A Ruth

Índice general

Introducción

El último tercio del siglo XX vio nacer y consolidarse un nuevo tipo de estructuras algebraico topológicas conocidas a partir de los años 80 bajo la denominación de JB*-triples (complejos). Los orígenes de estos objetos matemáticos están, sin duda alguna, en el estudio y la clasificación de los dominios simétricos acotados en espacios de Banach complejos de dimensión arbitraria (dominios que desempeñan un papel análogo a los dominios simplemente conexos de $\mathbb{C}$). En 1935, E. Cartan describe los dominios simétricos acotados en espacios de Banach complejos de dimensión finita [12]. El estudio realizado por Cartan dio lugar a la descripción de los hoy día conocidos como factores de Cartan. En los años 70, L. A. Harris da el primer paso al caso infinito dimensional, introduciendo y estudiando las llamadas J*-álgebras [32]. Dichas álgebras no son otra cosa que los subespacios norma cerrados del espacio de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert complejo que además son estables bajo el producto aa^*a.

La irrupción definitiva de los JB*-triples se produce de la mano de W. Kaup en los años 80. En una de sus más brillantes aportaciones, Kaup demostró en 1983 la equivalencia entre la categoría de los dominios simétricos acotados en espacios de Banach complejos de dimensión arbitraria y la categoría de los JB*-triples [40, 41, 42].

La clase de los JB*-triples contiene a todas las C*-álgebras, a todas las JB*-álgebras, a todas las J*-álgebras, a los espacios de Hilbert complejos y a los espacios de operadores entre espacios de Hilbert complejos.

Desde el punto de vista algebraico, los JB*-triples son espacios vectoriales dotados de un producto ternario (producto triple), satisfaciendo una identidad conocida con el nombre de identidad de Jordan. A tales espacios vectoriales se les conoce con el nombre de sistemas triples de Jordan y aparecen por primera vez en la literatura, si bien bajo otra denominación, de la mano de M. Koecher en 1967 [47]. En 1969, K. Meyberg realiza un estudio sistemático de los sistemas triples de Jordan en su Tesis Doctoral. Una teoría de estructura de tales objetos matemáticos, en el caso finito dimensional sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica distinta de 2, fue desarrollada por O. Loos [49]. E. I. Zel'manov (Medalla Fields 1994) da un gran impulso a la teoría de los sistemas triples de Jordan cuando, a comienzos de los años 80, establece sus revolucionarias técnicas que le llevan a formular una teoría de estructura para sistemas triples de Jordan primos sobre un cuerpo de característica distinta de 2 [86, 87, 88]. A partir de entonces la teoría ha adquirido un gran desarrollo y en particular en el punto donde estamos nos gustaría destacar los trabajos de A. Moreno Galindo y A. Rodríguez [57, 58], donde, utilizando las técnicas de Zel'manov, establecen un teorema de clasificación para JB*-triples primos.

Desde el punto de vista del Análisis Funcional, los JB*-triples son el ambiente óptimo para el estudio de ciertos problemas geométricos clásicos. Por ejemplo, es conocido que la imagen de una C*-álgebra mediante una proyección contractiva no posee, en general, estructura de C*-álgebra, lo mismo ocurre con las JB*-álgebras. En 1982, L. Stachó demostró que la imagen de la bola unidad de un espacio de Banach complejo mediante una proyección contractiva es holomórficamente simétrica, siempre que la bola unidad posea dicha propiedad [77]. Como consecuencia de este resultado, W. Kaup probó en 1984 que la imagen de un JB*-triple mediante una proyección contractiva es de nuevo un JB*-triple [43]. En un estudio paralelo, Y. Friedman y B. Russo proporcionan una prueba del anterior resultado desde el punto de vista del Análisis Funcional (ver [26, 28]).

Otra de las grandes virtudes geométricas de los JB*-triples es la equivalencia entre las isometrías lineales sobreyectivas y los isomorfismos entre este tipo de objetos [42] (comparar con [16]). Resultado que culmina una serie de importantes trabajos que comienzan en 1951 con el bien conocido Teorema de Banach-Stone de R. Kadison [39]. En conexión con esta propiedad, es bien conocido que la norma de una C*-álgebra viene determinada por la estructura algebraica. Sin embargo, no es cierto en general que toda isometría lineal sobreyectiva sea un isomorfismo de C*-álgebras. En realidad, es fácil encontrar isometrías lineales sobreyectivas entre C*-álgebras que no son $*$-isomorfismos. Por otra parte, es conocido que no toda isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre JB*-triples conserva el producto triple. No obstante, T. Dang, [14], afirma que tales isometrías conservan la operación cubo.

En 1995, J. M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez introducen el concepto de JB*-triple real, donde una aplicación lineal biyectiva es una isometría si y solo si conserva cubos [37]. Tales objetos no son otra cosa que subtriples reales cerrados de un JB*-triple complejo. La clase de los JB*-triples reales comprende, entre otros, a los JB*-triples complejos, a las C*-álgebras reales, a las JB-álgebras, a las J*B-álgebras y a los espacios de operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert reales. Los JB*-triples reales han tenido, desde su introducción, un amplio y rápido desarrollo (ver por ejemplo [14, 37, 44, 53, 23, 64, 33, 63, 62, 65, 78]).

Los primeros trabajos sobre JB*-triples reales se encaminan al estudio, claro está en el ambiente real, de aquellas propiedades básicas conocidas para el caso complejo, que permitan el desarrollo y conocimiento de estos nuevos objetos. En ciertas ocasiones la prueba en el ambiente real de un resultado conocido para JB*-triples puede ser obtenida sin más que pasar por la complexificación natural de dicho JB*-triple real. Sin embargo, en muchas otras ocasiones la demostración para el caso real requiere de un análisis específico y totalmente independiente de aquel conocido para el caso complejo. Este es el caso de la prueba de la continuidad débil-* separada del producto triple en JB*-triples reales que sean espacios de Banach duales [53]. Por otra parte, algunas de las propiedades verificadas por los JB*-triples complejos dejan de ser ciertas en el ambiente real. Por ejemplo, no toda isometría lineal sobreyectiva entre JB*-triples reales es un isomorfismo de triples, como veremos en el Capítulo 3 de esta memoria. Tampoco podemos afirmar que la imagen de un JB*-triple real mediante una proyección contractiva sea de nuevo un JB*-triple real [78].

El propósito de esta memoria es profundizar en el estudio de los distintos aspectos geométricos de los espacios de Banach que soportan una estructura de JB*-triple real o complejo, con el objetivo genérico de mostrar la relación existente entre dichos aspectos geométricos y ciertas propiedades algebraicas inherentes a un JB*-triple real o complejo. La memoria se divide en cuatro capítulos cuyos contenidos detallamos a continuación.

El primer capítulo tiene un carácter introductorio y está dedicado a la presentación de los diferentes conceptos básicos utilizados en esta memoria. Destacan los conceptos de JB*-triple real y complejo. Estas definiciones están acompañadas de una buena cantidad de ejemplos entre los que se encuentran los factores de Cartan reales y complejos. Veremos que, gracias a los Teoremas de Gelfand-Naimark para JB*-triples reales y complejos, podemos describir cualquier JB*-triple real o complejo como subtriple cerrado de una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y complejos.

Los factores de Cartan son piezas claves para una correcta comprensión de los JB*-triples reales y complejos. Por ello dedicamos el segundo capítulo de la memoria a una descripción y conocimiento más exhaustivo de los factores de Cartan. Motivados por el hecho de que los factores de Cartan están generados por sus tripotentes minimales, en una primera etapa damos una descripción pormenorizada de dichos tripotentes en la práctica totalidad de los factores de Cartan reales y complejos. También nos centramos en las relaciones existentes entre tripotentes minimales en diversos factores de Cartan que serán de utilidad en capítulos posteriores. En una segunda etapa (Sección 2.2), ponemos de manifiesto que podemos elegir ciertas familias de tripotentes, conocidas como parrillas, que permiten generar cualquier factor de Cartan complejo. Coloquialmente, podemos decir que estas parrillas son lo mas parecido a una base del factor de Cartan donde se encuentran. Análogamente procedemos para ciertos factores de Cartan reales, cuyo conocimiento será imprescindible para la consecución de los objetivos de la Sección 3.2.

El Capítulo 3 presenta las primeras conexiones entre la geometría y la estructura algebraica en un JB*-triple real o complejo. La primera sección contiene la siguiente caracterización de los elementos tripotentes de un JB*-triple real o complejo en términos de la estructura geométrica de su bola unidad:

Teorema (Teoremas 3.1.2 y 3.1.3) *Sea E un JB*-triple real o complejo y sea x un elemento de norma uno en E. Entonces x es un tripotente si y solo si*

$$D_1(x) = \{y \in E : \textit{ existe } \alpha > 0 \textit{ con } \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| = 1\}$$

coincide con

$$D_2'(x) = \{y \in E : \|x + \beta y\| = max\{1, \|\beta y\|\} \textit{ para todo } \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Esta caracterización geométrica de los elementos tripotentes de un JB*-triple real o complejo extiende, a un ambiente más natural, la caracterización obtenida por C. Akemann y N. Weaver para las isometrías parciales de una C*-álgebra [1]. Entre las consecuencias de dicho resultado, caracterizamos, desde el punto de vista de la geometría de los espacios de Banach, los tripotentes completos y los vértices de la bola unidad cerrada de un JB*-triple real (Corolario 3.1.4 y Proposición 3.1.7). El Teorema anterior también permite dar una demostración muy asequible del famoso Teorema de Kaup-Banach-Stone para JB*-triples complejos, demostrando la equivalencia entre las isometrías lineales sobreyectivas y los isomorfismos entre JB*-triples complejos (Teorema 3.2.1 y Nota 3.2.14). En el ambiente de los JB*-triples reales la mencionada caracterización geométrica nos permite reencontrar directamente que las isometrías lineales sobreyectivas entre JB*-triples reales conservan cubos y ortogonalidad (Proposición 3.2.2).

La segunda sección de este capítulo presenta un teorema de Banach-Stone para JB*-triples reales y tiene como precedentes trabajos de T. Dang, Chu-Dang-Russo-Ventura, Isidro-Rodríguez y Kaup ([14, 13, 38, 44]). A tal fin, en una primera etapa, establecemos que toda isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva con dominio un factor de Cartan real o complejo de rango mayor que uno e imagen un JBW*-triple real es un isomorfismo de triples (Teorema 3.2.12). Este resultado fue originalmente probado por Kaup [44, Theorem 5.18] bajo la hipótesis de no excepcionalidad de los factores de Cartan. Por consiguiente, nuestro resultado da una respuesta afirmativa al problema planteado por Kaup en [44, pag. 217]. Para demostrar el Teorema 3.2.12 necesitamos de la maquinaria desarrollada en el Capítulo 2 y la propia aquí desarrollada. El hecho clave lo constituye el Teorema 3.2.8 que afirma que las isometrías sobreyectivas entre JBW*-triples reales reducidos conservan cuadrángulos formados por tripotentes minimales y trángulos cuyos extremos son tripotentes minimales. El capítulo concluye estableciendo el siguiente Teorema de tipo Banach-Stone para JB*-triples reales al que nos referimos al comienzo y que extiende al Teorema 3.1 en [14].

Teorema (Teorema 3.2.13) *Una isometría lineal y sobreyectiva, Φ, entre dos JB*-triples reales E, F es un isomorfismo de triples siempre que E^{**} no contiene factores de Cartan reales o complejos de rango uno.*

El Capítulo 4 de la memoria está dedicado enteramente a la obtención de un Teorema de Lusin para JB*-triples reales y complejos. Es bien conocido que dado un espacio localmente compacto Hausdorff Ω y una medida de Radon positiva y finita, μ, sobre Ω, entonces para cada $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ y para cada $\varepsilon > 0$, existen un conjunto de Borel $E \subseteq \Omega$ con $\mu(\Omega \backslash E) < \varepsilon$ y una función $g \in C_0(\Omega)$ tales que f y g coinciden en E. Además se puede conseguir que

$$\sup\{|g(x)| : x \in \Omega\} \leq \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}.$$

Este resultado es conocido como Teorema de Lusin. En la década de los 60, M. Tomita obtuvo una extensión no conmutativa del Teorema de Lusin para el caso de C*-álgebras, la cual fue posteriormente desarrollada por K. Saitô. La versión más conocida del Teorema de Lusin para C*-álgebras puede ser enunciada como sigue:

Teorema [81, 73] *Sean N una C*-álgebra con unidad $\mathbb{1}$ actuando sobre un espacio de Hilbert, M la clausura débil de N, a un elemento cualquiera de M y e una proyección en M. Entonces para cada funcional φ positivo no cero en el predual de M y cada par de números positivos ε y δ menores que uno existen una proyección $f \in M$, $f \leq e$ y $b \in N$ tales que $\varphi(e-f) < \varepsilon$, $af = bf$ y $\|b\| \leq (1+\delta)\|af\|$.*

La ausencia de un buen orden en el conjunto de los elementos tripotentes de un JB*-triple es el principal obstáculo a salvar a la hora de extender el Teorema de Lusin desde el ambiente de las C*-álgebras a los JB*-triples. Para solventar esta carencia vamos a profundizar en alguno de los aspectos geométricos de los JB*-triples estudiados en los capítulos anteriores. A ello dedicamos la primera sección del Capitulo 4. Más concretamente, en la Proposición 4.1.4 establecemos una desigualdad geométrica que será la herramienta clave para la obtención de una versión no ordenada del Teorema de Lusin para JB*-triples.

El capítulo, y con él la memoria, termina estableciendo el siguiente Teorema de Saitô-Tomita-Lusin para JB*-triples reales y complejos:

Teorema (Teoremas 4.2.3 y 4.2.4) *Sean E un JB*-triple real o complejo, φ un funcional en E^* y α un elemento en E^{**}. Entonces para cada tripotente $e \in E^{**}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existen un* *tripotente* e_0 *en* E^{**} *con* $e_0 \leq e$ *y* $a_0 \in E$ *satisfaciendo*

$$P_2(e_0)(\alpha - a_0) = P_1(e_0)(\alpha - a_0) = 0,$$

$$\|a_0\| \leq (1+\delta)\|(P_2(e) + P_1(e))\alpha\| \quad y \quad |\varphi(e - e_0)| < \varepsilon.$$

La técnica desarrollada en la demostración del teorema anterior pasa por la extensión al caso de JB*-triples de un Teorema de Egoroff (Teorema 4.2.1) y una conveniente utilización de la topología fuerte-* en los JBW*-triples.

Al igual que ha ocurrido en el caso del desarrollo de la Teoría de las C*-álgebras, extendiendo resultados clásicos de la teoría de la medida a dicho ambiente, esperamos que esta extensión sea una herramienta de suma utilidad en el futuro desarrollo de la teoría de los JB*-triples.

Agradecimientos

Para terminar esta introducción me gustaría expresar mi gratitud a aquellos que han tenido algo que ver en la realización de este trabajo. Vaya mi más sentido agradecimiento, tanto en lo profesional como en lo personal, a los profesores Juan Martínez Moreno y Antonio M. Peralta Pereira, directores de esta memoria, por su orientación, apoyo y esfuerzo durante el desarrollo de este trabajo.

Gracias al director del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada y a los restantes compañeros y amigos del mismo.

Gracias al Ministerio de Ciencia y Tecnología al permitirme disfrutar de una beca de investigación durante los últimos cuatro años.

Por último quisiera agradecer a todas las personas que, sin aportar matemáticas a este trabajo, han sido absolutamente necesarias para su realización. Gracias a mi familia, a mis amigos y en especial a Ruth por vuestro cariño y comprensión durante estos años. Gracias también a las personas que, por limitaciones de espacio u olvido, no quedaron incluidas en estas líneas.

Francisco José Fernández Polo.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este primer capítulo no es otro que la presentación de los diferentes conceptos básicos utilizados en la memoria. Para ser más concretos, pretendemos introducir las definiciones de JB*-triple real y complejo, así como una gran variedad de ejemplos que permitan una familiarización con dichas estructuras. Presentaremos también las conexiones existentes entre la clase de los JB*-triples y otras estructuras clásicas como las C*-álgebras y JB*-álgebras. Este primer capítulo contiene también una abundante bibliografía básica sobre la teoría de los JB*-triples.

1.1. Sistemas triples de Jordan

Comenzamos esta sección introduciendo el concepto de sistema triple de Jordan y presentamos algunos hechos básicos, puramente algebraicos, que nos serán de utilidad.

Definición 1.1.1 *Un **sistema triple de Jordan complejo (resp. real)** es un espacio vectorial complejo (resp. real) V,* *junto con una aplicación*

$$\{.,.,.\} : V \times V \times V \to V$$

$$(x, y, z) \mapsto \{x, y, z\}$$

llamada ***producto triple****, que es bilineal y simétrica en las variables exteriores y conjugada lineal (resp. lineal) en la central verificando la identidad de Jordan:*

$$\{x, y, \{a, b, c\}\} = \{\{x, y, a\}, b, c\} - \{a, \{y, x, b\}, c\} + \{a, b, \{x, y, c\}\}$$

para cualesquiera x, y, a, b, c *en* V*.*

Dado un sistema triple de Jordan complejo (resp. real) V y dos elementos a, b de V, notaremos por $L(a, b)$ al operador lineal de V en V que aplica cada x en $\{a, b, x\}$ y mediante $Q(a, b)$ al operador conjugado lineal (resp. lineal) dado por $Q(a, b)x := \{a, x, b\}$ $(x \in V)$. Para simplificar la notación usaremos $Q(a)$ en lugar de $Q(a, a)$.

