2016

Manifestaciones de pensamiento funcional de alumnos de segundo de primaria en un juego de tarjetas.

Trabajo Fin de Grado.

Mª Ángeles Rodríguez Fernández

Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

Resumen:

En este trabajo se va a realizar un estudio del pensamiento funcional en una muestra de veinte alumnas de segundo de Educación Primaria del colegio Monaita de Granada. Para ello se usará un juego didáctico con tarjetas de álgebra, mediante el cual las estudiantes participarán en una actividad lúdica en la que nos irán aportando la información necesaria para detectar posibles manifestaciones del pensamiento funcional en ellas.

En la sesión diseñada se partirá de una tarea introductoria que servirá de modelo a las alumnas para que no se sientan desubicadas y evitar que no sepan responder. Tras esto se procede a un análisis de los resultados obtenidos mediante el cual se puede establecer si realmente se manifiesta este pensamiento en esta muestra de alumnas y en qué medida.

Descriptores: pensamiento funcional, Early-Algebra, patrones, generalización, juegos didácticos.

Índice

A. INTRODUCCIÓN, JUSTIFICACIÓN O ESTADO DE LA CUESTIÓN:

El pensamiento funcional se enmarca dentro de una propuesta llamada Early-Algebra y es una parte importante del pensamiento algebraico que mediante esta investigación se pretende mostrar las manifestaciones del pensamiento funcional en una muestra de 20 alumnas de 2º de primaria. A continuación describimos el estado de la cuestión en la que se encuentra enmarcado nuestro estudio.

En el campo del estudio del Early-Algebra como una propuesta curricular en educación primaria e infantil, uno de los primeros antecedentes es Stacey (1989), el cual estudió las respuestas de alumnos de 9 a 13 años a preguntas que implicaban el uso de generalización y patrones y observó que, en gran parte, carecían de coherencia las elecciones de modelos elegidos para resolver el problema, y que los alumnos que habían tenido alguna experiencia previa con tareas que implicaran generalización, obtenían mejores resultados ya que usaron de forma implícita patrones numéricos y modelos lineales.

Hasta la década de los 90 el Early-Algebra se centró en lo que los alumnos no eran capaces de hacer y esto hizo que se contribuyera al reconocimiento de posponer a cursos posteriores el estudio del álgebra, pero a partir de los 90 cambia la perspectiva y se empieza a considerar que los alumnos tienen capacidades de generalización naturales y que han de ser explotadas (Molina, 2009)

Finalmente es en Estados Unidos donde surge el Early Algebra con base en el trabajo de Kaput (1998).

Usiskin (1999, citado por Merino, 2012), distingue cuatro concepciones de álgebra escolar: como el estudio entre cantidades, álgebra como el estudio de estructuras, como aritmética generalizada y como estudio de procedimientos para resolver algunos problemas. Además propone que el álgebra esté presente en los contenidos de educación infantil y primaria relacionando valores entre dos variables, haciendo que los niños establezcan relaciones funcionales por intuición. Destacando de esta manera la importancia de los patrones, generalización, relación entre cantidades, modelización, funciones y resolución de problemas como los componentes del álgebra que se presentan en la escuela.

Según Fernández, Molina y Planas (2015), la propuesta curricular Early-Algebra pretende introducir de la mano de los contenidos curriculares previos a la educación secundaria, el pensamiento algebraico, dando un enfoque distinto a los contenidos existentes para facilitar la aproximación de los estudiantes al álgebra. El pensamiento funcional es uno de los enfoques necesarios para que sea efectiva la introducción del pensamiento algebraico en la educación primaria.

De manera que no se puede concebir el Early-Algebra sin el pensamiento funcional, que hace referencia a las funciones, las cuales establecen relaciones de dependencia entre variables. De manera que los valores de una variable cambian según los valores que tome la otra variable. Numerosos autores nacionales e internacionales (Brizuela y Schliemann, 2003; Blanton y Kaput 2004, 2011; Merino, 2012; Fuentes, 2014; Jaldo, 2015; Morillo et al., 2015; Yáñez, 2015) han investigado acerca de la presencia de este pensamiento en los niños en edad de Educación Infantil y Primaria.

A nivel internacional encontramos, entre otras, la definición de Blanton y Kaput (2004) realizan una definición de pensamiento funcional basándose en la de Smith (2003) que define este pensamiento como la actividad cognitiva que se focaliza en la relación existente entre dos cantidades o más que varían.

Para Warren y Cooper (2005, citado por Fernández, Molina y Planas, 2015), el pensamiento funcional aborda las ideas de cambio, las relaciones que hay entre ellos y resolver problemas utilizando estas relaciones. Mediante este pensamiento se pueden establecer relaciones de dependencia entre valores de dos o más conjuntos en una situación cercana y cotidiana para el alumno. Gracias al pensamiento funcional se puede descubrir otras parejas de valores en la situación y la generalización que hay entre los conjuntos que se tienen.

Carraher y Schliemann (2007), consideran este tipo de pensamiento como el punto de partida dentro del área del álgebra.

Uno de los autores más influyentes en el pensamiento algebraico es Kaput (2008), el cual centra la definición del mismo en dos aspectos como son la producción y la expresión de generalizaciones en sistemas simbólicos y el razonamiento usando materiales simbólicos, pudiendo incluir las actividades manipulativas guiadas.

Más tarde Blanton, Levi, Crites y Dougherty (2011) lo definieron como una actividad cognitiva que poseen las personas y que se manifiesta al describir, construir y razonar con y sobre funciones. Además lo ubican dentro de una de las áreas del pensamiento algebraico que incluye la aritmética generalizada, las variables, las ecuaciones y el razonamiento cuantitativo. Todo esto teniendo en cuenta que una función establece relación matemática entre dos conjuntos donde dos elementos pertenecientes a dos dominios distintos, están relacionados de manera única, incluyendo para ello la generalización de las relaciones entre las cantidades que covarían, la representación que se hace de esas relaciones y los razonamientos con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones. Añaden que la representación de esto se puede hacer mediante el lenguaje, el simbolismo algebraico, gráficos o tablas.

A nivel nacional, Rico (2007), define el pensamiento funcional como pensar en términos de y acerca de estas relaciones. Este mismo autor refiere que estas relaciones en el pensamiento funcional pueden representarse mediante símbolos, tablas, gráficas o dibujos geométricos, sirviendo cada una de ellas para distintos propósitos y teniendo diferentes propiedades.

Fernández, Molina y Planas (2015) establecen que este pensamiento tiene la finalidad de establecer relaciones de dependencia entre dos o más conjuntos de datos de una situación cotidiana para el estudiante y que mediante este tipo de pensamiento se pretende descubrir otros datos emparejados en esa situación y la generalización establecida entre estos conjuntos. Añaden que el pensamiento funcional puede ser identificado en el niño cuando este identifica de forma explícita la relación entre las variables o los conjuntos, y mediante esta relación, puede realizar una generalización. La regla que establece dicha generalización se puede descubrir mediante un proceso inductivo (Cañadas, Castro y Castro, 2008) donde se recurre a la recursividad para llegar a la generalización, siendo necesario ir más allá de la relación recurrente que existe entre los valores que pueden tomar las variables.

Blanton y Brizuela (2014), en sus estudios, se posicionan en contra de desvincular las representaciones del pensamiento algebraico, de hecho lo consideran como algo complementario en una relación de dependencia completa. De esta manera, ambos se desarrollan conjuntamente.

También es definido a nivel nacional por Cañadas y Molina (2016), como una componente dentro del pensamiento algebraico que se basa en construir, describir, representar y razonar sobre las funciones y con ellas, además de con y sobre los elementos que las componen.

Existen diferentes estilos de enseñanza del Álgebra, y una gran variedad de ellos toman como base los procesos de generalización y modelización (Socas, 2011). Uno de los primeros autores en definir la generalización fue Piaget (1975, citado por Merino 2012), los cuales la definieron como un "proceso fundamental en la construcción del conocimiento". También establecieron la relación entre este concepto y el de abstracción, tratando a la primera como algo que está sometido a la abstracción y cuya finalidad es establecer regularidades en lo real.

También para Mason, Graham, Pimn y Govar (1985), cuando se habla de pensamiento funcional, es necesario tener en cuenta generalización, la cual es denominada como una de las diferentes "raíces" del álgebra junto con la sustitución formal y la modelización.

En este sentido encontramos que Stacey (1989) hace una distinción entre la generalización cercana y la lejana. En la primera se requiere un patrón próximo o encontrar elementos que se pueden hallar por conteo, y en la segunda se requiere encontrar un patrón que defina la regla general.

Unos años más tarde, Mason (1996) define la generalización como el centro de las matemáticas, la cual aparece en muchas formas. Para él, la generalización consiste en un medio para ampliar el ámbito de referencia y la aplicación de un resultado en contextos cada vez más amplios, viendo así los casos particulares en la generalidad y la generalidad en los casos particulares.

Kaput (1998) se refiere a la generalización como la capacidad de extender deliberadamente el rango de razonamiento o comunicación más allá del caso considerado, exponiendo la similitud que hay entre los casos, centrando la atención en los patrones, procedimientos, estructuras y relaciones que hay entre los casos a lo largo y entre ellos.

En este sentido, Cañadas, Merino y Molina (2013) indican que en el enfoque funcional es necesario tener en cuenta las relaciones de dependencia entre variables. En una función, los distintos valores que tiene una variable (dependiente) cambian respecto a los valores que toma la otra variable (independiente), y atendiendo a esto se puede distinguir la “relación directa” si se sabe cuál es el valor de la variable independiente y la “relación inversa” cuando no se conoce el valor el valor de la variable dependiente, o viceversa entre variables.

Varias investigaciones recientes muestran indicios de la capacidad de los alumnos de presentar un pensamiento funcional en edades tempranas como es la edad de educación infantil. Además de Blanton y Kaput (2004), autores como Tabach y HershKowit (2002), y Schliemann, Carraher, Brizuela, Earnest, Goodrow, Lara-Roth (2003) realizaron estudios que se basan en la generalización matemática y donde finalmente concluyen con evidencias de pensamiento funcional en niños de entre 3 y 8 años, ya que comprendían la idea de función y usaban representaciones propias del pensamiento algebraico. De hecho, muchos de estos autores como Blanton y Kaput (2011) proponen una inclusión del pensamiento funcional en el currículo de educación primaria para que de esta manera se ponga en práctica en el aula.

En España, la Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (2013), ha sido la que ha establecido de forma explícita la necesidad de desarrollar en los alumnos “la capacidad de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones” dentro del Bloque 1 en el área de Matemáticas (BOE, 2014, p. 19387). En este mismo documento se puede encontrar de forma más sutil, el pensamiento funcional o la capacidad antes nombrada en los apartados de contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables de este mismo bloque de contenidos (BOE, 2014, p. 19388-89).

