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) &= D_a(i, j + \frac{1}{2})H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) \\ &- D_b(i, j + \frac{1}{2})(E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) &= D_a(i + \frac{1}{2}, j)H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) \\ &+ D_b(i + \frac{1}{2}, j)(E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j) &= C_a(i, j)E_z^n(i, j) + C_b(i, j) \\ &(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j) + \\ &H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2})) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Polarización TM:

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) &= C_a(i + \frac{1}{2}, j)E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + C_b(i + \frac{1}{2}, j) \\ &(H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})) \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) &= C_a(i, j + \frac{1}{2})E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + C_b(i, j + \frac{1}{2}) \\ &(H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= D_a(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\ &+ D_b(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})(E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + \\ &E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2})) \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde se ha puesto $\Delta \equiv \Delta x = \Delta y = \Delta$, suposición que se hará durante el resto de este capítulo.

Otra de las ventajas de desacoplar el problema temporalmente radica en que basta especificar las condiciones iniciales para los campos eléctricos en $t = 0\Delta t$ y para los magnéticos en $t = \frac{\Delta t}{2}$ para que el esquema se automantenga. Si el problema no estuviese desacoplado serían precisos los campos eléctricos también en $t = \frac{\Delta t}{2}$ y los magnéticos en $t = 0$ para que el esquema avanzase.

En las ecuaciones discretizadas se observa que las propiedades eléctricas y magnéticas pueden variar de una celda a otra. Por tanto, al estudiar problemas que

involucren medios distintos del vacío, las transiciones entre medios se han de modelar escalonadamente. Este tratamiento de las transiciones, que surge de forma natural al discretizar las ecuaciones diferenciales, puede ser mejorado utilizando las ecuaciones integrales (3.11) y (3.12) según se estudiará posteriormente.

Los restos de las series de Taylor que sirven para hacer las aproximaciones de las derivadas temporales y espaciales mediante diferencias, particularizados para los incrementos semienteros, y para funciones de onda de frecuencia angular ω y velocidad de propagación c del tipo $f(x, y, t) = A \sin(\omega t + \beta_x x + \beta_y y)$, con número de onda $\beta = \sqrt{\beta_x^2 + \beta_y^2} = \frac{\omega}{c}$, pueden acotarse como sigue: el resto de la derivación temporal es (ver 2.17))

$$\left| \frac{R_t}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right| \leq \frac{\omega^2}{24} (\Delta t)^2 = \frac{(\beta c)^2}{24} (\Delta t)^2 \quad (3.27)$$

y el de la derivación respecto a la variable espacial x

$$\left| \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right| \leq \frac{\beta^2}{24} (\Delta)^2 \quad (3.28)$$

Si se escogen los incrementos temporales y espaciales ligados mediante $\Delta x = c c_n \Delta t$ con c_n parámetro que se va a llamar velocidad numérica, definiendo el número de celdas por longitud de onda como el cociente entre la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$ y el incremento espacial ($N_{clo} = \frac{\lambda}{\Delta}$), las expresiones (3.27) y (3.28) quedan

$$\left| \frac{R_t}{\frac{\partial f}{\partial t}} \right| \leq \frac{4\pi^2}{24 c_n^2 N_{clo}^2}$$

$$\left| \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right| \leq \frac{4\pi^2}{24 N_{clo}^2}$$

3.1.2 Segundo orden temporal y cuarto espacial

Para discretizar las ecuaciones (3.5)-(3.10) es posible utilizar aproximaciones de orden superior a las derivadas espaciales y temporales. Se van a describir con brevedad los algoritmos resultantes de discretizar mediante diferencias centradas de cuarto orden las derivadas espaciales y segundo orden las temporales.

Mediante una aproximación de cuarto orden a las derivadas espaciales (2.22) y una de segundo orden (2.21) para las derivadas temporales, se obtienen las siguientes expresiones para las ecuaciones de propagación en la polarización TM (por ejemplo)

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\mu(i, j + \frac{1}{2})}$$

$$\left(-\left(\frac{9}{8}D_{\frac{1}{2}y} - \frac{1}{8}D_{\frac{3}{2}y}\right) \cdot E_z^n(i, j + \frac{1}{2}) - \sigma_m(i, j + \frac{1}{2})P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) \right)$$

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) = \frac{1}{\mu(i + \frac{1}{2}, j)}$$

$$\left(\left(\frac{9}{8} D_{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8} D_{\frac{3}{2}x} \right) \cdot E_z^n(i + \frac{1}{2}, j) - \sigma_m(i + \frac{1}{2}, j) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) \right)$$

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) = \frac{1}{\varepsilon(i, j)}$$

$$\left(\left(\frac{9}{8} D_{\frac{1}{2}x} - \frac{1}{8} D_{\frac{3}{2}x} \right) \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \left(\frac{9}{8} D_{\frac{1}{2}y} - \frac{1}{8} D_{\frac{3}{2}y} \right) \cdot H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - \sigma(i, j) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) \right)$$

y, expandiéndolas

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = D_a(i, j + \frac{1}{2}) H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{D_b(i, j + \frac{1}{2})}{24}$$

$$\left[27 \left(E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j) \right) - \left(E_z^n(i, j + 2) - E_z^n(i, j - 1) \right) \right]$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = D_a(i + \frac{1}{2}, j) H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{D_b(i + \frac{1}{2}, j)}{24}$$

$$\left[27 \left(E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j) \right) - \left(E_z^n(i + 2, j) - E_z^n(i - 1, j) \right) \right]$$

$$E_z^{n+1}(i, j) = C_a(i, j) E_z^n(i, j) + \frac{C_b(i, j)}{24} \left[\right.$$

$$27 \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j) \right)$$

$$- \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + 3/2, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - 3/2, j) \right)$$

$$+ 27 \left(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) \right)$$

$$\left. - \left(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - 3/2) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 3/2) \right) \right]$$

con la misma notación que en la sección anterior.

El resto de la derivación espacial de cuarto orden, acotado para señales armónicas $A \sin(\omega t + \beta_x x + \beta_y y)$ es

$$\left| \frac{R_x}{\frac{\partial f}{\partial x}} \right| \leq \frac{3(\beta \Delta x)^4}{512} = \frac{3\pi^4}{32N_{clo}^4}$$

La red de cada componente sigue siendo la misma que para el esquema de segundo orden espacial y temporal ya que el operador $D_{\frac{3}{2}x}$, al igual que el $D_{\frac{1}{2}x}$ traslada espacialmente a las variables de nudos enteros a semienteros y viceversa. Por tanto, el esquema sigue desacoplado de la forma (3.13).

3.2 Iluminación

En problemas de dispersión hay que iluminar el objeto mediante una excitación arbitraria, para obtener los campos dispersados por el mismo. Dos planteamientos se

encuentran en la literatura: uno en el que la región de cálculo se divide en una zona de campo total en la que yace el dispersor y una zona de campo dispersado, y, otro planteamiento en el que toda la región de cálculo es de campo dispersado.

Se describirá previamente este último. Para ello se hará uso de la linealidad de las ecuaciones de Maxwell y se descompondrán los campos totales en campos incidentes más dispersados. Teniendo en cuenta que las corrientes en el dispersor están relacionadas con los campos totales por

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}^{tot} &= \sigma \vec{E}^{tot} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}^{tot}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E}^{tot} &= -\sigma_m \vec{H}^{tot} - \mu \frac{\partial \vec{H}^{tot}}{\partial t}\end{aligned}$$

y que los campos incidentes cumplen (supuesto el dispersor en un substrato de vacío)

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}^{inc} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^{inc}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E}^{inc} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}^{inc}}{\partial t}\end{aligned}$$

las ecuaciones de propagación del campo dispersado

$$\vec{E}^{dis} = \vec{E}^{tot} - \vec{E}^{inc} \quad , \quad \vec{H}^{dis} = \vec{H}^{tot} - \vec{H}^{inc}$$

serán

$$\mu \frac{\partial \vec{H}^{dis}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E}^{dis} - \sigma_m \vec{H}^{dis} - (\mu - \mu_0) \frac{\partial \vec{H}^{inc}}{\partial t} - \sigma_m \vec{H}^{inc} \quad (3.29)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}^{dis}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H}^{dis} - \sigma \vec{E}^{dis} - (\varepsilon - \varepsilon_0) \frac{\partial \vec{E}^{inc}}{\partial t} - \sigma \vec{E}^{inc} \quad (3.30)$$

que se reducen a

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H}^{dis} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}^{dis}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{E}^{dis} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}^{dis}}{\partial t}\end{aligned}$$

en la región libre de medios y de fuentes.

Por tanto sólo es necesario especificar el campo incidente en los puntos del dispersor para poder obtener el campo dispersado en cualquier punto del espacio.

Por otro lado, el primer planteamiento hace uso del principio de equivalencia para establecer una división entre una zona de campo total, en la que está inmersa el dispersor, y una zona de campo dispersado en la que hay un substrato que se supondrá vacío por comodidad. En la Figura (3.2) se esquematiza la anterior división.

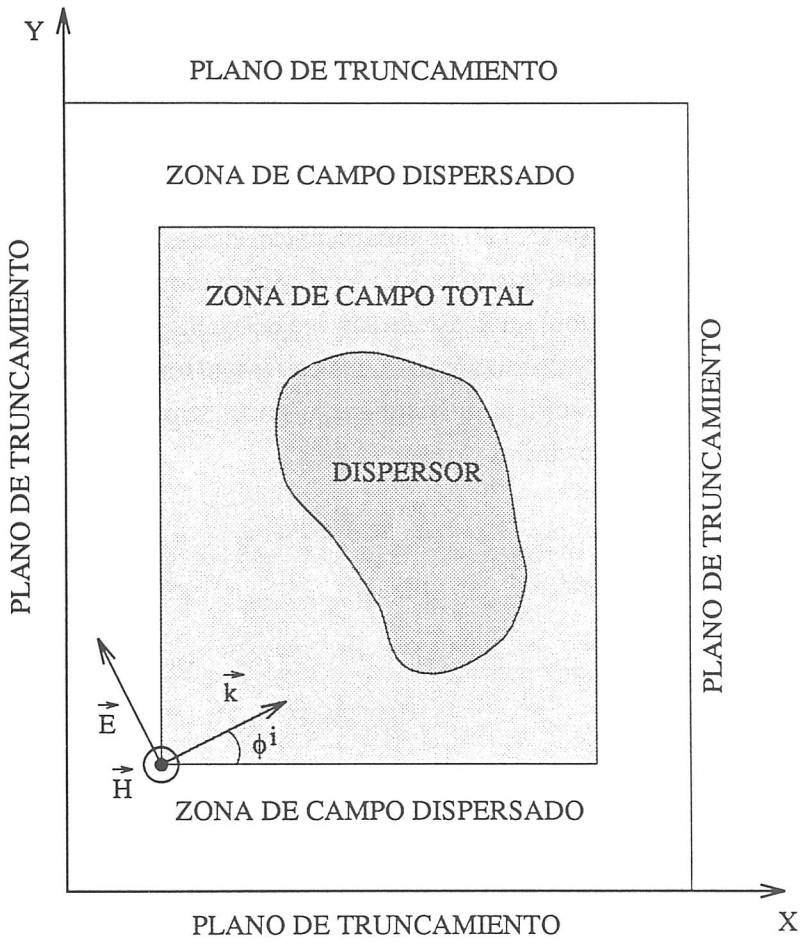


Figura 3.2: División de la región de cálculo en 2 zonas: una de campo dispersado y otra de campo total. Iluminación TE

Para conseguir esta separación se hace uso del teorema de equivalencia (Gómez Martín, 1984) que está basado en el principio de Huygens, de ahí que a las corrientes equivalentes que aparecen en el mismo se las llame a veces fuentes de Huygens.

Si se tiene un conjunto de fuentes creadoras de campo situadas en una región del espacio, y se quiere calcular el campo en una región acotada libre de medios y fuentes (si no lo está, es posible eliminarlos en principio, y luego aplicar el principio de superposición), es posible substituir ese problema por el de calcular el campo dentro de esa misma región si se conocen las componentes tangenciales del campo eléctrico o magnético en la superficie que la limita. Este problema, a su vez, es compatible con el de suponer los campos nulos fuera de la región y un conjunto de corrientes eléctricas y magnéticas superficiales que generen unas componentes tangenciales sobre la superficie, iguales a las que generaban las fuentes creadoras del campo. Como por el teorema de unicidad, dadas estas componentes tangenciales, el campo dentro queda unívocamente determinado, el problema queda reducido al cálculo de las corrientes.

Así, se utiliza la formulación simétrica de las ecuaciones de Maxwell y de las condiciones generalizadas de contorno asociadas con las mismas, para obtener las densidades de carga y corriente eléctricas y magnéticas en la superficie de separación, que den cuenta de las discontinuidades de los campos

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot \vec{D}_1 &= \rho_s \\ \hat{n} \cdot \vec{B}_1 &= \rho_{sm} \\ \hat{n} \times \vec{E}_1 &= -\vec{M}_s \\ \hat{n} \times \vec{H}_1 &= \vec{J}_s\end{aligned}$$

donde los subíndices en los campos indican en qué región yacen (Figura (3.3)) y \hat{n} es el vector unitario normal que va desde la región 2 a la 1. (Se han supuesto nulos los campos en la región 2).

La implementación numérica de estas expresiones en el algoritmo de diferencias centradas fue llevada a cabo en (Merewether *et al.*, 1980).

Este mismo problema puede ser visto desde otro punto de vista: si se establece la separación campo total-campo dispersado vista con anterioridad se plantea un problema de consistencia al aplicar el algoritmo de propagación a los puntos en la superficie de separación. En efecto, supóngase que se quiere evaluar E_z (polarización TM, por ejemplo) para los puntos de la superficie de separación (Figura (3.4))

$$\begin{aligned}E_z^{n+1}(i_i, j) |_{Total} &= C_a(i_i, j)(E_z^n(i_i, j) |_{Total} + C_b(i_i, j) \\ & \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i + \frac{1}{2}, j) |_{Total} - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i - \frac{1}{2}, j) |_{Dispersado} + \right. \\ & \left. H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_i, j - \frac{1}{2}) |_{Total} - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_i, j + \frac{1}{2}) |_{Total} \right)\end{aligned}\quad (3.31)$$

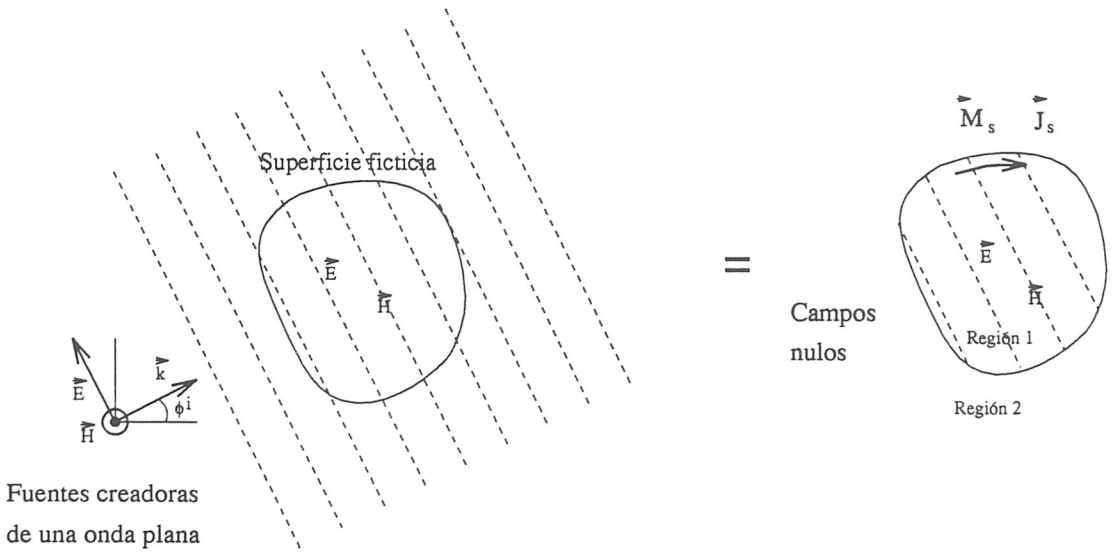


Figura 3.3: Utilización del principio de equivalencia para generar una región con un campo incidente dado

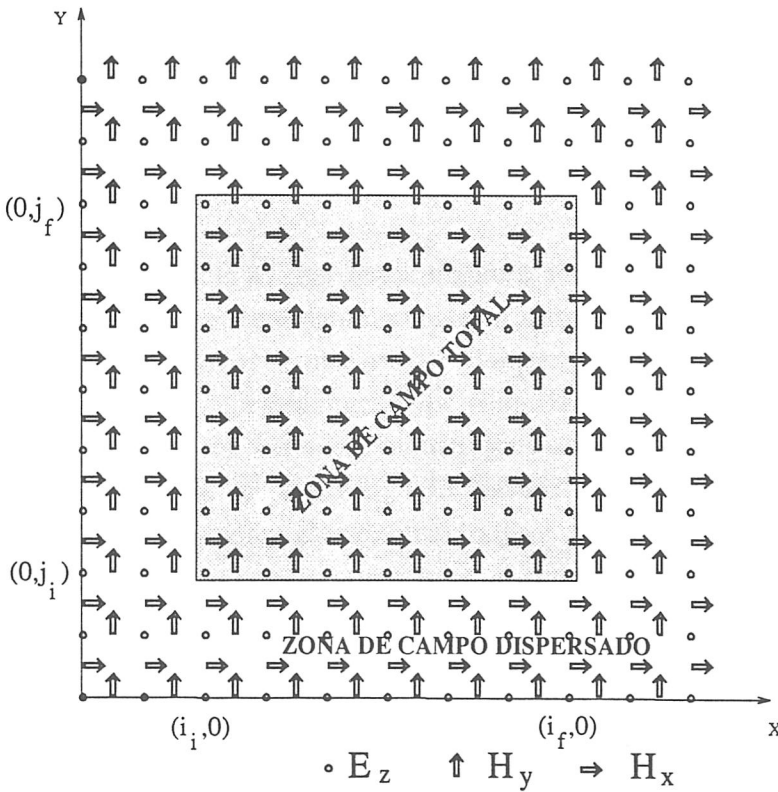


Figura 3.4: Implementación de la iluminación para polarización TM

$\forall j_i < j < j_f$. Es decir, en la expresión (3.31) se evalúa E_z en la posición (i_i, j) (zona de campo total) a partir de tres campos que también yacen en la zona de campo total, y un campo H_y que yace en $(i_i - \frac{1}{2}, j)$, dentro de la que se ha establecido como zona de campo dispersado. Por ello, sería preciso, para mantener la linealidad de los operadores, añadir un término corrector a la expresión anterior que haga que todos los campos involucrados sean totales

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i_i, j) |_{Total} = & C_a(i_i, j) E_z^n(i_i, j) |_{Total} + C_b(i_i, j) \\ & \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i + \frac{1}{2}, j) |_{Total} - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i - \frac{1}{2}, j) |_{Dispersado} + \right. \\ & \left. H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_i, j - \frac{1}{2}) |_{Total} - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_i, j + \frac{1}{2}) |_{Total} \right) \\ & - C_b(i_i, j) H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i - \frac{1}{2}, j) |_{Incidente} \end{aligned}$$

El término añadido en esta ecuación $H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i - \frac{1}{2}, j) |_{Incidente}$ puede ser visto, en la primera interpretación, como la corriente eléctrica en la dirección z, que sería preciso añadir a la ecuación de propagación en diferencias, para obtener E_z total en función de campos que también han de ser totales.

Simbólicamente se puede poner el algoritmo de iluminación como:

$$E_z^{n+1}(i_i, j) |_{Total} = E_z^{n+1}(i_i, j) |_{Propag} - C_b(i_i, j) H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_i - \frac{1}{2}, j) |_{Incidente}$$

donde el subíndice *Propag* indica campo calculado mediante el algoritmo de propagación (3.21)–(3.26).

De forma análoga se deducen las ecuaciones de iluminación para el resto de las componentes.

Este planteamiento de división zonal, que es el que se ha seguido en código desarrollado, presenta la ventaja frente al planteamiento en términos de campo dispersado, de tener que calcular el campo incidente sólo en la superficie de separación entre ambas zonas (y en sus inmediaciones), en vez de tener que hacerlo en todos los puntos del dispersor. Otra ventaja de esta aproximación está en el cálculo de campos en el interior de cavidades, donde el campo total puede llegar a ser muy pequeño. Para obtener este campo mediante un código que utilice la aproximación de campo dispersado, será preciso sumar el campo incidente al campo dispersado obtenido, con los consiguientes problemas de ruido numérico que surgen al sumar cantidades que son muy próximas y de signo contrario (Taflove y Umashankar, 1990b).

Como se ha visto cuando se utiliza la separación zonal, sólo va a ser preciso calcular los campos incidentes en la superficie de separación de las zonas de campo dispersado y campo total y en su cercanía. Las iluminaciones que se han empleado son ondas planas monocromáticas $A \sin(\omega t - \beta(x \cos \phi^i + y \sin \phi^i))$ o pulsadas gaussianas $A e^{-a^2((t-t_0) - \frac{1}{c}(x \cos \phi^i + y \sin \phi^i))^2}$, propagándose según un ángulo ϕ^i . Como en la práctica

esto supone el cálculo de un gran número de funciones seno o exponenciales, se recurre a la generación de una tabla de valores del siguiente modo.

Considérese una onda plana incidente (polarización TM) según la dirección ϕ^i (Figura (3.5)). Si se calculan los valores del campo incidente a lo largo de un segmento que pase por el vértice del rectángulo de zona total, que forme un ángulo ϕ^i con la horizontal, se tendrán calculados los campos en los planos de igual fase (perpendiculares al segmento). Es posible obtener el campo incidente sobre cualquier punto del contorno proyectando el punto donde se necesita el campo sobre este segmento, e interpolando entre los dos campos más próximos.

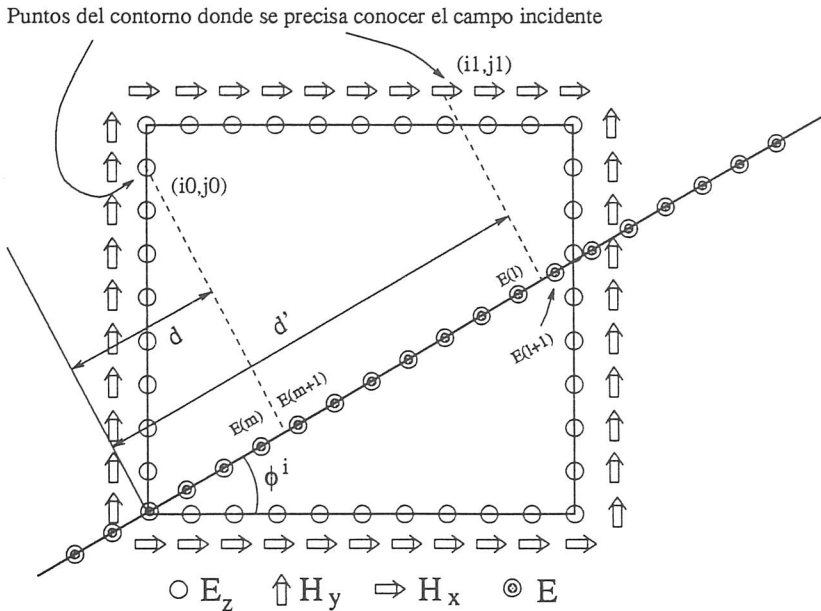


Figura 3.5: Interpolación del campo en un punto a partir de una tabla de valores

Si se conocen los valores del campo eléctrico incidente en los puntos del segmento (separados por una distancia Δ , por ejemplo) el valor de los campos eléctrico y magnético en los puntos (i_0, j_0) e (i_1, j_1) , respectivamente, se pueden obtener

$$E_z^n(i_0, j_0) = (d - \text{Ent}(d))E^n(m + 1) + (1 - (d - \text{Ent}(d)))E^n(m)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_1, j_1) = \frac{1}{Z} \left((d - \text{Ent}(d))E^{n+\frac{1}{2}}(l + 1) + (1 - (d - \text{Ent}(d)))E^{n+\frac{1}{2}}(l) \right)$$

donde Z es la impedancia del medio, y Ent denota parte entera. Por tanto, generando una tabla de valores a lo largo de un segmento es posible calcular el campo incidente donde se necesite sin tener que calcular la función específica del mismo.

Para generar esta tabla de valores es preciso conocer la velocidad de propagación de la onda en el medio. Como se estudiará posteriormente, aunque éste sea intrínsecamente

no dispersivo, existe una dispersión numérica introducida por el proceso de discretización. Por ello, será preciso calcular la velocidad efectiva de propagación, a partir de la relación de dispersión numérica, para generar la tabla de valores con esta velocidad de propagación numérica.

Como se ha dicho, se ha iluminado mediante ondas planas de dos tipos: monocromáticas y con forma de pulso gaussiano. Para las segundas es preciso tener en cuenta el teorema de muestreo a la hora de escoger los incrementos temporales. Si la excitación incidente en la dirección $\hat{n} = \cos \phi^i \hat{i} + \sin \phi^i \hat{j}$, es de la forma (polarización TM):

$$E_z^{inc}(\vec{r}, t) = A e^{-a^2((t-t_0) - \frac{1}{c} \hat{n} \cdot \vec{r})} \implies |E_z(\vec{r}, \omega)| = \frac{A}{\sqrt{2}a} \frac{e^{\omega^2}}{4a^2}$$

Tomando como frecuencia máxima del pulso f_{max} aquella a la que la amplitud en frecuencia cae a la milésima del máximo, y se llama $N_{clo} |_{min}$ a la resolución a tal frecuencia, es posible poner

$$a = \frac{\pi f_{max}}{\sqrt{\ln 1000}}, \quad N_{clo} |_{min} = \frac{c/f_{max}}{\Delta} \implies \Delta = \frac{c/f_{max}}{N_{clo} |_{min}}$$

y, al escoger el número de Courant satisfaciendo la condición de estabilidad $\frac{c\Delta t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2} f_{max} N_{clo} |_{min}}$$

de donde el teorema de muestreo impone sobre $N_{clo} |_{min}$ que sea mayor o igual que $\sqrt{2}$. Esta condición no es, en la práctica, restrictiva pues, para obtener buenos resultados, suelen usarse $N_{clo} |_{min}$ del orden de $5 \frac{c \text{ celdas}}{\lambda}$ o mayores.

3.2.1 Segundo orden temporal y cuarto espacial

Dado que para hacer avanzar una componente en un punto se precisan componentes situadas en la celda y media adyacente, en vez de solamente una, como era el caso de la aproximación de segundo orden, el algoritmo de iluminación necesita modificarse.

Para establecer la frontera de la Figura (3.4) entre campo total y campo dispersado, se plantea un problema de consistencia al propagar las componentes que precisen componentes que yazgan en medios distintos para su cálculo. Por tanto será preciso sumar o restar el campo incidente a los términos de las ecuaciones de propagación para que todos los campos involucrados sean o totales o dispersados. La interpretación mediante el teorema de equivalencia es análoga a la vista en aquella sección. Las expresiones resultantes para iluminar E_z en la frontera izquierda, en la polarización TM son las siguientes:

$$E_z^n(i_0, j) |_{Total} = E_z^n(i_0, j) |_{Propag} + \frac{C_b(i_0, j)}{24} \left(-27 H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j) |_{Incidente} + H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_0 - 3/2, j) |_{Incidente} \right)$$

$$E_z^n(i_0 + 1, j) |_{Total} = E_z^n(i_0 + 1, j) |_{Propag} + \frac{C_b(i_0 + 1, j)}{24} H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_0 - \frac{1}{2}, j) |_{Incidente}$$

$$E_z^n(i_0 - 1, j) |_{Disp} = E_z^n(i_0 - 1, j) |_{Propag} + \frac{C_b(i_0 - 1, j)}{24} H_y^{n-\frac{1}{2}}(i_0 + \frac{1}{2}, j) |_{Incidente}$$

Se observa que es preciso iluminar el campo en tres celdas, en vez de en una sólo, debido a que el algoritmo de propagación tiene una profundidad de celda y media.

3.3 Condiciones absorbentes

Se ha comentado anteriormente que una consideración básica al aplicar el algoritmo de diferencias finitas, es que la mayoría de los problemas, y, particularmente el cálculo del campo lejano, son abiertos y, por tanto, la región en que el campo deber ser computado es, idealmente, ilimitada. Debido a las limitaciones de memoria de la simulación computacional, es necesario, sin embargo, tener una región de cálculo finita. La zona de cálculo debe ser suficientemente grande para encerrar la estructura de interés y debe utilizarse una condición de contorno adecuada sobre la superficie de truncamiento más externa para simular la extensión de la zona de cálculo hasta el infinito. Las condiciones de este tipo se denominan en la literatura condiciones de radiación, condiciones absorbentes o condiciones de truncamiento de la red.

El truncamiento de la red espacial se utiliza para designar los planos de red más externos en la región de campo dispersado. Los campos en estos planos no pueden calcularse utilizando los operadores centrales debido a la ausencia de datos sobre el campo en los puntos fuera de la red. Por tanto se requiere una condición de truncamiento auxiliar. Esta condición debe ser consistente con las ecuaciones de Maxwell de forma que una onda propagándose hacia fuera que incida sobre el plano de truncamiento debe salir de la red sin reflexión significativa (idealmente nula), esto es, como si la superficie de truncamiento fuese transparente. Un error en el algoritmo de truncamiento implica errores acumulativos para todos los instantes de tiempo después de que las reflexiones no deseadas lleguen a la vecindad del punto de observación.

Considérese ahora el problema con más detalle. La observación de las Ecs. (3.21)-(3.26) indica que los valores de las componentes del campo en los planos de truncamiento de la red no pueden obtenerse de este conjunto de ecuaciones debido a la naturaleza centrada de las derivadas espaciales. Por tanto, estos valores deben calcularse utilizando una condición de truncamiento auxiliar numéricamente estable y consistente con las ecuaciones de Maxwell.

Una cualidad deseable de la condición de truncamiento es que relacione de una forma simple los valores de las componentes del campo en los planos de truncamiento a los valores de las componentes del campo uno o más intervalos espaciales dentro de la red.

El tratamiento que se va a describir a continuación fue desarrollado en (Engquist y Majda, 1977) (1979) y llevado a cabo en (Mur, 1981) con buenos resultados. Sea la ecuación de ondas bidimensional para una componente ψ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

con c la velocidad de fase. Notando los operadores

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \partial_{1t} = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$L = \partial_x^2 + \partial_y^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2$$

es posible escribir la ecuación de ondas como

$$L\psi = 0$$

El operador L puede ser factorizado mediante los pseudo-operadores diferenciales L^+ , L^- y S como $L\psi = L^+ L^- \psi = 0$ con

$$L^+ = \partial_x + \frac{\partial_t}{c} \sqrt{1 - S^2} \quad , \quad L^- = \partial_x - \frac{\partial_t}{c} \sqrt{1 - S^2}$$

y

$$S = \frac{c \partial_y}{\partial_t}$$

Se puede probar (Engquist y Majda, 1979) que la aplicación de L^- , por ejemplo, a la función de onda ψ , en $x = 0$ absorbe totalmente una onda plana que se incide con un ángulo arbitrario sobre esa frontera en sentido saliente (hacia la izquierda). Análogamente, L^+ lo hará sobre la frontera opuesta en sentido saliente a la misma (hacia la derecha). Es posible aproximar simbólicamente el pseudo-operador S mediante aproximantes de Padé. El primer y segundo término de esta expansión coinciden respectivamente con el primer y segundo término del desarrollo en serie de Taylor.

Primer orden:

$$\sqrt{1 - S^2} \simeq 1$$

con lo que

$$L^- \psi \Big|_{x=0} \simeq \mathcal{B}_1 \psi \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.32)$$

Segundo orden

$$\sqrt{1 - S^2} \simeq 1 - \frac{S^2}{2}$$

con lo que

$$L^- \psi \Big|_{x=0} \simeq \mathcal{B}_2 \psi \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.33)$$

Utilizando aproximaciones de orden superior mediante los aproximantes de Padé se obtiene una relación de recurrencia que liga a la aproximación n -ésima de L^- con las anteriores mediante

$$\mathcal{B}_N \psi \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{B}_{N-1} \psi + \frac{c}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathcal{B}_{N-2} \psi \right) \Big|_{x=0}$$

Particularizando para una onda incidente plana viajando hacia $x = 0$ de la forma $\psi(ct + x \cos \theta + y \sin \theta)$, el operador L^- actuando sobre esta onda da exactamente 0, pues se cumple

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\cos \theta}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad \forall x, y, \theta$$

la primera aproximación a $L^- \mathcal{B}_1$ resulta

$$\mathcal{B}_1 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \cos \theta - 1 \simeq 0$$

considerando, en primera aproximación ($\theta \ll 1$)

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \simeq 1$$

La aproximación \mathcal{B}_2 a L^- corresponde a

$$\mathcal{B}_1 \psi = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \psi = \cos \theta - 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \simeq 0$$

considerando, en segunda aproximación

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta$$

y, en general, cada aproximación corresponderá a un desarrollo de la función $\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ mediante aproximantes de Padé. Estas aproximaciones serán tanto mejores cuanto más pequeño sean las desviaciones del ángulo de incidencia frente a la normal al plano de truncamiento. Se prueba (Deveze, 1992) que el coeficiente de reflexión asociado a una condición de grado n es

$$|R_n| = \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^n$$

La aproximación de Mur está basada en la discretización mediante diferencias centradas de segundo orden, de las Ecs. (3.32) y (3.33)¹. Si la frontera de truncamiento se hace coincidir, por ejemplo, con los E_z (polarización TM), sólo hay que aplicar las anteriores ecuaciones a los E_z que yazgan en la frontera. Al estar situados los campos magnéticos media celda hacia adentro, no es preciso aplicar esta condición sobre los

¹Es posible probar su estabilidad mediante el método GKS

mismos. Análogamente para la polarización TE el truncamiento se hace en los H_z y sólo es preciso aplicar los operadores L^+ y L^- a estas componentes. La substitución por diferencias centradas se hace aplicado los operadores en diferencias a puntos de la red virtual situado media a media celda de la frontera en el interior de la región de cálculo, promediando cuando el campo no caiga en nudos de la red principal, del siguiente modo (polarización TM)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} E_z^n\left(\frac{1}{2}, j\right) &= \frac{\frac{\partial E_z^{n+1}\left(\frac{1}{2}, j\right)}{\partial x} - \frac{\partial E_z^{n-1}\left(\frac{1}{2}, j\right)}{\partial x}}{\Delta t} \\ &= \frac{\left(\frac{E_z^{n+1}(1, j) - E_z^{n+1}(0, j)}{\Delta}\right) - \left(\frac{E_z^{n-1}(1, j) - E_z^{n-1}(0, j)}{\Delta}\right)}{\Delta t} \\ \\ \frac{\partial^2 E_z^n\left(\frac{1}{2}, j\right)}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E_z^n(0, j)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 E_z^n(1, j)}{\partial t^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{E_z^{n+1}(0, j) - 2E_z^n(0, j) + E_z^{n-1}(0, j)}{\Delta t^2} + \frac{E_z^{n+1}(1, j) - 2E_z^n(1, j) + E_z^{n-1}(1, j)}{\Delta t^2} \right] \\ \\ \frac{\partial^2 E_z^n\left(\frac{1}{2}, j\right)}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E_z^n(0, j)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z^n(1, j)}{\partial y^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1)}{\Delta y^2} + \frac{E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1)}{\Delta y^2} \right] \end{aligned}$$

La discretización de la primera aproximación para los puntos de la frontera izquierda es

$$E_z^{n+1}(0, j) = E_z^n(1, j) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^{n+1}(1, j) - E_z^n(0, j) \right)$$

que puede ser aplicada $\forall j$. La segunda aproximación resulta

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(0, j) &= -E_z^{n-1}(1, j) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^{n+1}(1, j) + E_z^{n-1}(1, j) \right) \\ &\quad + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^n(0, j) + E_z^n(1, j) \right) + \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)} \\ &\quad \left(E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1) + E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1) \right) \end{aligned}$$

donde se observa que para calcular el campo en el instante $n+1$ en una posición j es preciso conocer los valores en $j+1$ y $j-1$ en el instante n . Por tanto este algoritmo no es aplicable a las esquinas por carecer de esos valores en la región de cálculo.

3.3.1 Tratamiento de las esquinas

Para obtener el algoritmo de absorción en las esquinas, se va a poner la velocidad numérica $c_n = 2$. La extensión a otros valores no presenta dificultades.

Se tomará que las ondas numéricas se propagan radialmente desde el centro de la red y se simulará su absorción en la esquina $(0,0)$ mediante el operador de primer orden (Figura (3.6)). Si $\psi^n(0,0)$ es el valor del campo que se va a absorber en el instante n , al

haber escogido $\Delta = 2c\Delta t$, en la celda $(0,0)$ habrá en ese instante el valor \bar{W} retardado dos instantes temporales en una celda interior situada a un Δ de la misma, atenuado en un factor f_r .

$$W^{n+1}(0,0) = f_r \bar{W}^{n-1}$$

LLamando d a la distancia de la esquina al centro de la red, y, puesto que la geometría es bidimensional, el factor de atenuación valdrá

$$f_r = \left(\frac{d-1}{d}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

Una simple interpolación lineal permite expresar \bar{W} en función de los valores retardados de la componente en los puntos vecinos

$$\begin{aligned} \bar{W}^{n-1} = & (1 - \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)W^{n-1}(0,0) + (1 - \sin \alpha) \cos \alpha W^{n-1}(1,0) \\ & + \sin \alpha(1 - \cos \alpha)W^{n-1}(0,1) + \sin \alpha \cos \alpha W^{n-1}(1,1) \end{aligned}$$

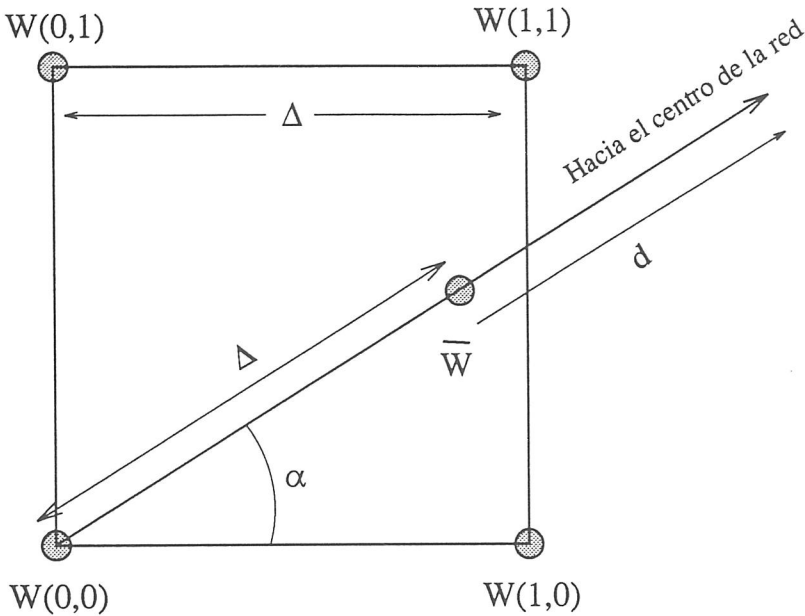


Figura 3.6: Absorción en la esquina $(0,0)$

3.3.2 Segundo orden temporal y cuarto espacial

Los algoritmos de absorción son idénticos a los utilizados en la aproximación de segundo orden a las derivadas espaciales. La diferencia radica en los puntos a los que éste se aplica, y viene dada por el hecho de que los campos eléctricos situados a una distancia

de una celda de la frontera necesitarían, para su propagación, los campos magnéticos a una profundidad de una celda y media, y, por tanto, no es posible obtenerlos mediante el mismo algoritmo, al estar uno de ellos fuera de la región de cálculo. Por ello, también a estos campos eléctricos que están a una distancia de una celda del plano de truncamiento, se les aplica el operador de absorción de segundo orden, discretizado según el esquema de Mur mediante diferencias finitas centradas de segundo orden. En las esquinas se usa igual esquema que en la sección anterior.