Un sistema triple de Jordan se dice que es **no degenerado** si $L(a, a) = 0$ implica que $a = 0$.

Definición 1.1.2 *Sean* x *e* y*, dos elementos en un sistema triple de Jordan. Diremos que* x *es* ***ortogonal*** *a* y*, lo que notaremos* $x \perp y$*, si* $L(x, y) = 0$*.*

En el caso de sistemas triples de Jordan no degenerados, se tiene que la relación de ortogonalidad es simétrica, como prueba el siguiente lema.

Lema 1.1.3 *Sean* x*,* y *dos elementos en un sistema triple de Jordan no degenerado. Entonces* $x \perp y$ *si y solo si* $y \perp x$*.*

Demostración.- Supongamos que $x \perp y$, es decir $L(x,y) = 0$. Por la no degeneración del triple producto es claro que $L(y,x) = 0 \Leftrightarrow L(a, L(y,x)b) = 0$ para cada $a, b \in V$. Ahora bien, haciendo uso de la identidad de Jordan se tiene que $L(a, L(y,x)b)z = \{a, L(y,x)b, z\} = \{a, b, L(x,y)z\} + \{L(x,y)a, b, z\} - L(x,y)\{a, b, z\} = 0$ para cada $a, b, z \in V$, lo que acaba la demostración. $\square$

Diremos que un subespacio J de un sistema triple de Jordan V es un **ideal** si

$$\{V, V, J\} + \{V, J, V\} \subseteq J.$$

Dos ideales I, J se dicen ortogonales si $I \cap J = \{0\}$, en este caso se tiene que todo elemento de I es ortogonal a cualquier elemento de J.

Un elemento e en un sistema triple de Jordan real o complejo, V, se dice **tripotente** si $\{e, e, e\} = e$. Para un tal elemento existe una descomposición algebraica de V como suma directa de los subespacios asociados a los valores propios de $L(e,e)$:

$$V = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e)$$

donde $V_k(e) = \{x \in V : L(e,e)x = \frac{k}{2}x\}$ para $k = 0, 1, 2$ (ver por ejemplo [56, XV] y [50, 2.9, 3.11]). La anterior descomposición es bien conocida y recibe el nombre de **Descomposición de Peirce** asociada al tripotente e. Las proyecciones naturales de V sobre los $V_k(e)$ serán notadas por $P_k \equiv P_k(e)$ y pueden ser descritas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} P_2(e) &= Q(e)^2, \\ P_1(e) &= 2(L(e,e) - Q(e)^2), \\ P_0(e) &= Id_V - 2L(e,e) + Q(e)^2. \end{aligned}$$

Es parte del folklore de la teoría (ver [50]) que los subespacios que aparecen en la descomposición de Peirce asociada a un tripotente satisfacen las reglas de multiplicación conocidas como **aritmética de Peirce**, que presentamos a continuación:

1. $\{V_i(e), V_j(e), V_k(e)\} \subseteq V_{i-j+k}(e)$, donde $i, j, k \in \{0, 1, 2\}$ y $V_l(e) = 0$ para $l \neq 0, 1, 2$;

2. $\{V_0(e), V_2(e), V\} = \{V_2(e), V_0(e), V\} = 0$.

Todo subespacio de un sistema triple de Jordan que es cerrado para el triple producto se conoce con el nombre de **subtriple**. En particular, la aritmética de Peirce nos dice que los subespacios $V_k(e)$ son subtriples.

Si tenemos en cuenta que la aplicación $Q(e)$ es una biyección de cuadrado la identidad sobre $V_2(e)$ y que su núcleo es $V_0(e) \oplus V_1(e)$, aparece una descomposición de V como suma directa de los subespacios asociados a los valores propios de $Q(e)$. Concretamente V descompone en la forma

$$V = V^0(e) \oplus V^1(e) \oplus V^{-1}(e),$$

donde $V^k(e) := \{x \in V : Q(e)x = kx\}$. Esta nueva descomposición tiene asociada la siguiente aritmética:

$$\left\{V^i(e), V^j(e), V^k(e)\right\} \subseteq V^{ijk}(e) \quad si \quad ijk \neq 0.$$

De donde, en particular, se deduce que $V^1(e)$ y $V^{-1}(e)$ son subtriples.

Claramente se obtienen las siguientes relaciones entre las descomposiciones presentadas:

$$V_2(e) = V^1(e) \oplus V^{-1}(e),$$

$$V^0(e) = V_0(e) \oplus V_1(e).$$

Notaremos por $P^k \equiv P^k(e)$ a la proyección natural de V sobre $V^k(e)$ que describimos a continuación:

$$\begin{aligned} P^1(e) &= \frac{1}{2}(P_2(e) + Q(e)), \\ P^{-1}(e) &= \frac{1}{2}(P_2(e) - Q(e)), \\ P^0(e) &= P_1(e) + P_0(e). \end{aligned}$$

Ejemplos de sistemas triples de Jordan:

(a) El espacio de las matrices con n filas y m columnas con entradas en el cuerpo de los números complejos o reales, $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, donde el producto triple viene dado por $\{R, S, T\} = \frac{1}{2}(RS^*T + TS^*R)$ para R, S, $T \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ y S^* es la matriz que se obtiene de aplicar a S la usual trasposición de matrices y conjugar en las entradas.

(b) Todo espacio prehilbertiano X, con el triple producto $\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(\langle x , y \rangle z + \langle z , y \rangle x)$.

(c) El espacio $C_0(\Omega)$ de funciones continuas complejo-valuadas sobre un espacio localmente compacto Hausdorff, Ω, que se anulan en el infinito con producto triple definido por $\{f, g, h\} = f\bar{g}h$.

Es necesario notar que los sistemas triples de Jordan pueden contener una gran cantidad de tripotentes como es el caso del ejemplo (b), donde todo elemento de norma 1 es tripotente. Por el contrario existen sistemas triples de Jordan que carecen de tripotentes no nulos. Este es el caso del ejemplo (c) si Ω es conexo y no compacto.

En lo que sigue notaremos por $Tri(V)$, al conjunto de elementos tripotentes de un sistema triple de Jordan, V. De entre sus cualidades destacamos algunas que nos serán de utilidad en el desarrollo de esta memoria.

Diremos que un tripotente $e \in Tri(V)$ es **unitario** si $V_2(e) = V$, **completo** si $V_0(e) = 0$ y **minimal** si $V^1(e) = \mathbb{R}e$. Si V es un sistema triple de Jordan complejo, entonces $V^{-1}(e) = iV^1(e)$ y por consiguiente e será minimal si y solo si $V_2(e) = \mathbb{C}e$. El conjunto de los tripotentes minimales en V será notado por $MinTrip(V)$.

Siguiendo a O. Loos [50, 11.9], un sistema triple de Jordan real, V, se dice **reducido** si $V_2(e) = \mathbb{R}e$ o equivalentemente $V^{-1}(e) = 0$, para todo tripotente minimal $e \in V$.

Si e y f son dos tripotentes ortogonales en un sistema triple de Jordan, utilizando la aritmética de Peirce se puede comprobar fácilmente que se verifican las siguientes equivalencias :

$$e \perp f \Leftrightarrow e \in V_0(f) \Leftrightarrow f \perp e$$

(ver si acaso [50, Lemma 3.9]). También es fácil comprobar que la suma de tripotentes ortogonales es otro tripotente.

El concepto de ortogonalidad nos permite definir una relación de orden parcial en el conjunto de los tripotentes, así pues, dados dos elementos tripotentes $e, f \in Tri(V)$, se dice que f es **mayor que** e, y lo notamos por $f \geq e$, si $f - e$ es otro elemento tripotente de V que además es ortogonal a e, o equivalentemente $Q(e)f = Q(f)e = e$. Un tripotente, $e \neq 0$, se dice que es **minimal para la relación de orden**, si para todo tripotente no nulo, f, tal que $e \geq f$, se tiene que $e = f$. En consecuencia un tripotente minimal para la relación de orden no puede expresarse como suma de dos tripotentes ortogonales no nulos.

Teniendo en cuenta que si $e \leq f$ entonces $e \in V^1(f)$, se deduce que todo tripotente minimal es minimal para la relación de orden. El recíproco no es cierto en general (considérese $V = C([0,1],\mathbb{R})$ y e la función constantemente igual a uno).

Dos tripotentes e y f se dirán **colineales**, y notaremos $e \top f$, cuando $e \in V_1(f)$ y $f \in V_1(e)$. Por último se dice que e **gobierna** a f, y notaremos $e \vdash f$, siempre y cuando $f \in V_2(e)$ y $e \in V_1(f)$.

Dos tripotentes e, f en un sistema triple de Jordan real o complejo, V, se dice que son **compatibles** si $P_k(e)$ y $P_j(f)$ conmutan para cada $k, j \in \{0,1,2\}$. Es bien conocido que si e y f son dos tripotentes en V tales que $e \in V_k(f)$ para algún $k \in \{0,1,2\}$ entonces son compatibles [54, Corollary 1.8]. En particular si e y f son ortogonales, colineales o uno gobierna a otro se tiene que e y f son compatibles.

Una tripleta ordenada $(v, u, \widetilde{v})$ de tripotentes en V se llama **trángulo** si $v \perp \widetilde{v}$, $u \vdash v$, $u \vdash \widetilde{v}$ y $Q(u)v = \widetilde{v}$. En el caso de contar únicamente con dos tripotentes tales que $u \vdash v$, se dice que (v, u) forma un **pre-trángulo**.

Si u es un tripotente, utilizando la descomposición $V_2(u) = V^1(u) \oplus V^{-1}(u)$, es fácil ver que $Q(u)$ conserva el producto triple de $V_2(u)$. Este hecho unido a la aritmética de Peirce permite afirmar que si (v, u) es un pre-trángulo, entonces tomando $\widetilde{v} = Q(u)v$, se verifica que $(v, u, \widetilde{v})$ es un trángulo.

Una cuadrupla ordenada de tripotentes (u_1, u_2, u_3, u_4) se llama **cuadrángulo** si $u_1 \perp u_3$, $u_2 \perp u_4$, $u_1 \top u_2 \top u_3 \top u_4 \top u_1$ y $u_4 = 2\{u_1, u_2, u_3\}$. La identidad de Jordan asegura la estabilidad de la igualdad anterior ante permutaciones cíclicas de los indices (véase por ejemplo que $u_2 = 2\{u_3, u_4, u_1\}$). Si u_1, u_2, u_3 son tripotentes tales que $u_1 \perp u_3$, $u_1 \top u_2 \top u_3$, diremos que (u_1, u_2, u_3) forma un **pre-cuadrángulo**. En este caso, $u_4 = 2\{u_1, u_2, u_3\}$ es un nuevo tripotente y (u_1, u_2, u_3, u_4) forma un cuadrángulo.

Un cálculo directo, unido a la aritmética de Peirce, nos permite obtener el siguiente lema que será de utilidad en el

Capítulo 3.

Lema 1.1.4 *Sea* (u_1, u_2, u_3, u_4) *un cuadránglulo en un sistema triple de Jordan real o complejo* V*. Entonces* $\varepsilon(u_1+u_2+u_3+u_4)$ *es un tripotente si y solo si* $|\varepsilon| = 2^{-1}$*, y de la misma manera* $\varepsilon(u_1 + u_2 + u_3 - u_4)$ *es un tripotente si y solo si* $|\varepsilon| = 2^{-\frac{1}{2}}$*.* $\square$

1.2. JB*-triples complejos

Nuestro próximo objetivo es añadir una estructura analítica a los sistemas triples de Jordan complejos, con objeto de obtener unos modelos matemáticos conocidos con el nombre genérico de JB*-triples.

Originariamente, el concepto de JB*-triple aparece en la clasificación de los dominios simétricos acotados en espacios de Banach complejos (ver [12], [48] y [50] para el caso finito dimensional). Tales dominios vienen a jugar el papel que juegan los dominios simplemente conexos en el plano complejo. El contenido de los trabajos [32], [40], [42] y [46] permite afirmar lo siguiente:

Todo dominio simétrico acotado puede ser visto como la bola unidad de un JB*-triple. Recíprocamente la bola unidad de un JB*-triple es un dominio simétrico acotado. Dos dominios simétricos acotados son biholomórficamente equivalentes si y solo si los JB*-triples asociados a dichos dominios son isométricamente isomorfos.

Este resultado motiva por sí mismo el estudio de los JB*-triples. Hay otras razones para estudiar dicha categoría. Entre ellas podríamos destacar que la imagen mediante una proyección contractiva de una C*-álgebra es un JB*-triple (ver [26], [28],

[43]). Por otra parte, la categoría de los JB*-triples incluye a las categorías de C*-álgebras y JB*-álgebras.

Recordamos que un operador lineal y acotado T sobre un espacio de Banach complejo se dice que es hermitiano si $\|\exp(i\lambda T)\| \leq 1$ para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 1.2.1 *Un **JB*-triple complejo** es un sistema triple de Jordan complejo, $\mathcal{E}$, provisto de una norma que lo dota de estructura de espacio de Banach satisfaciendo:*

(a) para cada $a \in \mathcal{E}$ el operador $L(a, a)$ es hermitiano con espectro no negativo.

(b) para cada $a \in \mathcal{E}$, se tiene que $\|L(a, a)\| = \|a\|^2$.

*Cuando no haya confusión posible nos referiremos a estos objetos simplemente como **JB*-triples**.*

Nota 1.2.2 *Usualmente en la definición de JB*-triple se exige que el producto triple sea (norma) continuo. Sin embargo, este axioma se puede deducir a partir de la axiomática dada en la definición anterior. A tal efecto tomemos x e y dos elementos en un JB*-triple $\mathcal{E}$ y dos números reales α, β. Es fácil comprobar la siguiente fórmula de polarización:*

$$4\alpha\beta L(x, y) = \sum_{n=0}^{3} i^n L(\alpha x + \beta i^n y, \alpha x + \beta i^n y) \tag{1.1}$$

Por definición el operador $L(a, a)$ es continuo para todo elemento $a \in \mathcal{E}$, por tanto la identidad (1.1) nos asegura que el operador $L(x, y)$ es continuo para todo x e y en $\mathcal{E}$. Finalmente, aplicando la desigualdad triangular de la norma, el axioma (b) de la definición de JB*-triple y tomando $\alpha = \|x\|^{-1}$ y $\beta = \|y\|^{-1}$ en la identidad (1.1), obtenemos que

$$\|L(x, y)\| \leq 4\|x\|\|y\|,$$

lo cual demuestra que el producto triple es continuo.

H. Araki y G. Elliott [5] probaban que el axioma de continuidad del producto es redundante en el caso de C^*-álgebras y E. Alfsen y F. W. Shultz [2] observaban que la prueba dada por Araki-Elliott es también válida para JB-álgebras. Por consiguiente, el resultado anterior puede considerarse como un análogo de estos resultados al caso de JB^*-triples.

Bajo la hipótesis de continuidad para el producto triple, el problema de ver si la constante de continuidad del mismo es uno permaneció abierto durante algunos años. En [29, Corollary 3] Y. Friedman y B. Russo dan una respuesta positiva a este problema.

Con respecto al axioma (b), W. Kaup [42] probaba que si $\mathcal{V}$ es un sistema triple de Jordan complejo el cual es a su vez un espacio de Banach con producto triple continuo satisfaciendo que $L(a,a)$ es un operador hermitiano para todo $a \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es un JB^*-triple si y solo si para cada $a \in \mathcal{V}$ el subtriple cerrado generado por a es isométricamente isomorfo a un $C_0(\Omega)$, lo que en particular implica que $\| \{a,a,a\} \| = \|a\|^3$. En el mismo trabajo, Kaup demostró que, bajo la hipótesis de continuidad del producto triple, la condición $\| \{a,a,a\} \| = \|a\|^3$ equivale al axioma (b).

En este punto es necesario aclarar que cuando en la definición de JB^*-triple la condición (b) se reemplaza por la condición $\| \{a,a,a\} \| = \|a\|^3$ también se obtiene la continuidad del producto triple. En efecto, como para todo $x, y \in \mathcal{E}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$4Q(\alpha x)(\beta y) = \sum_{n=0}^{3} (-i)^n (\alpha x + i^n \beta y)^3, \tag{1.2}$$

donde z^3 *denota el producto triple* $\{z,z,z\}$*, podemos probar, tal y como se hizo en el comienzo de esta nota, que* $Q(x)$ *es continuo con norma menor o igual que* $8\|x\|^2$*. Finalmente, la identidad*

$$2\,\{x,y,z\} = Q(x+z)y - Q(x)y - Q(z)y \tag{1.3}$$

asegura la continuidad del producto triple.

Por consiguiente, en la definición de JB**-triple, el axioma* (b) *se puede reemplazar por el siguiente:*

(b') Para cada $a \in \mathcal{E}$*, se tiene que* $\|\,\{a,a,a\}\,\| = \|a\|^3$.