Un paso más adelante en este camino se encuentra el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003), el cual defiende la introducción del álgebra desde la educación infantil en adelante y que de esta manera se convierta en una ayuda para los alumnos para construir una sólida base de aprendizaje y prepararse para un álgebra más sofisticado en grados superiores. Proponen el álgebra como algo multidimensional compuesto por varios bloques como son: relación entre cantidades y funciones, comprensión de patrones, análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos y el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas; ya que se refiere que comprender el cambio es algo elemental para después poder comprender las funciones. Uno de los caminos que proponen para promover el pensamiento algebraico y que los alumnos aprendan a generalizar es el uso de patrones.

En este sentido cabe destacar que el uso de representaciones ayuda a analizar estos patrones, ya que según señalan Moss y London (2011, citados por Merino, 2012) al priorizar las representaciones visuales se ayuda a los alumnos a fijarse en los patrones como una herramienta para distinguir las reglas generales.

Fernández (1997, citado por Espinosa, 2005) define la representación como "el conjunto de herramientas (acciones, signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los que los sujetos abordan e interactúan con el conocimiento matemático" (p. 2).

Varios autores distinguen dos tipos de representaciones: las internas, definidas por Castro y Castro (1997) como imágenes mentales sin soporte físico. Y las externas, definidas por estos mismos autores como las notaciones simbólicas o gráficas que, en definitiva, son observables ya que tienen un soporte físico tangible y que expresan conceptos y procedimientos matemáticos.

Merino (2012) hace una clasificación de los tipos de representación en la cual distingue:

a) Representación verbal.
b) Representación tabular.
c) Representación pictórica.
d) Representación simbólica: a su vez subdividida en dos grupos.
    a. Numérica
    b. Algebraica
e) Múltiples

En cuanto a los tipos de pensamiento funcional, Smith (2008) establece tres, (1) patrones recursivos, que consiste en encontrar en una secuencia de datos la variación, donde generalmente, un patrón recursivo es el utilizado para obtener un número en una secuencia; (2) el pensamiento covariacional, que consiste en analizar la variación simultánea entre dos cantidades relacionadas entre sí y se mantiene ese cambio de forma dinámica y explícita al describir función (por ejemplo, "al incrementar x en uno, y se incrementa en tres"); y (3) una relación de correspondencia, que se basa en la identificación de una correlación entre las variables (por ejemplo: ”y es 3 veces x más 2”).

Cañadas, Castro y Castro (2008) nos hablan de las estrategias usadas como cualquier método que ayuda a la resolución de un problema de cualquier tipo. Y en esta misma línea Rico (1997) las define como las distintas formas de actuar o ejecutar tareas matemáticas, operando en una estructura conceptual y empleando aquel procedimiento que se pueda ejecutar, teniendo siempre en cuenta que relaciones hay y los conceptos que están implicados.

Siguiendo esta misma línea encontramos que varios autores establecen diferentes tipos de estrategias utilizadas en la resolución del tipo de cuestiones que estamos estudiando. En primer lugar Merino (2012), basándose en el trabajo de Barbosa (2011), considera la estrategia de conteo cuando se cuentan elementos para poder dar respuesta a una cuestión. En este mismo trabajo se encuentra otro tipo de estrategias, las de uso de cuestiones anteriores, en las que los alumnos hacen uso de la recursividad de las relaciones o recurren a un resultado obtenido anteriormente para hallar la solución a la cuestión dada. Por otro lado encontramos la estrategia operatoria establecida por Morales, Cañadas, Molina, del Río y Moreno (2015) en la cual se usa la operación como método de resolución del problema. Por último encontramos la respuesta directa, definida por Fuentes (2014) como la respuesta única de un solo número, sin justificación alguna.

A. *MÉTODO:*

a. *Participantes y contexto.*

Este trabajo de investigación se ha realizado a 20 alumnas de segundo curso de Educación Primaria del colegio privado Monaita del grupo Attendis durante el curso 2015-2016. Este centro está situado a las afueras de Granada y es de educación diferenciada, ya que sólo hay mujeres y alumnas en él. Es un colegio bilingüe de línea 2, cuya metodología está basada en el aprovechamiento de todas las potencialidades presentes en las alumnas en cada etapa educativa, prestando especial atención a las destrezas lingüística y lógico-matemática, el bilingüismo, la educación en valores cristianos, el deporte, el uso de TIC, entre otras.

Las alumnas proceden de distintas partes de la provincia de Granada y en su mayoría de un nivel socio-económico medio-alto. No hay ninguna alumna que presente necesidades especiales y todas participaron en la sesión.

En la elección de la muestra de alumnas se tuvo en cuenta las capacidades de las mismas en la etapa seleccionada y los estudios realizados anteriormente. En cuanto a la elección del grupo de segundo de Educación Primaria se atendió primordialmente al horario de las alumnas en el que se tuvo que cuadrar la sesión para no desestructurar demasiado sus clases habituales.

El objetivo principal de este estudio que se planteó en un principio era explorar las posibles manifestaciones del pensamiento funcional en estas alumnas mediante un juego didáctico.

b. Instrumentos.

Para realizar esta investigación se ha diseñado una tarea a modo de juego de 45 minutos (una sesión) para las alumnas en la cual deben ir dando respuesta a una serie de preguntas relacionadas con sus autobuses del colegio (a los que ellas llaman rutas) y con las personas que hay dentro de ellos al ir recogiendo niñas, de manera que se contextualiza la tarea con el entorno más próximo que tienen. Con esto se pretendía obtener al menos una respuesta de cada una de las alumnas de la muestra para poder analizar individualmente si puede haber evidencias de pensamiento funcional en ellas. El juego únicamente se compone de 20 tarjetas, una por alumna, y una cuartilla para cada una, en la que se insistió que podían escribir lo que ellas creyeran conveniente para resolver la pregunta que se lanzaba en cada caso. Las preguntas y respuestas del juego se pueden encontrar en la tabla del anexo 2.

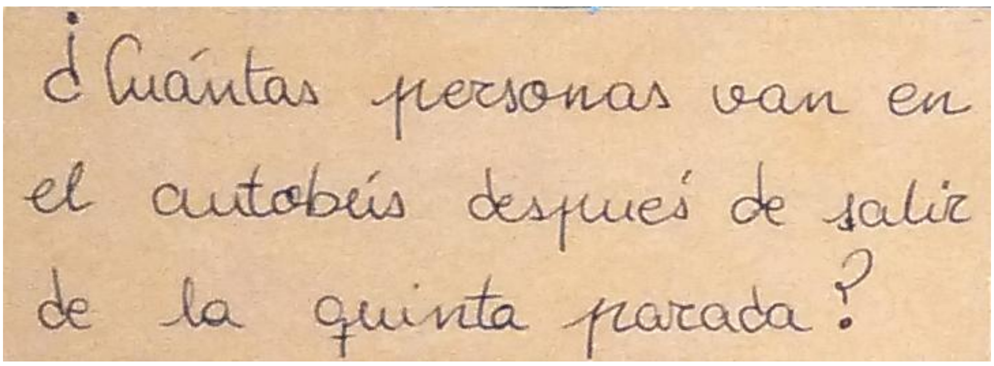


Imagen 1. Reverso de una de las tarjetas del juego.

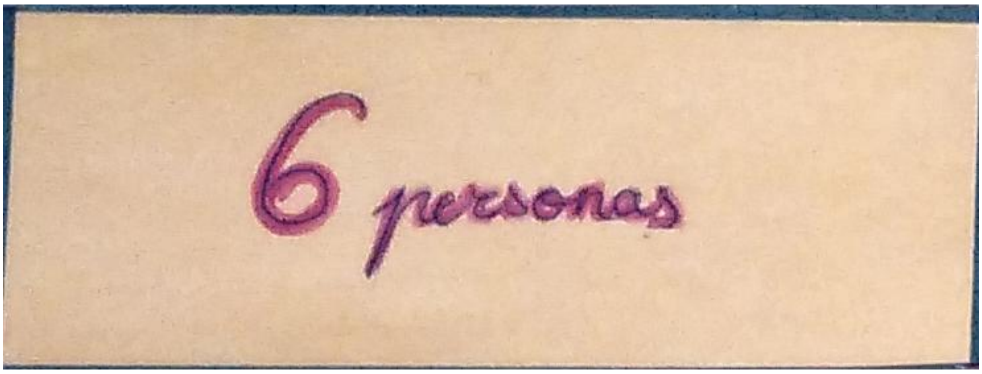


Imagen 2. Anverso de una de las tarjetas del juego.

La tarea que se ha llevado a cabo ha consistido en un juego de preguntas y respuestas, en el cual cada una de las alumnas tenía una tarjeta con una respuesta escrita en rojo y una pregunta en su reverso escrita en negro. Cada pregunta era correspondida con una respuesta que tenía otra compañera, de manera que cada una de las alumnas debían pensar acerca de una pregunta lanzada al aire y con una sola respuesta que podía ser o no la que ellas tenían en su tarjeta. De esta forma se lanzan preguntas unas a otras y finalmente cada una de las alumnas tendría que dar una respuesta y lanzar una pregunta al resto de sus compañeras.

El juego estaba organizado de manera que las primeras 10 preguntas estaban relacionadas con la relación directa entre el número de personas que van en el autobús y el número de parada que acaba de pasar, teniendo en cuenta que el conductor siempre va en el autobús y que en cada parada se sube una alumna. De manera que para esta batería de preguntas se corresponde la función:

$$y = x + 1$$

Siendo *y* el número de personas que van en el autobús y *x* el número de parada. En esta secuencia de preguntas se comienza con números sencillos y poco a poco se va haciendo más complejo, de manera que llega un momento en el que no es posible realizar estrategias de conteo para resolverlas y es necesario aplicar otro tipo de estrategias, haciendo así el paso de preguntas concretas, a la generalización cercana y así llegar a la lejana, con objeto de llegar al empleo de patrones y obtener la correlación entre dos cantidades.

Hemos querido que el inicio del juego lo marcara la profesora para que las alumnas no se sintieran desubicadas y confiaran en la tarea que se les estaba proponiendo.

En cuanto a la segunda batería de preguntas, de la 10 a la 20, están formuladas de manera indirecta, preguntando de que parada acaba de salir sabiendo un número determinado de personas que van en el autobús. En este caso la función que hay implícita es:

$$x = y - 1$$

Nuevamente en esta secuencia la complejidad va aumentando conforme van avanzando en el juego.

Como se puede observar, es necesario que las preguntas sigan este orden y que cada respuesta se dé a la pregunta que formula la alumna anterior. De manera que las tarjetas se diseñaron con este orden pero luego se repartieron a las alumnas de forma aleatoria, excepto la tarjeta de la profesora que era la primera.

c. *Procedimiento*

La sesión en la que se trabajó esta tarea se realizó el día 6 de mayo de 2016 por dos alumnas de Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, que actuaron como investigadoras.