Para el campo magnético también es preciso aplicar el operador de absorción en los puntos interiores a la corona cuadrada definida por los contornos sobre los que se absorbe el campo eléctrico. La razón es, asimismo, la de que el campo magnético también necesitaría una profundidad de una celda y media para propagarse mediante el algoritmo de cuarto orden. En la Figura (3.7) se muestran las componentes que deben ser absorbidas para la polarización TM.

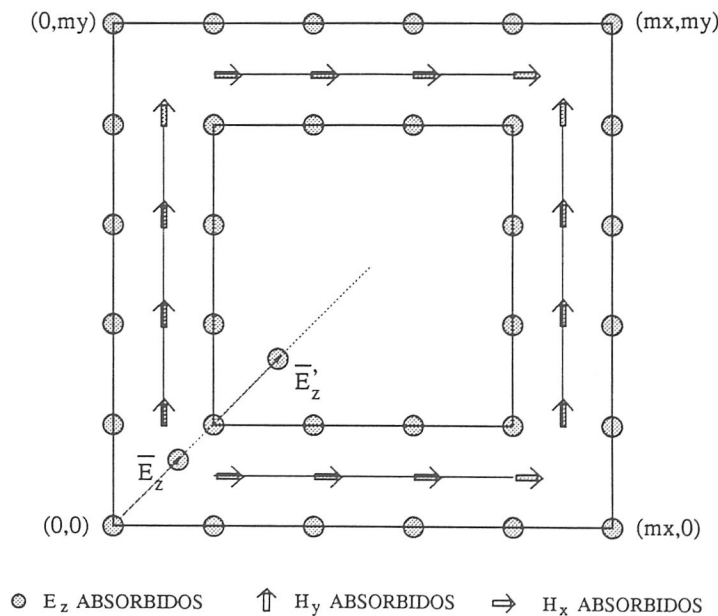


Figura 3.7: Componentes que deben ser absorbidas en la aproximación de cuarto orden a las derivadas espaciales. Polarización TM.

He aquí las expresiones resultantes para absorber E_z en los contornos interior y exterior

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(0, j) = & -E_z^{n-1}(1, j) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^{n+1}(1, j) + E_z^{n-1}(1, j) \right) \\
 & + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^n(0, j) + E_z^n(1, j) \right) + \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)} \\
 & \left(E_z^n(0, j + 1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j - 1) + E_z^n(1, j + 1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j - 1) \right)
 \end{aligned}$$

$$\forall j = 1, \dots, m_y - 1$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(1, j) = & -E_z^{n-1}(2, j) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^{n+1}(2, j) + E_z^{n-1}(2, j) \right) \\ & + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(E_z^n(1, j) + E_z^n(2, j) \right) + \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)} \\ & \left(E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(2, j) + E_z^n(1, j-1) + E_z^n(2, j+1) - 2E_z^n(2, j) + E_z^n(2, j-1) \right) \end{aligned}$$

$$\forall j = 2, \dots, m_y - 2$$

$$E_z^{n+1}(0, 0) = f_{r0} \bar{E}_z^{n-1}$$

$$E_z^{n+1}(1, 1) = f_{r1} \bar{E}'_z^n$$

con \bar{E}^n y \bar{E}'^n calculados a partir de la Ec. (3.6), y f_{r0} y f_{r1} factores de atenuación, que son diferentes por depender de la distancia al centro.

Y para H_y izquierda y H_x abajo

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j\right) = & -H_y^{n-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}, j\right) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, j\right) + H_y^{n-\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}, j\right) \right) \\ & + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j\right) + H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, j\right) \right) + \\ & \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)} \left(H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j+1\right) - 2H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j\right) + H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, j-1\right) \right. \\ & \left. + H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, j+1\right) - 2H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, j\right) + H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, j-1\right) \right) \end{aligned}$$

$$\forall j = 1, \dots, m_y - 1$$

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, \frac{1}{2}\right) = & -H_x^{n-\frac{3}{2}}\left(i, \frac{3}{2}\right) + \frac{c\Delta t - \Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, \frac{3}{2}\right) + H_x^{n-\frac{3}{2}}\left(i, \frac{3}{2}\right) \right) \\ & + \frac{2\Delta}{c\Delta t + \Delta} \left(H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, \frac{1}{2}\right) + H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, \frac{3}{2}\right) \right) + \\ & \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta(c\Delta t + \Delta)} \left(H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+1, \frac{1}{2}\right) - 2H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, \frac{1}{2}\right) + H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-1, \frac{1}{2}\right) \right. \\ & \left. + H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i+1, \frac{3}{2}\right) - 2H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i, \frac{3}{2}\right) + H_x^{n-\frac{1}{2}}\left(i-1, \frac{3}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\forall i = 1, \dots, m_x - 1$$

3.4 Dispersión y Estabilidad

El punto de partida del estudio de la dispersión y de la estabilidad por el método de Von-Neumann es distinto, pero ambos se reducen al planteamiento de un problema de autovalores. Para la estabilidad se expande una perturbación de las condiciones iniciales en serie de Fourier y se estudia su propagación mediante el esquema en diferencias. Para la dispersión son las condiciones iniciales, propiamente, las que se expanden, y se estudia su propagación. Como tanto las condiciones iniciales, como una perturbación sobre las mismas, se propagan de análoga forma, el estudio es común a partir de este punto.

El caso bidimensional es una particularización del tridimensional (2.1) con A_1 , A_2 y A_3 matrices 6×6 de constantes dadas por

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

3.4.1 Segundo orden espacial y temporal

Sea un armónico genérico de la forma

$$\mathbf{B} e^{\Omega n \Delta t} e^{j \vec{\beta} \cdot \vec{r}} = \mathbf{B} e^{\frac{\Omega}{c} n \Delta \tau} e^{j \vec{\beta} \cdot \vec{r}} \quad \text{con} \quad \Omega = \Omega(\vec{\beta}) \in \mathbb{C} \quad (3.35)$$

con \mathbf{B} vector de la forma (2.40) y $\Delta \tau = c \Delta t$. Si este armónico se propaga mediante la discretización de (2.39) con el esquema del salto de la rana (sustituyendo las derivadas con relación a α por el operador $D_{\frac{1}{2}\alpha}$), la ecuación de autovalores (2.49) se reduce en el caso bidimensional a

$$\lambda_\tau I_Q \mathbf{B} = -(\lambda_x A_1 + \lambda_y A_2) \mathbf{B}$$

con λ_α los autovalores de los operadores $D_{\frac{1}{2}\alpha}$, dados por

$$\lambda_\tau = \frac{2}{\Delta \tau} \operatorname{senh}\left(\frac{\Omega}{c} \frac{\Delta \tau}{2}\right) = \frac{1}{c} \lambda_t = \frac{2}{c \Delta t} \operatorname{senh}\left(\Omega \frac{\Delta t}{2}\right)$$

$$\lambda_x = \frac{2j}{\Delta x} \sin\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) \quad , \quad \lambda_y = \frac{2j}{\Delta y} \sin\left(\beta_y \frac{\Delta y}{2}\right)$$

propagación que, si \mathbf{B} no es nulo, es sólo posible si se cumple que el sistema de ecuaciones no admite como única a la solución trivial,

$$\det\left(I_6 \lambda_\tau + \lambda_x A_1 + \lambda_y A_2\right) = 0$$

que es la relación de dispersión del método.

La condición suficiente de estabilidad se da cuando (los múltiplos de los incrementos están divididos por 2)

$$|e^{\frac{\Omega}{c}\Delta\tau}| \leq 1 \iff \begin{cases} \Re\{e^{\lambda_\tau}\} = 0 \\ |\Im\{e^{\lambda_\tau}\}| \leq \frac{2}{\Delta\tau} \end{cases}$$

Para las ecuaciones bidimensionales de Maxwell resueltas mediante el salto de la rana (2.52) se escribe

$$\begin{vmatrix} \lambda_\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_y \\ 0 & \lambda_\tau & 0 & 0 & 0 & \lambda_x \\ 0 & 0 & \lambda_\tau & \lambda_y & -\lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_x & 0 & \lambda_\tau & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & \lambda_\tau \end{vmatrix} = \lambda_\tau^2(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 - \lambda_\tau^2) = 0$$

y la condición de estabilidad

$$\Re\{e^{\lambda_\tau}\} = 0 \quad \forall \vec{\beta}$$

y

$$|\Im\{e^{\lambda_\tau}\}| = \sqrt{\frac{\sin^2(\beta_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\beta_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2}} \leq \frac{1}{\Delta\tau}$$

condición que se cumple $\forall \vec{\beta}$ si y solo si

$$c\Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \leq 1$$

y si $\Delta \equiv \Delta x = \Delta y$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La criterio CFL fue deducido en el capítulo anterior ² (Ec. (2.53)) e imponía igual condición que la obtenida mediante Von-Neumann.

La relación entre los autovalores espaciales y temporales constituye la relación de dispersión

$$c^{-2}\lambda_t^2 = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 \tag{3.36}$$

que para esquemas estables ($\Omega = j\omega$) se convierte en

$$\frac{\sin^2(\beta_x \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\beta_y \frac{\Delta y}{2})}{\Delta y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\sin^2(\omega \frac{\Delta t}{2})}{\Delta t^2}$$

²Los efectos de tener los incrementos divididos por 2 se cancelan mutuamente

que se reduce a la usual $\beta_x^2 + \beta_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ para el caso analítico bidimensional, en el límite de incrementos nulos.

Por tanto, existe una anisotropía numérica en la propagación de modos en la red discretizada.

3.4.2 Cuarto orden espacial y segundo temporal

La forma explícita de la relación de dispersión (3.36) se obtiene, en este caso, sustituyendo los autovalores de los operadores que aproximan a las derivadas espaciales hasta cuarto orden.

$$\frac{9}{8}D_{\frac{1}{2}\alpha} - \frac{1}{8}D_{\frac{3}{2}\alpha}$$

que se obtienen aplicándolo a autovectores un del tipo (3.35), y son

$$\lambda_x = \frac{9j}{4\Delta x} \sin\left(\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right) + \frac{j}{12\Delta x} \sin\left(3\beta_x \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lambda_y = \frac{9j}{4\Delta y} \sin\left(\beta_y \frac{\Delta y}{2}\right) + \frac{j}{12\Delta y} \sin\left(3\beta_y \frac{\Delta y}{2}\right)$$

y la relación de dispersión queda, para esquemas estables ($\Omega = j\omega$)

$$\left(\frac{9}{4} \sin\left(\frac{\beta_x \Delta x}{2}\right) - \frac{1}{12} \sin\left(\frac{3\beta_x \Delta x}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{9}{4} \sin\left(\frac{\beta_y \Delta y}{2}\right) - \frac{1}{12} \sin\left(\frac{3\beta_y \Delta y}{2}\right)\right)^2 = 4 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)}{\Delta t^2} =$$

La condición de estabilidad surge de imponer

$$\Re\{\lambda_t\} = 0$$

$$|\Im\{\lambda_t\}| \leq \frac{2}{c\Delta t}$$

es decir

$$c\Delta t \left(\left(\frac{9}{4} \sin\left(\frac{\beta_x \Delta x}{2}\right) - \frac{1}{12} \sin\left(\frac{3\beta_x \Delta x}{2}\right) \right)^2 + \left(\frac{9}{4} \sin\left(\frac{\beta_y \Delta y}{2}\right) - \frac{1}{12} \sin\left(\frac{3\beta_y \Delta y}{2}\right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

para todo $\vec{\beta}$, lo cual se cumple si

$$c\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}$$

y si $\Delta \equiv \Delta x = \Delta y = \Delta z$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta} \leq \frac{6}{7\sqrt{2}}$$

Para obtener la condición CFL basta tener en cuenta que la pirámide de la Figura (2.2) tiene como base un rombo de semidiagonales $\frac{3}{2}\Delta x$ y $\frac{3}{2}\Delta x$, con lo que (2.53) se traduce en

$$c\Delta t \leq \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}}$$

y cuando $\Delta \equiv \Delta x = \Delta y = \Delta z$

$$\frac{c\Delta t}{\Delta} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Se observa que el criterio CFL impone sobre el incremento temporal, una condición de estabilidad más relajada que el criterio de Von-Neumann.

3.5 Conformación

Una de las características del método de diferencias finitas aplicado a la resolución de las ecuaciones rotacionales de Maxwell con coeficientes no constantes, para el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras materiales, es la división del espacio de solución en una red espacio temporal de paso constante. Las variaciones de los coeficientes de la ecuación diferencial se traducen en variaciones de los coeficientes del esquema en diferencias de una celda a otra. Cuando se estudia, por ejemplo, la interacción de una onda electromagnética con un objeto conductor de geometría curvada, la conductividad es no nula en el interior del mismo y la frontera en la que cambia desde cero al valor dado, es la frontera curva del objeto. Al estar permitidas, por la forma de construcción de un esquema en diferencias, sólo transiciones de los coeficientes de los mismos de una celda a otra, las variaciones de estos coeficientes se producen a lo largo un contorno escalonado que aproximará de un modo más o menos burdo, dependiendo de la finura de la discretización, al contorno original. A este efecto se le conoce en la literatura como escalonamiento y aunque la consistencia del esquema conjunto que trata el problema de coeficientes variables está garantizado, si los esquemas son localmente consistentes, el error introducido puede llegar a ser grande. En (Cangellaris y Wright, 1991) se ha demostrado la existencia de modos superficiales que se propagan sobre el contorno escalonado, y que no se presentan en el problema original; además las ondas superficiales se propagan más lentamente sobre el contorno escalonado que sobre el contorno curvo. Estos efectos desaparecen al hacer tender los incrementos a cero.

Según se vio en el primer capítulo, se han propuesto muchos métodos para tratar el problema. Todos ellos se basan en una distorsión local o global de la red espacial, para adaptarla a las variaciones de las propiedades electromagnéticas del medio que se va a estudiar. En este apartado se va a modificar localmente el esquema en diferencias para tratar el problema de la interacción de una onda con una estructura bidimensional curva perfectamente conductora. El método que se va a seguir fue propuesto formalmente

(Jurgens *et al.*, 1992) y se conoce en la literatura con el nombre de *Contour Path method*. En el cuarto capítulo de la presente memoria se propone un método para aplicarlo a estructuras tridimensionales mediante un algoritmo de conformación volúmica. Recientemente, en (Jurgens y Taflove, 1993), se extiende en la forma de integral de contorno a problemas tridimensionales.

Según se vio en el capítulo anterior, los requerimientos básicos de cualquier esquema en diferencias que aproxime a un problema diferencial, se centran en: consistencia del esquema con el problema, convergencia de la solución del esquema a la solución del problema y estabilidad del esquema (equivalente a convergencia para esquemas consistentes). El estudio de la estabilidad del esquema centrado para resolver el problema de Cauchy puro, se ha efectuado en epígrafes anteriores, mediante el método de Von-Neumann y el criterio de Courant-Friedricks-Lewy. El estudio se ha llevado a cabo ignorando las variaciones de coeficientes en la ecuación y estableciendo un criterio local para cada zona de coeficientes constantes. Aunque difícil de probar analíticamente, en la práctica si no se satisface el criterio de estabilidad para cada zona de coeficientes constantes, el esquema es inestable (planteado como problema puro de valores iniciales). En este apartado aparecen esquemas en diferencias con fuertes variaciones locales de los coeficientes del esquema. Realmente, en las celdas espaciales contiguas con el objeto conductor el esquema de solución va a cambiar de celda a celda. En estas condiciones puede no ser suficiente estudiar el problema localmente. Sin embargo la aplicación de la teoría GKS, que permitiría tratar el problema de forma general, es extremadamente complicada en más de una dimensión. Por ello, se estudiará el problema mediante el método de Von-Neumann suponiéndolo un problema local de coeficientes constantes, y se darán condiciones necesarias de estabilidad, que, aunque en la práctica pueden ser excesivamente estrictas dado que el problema de coeficientes constantes se limita espacialmente a pocas celdas, nos darán idea de la estabilidad del método. Es de resaltar que no se encuentra en la literatura un tratamiento riguroso del problema de la estabilidad para esquemas deformados en más de una dimensión, y, generalmente, se recurre a comprobaciones numéricas como método de estudio de la misma.

La obtención de esquemas que permitan tratar el problema de variaciones de los coeficientes en regiones curvas, se puede tratar adecuadamente aproximando las ecuaciones de Faraday y Ampère en forma integral en las celdas contiguas al objeto. Este método mantiene la aproximación central a las derivadas lejos del dispersor y calcula la circulación de los campos a lo largo de celdas localmente deformadas, relacionándola con las variaciones de los flujos cortados por las mismas. La ley de Faraday en forma integral,

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_L} \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

y la ley de Ampère

$$\mu_0 \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \int_{S_L} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

se pueden aproximar numéricamente para una celda de lados l_i poniendo

$$\int_0^{l_i} \varphi dl \simeq \varphi\left(\frac{l_i}{2}\right) \cdot l_i \quad , \quad \int_{S_a} \psi dS \simeq \psi(\text{Centro de } S_a) \cdot S_a$$

Si la celda es cuadrada (Figura (3.8)) las ecuaciones de evolución que se obtienen mediante las aproximaciones anteriores coinciden con las de la aplicación del esquema centrado espacio-temporal de segundo orden.

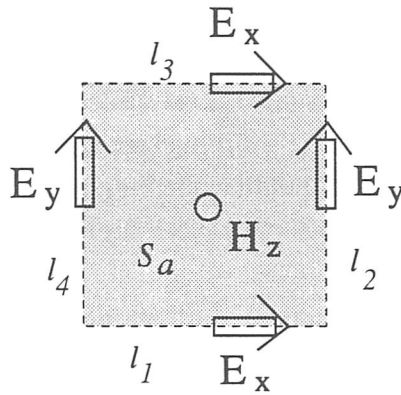


Figura 3.8: Celda unitaria para la polarización TE

Esta correspondencia directa de los algoritmos obtenidos aproximando las derivadas en las ecuaciones diferenciales, y las integrales en las ecuaciones integrales, no se mantiene cuando el orden del esquema diferencial es superior, o se usa una regla de integración numérica diferente.

En lo que sigue se particularizará el estudio bidimensional a la polarización TE, siendo el caso TM de un tratamiento similar, e incluso más simple. La Figura (3.10) representa la distorsión de las celdas adyacentes al dispersor, en las cuales se utilizará un esquema local derivado de la discretización de la ley de Faraday en forma integral. Para calcular explícitamente la evolución del campo magnético en el centro de cada una de las celdas deformadas, se evalúa la circulación del eléctrico a lo largo del camino de Faraday formado por su contorno y se relaciona con las variaciones temporales del flujo del campo magnético a través de la superficie plana de la celda. Si el dispersor es un conductor perfecto, la contribución a la circulación del camino sobre el dispersor se anula, quedando la circulación sobre los lados que están en el vacío. Para obtener la ecuación de evolución del campo eléctrico sería preciso calcular la circulación del campo magnético a lo largo de un camino de Ampère que intersectase (ver Figura (3.9)) al de

Faraday perpendicularmente, y relacionarla con el flujo del campo eléctrico a través del plano que se apoya en ese camino limitado por el mismo, y con el flujo de las corrientes eléctricas a través de tal superficie. Como quiera que éste último término sería difícil de evaluar, se puede evitar calcular la evolución temporal de este campo eléctrico, si, doquiera sea preciso para calcular el magnético mediante la ley de Faraday, se substituye por el más cercano en su dirección, para cuyo cálculo no se precise tener en cuenta las corrientes. A esta aproximación se le denomina *aproximación del vecino más cercano* (AVC).

En la Figura (3.9), por ejemplo, para obtener el flujo de $H_z(i + .5, j + .5)$ a través de la celda horizontal sombreada, se precisaría calcular las circulaciones de $E_x(i + .5, j)$, $E_x(i + .5, j + 1)$, $E_y(i, j + .5)$ y E^{tan} sobre cada uno de los lados que limitan a la celda. Como para calcular el flujo de $E_x(i + .5, j + 1)$ a través de la celda vertical se precisarían las circulaciones de $H_z(i + .5, j + .5)$, $H_z(i + .5, j + 1.5)$, H_y^{arr} y H_y^{aba} sobre los lados que la limitan, además del flujo de las corrientes superficiales, se evita calcular este campo eléctrico, y en donde fuere necesario, se utiliza el campo eléctrico más cercano en su dirección. En nuestro caso, $E_x(i + .5, j + 1)$ era necesario en el cálculo de $H_z(i + .5, j + .5)$, para hacerlo circular a lo largo de uno de los lados; en vez de $E_x(i + .5, j + 1)$ se utiliza en la circulación $E_x(i - .5, j + 1)$, para cuya posterior obtención no se necesita involucrar corrientes.

La aplicación de esta aproximación, nos lleva a las siguientes ecuaciones para las celdas marcadas como 1 y 2 en la Figura (3.10).

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu_0 S_1} \\
 & (l_b E_y^n(i_1, j_1 + \frac{1}{2}) - l_d E_y^n(i_1 + 1, j_1 + \frac{1}{2}\{-1\}) + \\
 & l_a E_x^n(i_1 + \frac{1}{2}\{-1\}, j_1 + 1) - l_c E_x^n(i_1 + \frac{1}{2}, j_1))
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_2 + \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i_2 + \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu_0 S_2} \\
 & (l_i E_y^n(i_2, j_2 + \frac{1}{2}) - l_k E_y^n(i_2 + 1, j_2 + \frac{1}{2}) + l_j E_x^n(i_2 + \frac{1}{2}, j_2 + 1))
 \end{aligned}$$

donde S_α son las superficies de las celdas y l_α las longitudes de sus lados. Las contribuciones a las circulaciones de las componentes tangenciales de los campos eléctricos se han anulado, pues se ha supuesto un dispersor perfectamente conductor. Entre llaves se han enfatizado los desplazamientos que es preciso sumar o restar a las coordenadas de los campos eléctricos que se hacen circular, para utilizar la AVC. Al no calcularse los campos eléctricos en los caminos de Ampère deformados, las ecuaciones de evolución para los mismos, son las usuales para el esquema centrado de segundo orden en tiempo y espacio, estudiado en secciones anteriores.

Por tanto, en la implementación numérica de este método, basta con substituir el algoritmo clásico sólomente en las celdas frontera entre medios, no sólo las que contengan ambos medios, sino también aquellas que hayan de deformarse, según se ha visto, para

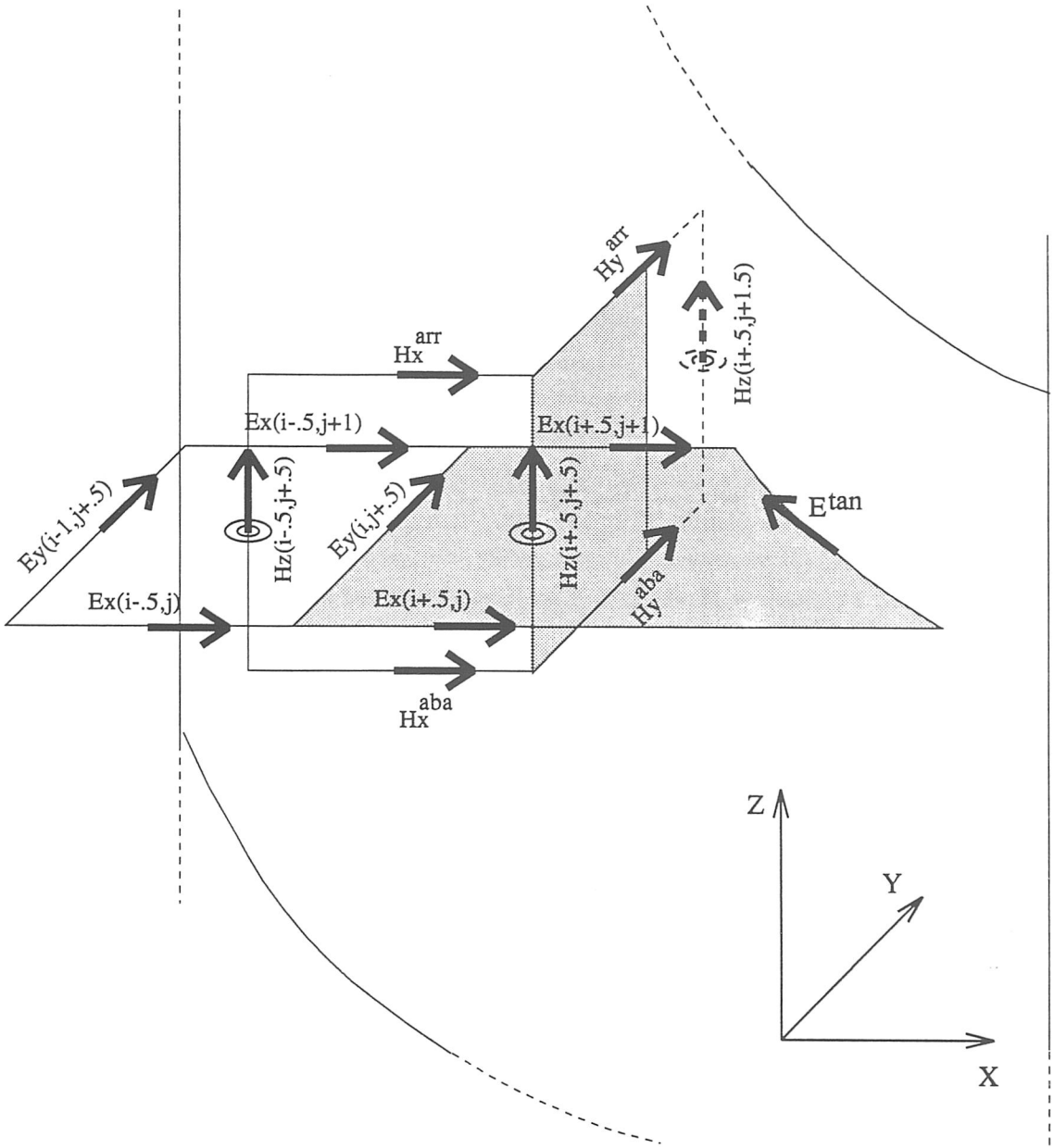


Figura 3.9: Intersección entre los contornos de Faraday y Ampère para una celda deformada

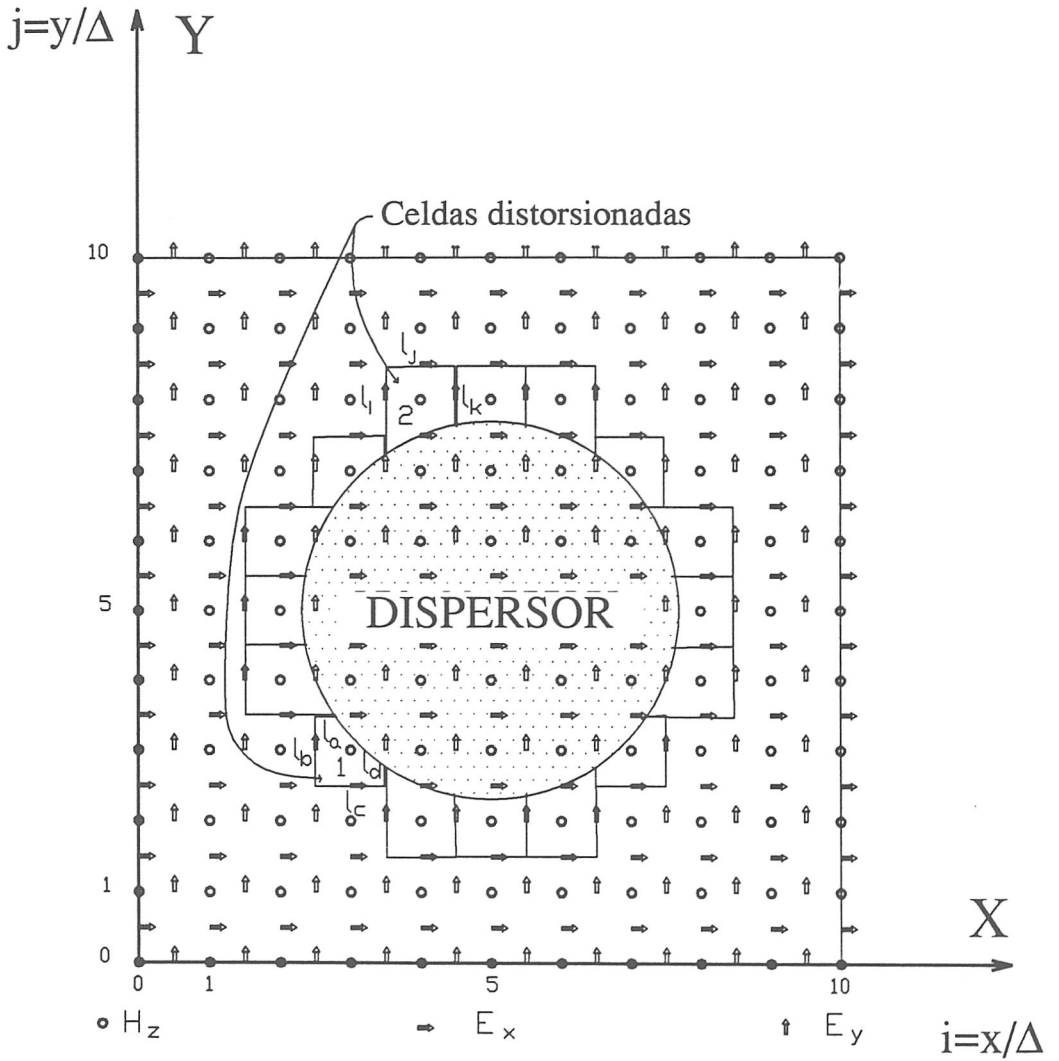


Figura 3.10: Sección transversal de un cilindro perfectamente conductor, conformado. Sólo se muestran los contornos de Faraday deformados.

adaptarse al dispersor, manteniendo para el resto de las ecuaciones usuales. Sólomente es preciso deformar los contornos de Faraday, pues no se precisan los campos eléctricos que pertenecen a contornos de Ampère que cruzan la interfase, al utilizarse los campos más cercanos a éstos para hacerlos circular sobre los contornos de Faraday cuando sean precisos.

La única dificultad del método radica en la generación del modelo para superficies arbitrarias. En el caso de dispersores cuyo contorno pueda ser expresado analíticamente de forma simple, es posible generar de modo exacto la información que precisa el algoritmo, a saber: longitudes de los lados deformados y superficie de la celda deformada. Si los dispersores no poseen contornos analíticos simples se utiliza la siguiente técnica: se malla el dispersor con una red mucho más fina de la que se va a utilizar para el algoritmo usual y, a partir de esta subred, se calculan las longitudes y superficies necesitadas por el algoritmo de conformación. La importancia de este planteamiento radica en la simplicidad de implementación computacional, ya que, a partir de los códigos que hacen un modelo escalonado del objeto con un determinado incremento espacial, es posible extraer la información de superficies y longitudes que necesita el programa de cálculo con conformación para un incremento espacial mayor. En el capítulo siguiente se efectúa una comparación de las relaciones entre el incremento de la red principal y el de la subred auxiliar, para obtener buenos resultados. En el Apéndice B se resumen las necesidades computacionales del método.

La conformación de materiales dieléctricos se lleva a cabo de modo similar. La única información adicional que se necesita es la longitud del lado sobre el dispersor, para hacer circular por ella al campo eléctrico, que ahora, al no ser nulo, se calcula mediante interpolación de los campos a ambos lados.

3.5.1 Estabilidad

El método de conformación puede ser visto como un problema de frontera, en el cual los coeficientes del esquema en diferencias cambian. Para tratar en rigor la estabilidad de este problema, sería preciso acudir a las técnicas desarrolladas en el primer capítulo (matricial y GKS) para problemas de frontera. Sin embargo, dada la complejidad de éstas últimas, especialmente en problemas multidimensionales, se va a estudiar simplificada-mente la estabilidad del método de conformación mediante el criterio de Von-Neumann, aplicado al problema puro de valores iniciales, ignorando, incluso, las condiciones de truncamiento. Aunque las conclusiones no pueden tomarse al pie de la letra, constituyen una primera explicación de los problemas de crecimiento en la respuesta tardía que se aprecian numéricamente. Por tanto, dados unos coeficientes de la ecuación en diferencias, válidos sólo en una celda para aplicar el esquema, se va a suponer, como

punto de partida, que en toda la red se utiliza un esquema con esos coeficientes ³.

Al igual que se definieron los operadores diferencias centradas espacial y temporal de segundo orden, es posible definir el operador diferencia pesada espacial, de la siguiente forma:

$${}_a^b D_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(\alpha_2, \beta_2)} \varphi(i_0, j_0) = a\varphi(i_0 + \alpha_1, j_0 + \beta_1) - b\varphi(i_0 + \alpha_2, j_0 + \beta_2) \quad (3.38)$$

Al aplicar el método a armónicos del tipo

$$e^{\Omega n \Delta t} e^{j(\beta_x i_0 + \beta_y j_0) \Delta}$$

con Ω complejo en general, se debe mantener limitado el crecimiento de la parte temporal. Para ello es preciso imponer

$$|e^{\Omega \Delta t}| \leq 1$$

que era equivalente (2.37) a (tener en cuenta que se usan operadores en diferencias (2.11) con p semientero)

$$\begin{aligned} \Re\{\lambda_t\} &= 0 \\ |\Im\{\lambda_t\}| &\leq \frac{2}{\Delta t} \end{aligned}$$

La relación entre los autovalores temporales λ_t y los espaciales viene dada por la relación de dispersión. La ecuación de autovalores es

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot \varphi_t^n = \lambda_t \varphi_t^n$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_t^n &= e^{\Omega n \Delta t} \\ \lambda_t &= \frac{2}{\Delta t} \sinh(\Omega \Delta t / 2) \end{aligned}$$

Poniendo las ecuaciones en diferencias para la celda 1 de la Figura (3.10), operacionalmente

$$\begin{aligned} D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_z^n(\vec{q}_1) &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{l_c/S_1}{l_a/S_1} D_{(-1, \frac{1}{2})}^{(0, -\frac{1}{2})} \cdot E_x(\vec{q}_1) - \frac{l_b/S_1}{l_a/S_1} D_{(\frac{1}{2}, -1)}^{(-\frac{1}{2}, 0)} \cdot E_y(\vec{q}_1) \right] \\ D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_x^n(\vec{q}_1) &= \frac{1}{\epsilon_0} \xi D_{(0, \frac{1}{2})}^{(0, -\frac{1}{2})} \cdot H_z^n(\vec{q}_1) \\ D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_y^n(\vec{q}_1) &= -\frac{1}{\epsilon_0} \xi D_{(\frac{1}{2}, 0)}^{(-\frac{1}{2}, 0)} \cdot H_z^n(\vec{q}_1) \end{aligned}$$

con $\vec{q}_1 = (i_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2})$ y $\xi = 1/\Delta$. Donde se está haciendo uso del concepto de red virtual definido en el capítulo anterior, para aplicar los operadores en diferencias

³ Análogo estudio simplificado para un problema de volúmenes finitos puede encontrarse en (Ray, 1993)

sobre componentes que, en realidad, no precisan calcularse en la práctica, ya que sólo una subred de la red virtual total, es necesaria para que el solucionar el esquema en diferencias.

Como los autovalores y autovectores del operador en diferencias pesadas (3.38) son de la forma

$$\begin{aligned} {}^b_a D_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \varphi_e(i_0, j_0) &= {}^b_a \lambda_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(\alpha_2, \beta_2)} \varphi_e(i_0, j_0) \\ \varphi_e(i_0, j_0) &= e^{j(\beta_x i_0 + \beta_y j_0) \Delta} \\ {}^b_a \lambda_{(\alpha_1, \beta_1)}^{(\alpha_2, \beta_2)} &= a e^{j\beta_x \alpha_1 \Delta} e^{j\beta_y \beta_1 \Delta} - b e^{j\beta_x \alpha_2 \Delta} e^{j\beta_y \beta_2 \Delta} \end{aligned}$$

con β_x, β_y complejos en general, la relación entre los autovalores espaciales y temporales (relación de dispersión) es

$$\begin{aligned} c^{-2} \lambda_t^2 = \frac{2j}{S_1 \Delta} & \left[\sin(\beta_y \Delta / 2) \left(l_a e^{j\beta_y \Delta / 2} [e^{-j\beta_x \Delta}] - l_c e^{-j\beta_y \Delta / 2} \right) + \right. \\ & \left. \left[\sin(\beta_x \Delta / 2) \left(l_d e^{j\beta_x \Delta / 2} [e^{-j\beta_y \Delta}] - l_b e^{-j\beta_x \Delta / 2} \right) \right] \right] \quad (3.39) \end{aligned}$$

donde la influencia de la AVC se muestra entre corchetes. Esta relación de dispersión se reduce a la usual cuando la celda es la de Yee. El miembro de la derecha de (3.39) tiene una parte imaginaria no nula cuando $l_a \neq l_b$ o $l_c \neq l_d$. Por ello, la parte real del autovalor temporal es no nula, con lo que el método propuesto, analizado mediante el criterio de Von-Neumann, y con todas las simplificaciones efectuadas, es, en general, inestable.