Este último axioma es conocido con el nombre de axioma de Gelfand-Naimark para JB**-triples.*

Al hecho de que el subtriple engendrado por un elemento en un JB**-triple es isométricamente isomorfo a un* $C_0(\Omega)$*, visto como un JB***-triple, lo llamaremos* ***propiedad local*** *de los JB***-triples.*

Como consecuencia de las observaciones de la Nota anterior, la estructura de JB*-triple se conserva por paso a subtriples cerrados. Por consiguiente, los subespacios de Peirce asociados a un tripotente son JB*-triples.

Referimos los trabajos [68, 71, 82] como bibliografía básica sobre JB*-triples.

Nuestro próximo objetivo va a consistir en presentar algunos modelos matemáticos que hoy día se pueden considerar como clásicos, y que van a ser ejemplos destacados de JB*-triples.

Sea A un álgebra no necesariamente asociativa real (resp. compleja). Una aplicación lineal (respect. conjugado lineal), $* : A \to A$, de cuadrado la identidad, tal que $(ab)^* = b^*a^*$, para cada a, $b \in A$, se dice que es una **involución de álgebra**.

Una aplicación lineal y biyectiva entre álgebras con involución de álgebra que conserve el producto y la involución se dice que es un **$*$-isomorfismo**.

Un **álgebra de Banach**, A, es un álgebra asociativa sobre el cuerpo de los números reales o complejos provista de una norma que la convierte en espacio de Banach, verificando $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$. Una **C*-álgebra** es un álgebra de Banach compleja, A, dotada de una involución de álgebra, $*$, verificando que para todo $a \in A$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$. Esta última condición se conoce con el nombre de Axioma de Gelfand-Naimark.

Un famoso resultado conocido con el nombre de Teorema de Gelfand-Naimark asegura que, esencialmente, no hay más C*-álgebras que las subálgebras cerradas y autoadjuntas de la C*-álgebra de los operadores lineales y acotados sobre un espacio de Hilbert complejo, H, y a la que notaremos por $BL(H)$. Sobre la teoría básica de C*-álgebras remitimos al lector a los siguientes textos [10, 19, 20, 61, 72, 80] .

Un **álgebra de Jordan**, J, es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ (para nosotros será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), junto con una aplicación, $\circ : J \times J \to J$, bilineal simétrica no necesariamente asociativa, conocida como producto de Jordan, verificando la identidad de Jordan:

$$a \circ (b \circ a^2) = (a \circ b) \circ a^2$$

para cada a, b en J.

Si A es un álgebra asociativa y definimos un nuevo producto por $a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$, se tiene que A con dicho producto es un álgebra de Jordan a la que se le llama el álgebra de Jordan subyacente al álgebra A o **álgebra de Jordan simetrizada** de A y que notaremos por A^+. Las álgebras de Jordan que son isomorfas a subálgebras de una de tipo A^+, se les conoce con el nombre de **álgebras de Jordan especiales**. Es bien conocido que no toda álgebra de Jordan es especial. Las álgebras de Jordan que no son especiales se conocen con el nombre de **álgebras de Jordan excepcionales**. Probablemente uno de los ejemplos más conocidos de álgebra de Jordan excepcional es el álgebra de las matrices de orden 3×3, simétricas para cierta involución lineal, con entradas en el álgebra de los octoniones complejos, $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$, a la que notaremos por $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ (ver Sección 1.4).

Un álgebra de Jordan J, provista de una norma que la convierte en espacio de Banach y que además satisface:

$$\|a \circ b\| \leq \|a\|\|b\|$$

para cada a, b en J, se le conoce con el nombre de **álgebra de Jordan-Banach**.

A las álgebras de Jordan-Banach reales J, cuya norma satisface la siguiente propiedad:

$$\|a\|^2 \leq \|a^2 + b^2\|,$$

para cualesquiera a y b en J, se les conoce con el nombre de **JB-álgebra**. Un ejemplo de JB-álgebra es el subespacio de los operadores simétricos de un $BL(H)$, bajo el producto $T \circ S = \frac{1}{2}(TS + ST)$.

Una **JB*-álgebra** es un álgebra de Jordan-Banach compleja $\mathcal{J}$, provista de una involución de álgebras, $*$, verificando la siguiente condición:

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3,$$

para todo elemento a de $\mathcal{J}$, donde U_a es el operador lineal de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{J}$ dado por $U_a(b) = 2\ a \circ (a \circ b) - b \circ a^2$.

No es difícil comprobar que el Axioma de Gelfand-Naimark en una C*-álgebra, A, es equivalente a la propiedad $\|aa^*a\| = \|a\|^3$ para todo $a \in A$. Por consiguiente A^+ es una JB*-álgebra.

El álgebra de Jordan compleja excepcional $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, puede ser dotada de una norma y una involución que la convierten en JB*-álgebra (ver [31, Remark 3.1.8], [3], [74], [84]).

En 1977, J. M. Wright [84], demostró que toda JB*-álgebra es la complexificación de una JB-álgebra y que recíprocamente, toda JB-álgebra es la parte simétrica o hermítica de una JB*-álgebra. De este modo, las categorías de las JB*-álgebras y de las JB-álgebras están en correspondencia uno a uno y por tanto, el estudio de una de estas categorías está directamente relacionado con la otra. E. Alfsen, F. W. Shultz y E. Stormer [3], establecieron un teorema de representación de tipo Gelfand-Naimark para JB-álgebras. El lector interesado en profundizar en la teoría de las JB-álgebras puede consultar [31].

Es fácil comprobar que si $\mathcal{E}$ es un sistema triple de Jordan complejo y e es un tripotente en $\mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}_2(e)$ es un álgebra de Jordan con involución, bajo el producto $x \circ y := \{x, e, y\}$ e involución $x^* := \{e, x, e\}$. El conjunto de los elementos simétricos en $\mathcal{E}_2(e)$ coincide con $\mathcal{E}^1(e)$, mientras que el conjunto de los elementos antisimétricos es $\mathcal{E}^{-1}(e)$. Si además $\mathcal{E}$ es un JB*-triple, entonces $\mathcal{E}_2(e)$ es una JB*-álgebra con unidad e (ver si acaso [82, Proposition 19.7 y Proposition 19.13]) y, por consiguiente, $\mathcal{E}^1(e)$ es una JB-álgebra. En particular se tiene que todo JB*-triple que contenga un tripotente unitario, puede ser visto como una JB*-álgebra con unidad.

Ejemplos de JB*-triples:

- Toda JB*-álgebra es un JB*-triple si se considera como producto triple

  $$\{a, b, c\} = (a \circ b^*) \circ c + (c \circ b^*) \circ a - (a \circ c) \circ b^*,$$

  véase [82, 20.35].

- Si A es una C*-álgebra, entonces A^+ es una JB*-álgebra. Como consecuencia del ejemplo anterior se tiene que A es un JB*-triple bajo el producto triple

$$\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a).$$

- Una J*-álgebra es un subespacio lineal y norma cerrado de $BL(H, K)$ (el conjunto de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert complejos H y K) que es cerrado para la operación $a \mapsto aa^*a$. Estas estructuras fueron estudiadas por L. A. Harris en [32] en conexión con el estudio de los espacios de Banach cuya bola unidad es un dominio simétrico acotado. Utilizando la identidad de polarización, no es difícil probar que toda J*-álgebra pueden ser dotadas de estructura de sistema triple de Jordan bajo el producto triple

$$\{a, b, c\} = \frac{1}{2}(ab^*c + cb^*a).$$

  Dado que cada J*-álgebra es un subtriple cerrado del JB*-triple $BL(H \oplus K)$, se tiene que toda J*-álgebra es un JB*-triple.

- Dada una familia $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ de JB*-triples, el espacio de Banach

$$\oplus^\infty \mathcal{E}_i \equiv \{x \in \Pi_{i\in I}\mathcal{E}_i \ : \|x\| = sup\{\|x_i\| \ : i \in I\} < \infty \ \}$$

  con producto triple definido coordenada a coordenada, es un nuevo JB*-triple.

1.3. JB*-triples reales

Un bien conocido resultado para JB*-triples (ver [42] y como precedente [32]), que reencontraremos en el Capítulo 3, asegura que toda aplicación lineal biyectiva entre JB*-triple es una isometría si y solo si conserva cubos, lo que es equivalente, gracias a la identidad de polarización (1.2), a conservar el producto triple. Sin embargo no toda isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre JB*-triples conserva el producto triple. No obstante, T. Dang, [14], afirma que tales isometrías conservan la operación cubo, es decir, si Φ es una isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre JB*-triples, entonces $\Phi\{x, x, x\} = \{\Phi x, \Phi x, \Phi x\}$, para todo x.

En 1995 J. M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez, introdujeron una clase de sistemas triples de Jordan reales que comprenden a los JB*-triples, conocida con el nombre de JB*-triples reales (ver [37]), donde una aplicación lineal biyectiva es una isometría si y solo si conserva cubos. Se introducía de esta forma una nueva clase de sistemas triples de Jordan-Banach donde el mencionado resultado de Dang continúa siendo cierto. A partir de entonces la teoría acerca de estos nuevos objetos matemáticos, que comprenden también a las C*-álgebras reales y a las JB-álgebras, ha tenido un amplio desarrollo.

La definición original de JB*-triple real se establecía como sigue:

Definición 1.3.1 *Un espacio de Banach real E, junto con una aplicación trilineal*

$$\{.,.,.\} : E \times E \times E \to E$$

*es un **JB*-triple real** si existe un JB*-triple complejo $\mathcal{E}$ y una isometría lineal $\Phi : E \to \mathcal{E}$ verificando que $\Phi\{x, y, z\} = \{\Phi x, \Phi y, \Phi z\}$ para cualesquiera $x, y, z \in E$.*

Claramente, los JB*-triples reales son, salvo isomorfismos, los subtriples reales cerrados de los JB*-triples. También es claro que todo JB*-triple real es un sistema triple de Jordan real y que todo JB*-triple complejo es un JB*-triple real si solo consideramos su estructura real subyacente, a lo que eventualmente llamaremos **realificación** de un JB*-triple.

Aparece de modo natural la cuestión de si es posible dotar, o no, a la complexificación algebraica de un JB*-triple real de estructura de JB*-triple extendiendo la norma original. Esta pregunta fue respondida afirmativamente por Isidro, Kaup y Rodríguez en [37], proporcionándonos además una de las caracterizaciones más útiles de los JB*-triples reales. Concretamente, dado un JB*-triple real E, existe una única estructura de JB*-triple complejo en su complexificación, $\widehat{E} := E \oplus iE$, cuya norma extiende a la norma de E y una única **conjugación** (aplicación conjugado lineal, isométrica de periodo dos) τ, en $\widehat{E}$, tal que

$$E = \widehat{E}^{\tau} := \{x \in \widehat{E} : \tau(x) = x\}.$$

Desde ahora en adelante, dado un JB*-triple real E, notaremos por $\widehat{E}$ a su **complexificación** natural. Además llamaremos **conjugación canónica** a la conjugación, τ, que verifica que $E = \widehat{E}^{\tau}$. Es necesario notar que dicha conjugación canónica preserva el producto triple.

Dado un tripotente e en un JB*-triple real, E, se tiene que e es también un tripotente en $\widehat{E}$ y la complexificación de los subespacios de Peirce asociados a e en E coincide con los respectivos subespacios de Peirce asociados a e en $\widehat{E}$.

Dado un espacio de Banach complejo X y una conjugación τ en X, al espacio de Banach real

$$X^{\tau} := \{x \in X : \tau(x) = x\}$$

se le llama **forma real** de X. Desde este punto de vista, los JB*-triples reales no son otra cosa que formas reales de JB*-triples complejos. En particular, toda JB-álgebra, J, es un JB*-triple real, donde la conjugación canónica no es otra que la involución natural de la complexificación de J. En consecuencia el producto triple, como JB*-triple real, de J, viene dado por

$$\{a, b, c\} := (a \circ b) \circ c + (c \circ b) \circ a - (a \circ c) \circ b$$

para cada $a, b, c \in J$.

A continuación vamos a dar otros ejemplos de JB*-triples reales que nos serán de utilidad a lo largo de la memoria.

Sea A un álgebra de Banach real provista de una involución de álgebra, satisfaciendo $\|a^*a\| = \|a\|^2$ para todo $a \in A$. Si A posee unidad y satisface que $1 + a^*a$ es inversible para cada $a \in A$, se dice que es una **C*-álgebra real**. Si A no posee unidad y su unitización $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{R}$ (ver [66]) es una C*-álgebra real, diremos también que A es una C*-álgebra real.

Al igual que ocurre en el caso complejo, esencialmente, no hay más C*-álgebras reales que las subálgebras reales, autoadjuntas y norma cerradas de $BL(H)$, donde H es un espacio de Hilbert real (ver [36]). Por otra parte, dada una C*-álgebra real, A, existe una única norma en su complexificación, $\widehat{A}$, que la convierte en una C*-álgebra de modo que A se convierte en una forma real de $\widehat{A}$ (ver [30]) y por tanto es un JB*-triple real.

En 1986 K. Alvermann, [4], define una nueva estructura en la teoría de álgebras de Jordan, en analogía a las C*-álgebras reales. Más concretamente, un álgebra de Jordan real con unidad e involución de álgebra, J, equipada con una norma de álgebra completa verificando:

$$\|U_a(a^*)\| = \|a\|^3 \ \text{ y } \|a^*a\| \leq \|a^*a + b^*b\| \text{ para cada } a, b \in J,$$

se dice que es una **J*B-álgebra**. Como es de esperar, la complexificación de una J*B-álgebra es una JB*-álgebra bajo una única norma que extiende a la original (ver [4, Theorem 4.4]). Por tanto podemos dotar de estructura de JB*-triple real a las J*B-álgebras. De hecho, si E es un JB*-triple real y $e \in E$ es un tripotente, entonces $E_2(e)$ es una J*B-álgebra.

Los JB*-triples reales comprenden también los sistemas triples de Jordan Banach introducidos por T. Dang y B. Russo [17] y por H. Upmeier [82].

Recomendamos al lector los trabajos [37, 44, 62], como referencias básicas de la teoría de los JB*-triples reales.

1.4. Factores de Cartan complejos y reales

Esta sección está dedicada, preferentemente, a presentar una serie de JB*-triples reales y complejos conocidos con el nombre de factores de Cartan. Éstos son ejemplos básicos sobre los que se cimienta el desarrollo de la teoría y en particular, permiten obtener sendos teoremas de tipo Gelfand-Naimark para JB*-triples reales y complejos.

Los llamados **factores de Cartan** clásicos se clasifican, salvo isomorfismos, en seis tipos.

El **factor de Cartan de Tipo 1**, al que notaremos por $\mathbf{I_{n,m}}$, es el espacio de Banach complejo, $BL(H,K)$, de los operadores lineales y acotados entre dos espacios de Hilbert complejos H y K, de dimensiones n y m respectivamente, donde el producto triple está definido por $\{x,y,z\} := \frac{1}{2}(xy^*z + zy^*x)$.

Los **factores de Cartan de Tipo 2** y **Tipo 3** son subtriples de factores de Tipo 1. Para definirlos recordamos que dada una conjugación, j, sobre un espacio de Hilbert complejo H, podemos definir la siguiente involución lineal $x \mapsto x^t := jx^*j$ de $BL(H)$ en sí mismo. El factor de Tipo 2 (respectivamente el Tipo 3) es el subespacio de $BL(H)$ formado por todos los operadores anti-simétricos (resp. simétricos) para dicha involución, al que notaremos por $\mathbf{II_n}$ (respectivamente $\mathbf{III_n}$).

Se denomina **factor de Cartan de Tipo 4** o factor de **Tipo Spin**, al que notaremos por $\mathbf{IV_n}$, a cualquier espacio de Hilbert complejo H, de dimensión mayor que dos, provisto con una conjugación $x \mapsto \overline{x}$, dotado con el producto triple

$$\{x, y, z\} := \langle x , y \rangle z + \langle z , y \rangle x - \langle x , \overline{z} \rangle \overline{y}$$

y la norma dada por

$$\|x\|_1^2 := \langle x , x \rangle + \sqrt{\langle x , x \rangle^2 - |\langle x , \overline{x} \rangle|^2}.$$

Todo factor de Tipo Spin se puede ver como un subespacio cerrado y autoadjunto de un $BL(K)$ con la propiedad de que el cuadrado de cada uno de sus elementos sea un múltiplo de la identidad [32].

Al objeto de presentar los **factores de Tipo 5** y **Tipo 6**, conocidos con el nombre de factores de Cartan excepcionales, es conveniente introducir el álgebra de octoniones complejos, que presentamos junto con los octoniones reales, los cuales nos serán de utilidad para presentar los factores de Cartan reales.

Dado un cuerpo $\mathbb{K}$, es conocido, [89, Theorem 2.7], que las **álgebras de Cayley-Dickson "split"** (con divisores de cero) $C(\mathbb{K})$, sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, pueden ser representadas en la siguiente forma matricial:

Matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y x e y están en $\mathbb{K}^3$. La suma y el producto por escalares son los usuales para matrices y el producto viene dado por :

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma & z \\ t & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma + (x \mid t) & \alpha z + \delta x - y \times t \\ \gamma y + \beta t + x \times z & \beta\delta + (y \mid z) \end{pmatrix}$$

donde

$$((x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3)) := x_1 \ y_1 + x_2 \ y_2 + x_3 \ y_3$$

$$(x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

El álgebra de los **Octoniones complejos**, notada por $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$, es el álgebra de Cayley Dickson "split" sobre el cuerpo de los números complejos, mientras que el álgebra de los **Octoniones reales**, notada por $\mathbb{O}_0$, es el álgebra de Cayley Dickson split sobre el cuerpo de los números reales.