La profesora de las alumnas participó en la primera pregunta y después se mantuvo atenta al juego sin intervenir.

La clase estaba organizada en forma de semicírculo de frente a la pizarra, donde nos encontrábamos ambas investigadoras. La recogida de datos se realizó con una cámara fija de vídeo que enfocaba únicamente a la zona de la pizarra y que estaba colocada delante de las alumnas de manera que ellas mismas podían ver que ellas no salían en ningún momento en la grabación, tan sólo sus voces.

La sesión duró unos 45 minutos y previamente a la tarea de las tarjetas, y a modo introductorio de este tipo de problemas, se desarrolló la tarea de los perros y los collares (Cañadas et al, 2015) con todo el grupo y sin instrucción previa. La investigadora 1 iba lanzando las preguntas de esta tarea introductoria, mientras la investigadora 2 organizaba los datos en la pizarra mediante una representación tabular.

Se les formularon las siguientes preguntas, las cuales iban respondiendo alzando la mano:

1. Si nos llega sólo un perrito, ¿cuántos collares necesitamos?

2. Si llegasen dos perritos, ¿cuántos collares necesitamos?
3. Si llegasen tres perritos, ¿cuántos collares necesitamos?
4. Si llegasen cinco perritos, ¿cuántos collares necesitamos?
5. Si llegasen diez perros, ¿cuántos collares necesitamos?
6. Y si llegasen veinte perros, ¿cuántos collares necesitamos?
7. Y si llevásemos cincuenta perros, ¿cuántos collares necesitamos?
8. En esta pregunta se les dice a ellas que digan un número muy alto y se pregunta usando este número.
9. Y si decimos un número que se llame "hasta el infinito y más allá" de perros, ¿cuántos collares necesitamos?
10. Y si ahora nuestro número es "cualquier número" de perros, ¿cuántos collares necesitamos?
11. Si al refugio de perros nos llegan Z perros, ¿cuántos collares necesitamos?
12. Si al refugio nos llegan T perros, ¿cuántos collares necesitamos?
13. Y si nos llegan N perros, ¿cuántos collares necesitamos?
14. ¿Cómo le explicaríais a mi amiga la cuidadora que para un número de perros que no sabemos cuál es, necesitamos tantos collares?

Tras esta breve introducción se puso en marcha el juego de las tarjetas. Se comenzó repartiéndolas al azar entre las alumnas, excepto una que no tenía ninguna solución escrita y que en el lado de la pregunta tenía la primera para que comenzara el juego la profesora con esta tarjeta.

A partir de aquí se comienzan a lanzar preguntas y las estudiantes dan las respuestas que ellas creen correctas argumentando en todo momento cada intervención que hacen. Cuando cada alumna dio su respuesta y leyó su pregunta, se lanzó la última pregunta a todas ya que nadie tenía una tarjeta con esa respuesta.

Esta información se ha recogido principalmente mediante la grabación, ya que a pesar de que se repartieron cuartillas para que anotaran sus respuestas, solamente tres alumnas lo hicieron, el resto dejaron la cuartilla en blanco. Las tres producciones se muestran en anexos.

d. Tipo de análisis

Se trata de una investigación exploratoria, ya que está centrada en examinar algo poco estudiado, con muchas dudas o que no se ha abordado con anterioridad, y descriptiva ya que se busca analizar una serie de características del pensamiento de los alumnos en edad de Educación Primaria.

Relacionado con esto último, se han analizado las respuestas de una muestra intencional de alumnas y las justificaciones que dieron en torno a ellas y se estableció que tipo de estrategia había usado cada una de ellas para resolver la pregunta dada.

B. *RESULTADOS:*

Las argumentaciones y respuestas de las alumnas se han analizado individualmente atendiendo en primer lugar al tipo de estrategia que usa para responder y en segundo lugar al tipo de pensamiento funcional que presenta. Esta información se ha recogido en una tabla general que se puede encontrar en el anexo 4 y se ha hecho atendiendo al siguiente esquema:

Tipos de pensamientos:

- Patrones recursivos.
- Covariacional.
- Correspondencia.

Estrategias:

- Estrategia de conteo.
- Respuesta directa.
- Estrategia recursiva.
- Estrategia operatoria.

Para el análisis detallado de las respuestas de las alumnas, a continuación describimos las categorías que se han utilizado para ello. Además tendremos en consideración lo que indican Blanton y Kaput (2011) acerca del pensamiento funcional, el cual implica construir y generalizar patrones y relaciones haciendo uso de diversas herramientas como la representación o la lengua.

En este análisis no se han tenido en cuenta las respuestas dadas a las preguntas de la introducción de la sesión ya que el propósito de esta tarea era el estudio de las respuestas que se daban al juego, introduciendo la tarea con un ejemplo que ayudara a las alumnas a contextualizarse en esta sesión y no todas dan respuestas en esta parte introductoria, por tanto no es de gran aportación para el estudio.

En el análisis detallado de las respuestas de las alumnas podemos encontrar en primer lugar las respuestas no correctas, incoherentes o las no respuestas. En este caso no se puede decir que las alumnas hayan empleado estrategias asociadas al pensamiento funcional. Algunos ejemplos de este tipo de respuestas son:

a. Cuando se realiza la pregunta: "¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la segunda parada?" la alumna 12 responde que cinco personas y no sabe explicar el porqué. Como se puede observar, este es un ejemplo de una respuesta no correcta, en la cual se ha usado la estrategia de respuesta directa, definida con anterioridad en el marco teórico.
b. Al realizar la pregunta de "si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada sale?", la alumna 9 responde "parada 99" y la explicación que da es "porque los otros se han bajado" y esta es una respuesta incoherente y que no implica el uso de pensamiento funcional.

También se han encontrado respuestas de alumnas que no eran correctas, pero el razonamiento si es bueno y sigue estrategias asociadas con el pensamiento funcional, la generalización o la construcción de patrones. A continuación se muestran algunos ejemplos de este tipo de respuestas:

a. Cuando se pregunta "¿cuántas personas van en el autobús al salir de la primera parada?", la alumna 13 responde "cualquier número más uno", lo cual indica que está comprendiendo la relación entre el número de parada y el número de personas, pero no responde un número concreto, que es lo que se estaba pidiendo, establece una relación entre variables e inicia un proceso de generalización. Por tanto esta alumna, a pesar de no responder correctamente, muestra evidencias de estar usando un pensamiento funcional.
b. La alumna 10 responde a la pregunta "si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van?", con "N+1", cuando la solución correcta sería N-1, pero esta alumna muestra capacidad de relacionar las variables, aunque no de manera correcta, y por tanto sí se puede decir que muestre evidencias de estar empleando un pensamiento funcional ya que establece una relación entre variables y una generalización del patrón establecido.

Siguiendo con el análisis detallado, pasamos a estudiar las respuestas correctas, y dentro de estas, las que se dan a preguntas directas y se han resuelto con estrategias de conteo, en este caso, haciendo una suma uno a uno de todas las personas que van en el autobús al pasar por las paradas. Algunos ejemplos de respuestas de alumnas que han utilizado estrategias de conteo para resolver las preguntas directas son:

a. En el caso de la alumna 17 al preguntarle cuántas personas van en el autobús al salir de la segunda parada, ella explica que van tres porque en la primera coge una, en la segunda otra y el conductor. En este caso se observa como recurre al conteo para averiguar la solución. Por tanto, esta alumna no muestra evidencias de estar empleando un pensamiento funcional en esta ocasión.
b. Lo mismo ocurre con las respuestas que dan las alumnas 4, 1, 16 y 8 en la primera parte del juego cuando se les pregunta cuántas personas van en el autobús al salir de las paradas 3, 4, 5 y 10.
c. Cuando se pregunta cuántas personas van en el autobús al salir de la parada 20 o números mayores, ya no encontramos respuestas en las que se emplee la estrategia del conteo.

En las preguntas inversas también podemos encontrar respuestas correctas en las que las alumnas muestran usar estrategias de conteo para resolver la pregunta. En este caso, las justificaciones que dan las alumnas, no muestran evidencias de estar empleando el pensamiento funcional, ya que la estrategia de conteo no se puede asociar a este al ser una estrategia que no requiere establecer una relación funcional, una generalización o un patrón que relacione las variables. Algunas de estas respuestas son:

a. Al preguntar de qué parada sale si van cinco personas en el autobús, la alumna 4 responde que de la cuarta parada porque "en la primera parada había recogido a una, en la segunda otra, en la tercera a otra y el conductor", de esta forma va contando las personas que se van montando en el autobús y realmente no muestra haber establecido alguna relación funcional entre las variables.
b. Esta misma situación se puede encontrar en la respuesta de la alumna 2 cuando se pregunta el número de parada que acaba de pasar el autobús si hay diez personas, ya que vuelve a hacer un conteo para dar la solución a esta pregunta. La respuesta de la alumna es: "parada 9. Porque en la primera parada ha recogido a una, en la segunda a otro, en la tercera a otro, en la cuarta a otro, en la quinta a otro, en la

sexta a otro, en la séptima a otro, en la octava a otro y en la novena y el conductor".

Para las preguntas inversas en las que se dice que van montadas 25, 37 y 52 personas, las respuestas que se dan ya no muestran ser resueltas por conteo, si no con estrategias operatorias. En primer lugar se muestran algunos ejemplos de respuestas de alumnas que han usado estrategias asociadas al uso del pensamiento funcional para las preguntas directas y a continuación se mostrarán los ejemplos de respuestas de esta misma condición pero a las preguntas inversas.

a. Esta situación se da para la pregunta de cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número treinta, ya que la alumna 11 responde que 31 porque "han recogido a treinta personas ya y el conductor que cuenta como otra persona que va en el autobús, porque es verdad, y entonces han recogido a treinta y una personas". En esta respuesta se puede observar que de nuevo vuelve a solventar mediante la estrategia operatoria.
b. Al llegar a la pregunta de cuántas personas van en el autobús al salir de cualquier número de parada, la alumna 13 responde que irán cualquier número de personas más uno "porque el conductor está en el autobús". En esta ocasión se puede observar como se ha establecido una generalización y se ha establecido una relación funcional entre el número de parada y el número de personas que van en el autobús. Por tanto esta alumna muestra evidencias de estar movilizando el pensamiento funcional.
c. En cuanto a las preguntas de cuántas personas van en el autobús al salir de la parada N y Z, las alumnas responden que irían N y Z personas respectivamente y el conductor que se representa sumándole uno. Aquí se puede observar que las alumnas están estableciendo un patrón y una relación entre el número de personas que van en el autobús y el número de parada, además de una relación entre esto y el lenguaje simbólico, de manera que se puede decir que estas alumnas (10 y 7) muestran evidencias de estar manifestando un pensamiento funcional.