La condición necesaria de inestabilidad derivada en el párrafo anterior debe ser considerada en el marco de las hipótesis bajo las cuales se ha obtenido, es decir, suponiendo un problema puro de valores iniciales en el que se aplique el mismo esquema a todas las celdas. En la práctica el esquema se aplica sólo a las celdas aisladas, con lo cual, al menos intuitivamente, se puede predecir que el esquema, de ser inestable, estas inestabilidades no presentarán un crecimiento tan rápido como se puede deducir de (2.36). Los experimentos numéricos efectuados nos han llevado a la conclusión de que cuando la AVC fuerza la circulación de un campo eléctrico de una celda vecina también deformada, las inestabilidades aparecen antes que cuando no se utiliza la AVC. Para estos casos se propone en esta memoria una modificación simple del método, basada en la distorsión de las celdas en las que sucede lo anterior, de tal modo que *se adapten* al contorno del dispersor, superponiéndose, si es preciso, con las celdas adyacentes. Mediante este método se puede suprimir, el uso de la AVC en muchos casos, pues al adaptar las celdas distorsionadas al objeto, superponiéndolas, se evitan las integrales a lo largo de los lados que precisaban al vecino más cercano.

Por ejemplo para la celda numerada con 1 en la Figura (3.10) la corrección se concreta en la Figura (3.11), y la Ec. (3.37) quedaría sin los desplazamientos

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2}) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i_1 + \frac{1}{2}, j_1 + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu_0 S_1} (l'_b E_y^n(i_1, j_1 + \frac{1}{2}) - l'_c E_x^n(i_1 + \frac{1}{2}, j_1)) \end{aligned}$$

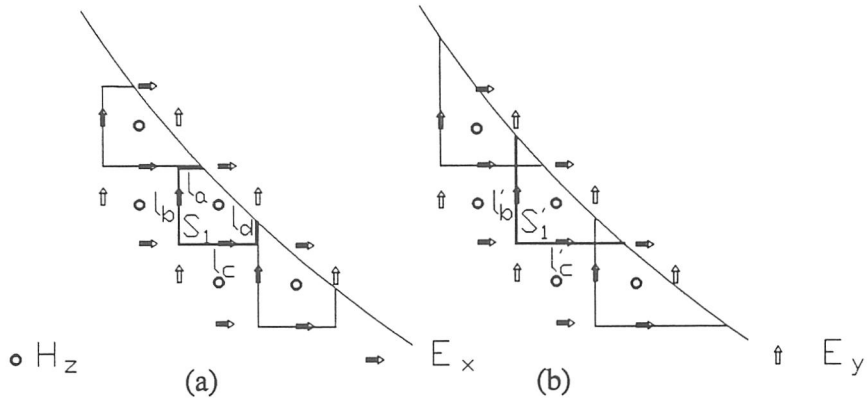


Figura 3.11: Superposición de celdas en la conformación bidimensional.

Desafortunadamente, no siempre es posible efectuar esa modificación, porque la curvatura del dispersor puede ser tal que no lo permita (Figura (3.12)).

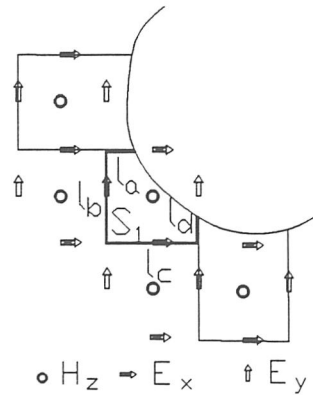


Figura 3.12: Imposibilidad geométrica de adaptar las celdas al dispersor en el método de la integral de línea modificado.

3.6 Conversión campo cercano-campo lejano

Dada la gran cantidad de resultados presentes en la bibliografía que utilizan la sección recta radar (RCS) como parámetro de comparación, en este apartado se desarrollarán los algoritmos para su cálculo. La RCS de una estructura bidimensional iluminada con una onda plana monocromática, viene dada en coordenadas cilíndricas por

$$RCS(\varphi) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} 2\pi\rho \frac{|\psi_z^s(\rho, \varphi)|^2}{|\psi_z^i(\rho, \varphi)|^2} \quad (3.40)$$

con $\psi = E_z$ para la polarización TM y $\psi = H_z$ para la TE. Se ha usado el superíndice s para notar campo dispersado y i para notar campo incidente. El campo incidente será,

en general, una onda plana armónica o expandible por Fourier en términos del tipo $Ae^{-j\beta(x \cos \phi^i + y \sin \phi^i)} e^{j\omega t}$. Si es de este último tipo, para calcular la RCS del dispersor mediante (3.40) será preciso transformar por Fourier el campo dispersado lejano y el campo incidente y aplicar tal expresión para cada una de las frecuencias del espectro.

En principio, el campo dispersado por un objeto conductor puede calcularse resolviendo una ecuación integral para las corrientes inducidas sobre la superficie del cuerpo. A partir de estas corrientes, mediante integración, se calculan los campos cercanos o lejanos. Sin embargo existe la dificultad de que la superficie del cuerpo puede tener una forma compleja o contener medios dieléctricos, por lo que el llevar a cabo la necesaria integración puede resultar muy difícil, además de constituir un problema diferente para cada cuerpo con características geométricas o electromagnéticas distintas. Por ello, resulta mucho más conveniente, basándose en la existencia de la división de la región de cálculo en una zona de campo dispersado y una de campo total, utilizar el principio de equivalencia para substituir el problema por el de calcular el campo creado por un conjunto de corrientes equivalentes sobre la superficie virtual de un paralelepípedo indefinido a lo largo del eje Z, que encierre a la zona de campo total y que esté en la zona de campo dispersado.

Para hacer uso de este principio, se opera como sigue:

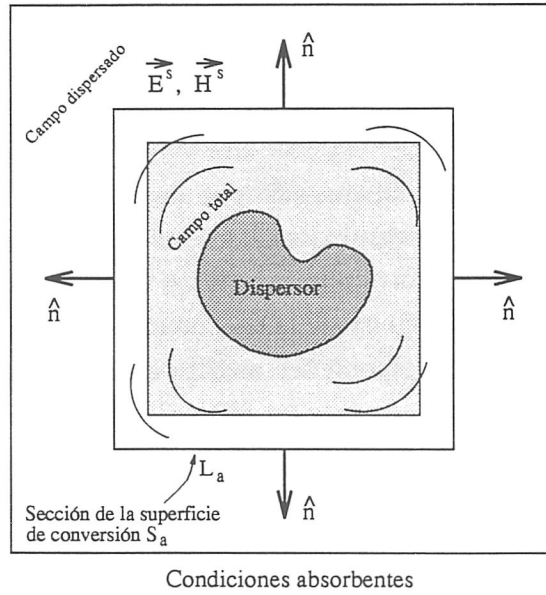
Se comienza obteniendo mediante el esquema en diferencias los valores de los campos dispersados \vec{H}^s y \vec{E}^s en la superficie S_a de la Figura (3.13a). Así, como indica la Figura (3.13b), el problema equivalente para la región externa a L_a es calcular los campos creados por la corrientes eléctricas y magnéticas equivalentes:

$$\vec{J}_s(\vec{R}) = \hat{n} \times \vec{H}_s(\vec{r})$$

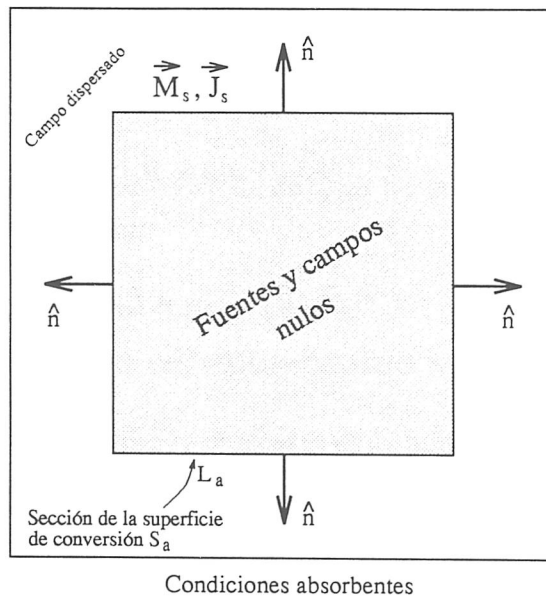
$$\vec{M}_s(\vec{R}) = -\hat{n} \times \vec{E}_s(\vec{r})$$

Las corrientes equivalentes sobre S_a producen el mismo campo dispersado (\vec{E}^s, \vec{H}^s) externo a S_a que el problema original. La región interna a S_a se considera ahora vacía con campos y fuentes nulos, así como con las mismas características que el medio de la región externa.

A fin de particularizar las expresiones de los campos en función de las corrientes al caso bidimensional, se considerará inicialmente el problema tridimensional completo de calcular el campo creado por las corrientes superficiales sobre las caras laterales de un paralelepípedo indefinido a lo largo del eje Z:



(a)



(b)

Figura 3.13: Conversión campo cercano–campo lejano haciendo uso del teorema de equivalencia

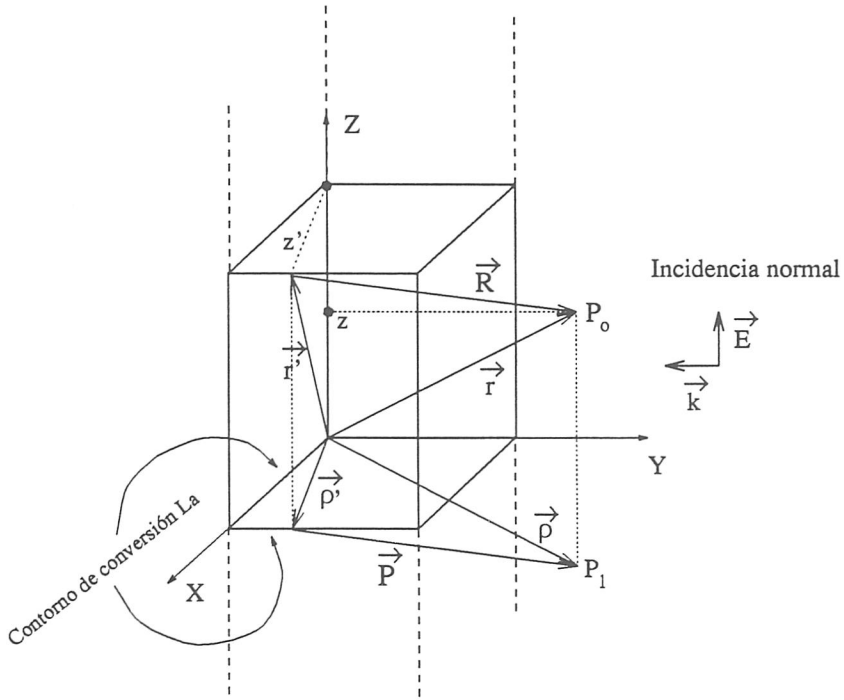


Figura 3.14: Vista tridimensional del problema bidimensional de cálculo del campo lejano a partir de las corrientes superficiales

$P_0 \longrightarrow$ Punto campo

$P_1 \longrightarrow$ Proyección del punto campo en el plano XY

$\vec{r} \longrightarrow$ Vector de posición del punto campo

$\vec{\rho} \longrightarrow$ Proyección del vector de posición del campo fuente sobre el plano XY

$\vec{r}' \longrightarrow$ Vector de posición del punto fuente

$\vec{\rho}' \longrightarrow$ Proyección del vector de posición del punto fuente sobre el plano XY

$\vec{R} \longrightarrow$ Vector de posición que va del punto fuente al punto campo

$\vec{P} \longrightarrow$ Proyección sobre XY del vector que va del punto fuente al punto campo

Para problemas bidimensionales se cumplen las siguientes relaciones:

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad , \quad \vec{r} = \vec{\rho} + z\hat{k} \quad , \quad \vec{r}' = \vec{\rho}' + z'\hat{k} \quad , \quad \vec{P} = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$$

y para puntos campo en el plano XY ($P_0 \equiv P_1$)

$$\vec{R} = \vec{P} + (z - z')\hat{k} = \vec{P} - z'\hat{k}$$

Los campos pueden ponerse en general a partir de los potenciales vector y escalar como

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{F} \quad , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A} - \nabla \Psi - \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

los cuales se obtienen en función de las corrientes eléctricas y magnéticas volúmicas

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{J}(\vec{r}')]_{\tau}}{R} dV' \\ \vec{F}(\vec{r}, t) &= \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{[\vec{M}(\vec{r}')]_{\tau}}{R} dV' \\ V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{[\rho(\vec{r}')]_{\tau}}{R} dV' \\ \Psi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_{V'} \frac{[\rho_m(\vec{r}')]_{\tau}}{R} dV'\end{aligned}$$

donde $\tau = t - \frac{R}{c}$ es el tiempo retardado y la notación $[\Xi]_{\tau}$ indica que Ξ es evaluado en el instante de tiempo τ .

Quedándonos sólo con los términos de radiación (Gómez Martín, 1984)

$$\begin{aligned}\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^{rad} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{([\partial_t \vec{J}]_{\tau} \times \vec{R}) \times \vec{R}}{R^3} dV' \\ -(\nabla \times \vec{A})^{rad} &= -\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\partial_t \vec{J}]_{\tau} \times \vec{R}}{R^2} dV'\end{aligned}\quad (3.41)$$

y análogamente

$$\begin{aligned}\left(-\nabla \Psi - \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}\right)^{rad} &= \frac{\epsilon_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{([\partial_t \vec{M}]_{\tau} \times \vec{R}) \times \vec{R}}{R^3} dV' \\ -(\nabla \times \vec{F})^{rad} &= -\frac{\epsilon_0}{4\pi c} \int_{V'} \frac{[\partial_t \vec{M}]_{\tau} \times \vec{R}}{R^2} dV'\end{aligned}\quad (3.42)$$

donde se ha introducido la notación ∂_t para las derivadas temporales.

3.6.1 Iluminación armónica

En este apartado se van a particularizar las anteriores expresiones para el caso de campos armónicos de frecuencia angular ω , propagándose bidimensionalmente con polarización TM, en el vacío. Como para magnitudes $\psi = \psi_0 e^{j\omega t}$, $\partial_t \psi = j\omega \psi$, los términos de radiación se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^{rad} &= \mu_0 \int_{S'} \frac{(j\omega \vec{J}_S \times \hat{R}) \times \hat{R} e^{j\beta R}}{4\pi R} dS' = j\beta c \mu_0 \int_{S'} (\vec{J}_S \times \hat{R}) \times \hat{R} \mathcal{G}(\beta, R) dS' \\ -\frac{1}{c} (\nabla \times \vec{F})^{rad} &= -\frac{1}{c} \int_{S'} \frac{j\omega \vec{M}_S \times \hat{R} e^{j\beta R}}{4\pi R} dS' = -j\beta \int_{S'} \vec{M}_S \times \hat{R} \mathcal{G}(\beta, R) dS'\end{aligned}$$

expresiones en las que el retardo temporal para señales armónicas se traduce en un factor de fase $e^{(-j\frac{\omega}{c}R)} = e^{(-j\beta R)}$. Este factor dividido por $4\pi R$ constituye la función de

Green para el vacío $\mathcal{G}(R, \beta)$. Las integrales de la corrientes volúmicas se han traducido a integrales superficiales de las corrientes superficiales equivalentes, mediante una Delta de Dirac.

Para problemas bidimensionales las integrales de superficie se convierten en integrales de línea y la función de Green es $\mathcal{G}(R, \beta) = \frac{1}{4j} H_0^{(2)}(\beta R)$ con $H_0^{(2)}(\beta R)$ función de Hankel de orden 0 y segunda especie, cuyo comportamiento asintótico para distancias grandes es

$$\lim_{\beta R \rightarrow \infty} H_0^{(2)}(\beta R) = \sqrt{\frac{2j}{\pi\beta R}} e^{-j\beta R}$$

Al estar las corrientes y el punto de observación en el mismo plano $\vec{R} = \vec{P} = \vec{\rho} - \vec{\rho}'$. Haciendo las aproximaciones usuales para los campos de radiación de suponer

$$P = \rho - \rho' \cos(\widehat{\vec{\rho}, \vec{\rho}'}) = \rho - \rho' (\hat{\rho} \cdot \hat{\rho}') = \rho - (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)$$

en los términos que afecten a las fases, y $P = \rho$ en los términos que afecten a los módulos, se puede escribir la función de Green para los mismos de la forma

$$\mathcal{G}(R, \beta)^{rad} = \sqrt{\frac{1}{j8\pi\beta\rho}} e^{-j\beta\rho} e^{j\beta(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)}$$

donde (x', y') son las coordenadas cartesianas de $\vec{\rho}'$ y (ρ, φ) las coordenadas cilíndricas de $\vec{\rho}$.

Teniendo en cuenta que, para la polarización TM, las corrientes eléctricas equivalentes tienen dirección \hat{k} mientras que las corrientes magnéticas son perpendiculares a esa dirección

$$\vec{J}_S = J_{S_z} \hat{k} \quad , \quad \vec{M}_S = M_{S_x} \hat{i} + M_{S_y} \hat{j}$$

se obtiene

$$\vec{E}^{rad}(\vec{\rho}) = \hat{k} \sqrt{\frac{j\beta}{8\pi\rho}} e^{-j\beta\rho} \int_{L_a} \left[-Z_0 J_{S_z} - M_{S_x} \sin \varphi + M_{S_y} \cos \varphi \right] e^{j\beta(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} dl'$$

con Z_0 impedancia del vacío.

La sección recta radar definida en (3.40) queda explícitamente:

$$RCS_{TM}(\varphi) = \frac{\beta}{4(E_0^i)^2} \left| \int_{L_a} \left[-Z_0 J_{S_z} - M_{S_x} \sin \varphi + M_{S_y} \cos \varphi \right] \right|^2$$

con E_0^i el valor máximo del del campo incidente E_z .

Para calcular la RCS es necesaria, pues, la determinación del módulo y fase de las corrientes superficiales, que a su vez derivan de los campos en el contorno de conversión. El procedimiento que se sigue es el siguiente: a lo largo del proceso de cálculo se van almacenando en el contorno de conversión (que se hace coincidir con un rectángulo

que pasa por los nodos en los que está definido el campo E_z) los valores instantáneos del campo eléctrico y del campo magnético (al no disponerse de éste último en el contorno, se obtiene como promedio de los que están a uno y otro lado del mismo); cuando se detecta un cambio de pendiente en la evolución de los valores instantáneos, se efectúa una interpolación polinómica con los tres puntos involucrados en el cambio de pendiente. Al ser los campos en cuestión senoidales, cerca de los máximos y mínimos la aproximación polinomial de segundo orden es muy ajustada:

$$f(t) \simeq p(t) = a_0 t^2 + a_1 t + a_2$$

cuyos puntos extremos vienen dados por

$$t_e = -\frac{a_1}{2a_0} \quad , \quad f(t_e) \simeq a_2 - \frac{a_1^2}{2a_0}$$

Dependiendo de si el cambio de pendiente ha sido de positivo a negativo o viceversa, t_e será un máximo o un mínimo respectivamente. La amplitud de la señal será el valor medio entre el valor máximo y el mínimo. La fase de la señal será (si la de la incidente es 0 en $t = 0$)

$$\varphi_e = \omega t_e$$

La razón por la que se toma la media de los valores máximos y mínimos para obtener la amplitud hay que buscarla en la aparición de un nivel de continua en la evolución temporal de las corrientes para la polarización TM. Furse *et al.* (Furse *et al.*, 1990) atribuye este efecto al hecho de que las corrientes inducidas en el conductor, al tener dirección \hat{k} , no tienen ningún mecanismo de disipación que las atenúe. Este nivel de continua es fácilmente filtrable para señales armónicas, promediando los valores máximos y mínimos de la señal.

3.6.2 Iluminación no armónica

Varios autores han tratado la obtención del campo lejano a partir del campo cercano para excitaciones no armónicas (Luebbers *et al.*, 1991a), (Luebbers *et al.*, 1992b), (Bennet, 1968), (Yee *et al.*, 1991), (Britt, 1989), (Barth *et al.*, 1992). Básicamente hay dos métodos para calcular este campo lejano: mediante una forma de las integrales de Kirchoff dada por Stratton (Stratton, 1941), y haciendo uso del principio de equivalencia (Bennet, 1968). En esta sección se va a describir esta última aproximación, particularizándolo al cálculo del campo eléctrico de radiación para la polarización TM. A partir de él, el campo magnético es $\vec{H} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{Z_0}$.

Se va a plantear el problema bidimensional como un problema tridimensional de cálculo del campo lejano en un punto sobre el plano XY ($z=0$), creado por un conjunto de corrientes superficiales sobre las caras laterales de un cilindro recto indefinido de

sección rectangular L_a que yace en la zona de campo dispersado, y que rodea al dispersor supuesto también cilíndrico indefinido (Figura (3.14)).

El punto central de la deducción es la substitución del retardo en las derivadas de las corrientes por una integral temporal haciendo uso de la propiedad de traslación de la delta de Dirac.

De la expresión (3.42) se puede poner

$$-\frac{1}{\epsilon_0}(\nabla \times \vec{F})^{rad} = -\frac{1}{4\pi c} \int_{L_a} dt' \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} dz' \int_{t'=-\infty}^{t'=\infty} \frac{\partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \vec{R}}{R^2} \delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) dt'$$

donde las corrientes se han particularizado para $z' = 0$, porque dada la simetría del problema, éstas no dependen de z' . Al ser un sistema estático las derivadas con relación a t son iguales a las derivadas con relación a t' ($\partial_t = \partial_{t'}$). El diferencial de volumen de las fuentes dV' se ha descompuesto en $dS' dz'$ y posteriormente se han puesto las corrientes superficiales, en vez de las volúmicas, quedando la integral de superficie reducida a una integral de línea.

Intercambiando las integrales en z' y t' y expandiendo el producto vectorial con $\vec{R} = \vec{P} - z' \hat{k}$ (dada la simetría del problema, el punto de observación se coloca en $z = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \frac{\partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \vec{R}}{R^2} \delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) dz' &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \vec{P}}{P^2 + z'^2} \delta\left(\frac{\sqrt{P^2 + z'^2}}{c} - t + t'\right) dz' + \\ &\hat{k} \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z' \partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t')}{P^2 + z'^2} \delta\left(\frac{\sqrt{P^2 + z'^2}}{c} - t + t'\right) dz' \end{aligned} \quad (3.43)$$

El segundo término del segundo miembro en la expresión (3.43) se anula al ser el integrando función impar en z' . El primer término es la integral de una función par por lo que su valor entre $-\infty$ y $+\infty$ es el doble de su valor entre 0 y $+\infty$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \vec{P}}{P^2 + z'^2} \delta\left(\frac{\sqrt{P^2 + z'^2}}{c} - t + t'\right) dz' &= \\ 2 \partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \vec{P} \int_0^{\infty} \frac{\delta\left(\frac{\sqrt{P^2 + z'^2}}{c} - t + t'\right)}{P^2 + z'^2} dz' \end{aligned}$$

Para evaluar esta integral se hace el cambio de variable

$$\xi = \frac{\sqrt{P^2 + z'^2}}{c}, \quad z' = \sqrt{c^2 \xi^2 - P^2}, \quad dz' = \frac{\xi c^2 d\xi}{\sqrt{c^2 \xi^2 - P^2}}, \quad \text{si } z' \geq 0$$

quedando

$$2 \int_{z'=0}^{z'=\infty} \frac{\delta(\xi - t + t')}{\xi \sqrt{c^2 \xi^2 - P^2}} d\xi = 2 \int_{\xi=\frac{P}{c}}^{\xi=\infty} \frac{\delta(\xi - t + t')}{\xi \sqrt{c^2 \xi^2 - P^2}} d\xi$$

Aplicando la propiedad de traslación de la delta de Dirac

$$2 \int_{\xi=\frac{P}{c}}^{\xi=\infty} \frac{\delta(\xi - t + t')}{\xi \sqrt{c^2 \xi^2 - P^2}} d\xi = \begin{cases} \frac{2}{(t-t')\sqrt{c^2(t-t')^2 - P^2}} & \text{si } t - t' > \frac{P}{c} \\ 0 & \text{si } t - t' \leq \frac{P}{c} \end{cases}$$

con lo que

$$-\frac{1}{\epsilon_0} (\nabla \times \vec{F})^{rad} = -\frac{1}{2\pi} \int_{L_a} dl' \int_{t'=-\infty}^{t'=t-P/c} \frac{\partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \vec{P}}{c(t-t')\sqrt{c^2(t-t')^2 - P^2}} dt'$$

Para el término (3.41) se pueden hacer idénticas consideraciones

$$\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^{rad} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{L_a} dl' \int_{z'=-\infty}^{z'=\infty} dz' \int_{t'=-\infty}^{t'=\infty} \frac{(\partial_{t'} \vec{J}_S \times \vec{R}) \times \vec{R} e^{j\beta R}}{R^3} \delta\left(t' - \left(t - \frac{R}{c}\right)\right) dt'$$

y, teniendo en cuenta

$$\vec{J} = J_z \hat{k} \quad , \quad \vec{R} = \vec{P} - z' \hat{k} \quad , \quad (\vec{J} \times \vec{R}) \times \vec{R} = -\vec{J} P^2 - J_z z' \vec{P}$$

se obtiene

$$\left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)^{rad} = -\frac{\mu_0 c}{2\pi} \int_{L_a} dl' \int_{t'=-\infty}^{t'=t-P/c} \frac{\partial_{t'} \vec{J}_S(\vec{\rho}', t') P^2}{c^2(t-t')^2 \sqrt{c^2(t-t')^2 - P^2}} dt'$$

Estas expresiones se simplifican para el caso del P tendiendo a ∞ . Cada integral es de la forma

$$I = \int_{-\infty}^{t-\frac{P}{c}} \frac{f(t') P^n}{c^n (t-t')^n \sqrt{c^2(t-t')^2 - P^2}} dt'$$

Haciendo el cambio

$$\alpha = c(t-t') - P \quad , \quad d\alpha = -cdt'$$

nos queda

$$I = \frac{1}{c} \int_0^\infty f(\alpha) \left(\frac{P}{P+\alpha}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+2P)}} d\alpha$$

al ser $f(\alpha)$ función temporal de las corrientes, si la iluminación se hace mediante una señal que se anule cuando $t \rightarrow \infty$, también las corrientes lo harán, por lo que es posible poner $f(\alpha) = 0$ para algún $\alpha \geq \alpha_0$

$$I = \frac{1}{c} \int_0^{\alpha_0} f(\alpha) \left(\frac{P}{P+\alpha}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha+2P)}} d\alpha$$

$$\lim_{P \rightarrow \infty} I = \frac{1}{c} \int_0^{\alpha_0} \frac{f(\alpha) d\alpha}{\sqrt{\alpha} \sqrt{2P}}$$

y deshaciendo el cambio

$$\lim_{P \rightarrow \infty} I = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{t-\frac{P}{c}} \frac{f(t')}{\sqrt{2\rho}\sqrt{c(t-t')-P}} dt'$$

donde se ha aplicado $\lim_{P \rightarrow \infty} \vec{P} = \rho \hat{\rho}$ para la suma $c(t-t') + P$, no siendo aplicable para $c(t-t') - P$.

La expresión, por tanto, del campo eléctrico de radiación para la polarización TM es

$$\vec{E}^{rad}(\varphi, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{\rho}} \int_{L_a} dl' \int_{t'=-\infty}^{t'=t-P/c} \frac{Z_0 \partial_{t'} \vec{J}_S(\vec{\rho}', t) + \partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \hat{\rho}}{\sqrt{c(t-t')-P}} dt' \quad (3.44)$$

Para la polarización TE se obtiene análogamente:

$$\vec{H}^{rad}(\varphi, t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{\rho}} \int_{L_a} dl' \int_{t'=-\infty}^{t'=t-P/c} \frac{\partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t)/Z_0 - \partial_{t'} \vec{J}_S(\vec{\rho}', t') \times \hat{\rho}}{\sqrt{c(t-t')-P}} dt' \quad (3.45)$$

Implementación

Debido a que las integrales (3.44) y (3.45) dependen explícitamente de la distancia del punto campo, es preciso hacer un cambio de variable. Para cada punto del contorno de conversión, se descompone $P = d_{dist} + d_{min}$, con d_{min} el mínimo de las distancias entre los puntos fuente y el punto campo, y d_{dist} , la distancia entre el punto fuente y el mínimo anterior (Figura (3.15)).

Haciendo el cambio de variable $u = t - d_{min}/c$, se puede efectuar la integral (3.44)

$$\vec{E}^{rad}(\varphi, u) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{2}\sqrt{\rho}} \int_{L_a} dl' \int_{t'=-\infty}^{t'=u-d_{dist}/c} \frac{Z_0 \partial_{t'} \vec{J}_S(\vec{\rho}', t') + \partial_{t'} \vec{M}_S(\vec{\rho}', t') \times \hat{\rho}}{\sqrt{c(u-t')-d_{dist}}} dt' \quad (3.46)$$

con lo cual el resultado de los campos de radiación estará dado en función del instante temporal u a partir del cual llega la perturbación desde el punto fuente más cercano al punto campo.

Para calcular el campo de radiación, primeramente se obtiene la historia temporal de los campos en los puntos del contorno de conversión. Debido al desplazamiento espacio-temporal de media celda entre los campos eléctricos y magnéticos, se calculan las corrientes en los instantes y celdas enteros, interpolándolos linealmente a partir de sus valores en los semienteros. La derivación temporal en (3.46) en un instante de tiempo $n\Delta t$ se lleva a cabo analíticamente a partir de un polinomio de Lagrange de orden 4 que interpola las corrientes para los instantes

$$(n-2)\Delta t, (n-1)\Delta t, n\Delta t, (n+1)\Delta t, (n+2)\Delta t,$$

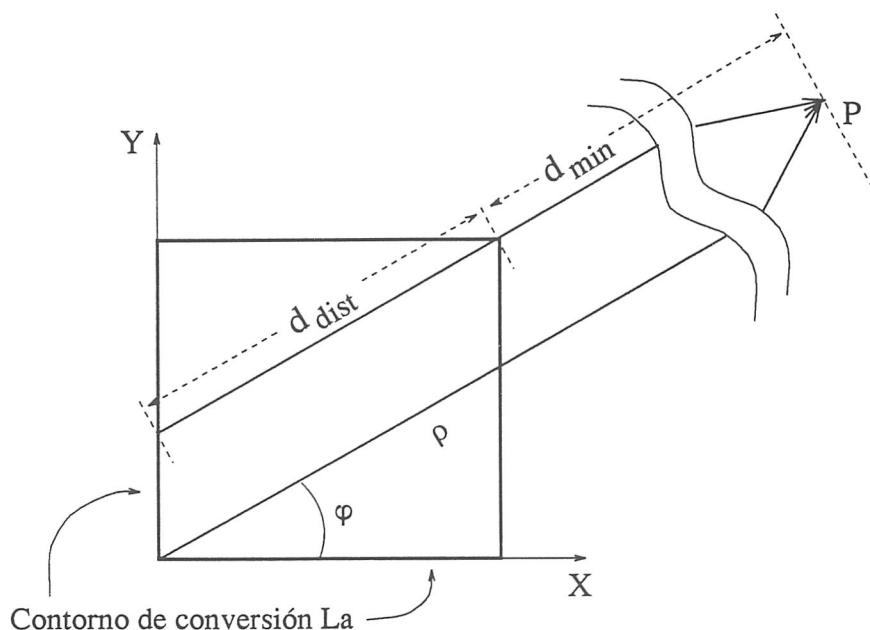


Figura 3.15: Descomposición de la distancia entre el punto fuente y el punto campo

Para la integración espacial se utiliza una aproximación trapezoidal. La integración temporal, dada la singularidad del integrando en el límite superior de la integral, es preciso llevarla a cabo más cuidadosamente. Esta integral puede descomponerse en

$$\int_{t'=0}^{t'=t_1} \frac{f(t')}{\sqrt{c(t_1 - t')}} dt' = \int_{t'=0}^{t'=t_1 - \frac{Ent(t_1/\Delta t)}{4} \Delta t} \frac{f(t')}{\sqrt{c(t_1 - t')}} dt' + \int_{t'=t_1 - \frac{Ent(t_1/\Delta t)}{4} \Delta t}^{t'=t_1} \frac{P_4(t')}{\sqrt{c(t_1 - t')}} dt' \quad (3.47)$$

con $P_4(t')$ polinomio de Lagrange de orden 4 que interpola a $f(t')$.

La primera parte de (3.47) se calcula trapezoidalmente, y la segunda, analíticamente. De este modo se elimina el problema que la singularidad plantea cuando se utiliza la regla trapezoidal o cualquier otro método que implique la evaluación explícita del integrando en o cerca de la singularidad.

Podría ser evitada la singularidad efectuando una integración por partes, ya que la primitiva de $(ct_1 - ct')^{-\frac{1}{2}}$ no es singular en $t' = t_1$. El resultado numérico indica que al haber en el nuevo integrando un factor decreciente en el tiempo que multiplica a las segundas derivadas temporales de las corrientes $f''(t')(ct_1 - ct')^{\frac{1}{2}}$, los instantes primeros son los de contribución más importante al resultado final; como al evaluar las segundas derivadas temporales es preciso interpolar y derivar analíticamente, en los primeros instantes el rizado espurio da lugar a contribuciones erróneas al resultado final.

Un inconveniente de este método radica en el creciente tiempo de cálculo que se necesita en cada instante temporal, al ser un método que para cada instante temporal

necesita evaluar la integral temporal desde el principio hasta el instante actual.

3.7 Resultados

En esta sección se presentan, primeramente, resultados de los errores de fase debidos a la dispersión numérica del método, para ambas aproximaciones. El error de fase acumulado cuando una onda plana de frecuencia ω se propaga libremente en la red bidimensional m celdas, viene dado por:

$$\theta_{error} = \theta_t - \theta_n = (-\beta_t + \beta_n)m\Delta = 2\pi \frac{m}{N_{clo_t}} \left(\frac{\beta_n}{\omega/c} - 1 \right) \quad (3.48)$$

con ϕ_t y ϕ_n fases teórica y numérica respectivamente, β_t número de onda teórico ($\beta_t = \frac{\omega}{c}$) y β_n número de onda propagado de forma efectiva en la red y N_{clo_t} número de celdas por longitud de onda teórica ($N_{clo_t} = \frac{\lambda_t}{\Delta}$).

β_n puede obtenerse, bien a partir de la relación de dispersión, bien propagando una onda plana en una dirección y calculando la diferencia de fase respecto a una propagación ideal en un punto a m celdas del origen de la perturbación.

Las Figuras (3.16) y (3.17) representan los errores de fase reducidos al primer cuadrante para en función de la resolución para ángulos de iluminación de 0, 15, 30 y 45 grados.

Las Figuras (3.18), (3.19) y (3.20) presentan los errores de fase calculados mediante la Ec. (3.48) con β_n calculados a partir de las anteriores relaciones de dispersión. Se presentan diagramas polares para resoluciones de 5, 10, 15, 20 y 30 *celdas*/ λ .

En segundo lugar, se van a presentar resultados que estudian la influencia de las condiciones absorbentes (González *et al.*, 1991).

Se ha visto que la aproximación de orden n al operador absorción exacto dado por Engquist y Majda, presenta un coeficiente de reflexión

$$|R_n| = \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^n$$

para ondas planas que inciden con un ángulo θ sobre la frontera de truncamiento (Figura 3.21).

En las gráficas (3.22)–(3.25) se ilustra la influencia de la separación entre las condiciones absorbentes, que se notará mediante RBC (Radiation Boundary Conditions) y el dispersor, en la sección recta radar de un cilindro conductor perfecto de sección cuadrada para dos tamaños eléctricos.