En $C(\mathbb{K})$ tenemos una involución lineal, $-$, conocida como **involución cayleyana**, dada por

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \beta & -x \\ -y & \alpha \end{pmatrix}$$

Para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, disponemos de otra involución en $C(\mathbb{K})$ dada por

$$\begin{pmatrix} \alpha & x \\ y & \beta \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{y} \\ \overline{x} & \overline{\beta} \end{pmatrix}$$

donde por $\overline{x}$ estamos denotando a la aplicación que consiste en conjugar cada componente si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o el mismo vector si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

El conjunto, $\mathbb{O}$, formado por los elementos a de $C(\mathbb{C})$ que verifican la igualdad

$$\overline{a} = a^*,$$

con el producto heredado de $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$, es un álgebra real, alternativa de división conocida con el nombre de **álgebra de Cayley real de división** o también como álgebra de los **Octoniones reales de división**.

El conjunto de las matrices de orden 3×3 con entradas en $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$ que son simétricas con respecto a la involución (lineal) $(a_{i,j})^t := (\overline{a_{j,i}})$, que denotaremos por $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, es un álgebra de Jordan compleja bajo el producto $a \circ b := \frac{1}{2}(ab + ba)$. El álgebra $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, con el producto anterior e involución $(a_{i,j})^* := (a_{j,i}^*)$ puede ser dotada de estructura de JB*-álgebra unital, y por tanto de JB*-triple, (ver [31, Remark 3.1.8], [3], [74], [84]). El **factor de Cartan de Tipo 6** es precisamente $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, al que también notaremos por **VI**.

Por último, el **factor de Cartan de Tipo 5** es el conjunto formado por las matrices 1×2 con entradas en $\mathbb{O}^{\mathbb{C}}$, $M_{1,2}(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, el cual es un subtriple de **VI**, via el monomorfismo

$$(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ \overline{a} & 0 & 0 \\ \overline{b} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{para cada } a, b \in \mathbb{O}^{\mathbb{C}}$$

y al que notaremos simplemente por **V**.

Los factores de Cartan $\mathbf{I_{n,n}}$ y $\mathbf{III_n}$ tienen al operador identidad como elemento unitario, mientras que en los de tipo $\mathbf{II_n}$, con n par o infinito, podemos elegir como elemento unitario distinguido u, expresado en forma matricial:

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Donde se ha tomado como base de H en el origen $\{e_i\}$ y en llegada la base $\{j(e_i)\}$.

Todo vector de norma uno que además sea simétrico o antisimétrico para la involución, es un elemento unitario para el factor de tipo spin $\mathbf{IV_n}$.

En consecuencia, teniendo en cuenta que, como hemos visto en la Sección 1.2, todo JB*-triple con elemento unitario puede ser estructurado como JB*-álgebra, podemos enunciar la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1 *Los factores de Cartan de tipo* $\mathbf{I_{n,n}}$, $\mathbf{II_n}$, *con n par o infinito,* $\mathbf{III_n}$ *y* $\mathbf{IV_n}$, *pueden ser vistos como JB*-álgebras.*

Llamaremos **factores de Cartan reales** a las formas reales de los factores de Cartan (complejos). Estos factores han sido estudiados y clasificados por W. Kaup [44], extendiendo al caso infinito dimensional, la clasificación dada por O. Loos [50]. Antes de presentarlos conviene recordar lo siguiente:

Sea X un espacio de Hilbert complejo de dimensión par o infinita y sea J una anticonjugación, aplicación conjugado lineal, isométrica de cuadrado menos la identidad. Entonces se puede dotar a X de una estructura de **espacio de Hilbert sobre los cuaternios**, $\mathbb{H}$, definiendo el producto de elementos de $\mathbb{H}$ por vectores de X, en la forma

$$jx = J(x), \quad kx = iJ(x),$$

donde $\{1, i, j, k\}$ es el conjunto de generadores de $\mathbb{H}$, y el producto escalar $\langle \ , \ \rangle_{\mathbb{H}} : X \times X \longrightarrow \mathbb{H}$ se define mediante la siguiente expresión

$$\langle x , y \rangle_{\mathbb{H}} = \langle x , y \rangle - j \langle J(x) , y \rangle \qquad \forall\, x, y \in X,$$

y donde $\langle \ , \ \rangle$ denota el producto escalar en X.

Notaremos por (X, J) al espacio X, visto como espacio de Hilbert cuaterniónico.

La norma en (X, J) asociada a su producto escalar coincide con la norma inicial en X, ya que de la igualdad $\langle x , y \rangle = \langle J(y) , J(x) \rangle$, se deduce que $\langle x , J(x) \rangle = 0$. Por consiguiente, es claro que

$$BL((X, J)) = \{T \in BL(X) \ : \ JT = TJ\}$$

y el adjunto de un operador $T \in BL((X, J))$ coincide con su adjunto en $BL(X)$.

En lo que sigue notaremos por X e Y a dos espacios de Hilbert reales de dimensiones n y m respectivamente, P y Q representarán a dos espacios de Hilbert de dimensiones p y q, respectivamente, sobre el cuerpo de los cuaternios y H denotará a un espacio de Hilbert complejo n dimensional.

Los factores de Cartan reales son, salvo isomorfismos, los citados a continuación (ver [44]).

1. $\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{n,m}} := BL(X,Y)$
2. $\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p,2q}} := BL(P,Q)$
3. $\mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{n} := \{z \in BL(H) : z^* = z\}$
4. $\mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{n}} := \{x \in BL(X) : x^* = -x\}$
5. $\mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}} := \{w \in BL(P) : w^* = w\}$
6. $\mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{n}} := \{x \in BL(X) : x^* = x\}$
7. $\mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}} := \{w \in BL(P) : w^* = -w\}$
8. $\mathbf{IV}^{\mathbf{r,s}}_{\mathbf{n}} := E$, donde E es la l^1-suma $E = X_1 \oplus^1 X_2$, de dos subespacios cerrados X_1, X_2 de X de dimensiones r y s, donde $r + s = n \geq 3$ y $X_2 = X_1^{\perp}$. En este caso, notando por $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ al producto escalar de X y por $-$ a la involución dada por $x = (x_1, x_2) \mapsto \overline{x} = (x_1, -x_2)$, el producto triple viene dado por
$$\{x, y, z\} := \langle\, x\, ,\, y\, \rangle z + \langle\, z\, ,\, y\, \rangle x - \langle\, x\, ,\, \overline{z}\, \rangle \overline{y}$$
para cualesquiera $x, y, z \in E$.
9. $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0} := M_{1,2}(\mathbb{O}_0)$
10. $\mathbf{V}^{\mathbb{O}} := M_{1,2}(\mathbb{O})$
11. $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0} := H_3(\mathbb{O}_0)$
12. $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}} := H_3(\mathbb{O})$

donde $H_3(\mathbb{O}_0)$ (respectivamente $H_3(\mathbb{O})$) es el conjunto de matrices de orden 3×3 con entradas en $\mathbb{O}_0$ (respectivamente $\mathbb{O}$), simétricas para la involución t, definida anteriormente. $H_3(\mathbb{O}_0)$ y $H_3(\mathbb{O})$ son claramente subtriples reales cerrados del JB*-triple $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, y por tanto son JB*-triples reales. Además $H_3(\mathbb{O})$ es una JB-álgebra, ya que coincide con el conjunto de los elementos simétricos, para la involución $*$, de la JB*-álgebra $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$.

Al igual que en el caso complejo, $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ (respectivamente $\mathbf{V}^{\mathbb{O}}$) puede embeberse, via un monomorfismo de triples, en $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$ (respectivamente $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$).

Los factores de Cartan $9 - 12$ se conocen con el nombre de **factores de Cartan reales Excepcionales**.

En la descripción anterior hemos respetado la notación empleada por el Profesor Kaup, con el objeto de facilitar la comprensión de las referencias. Además dicha notación tiene la ventaja de que al quitar los superíndices, obtenemos el factor de Cartan complejo que coincide con la complexificación de nuestro factor de Cartan real.

Como ya hemos dicho anteriormente, los operadores simétricos en un $BL(H)$, constituyen una JB-álgebra bajo el producto $T \circ S = \frac{1}{2}(TS + ST)$. Por otro lado, ya que $\mathbf{III}_{\mathbf{n}}^{\mathbb{R}}$ es una subalgebra real cerrada de los operadores simétricos en un $BL(H)$, se deduce que $\mathbf{III}_{\mathbf{n}}^{\mathbb{R}}$ es una JB-álgebra (comparar con [37, Corollary 2.4]).

El factor de Cartan real $\mathbf{II}_{\mathbf{2p}}^{\mathbb{H}}$ se puede ver como el conjunto $\{T \in BL(X) \ : \ JT = TJ \ , T^* = T\}$, donde X es un espacio de Hilbert complejo de dimensión $2p$. Es claro que dicho factor es una JB-álgebra.

Proposición 1.4.2 *Los factores de Cartan reales* $\mathbf{I}_{\mathbf{n}}^{\mathbb{C}}$, $\mathbf{II}_{\mathbf{2p}}^{\mathbb{H}}$ *y* $\mathbf{III}_{\mathbf{n}}^{\mathbb{R}}$ *pueden ser dotados de estructura de JB-álgebra.*

Concluimos la sección presentando dos teoremas de estructura para JB*-triples reales y complejos, así como otra forma de ver el álgebra de los octoniones reales de división. Dichos resultados nos serán de utilidad en capítulos posteriores.

El primer teorema de estructura, conocido con el nombre de Teorema de Gelfand-Naimark para JB*-triples, es debido a Y. Friedman y B. Russo [29] y reza como sigue:

Teorema 1.4.3 *Todo JB*-triple se puede embeber isométricamente en una ℓ_∞-suma de alguna colección de factores de Cartan.*

Nuestro segundo teorema de tipo Gelfand-Naimark puede ser encontrado en [62, Teorema 4.3.10]:

Teorema 1.4.4 *Todo JB*-triple real se puede embeber, de forma isométrica, en una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y realificaciones de factores de Cartan complejos.*

Nota 1.4.5 *Los octoniones reales de división pueden ser vistos como la expansión $\mathbb{R}$-lineal de la base $\{\mathbb{1}, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$, con las siguientes reglas de multiplicación [21, Chapter 9]:*

	$\mathbb{1}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$\mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	$-\mathbb{1}$	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	$-\mathbb{1}$	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	$-\mathbb{1}$	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-\mathbb{1}$	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	$-\mathbb{1}$	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	$-\mathbb{1}$	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	$-\mathbb{1}$

Dicha base puede ser vista, en la forma matricial de Zorn, como

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
e_2 = \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ -f_1 & 0 \end{pmatrix} & e_3 = \begin{pmatrix} 0 & if_1 \\ if_1 & 0 \end{pmatrix} \\
e_4 = \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ -f_2 & 0 \end{pmatrix} & e_5 = \begin{pmatrix} 0 & if_2 \\ if_2 & 0 \end{pmatrix} \\
e_6 = \begin{pmatrix} 0 & -f_3 \\ f_3 & 0 \end{pmatrix} & e_7 = \begin{pmatrix} 0 & if_3 \\ if_3 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

y $\{f_1, f_2, f_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^3$.

Recordemos que el álgebra real de los cuaternios, $\mathbb{H}$, puede ser descrita como el álgebra real generada por el conjunto $\{1, i, j, k\}$ sometido a las siguientes reglas de multiplicación:

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $ij = -ji = k$
- $jk = -kj = i$
- $ki = -ik = j$

Estas reglas de multiplicación se resumen en $-1 = i^2 = j^2 = k^2 = ijk$. *También existe una conjugación sobre* $\mathbb{H}$ *dada por*

$$\overline{\lambda_1 1 + \lambda_2 i + \lambda_3 j + \lambda_4 k} = \lambda_1 1 - \lambda_2 i - \lambda_3 j - \lambda_4 k.$$

De este modo $\mathbb{H}$ *se convierte en un álgebra real asociativa de división provista de una involución, que contiene a* $\mathbb{R}$ *y a* $\mathbb{C}$ *como subalgebras, de manera natural [21, Chapter 7].*

Capítulo 2

Tripotentes minimales y parrillas

Este capítulo está dedicado a profundizar en el conocimiento de los factores de Cartan reales y complejos. Una vez contrastada la abundancia de tripotentes minimales en dichos factores, procedemos a describir totalmente los tripotentes minimales en cada uno de los factores de Cartan reales o complejo no excepcionales. En una segunda etapa, mostramos que es posible seleccionar familias especiales de tripotentes, en su mayoría minimales y conocidas con el nombre de parrillas, que nos permiten generar todos los factores de Cartan complejos y los factores de Cartan reales reducidos a excepción de $\mathbf{I}_{\mathbf{n}}^{\mathbb{C}}$, $\mathbf{II}_{\mathbf{2p}}^{\mathbb{H}}$ y $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$, los cuales son JB-álgebras. Esta generación por parrillas de ciertos factores de Cartan reales nos será de utilidad a la hora de obtener un Teorema de tipo Banach-Stone para JB*-triples reales, que será abordado en el próximo capítulo.

Un JB*-triple real o complejo, E, que además es un espacio de Banach dual se dice que es un **JBW*-triple** real o complejo. Es conocido que el predual de E es único y lo notaremos por E_* (ver [9] para el caso complejo y [53] para el caso real). También se conoce que el producto triple de E es separadamente débil-* continuo [53].

S. Dineen probó en 1986, [18], que el bidual de un JB*-triple es un JBW*-triple y de los resultados de [37] se sigue que esta propiedad es cierta para JB*-triples reales.

En [64, Proposition 2.2] (comparar con [62, Proposición 4.1.5]) se demuestra que en el caso de JBW*-triples reales o complejos, un tripotente es minimal si y solo si es minimal para la relación de orden. También se conoce que el conjunto de dichos tripotentes está en correspondencia biyectiva con el conjunto de los puntos extremos de la bola unidad del predual ([64, Corollary 2.1] y [27, Proposition 4]). Este hecho demuestra (gracias a los teoremas de Banach-Alaoglu y Krein-Milman) la abundancia de tripotentes minimales en el caso de los biduales de JB*-triples reales o complejos.

Sea E un JBW*-triple real o complejo y notemos por A a la envolvente lineal débil-* cerrada de los tripotentes minimales. Entonces A es un ideal de E y

$$E = A \oplus^{\ell_\infty} N$$

donde N es otro ideal de E ortogonal a A que no contiene tripotentes minimales. Además

$$A = \oplus^{\ell_\infty} C_\alpha,$$

donde C_α son factores de Cartan en el caso de que E sea complejo y factores de Cartan reales o realificaciones de factores de Cartan complejos en el caso de que E sea real. Estos resultados se conocen en la literatura como **teoremas de Descomposición Atómica** (ver [27, Theorem 2] y [64, Theorem 3.6])

Es un hecho bien conocido que los factores de Cartan complejos son JBW*-triples ($BL(H, K)$ es un espacio de Banach dual y las isometrías sobreyectivas entre JBW*-triples son débil-* continuas [9]). Ya que los factores de Cartan reales son formas reales de los factores de Cartan complejos, podemos afirmar que también son JBW*-triples reales.

Todos los factores de Cartan reales y complejos contienen tripotentes minimales. Más aún, gracias a los teoremas de Descomposición Atómica y al hecho de que los factores de Cartan reales y complejos son factores, es decir, $\{0\}$ y el total son sus únicos ideales débil-* cerrados [35]; podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.0.1 *Todo factor de Cartan real o complejo coincide con el cierre en la topología débil-* de la envolvente lineal (real) de sus tripotentes minimales.* □

2.1. Determinación de tripotentes minimales en factores de Cartan complejos y reales

La Proposición 2.0.1 invita a determinar explícitamente el conjunto de tripotentes minimales en todo factor de Cartan real o complejo. La información que se obtenga de dichos tripotentes nos permitirá un conocimiento profundo de cada uno de los factores. En esta sección determinamos el conjunto de tripotentes minimales en los factores de Cartan reales o complejos no excepcionales. Ello nos va a permitir, entre otras cosas, estudiar de una forma cómoda el rango de cada uno de ellos y detectar aquellos factores de Cartan reales que son reducidos.

2.1.1. Factores de Cartan $\mathbf{I_{n,m}}$, $\mathbf{I^{\mathbb{R}}_{n,m}}$ y $\mathbf{I^{\mathbb{H}}_{2p,2q}}$

En virtud de la clasificación dada en la Sección 1.4, cada uno de los anteriores factores responde al prototipo siguiente: $E = BL(X,Y)$, donde X e Y son espacios de Hilbert sobre $\mathbb{K}$, con producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ y donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o el álgebra de los cuaternios $\mathbb{H}$.