En cuanto a las preguntas inversas se muestran algunos ejemplos donde se pone de manifiesto el pensamiento funcional en las alumnas al responder a estas preguntas usando estrategias asociadas a este. Se muestran unos ejemplos de estas respuestas de las alumnas:

a. La alumna 8, la alumna 16, no muestran explícitamente si han llegado a la solución correcta usando estrategias de conteo, de manera que se entiende que ha seguido la estrategia operatoria o un patrón recursivo, ya que ambas asocian el número de parada al número de personas y le suman uno. De manera que estas alumnas si muestran evidencias de comenzar a usar el pensamiento funcional. Las respuestas de estas alumnas 8 y 16 son respectivamente: "porque es donde coge a dos niñas y el conductor." y "pues la que ha entrado, que era una en cada parada, y el conductor"
b. Siguiendo con las preguntas inversas, encontramos que cuando se pregunta si van 24 y 52 personas en el autobús, se encuentran las respuestas siguientes:
    1. Alumna 14: "parada 24, porque han recogido a 24 y el conductor"
    2. Alumna 3: "de la parada 51, porque han recogido a 51 personas y el conductor".
c. Al lanzar la última pregunta al aire en la cual se cuestiona si el número de parada fuera N, cuál sería el número de personas que van. Aquí encontramos la respuesta de la alumna 11 responde que "N - 1 porque si el número de parada fuera N, sería N – 1 porque sería el número de personas N menos el conductor". Aquí vemos como esta alumna establece perfectamente la relación entre variables usando un pensamiento de correspondencia.

Con estas respuestas podemos ver que estas alumnas no han seguido estrategias de conteo, las estrategias utilizadas han sido las operatorias ya que establecen relación entre el número de pasajeros y el número de personas que van en el autobús. Por tanto estas alumnas sí muestran evidencias de estar empleando el pensamiento funcional para resolver estas cuestiones.

Por otro lado, de las alumnas que muestran evidencias de estar empleando el pensamiento funcional, se establece en este análisis qué tipo es el que se está empleando (patrones recursivos, covariacional o correspondencia) basándome en las estrategias usadas.

A continuación se muestra la única respuesta donde se manifiesta el pensamiento de patrones recursivos:

a. Alumna 8: a la pregunta "Si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada acaba de pasar?" responde de la segunda parada "porque es donde coge a dos niñas y el conductor, porque cuando pararon en la parada dos pues se subió una persona más", aquí se observa como la alumna se basa en el resultado anterior y le suma uno para obtener su solución. De manera que muestra de manera manifiesta el uso de un pensamiento de patrones recursivos para obtener este resultado.

Para el otro tipo de pensamiento manifestado por las alumnas (correspondencia) se muestran algunos ejemplos, en primer lugar de las preguntas directas:

a. Cuando se pregunta por el número de personas que van en el autobús al pasar la parada 30, la alumna 11 responde que 31, ya que "han recogido 30 personas ya y el conductor que cuenta como otra persona que va en el autobús, porque es verdad, y… y entonces han recogido a treinta y una personas".
b. Cuando se pregunta para cualquier número de parada, cuántas personas irían en el autobús, la alumna 13 nos respondió que "cualquier número más uno" porque "porque dice de cualquier parada" y más uno "porque el conductor está en el autobús".
c. En la pregunta "¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada N?" la alumna 10 responde "N + 1, porque han recogido a un número N de personas y el conductor que también está en el autobús". Y lo mismo ocurre al realizar esta misma pregunta pero con Z personas.

En cuanto a las preguntas inversas mostramos los siguientes ejemplos:

a. La alumna 14 responde a la pregunta inversa "si hay veinticinco personas en el autobús, ¿de qué parada sale?" con "de la parada veinticuatro, porque han recogido a veinticuatro personas y el conductor". Las alumnas responden para 37, 52 y 100 personas de manera muy similar a como ha respondido la alumna 14 a esta pregunta.
b. Al preguntar de manera inversa "si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van?", la alumna 11 respondió N – 1, "si en el autobús van… Emmmm. Si el número de parada fuera N, sería N – 1 porque sería el número de personas N menos el conductor".

Como se puede observar en estas respuestas, el razonamiento seguido muestra evidencias de haber puesto en marcha un pensamiento funcional por correspondencia, en el cual se identifica una correlación entre las variables de este juego. Todas estas alumnas fueron visiblemente capaces de establecer una relación entre el número de parada y el número de personas que viajaban dentro del autobús.

En el estudio se han recogido un total de 32 respuestas de las alumnas, de las cuales 25 fueron respuestas correctas, 4 respuestas incorrectas y sin mostrar pensamiento funcional, ya que eran incoherentes o respuestas directas sin justificación y por tanto no se tendrán en cuenta en este análisis, y por último, 3 respuestas eran incorrectas pero sí se fundamentaban en el pensamiento funcional. Por lo cual, de este total de respuestas, en cuanto al uso de estrategias y uso de pensamientos, siguiendo el esquema mostrado al principio de este apartado:

Tipos de pensamientos:

- Patrones recursivos: 1 respuesta
- Covariacional: Ninguna respuesta
- Correspondencia: 15 respuestas

Estrategias:

- Estrategia de conteo: 8 respuestas
- Respuesta directa: 11 respuestas
- Estrategia recursiva: 1 respuesta
- Estrategia operatoria: 15 respuestas

Para finalizar con el análisis de los datos recogidos se ha realizado una tabla donde se relacionan las diferentes respuestas recogidas con el tipo de pensamiento utilizado y mediante qué estrategia.

Tabla 1: Relación entre las estrategias y los tipos de pensamientos manifestados.

Estrategias / Tipos de pensamiento	Respuesta directa	Estrategia de conteo	Estrategia operatoria	Estrategia recursiva	Total
Patrones recursivos	0	0	0	1	1
Covariacional	0	0	0	0	0
Correspondencia	3	0	12	0	15
Total	11	8	12	1	

Analizando esta tabla observamos que la única respuesta en la que se usó la estrategia recursiva, también fue la única que mostró evidencias de estar empleando un pensamiento funcional de patrones recursivos. Así mismo, todas las respuestas en las que se empleó la estrategia operatoria, coinciden con las que mostraron evidencias de emplear un pensamiento funcional por correspondencia, por tanto se podría relacionar este tipo de estrategias con este tipo de pensamiento. Sin embargo, del total de respuestas directas (11) solamente 3 mostraron evidencias de estar empleando un pensamiento funcional por correspondencia, ninguna de estas respuestas se pudo asociar a un pensamiento de patrones recursivos o covariacional. En cuanto a las respuestas en las que se usó la estrategia de conteo (8), no se asocian con ningún tipo de pensamiento funcional, ya que es una estrategia meramente mecánica que no llega a establecer relaciones entre variables o patrones ni generalización. Por último observamos que el pensamiento covariacional no ha podido observarse en ninguna de las respuestas.

C. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES:

En este estudio hemos observado en primer lugar, que en cuanto a las alumnas que muestran evidencias de estar empleando un pensamiento funcional para resolver las cuestiones que se plantean, es preciso observar las explicaciones que dan a cada solución que proponen, ya que si han llegado a esa solución con estrategias como el conteo o la respuesta directa, es difícil asociar a un empleo del pensamiento funcional ya que ninguna de estas dos estrategias requieren una generalización o uso de patrones. Sin embargo, al usar las estrategias recursiva y operatoria, sí nos indica que esa alumna muestra evidencias de estar empleando el pensamiento funcional en la resolución de la pregunta, ya que, por un lado la estrategia recursiva se basa en el resultado anterior para averiguar el siguiente, por tanto, estableciendo un patrón; y por otro lado, la estrategia operatoria establece una generalidad para el caso y permite operar con cualquier cantidad que se precise, permitiendo averiguar la solución a la cuestión con una operación. Es preciso destacar que la mayor parte de las respuestas obtenidas se resolvieron mediante estrategias operatorias, las cuales están asociadas al pensamiento funcional, y este hecho puede llegar a justificar la defensa de la introducción del álgebra en alumnos de primaria.

En segundo lugar es importante destacar que en cuanto al pensamiento covariacional, a pesar de haber encontrado numerosos estudios que justifican su presencia en alumnos de Educación Primaria, en el caso que nos atañe no se ha manifestado en ninguna respuesta de las recogidas en la tarea del juego de las tarjetas.

Para concluir creemos necesario exponer que en esta tarea propuesta a las alumnas del colegio de prácticas de ambas investigadoras, se han observado manifestaciones del pensamiento funcional bastante satisfactorias ya que cuando empezamos a conocer el tema, parecía algo muy superfluo o que era dedicado a un tipo concreto de alumnos, los cuales no tendrían problemas en resolver este tipo de problemas, sin embargo hemos podido comprobar que en una clase con alumnas de capacidades muy diferentes, la mayoría ha sido capaz de comprender el problema, resolver bien y por último poner en marcha el pensamiento funcional para poder llegar a la solución. Ha sido una experiencia muy satisfactoria y sorprendente, incluso para la maestra de esta clase, que se sorprendió y descubrió nuevas facetas de la didáctica de la matemática para ella antes desconocidas, ya que algunas alumnas (que no suelen destacar por sus destrezas matemáticas), fueron capaces de mostrar evidencias de estar empleando un pensamiento funcional. De esta forma cumplimos nuestro objetivo marcado en un principio de la investigación y creemos necesario que se implemente el trabajo en el aula de forma lúdica un contenido tan desconectado de la Educación Primaria como es el álgebra, y desarrollar el pensamiento funcional en los alumnos para poder potenciar capacidades que ya poseen los alumnos pero de alguna manera están en estado latente.

Por tanto creemos importante y de gran ayuda educativa que se vaya introduciendo la enseñanza del álgebra en las edades de infantil y primaria para que se puedan desarrollar las capacidades de los alumnos y que el paso al grado superior de aprendizaje del álgebra no sea tan brusco.

D. *REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:*

Barbosa, A. (2011). *Patterning problems: sixth graders' ability to generalize*. Trabajo presentado en el CERME 7, Rzeszów, Polonia.

Blanton, M. .y Brizuela, B. M (2014).El desarrollo del pensamiento algebraico en niños de escolaridad primaria. *Revista de Psicología (UNLP)*, Nº 14, p. 37-57. Disponible en: http://revistas.unlp.edu.ar/RPSEUNLP.

Blanton, M., y Kaput, J. (2004). *Elementary grades students' capacity for functional thinking. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2, (pp. 135-142). Bergen, Norway: Bergen University College.