Se han efectuado comparaciones para distintas separaciones globales, distribuidas en campo total y campo dispersado, los mejores resultados se han obtenido cuando la separación total era mayor, repartida en una zona mayor de campo total que de

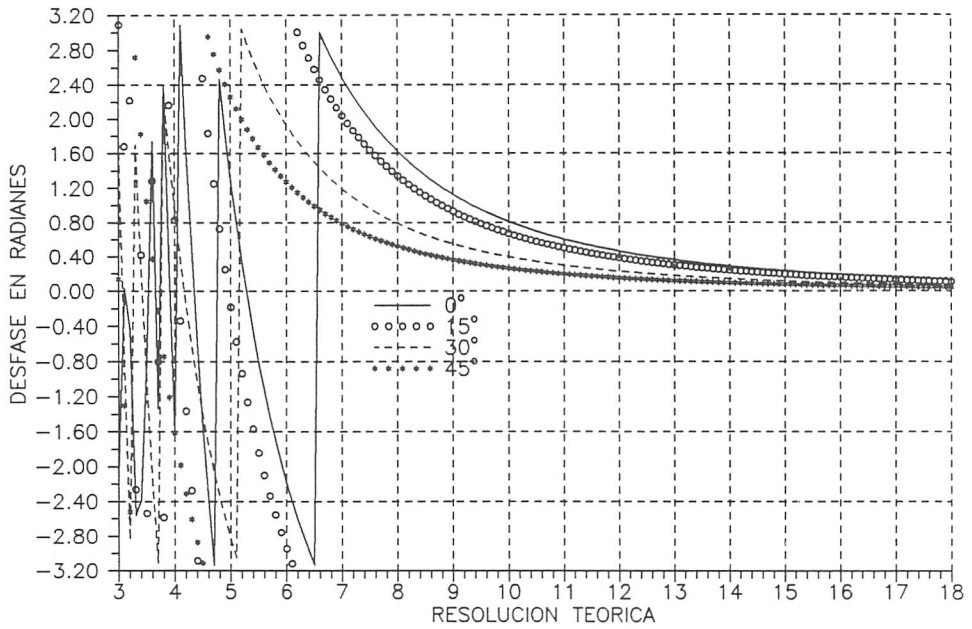


Figura 3.16: Diferencia de fase tras 100 celdas recorridas en función del ángulo de propagación. Segundo orden espacial y temporal

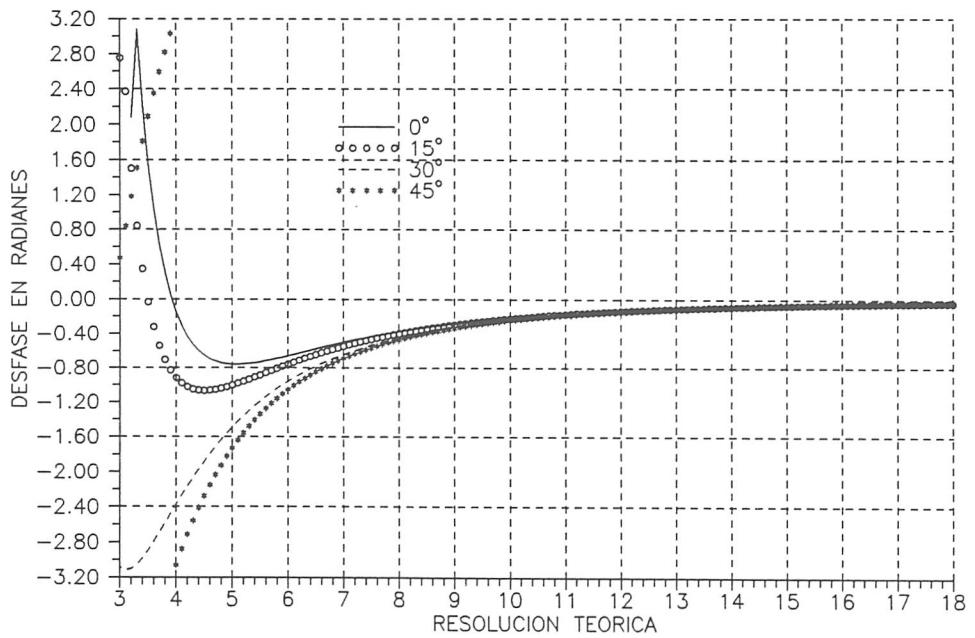


Figura 3.17: Diferencia de fase tras 100 celdas recorridas en función del ángulo de propagación. Segundo orden espacial y cuarto temporal

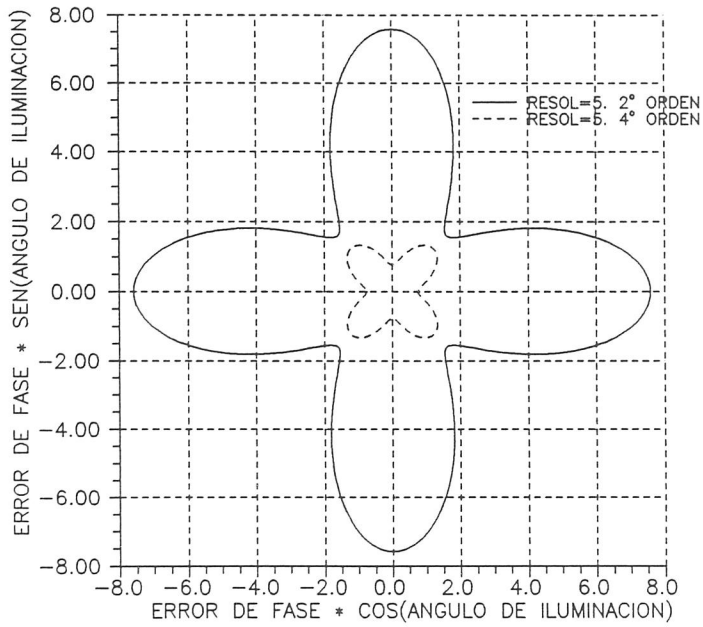


Figura 3.18: Diagrama polar de los errores de fase tras 100 celdas recorridas

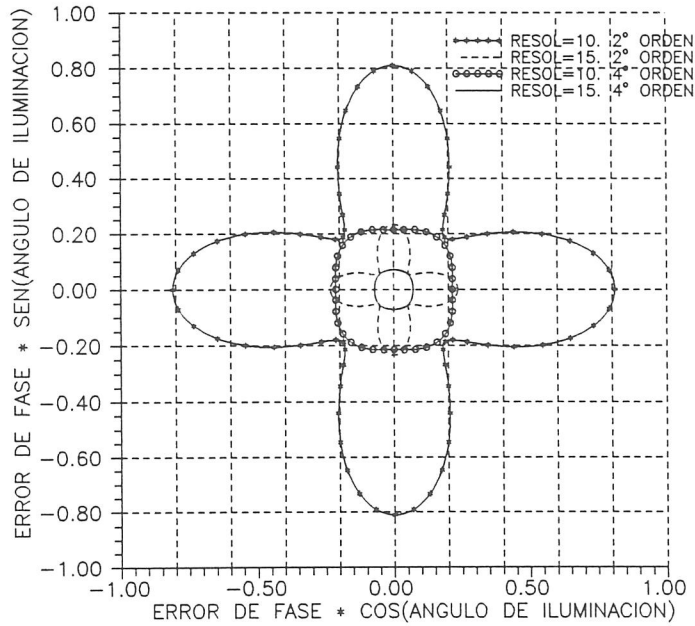


Figura 3.19: Diagrama polar de los errores de fase tras 100 celdas recorridas

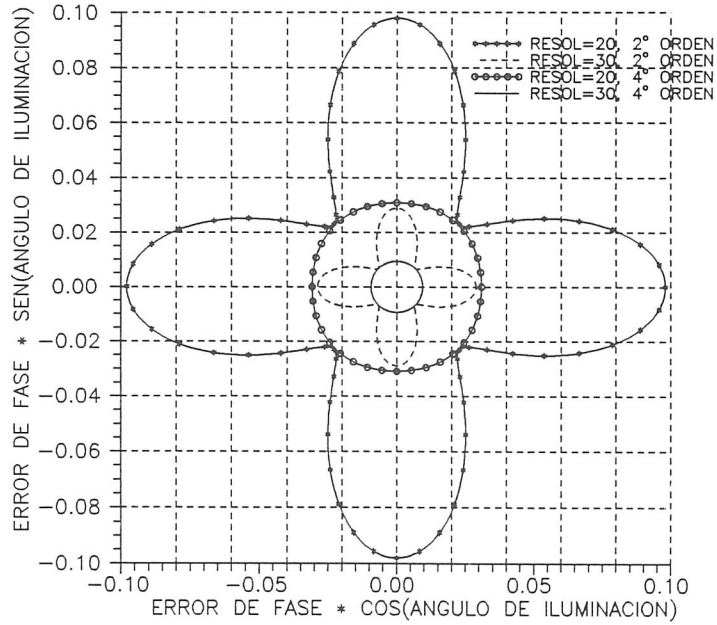


Figura 3.20: Diagrama polar de los errores de fase tras 100 celdas recorridas

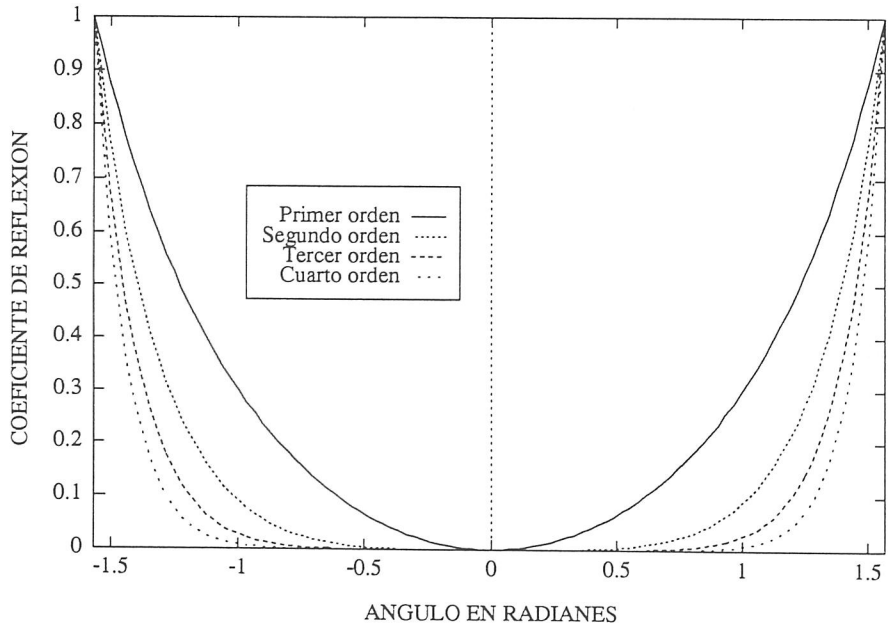


Figura 3.21: Coeficiente de reflexión para distintos órdenes de aproximación al operador de absorción

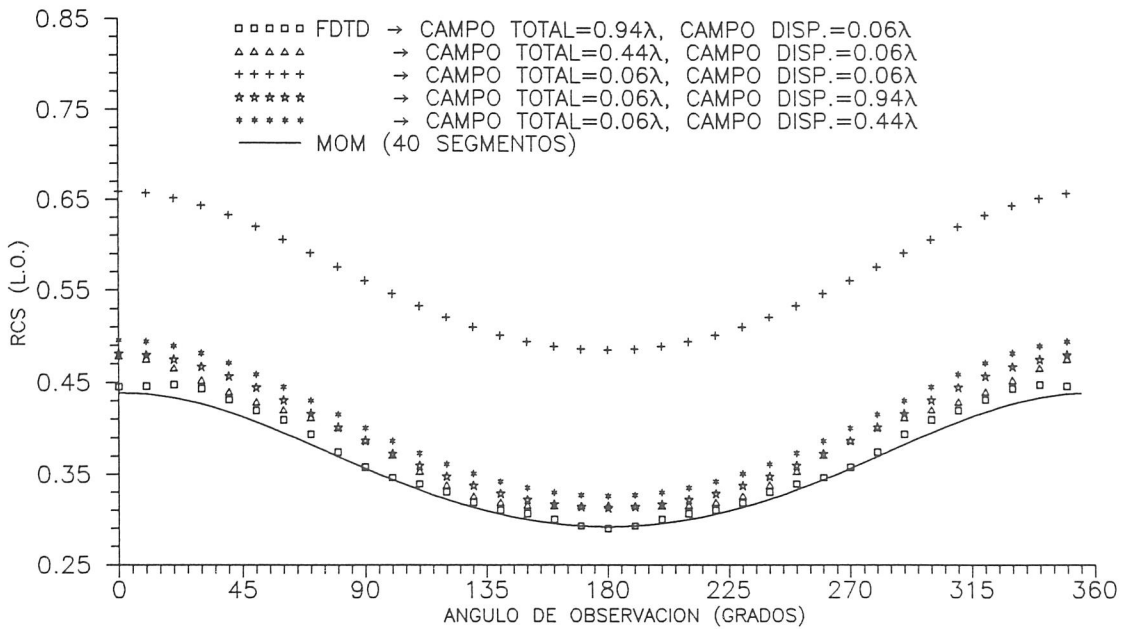


Figura 3.22: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 0.3λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TM. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ

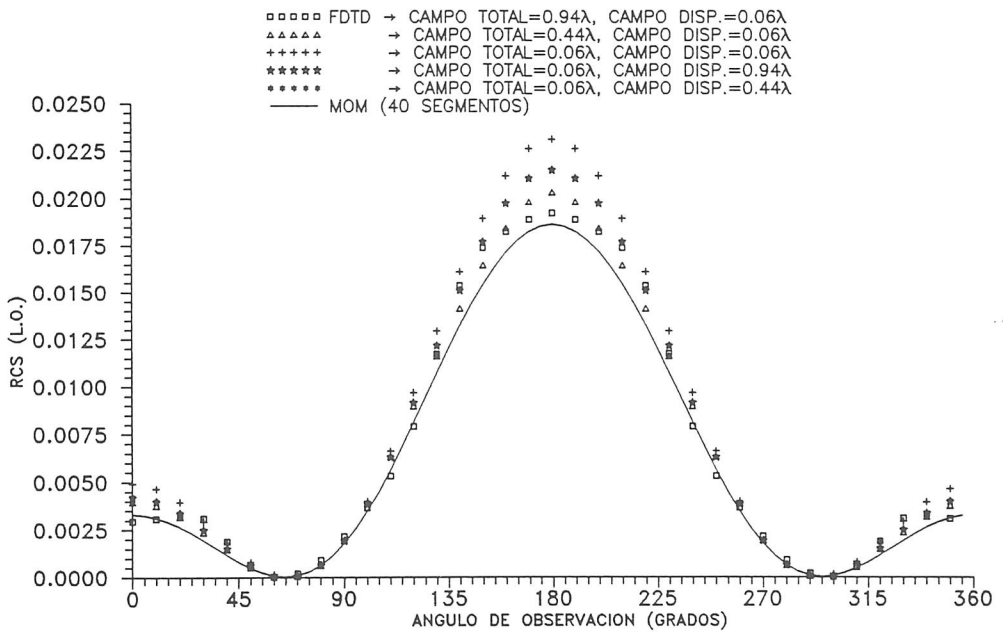


Figura 3.23: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 0.3λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TE. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ

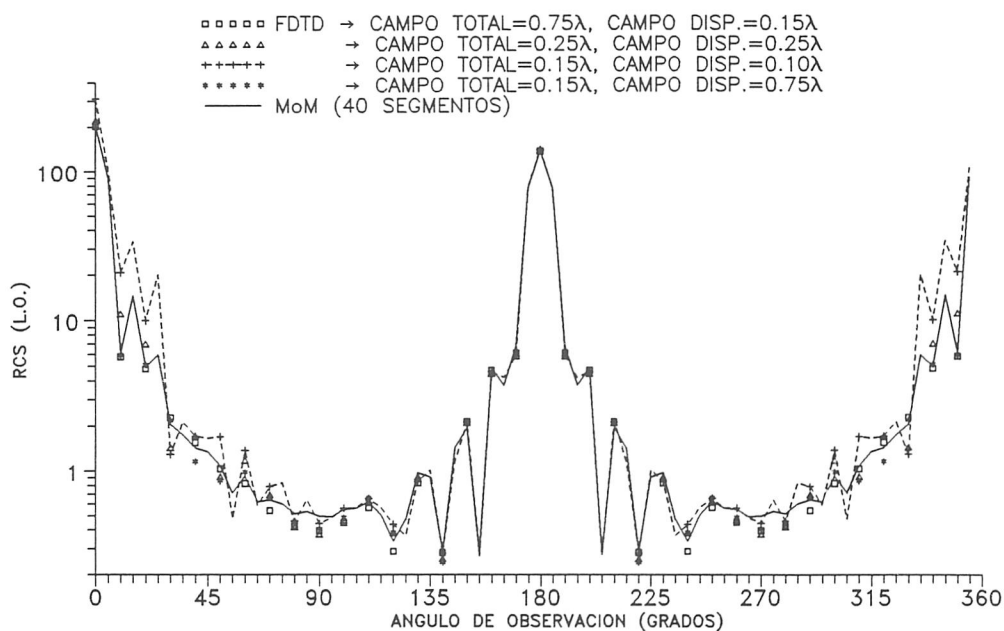


Figura 3.24: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 18.8λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TM. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ

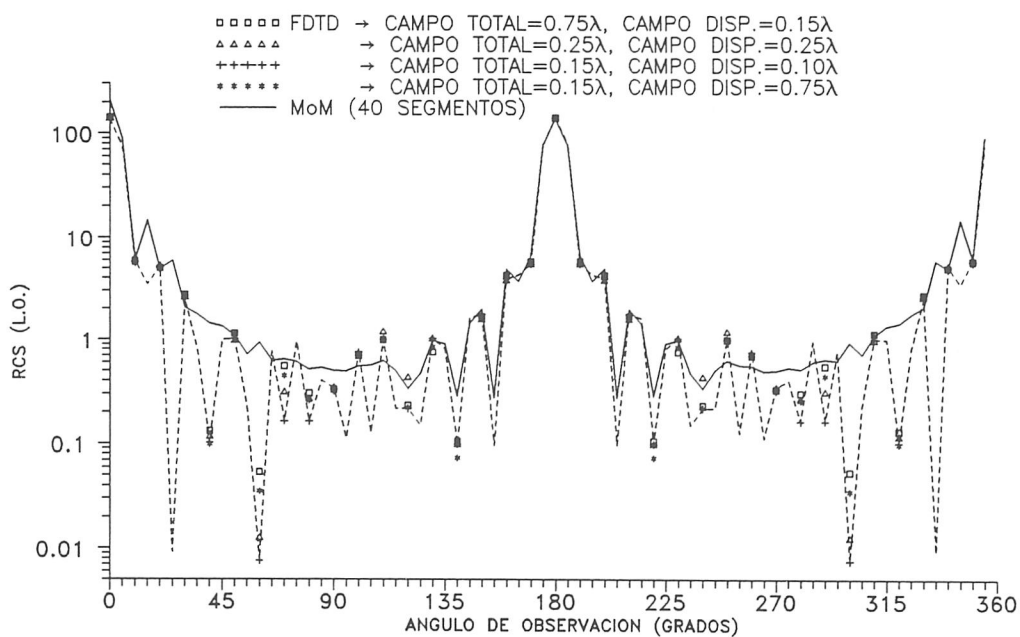


Figura 3.25: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 18.8λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$ y polarización TE. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ

campo dispersado. Esta dependencia es fácilmente justificable teniendo en cuenta que el campo lejano se obtiene con una integral de las corrientes en el contorno de conversión campo cercano-campo lejano. Como el contorno de conversión se sitúa a una celda del contorno de separación entre campo total y dispersado, yaciendo en este último, mejores resultados se obtendrán cuando la integral de las corrientes sea evaluada con mayor número de corrientes. Se usa como método de comparación el Método de los Momentos en el dominio de la frecuencia (Sánchez García, 1990).

En las Figuras (3.26) y (3.27) se resumen los resultados de la RCS monoestática y ortoestática (en la dirección hacia atrás y hacia adelante, respectivamente) de un cilindro de sección cuadrada de dos tamaños eléctricos distintos, en función de la distancia total entre el dispersor y los planos de truncamiento. En todos los casos se han dejado 3 celdas de campo dispersado (lo suficiente para hacer la transformación campo cercano-campo lejano).

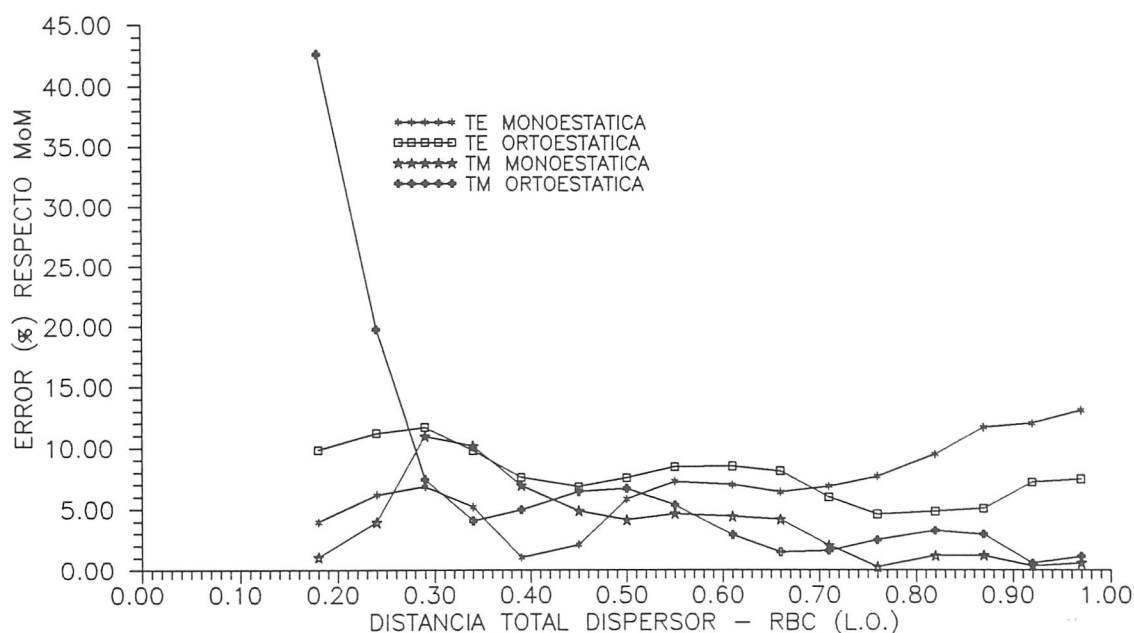


Figura 3.26: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 1.2λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ

En las Figuras (3.28) y (3.29) se presentan resultados para los mismos cilindros de las Figuras (3.26) y (3.27) variando esta vez la distribución de la separación total (en ambos casos de 1λ) en zona de campo total y zona de campo dispersado.

Se han efectuado también estudios de convergencia en función de estos parámetros. Las Figuras (3.31) y (3.32) presentan la evolución de la RCS calculada en función del tiempo de ejecución del código, cuando se varían los parámetros campo total y campo dispersado. En este caso los resultados corresponden a la RCS de un perfil bidimensional

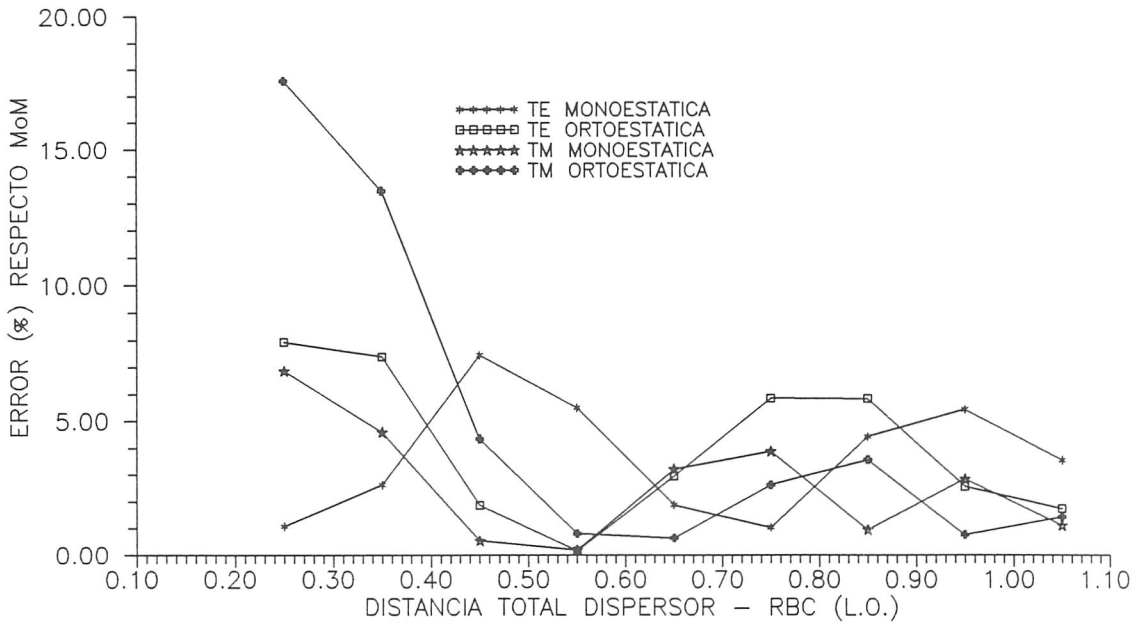


Figura 3.27: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 5.02λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ

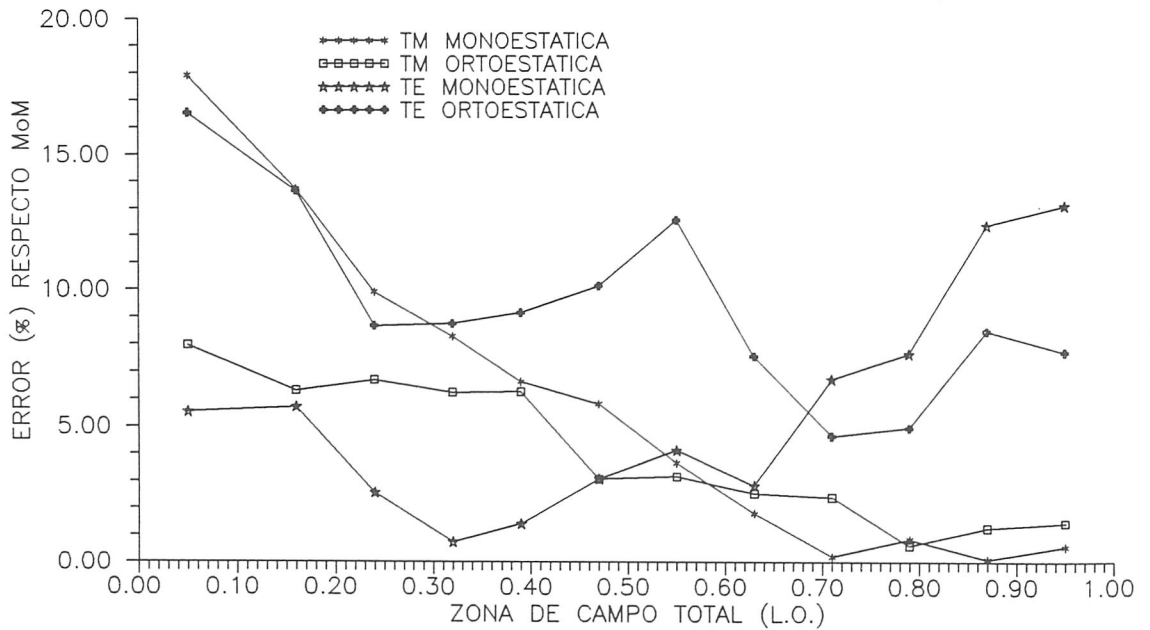


Figura 3.28: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 1.2λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 38$ celdas/ λ

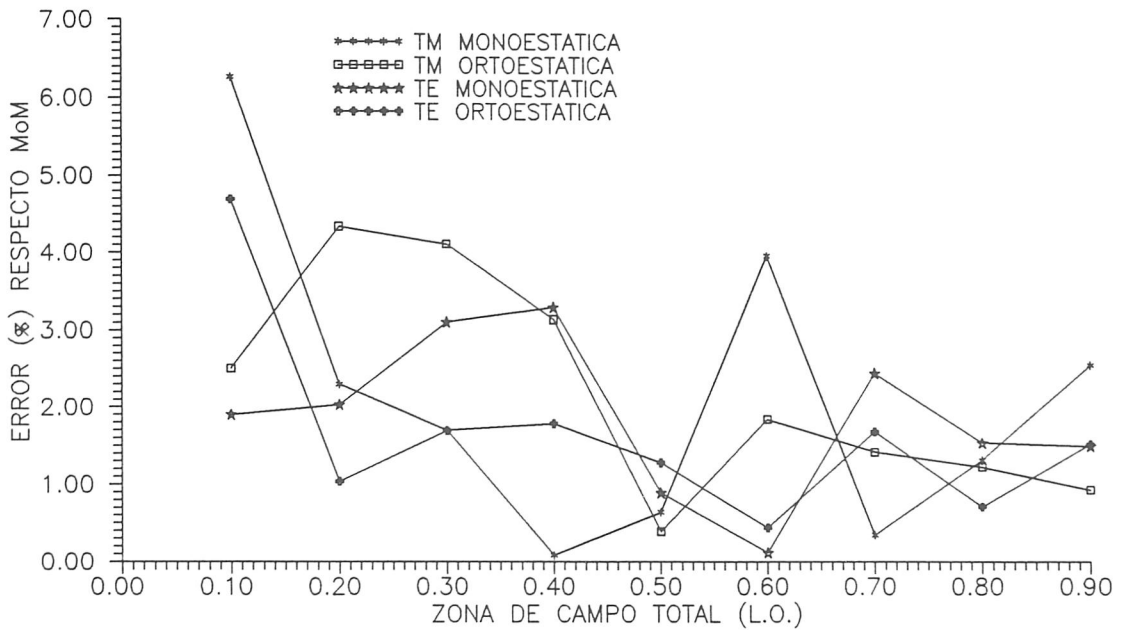


Figura 3.29: Cilindro conductor de sección cuadrada y perímetro 5.02λ iluminado con $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 20$ celdas/ λ

de ala como el de la Figura (3.30) (Sánchez García *et al.*, 1990)

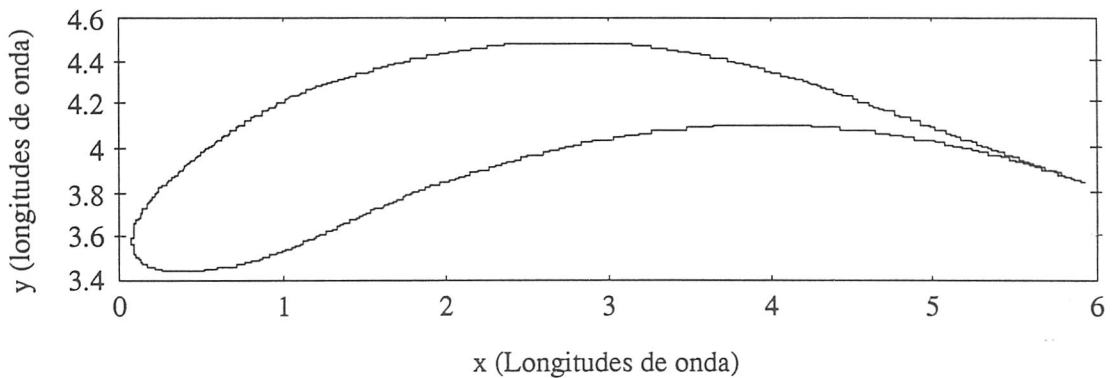


Figura 3.30: Perfil de ala perfectamente conductora de 14.15λ de perímetro

Finalmente en la Figura (3.33) se observa un caso de inestabilización en el proceso de solución cuando las condiciones absorbentes se sitúan muy cerca del dispersor.

A la vista de las anteriores gráficas se obtienen las siguientes conclusiones, exclusivamente basadas en el estudio experimental realizado:

Para la separación RBC-dispersor:

- 0.25λ de son suficientes para obtener errores de menos del 10% en la RCS monoestática, para ambas polarizaciones.

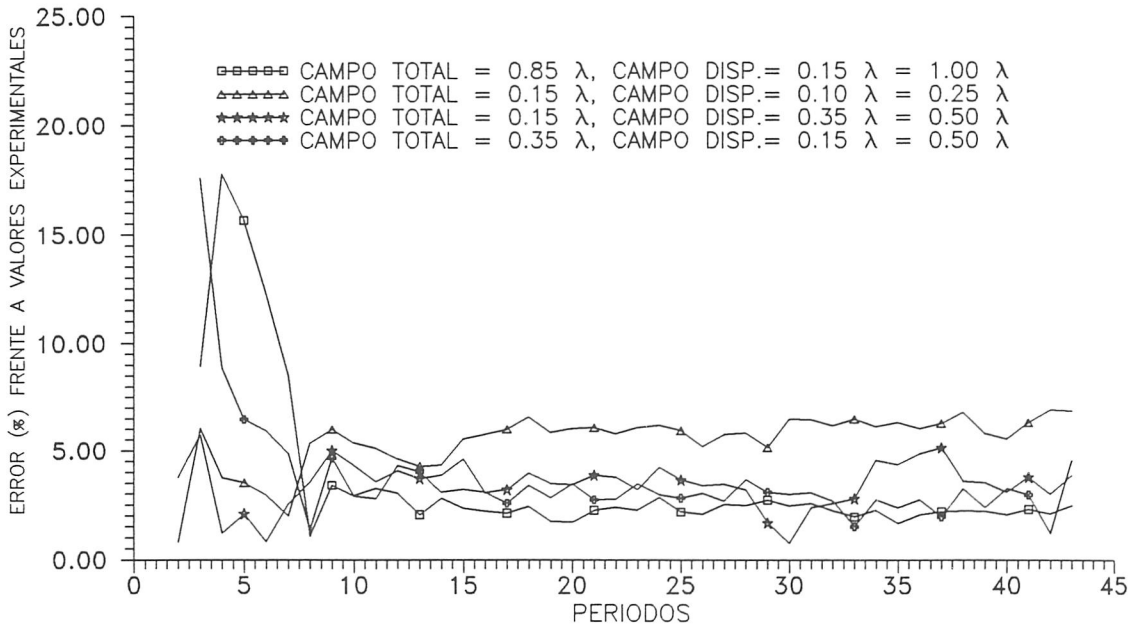


Figura 3.31: Convergencia de la RCS monoestática del ala de la Figura (3.30) iluminada con polarización TM y ángulo $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 118$ celdas/ λ

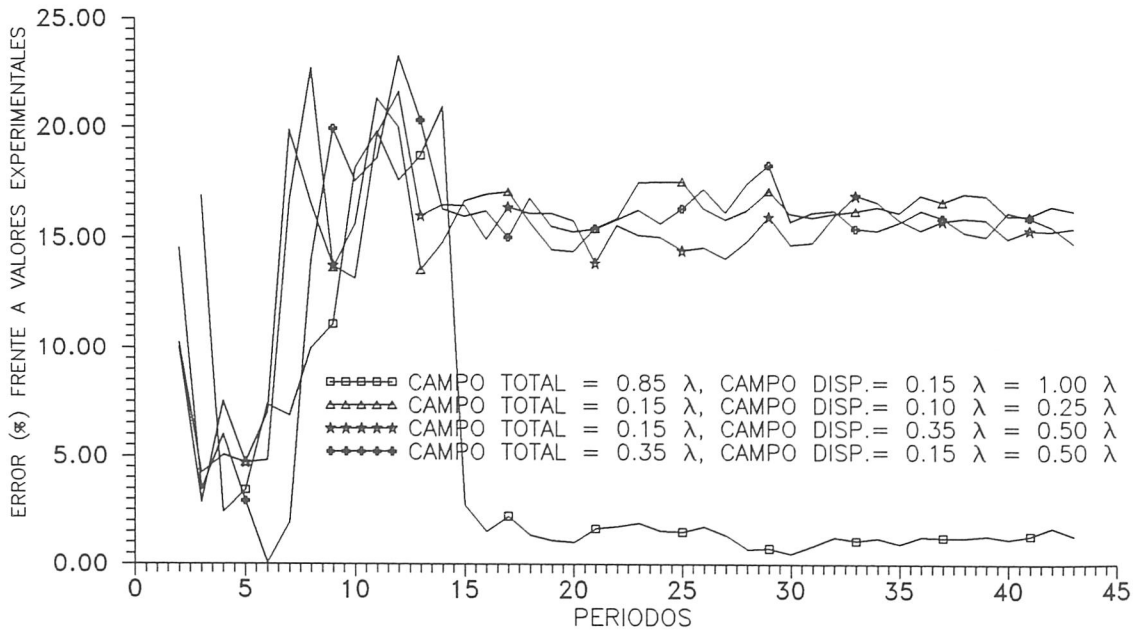


Figura 3.32: Convergencia de la RCS monoestática del ala de la Figura (3.30) iluminada con polarización TE y ángulo $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 118$ celdas/ λ

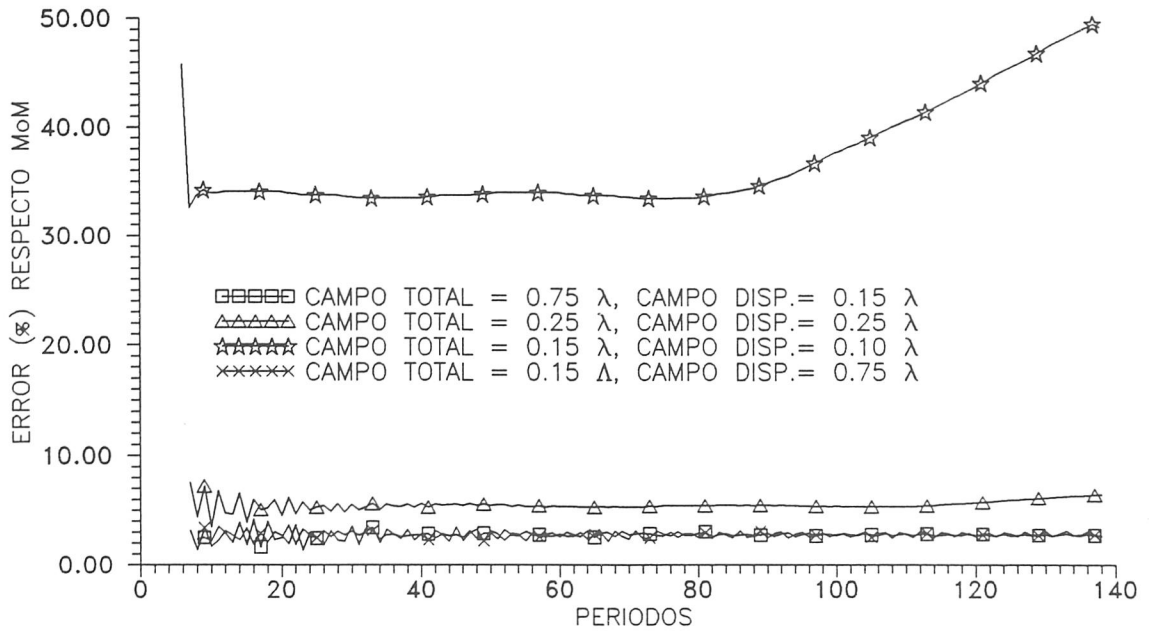


Figura 3.33: Convergencia de la RCS ortoestática de un cilindro de sección cuadrada de perímetro 18.8λ iluminada a $\varphi = 0^\circ$. $N_{clo} = 20 \text{ celdas}/\lambda$

- 0.50λ se precisan para obtener la RCS ortoestática con similares niveles de error.
- Para dispersores pequeños (menos de 1λ de perímetro) se precisan mayores separaciones. En general 1λ suele ser suficiente.

En cuanto a la convergencia, se puede afirmar que:

- El método converge cuando se ejecuta el código un tiempo similar al doble del tiempo que tarda la señal en recorrer, con el ángulo iluminado, toda la región de cálculo *ida y vuelta*. Este resultado es aproximadamente válido para dispersores conductores que no posean cavidades.
- Cuando la frontera se acerca al dispersor menos de 0.25λ pueden aparecer inestabilidades en el proceso de solución.

En cuanto a la conformación, y a modo de validación, se presentan sólo resultados para cilindros circulares e iluminación pulsada con polarización TE. El hecho de que, para la polarización TM, las corrientes eléctricas superficiales inducidas en el cilindro por el campo incidente, no decaigan con el tiempo, ya que son paralelas al eje del cilindro indefinido, hace que la información frecuencial obtenida a partir de estas evoluciones temporales no sean correctas. Por ello, para la polarización TM es preciso efectuar un filtrado numérico para obtener la respuesta a señales no armónicas (Furse *et al.*, 1990).

Para señales armónicas el filtrado de baja frecuencia es tan simple como promediar los picos positivos y negativos de la señal, según se ha visto.

Dos tipos de resultados se presentan: en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia. Se ha simulado la incidencia de un pulso gaussiano de parámetro a , propagándose en el vacío con velocidad c y dirección \hat{n}

$$H_z^i n c(\vec{r}, t) = \frac{1}{Z_0} e^{-a^2((t-t_0) - \frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}, \quad |H_z(\vec{r}, \omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}aZ_0} e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$

Se especifican inicialmente la frecuencia máxima del pulso (aquí tomada como aquella a la que la amplitud cae a la milésima parte de la amplitud ($.001/Z_0$)) y la resolución a tal frecuencia (aquí llamada resolución mínima $N_{clo|min}$), a partir de lo cual:

$$a = \frac{\pi f_{max}}{\sqrt{\ln 1000}}, \quad N_{clo|min} \equiv \frac{c/f_{max}}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{c/f_{max}}{N_{clo|min}}, \quad \Delta t = \frac{1}{2f_{max}N_{clo|min}}$$

de donde el teorema de muestreo impone que $N_{clo|min}$ sea igual o superior a la unidad.

Se presentan resultados para tres tamaños de celdas distintos, los resultados comparados tanto en el dominio de la frecuencia como en el del tiempo, conformando con el algoritmo de segundo orden, sin conformar con el algoritmo de segundo orden y con el algoritmo de cuarto orden. Se utiliza como geometría la de un cilindro de sección circular perfectamente conductor.