Sean $e \in Y$, $f \in X$ dos vectores. Es bien conocido que el operador $T = e \otimes f$ definido por $Tx = (e \otimes f)x = \langle x\, ,\, f \rangle e$ pertenece a $BL(X,Y)$. Claramente, T es un elemento tripotente en E si y solo si $\|f\|\|e\| = 1$, en cuyo caso, además es minimal. En efecto, si $S \in E^1(T)$, entonces

$$S = \{T,S,T\} = TS^*T = (e \otimes f)S^*(e \otimes f) =$$

$$(e \otimes f)(S^*e \otimes f) = \langle S^*e\, ,\, f \rangle (e \otimes f) = \langle e\, ,\, Sf \rangle (e \otimes f).$$

De la igualdad anterior se sigue que $Sf = \langle e\, ,\, Sf \rangle \langle f\, ,\, f \rangle e$ y por consiguiente $\langle Sf\, ,\, e \rangle = \langle e\, ,\, Sf \rangle \langle f\, ,\, f \rangle \langle e\, ,\, e \rangle = \langle e\, ,\, Sf \rangle$. Lo que nos dice que $\langle e\, ,\, Sf \rangle$ es un número real.

Acabamos de probar que

$$\{e \otimes f : f \in X, e \in Y, \|f\|\|e\| = 1\} \subseteq MinTrip(E).$$

Veamos la inclusión contraria. Sea $S \in MinTrip(E)$ y sea $x \in Im(S) \subseteq Y$ tal que $\|x\| = 1$. Definamos $g = S^*x$ en X. Como x está en la imagen de S, existirá un elemento $\widetilde{x}$ en X tal que $x = S\widetilde{x}$. Por tanto $Sg = SS^*x = SS^*S\widetilde{x} = S\widetilde{x} = x$. Además $\|g\|^2 = \langle S^*x\, ,\, g \rangle = \langle x\, ,\, Sg \rangle = \langle x\, ,\, x \rangle = 1$. Tomemos $T = x \otimes g$ que, según hemos visto, es un tripotente minimal. Ya que

$$Q(S)T = \{S,T,S\} = ST^*S = S(g \otimes x)S = S(g \otimes S^*x) =$$

$$= Sg \otimes g = x \otimes g = T \qquad \text{y}$$

$$Q(T)S = \{T, S, T\} = TS^*T = (x\otimes g)S^*(x\otimes g) = (x\otimes Sg)(x\otimes g) =$$
$$= (x \otimes x)(x \otimes g) = x \otimes g = T,$$

se sigue, en virtud de lo visto en la Sección 1.1, que $T \leq S$. Finalmente, dado que, como hemos comentado en el principio del capítulo, un tripotente en un JBW*-triple real o complejo es minimal si y solo si es minimal para la relación de orden, se tiene que $S = T$.

Hemos probado pues:

$$MinTrip(E) = \{e \otimes f : f \in X, e \in Y, \|f\|\|e\| = 1\}.$$

Estudiemos ahora la relación de ortogonalidad entre tripotentes minimales. Sean $T = e \otimes f$, $S = g \otimes h$ dos tripotentes minimales ortogonales. En primer lugar observamos que no es restrictivo suponer que e, f, g y h son vectores de norma uno. Ya que $S \in E_0(T)$, se tiene que:

$$0 = R = \{T, T, S\} = \frac{1}{2}(TT^*S + ST^*T) =$$

$$\frac{1}{2}(\|f\|^2 e\otimes e\ g\otimes h + \|e\|^2 g\otimes h\ f\otimes f) = \frac{1}{2}(\langle\, g\,,\, e\,\rangle e\otimes h + \langle\, f\,,\, h\,\rangle g\otimes f)$$

y por tanto

$$0 = 2Rf = \langle\, f\,,\, h\,\rangle\langle\, g\,,\, e\,\rangle e + \langle\, f\,,\, h\,\rangle g$$

y

$$0 = 2Rh = \langle\, g\,,\, e\,\rangle e + \langle\, h\,,\, f\,\rangle\langle\, f\,,\, h\,\rangle g.$$

de donde se deduce que $\langle\, e\,,\, g\,\rangle = \langle\, f\,,\, h\,\rangle = 0$. Recíprocamente, si $\langle\, e\,,\, g\,\rangle = \langle\, f\,,\, h\,\rangle = 0$ es claro que $T \perp S$. Hemos probado pues la siguiente caracterización:

$$e \otimes f \perp g \otimes h \Leftrightarrow \langle\, e\,,\, g\,\rangle = \langle\, f\,,\, h\,\rangle = 0,$$

la cual permite obtener fácilmente la siguiente proposición.

Proposición 2.1.1 *Dados dos tripotentes minimales y ortogonales en* $\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p,2q}}$ *con* $p, q \geq 2$ *(respectivamente en* $\mathbf{I_{n,m}}$ *o* $\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{n,m}}$ *con* $n, m \geq 2$*), podemos encontrar un tercer tripotente minimal que no es ortogonal a ninguno de los dos.*

Demostración.- Sean $e \otimes f$ y $g \otimes h$ dos tripotentes minimales ortogonales. Claramente $\frac{e}{\|e\|} \otimes \frac{h}{\|h\|}$ es otro tripotente minimal que no es ortogonal a ninguno de los anteriores. □

2.1.2. Factores de Cartan $\mathbf{III_n}$ y $\mathbf{III^{\mathbb{R}}_n}$

En virtud de la clasificación dada en la Sección1.4, cada uno de los anteriores factores corresponde al prototipo $E = \{T \in BL(X) : \mathrm{j}T^*\mathrm{j} = T\}$, donde X es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) y j es una conjugación en X si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o $\mathrm{j} = Id_X$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Tomemos un elemento $e \in X$ norma 1 y definamos el operador $\mathrm{j}(e) \otimes e$. Es fácil comprobar que dicho operador es un tripotente en E, y argumentando como en el apartado anterior, se tiene que es minimal. Veamos ahora que todo tripotente minimal es de la forma $\pm\mathrm{j}(e) \otimes e$.

Sean $S \in MinTrip(E)$ y $x \in Im(S)$ tal que $\|x\| = 1$. Definamos $g = S^*x$. Como x está en la imagen de S, se tiene que $x = S\widetilde{x}$ y por tanto $Sg = SS^*x = SS^*S\widetilde{x} = S\widetilde{x} = x$. Además g es de norma uno y $S\mathrm{j}(x) = \mathrm{j}(S^*x) = \mathrm{j}(g)$. Podemos encontrarnos ante dos casos:

1. Si $x \neq -\mathrm{j}(g)$ consideramos $e = \frac{g+\mathrm{j}(x)}{\|g+\mathrm{j}(x))\|}$ y el tripotente $T = \mathrm{j}(e) \otimes e \in E$. Ya que $Q(S)T = T$ y $Q(T)S) = T$, se tiene que $T \leq S$ lo que implica que $T = S$.

2. Si $x = -\mathrm{j}(g)$ consideramos $e = x$, $T = \mathrm{j}(e) \otimes e$ y razonando igual que en el caso anterior, se tiene que $T = S$.

Podemos, por tanto, asegurar que el conjunto de los tripotentes minimales de E es

$$MinTrip(E) = \{\pm \mathrm{j}(e) \otimes e : e \in X, \|e\| = 1\}.$$

2.1.3. Factores de Cartan $\mathbf{II_n}$ y $\mathbf{II_n^{\mathbb{R}}}$

Siguiendo la misma notación del caso anterior, estos factores son de la forma $E = \{T \in BL(X) : \mathrm{j}T^*\mathrm{j} = -T\}$.

Sean e, $f \in X$ dos vectores ortogonales de norma 1. El operador $T = \mathrm{j}(f)\otimes e - \mathrm{j}(e)\otimes f$ es un tripotente minimal en E y nos proponemos probar que todo tripotente minimal responde a esta expresión. En efecto: Sea $S \in MinTrip(E)$ y sea $x \in Im(S)$ tal que $\|x\| = 1$. Si definimos $g = S^*x$ y argumentamos como en el apartado anterior se tiene que $Sg = x$, $\|g\| = 1$ y $S\mathrm{j}(x) = -\mathrm{j}(g)$.

Veamos que x es ortogonal a $\mathrm{j}(g)$ y en consecuencia $\mathrm{j}(x)$ lo es a g. Supongamos que no fueran ortogonales, en ese caso podemos definir el vector $h = \mathrm{j}(x) - \langle\, \mathrm{j}(x)\,,\, g\,\rangle g$ que es claramente ortogonal a g. Ahora, por una parte se tiene que $Sh = S\mathrm{j}(x) - \langle\, \mathrm{j}(x)\,,\, g\,\rangle Sg = -\mathrm{j}(g) - \langle\, \mathrm{j}(g)\,,\, x\,\rangle x$ y por tanto $\langle\, Sh\,,\, x\,\rangle = -2\langle\, \mathrm{j}(g)\,,\, x\,\rangle$; mientras que por otra parte $\langle\, Sh\,,\, x\,\rangle = \langle\, h\,,\, S^*x\,\rangle = \langle\, h\,,\, g\,\rangle = 0$, lo cual es una contradicción.

Por consiguiente, si consideramos $e := g$, $f := \mathrm{j}(x)$, tenemos que $T = \mathrm{j}(f) \otimes e - \mathrm{j}(e) \otimes f$ es un tripotente minimal. Una vez más es fácil comprobar que $T \leq S$, lo que lleva a afirmar que $T = S$, y el conjunto de los tripotentes minimales coincide con

$$\Big\{\mathrm{j}(f) \otimes e - \mathrm{j}(e) \otimes f : e, f \in X, \|f\| = \|e\| = 1, \langle\, e\,,\, f\,\rangle = 0\Big\}.$$

2.1.4. Factor de Cartan $\mathbf{IV_n^{r,s}}$

Como hemos visto en la Sección 1.4, el factor spin real es la ℓ_1-suma $E = X_1 \oplus^{\ell_1} X_2$ de dos subespacios cerrados X_1, X_2 de un espacio de Hilbert real X de dimensiones r y s, con $X_2 = X_1^{\perp}$.

En este caso, es fácil comprobar que el conjunto de tripotentes es

$$Tri(E) = \{x \in X_1 : \|x\| = 1\} \cup \{y \in X_2 : \|y\| = 1\} \cup$$

$$\cup \{\frac{x+y}{2} : x \in X_1, y \in X_2, \|x\| = 1 = \|y\|\}.$$

Veamos cuales de estos tripotentes y bajo que condiciones son minimales:

(a) Sea $e \in \{x \in X_1 : \|x\| = 1\}$ y sea $f = y_1 + y_2$ perteneciente al espacio $E^1(e)$, donde $y_1 \in X_1$, $y_2 \in X_2$. Entonces $f = \{e, f, e\} = 2\langle e , f \rangle e - \langle e , \overline{e} \rangle \overline{f} = 2\langle e , f \rangle e - \overline{f}$ de donde se deduce que $y_1 = \langle e , f \rangle e$ y por tanto $E^1(e) = \mathbb{R}e \oplus^{\ell_1} X_2$. Por consiguiente e es minimal si y solo si el espacio X_2 es trivial. En cualquier caso e es un tripotente unitario.

(b) Análogamente, si $e \in \{y \in X_2 : \|y\| = 1\}$, entonces $E^1(e) = X_1 \oplus^{\ell_1} \mathbb{R}y$ y e es minimal si y solo si $X_1 = \{0\}$, siendo en ese caso, además, unitario.

(c) Sea $e \in \{\frac{x+y}{2} : x \in X_1, y \in X_2, \|x\| = 1 = \|y\|\}$ y sea $f \in E^1(e)$. En este caso, ya que $\langle e , \overline{e} \rangle = 0$, se tienen que $f = 2\langle e , f \rangle e$ y por tanto $E^1(e) = \mathbb{R}e$.

Resumiendo, si $X_2 = \{0\}$ ó $X_1 = \{0\}$

$$MinTrip(E) = \{x \in E : \|x\| = 1\}$$

y para cada $x \in E$ con $\|x\| = 1$ se tiene que $E_2(x) = E$. En otro caso

$$MinTrip(E) = \{\frac{x+y}{2} : x \in X_1, y \in X_2, \|x\| = 1 = \|y\|\}.$$

Si $e = \frac{x+y}{2}$ es uno de los anteriores tripotentes, un cálculo directo prueba que

$$E_2(e) = \mathbb{R}e\ ,\ E_0(e) = \mathbb{R}\bar{e}\ ,\ \text{y}\ \ E_1(e) = \{x\}^{\perp} \cap \{y\}^{\perp}.$$

Si e y f son tripotentes ortogonales no cero, según acabamos de ver, $f \in E_0(e) = \mathbb{R}\bar{e}$ y por tanto $f = \pm\bar{e}$. De donde se sigue que un conjunto de tripotentes, no nulos, mutuamente ortogonales tiene cardinal dos. Además, si (e, g, f) es un trángulo en E es fácil comprobar que e es un tripotente minimal, $f = \pm\bar{e}$ y $g \in E_1(e) \cap E_1(f)$ es un tripotente unitario en E satisfaciendo $\bar{g} = \mp g$.

Nuestra próxima proposición recoge estos últimos hechos y para su mejor comprensión conviene introducir el concepto de rango de un JB*-triple real o complejo.

Definición 2.1.2 *Sea U un JB*-triple real o complejo. Se define el* ***rango*** *de U, y lo notamos por $r(U)$, como el menor número cardinal r satisfaciendo $Card(S) \leq r$, para todo S subconjunto de U, tal que $0 \notin S$ y $x \perp y$ si $x \neq y$ en S.*

Si se tiene en cuenta que el producto triple en todo factor de Cartan real o complejo es separadamente débil-* continuo y la Proposición 2.0.1, entonces el rango de un factor de Cartan real o complejo no es otra cosa que el cardinal del mayor subconjunto de tripotentes no nulos, ortogonales dos a dos.

Proposición 2.1.3 *El factor de Cartan $\mathbf{IV_n^{r,s}}$ tiene rango uno si r o s es cero y rango dos si r y s son mayores o iguales que uno.*

2.1.5. Factor de Cartan $\mathrm{IV_n}$

Sea E un factor spin complejo. El espacio de Hilbert, H, lo podemos descomponer como suma directa de los subespacios reales X_1 y X_2, donde $X_1 = \{x \in H : x = \overline{x}\}$, $X_2 = \{x \in H : x = -\overline{x}\}$. Claramente $X_2 = iX_1$ y el conjunto de los tripotentes viene dado por:

$$Tri(E) = \{\mu x : x \in X_1, \|x\| = 1,\ \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1\} \cup$$

$$\cup \{\frac{x + iy}{2} : x,\, y \in X_1, \|x\| = 1 = \|y\|,\ \langle\, x\,,\, y\,\rangle = 0\}.$$

Nos proponemos detectar quienes son los tripotentes minimales.

- Sea $e \in \{\mu x : x \in X_1, \|x\| = 1,\ \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1\}$. Dado que

  $$\{e, e, z\} = \langle\, e\,,\, e\,\rangle z + \langle\, z\,,\, e\,\rangle e - \langle\, e\,,\, \bar{z}\,\rangle \bar{e}$$
  $$= z + \langle\, z\,,\, \mu x\,\rangle \mu x - \langle\, z\,,\, \bar{\mu} x\,\rangle \bar{\mu} x = z,$$

  es claro que e es un tripotente unitario y por tanto no puede ser minimal.

- Si $e \in \{\frac{x+iy}{2} : x,\, y \in X_1, \|x\| = 1 = \|y\|,\ \langle\, x\,,\, y\,\rangle = 0\}$ y $z \in E^1(e)$, entonces

  $$z = \{e, z, e\} = 2\langle\, e\,,\, z\,\rangle e - \langle\, e\,,\, \overline{e}\,\rangle \overline{z} = 2\langle\, e\,,\, z\,\rangle e,$$

  es decir, z es un múltiplo complejo de e. Pero como $\langle\, z\,,\, e\,\rangle = 2\langle\, e\,,\, z\,\rangle\langle\, e\,,\, e\,\rangle = \langle\, e\,,\, z\,\rangle$ se tiene que z es un múltiplo real de e.

Hemos probado pues que el conjunto de los tripotentes minimales de E es:

$$MinTrip(E) = \{\frac{x + iy}{2} : x,\, y \in X_1, \|x\| = 1 = \|y\|, \langle\, x\,,\, y\,\rangle = 0\}.$$

Si $e = \frac{x+iy}{2}$ es un tripotente minimal, es fácil computar que $E_0(e) = \mathbb{C}\,\overline{e}$ y $E_1(e) = \{x\}^\perp \cap \{y\}^\perp$. Además, si (e, g, f) es un trángulo en E se tiene que e es un tripotente minimal, $f = -\mu^2\overline{e}$ y $g = \mu z \in E_1(e) \cap E_1(f)$ es un tripotente unitario en E, donde $|\mu| = 1 = \|z\|$ y $z = \bar{z}$.

Nota 2.1.4 *Sea E un factor spin. Si e es un tripotente de la forma $e = \mu x$, con $x \in X_1$, entonces el espacio $E^1(e)$ coincide con $\mu E^1(x)$. Por otra parte si $z = \alpha + i\beta \in E^1(x)$, donde $\alpha, \beta \in X_1$, se deduce que $\alpha = \langle x\,,\, z\rangle x$ y por tanto $\langle x\,,\, z\rangle = \langle \langle x\,,\, z\rangle x\,,\, x\rangle = \langle \alpha\,,\, x\rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle x\,,\, \beta\rangle$ ha de ser cero. Hemos probado pues que*

$$E^1(e) = \mathbb{R}e \oplus i\{e\}^\perp_{\mu X_1}.$$

Claramente, este último subtriple puede ser identificado con el factor spin real $\mathbf{IV_n^{1,n-1}}$ y por tanto dicho factor puede ser visto como una JB-álgebra.