Blanton, M., y Kaput, J. (2011) Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. En *Early Algebraization: Advances in Mathematics Education,* eds J. Cai, E. Knuth, Springer-Verlag, Berlin.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5.* Essential Understanding Series. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Boletin Oficial del Estado (2014). *Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero por el que se establece el currículo básico de la educación primaria.* (Vol. BOE Nº52, pp. 19387-19389) Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Brizuela, B. y Schliemann, A. (2003). Fourth-graders solving equations. En N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol. 2, pp. 137-143). Honolulu, HI: College of Education. University of Hawaii.

Brizuela, B.M. , Martinez, M.V. , and Cayton-Hodges, G.A. (201 3). The Impact of Early Algebra: Resul ts from a Longitudinal Intervention. *Journal ofResearch in Mathematics Education*, 2 (2), (pp. 209-241).

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Cañadas, M. C., Merino, E. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cañadas, M.C., Molina, M., del Río, A. y Moreno, A. (2015) Tareas para promover el pensamiento funcional. Una propuesta para primer ciclo de educación primaria. Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática. En prensa

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Reston, VA: NCTM e IAP.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: ICE UB/Horsori.

Espinosa, M. E. (2005). Los sistemas de representación en la solución de problemas de algebra elemental. *ALAMMI, 2*.

Fernández, C., Molina, M., y Planas, N. (eds.), 2015. *Investigación en Educación Matemática XIX*. Alicante: SEIEM.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Kaput, J.(1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning?. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NY: Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group.

Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). London: Kluwer Academic Publishers.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., y Gowar, N. (1985). *Routes to/Roots of Algebra*. The Open University Press, Walton Hall, Milton Keynes.

Merino, E. (2012) *Patrones y representaciones de alumnos de 5º de Educación Primaria en una tarea de generalización.* (Trabajo Fin de Máster inédito). Universidad de Granada, Granada.

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

NCTM (2003). Principios y estándares para la Educación Matemática. Granada: SAEM THALES.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

Smith, E. (2003). Statis and change: Integrating patterns, Functions, and algebra throughout the k-12 curriculum. En J. Kilpatrick, W. Martin, y D. Shifter (Eds.), *A* *research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 136-150). Reston, Virginia: NCTM.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportacciones de la investigación. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* vol. 77, 5-34.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*, 147-164.

Yáñez, J.C. (2015)*Pensamiento funcional puesto de manifiesto por alumnos de 5º de educación primaria.* (Trabajo Fin de Máster inédito). Universidad de Granada, Granada.

E. ANEXOS:

Anexo 1: Transcripción

Investigadora 2: Este juego consiste en que vosotras tenéis en la tarjeta, en el lado que estáis ahora mismo viendo, la respuesta a una pregunta que tiene otra niña que no se sabe quién. Entonces la seño va a empezar haciendo la primera pregunta. Ella también tiene una pregunta, también juega. Entonces ella va a empezar haciendo su pregunta. Y vosotras vais a mirar atentamente las respuestas que tenéis y quien crea que tiene la respuesta, levanta su mano, ¿vale? Aquí si vamos a ir haciendo en el papel lo que vosotras creáis que tenéis que hacer. Si creéis que tenéis que hacer una cosa así (señalando la tabla de la pizarra), pues hacedla. Si no, lo que vosotras queráis para averiguar las respuestas. Porque a lo mejor una niña levanta la mano y cree que es su respuesta, pero no es su respuesta, tenéis que pensarlo muy bien. Entonces, nadie le da la vuelta. Vamos a ponernos en situación. Vosotras venís algunas en ruta (autobús escolar) aquí al colegio, ¿verdad?

Alumnas: Sí.

Alumna 6: Yo vengo en ruta.

Investigadora 2: Y el autobús va lleno de gente, ¿no? Pero no se coge toda la gente a la vez, sino que va parando y va cogiendo gente. Nosotras nos vamos a imaginar que tenemos un autobús enorme, todo lo grande que queramos. ¿Qué es lo que pasa? Que ese autobús lleva su conductor todo el rato y en cada parada que hace coge a una niña. Entonces, vamos a ver qué pasa con esto… Seño adelante.

Profesora: ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la primera parada?

Investigadora 2: ¿Quien cree que tiene esa respuesta?

Investigadora 1: Todas miramos nuestra respuesta, y quien cree que tiene la respuesta a esa pregunta, levanta su mano.

Investigadora 2: Vamos a imaginarnos la primera parada, el autobús enorme y el conductor, y llega a la primera parada. Cuando sale de la primera parada, ¿cuántas personas van en el autobús? Hemos dicho que en cada parada coge a una niña. ¿Quién tiene esa respuesta? ¿Tú crees que la tienes, Alumna 13? Cuéntame.

Alumna 13: Cualquier número más uno.

Investigadora 2: No exactamente, yo he preguntado cuántas personas van en el autobús, un número exacto.

Investigadora 1: Si en cada parada coge a uno. En cada parada solo se puede subir una.

Investigadora 2: Una niña en cada parada, y tenemos que contar que el conductor siempre va en el autobús.

Investigadora 1: Entonces llega la primera parada y se sube una persona.

Investigadora 2: ¿Quién lo puede tener?, o si no, ¿quién lo puede saber?

Alumna 11: En la primera parada van dos personas.

Investigadora 2: ¿Quién tiene la solución de dos personas? (levantan la mano) Esa era la solución, dos personas. Muy bien Alumna 11. Esta era de prueba. Entonces ahora quien tiene esa solución le da la vuelta a la tarjeta y lee su pregunta.

Alumna 20: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la segunda parada?

Investigadora 2: Por aquí ya van levantando la mano, y por ahí también. No le des la vuelta a la tarjeta Alumna 18. ¿Tú crees que la tienes, Alumna 12? ¿Has levantado la mano, no?

Alumna 12: Si

Investigadora 2: A ver, ¿cuál es tu solución?

Alumna 12: Cinco personas.

Investigadora 2: No. ¿Por qué piensas que cinco personas?

Alumna 12: No se.

Alumna: Yo no la tengo, pero la sé.

Investigadora 2: No, quiero ver primero quién la tiene. Estamos en nuestro autobús, con nuestro conductor, hemos parado en la primera parada y van dos personas, que tenía ella. Y vamos a la siguiente parada. ¿Cuántas personas van ahora en el autobús?

Alumna 15: Cuatro personas.

Investigadora 2 y otras alumnas: No

Alumna 7: Te estás acercando.

Investigadora 2: ¿Por qué piensas que son cuatro personas? Explícamelo.

Alumna 15: Porque en la primera parada han recogido dos, y en la segunda dos.

Investigadora 2: No, en cada parada cogen a una niña y el conductor que siempre va en el autobús. Entonces si vamos en el autobús con nuestro conductor y hemos parado en la primera parada y hemos cogido una niña, hemos parado en la segunda parada y cogemos otra niña. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la segunda parada? ¿Tú crees que lo tienes? Cuéntame.

Alumna 17: Tres.

Investigadora 2: Tres personas, ese sí. ¿Por qué van tres personas?

Alumna 17: Porque en la primera parada coge una.

Investigadora 2: en la segunda, ¿cuántas coge?

Alumna 17: Una.

Investigadora 2: Una, siempre una. ¿Más?

Alumna 17: Y el conductor.

Investigadora 2: Y el conductor, muy bien. Venga, ahora sí, lee tu pregunta.

Alumna 17: ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la tercera parada?

Investigadora 2: Después de salir de la tercera parada. Recordamos: autobús, conductor, en cada parada una niña y hemos salido de la tercera parada. ¿Cuántas personas van en el autobús? ¿Tú crees que tienes la solución? ¿Alguien más?

Alumnas: Yo lo sé, pero no la tengo.

Investigadora 2: ¿Alguien más? Pensadlo bien, os dejo un poquillo para que podáis pensarlo.

Alumnas: Yo lo sé, pero no la tengo.

Investigadora 2: Alumna 4.

Alumna 4: Cuatro.

Investigadora 2: Cuatro, ¿qué?

Alumna 4: Cuatro personas.

Investigadora 2: Cuatro personas, explícame porqué.

Alumna 4: Porque en la primera parada ha recogido a una, en la segunda a otra y en la tercera al conductor.

Investigadora 2: No, en la tercera no recoge al conductor. El conductor ya está en el autobús. Empieza de cero, venga. El autobús, ¿quién va en el autobús?

Alumna 4: El conductor.

Investigadora 2: Ahora hace la primera parada y ¿coge?

Alumna 4: Una niña.

Investigadora 2: Después.

Alumna 4: En la siguiente parada a otra y en la siguiente parada a otra. Y ya…

Investigadora 2: Ya tenemos tu solución. Venga, lee tu pregunta.

Alumna 4: Si ha…

Investigadora 2: ¡Ah! A ver, Alumna 4, lee tu solución otra vez. ¿Qué ha pasado? Que el número lo has dicho bien, pero lo que pone al lado del número no. Léelo para que tus compañeras lo sepan.

Alumna 4: Parada 4.

Investigadora 2: Esa no es la solución. ¿Cuál será la solución?

Alumna 1: Yo lo sé.

Investigadora 2: Alumna 15, ¿cuál es la solución?

Alumna 15: Personas

Investigadora 2: Personas, pero ¿cuántas?

Alumna 15: Cuatro.

Investigadora 2: Ahora sí. Léeme tu pregunta.

Alumna 15: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la cuarta parada?

Investigadora 2: ¿Quién cree que tiene la solución? ¿Tú crees que la tienes? A ver, pensad un poquito. Si necesitáis escribir, id escribiendo. Intentad hacer una cosa parecida a esta (tabla de la pizarra), a ver qué va saliendo. Tened cuidado que no ponga un número y parada, que ahora estamos pensando en personas, cuántas personas. Mirad bien vuestras soluciones. Vamos a pensar, que este juego es de pensar. Si vamos en nuestro autobús grandísimo y llevamos nuestro conductor, que no se nos olvide el conductor, y estamos ya en la cuarta parada. ¿Cuántas niñas recoge por parada hemos dicho?

Alumnas: Una.

Investigadora 2: Una niña por parada. Entonces si estamos en la cuarta parada, ¿cuántas personas habrá? ¿Tú lo tienes o lo sabes?

Alumna 16: Lo sé.

Investigadora 2: Lo sabes, espérate. En la tarjetita tiene que poner personas, no parada. Tiene que haber un número de personas, ¿qué número de personas creéis que puede haber? ¿Quién cree que lo sabe?

Alumna 1: Cinco personas.

Investigadora 2: ¿Por qué?

Alumna 1: Porque el conductor, en la primera parada que han recogido a una, en la segunda parada que han recogido a otra, en la tercera parada que han recogido a otra y en la cuarta parada que han recogido a otra.