Se usa el parámetro Desviación Cuadrática Relativa (DCR), definido en (3.49), para comparar los resultados obtenidos con los teóricos o con los de la bibliografía.

$$DCR = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=N} ((y_i - y_{ri})W(x_i))^2}}{\sum_{i=1}^{i=N} y_{ri}} \quad (3.49)$$

donde $\{x_i, y_{ri}\}$ son las parejas de valores de referencia y $\{x_i, y_i\}$ las de valores calculados. $W(x)$ es una función peso que hace las veces de una ventana. La función que se usa aquí tiene la forma de un pulso cosenoidal positivo con centro $x_c = \frac{x_1+x_N}{2}$ y ancho $L = x_N - x_1$, con $\{x_i\}$ las abscisas comunes a ambos conjuntos de datos, ordenadas de modo creciente. Si los conjuntos que se comparan no tienen abscisas comunes se efectúa una interpolación del conjunto menos denso sobre las abscisas del más denso.

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{L}(x - x_c) \right) \right) & \text{si } x \in [x_c - L/2, x_c + L/2] \\ 0 & \text{si } x \notin [x_c - L/2, x_c + L/2] \end{cases}$$

El parámetro DCR da una medida de la desviación entre dos conjuntos de números positivos. Por tanto se han transformado previamente todas las medidas en $dB\lambda$ a λ .

Junto a la gráfica de RCS, se presenta una gráfica con la DCR respecto del valor teórico, obtenido mediante serie, como una función del centro de la ventana en la que se ha calculado.

Los valores en serie de la RCS (en metros) del cilindro conductor de radio a iluminado con una onda plana monocromática con polarización TE, de número de onda β , observado a un ángulo φ con respecto al incidencia, se han obtenido a partir de (Bowman *et al.*, 1987), (Balanis, 1989), (Harrington, 1961).

$$\sigma = \frac{4}{\beta} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\frac{dJ_n(\beta a)}{d(\beta a)}}{\frac{dH_n^{(2)}(\beta a)}{d(\beta a)}} \cos(n\phi) \right|^2 \quad (3.50)$$

con

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 2 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

donde $J_n(x)$ es la función de Bessel de primera especie de orden n y $H_n^{(2)}(x)$ es la función de Hankel de segunda especie y orden n . La suma de la serie (3.50) se ha evaluado haciendo uso de los algoritmos desarrollados en (Press *et al.*, 1989).

Se presentan resultados de la RCS en la dirección hacia atrás, para un cilindro circular conductor de 6 metros de radio con tres tamaños de celda distintos: 12 cm, 60 cm y 120 cm. Cuanto más groseramente se modele el cilindro peores resultados dará la aproximación escalonada, comparados con los obtenidos mediante conformación, a igualdad de resolución numérica.

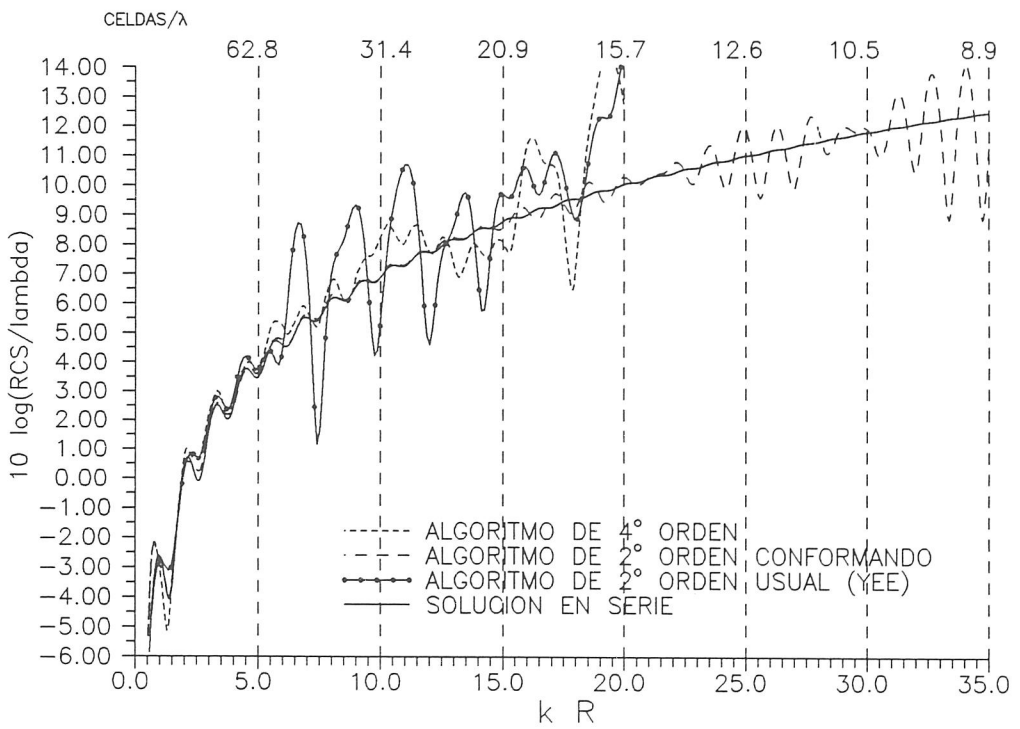


Figura 3.34: Cilindro conductor de sección circular y 50 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.598 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.12 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.2 \text{ nseg.}$ Resultados frecuenciales.

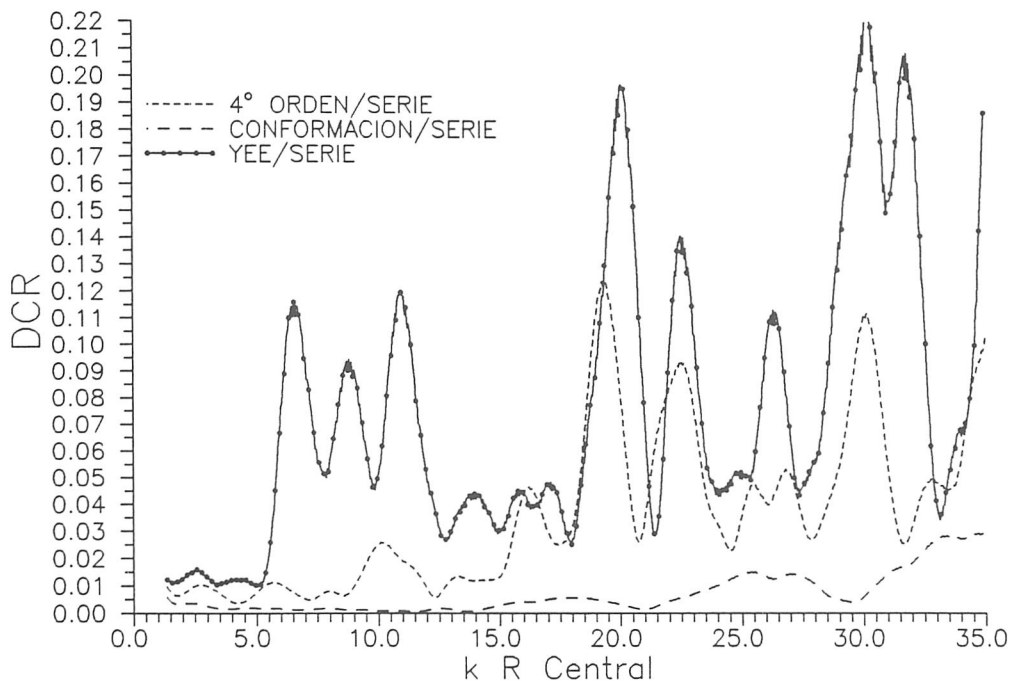


Figura 3.35: Cilindro conductor de sección circular. Comparación de la DCR para los tres métodos. Ancho de la ventana=2.5. (Ver la Figura (3.37)).

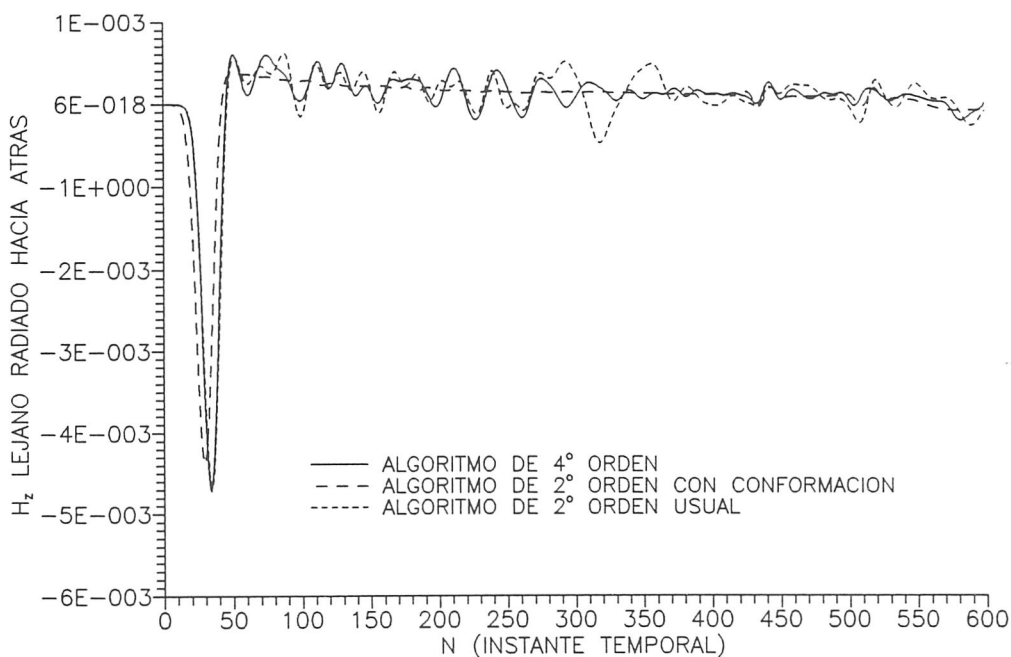


Figura 3.36: Cilindro conductor de sección circular y 50 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t - \frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.598 \cdot 10^9 \text{seg}^{-2}$, $\Delta = 0.12 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.2 \text{ nseg.}$ Resultados en el dominio del tiempo.

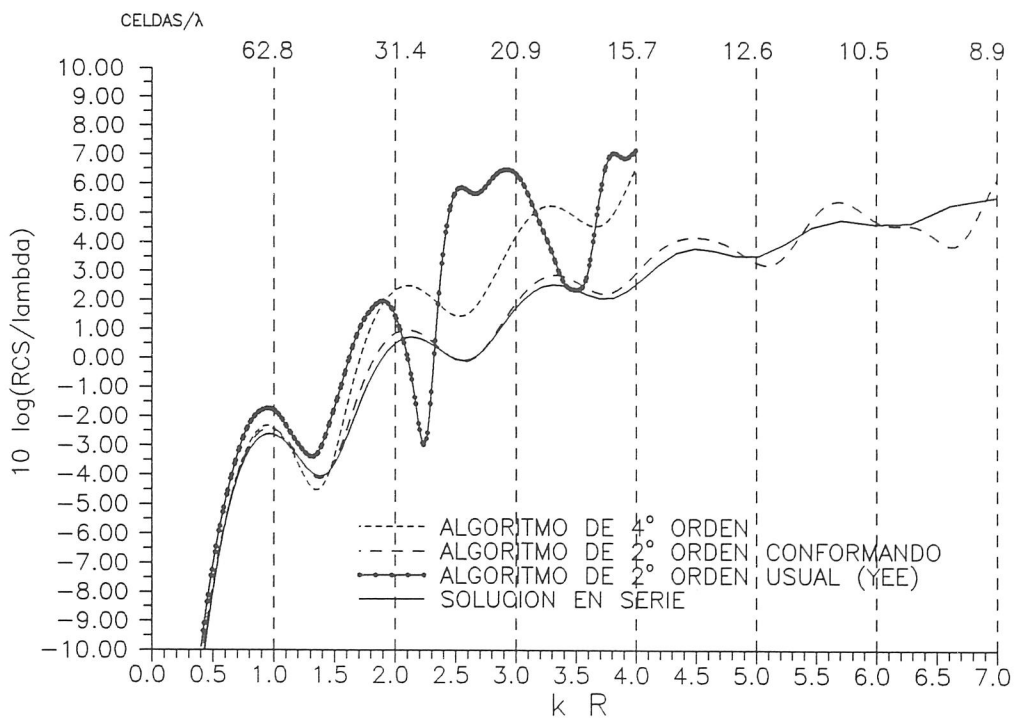


Figura 3.37: Cilindro conductor de sección circular y 10 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t - \frac{1}{c} \hat{n} \cdot \vec{r})^2}$, $a = 0.12 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.6 \text{ m.}$, $\Delta t = 1 \text{ nseg.}$ Resultados frecuenciales.

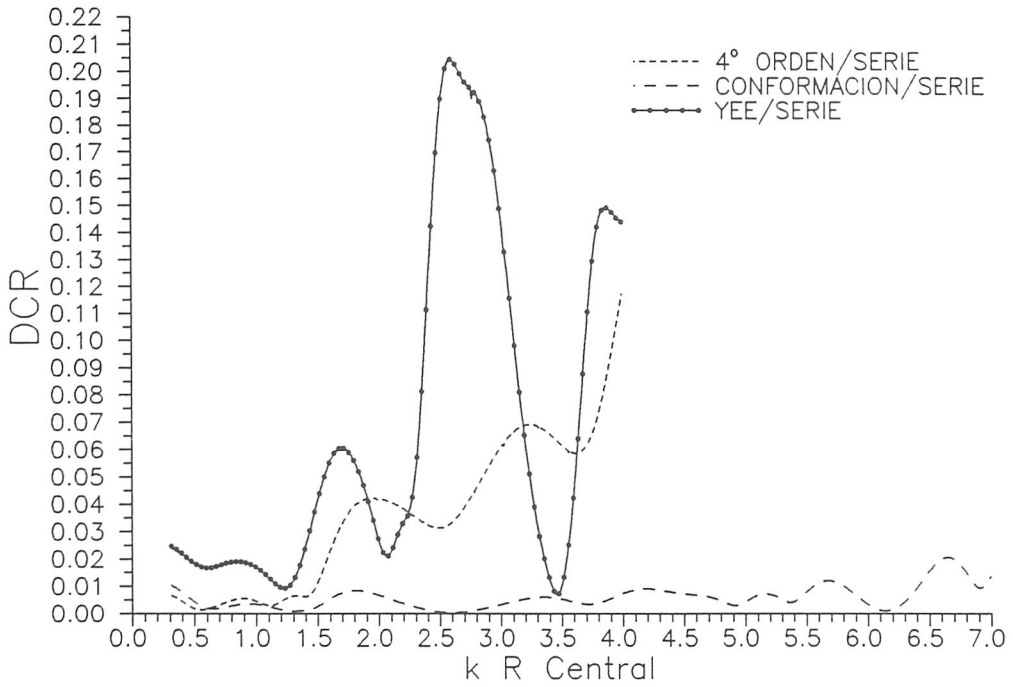


Figura 3.38: Cilindro conductor de sección circular. Comparación de la DCR para los tres métodos. Ancho de la ventana=0.5. (Ver la Figura (3.37)).

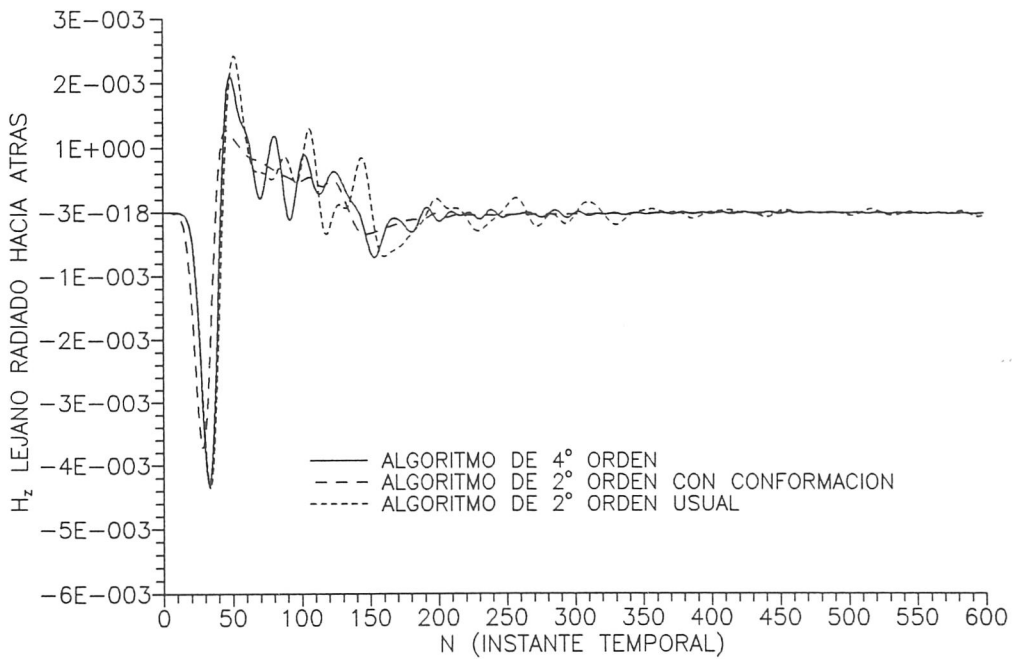


Figura 3.39: Cilindro conductor de sección circular y 10 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t - \frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 0.12 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 0.6 \text{ m.}$, $\Delta t = 1 \text{ nseg.}$ Resultados en el dominio del tiempo.

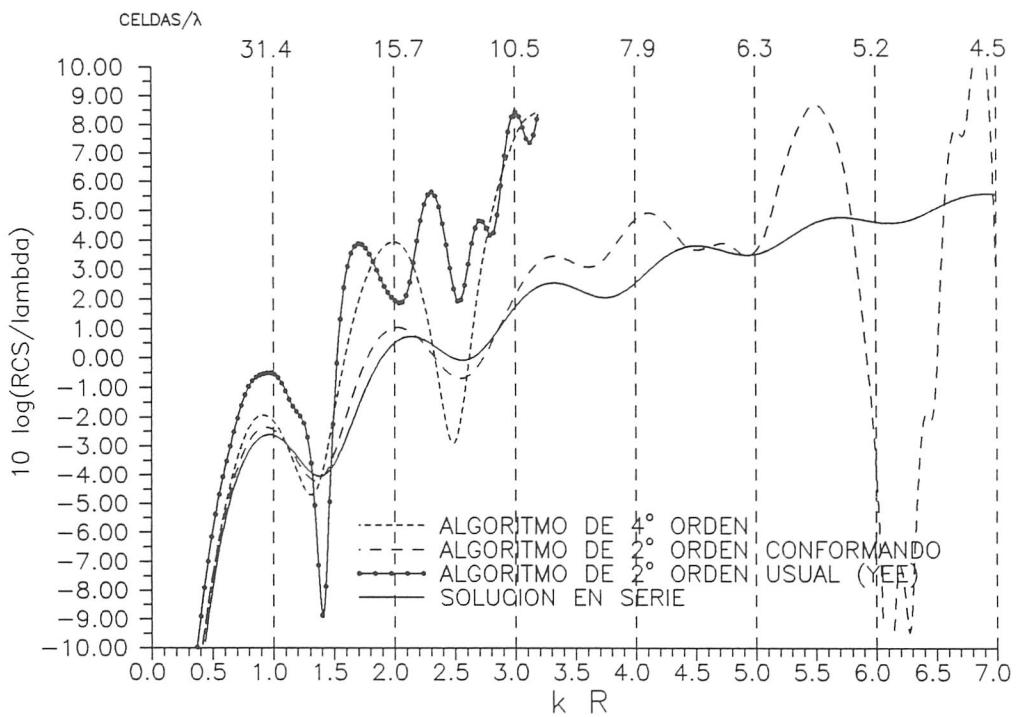


Figura 3.40: Cilindro conductor de sección circular y 5 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t - \frac{1}{c} \hat{n} \cdot \vec{r})^2}$, $a = 5.98 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 1.2 \text{ m.}$, $\Delta t = 2 \text{ nseg.}$ Resultados frecuenciales.

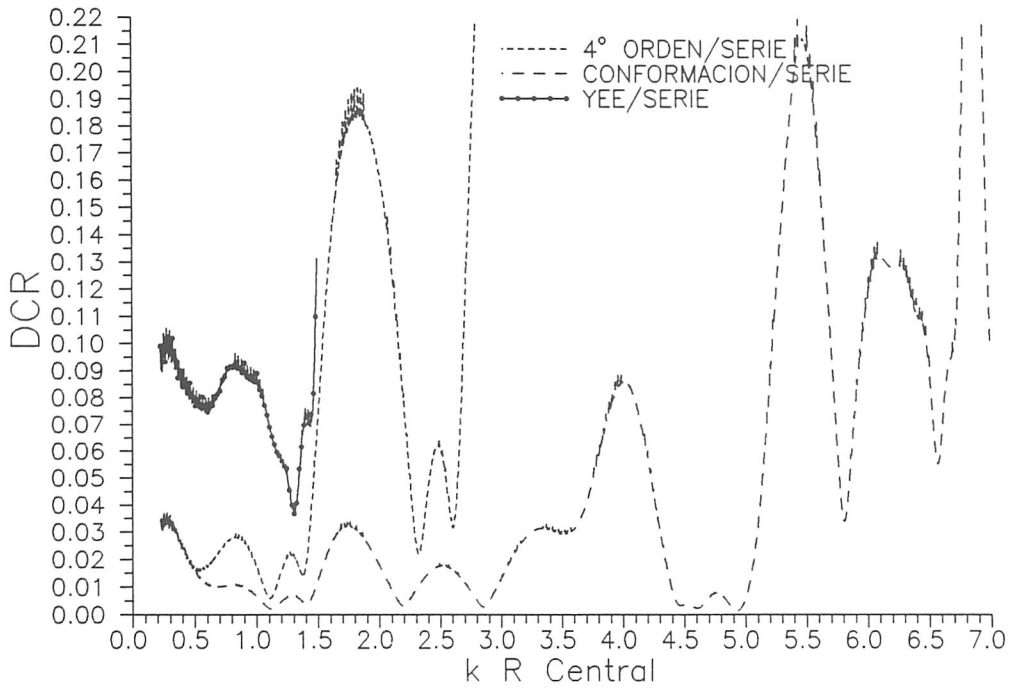


Figura 3.41: Cilindro conductor de sección circular. Comparación de la DCR para los tres métodos. Ancho de la ventana=0.25. (Ver la Figura (3.37)).

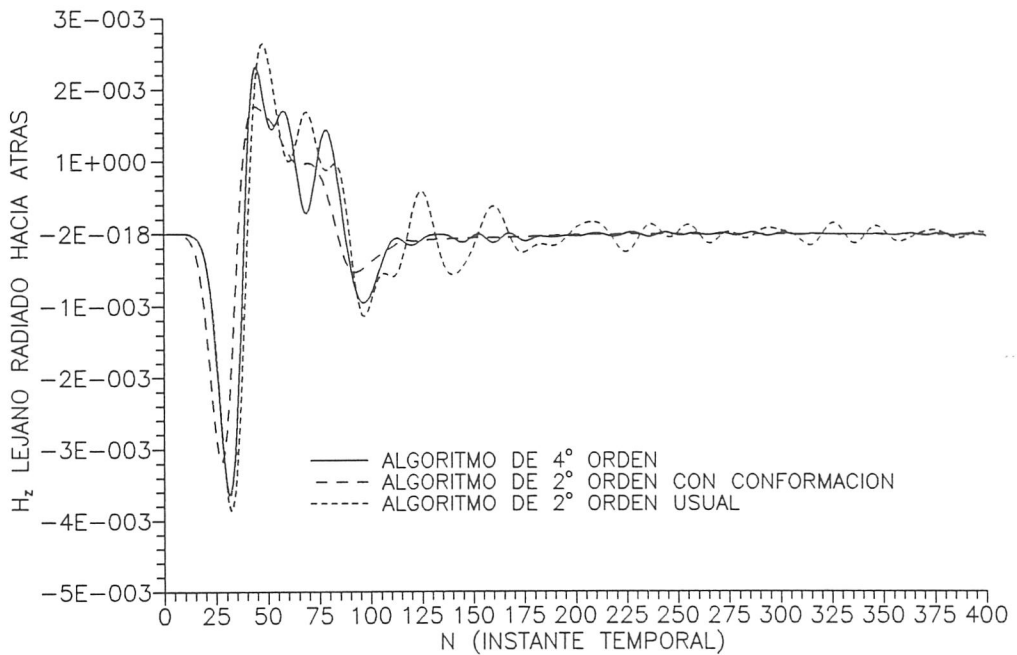


Figura 3.42: Cilindro conductor de sección circular y 5 celdas de radio iluminado con un pulso $1/Z_0 e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 5.98 \cdot 10^9 \text{ seg}^{-2}$, $\Delta = 1.2 \text{ m.}$, $\Delta t = 2 \text{ nseg.}$ Resultados en el dominio del tiempo.

Capítulo 4

Dispersión mediante objetos tridimensionales

En este capítulo se generalizan los algoritmos de diferencias finitas a la resolución de las ecuaciones de Maxwell en tres dimensiones. Primeramente se plantearán las expresiones resultantes de utilizar el esquema del salto de la rana de segundo orden, y, posteriormente, se propondrá una generalización del método de conformación bidimensional, en forma volúmica, para tratar objetos conductores curvados. Finalmente se presentarán resultados comparativos de los dos métodos.

Las ecuaciones de Maxwell planteadas en general para medios tridimensionales, fueron enunciadas en el capítulo anterior (3.1)–(3.4). Para medios lineales sin términos de conducción, toman la forma de sistema de ecuaciones hiperbólico homogéneo de coeficientes constantes (2.39), y si los medios tienen conductividades eléctricas y/o magnéticas aparecen términos inhomogéneos. En coordenadas cartesianas se escriben como

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_m H_x \right) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_m H_y \right) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_m H_z \right) \quad (4.6)$$

con la misma notación del capítulo anterior.

El objetivo de este capítulo será desarrollar aproximaciones numéricas a estas ecuaciones para estudiar la interacción de una onda electromagnética plana con una estructura tridimensional arbitraria. Los puntos que se tratarán aquí son paralelos a los del estudio bidimensional, a saber:

- Descripción de la discretización espacial y temporal de segundo orden a las derivadas de las ecuaciones (4.1)–(4.6) ¹ para estudiar la interacción de una onda electromagnética con un objeto material lineal isótropo, modelado a través de cambios escalonados de los coeficientes de las ecuaciones en diferencias.
- Iluminación del objeto mediante una onda plana armónica o transitoria.
- Estabilidad y dispersión del método.
- Simulación de un problema abierto mediante condiciones absorbentes en los planos de truncamiento.
- Cálculo del campo de radiación.
- Aproximación integral volúmica a las ecuaciones de Maxwell para tratar las discontinuidades abruptas entre las zonas de coeficientes constantes (cambios de medio) de las ecuaciones en derivadas parciales

$$-\oint_S d\vec{S} \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_S} \vec{H} dV$$

$$-\mu_0 \oint_S \vec{H} \times d\vec{S} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_S} \vec{E} dV + \mu_0 \int_{V_S} \vec{J} dV$$

4.1 Propagación

El esquema del salto de la rana aplicado a las ecuaciones con coeficientes constantes sin términos de conducción y para medios lineales e isótropos, queda de la forma propuesta en (2.39) con A_1 , A_2 y A_3 matrices de 6×6 dadas por (2.41)–(2.43), que quedan desacopladas en las componentes definidas en las redes dadas por (2.56). Si se utilizan incrementos espaciales y temporales divididos por 2, y escogiendo las componentes definidas en las siguientes redes

¹A diferencia del caso bidimensional, se particularizarán todos los algoritmos para el salto de la rana usual, y no se estudiará la discretización espacial de cuarto orden y temporal de segundo

	n	m_x	m_y	m_z
E_x	P	I	P	P
E_y	P	P	I	P
E_z	P	P	P	I
H_x	I	P	I	I
H_y	I	I	P	I
H_z	I	I	I	P

con P simbolizando múltiplos enteros de los incrementos, y I múltiplos semienteros, se obtiene el esquema de Yee, que coloca espacialmente las componentes de los campos entreveradas según la Figura (2.3). Es decir los campos que avanzan mediante el algoritmo de propagación son:

$$\left\{ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k), E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k), E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \right\}$$

$$\left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}), H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}), H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right\}$$

con n, i, j, k enteros.

A efectos de mantener el desacoplamiento espacio-temporal del esquema numérico, los campos multiplicados por conductividades son promediados temporalmente, de análogo modo a cómo se hacía en el caso bidimensional. Deshaciendo los cambios $t = \frac{\tau}{c}$ y $\vec{B} = \frac{\vec{E}}{c}$, y utilizando los vectores \vec{E} y $\vec{H} = \frac{\vec{E}}{\mu}$ en las ecuaciones, los algoritmos de propagación quedan, en función de los operadores centrados:

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) = \frac{1}{\varepsilon(i+\frac{1}{2}, j, k)}$$

$$\left(D_{\frac{1}{2}y} \cdot H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - D_{\frac{1}{2}z} \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) \right. \\ \left. - \sigma(i + \frac{1}{2}, j, k) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_x^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) \right) \quad (4.7)$$

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) = \frac{1}{\varepsilon(i, j+\frac{1}{2}, k)}$$

$$\left(D_{\frac{1}{2}z} \cdot H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - D_{\frac{1}{2}x} \cdot H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \right. \\ \left. - \sigma(i, j + \frac{1}{2}, k) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \right) \quad (4.8)$$

$$D_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{1}{\varepsilon(i, j, k+\frac{1}{2})}$$

$$\left(D_{\frac{1}{2}x} \cdot H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) - D_{\frac{1}{2}y} \cdot H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \right. \\ \left. - \sigma(i, j, k + \frac{1}{2}) P_{\frac{1}{2}t} \cdot E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k + \frac{1}{2}) \right) \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}
D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\mu(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})} \\
\left(D_{\frac{1}{2}z} \cdot E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - D_{\frac{1}{2}y} \cdot E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right. \\
&\quad \left. - \sigma_m(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\mu(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})} \\
\left(D_{\frac{1}{2}x} \cdot E_z^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - D_{\frac{1}{2}z} \cdot E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right. \\
&\quad \left. - \sigma_m(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}
D_{\frac{1}{2}t} \cdot H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= \frac{1}{\mu(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)} \\
\left(D_{\frac{1}{2}y} \cdot E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - D_{\frac{1}{2}x} \cdot E_y^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right. \\
&\quad \left. - \sigma_m(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) P_{\frac{1}{2}t} \cdot H_z^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Utilizando otras combinaciones de los operadores promedio y diferencia, se obtienen otros modos de desacoplo del esquema numérico (Materdey Bao-Hung, 1993).

Definiendo las constantes ($\Delta \equiv \Delta x = \Delta y = \Delta z$)

$$\begin{aligned}
C_a(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1 - \frac{\sigma(\alpha, \beta, \gamma) \Delta t}{2\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma)}}{1 + \frac{\sigma(\alpha, \beta, \gamma) \Delta t}{2\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma)}} \\
C_b(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\Delta} \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma)}}{1 + \frac{\sigma(\alpha, \beta, \gamma) \Delta t}{2\varepsilon(\alpha, \beta, \gamma)}} \\
D_a(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1 - \frac{\sigma_m(\alpha, \beta, \gamma) \Delta t}{2\mu(\alpha, \beta, \gamma)}}{1 + \frac{\sigma_m(\alpha, \beta, \gamma) \Delta t}{2\mu(\alpha, \beta, \gamma)}} \\
D_b(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{\Delta} \frac{\frac{\Delta t}{\mu(\alpha, \beta, \gamma)}}{1 + \frac{\sigma_m(\alpha, \beta, \gamma) \Delta t}{2\mu(\alpha, \beta, \gamma)}}
\end{aligned}$$

donde α, β y γ pueden ser enteros o semienteros, las ecuaciones (4.7)–(4.12) quedan:

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= C_a(i + \frac{1}{2}, j, k) E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + C_b(i + \frac{1}{2}, j, k) \\
&\quad \left(H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) + \right. \\
&\quad \left. H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= C_a(i, j + \frac{1}{2}, k)E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + C_b(i, j + \frac{1}{2}, k) \\
&\quad \left(H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) + \right. \\
&\quad \left. H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= C_a(i, j, k + \frac{1}{2})E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + C_b(i, j, k + \frac{1}{2}) \\
&\quad \left(H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + \right. \\
&\quad \left. H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= D_a(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + D_b(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\
&\quad \left(E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) + \right. \\
&\quad \left. E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= D_a(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) + D_b(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\
&\quad \left(E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) + \right. \\
&\quad \left. E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= D_a(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + D_b(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\
&\quad \left(E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) + \right. \\
&\quad \left. E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) \right)
\end{aligned}$$

Ecuaciones que, en general, pueden ser aplicadas con coeficientes variables de una celda a otra, para estudiar la solución de problemas electromagnéticos en presencia de medios materiales. Los errores cometidos en las aproximaciones espaciales y temporales, en función de la frecuencia vienen acotados por las ecuaciones (3.27) y (3.28).

4.2 Iluminación

El problema de la iluminación se planteó debido a la necesidad de introducir en el dominio de solución una excitación electromagnética arbitraria propagándose según una dirección y sentido determinados, a fin de hacerla interactuar con un dispersor para calcular la respuesta del mismo ante tal excitación. Según se vio en el anterior capítulo existen dos formas de conseguirlo: una estaba basada en la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, que permitía su planteamiento para el campo dispersado (el

total menos el incidente) sin más que especificar los campos incidentes en la superficie del dispersor (Ecs. (3.29) (3.30)), y la otra en el principio de equivalencia, que permite tener una zona con el campo incidente deseado, fuera de la cual es cero. Si en esta zona de campo incidente se introduce el dispersor, se tendrá en realidad una zona de campo total, y fuera una zona de campo dispersado. El esquema de la separación zonal resultante es la versión tridimensional de las Figuras (3.2) y (3.4).

El modo de conseguirlo es mediante la introducción de unas corrientes adecuadas en la superficie de separación entre ambas zonas, y resolviendo las ecuaciones de Maxwell añadiendo tales corrientes mediante el algoritmo de diferencias finitas; el resultado vuelve a ser la aplicación de los algoritmos desarrollados a la resolución de ecuaciones no homogéneas localmente. Estas corrientes también podían ser interpretadas como los términos que faltan en la ecuación en diferencias para que todos los términos involucrados en la misma sean, bien campo total, bien campo dispersado, en virtud de la linealidad.

Supóngase que el paralelepípedo de campo total está comprendido por $[i_i, i_f] \times [j_i, j_f] \times [k_i, k_f]$. Por ejemplo, para calcular el campo $E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) \forall i \in [i_i, i_f], j \in [j_i - 1, j_f - 1]$

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k_i) |_{\text{Total}} = & C_a(i + \frac{1}{2}, j, k_i) E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k_i) |_{\text{Total}} + C_b(i + \frac{1}{2}, j, k_i) \\ & \left(H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k_i) |_{\text{Total}} - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k_i) |_{\text{Total}} + \right. \\ & \left. H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k_i - \frac{1}{2}) |_{\text{Dispersado}} - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k_i + \frac{1}{2}) |_{\text{Total}} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

todos los campos involucrados son totales salvo $H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k_i - \frac{1}{2})$ que es dispersado. Por tanto hay que añadir el término

$$C_b(i + \frac{1}{2}, j, k_i) H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k_i - \frac{1}{2}) |_{\text{Incidente}}$$

para que todos los campos sean totales

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k_i) |_{\text{Total}} = & E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k_i) |_{\text{Propag}} \\ & + C_b(i + \frac{1}{2}, j, k_i) H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k_i - \frac{1}{2}) |_{\text{Incidente}} \end{aligned}$$

donde *Propag* indica campo calculado mediante el algoritmo de propagación (4.13).

El resto de las componentes se iluminan de análogo modo.

Como las excitaciones utilizadas para iluminar han sido ondas planas (monocromáticas y pulsadas), y, es preciso especificar el campo incidente en puntos en torno a la superficie de separación campo total–campo dispersado, se genera una tabla de valores a lo largo de una línea en la dirección de iluminación, que contiene el campo para cada punto de un plano perpendicular a la misma, de modo similar a

como se hizo en el caso bidimensional. A partir de esta tabla se obtienen, mediante interpolación, los campos en los planos que pasan por los puntos donde se precisa el campo incidente.

Cuando se ilumina armónicamente, la tabla de valores se genera con la velocidad de fase que se obtiene a partir de la relación de dispersión numérica, que es función de la frecuencia, de los incrementos espaciales y temporales, y de la dirección de propagación.

Las direcciones de iluminación se fijan mediante el ángulo polar θ y el azimutal φ . Cuando la onda incidente tiene dirección distinta de $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ hay que especificar también el ángulo ψ de polarización que forma el campo eléctrico con el vector $\hat{n} \times \hat{k}$ (\hat{n} vector en la dirección y sentido de la onda incidente).

4.3 Condiciones absorbentes

En cuanto a las condiciones absorbentes, el fundamento teórico se ha desarrollado en el capítulo bidimensional. Los algoritmos allí expuestos se aplican a todos los puntos interiores de las fronteras de truncamiento, es decir, al igual que allí era preciso utilizar otro algoritmo para absorber el campo en las esquinas, aquí será preciso, además, hacerlo para absorber el campo en las aristas. Para estos casos, se supone la incidencia de una onda esférica que procede del centro de la red, e incidiendo hacia la posición que ocupa la componente de la arista o de la esquina. Sobre cada arista es preciso absorber las tres componentes del campo eléctrico (ver Figura (4.1)).