Argumentando como en el caso del factor spin real, podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.1.5 *El factor de Cartan $\mathbf{IV_n}$ tiene rango dos.*

2.1.6. Factores de Cartan $\mathbf{II_{2p}^{\mathbb{H}}}$ y $\mathbf{I_n^{\mathbb{C}}}$

Según ya conocemos los factores de Cartan tipo $\mathbf{I_n^{\mathbb{C}}}$ y $\mathbf{II_{2p}^{\mathbb{H}}}$ coinciden con $E = \{T \in BL(Z) : T^* = T\}$, donde Z es un espacio de Hilbert sobre el cuerpo de los números complejos de dimensión n para el caso del factor $\mathbf{I_n^{\mathbb{C}}}$ y sobre el cuerpo de los cuaternios de dimensión p para el factor $\mathbf{II_{2p}^{\mathbb{H}}}$.

Siguiendo el mismo tipo de argumentación que el apartado 2.1.1, se tiene que

$$MinTrip(E) = \{\pm e \otimes e \;:\; e \in Z,\, \|e\| = 1\}.$$

2.1.7. Factor de Cartan $\mathbf{III}_{\mathbf{2p}}^{\mathbb{H}}$

Siguiendo la notación del caso anterior, el factor de Cartan tipo $\mathbf{III}_{\mathbf{2p}}^{\mathbb{H}}$ es $E = \{T \in BL(P) : T^* = -T\}$.

Sea e un elemento de norma uno en P y sea $\{1, i, j, k\}$ la base canónica de $\mathbb{H}$. Es fácil de comprobar que el operador $T = (je) \otimes e$ es un tripotente en E. Afirmamos que el anterior tripotente es además minimal. En efecto:

Sea $S \in E^1(T)$. Entonces

$$S = \{T, S, T\} = -TST = -(\, je \otimes e)\,(S(je) \otimes e) =$$

$$= -\langle\, S(je)\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}}\,(je) \otimes e.$$

De la igualdad anterior se sigue que $Se = -\langle\, S(je)\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} je$ y por consiguiente $\langle\, Se\,,\, je\,\rangle_{\mathbb{H}} = -\langle\, S(je)\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} = \langle\, je\,,\, Se\,\rangle_{\mathbb{H}}$, lo que nos dice que T es minimal.

Sea ahora S un tripotente minimal en E. Razonando como en el apartado 2.1.1, existen $x \in Im(S)$, $g \in P$, ambos de norma uno, satisfaciendo $g = S^*x$ y $Sg = x$. Ahora, si $x = jg$ y tomamos $T = -jx \otimes x$, se tiene que $Q(S)T = T = Q(T)S$ y en consecuencia $T = S$. Si $x \neq jg$, tomando $e = \frac{x-jg}{\|x-jg\|}$ y $T = je \otimes e$, se deduce, al igual que anteriormente, que $T = S$.

En conclusión podemos afirmar que

$$MinTrip(E) = \{\pm je \otimes e \;:\; e \in P,\; \|e\| = 1\,\}.$$

Veamos ahora cuales son las condiciones de ortogonalidad entre dos tripotentes minimales cualesquiera. Sean T, S dos tripotentes minimales ortogonales en E. No es restrictivo suponer que $T = je \otimes e$ y $S = jf \otimes f$. La condición de ortogonalidad nos lleva a:

$$0 = R = \{T, T, S\} = \frac{1}{2}(TT^*S + ST^*T) = -\frac{1}{2}(TTS + STT) =$$

$$= -\frac{1}{2}(jf \otimes f \, \langle\, je\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} je \otimes e + \langle\, je\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} je \otimes e \, jf \otimes f) =$$

$$\frac{1}{2}(jf \otimes f \; e \otimes e + e \otimes e \; jf \otimes f) = \frac{1}{2}(\langle\, e\,,\, f\,\rangle_{\mathbb{H}} jf \otimes e + \langle\, jf\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} e \otimes f).$$

De donde se deduce que

$$0 = 2Rf = \langle\, f\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} \langle\, e\,,\, f\,\rangle_{\mathbb{H}} jf + \langle\, jf\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} e$$

y

$$0 = 2Re = \langle\, e\,,\, f\,\rangle_{\mathbb{H}} jf + \langle\, e\,,\, f\,\rangle_{\mathbb{H}} \langle\, jf\,,\, e\,\rangle_{\mathbb{H}} e$$

lo que fuerza que $\langle\, e\,,\, f\,\rangle_{\mathbb{H}} = 0$. El recíproco también es cierto, por lo que podemos enunciar que

$$T \perp S \Leftrightarrow \langle\, e\,,\, f\,\rangle = 0.$$

Supongamos que la dimensión del espacio de Hilbert P es mayor o igual que dos ($p \geq 2$). Dados $T = je \otimes e$ y $S = jf \otimes f$ dos tripotentes minimales ortogonales, es claro que, tomando $z = \frac{e+f}{\sqrt{2}}$, el tripotente minimal $R = jz \otimes z$ no es ortogonal a T ni a S. Por consiguiente podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.1.6 *Dados dos tripotentes minimales y ortogonales en* $\mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}}$ *con* $p \geq 2$*, podemos encontrar un tercer tripotente minimal que no es ortogonal a ninguno de ellos.* □

O. Loos tiene estudiado en detalle los factores de Cartan reales excepcionales (ver [50]). En particular, tiene probado que el único factor de Cartan real excepcional no reducido y de rango uno es $\mathbf{V}^{\mathbb{O}}$. Por otra parte teniendo en cuenta la descripción de los tripotentes minimales en los factores de Cartan no excepcionales y la Proposición 2.0.1, la siguiente proposición es de fácil demostración (comparar con [44, Table 1 y Proposition 5.4]).

Proposición 2.1.7 *Los factores de Cartan reales no reducidos son los siguientes*

$$\mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p,2q}},\ \mathbf{IV}^{\mathbf{n,0}}_{\mathbf{n}},\ \mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}}\ y\ \mathbf{V}^{\mathbb{O}}.$$

Los factores de Cartan reales y complejos de rango uno son

$$\mathbf{I}_{\mathbf{1,m}},\ \mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1,m}},\ \mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2,2q}},\ \mathbf{IV}^{\mathbf{n,0}}_{\mathbf{n}},\ \ y\ \mathbf{V}^{\mathbb{O}}.$$

□

2.2. Parrillas complejas y reales

La descripción de los tripotentes minimales para factores de Cartan reales o complejos no excepcionales, que hemos obtenido en la sección anterior, nos va a permitir seleccionar familias especiales de tripotentes, en su mayoría minimales, que se conocen con el nombre de parrillas. T. Dang y Y. Friedman [15] probaron que los factores de Cartan complejos de rango mayor que uno, están generados por la expansión débil-* de determinadas parrillas construidas por tripotentes que forman cuadrángulos o tríangulos, de forma que el producto triple puede ser recuperado a partir de las correspondientes parrillas. Nuestra descripción nos permite reencontrar este resultado. Esta forma de generar los factores de Cartan complejos de rango mayor que uno se traslada, en esta memoria, al caso de los factores de Cartan reales reducidos de rango mayor que uno (a excepción de los factores $\mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}}$, $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$); resultado que constituye una de las herramientas básicas a la hora de probar que las isometrías lineales sobreyectivas entre factores de Cartan reducidos, conservan el producto triple (ver Proposición 3.2.10).

Desde el punto de vista puramente algebraico la consideración de parrillas en sistemas triples de Jordan aparece implícitamente en el libro de O. Loos [50], con objeto de obtener una clasificación de ciertos sistemas triples de Jordan finito dimensionales. Las parrillas aparecen de forma explícita en el trabajo de K. McCrimmon y K. Meyberg [55], donde se desarrolla una teoría de estructura para sistemas triples de Jordan finito dimensionales análoga a los clásicos teoremas de coordinatización de Jacobson en el ambiente de álgebras de Jordan. El lector interesado en profundizar en la teoría de parrillas y su utilización en sistemas triples de Jordan puede acudir a la monografía de E. Neher [59].

En lo que sigue denotaremos por I y J a dos conjuntos de indices arbitrarios y V un sistema triple de Jordan real o complejo.

Definición 2.2.1 *Una familia de tripotentes minimales $\{u_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ en V, se dice que es una* ***parrilla rectangular*** *si satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) u_{ij}, u_{kl} son colineales si comparten un índice fila ($i = k$) o un índice columna ($j = l$) y son ortogonales en cualquier otro caso.

(ii) $(u_{ij}, u_{il}, u_{kl}, u_{kj})$ $i \neq k$, $j \neq l$ forma un cuadrángulo.

(iii) Los productos triples de elementos de la familia que no correspondan a los que intrínsecamente aparecen en (i) y (ii) se anulan. Es decir, todos los productos triples entre elementos de la familia se anulan salvo los de la forma $\{x, y, z\}$, donde (x, y, z) formen un pre-cuadrángulo, y los del tipo $\{x, x, y\}$.

Sean X, Y dos espacios de Hilbert complejos o reales de dimensiones $n = Card(I)$ y $m = Card(J)$ y $\{e_i\}_{i\in I}$, $\{f_j\}_{j\in J}$ dos bases ortonormales, respectivamente. Tal y como hemos visto en el apartado 2.1.1 es fácil ver que la familia $\{u_{ij} = f_j \otimes e_i\}_{i\in I,\, j\in J}$ es una parrilla rectangular en $BL(X,Y)$. El desarrollo de Fourier junto a la Proposición 2.0.1 permiten enunciar el siguiente resultado:

Proposición 2.2.2 *Todo factor de Cartan complejo de tipo* $\mathbf{I_{n,m}}$ *y todo factor de Cartan real de tipo* $\mathbf{I^{\mathbb{R}}_{n,m}}$ *tiene una parrilla rectangular formada por tripotentes minimales cuya envolvente lineal es débil-* densa.* □

Definición 2.2.3 *Una familia de tripotentes minimales* $\{u_{ij} : i,j \in I\}$ *en* V *se dice que es una* ***parrilla simpléctica*** *si satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $u_{ij} = -u_{ji}$ *para todo* $i,\, j \in I$.

(ii) u_{ij} *y* u_{kl} *son colineales si comparten algún índice y son ortogonales en otro caso.*

(iii) $(u_{ij}, u_{il}, u_{kl}, u_{kj})$ *forman un cuadrángulo para* i,j,k,l *distintos dos a dos.*

(iv) Todos los productos triples entre elementos de la familia se anulan salvo los de la forma $\{x,y,z\}$, *donde* (x,y,z) *formen un pre-cuadrángulo, y los del tipo* $\{x,x,y\}$.

Sea X un espacio de Hilbert real o complejo y $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal. Entonces $\{u_{ij}\}_{i,j\in I}$ es una parrilla simpléctica en los factores de Cartan $\mathbf{II_n}$ y $\mathbf{II^{\mathbb{R}}_n}$, siendo $u_{ij} = \mathrm{j}(e_j) \otimes e_i - \mathrm{j}(e_i) \otimes e_j$ y $n = Card(I)$.

Argumentando como en la proposición anterior obtenemos la siguiente.

Proposición 2.2.4 *Todo factor de Cartan complejo de tipo* $\mathbf{II_n}$ *y todo factor de Cartan real de tipo* $\mathbf{II_n^{\mathbb{R}}}$ *es el cierre débil-** *de la expansión lineal de una parrilla simpléctica.* $\square$

Definición 2.2.5 *Una familia de tripotentes minimales* $\{u_i, \widetilde{u}_i\}_{i\in I}$ *y posiblemente un tripotente* u_0 *en* V*, satisfaciendo:*

(i) $(u_i, u_0, \widetilde{u}_i)$*, es un trángulo para todo* $i \in I$*;*

(ii) $(u_i, u_j, \widetilde{u}_i, -\widetilde{u}_j)$ *forman un cuadrángulo para* $i \neq j$*;*

(iii) $V = V_2(u_i + \widetilde{u}_i)$ *para todo* $i \in I$*.*

se conoce con el nombre de ***parrilla spin****.*

Sea E un factor spin complejo. Según ya conocemos, el espacio de Hilbert, H, parámetro de E, lo podemos descomponer en suma directa $X_1 \oplus iX_1$ donde X_1 es un espacio de Hilbert real formado por los elementos simétricos para una conjugación, $-$, en H. Sea $\{e_0, e_j, f_j\}_{j\in I}$ una base ortonormal de X_1, donde e_0 desaparece si la dimensión de X_1 es par o infinita. Sea $u_j = \frac{e_j + if_j}{2}$, $\widetilde{u}_j = -\bar{u}_j$ y $u_0 = e_0$, si ha lugar. Según lo expuesto en el apartado 2.1.5, es fácil ver que la familia $\{u_i, \widetilde{u}_i\}_{i\in I}$ y posiblemente u_0, es una parrilla spin para E.

De nuevo podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 2.2.6 *Todo factor de Cartan complejo de tipo* $\mathbf{IV_n}$ *es el cierre débil-** *de la expansión lineal de una parrilla spin.* $\square$

Definición 2.2.7 *Supongamos que existe un conjunto de índices* J_1 *tal que* $I = J \cup J_1$*. Una familia de tripotentes en* V*,* $\{u_i, \widetilde{u}_i, u_j : i \in J,\ j \in J_1\}$*, tal que* $u_i, \widetilde{u}_i$ *son tripotentes minimales para todo* $i \in J$*, se dice que es una* ***parrilla spin real*** *si verifica:*

(i) $(u_i, u_j, \widetilde{u}_i)$*, es un trángulo para cada* $i \in J$*,* $j \in J_1$

(ii) $Q(u_j)u_k = -u_k$ *para cada* $j, k \in J_1$*;*

(iii) $(u_i, u_l, \widetilde{u}_i, -\widetilde{u}_l)$ *son cuadrángulos para* $i \neq l$*,* $i, l \in J$*;*

(iv) $V = V_2(u_i + \widetilde{u}_i) = V_2(u_j)$ *para cada* $i \in J$ *y* $j \in J_1$*;*

(v) Los productos triples entre elementos de la familia se anulan salvo los correspondientes a los descritos en (i), (ii) y (iii).

Sea $E = \mathbf{IV}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r,s}} = X_1 \oplus^{\ell_1} X_2$ un factor spin real y supongamos que $r \geq s$. Sean $\{e_i\}_{i \in I}$ y $\{f_j\}_{j \in J}$ dos bases ortonormales de X_1 y X_2 respectivamente. Por hipótesis, existe un conjunto J_1, tal que $I = J \cup J_1$. Definimos $u_i = 2^{-1}(e_i + f_i)$, $\widetilde{u}_i = -\bar{u}_i$ siempre y cuando $i \in J$, mientras que $u_j = e_j$ para todo $j \in I/J$. En virtud del apartado 2.1.4, es inmediato comprobar que el conjunto $\{u_i, \widetilde{u}_i, u_j : i \in J, j \in J_1\}$ es una parrilla spin real para E. En consonancia con los casos anteriores podemos enunciar:

Proposición 2.2.8 *Todo factor de Cartan real de tipo* $\mathbf{IV}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{r,s}}$ *es el cierre débil–* de la expansión lineal de una parrilla spin real.*□

Definición 2.2.9 *Una familia de tripotentes,* $\{u_{ij} : i, j \in I\}$*, en* V *es una **parrilla hermitiana** si verifica:*

(i) Para cada i*,* j*,* k*,* l *en* I*, se tiene*

$$u_{ij} = u_{ji};$$

$$u_{ij} \perp u_{kl} \qquad \text{si } \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset;$$

$$u_{ii} \dashv u_{ij} \top u_{jk} \quad \text{si } i, j, k \text{ son diferentes.}$$

(ii) *Para arbitrarios i, j, k, l, los triples productos implicando al menos dos elementos diferentes satisfacen*

$$\{u_{ij}, u_{jk}, u_{kl}\} = \frac{1}{2}u_{il} \text{ para } i \neq l$$

$$\{u_{ij}, u_{jk}, u_{ki}\} = u_{ii}$$

(iii) *Todo producto triple de elementos de la familia que no puede ser expresado de la forma $\{u_{ij}, u_{jk}, u_{kl}\}$ se anula.*

Sea X un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y sea j una conjugación en X si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, o j $= Id_X$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sea $\{e_i\}_{i\in I}$ una base ortonormal de X. Si definimos $u_{ii} = \mathrm{j}(e_i) \otimes e_i$, $u_{ij} = \mathrm{j}(e_i) \otimes e_j + \mathrm{j}(e_j) \otimes e_i$ si $i \neq j$, es fácil ver, mediante un calculo directo aunque quizás tedioso, que la familia $\{u_{ij}, i, j \in I\}$ es una parrilla hermitiana en los factores de Cartan de tipo $\mathbf{III_n}$ o de tipo $\mathbf{III_n^{\mathbb{R}}}$.