Investigadora 2: Entonces tiene que haber…

Alumna 1: Cinco personas.
Investigadora 2: ¿Y quién tiene la tarjeta de cinco personas? Alumna 12. Lee tu pregunta.
Alumna 12: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la quinta parada?
Investigadora 2: Levanta la mano solo la que crea que tiene la solución en su tarjeta. ¿Tú crees que la tienes? No pasa nada si te equivocas. Cuéntame.
Alumna 16: Seis personas.
Investigadora 2: ¿Por qué?
Alumna 16: Porque en la primera parada han recogido a una, en la segunda a otra, en la tercera a otra, en la cuarta a otra y en la quinta a otra y el conductor.
Investigadora 2: Y el conductor seis. Muy bien. Lee tu preguntilla. Las demás mirando las soluciones.
Alumna 16: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la décima parada?
Investigadora 2: De la décima parada, vamos a pensarlo. ¿Cuántas personas van en el autobús después de la décima? La décima es la parada número…. ¿qué parada es?
Alumna 5: Diez.
Investigadora 2: Cuando sale el autobús de la parada número diez, ¿cuántas personas irán? ¿Tú crees que lo tienes?
Alumna 8: Once personas.
Investigadora 2: Once personas, muy bien. Cuéntame porqué once personas.
Alumna 8: Porque en la primera parada una persona, en la segunda otra, en la tercera otra, en cuarta otra, en la quinta otra, en la sexta otra, en la…
Investigadora 2: Parada siete.
Alumna 8: séptima otra, en la octava otra, en la novena otra, en la decima otra y el conductor.
Investigadora 2: Y el conductor once. Muy bien. Lee tu preguntilla.
Alumna 8: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada número veinte?
Investigadora 2: Después de salir de la parada número veinte, ¿cuántas personas van en el autobús? En la tarjeta pondrá un número y personas. ¿Tú lo sabes o lo tienes? Espérate, primero quiero saber quién lo tiene. Alumna 8, ¿qué parada era la tuya?
Alumna 8: Veinte.
Investigadora 2: La parada veinte. ¿Cuántas personas irán en el autobús después de salir de la parada número veinte? ¿Lo tienes, Alumna 13, o lo sabes?
Alumna 13: Lo sé.
Investigadora 2: No, quiero que levante la mano quien lo tiene. ¿Tú crees que lo tienes Alumna 1?
Alumna 1: veintiuna personas.
Investigadora 2: Veintiuna personas, explícame porqué.
Alumna 1: Porque el conductor cuenta por una.
Investigadora 2: Porque el conductor cuenta por una, ¿y qué?
Alumna 1: Que han recogido veinte personas más.
Investigadora 2: que han recogido veinte personas más. Muy bien. Lee tu pregunta.

Alumna 1: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada número treinta?

Investigadora 2: Después de salir de la parada número treinta. ¿Tú crees que lo tienes, Alumna 7, o lo sabes?

Alumna 7: Lo sé.

Investigadora 2: Pues espérate. ¿Quién cree que lo tiene? Parada número treinta, ¿cuántas personas? Alumna 11, ¿tú crees que lo tienes, o lo sabes?

Alumna 11: Sí, lo tengo. Treinta y una personas.

Investigadora 2: Treinta y una personas, ¿por qué?

Alumna 11: Porque han recogido a treinta personas ya y el conductor que cuenta como otra persona que va en el autobús, porque es verdad, y…

Investigadora 2: ¡Pues claro que es verdad chiquilla!

Alumna 11: Y entonces han recogido a treinta y una personas.

Investigadora 2: Treinta y una personas. Bien. Lee tu preguntilla.

Alumna 11: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada número cincuenta?

Investigadora 2: Después de salir de la parada número cincuenta. Alumna 2, ¿tú crees que tienes la respuesta, o lo sabes? ¿La tienes? Dímela.

Alumna 2: Cincuenta y una personas.

Investigadora 2: Cincuenta y una personas. ¿Por qué?

Alumna 2: Porque han recogido cincuenta niñas más el conductor.

Investigadora 2: Muy bien, lee tu pregunta. Todas atentas a ver quién tiene la solución a esa pregunta. Empieza.

Alumna 2: ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número cien?

Investigadora 2: De la parada número cien.

Alumna 6: ¡Yo, yo, yo, yo!

Investigadora 2: He visto una mano muy rápida por aquí. ¿Tú crees que la tienes? Cuéntame Alumna 6.

Alumna 6: Ciento uno.

Investigadora 2: Ciento uno, ¿qué?

Alumna 6: Ciento uno personas.

Investigadora 2: ¿Por qué?

Alumna 6: Porque han cogido cien personas más el conductor. Ciento uno porque si no, ¿cómo anda el autobús?

Investigadora 2: Porque si no, ¿cómo anda el autobús? Es que hay que ver, ¿eh? Muy bien. Lee tu preguntilla.

Alumna 6: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de cualquier número de parada?

Investigadora 2: Cuántas personas van en el autobús después de salir de cualquier número de parada. ¿Quién cree que tiene la respuesta? ¿Tú crees que la tienes Alumna 13?

Alumna 13: Sí.

Investigadora 2: Cuéntame.

Alumna 13: Cualquier número más uno.

Investigadora 2: Cualquier número más uno, ¿por qué?
Alumna 13: Porque dice de cualquier parada.
Investigadora 2: Y, ¿por qué más uno?
Investigadora 2: Piénsalo, si lo estás diciendo bien. Porque sale de cualquier parada, entonces llevará cualquier número de personas, pero ¿por qué más uno?
Alumna 13: Porque el conductor está en el autobús.
Investigadora 2: Porque el conductor está en el autobús, ¡claro hija mía! Lee tu pregunta.
Alumna 13: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada N?
Investigadora 2: De la parada N, ¿cuántas personas irán en el autobús después de salir de la parada N? ¿Tú crees que la tienes Alumna 10? Cuéntame
Alumna 10: N + 1
Investigadora 2: N + 1, ¿por qué?
Alumna 10: Porque han recogido a un número N de personas y el conductor que también está en el autobús.
Investigadora 2: Siempre está en el autobús, ¿no? Muy bien. Lee tu preguntilla.
Alumna 10: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada Z?
Investigadora 2: ¿Cuántas personas van en el autobús después de salir de la parada Z? Pensadlo, pensadlo.
Alumna: Yo ya lo sé.
Alumna 7: ¡Yo la tengo!
Investigadora 2: ¿Tú crees que la tienes, Alumna 7?
Alumna 7: Sí.
Investigadora 2: Cuéntame.
Alumna 7: Z + 1 personas tengo yo.
Investigadora 2: Z + 1 personas.
Alumna 7: Sí, porque el conductor también va y han cogido a Z personas.
Investigadora 2: Muy bien, Alumna 7, muy bien. Léeme tu preguntilla. Bueno, a mí y a todas.
Alumna 7: Si en el autobús van dos personas, ¿de qué parada sale?
Investigadora 2: ¡Oh!, hemos cambiado. Ahora nos dice que si hay dos personas en el autobús, ¿de qué parada acaba de salir?
Alumna: yo lo sé
Investigadora 2: ¿Quién cree que lo tiene? No quien lo sepa, ¿quién cree que lo tiene? ¡Alumna 5!
Alumna 5: Parada uno.
Investigadora 2: Parada uno, ¿por qué?
Alumna 5: Porque…
Alumnas: ¡Seño! (levantando la mano)
Investigadora 2: ¿Por qué, primor? Si hay dos personas en el autobús, ¿por qué está en la parada uno? Si lo has dicho bien, ¿qué dos personas son esas?
Alumna 5: El…
Alumna 16 (susurrando): Yo lo sé.
Investigadora 2: Ayúdale, Alumna 16.

Alumna 16: Pues la que ha entrado, que era una en cada parada, y el conductor.
Investigadora 2: La que ha entrado que estaba, ¿en qué parada estaba esa niña?
Alumna 16: En la uno.
Investigadora 2: ¡En la uno! ¿Más?
Alumna 16: El conductor.
Investigadora 2: El conductor. Lee tu pregunta, Alumna 5.
Alumna 5: Si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada sale?
Investigadora 2: Si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada acaba de salir? Tres personas en el autobús. ¿Quién cree que tiene la respuesta? Que levante la mano sólo quien crea que tiene la respuesta. (Muchas alumnas levantan la mano) Yo sé que ya muchas la sabéis, pero quiero solamente quien crea que tiene la respuesta. ¿Cuántas personas van en el autobús?
Alumna 5: Tres.
Investigadora 2: Tres. Tres personas en el autobús, ¿de qué parada acaba de salir? ¿Tú crees que lo tienes, Alumna 9?
Alumna 9: Sí.
Investigadora 2: A ver.
Alumna 9: Parada 99.
Investigadora 2: ¿Parada 99?
Investigadora 2 y alumnas: No.
Investigadora 2: ¿Por qué piensas que es parada 99?
Alumna 9: Porque los otros se han bajado.
Investigadora 2: Porque los otros se han bajado. Puede ser, puede ser, pero no, eso no es. Si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada acaba de pasar? ¿Tú crees que lo tienes o que lo sabes?
Alumna 18: Lo sé.
Investigadora 2: Yo sé que lo sabes, pero quiero quien lo tenga. ¿Tú crees que lo tienes, o lo sabes?
Alumna 4: Lo tengo.
Investigadora 2: ¿Lo tienes? ¿De qué parada acaba de bajar? Van tres personas en el autobús. ¿Cuál tienes, qué solución tienes? (La alumna mueve la cabeza diciendo que no, y tapa la respuesta) ¿Te lo has pensado mejor?
Alumna 4: Sí. Parada 4.
Investigadora 2: ¿Parada 4?
Investigadora 2 y alumnas: No.
Alumnas: Yo lo sé, yo lo sé.
Investigadora 2: ¿Tú crees que lo tienes o lo sabes? ¿Quién cree que lo sabe? ¿Tú crees que lo sabes? Cuéntame, Alumna 8.
Alumna 8: De la segunda parada.
Investigadora 2: De la segunda parada, muy bien. ¿Por qué de la segunda parada, de la parada número dos?
Alumna 8: Porque es donde coge a dos niñas y el conductor.

Investigadora 2: Y el conductor. ¿Quién tiene la segunda parada? Pero si lo tenías tú (dirigiéndose a Alumna 8). Parada dos, claro. Lo tenías tú, primor, ¡y lo sabías! Explícame por qué van tres personas en el autobús en la segunda parada.

Alumna 8: Porque cuando pararon en la parada dos pues se subió una persona más.

Investigadora 2: Entonces, ¿cuántas personas van?

Alumna 8: tres.

Investigadora 2: ¿Por qué?

Alumna 8: Porque si en la parada uno recoge a una persona y en la parada dos recoge a otra persona, van tres. Dos más el conductor.

Investigadora 2: Van tres, muy bien. Lee tu pregunta. Todas atentas a ver qué nos dice ahora esta pregunta.