Si el número de Courant es 0.5, el valor de la componente de uno de los campos en el origen, notada ahora con $C^n(0, 0, 0)$ vendrá dada por el valor que hay en un punto ficticio situado a 1Δ del punto en la dirección hacia el centro de la red, en el instante $n - 1$, multiplicado por el correspondiente factor de atenuación f_r de la Ec. (3.34).

$$C^n(0, 0, 0) = f_r \bar{C}^{n-1}$$

\bar{C} es el valor de la componente C . Este valor se interpola a partir de sus ocho vecinos linealmente mediante

$$\begin{aligned} \bar{C}^{n-1} = & (1 - \sin \beta)(1 - \cos \beta \sin \alpha)(1 - \cos \beta \cos \alpha) C^{n-1}(0, 0, 0) + \\ & (1 - \sin \beta)(1 - \cos \beta \sin \alpha) \cos \beta \cos \alpha C^{n-1}(1, 0, 0) + \\ & (1 - \sin \beta) \cos \beta \sin \alpha (1 - \cos \beta \cos \alpha) C^{n-1}(0, 1, 0) + \\ & (1 - \sin \beta) \cos^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha C^{n-1}(1, 1, 0) + \\ & \sin \beta (1 - \cos \beta \sin \alpha)(1 - \cos \beta \cos \alpha) C^{n-1}(0, 0, 1) + \\ & \sin \beta (1 - \cos \beta \sin \alpha) \cos \beta \cos \alpha C^{n-1}(1, 0, 1) + \\ & \sin \beta \cos \beta (1 - \cos \beta \cos \alpha) C^{n-1}(0, 1, 1) + \\ & \sin \beta \cos^2 \beta \sin \alpha \cos \alpha C^{n-1}(1, 1, 1) \end{aligned}$$

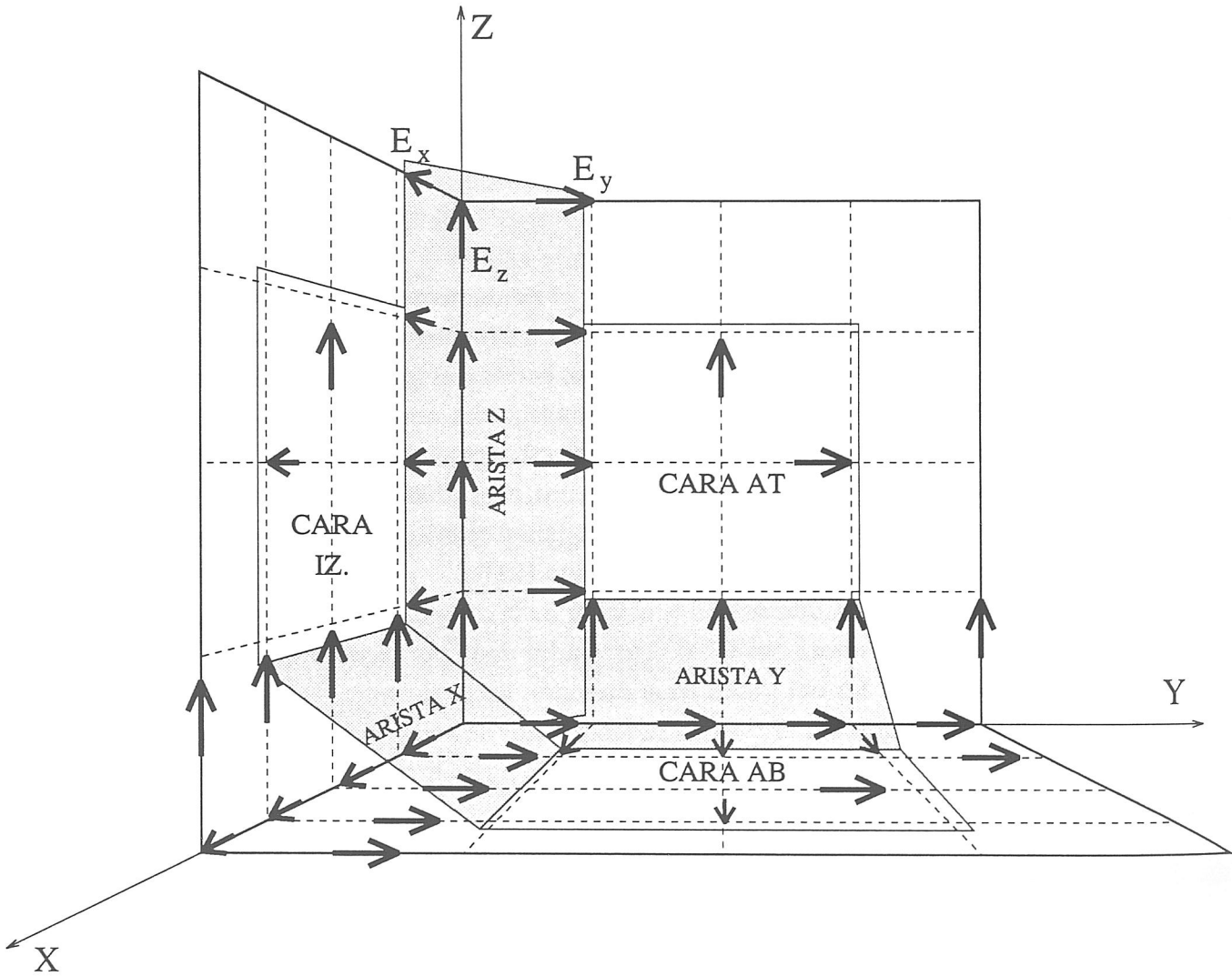


Figura 4.1: Caras y aristas de la superficie de truncamiento

donde se usa la notación de la Figura (4.2).

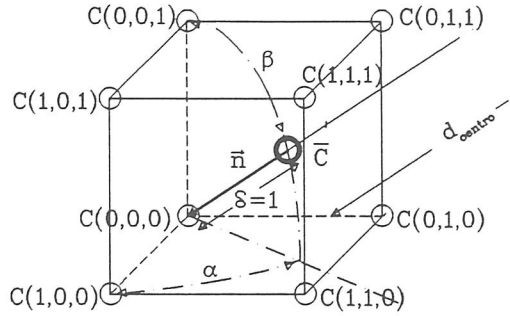


Figura 4.2: Interpolación de una componente entre sus ocho vecinas

La Figura (4.3) muestra la geometría de la interpolación que se utiliza para las componentes E_z y E_y de una arista a lo largo del eje Z . La componente de abajo está situada en una coordenada z inferior a la del centro de la red, y la de arriba en una superior.

4.4 Dispersión y Estabilidad

La condiciones de estabilidad y la relación de dispersión del método del salto de la rana, aplicado a las ecuaciones de Maxwell tridimensionales ha sido estudiada, a modo de ejemplo, en el capítulo segundo. Por complitud, se resumen los resultados allí derivados.

El punto de partida del estudio de la estabilidad mediante el criterio de Von-Neumann y de la relación de dispersión es distinto. La estabilidad se obtenía como condición de que ninguno de los armónicos en los que se descomponía una perturbación de las condiciones iniciales, debía crecer indefinidamente, propagado por el esquema en diferencias, mientras que la relación de dispersión estudiaba la propagación de uno de los armónicos en los que se descomponían las condiciones iniciales. Como quiera que tanto una perturbación de las condiciones iniciales, como las condiciones iniciales, propiamente, se propagaban de análogo modo, el punto común de encuentro de el estudio se halla en el análisis de la propagación de un armónico del tipo $e^{\Omega n \Delta t} e^{j\vec{\beta}\vec{r}}$ mediante el esquema en diferencias.

Ya que las funciones del anterior tipo son autofunciones tanto de los operadores en diferencias como de los operadores diferenciales, estudiar la propagación de un armónico equivale a hacer un estudio de autovalores. La condición de estabilidad se imponía mediante $\Re(\Omega) = 0$, que era equivalente a (2.37), y la relación de dispersión, quedaba como una condición de que los únicos modos que se propagasen no fuesen los triviales (2.54).

Para la estabilidad, tanto el criterio de Von-Neumann como el de Courant establecían

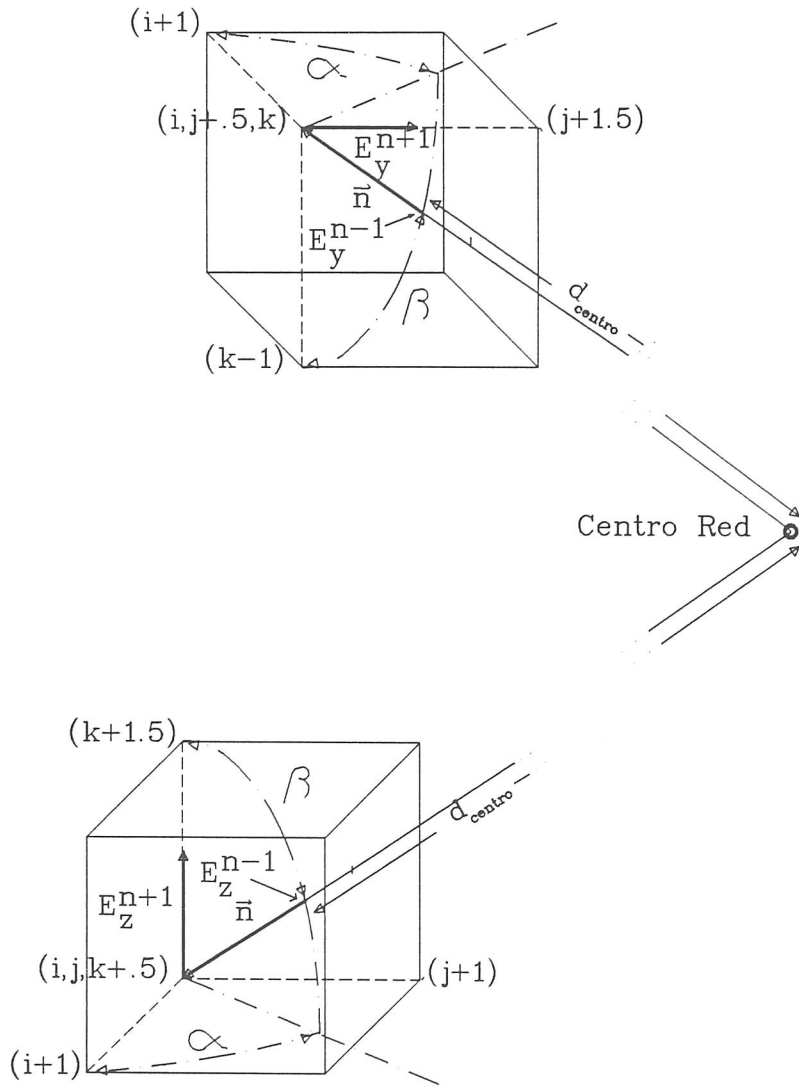


Figura 4.3: Incidencia de una onda sobre una arista en el eje Z

que

$$c\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

y la relación de dispersión, si $\Omega = j\omega$

$$\frac{\sin^2(\omega\Delta t)}{c^2\Delta t^2} = \frac{\sin^2(\beta_x\Delta x)}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2(\beta_y\Delta y)}{\Delta y^2} + \frac{\sin^2(\beta_z\Delta z)}{\Delta z^2}$$

Al igual que sucedía en dos dimensiones el hecho de que la relación de dispersión no sea la teórica

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \beta_z^2$$

se traduce en diferencias de fase de la solución teórica respecto de la numérica. También existe una dependencia de la constante de propagación respecto del ángulo, lo cual se traduce en una anisotropía, que hace, que, por ejemplo, un frente de onda teóricamente esférico, no lo sea al propagarse numéricamente.

4.5 Conformación

El método de conformación bidimensional puede ser extendido directamente a tres dimensiones, para tratar la interacción de ondas electromagnéticas con dispersores curvos (Jurgens y Taflove, 1993). Sin embargo, es posible hacer una formulación más adecuada del método aplicado a geometrías tridimensionales, haciendo uso de las siguientes expresiones volúmicas, análogas a las superficiales de Ampère y Faraday

$$-\oint_S d\vec{S} \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_S} \vec{H} dV \quad (4.14)$$

$$-\mu_0 \oint_S \vec{H} \times d\vec{S} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_S} \vec{E} dV + \mu_0 \int_{V_S} \vec{J} dV \quad (4.15)$$

a este método se le denominará *método de conformación volúmica*².

Para aplicar las leyes integrales, las celdas cúbicas próximas al objeto se deforman y adaptan a la superficie, de análogo modo a cómo lo hacían los contornos cuadrados para aplicar la ley de Faraday en el problema bidimensional. Las integrales volúmicas y superficiales se llevan a cabo sobre las celdas deformadas aproximándolas mediante

$$\int_{S_a \text{ Deformada}} \varphi dS \simeq \varphi(\text{Centro de } S_a \text{ sin de formar}) \cdot S_a$$

$$\int_{V_a \text{ Deformado}} \vartheta dV \simeq \vartheta(\text{Centro de } V_a \text{ sin de formar}) \cdot V_a$$

² Abreviadamente CV.

Análogamente a lo que sucedía para el caso bidimensional, la aplicación de la discretización de la ley similar a la de Ampère (4.15) a las celdas deformadas conlleva la necesidad de evaluar las corrientes superficiales sobre el dispersor. A fin de evitar esto último, se utiliza la aproximación del vecino más cercano (AVC) en el mismo sentido allí descrito: cuando en la evaluación de \vec{H} a través de la ecuación de Faraday (4.14) se precise de campos eléctricos para cuyo cálculo sea necesario utilizar la ecuación de Ampère (4.15) con corrientes no nulas, se utilizará el campo eléctrico perteneciente a la celda más cercana y coplanar con el que se debiera utilizar, que no esté en tal situación. Esto evita la aplicación de la Ley de Ampère en las celdas en las que hay corrientes. El hecho de que los campos eléctricos sean integrados sobre superficies, en vez de sobre líneas, da la posibilidad de utilizar como vecino más cercano a cualquiera de sus coplanares. No obstante, en un pequeño número de celdas no es posible encontrar, un vecino en estas condiciones; en tales casos se utiliza un modelo escalonado local y las expresiones en diferencias resultantes de la discretización de las leyes diferenciales.

Se va a particularizar el método a dispersores perfectamente conductores, aunque su planteamiento para objetos dieléctricos es igualmente simple.

La Figura (4.4) muestra la deformación local de tres celdas, para evaluar H_z mediante la discretización de (4.14).

Las ecuaciones resultantes para hacer avanzar temporalmente H_z en esas celdas son, suponiendo que están en el vacío, y que no es necesario utilizar la AVC en las celdas superior e inferior, y sí en la de en medio

$$H_z^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5, k) = H_z^{n-0.5}(i+0.5, j+0.5, k) + \frac{\Delta t}{V\mu_0}(S_b E_y(i, j+0.5, k) - S_f E_y(i+1, j+0.5, k) + S_r E_x(i+0.5, j+1, k)) \quad (4.16)$$

$$H_z^{n+0.5}(i+0.5, j+0.5, k-1) = H_z^{n-0.5}(i+0.5, j+0.5, k-1) + \frac{\Delta t}{V\mu_0} (S'_b E_y(i, j+0.5+\{1\}, k-1) - S'_f E_y(i+1, j+0.5+\{1\}, k-1) + S'_r E_x(i+0.5, j+1, k-1)) \quad (4.17)$$

$$H_z^{n+0.5}(i+0.5, j+1.5, k-2) = H_z^{n-0.5}(i+0.5, j+1.5, k-2) + \frac{\Delta t}{V\mu_0} (S''_b E_y(i, j+1.5, k-2) - S''_f E_y(i+1, j+1.5, k-2) + S''_r E_x(i+0.5, j+2, k-2)) \quad (4.18)$$

donde las integrales sobre la superficie del dispersor son nulas, ya que el campo tangencial sobre el conductor es cero. Si el dispersor fuese un dieléctrico sería preciso evaluar el campo eléctrico sobre esta superficie; para ello se interpolaría espacialmente

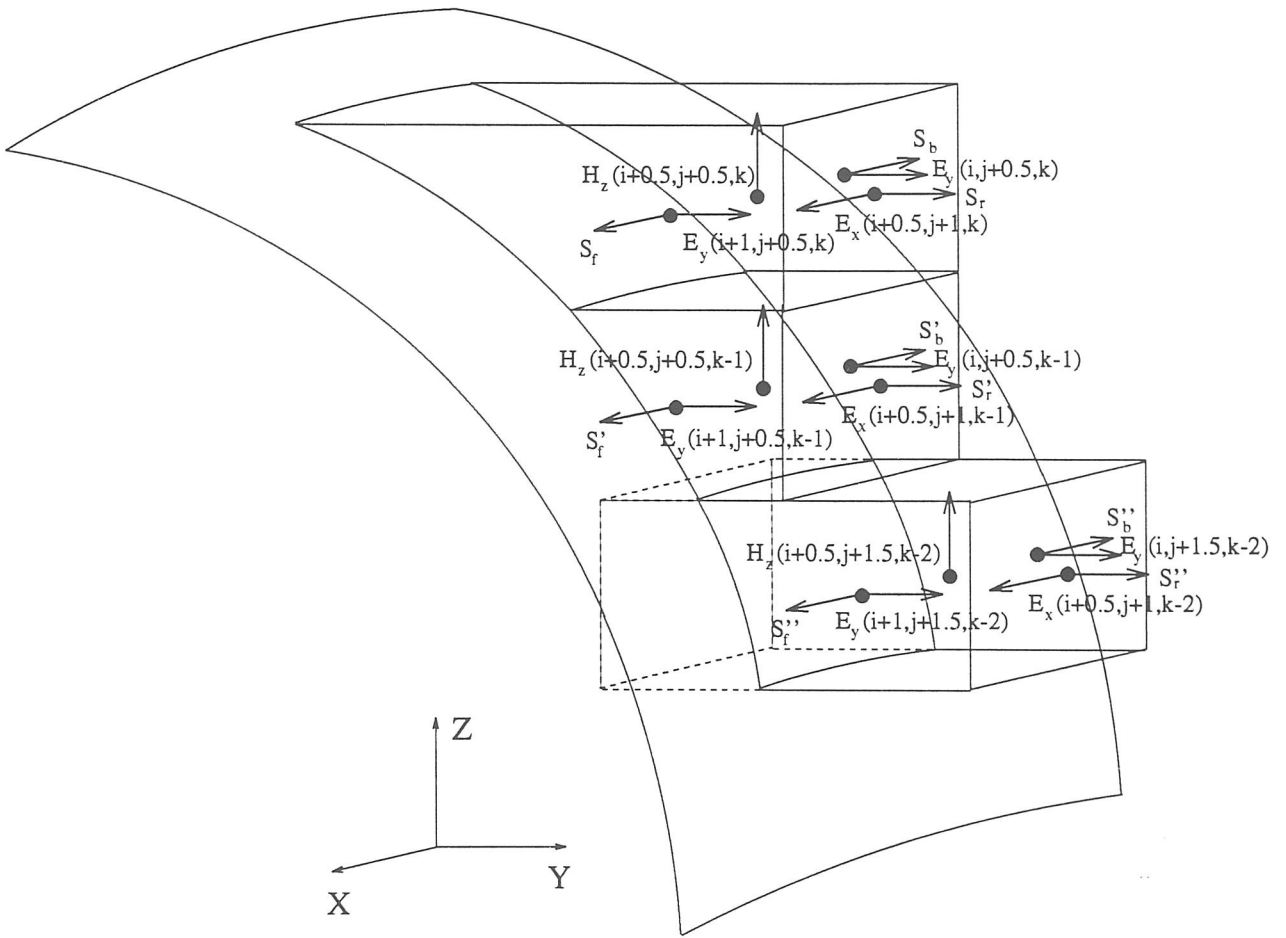


Figura 4.4: Deformación de las celdas cúbicas para conformar una superficie

a partir de los campos eléctricos más cercanos. Las Ecs. (4.16)–(4.18) se reducen a las ecuaciones usuales en diferencias cuando las celdas no se deforman (modelo escalonado). La integración del campo eléctrico sobre las caras S'_f y S'_b de la celda de en medio, se lleva a cabo con los campos eléctricos de la celda contigua de su derecha. Los desplazamientos necesitados en este caso para aplicar la AVC, se hallan entre llaves. El resto de las ecuaciones se obtiene de análogo modo.

Si en la Figura (4.4), la superficie es más alabeada, puede llegar a suceder que cualquiera de los vecinos posibles que se utilizan en la AVC para calcular $H_z^{n+0.5}(i + 0.5, j + 0.5, k - 1)$, que son

$$\left(E_y(i + 1, j + 0.5 + \{1\}, k - 1), E_y(i + 1, j + 0.5, k - 1 + \{1\}), E_y(i + 1, j + 0.5, k - 1 - \{1\}) \right)$$

no puedan ser calculados a su vez sin involucrar corrientes. Si la superficie sobre la que se debiera calcular la integral de tal campo eléctrico es pequeña, se desprecia su contribución sobre el total. Si no fuese despreciable, no se deformaría esa celda, y se tomaría un modelo escalonado local.

Análogamente al caso bidimensional, las magnitudes de los volúmenes y de las superficies de integración, se obtienen a partir de un submallado de incremento más fino que el de la red principal. Es interesante señalar que, en general, no son precisas relaciones del incremento espacial de la red principal a la red auxiliar mayores a 10 para obtener buenos resultados, aunque en cada caso dependerá del nivel de detalle del dispersor. Según se observa en la Figura 4.5 con relaciones superiores a 6 no se obtienen diferencias significativas en la RCS.

El interés, pues, de esta aproximación radica en que el modelado es fácilmente automatizable, sin tener que recurrir a las expresiones analíticas del contorno.

Para ilustrar las diferencias respecto de la extensión directa del CP bidimensional de (Jurgens y Taflove, 1993), consideremos la celda de la Figura (4.6), en la que se muestra una celda adaptada a una superficie conductora, para calcular H_z , en la que, por simplicidad se supone que no es preciso utilizar la AVC.

La aplicación de la ley de Faraday en la forma usual resulta

$$H_z^{n+\frac{1}{2}} = H_z^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left(\frac{l_a}{S} E_{ya} - \frac{l_c}{S} E_{yc} - \Delta E_{xb} \right) \quad (4.19)$$

y la aplicación del VC aquí propuesto

$$H_z^{n+\frac{1}{2}} = H_z^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\mu_0} \left(\frac{S_a}{V} E_{ya} - \frac{S_c}{V} E_{yc} - \Delta E_{xv} \right) \quad (4.20)$$

donde S_a es la superficie del plano posterior, S_c la del anterior, V el volumen de la celda, l_a la longitud del lado central posterior, l_c la longitud del lado central anterior y S la superficie sombreada.

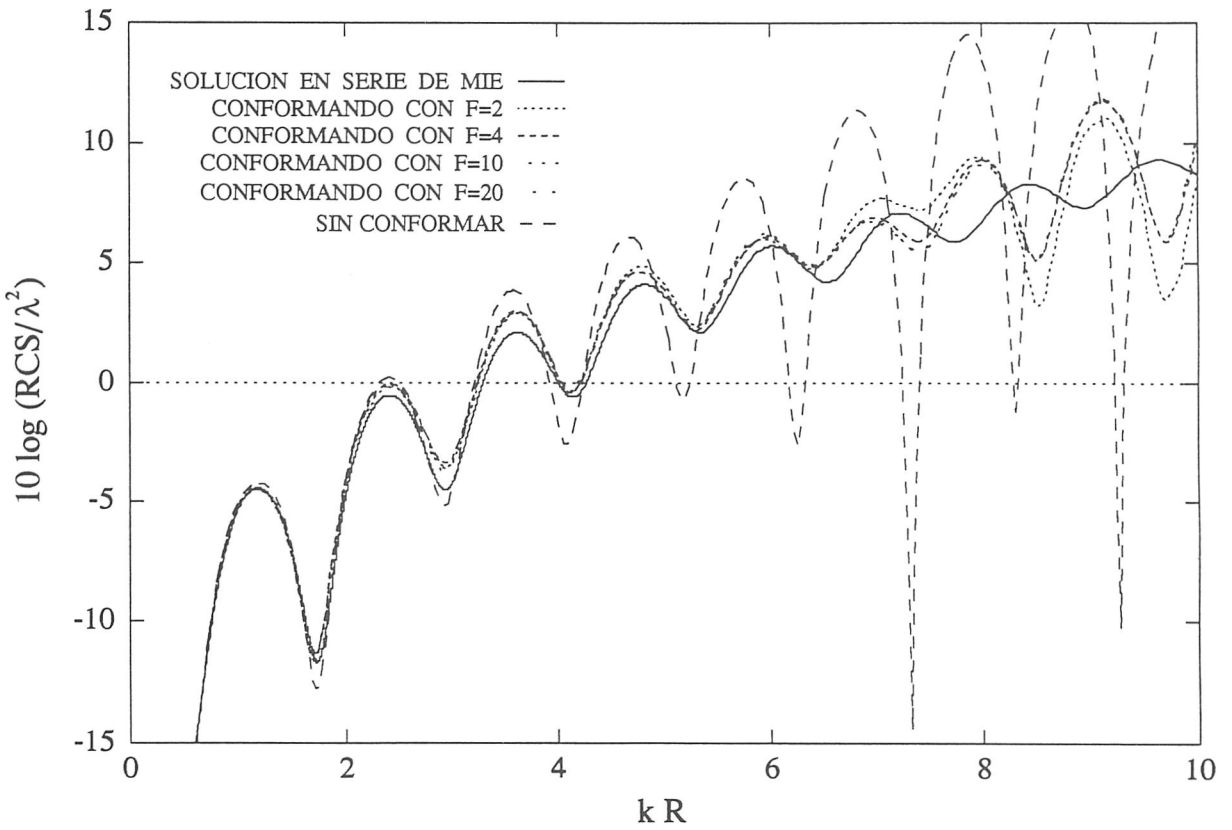


Figura 4.5: Dispersión hacia atrás mediante una esfera perfectamente conductora de 3 m. de radio (14 celdas). $\Delta_{principal} = 3/14m.$, $\Delta t = 0.357 nseg.$ Iluminada con un pulso gaussiano $0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 3.34 \cdot 10^8 seg^{-2}$ Resultados frecuenciales. Comparación para distintos cocientes $F = \frac{\Delta_{principal}}{\Delta_{auxiliar}}$

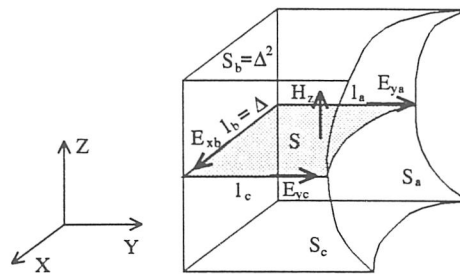


Figura 4.6: Celda tridimensional deformada

Se observa que las expresiones (4.19) y (4.20) sólo coinciden si $\frac{S_a}{V} = \frac{l_a}{S}$ y $\frac{S_c}{V} = \frac{l_c}{S}$, lo cual sucede, en particular, si la celda volúmica es de sección S constante a lo largo del eje Z . Por tanto el método aquí propuesto tiene en cuenta con mayor precisión las posibles variaciones de curvatura del dispersor dentro de la celda.

4.5.1 Estabilidad de la conformación volúmica

La condición necesaria que habrían de cumplir los autovalores temporales del operador en diferencias temporal, es la que va a ser impuesta aquí para estudiar la estabilidad del método. Idénticas consideraciones al estudio de la estabilidad del método de conformación en dos dimensiones, son aquí aplicables.

La extensión a tres dimensiones de las definiciones de los operadores diferencia pesada espacial de (3.38), es

$${}_a^b D_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}^{(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} \varphi(i_0, j_0, k_0) = a\varphi(i_0 + \alpha_1, j_0 + \beta_1, k_0 + \gamma_1) - b\varphi(i_0 + \alpha_2, j_0 + \beta_2, k_0 + \gamma_2)$$

operador que tiene los siguientes autovalores y autovectores

$$\begin{aligned} {}_a^b D_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}^{(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} \varphi_e(i_0, j_0, k_0) &= {}_a^b \lambda_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}^{(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} \varphi_e(i_0, j_0, k_0) \\ \varphi_e(i_0, j_0, k_0) &= e^{j(k_x i_0 + k_y j_0 + k_z k_0) \Delta} \\ {}_a^b \lambda_{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)}^{(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)} &= a e^{j k_x \alpha_1 \Delta} e^{j k_y \beta_1 \Delta} e^{j k_z \gamma_1 \Delta} - b e^{j k_x \alpha_2 \Delta} e^{j k_y \beta_2 \Delta} e^{j k_z \gamma_2 \Delta} \end{aligned}$$

Planteando operacionalmente las ecuaciones de propagación para una celda que, por simplicidad, sólo precise distorsión para calcular H_z , y el resto de las componentes se calculen por el algoritmo usual, y poniendo, además que todas las celdas propagan H_z según este esquema deformado, la condición de Von-Neumann para la estabilidad del esquema, aplicado localmente, con esta suposición de coeficientes constantes en todo el espacio, se obtiene como resultado de que la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x(\bar{q}_1) \\ H_y(\bar{q}_1) \\ H_z(\bar{q}_1) \\ E_x(\bar{q}_1) \\ E_y(\bar{q}_1) \\ E_z(\bar{q}_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

no tenga solución trivial. Se ha usado la notación $\bar{q}_1 = (i_1 + 1/2, j_1 + 1/2, k_1 + 1/2)$, y A matriz dada por

$$\begin{pmatrix} \lambda_t & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\mu_0 \xi} \lambda_{(0,0,1/2)}^{(0,0,-1/2)} & \frac{1}{\mu_0 \xi} \lambda_{(0,1/2,0)}^{(0,-1/2,0)} \\ 0 & \lambda_t & 0 & \frac{1}{\mu_0 \xi} \lambda_{(0,0,1/2)}^{(0,0,-1/2)} & 0 & -\frac{1}{\mu_0 \xi} \lambda_{(-1/2,0,0)}^{(0,1/2,0)} \\ 0 & 0 & \lambda_t & -\frac{1}{\mu_0 a} \lambda_{(\alpha_1,1/2,\gamma_1)}^{(\alpha_2,-1/2,\gamma_2)} & \frac{1}{\mu_0 a'} \lambda_{(1/2,\beta_1,\gamma_1)}^{(-1/2,\beta_2,\gamma_2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\epsilon_0 \xi} \lambda_{(0,0,1/2)}^{(0,0,-1/2)} & -\frac{1}{\epsilon_0 \xi} \lambda_{(0,1/2,0)}^{(0,-1/2,0)} & \lambda_t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\epsilon_0 \xi} \lambda_{(0,0,1/2)}^{(0,0,-1/2)} & 0 & \frac{1}{\epsilon_0 \xi} \lambda_{(-1/2,0,0)}^{(0,1/2,0)} & 0 & \lambda_t & 0 \\ \frac{1}{\epsilon_0 \xi} \lambda_{(0,-1/2,0)}^{(0,1/2,0)} & -\frac{1}{\epsilon_0 \xi} \lambda_{(-1/2,0,0)}^{(0,1/2,0)} & 0 & 0 & 0 & \lambda_t \end{pmatrix}$$

Una vez más, se observa que, en general, λ_t va a tener parte real no nula, dado el carácter asimétrico de los operadores en diferencias pesadas. Por tanto, la condición de Von–Neumann, con todas las consideraciones expuestas, implica un esquema inestable. Dado el carácter local que, en la práctica, tienen estas inestabilidades, su aparición se produce tardíamente y, por tanto, es posible utilizar el esquema para calcular respuestas transitorias y obtener la información frecuencial limitando la zona de transformación de Fourier mediante una ventana cuadrada que permita ignorar la aparición de inestabilidades. Por ejemplo, la Figura 4.7 muestra las inestabilidades que aparecen en el proceso de solución de la interacción de una onda plana con una ojiva. Los resultados frecuenciales obtenidos para esta ojiva posteriormente, lo han sido truncando la respuesta temporal en la iteración temporal 800.

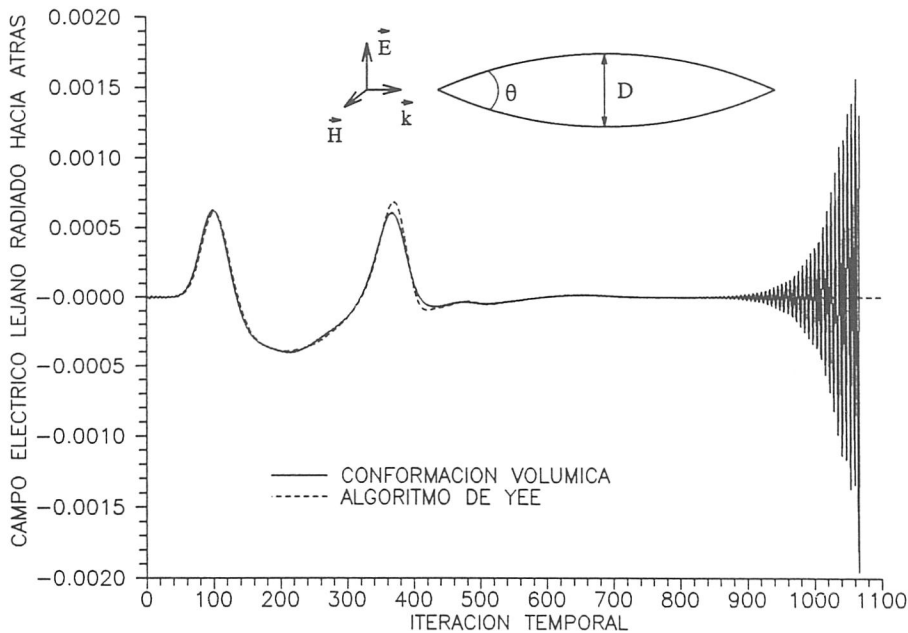


Figura 4.7: Campo lejano dispersado hacia atrás por una ojiva ($\theta = 120^\circ$, $D = 36.00$ celdas), iluminada con un pulso gaussiano $E_z(\vec{r}, t) = 0.01e^{-a^2(t - \frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8 \text{seg}^{-2}$. $\Delta = 1/60 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.028 \text{ nseg.}$

Es materia de trabajo futuro la obtención de criterios exactos de estabilidad mediante técnicas que tengan en cuenta al problema en su totalidad.

4.6 Conversión campo cercano–campo lejano

Las expresiones (3.41)–(3.42) dan la expresión general de los potenciales lejanos en tres dimensiones. Para iluminaciones no armónicas la evaluación del campo eléctrico de radiación (el magnético está relacionado con él mediante $\vec{H} = \frac{\hat{n} \times \vec{E}}{Z_0}$) se efectúa directa-

mente, sin más que calcular las corrientes superficiales

$$\hat{n} \times \vec{E}_1 = -\vec{M}_s$$

$$\hat{n} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$$

en las paredes de un paralelepípedo que englobe al dispersor y que yaza en la zona de campo dispersado. Transformando las integrales volúmicas en superficiales, y poniendo el vector \vec{R} que va desde las corrientes al punto campo, como, a efectos del producto vectorial y de la división por su módulo, aproximadamente igual a \vec{r} (vector de posición del punto campo) (ver Figura (3.14)), el campo de radiación queda:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{rad} &= \left(-\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times \vec{F} \right)^{rad} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \int_{S'} \left([\partial_t \vec{J}_S]_\tau \times \hat{r} \right) \times \hat{r} dS' - \frac{1}{4\pi cr} \int_{S'} [\partial_t \vec{M}_S]_\tau \times \hat{r} dS' \end{aligned}$$

donde S' es el paralelepípedo de conversión, el vector del punto campo en cartesianas

$$\vec{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{i} + r \sin \theta \sin \phi \hat{j} + r \cos \theta \hat{k}$$

y la magnitudes $[\Xi]_\tau$ son los campos Ξ evaluados en el tiempo retrasado $\tau = t - \frac{R}{c}$. Es decir las diferencias de los distintos vectores que van desde las corrientes al punto campo sólo se tienen en cuenta a la hora de sumar las corrientes, cada una con su retraso. Para ello, se toma arbitrariamente como punto desde el que las corrientes llegan sin retraso, al vértice más cercano al punto campo, y el resto de los retrasos se toman en referencia a este vértice. Las derivadas temporales de las corrientes se evalúan mediante una interpolación lagrangiana de cuarto orden con los dos instantes conocidos anteriores y posteriores al instante en el que se quiere conocer la corriente. En los instantes iniciales y finales la interpolación se hace hacia adelante o hacia atrás, según sea el caso.

Al tener intercaladas espacialmente las corrientes eléctricas y magnéticas, es necesario interpolar unas u otras, para tenerlas en el mismo plano. Se utiliza una interpolación lineal, al igual que en dos dimensiones.

Si los campos varían armónicamente con el tiempo, el problema se simplifica utilizando la función de Green para el vacío

$$\mathcal{G}(R, \beta) = \frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R}$$

cuyo comportamiento asintótico con R (campo de radiación) es

$$\mathcal{G}(R, \beta)^{rad} = \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} e^{\frac{j\beta \vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

con $\vec{r}' = (x', y', z')$ vector de posición de las corrientes sobre la superficie de conversión.

Por tanto el campo de radiación queda

$$\begin{aligned}\vec{E}^{rad} &= \frac{j e^{-j\beta r} \beta c \mu_0}{4\pi r} \int_{S'} (\vec{J}_S \times \hat{r}) \times \hat{r} e^{j\beta \hat{r} \cdot \vec{r}'} dS' \\ &- \frac{j e^{-j\beta r} \beta}{4\pi r} \int_{S'} \vec{M}_S \times \hat{r} e^{j\beta \hat{r} \cdot \vec{r}'} dS'\end{aligned}$$

y la RCS, definida para objetos tridimensionales como

$$RCS = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E^{disp}|^2}{|E^{inc}|^2}$$

queda

$$RCS = \frac{\beta^2}{4\pi |E^{inc}|^2} \left| \int_{S'} \left(Z_0 \vec{J}_S \times \hat{r} - \vec{M}_S \right) \times \hat{r} e^{j\beta \hat{r} \cdot \vec{r}'} dS' \right|^2$$

Para aplicar la anterior expresión es necesario tener los módulos y las fases de las corrientes, que se obtienen a partir de los campos en el contorno de conversión. El método para su obtención es en todo similar al utilizado en el caso bidimensional.

4.7 Resultados

Para validar el método, se han obtenido resultados para esferas y ojivas perfectamente conductoras, iluminadas con pulsos gaussianos. Primeramente se presentan resultados para una esfera de 3 m. de radio, iluminada con un pulso gaussiano, cuyo parámetro se ha escogido de tal modo que su transformada de Fourier cae a la milésima parte de su máximo, a una resolución de 5 celdas por longitud de onda (Figuras 4.8 and 4.9). Se compara con resultados obtenidos mediante serie de Mie. También se muestran barridos angulares de la RCS para una iluminación armónica (Figuras 4.11 y 4.12). Se ha escogido como parámetro de comparación de resultados la desviación cuadrática relativa (definida en (3.49)).

	Plano E [0,180]	Plano H [0,180]
2^{nd} order-Series	0.070	0.096
VC method-Series	0.023	0.027

Tabla 4.1: Esfera perfectamente conductora. Iluminación monocromática. Barrido angular sobre los planos E y H. Comparación de la DCR para ambos métodos en tres dimensiones. (Ver Figuras 4.12 y 4.11).