Proposición 2.2.10 *Todo factor de Cartan complejo de tipo $\mathbf{III_n}$ y todo factor de Cartan de tipo $\mathbf{III_n^{\mathbb{R}}}$ es el cierre débil–* de la expansión lineal de una parrilla hermitiana.* □

Hasta ahora el conocimiento explícito de los tripotentes minimales en los factores de Cartan reales reducidos no excepcionales nos ha permitido detectar las parrillas apropiadas para nuestros objetivos. Ahora nos proponemos probar la existencia de parrillas, construidas a partir de tripotentes minimales que forman cuadrángulos, en los factores de Cartan reales $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ y $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$. Tales parrillas tendrán la virtud de generar dichos factores de Cartan, permitiendo a su vez recuperar su producto triple. La principal herramienta para demostrar la existencia de dichas parrillas pasa por establecer, en el ambiente de JB*-triples reales, el resultado de T. Dang y Y. Friedman, que ellos titulan con el nombre de

"Triple System Analyzer" [15, Proposition 2.1]. En una primera etapa nos dedicamos a este fin.

Y. Friedman y B. Russo [27, Lemma 2.1] tienen probado que si v es un tripotente minimal en un JB*-triple complejo, $\mathcal{E}$, y e es un tripotente en $\mathcal{E}_1(v)$, entonces v pertenece a la unión de $\mathcal{E}_2(e)$ y $\mathcal{E}_1(e)$. La prueba dada por dichos autores no puede ser literalmente adaptada al caso de JB*-triples reales. No obstante, algunas de sus ideas son aprovechadas por nosotros para extender este resultado al caso de JB*-triples reales sin distinción. El siguiente particular resultado, constituye un lema técnico que será útil para nuestro objetivo.

Lema 2.2.11 *Sean E un factor de Cartan real o complejo, v un tripotente minimal en E y e un tripotente no cero en $E_1(v)$. Entonces v pertenece a $E_2(e) \cup E_1(e)$.*

Demostración.- Supongamos que E es un factor de Cartan real o complejo no excepcional y que no es un spin real o complejo. En este caso el producto triple de elementos de E viene dado por la expresión $\{R,S,T\} = \frac{1}{2}(RS^*T + TS^*R)$ para cada $R,S,T \in E$. Las hipótesis de partida proporcionan dos igualdades básicas que serán aplicadas en lo sucesivo sin mención:

$$L(v,v)e = \frac{e}{2} \quad \text{o equivalentemente} \quad e = vv^*e + ev^*v$$

$$Q(v)e = 0 \quad \text{o equivalentemente} \quad ve^*v = 0.$$

Nos proponemos probar que $\{e,e,v\} = \frac{1}{2}(ee^*v + ve^*e)$ coincide con v ó $\frac{1}{2}\,v$.

En primer lugar veremos que tanto ee^*v como ve^*e son tripotentes. En efecto:

$$\{ee^*v, ee^*v, ee^*v\} = ee^*v(v^*ee^*)ee^*v = ee^*(vv^*e)e^*v =$$

$$= ee^*(e - ev^*v)e^*v = ee^*v - ee^*ev^*(ve^*v) = ee^*v.$$

Razonando análogamente se tiene $\{ve^*e, ve^*e, ve^*e\} = ve^*e$.

Por otra parte las igualdades:

$$Q(v)(ee^*v) = (vv^*e)e^*v = (e-ev^*v)e^*v = ee^*v-ev^*(ve^*v) = ee^*v$$

$$Q(ee^*v)v = ee^*(vv^*e)e^*v = ee^*(e - ev^*v)e^*v =$$
$$= ee^*v - ev^*(ve^*v) = ee^*v,$$

prueban que $ee^*v \leq v$. Un argumento análogo permite probar que $ve^*e \leq v$.

Dado que v es un tripotente minimal, y según ya conocemos minimal para la relación de orden, se deduce que ee^*v y ve^*e son cero o v. Si ambos tripotentes fuesen cero tendríamos que $\{e, e, v\} = \frac{1}{2}(ee^*v+ve^*e) = 0$ y por tanto $e \perp v$; lo que contradice la hipótesis. En otro caso $\{e, e, v\} = v$ o $\{e, e, v\} = \frac{1}{2}v$. Lo que concluye la prueba en este caso.

Supongamos que $E = \mathbf{IV_n}$ entonces por lo expuesto en el apartado 2.1.5, se sabe que $v = \frac{1}{2}(x+iy)$ y $E_1(v) = \{x\}^\perp \cap \{y\}^\perp$. Ahora como e es un tripotente en E se tiene que, bien es unitario, en cuyo caso $v \in E_2(e)$, o bien es minimal. En este último caso $e = \frac{1}{2}(a+ib)$, donde $a, b \in X_1$ y $\langle\, a\, ,\, b\,\rangle = 0$ y es fácil comprobar que $v \in \{a\}^\perp \cap \{b\}^\perp = E_1(e)$.

Un razonamiento análogo al factor spin se puede realizar en el caso del factor spin real de rango dos. Si E es el factor spin real de rango uno no hay nada que demostrar ya $E_1(v) = \{0\}$.

Sea E uno cualesquiera de los siguientes factores: $\mathbf{V}$, $\mathbf{VI}$, $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$, $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$ o $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$ y v, e en las hipótesis del lema. Según ya conocemos (ver Sección 1.1) las correspondiente proyecciones de Peirce asociadas a v y e conmutan. Además, por la Proposición 2.1.7, se tiene que $E_2(v) = \mathbb{K}v$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Por consiguiente, siguiendo el argumento de [27, Lemma 2.1] se tiene que

$P_j(e)v = P_j(e)P_2(v)v = P_2(v)P_j(e)v = \lambda_j v$, para $j \in \{0,1,2\}$ y $\lambda_j \in \mathbb{K}$. Por consiguiente

$$0 = P_2(e)P_1(e)v = \lambda_1 P_2(e)v = \lambda_1\lambda_2 v,$$

de donde se obtiene que $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, se tiene que $v \in E_0(e)$, es decir $v \perp e$, lo que contradice el hecho de que $e \in E_1(v)$. Por tanto λ_1 o λ_2 debe ser distinto de cero. Sea $j \in \{1,2\}$ tal que $\lambda_j \neq 0$. Ya que $0 = P_0(e)P_j(e)v = \lambda_j P_0(e)v = \lambda_j\lambda_0 v$ implica que $\lambda_0 = 0$, se tiene que $v \in E_j(e)$, como queríamos probar.

Finalmente, supongamos que $E = \mathbf{V}^{\mathbb{O}}$. Por la Proposición 2.1.7, E es un factor de Cartan real de rango uno y por tanto, en virtud de [50, Proposition 11.8], dados dos tripotentes minimales u y $\widetilde{u}$ en E, existe siempre un automorfismo $\Phi : E \to E$, tal que $\Phi(u) = \pm\widetilde{u}$. Todo ello nos lleva a que es suficiente probar la tesis del lema para un particular tripotente minimal en E. Por tanto supongamos que $v = (\mathbb{1}, 0)$. Un cálculo directo muestra que $E_1(v) = (0, a)$ y que para todo tripotente $e \in E_1(v)$ se tiene que $v \in E_1(e)$. □

Estamos ahora en condiciones de extender este Lema al caso general de JB*-triples reales y complejos.

Lema 2.2.12 *Sea U un JB*-triple real o complejo, v un tripotente minimal en U y e un tripotente en $U_1(v)$. Entonces $v \in U_1(e) \cup U_2(e)$.*

Demostración.- Como ya se comentó al principio de este capítulo, el bidual, U^{**}, es un JBW*-triple real o complejo con producto triple separadamente débil-* continuo, extendiendo al producto triple en U. Además, dado un tripotente $u \in U$ podemos asegurar, via el Teorema de Goldstine, que

$$(U^{**})^j(u) = \overline{U^j(u)}^{w^*} \quad \text{y} \quad (U^{**})_k(u) = \overline{U_k(u)}^{w^*},$$

para cada $j \in \{0, 1, -1\}$, $k \in \{0, 1, 2\}$. Por consiguiente todo tripotente minimal en U es a su vez minimal en U^{**} y por tanto no es restrictivo considerar que U es un JBW*-triple real o complejo.

Por los teoremas de Descomposición Atómica para JB*-triples reales y complejos es claro que v está contenido en la parte atómica de U y por tanto en una ℓ_∞-suma de factores de Cartan reales y realificaciones de factores de Cartan complejos o de factores de Cartan complejos. La ortogonalidad de la suma unido a la minimalidad de v fuerzan que $v \in C_\alpha$, para un único factor de Cartan real o complejo, C_α. Ahora, si se tiene en cuenta las igualdades $U_1(v) = (C_\alpha)_1(v)$, $U_1(e) = (C_\alpha)_1(e)$ y $U_2(e) = (C_\alpha)_2(e)$, es claro que tampoco es restrictivo suponer que U es un factor de Cartan real o complejo. Por consiguiente el lema anterior permite concluir la prueba. $\square$

El Lema 2.2.12, junto con las principales ideas de la demostración dada por Dang y Friedman en el caso de JBW*-triples, nos van a permitir extender al ambiente de JB*-triples reales o complejos el resultado conocido como "Triple System Analyzer", al que anteriormente nos hemos referido.

Teorema 2.2.13 *Sea U un JB*-triple real o complejo conteniendo un tripotente minimal v. Sea u un tripotente en $U_1(v)$. Entonces se tiene que:*

1. *u es minimal en U si y solo si u y v son colineales.*

2. *u no es minimal en U si y solo si (v, u) forman un pretriángulo. En este caso $\widetilde{v} = Q(u)v$ es un tripotente minimal. Si además u no es minimal en $U_1(v)$, entonces existen dos tripotentes minimales ortogonales en U, u_1, $\widetilde{u}_1$, ambos contenidos en $U_1(v)$, tales que $u = u_1 + \widetilde{u}_1$ y $(u_1, v, \widetilde{u}_1, \widetilde{v})$ forma un cuadrángulo.*

Demostración.- El Lema 2.2.12 nos da que $v \in U_2(u) \cup U_1(u)$.

Supongamos que $v \in U_2(u)$. En este caso el par (v, u) forma un pre-trángulo. Como ya conocemos (ver si acaso Sección 1.1), si tomamos $\widetilde{v} = Q(u)v$, la tripleta $(v, u, \widetilde{v})$ forma un trángulo y $\widetilde{v}$ es un tripotente minimal ya que $Q(u)$ es un automorfismo (lineal o conjugado lineal) de triples sobre $U_2(u)$. De la ortogonalidad entre v y $\widetilde{v}$ se tiene que $v + \widetilde{v}$ es un tripotente que claramente pertenece a $U^1(u)$. En consecuencia si u es minimal, tenemos que u se puede expresar como suma de dos tripotentes ortogonales, lo cual es una contradicción.

Hemos probado pues que si (v, u) forman un pre-trángulo entonces u no puede ser minimal. También hemos probado que si u es minimal entonces $v \in U_1(u)$ y por tanto u y v son colineales.

Supongamos ahora que u y v son colineales. Entonces el operador de Bergman $B(v+u, v+u)$ de U en U es un automorfismo que aplica v en u (ver [55, pag. 1501]) y por tanto u es minimal en U.

Ahora es claro que si u no es minimal necesariamente (v, u) forma un pre-trángulo y por tanto para finalizar, solo nos queda comprobar los comentarios del segundo caso. La Nota 4.1.5 y los comentarios que preceden al Teorema 4.2.4 nos permiten asegurar que para cada tripotente minimal, e, en un JB*-triple real o complejo E, el subespacio de Peirce $E_1(e)$ es isomorfo como espacio de Banach a un espacio de Hilbert, lo que en particular implica que $E_1(e)$ es un espacio de Banach dual y por tanto un JBW*-triple real o complejo. Por consiguiente, si el tripotente u no es minimal en el JBW*-triple $U_1(v)$, entonces existen dos tripotentes ortogonales en $U_1(v)$, u_1 y $\widetilde{u}_1$, tales que $u = u_1 + \widetilde{u}_1$. Aplicando nuevamente el Lema 2.2.12 a v y u_1 se tiene que $v \in U_2(u_1) \cup U_1(u_1)$. Dado que $v = \{u, u, v\} = \{u_1, u_1, v\} + \{\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_1, v\}$, es claro que si $v \in U_2(u_1)$ entonces $v \perp \widetilde{u}_1$, lo que contradice el hecho de que $\widetilde{u}_1 \in U_1(v)$. En consecuencia tenemos que $v \in U_1(u_1)$, $v \in U_1(\widetilde{u}_1)$ y aplicando el caso 1 se desprende que u_1 y $\widetilde{u}_1$ son tripotentes minimales. Ahora claramente se tiene que $(u_1, v, \widetilde{u}_1, \widetilde{v})$ forma un cuadrángulo. □

Los lemas que siguen a continuación, inspirados en el caso complejo, muestran la forma de combinar cuadrángulos para obtener nuevos cuadrángulos. Estos resultados serán de utilidad a la hora de construir parrillas para ciertos factores de Cartan excepcionales (Proposición 2.2.17 y Proposición 2.2.19).

Lema 2.2.14 *Sea U un JB*-triple real o complejo y sean (u_1, u_2, u_3, u_4) y (v_1, u_2, u_3, v_4) dos cuadrángulos. Si $u_1 \top v_1$ entonces (v_1, u_1, u_4, v_4) forma un cuadrángulo.*

Demostración.- Bastará probar que (v_1, u_1, u_4) forma un precuadrángulo y que $\{v_1, u_1, u_4\} = \frac{1}{2} v_4$. Dado que $u_4 = 2\{u_1, u_2, u_3\}$ se tiene que $u_4 \in U_0(v_1)$, es decir $u_4 \perp v_1$. Por otro lado

$$\{v_1, u_1, u_4\} = 2\{v_1, u_1, \{u_1, u_2, u_3\}\}.$$

Ahora aplicando la identidad de Jordan, las hipótesis de partida y teniendo en cuenta la aritmética de Peirce se tiene que

$$\{v_1, u_1, u_4\} = \{v_1, u_2, u_3\} = \frac{1}{2} v_4$$

lo que acaba la demostración. □

Lema 2.2.15 *Sea U un JB*-triple real o complejo y sean (u_1, u_2, u_3, u_4) y (v_1, u_2, v_3, u_4) dos cuadrángulos. Si todos los tripotentes de dichos cuadrángulos son minimales y uno entre $\{u_1, u_3\}$ es colineal a uno entre $\{v_1, v_3\}$, entonces $(u_1, v_1, u_3, -v_3)$ forma un cuadrángulo.*

Demostración.- Dada la estabilidad de los cuadrángulos por permutaciones cíclicas, asumamos sin pérdida de generalidad que $u_1 \top v_1$. Al igual que en el lema anterior, para probar que $(u_1, v_1, u_3, -v_3)$ forma un cuadrángulo solo tenemos que probar que $v_1 \top u_3$ y $\{u_1, v_1, u_3\} = -\frac{1}{2} v_3$. Dado que $u_3 = 2\{u_4, u_1, u_2\}$, se tiene que $u_3 \in U_1(v_1)$ y como u_3 es un tripotente minimal el Teorema 2.2.13 nos da que $v_1 \top u_3$. Por otro lado

$$\{u_1, v_1, u_3\} = 2\{u_1, v_1, \{u_4, u_1, u_2\}\}.$$

Aplicando la identidad de Jordan, las hipótesis de partida, la aritmética de Peirce y teniendo en cuenta que el producto triple de tres tripotentes minimales mutuamente colineales es nulo, se deduce que

$$\{u_1, v_1, u_3\} = -\{u_4, v_1, u_2\} = -\frac{1}{2} v_3$$

lo que termina la prueba. □

En lo que sigue utilizaremos las siguientes notaciones: $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $I_i = I - \{i\}$ para cada $i \in I$ y $\varphi := (i, j, k, l, m, n)$ denotará cualquier permutación de la sextupla $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$. Denotaremos $\operatorname{sign}(\varphi) = 1$ o $\operatorname{sign}(\varphi) = -1$ dependiendo de que la permutación φ sea par o impar. Finalmente V denotará un sistema de Jordan real o complejo.

Definición 2.2.16 *Para cualquier índice i en I fijo, una familia de tripotentes minimales $\mathcal{F} = \{u_i, u_{jk}, u_n : j, k, n, \in I_i\}$ en V, se llamará **parrilla excepcional de primer tipo** si satisface:*

(i) $\{u_{jk} : j, k \in I_i\}$ *es una parrilla simpléctica.*

(ii) Para cada j, k, l, s, t en I_i, se tiene

$$u_i \top u_{jk},\ u_i \perp u_k$$

$$
\begin{aligned}
u_k \perp u_{st} & \qquad si\ k \in \{s,t\} \\
u_k \top u_{st} & \qquad si\ k \notin \{s,t\} \\
u_k \top u_l & \qquad si\ k \neq l.
\end{aligned}
$$

(iii) Los productos triples no nulos entre elementos de $\mathcal{F}$ son de la forma $L(x,x)y$ o bien de la forma $\{x,y,z\}$ donde (x,y,z) forman un pre-cuadrángulo en un cuadrángulo de uno de los siguientes tres tipos:

a) $(u_{jk}, u_{jl}, u_{ml}, u_{mk})$

b) $(sign(\varphi)u_i, u_{jk}, u_l, u_{mn})$

c) $(u_j, u_k, -u_{jl}, u_{kl}),\quad$ *donde* $j,k,l,m,n \in I_i$.