Alumna 8: Si hay cinco personas en el autobús, ¿de qué parada sale?

Investigadora 2: Cinco personas en el autobús, cinco. ¿De qué parada sale? ¿Tú lo sabes o lo tienes?

Alumna 7: Lo sé.

Investigadora 2: Espera. ¿Tú lo sabes, Alumna 4, o lo tienes?

Alumna 4: Lo tengo.

Investigadora 2: Cuéntame Alumna 4.

Alumna 4: Porque…

Investigadora 2: No, pero, ¿cuál es tu solución?

Alumna 4: Parada cuatro.

Investigadora 2: Parada cuatro, muy bien. ¿Por qué parada cuatro?

Alumna 4: Porque en la primera parada había recogido a una, en la segunda otra, en la tercera a otra y el conductor.

Investigadora 2: Y la cuarta parada te la has olvidado. Primera parada a una, es lo que me has dicho, segunda parada a otra, tercera parada a otra y el conductor. Pero tú tienes parada cuatro y hemos dicho cinco personas. Se te ha olvidado decir una, ¿no? Se te ha olvidado, ¿el qué?

Alumna 4: Una parada.

Investigadora 2: Una parada, muy bien. Lee tu preguntilla, ahora sí.

Alumna 4: Si hay diez personas en el autobús, ¿de qué parada sale?

Investigadora 2: ¿Cuántas personas?

Alumna 4: Diez.

Investigadora 2: Diez personas. Si hay diez personas en el autobús, ¿de qué parada está saliendo ese autobús? ¿Tú crees que lo tienes? Cuéntame Alumna 2.

Alumna 2: Parada nueve.

Investigadora 2: Muy bien, parada nueve.

Alumna 2: Porque en la primera parada ha recogido a una, en la segunda a otro, en la tercera a otro, en la cuarta a otro, en la quinta a otro, en la sexta a otro, en la séptima a otro, en la octava a otro y en la novena y el conductor.

Investigadora 2: Entonces, ¿cuántos suman todos?

Alumna 2: Nueve.

Investigadora 2: Nueve. Lee tu preguntilla.

Alumna 2: Si hay veinticinco personas en el autobús, ¿de qué parada sale?

Investigadora 2: ¡Madre mía!, ¡veinticinco personas en el autobús llevamos ya! ¿De qué parada puede salir si llevamos veinticinco personas? Cuéntame Alumna 14.
Alumna 14: De la parada veinticuatro.
Investigadora 2: De la parada veinticuatro, explícame porqué.
Alumna 14: Porque han recogido a veinticuatro personas y el conductor.
Investigadora 2: A veinticuatro personas han recogido y el conductor. Muy bien. Léeme, a mí y a todas, tu preguntilla.
Alumna 14: Si hay treinta y siete personas en el autobús, ¿de qué parada sale?
Investigadora 2: Treinta y siete personas en el autobús, ¿de qué parada sale si van treinta y siete personas en el autobús? ¿Tú crees que lo tienes o lo sabes?
Alumna 18: Lo sé.
Investigadora 2: No, quiero quien lo tenga. ¿Tú crees que lo tienes?
Alumna 12: No.
Investigadora 2: No. Si van treinta y siete personas en el autobús, ¿de qué parada ha salido? ¿Quién cree que lo tiene?, ¿tú crees que lo tienes Alejandra?
Alumna 19: Sí.
Investigadora 2: ¿Qué parada?
Alumna 19: Parada treinta y seis.
Investigadora 2: Parada treinta y seis, ¿por qué?
Alumna 19: (silencio)
Investigadora 2: ¿Te echa una manilla la otra Alumna 10?
Alumna 19: (asiente)
Alumna 10: Porque han recogido treinta y cinco personas y….
Investigadora 2: Hemos dicho que van treinta y siete personas y que estamos en la parada treinta y seis, ¿por qué?
Alumna 10: Porque en la parada treinta y seis han recogido treinta y seis personas y el conductor treinta y siete.
Investigadora 2: Muy bien, lee tu pregunta Alumna 19.
Alumna 19: Si hay cincuenta y dos personas en el autobús, ¿de qué parada sale?
Investigadora 2: ¿Cuántas personas?
Alumna 19: Cincuenta y dos.
Investigadora 2: Si hay cincuenta y dos personas en el autobús, cincuenta y dos personas en el autobús, ¿de qué parada sale? ¿Lo sabes, o crees que lo tienes?
Alumna 3: Lo tengo.
Investigadora 2: ¿Lo tienes? A ver, cuéntame.
Alumna 3: De la parada cincuenta y uno.
Investigadora 2: De la parada cincuenta y uno, muy bien. ¿Por qué?
Alumna 3: Porque han recogido a cincuenta y un personas y el conductor.
Investigadora 2: Han recogido a cincuenta y una personas más el conductor. Muy bien. Lee tu preguntilla.
Alumna 3: Si hay cien personas en el autobús, ¿de qué parada sale?
Investigadora 2: Si hay cien pers… ¡Uy, qué mano más rápida por aquí! Si hay cien personas en el autobús, ¿de qué parada sale? ¿Tú crees que lo tienes, o que lo sabes?

Alumna 9: Lo tengo.
Investigadora 2: Lo tienes, cuéntame.
Alumna 9: Parada noventa y nueve.
Investigadora 2: Parada noventa y nueve, muy bien. ¿Por qué?
Alumna 9: Porque han recogido noventa y nueve personas más el conductor.
Investigadora 2: Porque han recogido noventa y nueve personas más el conductor. Piénsalo. Si estás en la parada noventa y nueve… ¡Ay, si lo has dicho bien, hija, perdón! Lee tu preguntilla. ¿Queda alguien con tarjeta?
Alumna 9: Si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van?
Investigadora 2: Mirad, esta pregunta ya no tiene ninguna la solución. Quiero que la penséis muy bien, muy bien. Alumna 9 la va a repetir, ¿vale?
Alumna 9: Si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van?
Investigadora 2: Si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van? ¿Tú crees que lo sabes Alumna 10?
Alumna 10: Que lo tengo.
Investigadora 2: ¡Ah!, ¿que lo tienes? No sabía que había alguien con esa solución.
Alumna 10: N + 1.
Investigadora 2: No, tú ya habías dicho tu solución, ¿no?
Alumna 10: Es verdad.
Investigadora 2: Ya todas hemos dicho la solución. Entonces como ya todas hemos dicho la solución, esta pregunta es para terminar., ¿vale? Pensadla bien, si no la sabéis no pasa nada. Si el… Repite Alumna 9.
Alumna 9: Si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van?
Investigadora 2: Si el número de parada fuera N, ¿cuál sería el número de personas que van en el autobús? ¿Quién cree que lo sabe? ¿Tú crees que lo sabes, Alumna 13?
Alumna 13: Sí.
Investigadora 2: ¿Cuál?
Alumna 13: N más una persona.
Investigadora 2: N más una persona, no exactamente. ¿Alguien? Alumna 11.
Alumna 11: N menos una persona.
Investigadora 2: N menos una persona, muy bien. ¿Por qué? Cuéntame porqué.
Alumna 11: Porque si en el autobús van N personas menos el conductor…
Investigadora 2: Empieza de cero. N menos uno, vale.
Alumna 11: Si en el autobús van… Emmmm. Si el número de parada fuera N, sería N – 1 porque sería el número de personas N menos el conductor.
Investigadora 2: Muy bien, perfecto. Hemos terminado.
Investigadora 1: Muchísimas gracias a todas.