Con el fin de estudiar el comportamiento del método en la modelación de objetos puntiagudos, se ha simulado la incidencia de un pulso electromagnético con una ojiva conductora (Figura 4.13)

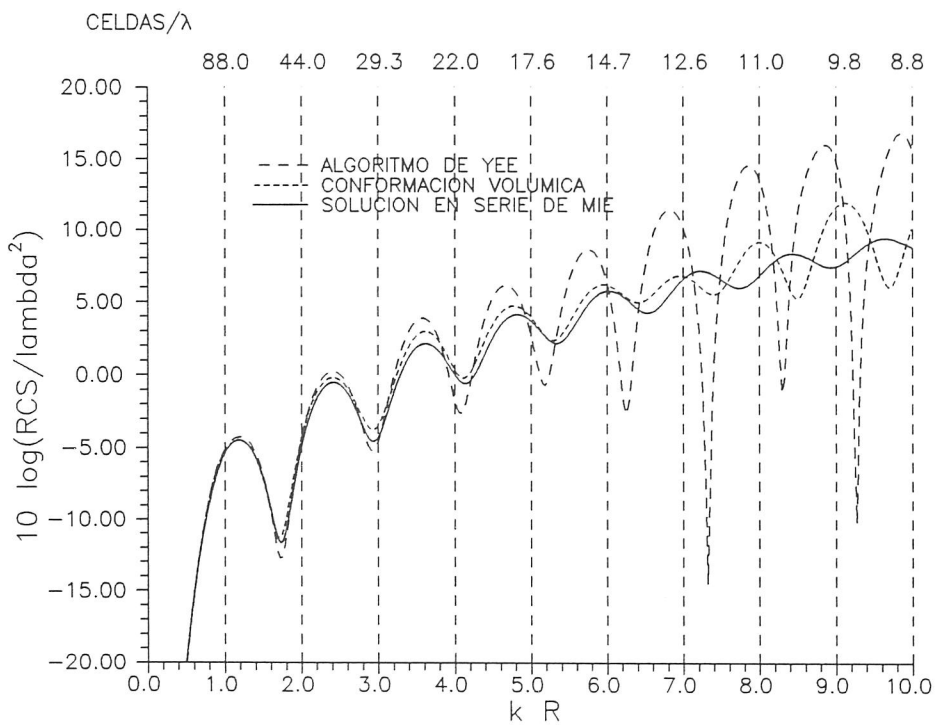


Figura 4.8: Dispersión hacia atrás mediante una esfera perfectamente conductora de 3 m. de radio (14 celdas). $\Delta = 3/14m.$, $\Delta t = 0.357 \text{ nseg.}$ Iluminada con un pulso gaussiano $0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 3.34 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$ Resultados frecuenciales

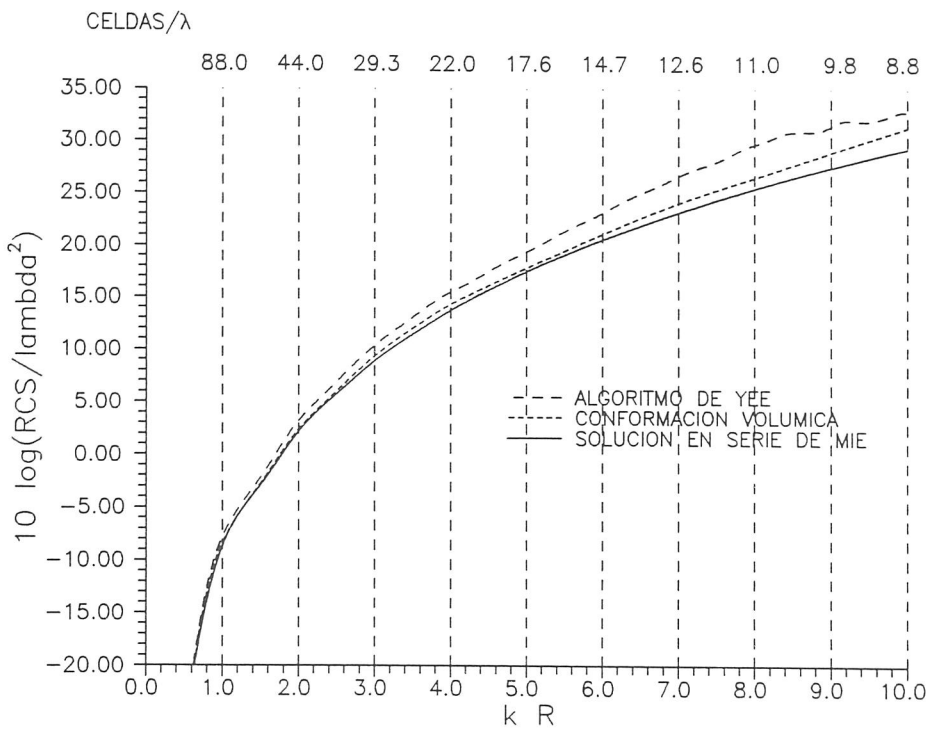


Figura 4.9: Dispersión hacia adelante mediante una esfera perfectamente conductora de 3 m. de radio (14 celdas). $\Delta = 3/14m.$, $\Delta t = 0.357 \text{ nseg.}$ Iluminada con un pulso gaussiano $0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 3.34 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$ Resultados frecuenciales

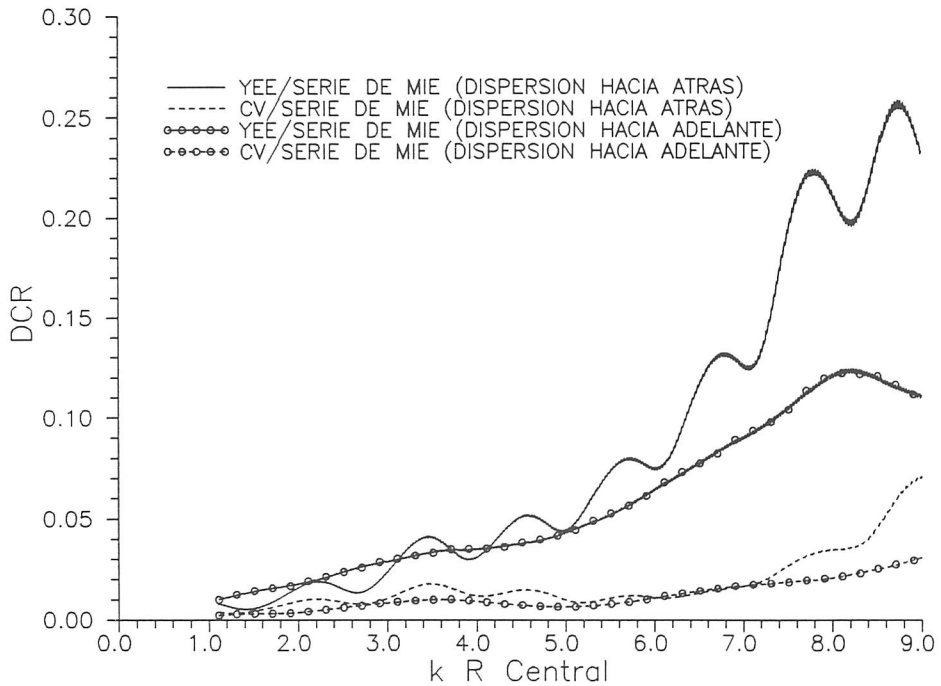


Figura 4.10: Comparación de las DCR para distintos métodos. Ancho de la ventana=2. Ver Figuras (4.8 y 4.9)

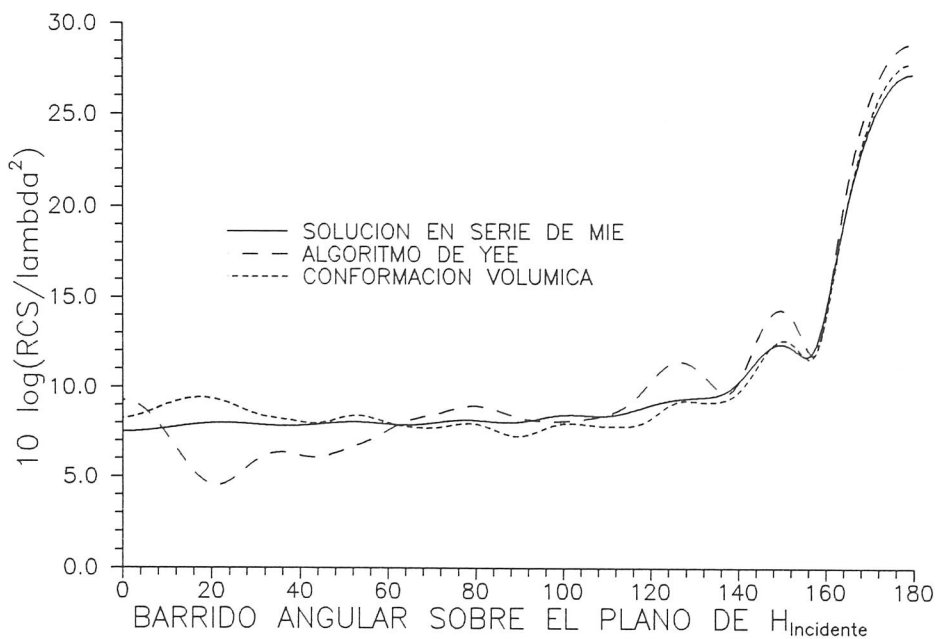


Figura 4.11: Esfera perfectamente conductora. Iluminación monocromática. Barrido angular sobre el plano H. $f=1.88$ GHz (10 celdas/ λ) $R=0.22$ m. $=14/10 \lambda$. $\Delta = 1/20\pi$ m., $\Delta t = 0.026$ nseg.

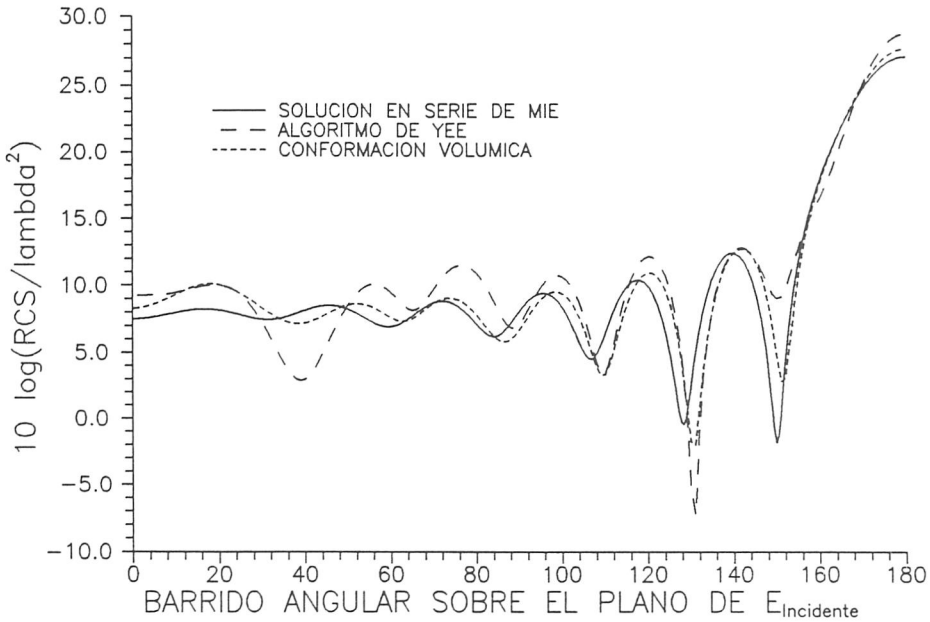


Figura 4.12: Esfera perfectamente conductora. Iluminación monocromática. Barrido angular sobre el plano E. $f=1.88 \text{ GHz}$ ($10 \text{ celdas}/\lambda$) $R=0.22 \text{ m.}=14/10 \lambda$. $\Delta = 1/20\pi \text{ m.}$, $\Delta t = 0.026 \text{ nseg.}$

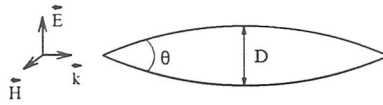


Figura 4.13: Sección transversal de una ojiva de ángulo θ° .

La RCS de este dispersor está fuertemente influida por las ondas que se propagan superficialmente. Éstas se reflejan en las puntas anterior y posterior, interfiriendo constructiva y destructivamente para producir los mínimos y máximos característicos de los barridos frecuenciales de su sección eficaz radar. Los mínimos (Blore, 1964) ocurren cuando la longitud del arco de la ojiva es múltiplo entero de $\lambda/2$:

$$\frac{L_a}{\lambda} = \frac{\theta}{2 \left(1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)} \frac{D}{\lambda} = \frac{n}{2} \quad \text{con } n = 2, 3, 4, \dots \tag{4.21}$$

donde L_a es la longitud del arco, λ es la longitud de onda, D el diámetro de la ojiva (ver la Figura 4.13) y θ su ángulo (en radianes).

Las Figuras 4.14, 4.16 y 4.18 muestran la RCS de una ojiva con ángulos 40, 75 y 120 grados respectivamente, comparada con resultados experimentales y calculados mediante física óptica y dispersión Rayleigh (F.O.-Rayl.) de (Blore, 1964). Los resultados obtenidos mediante física óptica lo fueron para tamaños eléctricos grandes, y los de dispersión Rayleigh para tamaños pequeños. La iluminación se hace mediante un pulso

gaussiano con un parámetro tal que la resupuesta frecuencial ha caído a la milésima parte de su máximo, a la resolución de 15 *celdas*/ λ para la ojiva de 40 grados, y 5 *celdas*/ λ para las de 75 y 120 grados.

Las líneas verticales en estas figuras muestran la posición de los mínimos teóricos de RCS predichos por (4.21). La solución de física óptica supone un dispersor muy delgado, y las corrientes propagándose sobre su superficie con la velocidad de la luz. Esta aproximación es suficiente para la ojiva de 40 grados, y predice correctamente su RCS. Es posible hacer una modificación para incluir las ojivas más gruesas (75 y 120 grados), pero, aunque los mínimos de RCS se predicen correctamente, los máximos están aún varios dBs por debajo del valor experimental.

Se han encontrado buenas concordancias entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante conformación volumétrica a resoluciones de 15 *celdas*/ λ , mientras que el algoritmo de Yee precisa 30 *celdas*/ λ , para la esfera conductora. Para la ojiva de 120 grados, 20 *celdas*/ λ son suficientes mediante VC y 40 *celdas*/ λ se precisan con el algoritmo de Yee. Según la ojiva se hace más puntiaguda, son precisas resoluciones cada vez mayores, aunque en todos los casos los resultados obtenidos mediante VC son más aproximados que los del algoritmo tradicional.

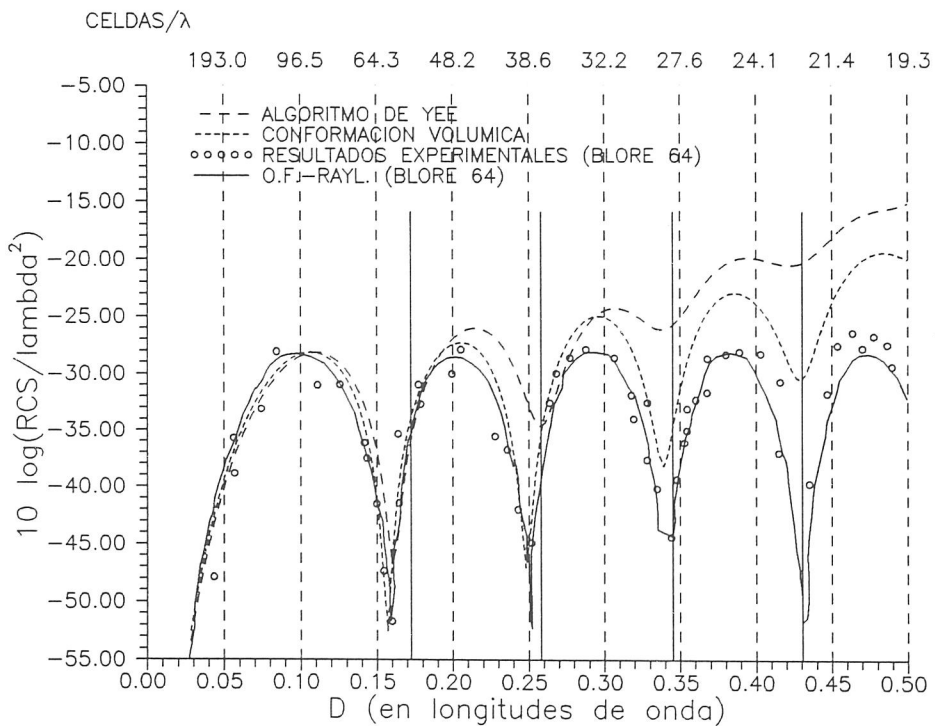


Figura 4.14: Dispersión hacia atrás mediante una ojiva conductora $\theta = 40^\circ$, $D = 9.64$ celdas. $\Delta = 1/60$ m., $\Delta t = 0.028$ nseg. iluminada con un pulso gaussiano $E_z = 0.01e^{-a^2(t - \frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8 \text{seg}^{-2}$. Resultados frecuenciales

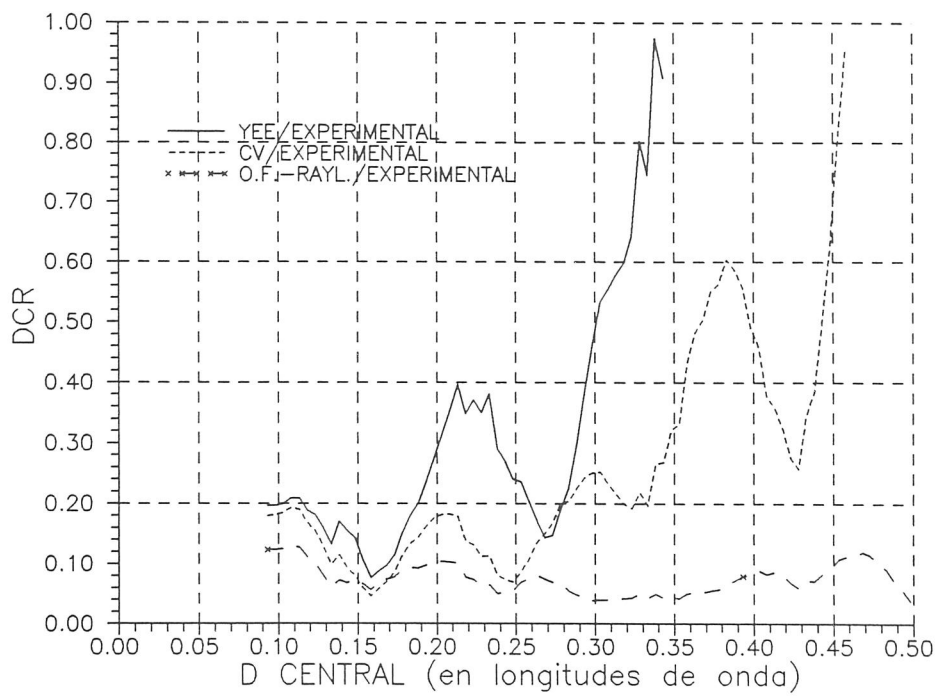


Figura 4.15: Comparación de la DCR para ambos métodos en 3D. Ojiva de 40 grados. (Ver Figura 4.14)

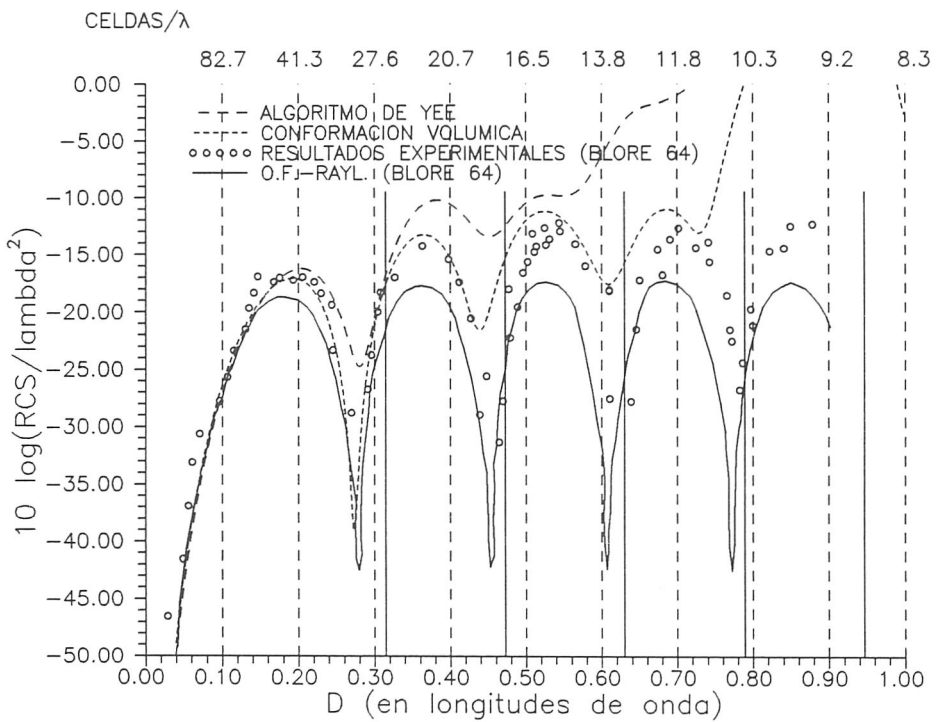


Figura 4.16: Dispersión hacia atrás mediante una ojiva conductora $\theta = 75^\circ$, $D = 8.27$ celdas. $\Delta = 0.05$ m., $\Delta t = 0.083$ nseg. iluminada con un pulso gaussiano $E_z = 0.01e^{-a^2(t - \frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8$ seg⁻². Resultados frecuenciales

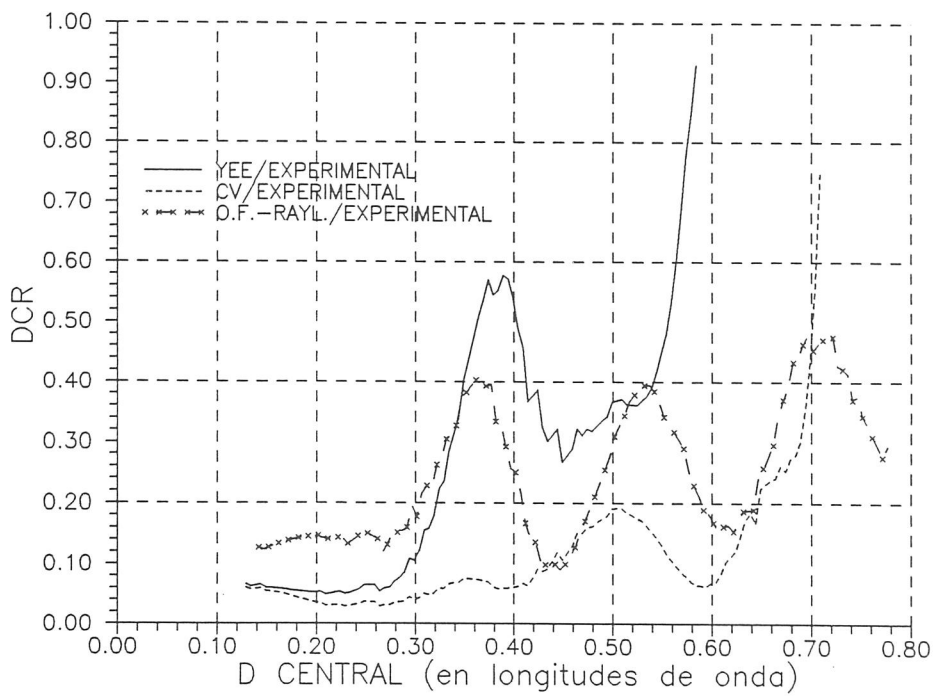


Figura 4.17: Comparación de la DCR para ambos métodos en 3D. Ojiva de 75 grados. (Ver Figura 4.16)

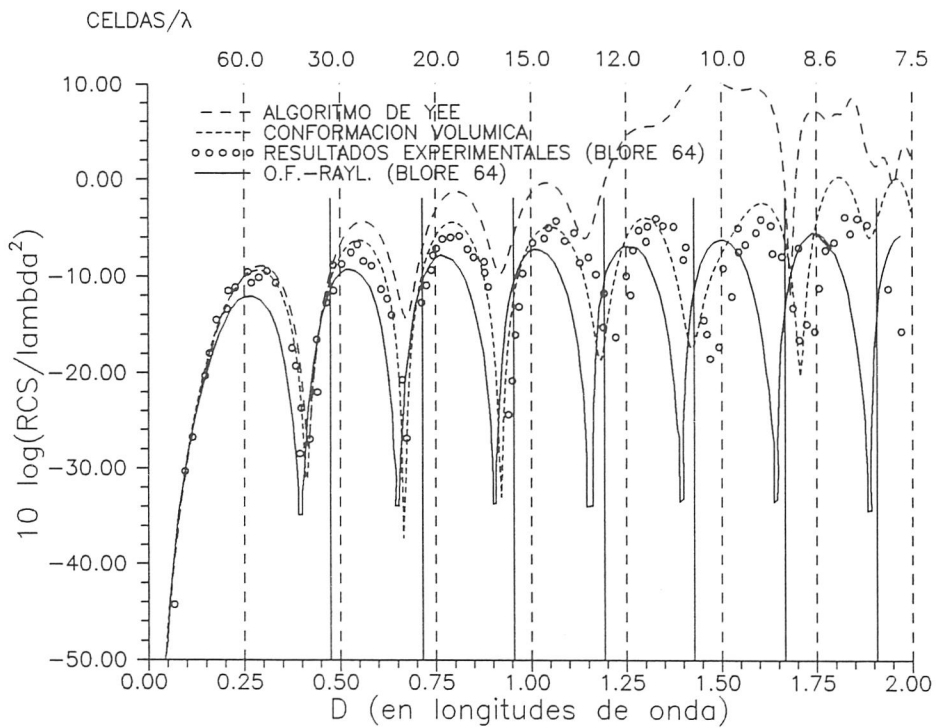


Figura 4.18: Dispersión hacia atrás mediante una ojiva conductora $\theta = 120^\circ$, $D = 15.00$ celdas. $\Delta = 0.05 \text{ m.}$, $\Delta t = 0.083 \text{ nseg.}$ iluminada con un pulso gaussiano $E_z = 0.01e^{-a^2(t-\frac{1}{c}\hat{n}\cdot\vec{r})^2}$, $a = 14.3 \cdot 10^8 \text{ seg}^{-2}$. Resultados frecuenciales

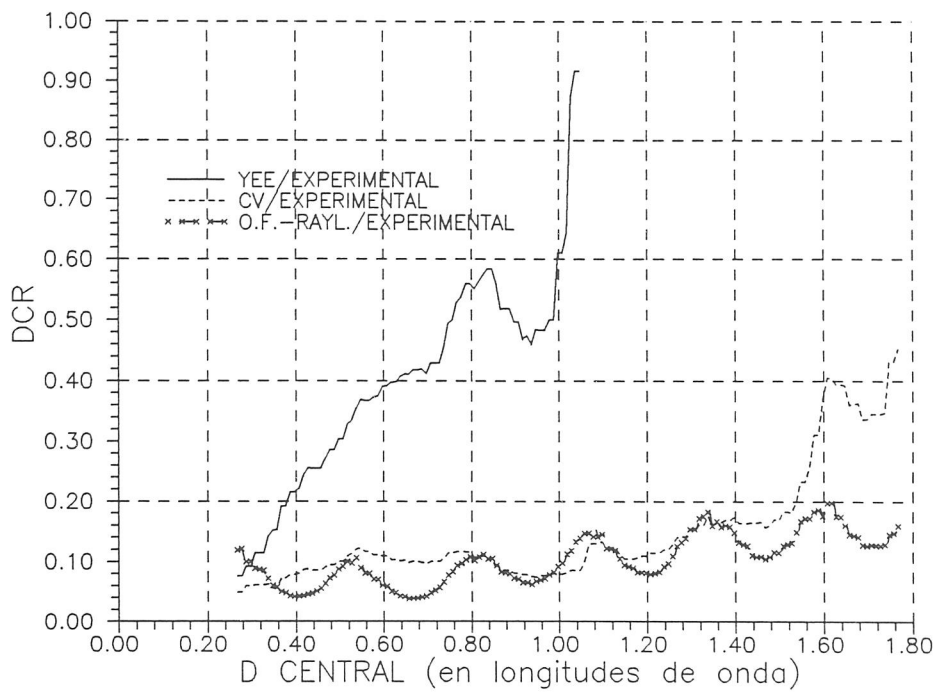


Figura 4.19: Comparación de la DCR para ambos métodos en 3D. Ojiva de 120 grados. (Ver Figura 4.18)

CONCLUSIONES

En esta memoria se estudian los métodos en diferencias finitas aplicados a la resolución de las ecuaciones de Maxwell. Las principales aportaciones pueden resumirse en:

- Una revisión de los esquemas en diferencias para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, especialmente las de tipo hiperbólico, estudiando los conceptos de consistencia, convergencia y estabilidad, y su relación, para aplicarlos a diversos esquemas.
- La obtención de criterios de estabilidad que permiten tratar de forma general un problema hiperbólico multidimensional de valores iniciales y de frontera resuelto mediante un esquema en diferencias centradas. Concretamente se han descrito los criterios de Von-Neumann, Courant-Friedrichs-Lewy y un método matricial que permite tratar sistemáticamente el problema completo. Se ha propuesto una extensión tridimensional de este último, que abre una vía de tratamiento de la estabilidad de esquemas no uniformes.
- El desarrollo de un programa para resolver las ecuaciones de Maxwell bidimensionales, basado en esquemas en diferencias centradas de segundo orden (algoritmo de Yee) y de cuarto orden espacial y segundo temporal, y el estudio de su estabilidad y dispersión. Se ha aplicado al estudio de la interacción de transitorios con estructuras conductoras.
- Un estudio del comportamiento de las condiciones absorbentes de Mur de segundo orden, y su relación con la convergencia y precisión del método.
- Una modificación del esquema en diferencias, para conformar objetos curvos, tomando como base la ley de Faraday en forma integral, aplicada a celdas que se deforman para adaptarse al objeto. Se ha estudiado la estabilidad de este método, de modo simplificado, mediante el criterio de Von-Neumann.
- El desarrollo de un algoritmo de conformación basado en un submallado de las celdas distorsionadas, a partir del cual se obtienen los parámetros que necesita la

ley de Faraday, lo que ha permitido construir códigos de modelación automática de modo simple.

- El desarrollo de un método planteado directamente el dominio del tiempo para obtener el campo de radiación tanto en dos como en tres dimensiones.
- La proposición de un método de conformación en tres dimensiones utilizando una forma alternativa de las ecuaciones de Maxwell integrales, que relaciona las integrales de volumen de unos campos con las de los otros a través de las superficies que rodean al volumen. De este modo se consigue una adaptación al objeto curvo más adecuada de lo que la aplicación de la ley de Faraday usual conseguiría. También se ha estudiado simplícidamente, mediante el criterio de Von-Neumann, la estabilidad del método.
- La extensión del método bidimensional de conformación por submallado a tres dimensiones, consiguiéndose un programa simple de modelado automático de objetos conductores de geometría arbitraria.

Apéndice A

Álgebra matricial

Si \mathcal{V} es un espacio vectorial real o complejo, de dimensión N y \mathcal{M}_N el espacio vectorial real o complejo de dimensión N^2 formado por todas las matrices cuadradas con la suma usual de matrices y el producto usual por escalares (Romero Sarabia, 1986), es posible dotar a \mathcal{M}_N con la estructura de espacio normado mediante la siguiente

Definición 24 Se define la norma de una matriz cuadrada $\tilde{G} \in \mathcal{M}_N$ como un número positivo que cumple

1. $\|\tilde{G}\| > 0$ si $\tilde{G} \neq 0$
2. $\|k\tilde{G}\| = |k|\|\tilde{G}\|$ para todo número real o complejo k
3. $\|\tilde{G} + \tilde{B}\| \leq \|\tilde{G}\| + \|\tilde{B}\|$
4. $\|\tilde{G}\tilde{B}\| \leq \|\tilde{G}\|\|\tilde{B}\|$

Definición 25 Una norma matricial se dice compatible con una norma vectorial definida en \mathcal{V} si

$$\|\tilde{G}\underline{u}\| \leq \|\tilde{G}\|\|\underline{u}\| \quad \forall \underline{u} \in \mathcal{V}$$

Normas matriciales compatibles con vectoriales son en particular las subordinadas.

Definición 26 La norma subordinada de una matriz \tilde{G} se define como

$$\|\tilde{G}\| = \max_{\substack{\underline{u} \in \mathcal{V} \\ \|\underline{u}\| = 1}} \|\tilde{G}\underline{u}\| \quad (\text{A.1})$$

Ejemplos de normas matriciales subordinadas a las normas vectoriales más usadas son

- Si $\|\underline{u}\|_1 = \sum_i |u(i)| \longrightarrow \|\tilde{G}\|_1 = \max_j \sum_i |G_{ij}|$.

- Si $\|\underline{u}\|_2 = \sqrt{\sum_i |u(i)|^2} \longrightarrow \|\tilde{G}\|_2 = \sqrt{\rho(\tilde{G}^H \tilde{G})}$. Con \tilde{G}^H matriz traspuesta conjugada de \tilde{G} , también llamada hermítica, y $\rho(\tilde{G})$ radio espectral de \tilde{G} definido como $\rho(\tilde{G}) = \max_i \{|\lambda_i|\}$ con λ_i autovalores de \tilde{G} .
- Si $\|\underline{u}\|_\infty = \max_i |u(i)| \longrightarrow \|\tilde{G}\|_\infty = \max_i \sum_j |G_{ij}|$.

Lema 2 El radio espectral de una matriz cumple

$$\rho(\tilde{G}) \leq \|\tilde{G}\|$$

para cualquier norma matricial compatible.

Corolario 1

$$\rho^n(\tilde{G}) \leq \|\tilde{G}^n\| \leq \|\tilde{G}\|^n \quad (\text{A.2})$$

Lema 3 Si \tilde{G} es una matriz tridiagonal dada por

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & a & b & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c & a & b & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & c & a & b & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c & a & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c & a \end{pmatrix}_{N \times N}$$

con a, b, c reales o complejos, sus autovalores son de la forma

$$\lambda_i = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{i\pi}{N+1} \quad i = 1, \dots, N$$

Lema 4 Si \tilde{G} es una matriz formada por submatrices cuadradas de igual dimensión $N \times N$

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{11} & \cdots & \cdots & \tilde{G}_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \tilde{G}_{m1} & \cdots & \cdots & \tilde{G}_{mm} \end{pmatrix}$$

y todos los \tilde{G}_{ij} tienen un conjunto común de N autovectores linealmente independientes, los autovalores de \tilde{G} vienen dados por los autovalores de las N matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11}^{(k)} & \cdots & \cdots & \lambda_{1m}^{(k)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_{m1}^{(k)} & \cdots & \cdots & \lambda_{mm}^{(k)} \end{pmatrix}$$

con $\lambda_{ij}^{(k)}$ el k -ésimo autovalor de \tilde{G}_{ij} correspondiente al k -ésimo autovector común a todas las submatrices de \tilde{G} .

Lema 5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}^n = \tilde{0} \text{ si } \|\tilde{G}\| < 1$$

Lema 6

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}^n = \tilde{0} \text{ si, y solamente si } \rho(\tilde{G}) < 1$$

Apéndice B

Necesidades computacionales

El objetivo final de esta memoria ha sido el de implementar en forma de programa de ordenador los algoritmos desarrollados. Para ello se ha utilizado el lenguaje de programación FORTRAN-77 con algunas de sus extensiones más usuales para permitir la construcción de códigos estructurados. Básicamente se han desarrollado cuatro tipos de programas:

- De modelación geométrica.
- De algoritmos en diferencias finitas, basados en la teoría expuesta.
- De post-procesado numérico (obtención del campo lejano y de la RCS).
- De post-procesado gráfico que permiten visualizar la evolución temporal de los campos (González García *et al.*, 1991) (García López y González García, 1993).

En este apéndice se describen brevemente las necesidades de memoria y de tiempo de cálculo de los códigos desarrollados, primeramente para el caso bidimensional, y, en segundo lugar, para el tridimensional.

B.1 Programas bidimensionales

El algoritmo en diferencias finitas aplicado a la resolución de las ecuaciones de Maxwell con coeficientes no constantes, para estudiar la interacción de ondas electromagnéticas con medios arbitrarios permite variar los coeficientes de celda a celda. Supuesto que el dominio de solución está mallado con $N_x \times N_y$ celdas espaciales, el programa de modelación geométrica genera un fichero con una matriz de $N_x \times N_y$ números enteros donde se halla codificado el tipo de medio que hay en cada celda, para cada una de las componentes del campo (1 eléctrico y 2 magnéticos para la polarización TM y 1 magnético y 2 eléctricos para la TE). Utilizando 2 bits para cada componente se pueden especificar tres

medios distintos (aparte del vacío), y los enteros donde se codifican resultan de 6 bits. Si los medios involucrados son solamente vacío y conductores perfectos, basta tomar 3 bits en cada entero para especificar si la componente en cuestión pertenece al vacío o al conductor. La utilidad de especificar también si las componentes del campo magnético están dentro del conductor estriba en que es posible hacerlas, en tiempo de computación, directamente nulas, a fin de ahorrar tiempo de cálculo. Como la disponibilidad enteros en FORTRAN-77 es de 8, 16 ó 32 bits por entero, en cada caso será preciso, bien no utilizar los bits que sobran en cada entero, bien, mediante un algoritmo de adecuado, compactar los primeros en los segundos.

Supongamos que se quiere estudiar la interacción de una onda electromagnética con un dispersor cilíndrico de sección circular de radio R . Este dispersor se sitúa inmerso en una región de vacío, y los planos de truncamiento de la región de cálculo se colocan suficientemente lejos como para que las reflexiones espurias en las mismas no afecten a los cálculos (ver Capítulo 2). Dejando 15 celdas como suma de zona de campo total y de campo dispersado, la región de cálculo tendrá $(30 + 2R)^2$ celdas. El programa de modelado de este dispersor, pone a 1 los bits correspondientes a las componentes que pertenecen al dispersor en toda esa región, y deja a 0 el resto. Para un cilindro de 100 celdas de radio, esto supone una memoria de $\frac{3(30+2R)^2}{8} \simeq 20 Kb$ utilizando los algoritmos de compactación. El resultado es escrito en un fichero junto con las características materiales (en este caso conductor) para su posterior lectura por el programa principal. El tiempo de cálculo necesitado por el programa de modelado depende de la geometría del modelo, aunque, para los dispersores estudiados, es del orden de segundos.

A fin de automatizar el modelado se han desarrollado programas que recogen la información de la geometría a partir de ficheros de salida del programa de diseño asistido *AUTOCADTM*.

El programa principal opera en simple precisión, y aparte de la descripción del tipo de medio en cada celda, tiene las siguientes necesidades de almacenamiento:

1. Matrices con las componentes de los campos: 3 matrices de $4N_xN_y$ bytes¹ cada una. Para el cilindro de 100 celdas de radio, resulta 640 Kb aproximadamente.
2. Si la iluminación es armónica, se precisan 5 parámetros en cada uno de los puntos del contorno de conversión campo cercano-campo lejano: si se han calculado los campos en el instante n , se precisan los campos en los instante $n - 1$ y $n - 2$, para detectar los cambios de pendiente, el valor del máximo del campo y el del mínimo², así como la fase del mismo. Si además tenemos en cuenta que los campos están separados por media celda, dos de las componentes se conocen a ambos lados

¹Un byte contiene 8 bits.