Anexo 2: Imagen de preguntas y respuestas de la tarea de las tarjetas

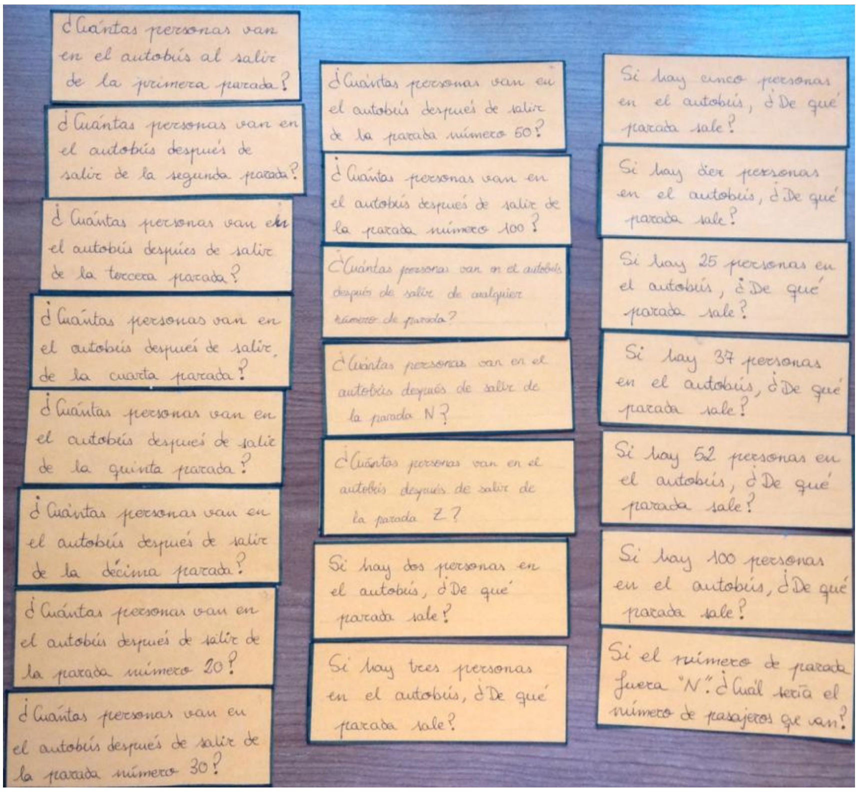


Imagen 3: Reversos de las tarjetas

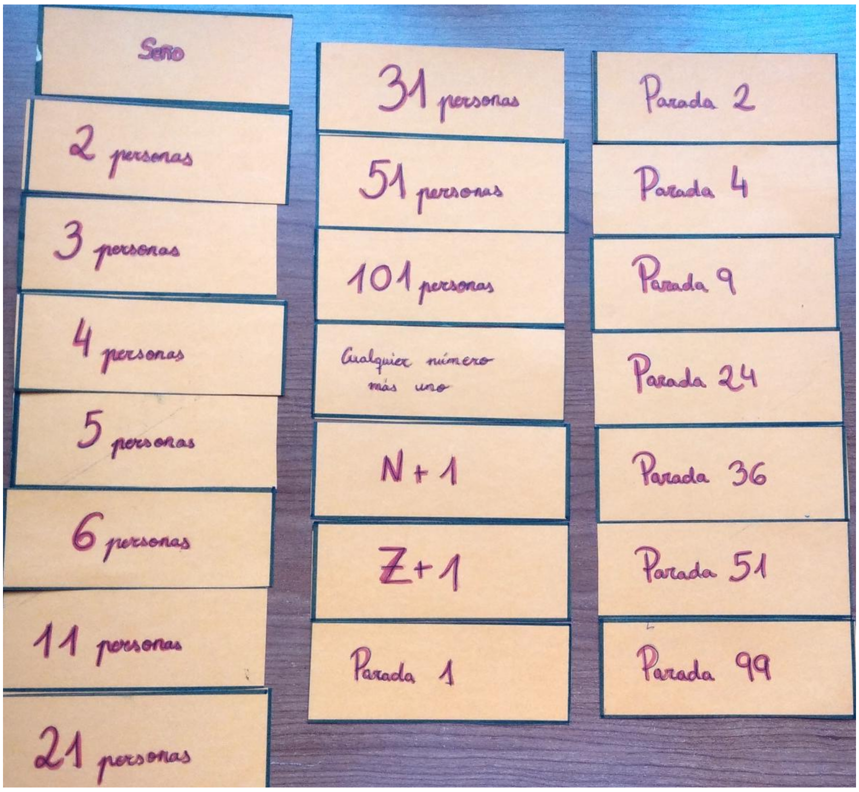


Imagen 4: Anverso de las tarjetas

Anexo 3: Producciones de las representaciones tabulares de las alumnas

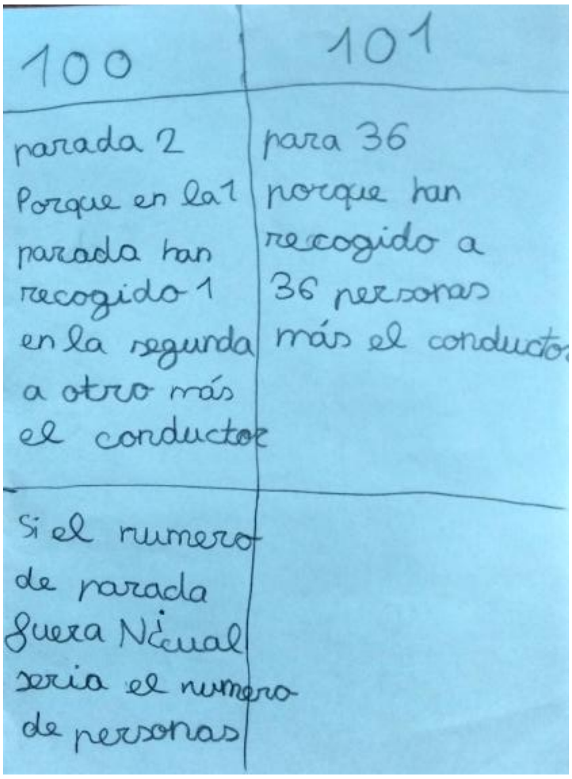


Imagen 5: Producción de la alumna 3.

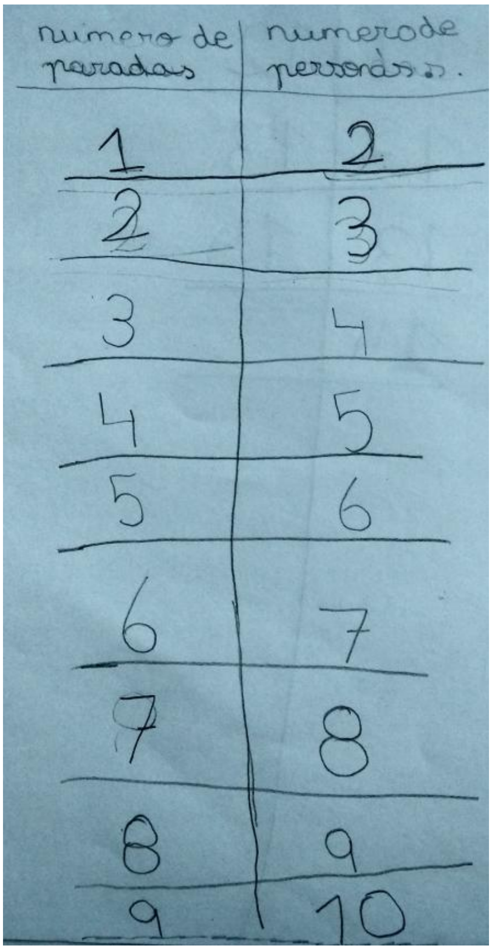


Imagen 6: Producción de la alumna 1

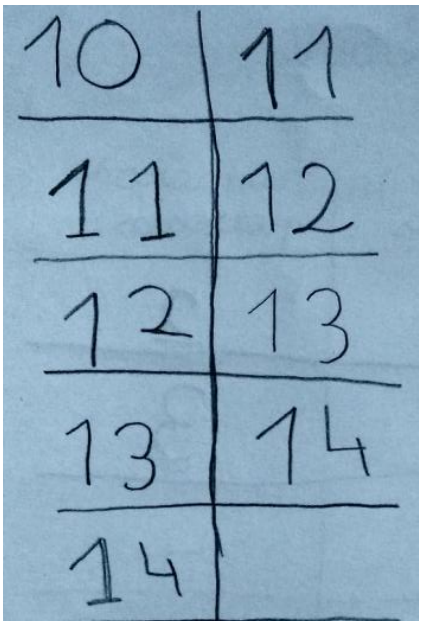


Imagen 7: Producción de la alumna 1

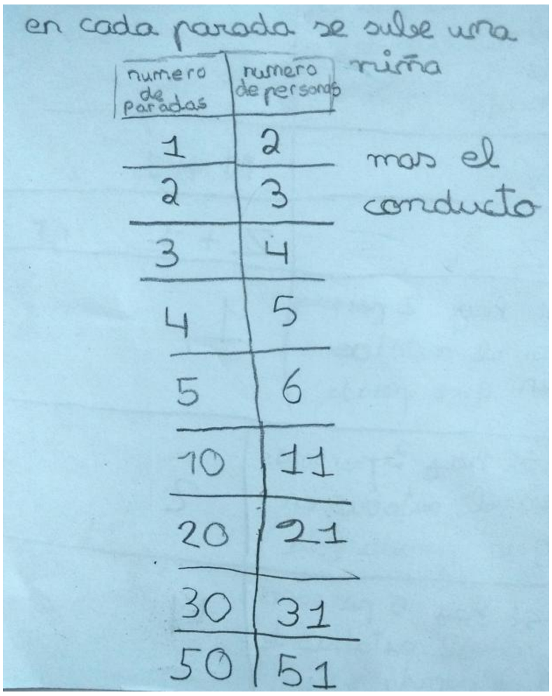


Imagen 8: Producción de la alumna 11.

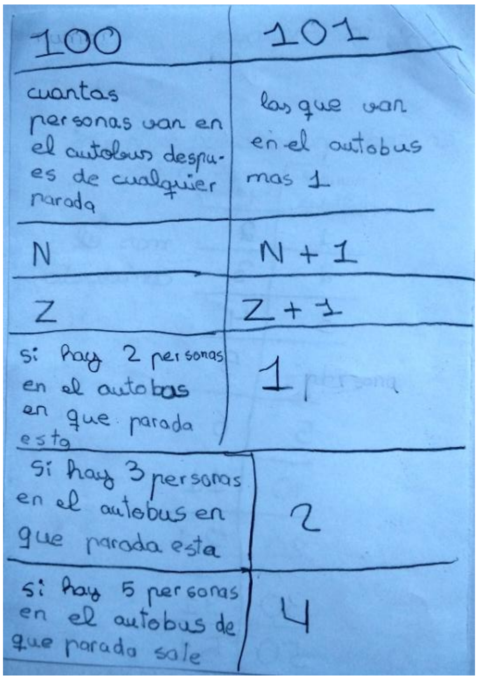
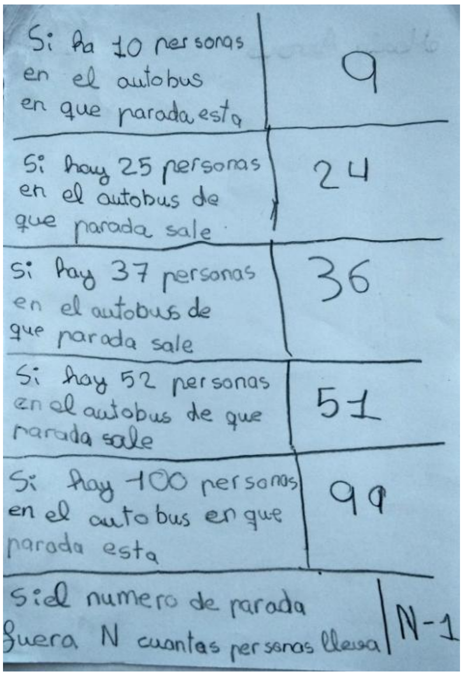


Imagen 9: Producción de la alumna 11.



Si ha 10 personas en el autobus en que parada esta	9
Si hay 25 personas en el autobus de que parada sale	24
si hay 37 personas en el autobus de que parada sale	36
Si hoy 52 personas en el autobus de que parada sale	51
Si hay 100 personas en el autobus en que parada esta	99
Si el numero de parada fuera N cuantas personas lleva	N-1

Imagen 10: Producción de la alumna 11.

Anexo 4: Tablas análisis de datos

	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas sin uso del pensamiento funcional	Respuestas incorrectas con uso del pensamiento funcional	Estrategia operatoria	Estrategia recursiva	Respuesta Directa	Estrategia Conteo	Pensamiento Patrones recursivos	Pensamiento Correspondencia	Pensamiento Covariacional
Alumna 1	1			1					1	
Alumna 1	1						1			
Alumna 2	1						1			
Alumna 2	1			1					1	
Alumna 3	1			1					1	
Alumna 4	1						1			
Alumna 4		1				1				
Alumna 4	1						1			
Alumna 5	1					1				
Alumna 6	1			1					1	
Alumna 7	1			1					1	
Alumna 8	1				1			1		
Alumna 8	1						1			
Alumna 9	1			1					1	
Alumna 9		1				1				
Alumna 10	1			1					1	
Alumna 10			1	1					1	
Alumna 10	1								1	
Alumna 11	1								1	
Alumna 11	1			1					1	
Alumna 11	1					1				
Alumna 12		1				1				
Alumna 13			1						1	
Alumna 13	1			1					1	
Alumna 13			1			1			1	
Alumna 14	1			1					1	
Alumna 15	1					1				
Alumna 15		1				1				
Alumna 16	1						1			
Alumna 16	1						1			
Alumna 17	1						1			
Alumna 18										
Alumna 19	1					1				
Alumna 20										
Total	25	4	3	11	1	9	8	1	15	0