²Debido al nivel de continua que se introduce en la polarización TM, pueden no ser iguales en módulo.

del contorno de conversión (supuesto que pase a través de las componentes z), y se han de almacenar los anteriores parámetros por duplicado, para promediar posteriormente. Por ello se precisan 30 matrices de $4C_x$ bytes cada una, y otras 30 matrices de $4C_y$ bytes. Con C_x y C_y número de celdas del contorno de conversión. Si el contorno de conversión se sitúa a dos celdas del dispersor, para el cilindro anterior esto supone alrededor de 50 Kb.

3. Si la iluminación no es armónica, es preciso almacenar la historia temporal en cada celda del contorno de conversión, para cada campo, a fin de obtener el campo lejano mediante un algoritmo de conversión. Si se va a ejecutar el código con N iteraciones, se necesitan, 6 matrices de $4C_x N$ bytes y otras 6 de $4C_y N$ bytes. Si el cilindro de 100 celdas de radio se ilumina con un pulso tal que toda la respuesta temporal pueda ser obtenida ejecutando 1000 iteraciones temporales, se precisa una memoria de aproximadamente 12 Mb para almacenar toda la historia temporal.
4. En ambos tipos de iluminación una matriz unidimensional de $4\sqrt{(C_x - 1)^2 + (C_y - 1)^2}$ bytes es necesaria para almacenar la tabla de valores a partir de la cual calcula el campo incidente en el contorno de iluminación ³. (Para el cilindro 1.2 Kb aprox.)
5. En el algoritmo de segundo orden, las condiciones absorbentes necesitan 4 matrices con la componente z del campo en 2 instantes temporales y en las celdas del contorno de truncamiento y en sus adyacentes hacia dentro. Por tanto se precisan 4 matrices de $16(30 + 2R)$ bytes. En nuestro caso alrededor de 15 Kb. El algoritmo de cuarto orden tiene el triple de necesidades de memoria, al ser preciso absorber los campos en 2 capas más.

En cuanto al algoritmo de conformación, tan sólo se necesita información de las celdas distorsionadas. Para cada una de ella se necesita su superficie y la longitud de sus cuatro lados (20 bytes), su coordenada x e y (8 bytes) y cada uno de los posibles desplazamientos debidos a la AVC (16 bytes). Además se usa 1 bit en cada campo del dominio de cálculo para marcarlo como conformable o como usual. Para el cilindro de R celdas, sobre $7R$ celdas han de ser distorsionadas, y, en total, se precisan $308R + \frac{(30+2R)^2}{8}$ bytes adicionales. Si $R = 100$, esto supone alrededor de 37 Kb.

Para generar esta información se utiliza un programa de modelado que puede atacar el problema de dos formas: si las ecuaciones analíticas del contorno del dispersor se conocen, es posible calcular analíticamente las superficies y las longitudes de los lados de las celdas deformadas; de no ser así, se utiliza una técnica de sub-mallado basada

³El contorno de iluminación está a una celda del de conversión

en la división de la red original, de paso Δ en una red más fina, de paso Δ/F . Las superficies y longitudes se obtienen a partir de esta última red. Considerando que hay que dejar una celda de vacío rodeando el dispersor, para llevar a cabo la conformación, los requerimientos de memoria para almacenar todos los puntos del dispersor localizados en la red más densa son $\frac{(2(R+1)F)^2}{8}$ bytes. Aparte, se precisan $3\frac{(2(R+1))^2}{8}$ bytes para especificar la situación de cada una de las componentes de los campos (dentro o fuera del dispersor). Si el cilindro anterior se modela con el algoritmo de sub-mallado con $F = 20$, en total se necesitan alrededor de 2 Mb.

No existen grandes diferencias en los tiempos de cálculo del algoritmo con conformación y el usual, ya que sólo 4 multiplicaciones, 1 división y algunas condicionales más se ejecutan en cada iteración en el algoritmo con conformación. En la Tabla (B.1) se resumen los tiempos de cálculo de los programas ejecutados en un máquina de 15 Mflops⁴, para el caso del cilindro.

	SIN CONFORMAR	CONFORMANDO
MODELADO	2 seg.	3 min.
PROPAGACIÓN 2° ORDEN (100 Instantes)	40 seg.	50 seg.
PROPAGACIÓN 4° ORDEN (100 Instantes)	50 seg.	—
CALCULO DE CAMPO LEJANO (100 Instantes)	15 seg.	

B.2 Programas tridimensionales

Las necesidades de almacenamiento del programa tridimensional son similares a las del bidimensional, incrementadas notablemente por el hecho de añadir una dimensión más a todas las matrices.

Con un método similar al del programa programa de modelado bidimensional, y restringiéndonos a conductores perfectos, el tridimensional precisa conocer la situación de cada una de las 6 componentes de los campos eléctrico y magnético, en la región que encuadra al dispersor. Para una esfera de $R = 14$ celdas de radio distante 15 celdas de las condiciones absorbentes, esto supone una memoria de $\frac{6(30+2R)^3}{8} \simeq 150Kb$. El resultado se escribe en un fichero que recogerá el programa principal.

Las necesidades de memoria del programa principal son:

1. Matrices con las componentes de los campos: 6 matrices de $4N_x N_y N_z$ bytes cada una. La esfera de 14 celdas de radio consume ($N_x = N_y = N_z = 30 + 2R = 58$) 4.5 Mb aproximadamente.

⁴1 Mflop es un millón de operaciones en coma flotante por segundo.

2. Si la iluminación es armónica, se precisan los mismos 5 parámetros del caso bidimensional, en cada uno de los puntos del contorno de conversión campo cercano-campo lejano. Por ello, en total, son necesarias 60 matrices de $4C_x C_y$ bytes cada una, 60 matrices de $4C_y C_z$ bytes y 60 de $4C_x C_z$ bytes. Con C_x y C_y y C_z número de celdas del contorno de conversión. Si el contorno de conversión se sitúa a dos celdas del dispersor, para la esfera esto supone alrededor de 720 Kb.
3. Para iluminación no armónica, la historia temporal en cada celda del contorno de conversión ocupa $48(C_x C_y + C_x C_z + C_y C_z)$ bytes en cada iteración. Para la esfera anterior 144 Kb/iteración. Si una prueba típica se hace con 1000 iteraciones, sería prohibitiva la cantidad de memoria requerida para almacenar toda la información. Por tanto, periódicamente es volcada a disco y el programa de cálculo de campo lejano posterior, lee seccionadamente esta información y construye el campo de radiación.
4. Una matriz unidimensional de $4\sqrt{(C_x - 1)^2 + (C_y - 1)^2 + (C_z - 1)^2}$ para almacenar la tabla de valores a partir de la cual calcula el campo incidente en la superficie de iluminación.

El algoritmo de conformación, necesita la siguiente información de las celdas distorsionadas: volumen y superficie de las cuatro caras (20 bytes), sus 3 coordenadas (12 bytes) y cada uno de los posibles desplazamientos debidos a la AVC (32 bytes) ⁵. Además se usa 1 bit en cada campo del dominio de cálculo para marcarlo como conformable o como usual. Para la esfera de R celdas, alrededor de $36R^2$ celdas han de ser distorsionadas, y, en total, se precisan $2304R^2 + \frac{3(30+2R)^3}{8}$ bytes adicionales, y para $R = 14$, alrededor de 415 Kb.

El algoritmo de conformación puede calcular también estos parámetros directamente de forma analítica o mediante el proceso de sub-mallado. Mediante la red auxiliar, y de análoga forma al caso bidimensional, se necesitan $\frac{(2(R+1)F)^3}{8}$ bytes para localizar cada punto de la esfera en la red auxiliar, y $6\frac{(2(R+1))^3}{8}$ bytes se precisan para señalar el estado de cada componente de los campos en la red principal. Para la anterior esfera con $F = 10$ resultan 3.5 Mb aproximadamente.

Al igual que en el caso bidimensional, tampoco existen grandes diferencias en los tiempos de cálculo del algoritmo con conformación y el usual. En la Tabla (B.2) se resumen los tiempos de cálculo de los programas ejecutados en un máquina de 15 Mflops, para la esfera.

⁵Dos posibles direcciones de desplazamiento.

	SIN CONFORMAR	CONFORMANDO
PROGRAMAS DE MODELADO	3 seg.	5 min.
PROGRAMA DE PROPAGACIÓN (100 Instantes)	4 min.	5 min.
CALCULO DE CAMPO LEJANO (100 Instantes)	3 min.	

Bibliografía

- ABARBANEL, S., Y GOTTLIEB, D. 1979. Stability of two-dimensional initial boundary value problems using leap-frog type schemes. *Mathematics of Computation*, **33**(148), 1145–1155.
- ASI, A., Y SHAFI, L. 1992. Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using compact 2D-FDTD. *Electronic letters*, **28**(15), 1451–1452.
- BALANIS, CONSTANTINE A. 1989. *Advanced engineering electromagnetics*. John Wiley & Sons.
- BARTH, M. J., MCLEOD, M. M., Y ZIOLKOWSKI, R. W. 1992. a near and far-field projection algorithm for finite-difference time-domain codes. *J. electromagnetic waves appl.*, **6**(1), 5–18.
- BAYLISS, A., Y TURKEL, E. 1980. Radiation boundary conditions for wave-like equations. *Comm. on pure and applied mathematics*, **33**, 707–725.
- BENNET, C. L. 1968. *A technique for computing approximate electromagnetic impulse response of conducting objects*. Tesis Doct., Purdue University, Laffayette, Ind.
- BERGER, M. J. 1985. Stability of interfaces with mesh refinement. *Mathematics of computation*, **45**(172), 301–318.
- BETZ, V., Y MITTRA, R. 1993. A boundary condition to absorb both propagating and evanescent waves in a finite-difference time-domain simulation. *Ieee microwave guided waves letters*, **3**(6), 182–184.
- BI, Z., WU, K., WU, C., Y LITVA, J. 1991. A new finite-difference time-domain algorithm for solving maxwell equations. *Ieee microwave guided wave letters*, **1**(12), 382–384.
- BLORE, W. E. 1964. The radar cross section of ogives, double-backed cones, double-rounded cones, and cone spheres. *Ieee trans. antennas and propagation*, Sept., 582–590.
- BOWMAN, J. J., SENIOR, T. B. A., Y USLENGHI, P. L. E. (eds). 1987. *Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes*. Hemisphere publishing corporation.

- BRITT, C. L. 1989. Solution of electromagnetic scattering problems using time domain techniques. *Ieee trans. on antennas and propagation*, **37**(Sept.), 1181–1192.
- BROWNING, G., KREISS, H.-O., Y OLIGER, J. 1973. Mesh refinement. *Mathematics of computation*, **27**, 29–39.
- BURNS, A. M. 1978. A necessary condition for the stability of a difference approximation to a hyperbolic system of partial differential equations. *Mathematics of computation*, **32**(143), 707–724.
- CANGELLARIS, A. C., Y WRIGHT, D. B. 1991. Analysis of the numerical error caused by the stair-stepped approximation of a conducting boundary in FDTD simulations of electromagnetic phenomena. *Ieee trans. on antennas and propagation*, **39**(Oct.), 1518–1525.
- CANGELLARIS, A. C., LIN, C. C., Y MEI, K. K. 1987. Point-matched time domain finite element methods for electromagnetic radiation and scattering. *Ieee trans. antennas and propagation*, **35**(10), 1160–1173.
- CANNING, F. X. 1990. On the application of some radiation boundary conditions. *Ieee trans. antennas and propagation*, **38**(5), 740–745.
- CHEN, J. Y., Y GANDHI, O. P. 1991. Currents induced in an anatomically based model of a human exposure to vertically polarized electromagnetic pulses. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **39**(1), 31–39.
- CHEN, Z., NEY, M. M., Y HOEFER, W. J. R. 1991. A new finite-difference time-domain formulation and its equivalence with the TLM symmetrical condensed node. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **39**(12), 2160–2169.
- CIMENT, M. 1971. Stable difference schemes with uneven mesh spacings. *Mathematics of computation*, **25**(114), 219–227.
- COURANT, R., Y HILBERT, R. 1962. *Methods of mathematical physics*. New York: Wiley.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. O., Y LEWY, H. 1928. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Math. an.*, **100**, 32–74.
- DAUTRAY, R., Y LIONS, J.-L. 1984. Analyse mathématique et calcul numérique. In: *Evolution: numérique, transport*, vol. 9. Masson.
- DEVEZE, M. T. 1992. *Contribution l'analyse, par différences finies, des équations de Maxwell dans le domaine temps*. Tesis Doct., Université de Paris 6, Francia.

- DIMBYLOW, P. J. 1991. Finite-difference time-domain calculations of absorbed power in the ankle for 10–100 mhz plane wave exposure. *Ieee trans. biomed. engng.*, **38**, 423–428.
- ELSGOLTZ, L. 1983. *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Mir Moscú.
- ENGQUIST, B., Y MAJDA, A. 1977. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of computation*, **31**(139), 629–651.
- ENGQUIST, B., Y MAJDA, A. 1979. Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations. *Comm. pure appl. math.*, **32**, 313–357.
- FANG, J. 1989. *Time domain finite difference computation for Maxwell's equations*. Tesis Doct., University of California at Berkeley.
- FANG, J., Y MEI, K. K. 1989. Absorbing boundary conditions for the time domain finite difference solution of Maxwell's equations. *Page 229 of: Uirsi radio science meeting*.
- FANG, J., Y REN, J. 1993. A locally conformed finite-difference time-domain algorithm of medeling arbitrary shape planar metal. *Ieee microwave theory and techniques*, **41**(5), 830–838.
- FANG, J., ZHANG, X., Y MEI, K. K. 1987. Dispersion characteristics of microsotrip lines in the vicinity of coplanar ground. *Electron. letters*, **23**(21), 1142–1143.
- FEIX, N., LALAND, M., Y JECKO, B. 1992. Harmonical characterization of a microstrip band via the finite difference time domain method. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **40**(5), 955–961.
- FURSE, C. M., MATHUR, S. P., Y GANDHI, O. P. 1990. Improvements to the finite-difference time-domain method for calculating the radar cross section of a perfectly conducting target. *Ieee trans. on microwave theory and techniques*, **38**(Jul.), 919–927.
- FUSCO, M. 1990. FDTD algorithm in curvilinear coordinates. *Ieee trans. antennas and propagacion*, **38**(Ene.), 76–89.
- FUSCO, M. A., SMITH, M. V., Y GORDON, L. W. 1991. A three-dimensional FDTD algorithm in curvilinear coordinates. *Ieee trans. antennas and propagation*, **29**(10).
- GANDHI, O. P., GAO, B.-Q., Y CHEN, Y.-Y. 1993. A frequency dependent finite-difference time-domain formulation for general dispersive media. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **41**(4), 658–665.
- GARCÍA LÓPEZ, F., Y GONZÁLEZ GARCÍA, S. 1993. Visualizing electromagnetic fields. *Mindshare*, Abr.

- GODUNOV, S. K., Y RYABENKII, V. S. 1987. *Difference schemes. an introduction to the underlying theory*. Vol. 19. Elsevier Science Publishers.
- GOLDBERG, M., Y TADMOR, E. 1978. Scheme-independent stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial-boundary value problems. I. *Mathematics of computation*, **32**, 1097–1107.
- GOLDBERG, M., Y TADMOR, E. 1981. Scheme-independent stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial-boundary value problems. II. *Mathematics of computation*, **36**(154), 603–626.
- GOLDBERG, M., Y TADMOR, E. 1985. Convenient stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial-boundary value problems. *Mathematics of computation*, **44**, 261–377.
- GOLDBERG, M., Y TADMOR, E. 1987. Convenient stability criteria for difference approximations of hyperbolic initial-boundary value problems. II. *Mathematics of computation*, **48**(178), 503–520.
- GÓMEZ MARTÍN, R. 1984. *Campo electromagnético. propagación y radiación*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Granada.
- GONZÁLEZ, S., GARCÍA, B., GÓMEZ, R., Y UMASHANKAR, K. 1991 (Jun.). Effects of finite-difference time-domain second order radiation boundary condition on the convergence and accuracy of electromagnetic fields. *Page 197 of: Abstracts of the 1991 north american radio science meeting*.
- GONZÁLEZ, S., GARCÍA, B., MATERDEY, T., Y GÓMEZ, R. 1993 (Sept.). Improvements and extensions in FDTD for RCS calculations. *Page 986 of: Proceedings of 23rd european microwave conference*.
- GONZÁLEZ GARCÍA, S. 1990. *Desarrollo de un programa general FDTD para el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras bidimensionales complejas*. Mem. Licenciatura, Universidad de Granada, Granada.
- GONZÁLEZ GARCÍA, S., SÁNCHEZ GARCÍA, I., GARCÍA OLMEDO, B., GÓMEZ MARTÍN, R., Y MATERDEY HUNG–BAO, T. 1991. Teaching graphic techniques for the finite difference time domain method. *In: Seventh international conference on Antennas and Propagation*.
- GOTTLIEB, D., Y TURKEL, E. 1978. Boundary conditions for multistep finite-difference methods for time-dependent equations. *Journal of computational physics*, **26**, 181–196.

- GUSTAFSSON, B., KREISS, H.O., Y SUNDSTRÖM, A. 1972. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II. *Mathematics of computation*, **26**(Jul.), 649–686.
- GWAREK, W. K. 1985. Analysis of an arbitrarily-shaped planar circuit. a time domain approach. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **33**(10), 1067–1072.
- GWAREK, W. K. 1988. Analysis of an arbitrarily shaped two-dimensional microwave circuits by finite-difference time-domain method. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **36**(4), 738–744.
- GWAREK, W. K., MORAWSKI, T., Y MROCKOWSKY, C. 1993. Application of the FD-TD method to the analysis of circuits described by the two-dimensional vector wave equation. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **41**(2), 311–317.
- HARMS, P. H., LEE, J.-F., Y MITTRA, R. 1992. A study of the nonorthogonal FDTD method versus the conventional FDTD technique for computing resonant frequencies of cylindrical cavities. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **40**(4), 741–746.
- HARRINGTON, ROGER F. 1961. *Time-harmonic electromagnetic fields*. McGraw-Hill.
- HIGDON, R. L. 1986. Absorbing boundary conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave equation. *Mathematics of computation*, **47**(176), 437–459.
- HIGDON, R. L. 1987. Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation. *Mathematics of computation*, **49**(179), 65–91.
- HOLLAND, R. 1977. THREDE: A free-field EMP coupling and scattering code. *Ieee trans. on nuclear science*, **NS-24**(6), 2416–2421.
- HOLLAND, R. 1983. Finite-difference solution of Maxwell's equations in isotropic media. *Ieee trans. nuclear science*, **NS-30**(6).
- HOLLAND, R. 1993. Pitfalls of staircase meshing. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, **35**(4), 434–439.
- HOLLAND, R., CABLE, V.P., Y WILSON, L.C. 1991. Finite-volume time-domain (FVTD) techniques for EM scattering. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, **33**(4), 281–294.
- HUNSBERGER, F., LUEBBERS, R. J., Y KUNZ, K. S. 1992. Finite-difference time-domain analysis of gyrotropic media - I Magnetized plasma. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**, 357–366.

- JAREM, J. M. 1991. A method of moments analysis and a finite-difference time-domain analysis of a probe-sleeve fed rectangular waveguide cavity. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **39**(3), 444–451.
- JURGENS, T.G., Y TAFLOVE, A. 1993. Three-dimensional contour FDTD modeling of scattering from single and multiple bodies. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(Dic.), 1703–1708.
- JURGENS, T.G., TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K., Y MOORE, T.G. 1992. Finite-difference time-domain modeling of curved surfaces. *Ieee trans. antennas and propagation*, **38**(Abr.), 76–89.
- KASHIWA, T., ONISHI, T., Y FUKAI, I. 1994. Analysis of microstrip antennas on a curved surface using the conformal grids (FD-TD) method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **42**(3), 423–426.
- KATS, D. S., PICKET-MAY, M. J., TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1991. FDTD analysis of electromagnetic radiation from systems containing horn antennas. *IEEE trans. antennas and propagation*, **39**, 1203–1212.
- KEYS, R. G. 1985. ABS for the acoustic media. *Geophysics*, **50**(6), 892–902.
- KIM, I. S., Y HOEFER, W. J. R. 1990. A local mesh refinement algorithm for the time domain finite difference method using Maxwell's curl equations. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **38**(6), 812–815.
- KO, L., Y MITTRA, R. 1991. A combination FDTD and Prony's methods for analyzing microwave integrated circuits. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **39**, 2176–2181.
- KREISS, H.O. 1968. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. I. *Mathematics of computation*, **22**, 703–714.
- KREISS, H.O. 1970. Initial boundary value problems for hyperbolic systems. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, **23**, 277–298.
- KUNZ, K. S., Y SIMPSON, L. 1981. A technique for increasing the resolution of finite-difference solution of the Maxwell equation. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, **EMC-23**(Nov.).
- LAHRMAN, A. 1992. An element formulation for the classical finite difference and finite volume method applied to arbitrarily shaped domains. *Int. journal for numerical methods in engineering*, **35**, 893–913.

- LAX, P. D., Y RITCHMYER, R. D. 1956. Survey of the stability of linear finite difference equations. *Comm. on pure and applied mathematics*, **9**, 267–293.
- LAX, P.D., Y WEDROFF, B. 1960. Systems of conservation laws. *Comm. on pure and applied mathematics*, **13**, 217–237.
- LEE, J. F., PALANDECH, R., Y MITTRA, R. 1992. Modelling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **40**, 346–352.
- LI, K., LEE, C. F., POH, S. Y., SHIN, R. T., Y KONG, J. A. 1993. Application of the FDTD method to analysis of electromagnetic radiation from VLSI heatsink configuration. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, **35**(2), 204–214.
- LIAO, Z., WONG, H. L., YANG, B., Y YUAN, Y. 1984. A transmitting boundary for transient wave analysis. *Scientia sinica (series a)*, **27**(10), 1062–1076.
- LINDMAN, E. L. 1975. Free-space boundary-conditions for the time dependent wave equations. *J. computational physics*, **18**, 66–78.
- LUEBBERS, R. J., HUNSBERGER, F., KUNZ, K. S., STANDLER, R. B., Y SCHNEIDER, M. 1990. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *Ieee trans. on electromagnetic compatibility*, **32**(3), 222–227.
- LUEBBERS, R. J., KUNZ, K. S., SHNEIDER, M., Y HUNSBERGER, F. 1991a. A finite-difference time-domain near zone to far zone transformation. *Ieee trans. antennas and propagation*, **39**(4), 429–433.
- LUEBBERS, R. J., HUNSBERGER, F., Y KUNZ, K. S. 1991b. A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for transient propagation in plasma. *Ieee trans. on antennas and propagation*, **39**(1), 29–34.
- LUEBBERS, R. J., CHEN, L., UNO, T., Y ADACHI, S. 1992a. FDTD calculations of radiation patterns, impedance and gain for a monopole antenna in a conducting box. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**(12), 1577–1583.
- LUEBBERS, R. J., RYAN, D., Y BEGGS, J. 1992b. A two-dimensional time-domain near zone to far zone transformation. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**(7), 848–851.
- LUEBBERS, R. J., BEGGS, J., Y CHAMBERLIN, K. 1993. Finite-difference time-domain calculations of transients in antennas with non linear loads. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(5), 566–573.
- MADSEN, N.K., Y ZIOLKOWSKI, R. W. 1988. Numerical solution of Maxwell's equations in the time domain using irregular nonorthogonal grids. *Wave motion*, **33**(4), 583–596.

- MADSEN, N.K., Y ZIOLKOWSKI, R. W. 1990. A three-dimensional modified finite volume technique for Maxwell's equations. *Electromagnetics*, **10**(1-2), 147-161.
- MALONEY, J. G., Y SMITH, G. S. 1992. The efficient modeling of thin material sheets in the finite-difference time-domain (FD-TD) method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**, 323-330.
- MALONEY, J. G., Y SMITH, G. S. 1993a. A comparison of methods for modeling electrically thin and conducting sheets in the finite-difference time-domain (FDTD) method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(5), 690-694.
- MALONEY, J. G., Y SMITH, G. S. 1993b. A study of transient radiation from the Wu-King resistive monopole - FDTD analysis and experimental measurements. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(5), 668-676.
- MALONEY, J. G., SMITH, G. S., Y SCOTT, W. R. 1990. Accurate computation of the radiation from simple antennas using the finite-difference time-domain method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **38**(7), 1059-1068.
- MATERDEY, T., GONZÁLEZ, S., GÓMEZ, R., Y GARCÍA, B. 1993a. Nuevos algoritmos de diferencias y promedios finitos en el dominio del tiempo para la solución de las ecuaciones de maxwell. Parte I: Medios isótropos. *Pages 635-639 of: Viii symposium nacional ursi*.
- MATERDEY, T., GONZÁLEZ, S., GÓMEZ, R., Y GARCÍA, B. 1993b. Nuevos algoritmos de diferencias y promedios finitos en el dominio del tiempo para la solución de las ecuaciones de maxwell. Parte I: Medios anisótropos. *Pages 640-644 of: Viii symposium nacional ursi*.
- MATERDEY, T., GONZÁLEZ, S., GÓMEZ, R., Y GARCÍA, B. 1994 (Abr.). A new vision of numerical methods for the solution of Maxwell's equations related to the FD-TD method. application to general anisotropic media. *Pages 138-141 of: IEEE (ed), Second international conference on computation in electromagnetics*.
- MATERDEY BAO-HUNG, T. 1993 (Nov.). *Nueva formulación de métodos de diferencias finitas en el dominio del tiempo. aplicación a guías dieléctricas anisótropas*. Tesis Doct., Universidad de Granada.
- MCINTURFF, K., Y SIMON, P. S. 1993. Closed-form expressions for coefficients used in (FD-TD) high-order boundary conditions. *Ieee microwave guided wave letters*, **3**(7), 222-223.

- MEI, K. K., Y FANG, J. 1992. Superabsorption - a method to improve absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**(9), 1001-1010.
- MEI, K. K., CANGELLARIS, A., Y ANGELAKOS, D. J. 1984. Conformal time domain finite difference method. *Radio science*, **19**(5), 1145-1147.
- MEREWETHER, D. E., FISHER, R., Y SMITH, F. W. 1980. On implementing a numeric Huygen's source scheme in a finite difference program to illuminate scattering bodies. *Ieee trans. on nuclear science*, **NS-27**(6), 1829-1833.
- MILLER, E. K. 1988. A selective survey of computational electromagnetics. *Ieee trans. antennas and propagation*, **36**(9), 1281-1305.
- MITCHELL, A.R., Y GRIFFITHS, D.F. 1980. *The finite difference method in partial differential equations*. John Wiley & Sons.
- MOHAMMADIAN, A. H., SHANKAR, V., Y HALL, W. F. 1991. Application of time-domain finite-volume method to some radiation problems in two and three dimensions. *Ieee trans. on magnetics*, **27**(5), 3841-3844.
- MUR, G. 1981. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time domain electromagnetic field equations. *Ieee trans. on electromagnetic compatibility*, **23**, 377-382.
- OLIGER, J. 1974. Fourth order difference methods for the initial boundary-value problem for hyperbolic equations. *Mathematics of computation*, **28**, 15-25.
- OLIVIER, J. C. 1992. On the synthesis of exact free space absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**(4), 456-460.
- OMICK, S. R., Y CASTILLO, S. P. 1993. A new finite-difference time-domain algorithm for the accurate modeling of wide-band electromagnetic phenomena. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, **35**(2), 215-222.
- PEREDA, J. A., VIELVA, L. A., VEGAS, A., Y PRIETO, A. 1993. A treatment of magnetized ferrites using the FDTD method. *Ieee microwave guided wave letters*, **3**(5), 136-138.
- PETROPULOS, P. G. 1994. Stability and phase error analysis of FD-TD in dispersive dielectrics. *Ieee trans. antennas and propagation*, **42**(1), 62-69.
- PRESCOTT, D. T., Y SHULEY, N. V. 1992. A method for incorporating different sized cells into the finite-difference time-domain analysis technique. *Ieee microwave and guided wave letters*, **2**(11), 434-436.

- PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., Y VETTERLING, W. T. 1989. *Numerical recipes*. Cambridge University Press.
- RAILTON, C. J. 1993. An algorithm for the treatment of curved metallic laminas in the finite difference time domain method. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **41**(8), 1429–1438.
- RAILTON, C. J., DANIEL, E. M., PAUL, D., Y MCGEEHAN, J. P. 1993. Optimized boundary conditions for the analysis of planar circuits using the finite difference time domain method. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **41**(2), 290–297.
- RAMAHI, O. M., A, KHEBIR, Y MITTRA, R. 1991. Numerically derived absorbing boundary condition for the solution of open region scattering problems. *Ieee trans. antennas and propagation*, **39**(3), 350–353.
- RAPPAPORT, C. M. 1991. FDFD Analysis of electromagnetic scattering in anisotropic media using unconstrained triangular meshes. *Ieee trans. antennas and propagation*, **39**(3), 345–349.
- RAY, S. L. 1993. Numerical dispersion and stability characteristics of time domain methods in nonorthogonal meshes. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(2), 233–235.
- REINEIX, A., Y JECKO, B. 1989. Analysis for microstrip patch antennas using finite difference time domain method. *Ieee trans. antennas and propagation*, **37**(11), 1361–1369.
- REINEX, A., MONEDIERE, T., Y JECKO, F. 1992. Ferrite analysis using the finite–difference time–domain (FDTD) method. *Microwave opt. tech. letters*, **5**(13), 685–686.
- RICHTMYER, R. D., Y MORTON, K. W. 1967. *Difference methods for initial-value problems*. New York: Interscience Publishers.
- ROMERO SARABIA, A. 1986. *Algebra lineal y Geometría I*. Ed. La Madraza.
- SÁNCHEZ GARCÍA, I., GARCÍA OLMEDO, B., GONZÁLEZ GARCÍA, S., HUNG-BAO, T. M., Y GÓMEZ MARTÍN, R. 1990. Calculation of the RCS of an airfoil using FDTD method. In: *Workshop JINA 90. RCS of perfectly conducting or coated bodies*.
- SÁNCHEZ GARCÍA, IGNACIO F. 1990. *Desarrollo de un programa general para el estudio de la interacción de ondas electromagnéticas con estructuras bidimensionales conductoras complejas basado en el método de los momentos*. Mem. Licenciatura, Universidad de Granada, Spain.
- SCHENEIDER, J., Y HUDSON, S. 1993. The finite–difference time–domain method applied to anisotropic material. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(7), 994–999.

- SELMIN, V. 1993. The node-centred finite volume approach: bridge between finite differences and finite elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **102**, 107–138.
- SHANKAR, V., HALL, W., Y MOHAMMADIAN, A.H. 1989. A three-dimensional Maxwell's equation solver for computation of scattering from layered media. *Ieee trans. on magnetics*, **25**(Jul.), 3098–3103.
- SHANKAR, V., MOHAMMADIAN, A. H., Y HALL, W. F. 1990. A time-domain, finite-volume treatment for Maxwell's equations. *Electromagnetics*, **10**, 127–145.
- SHAW, J. A., DURNEY, H. D., Y CRISTENSEN, D. A. 1991. Computer aided design of two-dimensional electric-type hyperthermia applicators using the finite-difference time-domain method. *Ieee trans. biomed. engng.*, **38**, 861–870.
- SHEEN, D. M., ALI, S. M., ABOUZHARA, M. D., Y KONG, J. A. 1990. Application of the three dimensional finite difference time domain method to the analysis of planar microstrip circuits. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **38**(7), 849–857.
- SHLAGER, K. L., MALONEY, J. G., RAY, S. L., Y PETERSON, A. F. 1993. Relative accuracy of several finite-difference time-domain methods in two and three dimensions. *Ieee trans. antennas and propagation*, **41**(12), 1732–1737.
- SHORTHOUSE, D. B., Y RAILTON, C. J. 1992. The incorporation of static field solutions into the finite difference time domain algorithm. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **40**(5), 986–996.
- SLOAN, D. M. 1983. Boundary conditions for a fourth order hyperbolic difference scheme. *Mathematics of computation*, **41**(163), 1–11.
- SMITH, G.D. 1985. *Numerical solution of partial differential equations. finite difference methods*. Oxford: Clarendon Press.
- STRATTON, J. A. 1941. *Electromagnetic theory*. New York: McGraw-Hill.
- SULLIVAN, D. M. 1991. Mathematical methods for treatment planning in deep regional hyperthermia. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **39**(5), 864–872.
- SULLIVAN, D. M., BORUP, D. T., Y GANDHI, O. P. 1987. Use of the finite-difference time domain method in calculating em absorption in human tissues. *Ieee trans. biomed. engng.*, **34**(2), 148–157.
- TAFLOVE, A., Y BRODWIN, M. E. 1975a. Computation of electromagnetic fields and induced temperatures within a model of the microwave-irradiated human eye. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **23**(11), 888–896.

- TAFLOVE, A., Y BRODWIN, M.E. 1975b. Numerical solution of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, 623–630.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1983. Radar cross section of general three dimensional scatterers. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, 25(4), 433–440.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1987. The finite-difference time-domain (FD-TD) method for electromagnetic scattering and interaction problems. *Journal of electromagnetic waves and applications*, 1(3), 243–267.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1990a. The finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions. *Electromagnetics*, 10, 105–126.
- TAFLOVE, A., Y UMASHANKAR, K. R. 1990b. *The finite-difference time-domain method for numerical modeling of electromagnetic wave interactions with arbitrary structures*. PIER 2. Progress in electromagnetics research. Finite elements and finite difference methods in electromagnetic scattering. New York: Elsevier.
- TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K. R., Y JURGENS, T. G. 1985. Validation of FDTD modeling of the radar cross section of three-dimensional structures spanning up to nine wavelengths. *Ieee trans. antennas and propagation*, 33(6), 662–666.
- TAFLOVE, A., UMASHANKAR, K. R., BEKER, B., HARFOUSH, F., Y YEE, K. S. 1988. Detailed FDTD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in the thick conducting screens. *Ieee trans. antennas and propagation*, 36(2), 247–257.
- TIRKAS, P. A., Y BALANIS, C. A. 1992. Finite-difference time-domain method for antenna radiation. *Ieee trans. antennas and propagation*, 40, 334–340.
- TIRKAS, P. A., Y DEMAREST, K. R. 1991. Modeling of thin dielectric structures using the finite-difference time domain technique. *Ieee trans. antennas and propagation*, 39, 1338–1344.
- TIRKAS, P. A., BALANIS, C. A., Y RENAUT, R. A. 1992. Higher order absorbing boundary conditions for the finite-difference time-domain method. *Ieee trans. antennas and propagation*, 40(10), 1215–1222.
- TIRKAS, P. A., BALANIS, C. A., PRUCHINE, M. P., Y BARBER, G. C. 1993. Finite-difference time-domain method for electromagnetic radiation, interference and interaction with complex structures. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, 35(2), 192–203.

- TREFETHEN, L. N. 1982. Group velocity interpretation in finite difference schemes. *SIAM Review*, **24**(2), 113–136.
- TREFETHEN, L. N. 1983. Group velocity interpretation of the stability theory of Gustafsson, Kreiss and Sundström. *Journal of computational physics*, 199–217.
- TREFETHEN, L. N. 1984. Instability of difference models for hyperbolic initial boundary value problems. *Comm. on Pure and Applied Mathematics*, **37**, 329–367.
- TREFETHEN, L. N., Y HALPERN, LAURENCE. 1986. Well-posedness of one-way wave equations and absorbing boundary conditions. *Mathematics of Computation*, **47**(176), 421–435.
- TWIZELL, E. H., Y TIRMIZI, S. I. A. 1985. A family of methods for the wave equation in one- and two-space dimensions. *Numerical methods for partial differential equations*, **2**, 105–125.
- UMASHANKAR, K. R., Y TAFLOVE, A. 1982. A novel method to analyze electromagnetic scattering of complex objects. *Ieee trans. electromagnetic compatibility*, **24**(4), 397–405.
- UMASHANKAR, K. R., TAFLOVE, A., Y BEKER, B. 1987. Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity. *Ieee trans. antennas and propagation*, **35**(11), 1248–1257.
- VINOKUR, M. 1989. An analysis of finite-difference and finite-volume formulations of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 1–52.
- WATANABE, Y. 1987. A nondispersive and nondissipative numerical method for first-order linear hyperbolic partial differential equations. *Numerical methods for partial differential equations*, **3**(1-8).
- WILSON, J. C. 1972. Stability of Ritzmyer type difference schemes in any finite number of space variables and their comparison with multistep Strang schemes. *J. inst. maths. applics*, **10**, 238–257.
- XIAO, S., Y VAHLIDIECK, R. 1993. An efficient 2-D FDTD algorithm using real variables. *Ieee microwave guided wave letters*, **3**(5), 127–129.
- XIAO, S., VAHLIDIECK, R., Y JIN, H. 1992. Full wave analysis of guided wave structures using a novel 2-D FDTD. *Ieee microwave guided wave letters*, **2**(5), 165–167.
- YEE, K. S., INGHAM, D., Y SHLAGER, K. 1991. Time-domain extrapolation to the far field based on FDTD calculations. *Ieee trans. on antennas and propagation*, **39**(Mar.), 410–413.

- YEE, K. S., CHEN, J. S., Y CHANG, A. H. 1992. Conformal finite-difference time-domain (FDTD) with overlapping grids. *Ieee trans. antennas and propagation*, **40**(9), 1068–1075.
- YEE, K.S. 1966. Numerical solution of initial boundary problems in isotropic media. *Ieee trans. antennas and propagation*, **14**, 302–307.
- ZHANG, X., FANG, J., MEI, K. K., Y LIU, Y. 1988. Calculations of the dispersion characteristics of microstrips by the time-domain finite-difference method. *Ieee trans microwave theory and techniques*, **36**(2), 263–267.
- ZIENKIEWICZ, O. C. 1977. *The finite element method*. London: McGraw-Hill.
- ZIOLKOWSKY, R. W., MADSEN, N. K., Y CARPENTER, R. C. 1983. Three-dimension computer modeling of EM fields: A global lookback lattice truncation scheme. *J. computational physics*, **50**, 360–408.
- ZIVANOVIC, S. S., YEE, K. S., Y MEI, K. K. 1991. A subgridding method for the time-domain finite-difference method to solve Maxwell's equations. *Ieee trans. microwave theory and techniques*, **29**(3), 471–479.
- ZWAS, G., Y ABARBANEL, S. 1971. Third and fourth order accurate schemes for hyperbolic equations of conservation law form. *Mathematics of computation*, **25**(114), 229–236.