En [15, Case 6, Proposition] se describe explícitamente la construcción de una tal parrilla en el factor de Cartan $\mathbf{V}$. Esa misma construcción se puede realizar en el caso del factor de Cartan real $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$, como veremos a continuación.

Proposición 2.2.17 *Todo factor de Cartan complejo de tipo* $\mathbf{V}$ *y todo factor de Cartan real de tipo* $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ *es la expansión lineal de una parrilla excepcional de primer tipo.*

Demostración.- Si $E = \mathbf{V}$ remitimos al lector a [15]. Sea pues $E = \mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ y tomemos el siguiente tripotente minimal

$$v = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , 0 \right)$$

en E. Por definición $\widehat{E} = \mathbf{V}$ y dado que E es un JB*-triple reducido (ver Proposición 2.1.7), v es también un tripotente minimal en $\widehat{E}$. Un cálculo rutinario prueba que existe en $\widehat{E}$ un tripotente minimal, $\widetilde{v}$, satisfaciendo las hipótesis de la Proposición en

[15, pag. 322]. Por consiguiente, como se afirma en la prueba de dicha proposición, el espacio de Peirce $\widehat{E}_1(v)$ es isométricamente isomorfo al factor de Cartan $\mathbf{II_5}$. Ya que $E_1(v) = \widehat{E}_1(v)^\tau$, la clasificación de los factores de Cartan reales dada en la Sección 1.4 nos da que $E_1(v)$ es isométricamente isomorfo al factor de Cartan real $\mathbf{II_5^{\mathbb{R}}}$. Por tanto la Proposición 2.2.4 asegura la existencia de una parrilla simpléctica en $E_1(v)$ a la que notaremos $\{u_{ij}\}_{i,j\in I_0}$. Denotemos por u_0 a v y definamos para todo índice $l \in I_0$

$$u_l = sign(\varphi)2\{u_{jk}, u_0, u_{mn}\},$$

donde $\varphi = (0, j, k, l, m, n)$ y $j < k < m < n$. Tomando $u = u_{jk} + u_{mn}$ el Teorema 2.2.13 en su apartado 2 asegura que $u_l = sign(\varphi)Q(u)v$ es un tripotente minimal en E. Para comprobar que la familia $\{u_0, u_{jk}, u_n : j, k, n, \in I_0\}$ es una parrilla excepcional de primer tipo basta seguir los argumentos dados en [15, Lemma pag. 320] sustituyendo Lemma 1.8 y Proposition 1.10 por los lemas 2.2.15 y 2.2.14 respectivamente. Dado que la parrilla está formada por 16 tripotentes minimales linealmente independientes y la dimensión de $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ es precisamente 16, la prueba queda concluida. □

Denotemos por ϵ el signo + o −.

Definición 2.2.18 *Una familia de tripotentes minimales* $\mathcal{G} = \{u_n^\epsilon, u_{ij} : i, j, n, \in I;\ \epsilon = \pm\}$ *en* V *es una* ***parrilla excepcional de segundo tipo*** *si*

(i) $\{u_{ij}\}_{i,j\in I}$ *es una parrilla simpléctica.*

(ii) Para cada $i \in I$ *y* $\epsilon = \pm$, *la familia* $\{-\epsilon u_i^\epsilon, u_{jk}, u_n^{-\epsilon} : j, k, n \in I_i\}$ *es una parrilla excepcional de primer tipo.*

(iii) Los cuadrángulos de la familia $\mathcal{G}$ son aquellos descritos en los apartados (i) y (ii) o los de la forma

$$(u_j^{\epsilon}, u_j^{-\epsilon}, u_k^{-\epsilon}, u_k^{\epsilon}) \text{ para } j, k \in I \text{ distintos.}$$

(iv) Todos los productos triples no nulos entre elementos de $\mathcal{G}$ son bien de la forma $L(x,x)y$ o $\{x,y,z\}$ donde (x,y,z) formen un pre-cuadrángulo.

Es conocido que el factor de Cartan de tipo **VI** admite una parrilla excepcional de segundo tipo (ver [15, case 7, Proposition]. Al igual que en el caso del factor de Cartan $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$, nosotros probamos ahora que el factor de Cartan real $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$ es la expansión lineal de una parrilla excepcional de segundo tipo, parrilla que construimos a continuación.

Proposición 2.2.19 *Todo factor de Cartan complejo de tipo* **VI** *y todo factor de Cartan real de tipo* $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$ *es el cierre débil–* de la expansión lineal de una parrilla excepcional de segundo tipo.*

Demostración.- El caso de **VI** se puede encontrar en [15]. Así pues supongamos $E = \mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$. Definimos

$$-u_0^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

el cual es un tripotente minimal en E. Utilizando la inmersión del factor de Cartan real $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ en E (ver sección 1.4), se puede comprobar que $E_1(-u_0^+)$ es isométricamente isomorfo a $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$. Ahora la Proposición 2.2.17 asegura la existencia de una parrilla excepcional de primer tipo en $E_1(-u_0^+)$ que notaremos por $\{u_0^-, u_{jk}, u_n^+ : j,k,n \in I_0\}$. Definamos ahora

$$u_l^- = sign(\varphi) 2 \left\{u_{jk}, -u_0^+, u_{mn}\right\},$$

donde $\varphi = (0, j, k, l, m, n)$, $j < k < m < n$ y

$$u_{i0} = 2\left\{u_{ij}, -u_0^+, u_j^+\right\},$$

donde $i \in I_0$ y j es algún índice en $I \cap I_i$. Al igual que en la proposición anterior, utilizando los Lema 2.2.15 y 2.2.14 en los argumentos dados en [15, Case 7, Proposition] se prueba que $\{u_n^\epsilon, u_{ij} \ : \ i, j, n, \in I;\ \epsilon = \pm\}$ es una parrilla excepcional de segundo tipo. Dado que $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$ tiene dimensión 27, la parrilla que acabamos de construir genera dicho factor de Cartan real. $\square$

Capítulo 3

Aspectos geométricos en la teoría de los JB*-triples

Este capítulo está dedicado fundamentalmente a estudiar las conexiones existentes entre la estructura geométrica de la bola unidad de un JB*-triple real o complejo y la estructura algebraica asociada a dicho JB*-triple. Como ya hemos comentado en la introducción, en la categoría de los JB*-triples complejos, las isometrías lineales sobreyectivas coinciden con los isomorfismos de triples. Este resultado es uno de los principales atractivos de la clase de los JB*-triples complejos y pone de manifiesto la profunda conexión entre los aspectos algebraicos y geométricos en un JB*-triple. En el ambiente de los JB*-triples reales es conocido que no toda isometría lineal sobreyectiva es un isomorfismo de triples. Sin embargo, si se conoce que toda isometría lineal sobreyectiva entre JB*-triples reales conserva cubos. En realidad este último resultado es suficiente en el caso complejo para probar la equivalencia entre las isometrías lineales sobreyectivas y los isomorfismos de triples.

Los objetivos de este capítulo no son otros que los de afrontar, desde el punto de vista de la geometría de los espacios de Banach, la relación existente entre las isometrías sobreyectivas y los isomorfismos de triples.

En una primera sección obtenemos una caracterización geométrica de los tripotentes en un JB*-triple real o complejo en términos de la estructura del espacio de Banach subyacente. En la literatura aparecen algunas otras caracterizaciones geométricas de las isometrías parciales en un álgebra de von Neumann y de los elementos tripotentes en JBW*-triples (ver [16], [37] y [22]). Todas ellas dependen de la descripción de las caras norma cerradas de la bola unidad del predual de un JBW*-triple. Recientemente, C. Akemann y N. Weaver obtienen una caracterización de las isometrías parciales de una C*-álgebra en términos de la geometría de la bola unidad de dicha C*-álgebra. El principal resultado de la primera sección de este capítulo extiende la caracterización de Akemann y Weaver al ambiente más natural de los JB*-triples reales y complejos.

Dedicamos la segunda sección de este capítulo a la obtención de un teorema de tipo Kaup-Banach-Stone para JB*-triples reales. Pretendemos dar una descripción de aquellos JB*-triples reales donde las isometrías lineales sobreyectivas sean isomorfismos de triples.

3.1. Caracterización geométrica de los tripotentes en JB*-triples complejos y reales

Sea x un elemento de norma uno en un espacio de Banach X y notemos por X^* al dual de X. El conjunto $D(X, x)$ de todos los **estados relativos a** x se define como

$$D(X,x) = \{f \in X^* : \ \|f\| = f(x) = 1\}.$$

Los teoremas de Hahn-Banach y Banach-Alaoglu permiten afirmar que $D(X,x)$ es un subconjunto no vacío, convexo y débil-* compacto de X^*. Si $D(X,x)$ separa puntos de X, es decir, para cada $x \in X - \{0\}$ existe un $f \in D(X,x)$ tal que $f(x) \neq 0$, entonces se dice que x es un **vértice de la bola unidad** de X. Es bien conocido que la unidad es un vértice de la bola unidad en cualquier álgebra de Banach compleja unital [10, Corollary 10.15].

Si X es un espacio de Banach con predual X_* y S es un subconjunto de X_*, notaremos por

$$S^\diamond := \{f \in X_* : \ \|f \pm g\| = \|f\| + \|g\| \text{ para todo } g \in S\}.$$

En lo que sigue nos tomaremos la licencia de ver X_* como un subespacio de X^* sin más que identificar X_* con su inclusión canónica en X^*.

Recordemos que una **W*-álgebra o álgebra de Von Neumann** es una C*-álgebra, $\mathcal{A}$, la cual es un espacio de Banach dual. A los elementos del predual, $\mathcal{A}_*$, se les conoce con el nombre de funcionales normales.

Recordemos también que un elemento p de una C*-álgebra (respectivamente, JB*-álgebra) se dice que es una **proyección** si es un idempotente simétrico ($p = p^* = p^2$). Un elemento a en una C*-álgebra se dice que es una **isometría parcial** si aa^* es una proyección (o equivalentemente $aa^*a = a$). En álgebras de Von Neumann las isometrías parciales juegan un papel análogo al que desempeña $\exp(i\theta)$ en la descomposición polar de un número complejo. Por otra parte también es bien conocido (ver [61, 2.2.8]) que cuando una C*-álgebra es vista como un JB*-triple, entonces las isometrías parciales y los tripotentes coinciden.

T. Dang, Y. Friedman y B. Russo [16, Lemma 5], prueban la siguiente caracterización geométrica de las isometrías parciales en un álgebra de Von Neumann:

Sea a un elemento de un álgebra de Von Neumann $\mathcal{A}$. Entonces a es una isometría parcial distinta de cero si y solo si $\|a\| = 1$, $D(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{A}_* \neq \emptyset$ *y* $f(a) = 0$ *para todo* $f \in (D(\mathcal{A}, a) \cap \mathcal{A}_*)^\diamond$

Para obtener esta caracterización, los citados autores utilizan entre otros los siguientes resultados en álgebras de Von Neumann: el Teorema espectral, la descomposición polar de operadores y funcionales, la descomposición de Jordan de funcionales normales hermitianos y el teorema de Neutralidad de E. G. Effros para funcionales normales.

Según ya conocemos (ver Nota 1.2.2), el subtriple $C(x)$ engendrado por un elemento x en un JB*-triple $\mathcal{E}$, es isométricamente isomorfo a un $C_0(\Omega)$, si además $\mathcal{E}$ es un JBW*-triple entonces el subtriple débil-* cerrado generado por x es isométricamente isomorfo a un álgebra de Von Neumann conmutativa. Este hecho, unido a teoría básica de JB*-triples, permiten a Dang, Friedman y Russo extender las técnicas empleadas en la prueba de la caracterización de las isometrías parciales, a la que antes nos hemos referido, al caso de JBW*-triples; obteniendo así una caracterización de los tripotentes de un JBW*-triple, en los mismos términos que la antes citada para isometrías parciales.

Recientemente, C. A. Akemann y N. Weaver han obtenido una caracterización geométrica de las isometrías parciales en C*-álgebras, en términos de su estructura de espacio de Banach. Más concretamente, en [1] dichos autores han probado que un elemento de norma uno, x, en una C*-álgebra $\mathcal{A}$ es una isometría parcial si y solo si los conjuntos

$$D_1(x) = \{y \in \mathcal{A} : \text{ existe } \alpha > 0 \text{ con } \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| = 1\}$$

y

$$D_2(x) = \{y \in \mathcal{A} : \|x + \beta y\| = \max\{1, \|\beta y\|\} \text{ para todo } \beta \in \mathbb{C}\}$$

coinciden.

De nuevo, en vista de la coincidencia de las isometrías parciales y los tripotentes en el caso de C*-álgebras, cabe preguntarse si la igualdad entre $D_1(x)$ y $D_2(x)$ caracteriza a los elementos tripotentes en el ambiente más natural de los JB*-triples. En caso afirmativo, tendríamos una extensión del resultado de Akemann y Weaver al caso de JB*-triples.

Nuestro primer objetivo en esta sección consiste en responder afirmativamente a la cuestión anterior. Las técnicas de demostración se basan en teoría elemental de M-estructura de JB*-triples y en hechos bien conocidos tales como la propiedad local de los JB*-triples o que el subespacio $\mathcal{E}_2(e)$ asociado a un tripotente es una JB*-álgebra. En aras de complitud y claridad, formulamos la siguiente proposición que recoge una serie de útiles resultados que se siguen fácilmente de [27, Lemma 1.3, Proposition 1 y Lemma 1.6].

Proposición 3.1.1 *Sean $\mathcal{E}$ un JB*-triple y $e \in \mathcal{E}$ un tripotente. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) Para cada $x \in \mathcal{E}_2(e)$ y $z \in \mathcal{E}_0(e)$ se verifica que $\|x + z\| = \text{máx}\{\|x\|, \|z\|\}$.

(b) $f = f \circ P_2(e)$ para todo $f \in D(\mathcal{E}, e)$.

(c) *Si y es un elemento de norma uno en $\mathcal{E}$ y $P_2(e)y = e$, entonces $P_1(e)y = 0$.* □

El siguiente teorema caracteriza a los tripotentes en un JB*-triple $\mathcal{E}$ en términos de la geometría del espacio de Banach subyacente a $\mathcal{E}$, proporcionando además una caracterización geométrica del subespacio de Peirce $\mathcal{E}_0(e)$ asociado a un tripotente e.

Teorema 3.1.2 *Sea $\mathcal{E}$ un JB*-triple y sea x un elemento de norma uno en $\mathcal{E}$. Entonces x es un tripotente si y solo si*

$$D_1(x) = \{y \in \mathcal{E} : \text{ existe } \alpha > 0 \text{ con } \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| = 1\}$$

coincide con

$$D_2(x) = \{y \in \mathcal{E} : \|x + \beta y\| = \text{máx}\{1, \|\beta y\|\} \text{ para todo } \beta \in \mathbb{C}\}.$$

En particular si x es un tripotente se tiene que $D_1(x) = \mathcal{E}_0(x) = D_2(x)$.

Demostración.- La inclusión $D_2(x) \subseteq D_1(x)$ se cumple para todo espacio normado y todo elemento de norma uno en él. De esta forma, si x es un tripotente en $\mathcal{E}$, para probar la igualdad entre $D_1(x)$ y $D_2(x)$, solo nos falta demostrar que $D_1(x) \subseteq D_2(x)$. En vista de la Proposición 3.1.1 (a), tenemos que $\|x \pm y\| = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$ para cada $y \in \mathcal{E}_0(x)$. En consecuencia, $\mathcal{E}_0(x)$ está contenido en $D_2(x)$. Así pues si probamos que $D_1(x) \subseteq \mathcal{E}_0(x)$ tendremos la igualdad $D_1(x) = \mathcal{E}_0(x) = D_2(x)$.

Es oportuno recordar que $\mathcal{E}_2(x)$ es una JB*-álgebra compleja unital con unidad x y además, por la Proposición 3.1.1 (b), se tiene que $D(\mathcal{E}, x) = D(\mathcal{E}_2(x), x)$. Por otra parte es conocido que x es un vértice de la bola unidad de $\mathcal{E}_2(x)$ (ver si acaso [51, Corolario IV.2.6]). Por consiguiente $D(\mathcal{E}, x)$ separa puntos de $\mathcal{E}_2(x)$.

Sean pues $y \in D_1(x)$ y $\alpha > 0$ tales que $\|x \pm \alpha y\| = 1$ y sea $f \in D(\mathcal{E}, x)$. Dado que $|f(z)| \leq \|z\|$ para todo $z \in \mathcal{E}$, se tiene que

$$1 = \|x \pm \alpha y\|^2 \geq |f(x \pm \alpha y)|^2 = (f(x) \pm \alpha f(y))\overline{(f(x) \pm \alpha f(y))} =$$

$$= (1 \pm \alpha f(y))\overline{(1 \pm \alpha f(y))} = 1 + \alpha^2 |f(y)|^2 \pm 2\alpha \mathcal{R} f(y).$$

Por tanto $f(y) = 0$ para todo $f \in D(\mathcal{E}, x)$ lo que nos lleva a afirmar que $P_2(x)(y) = 0$. Por consiguiente, si tomamos $z = x + \alpha y$ se tiene que $P_2(x)(z) = x$. Ya que $\|z\| = 1$, la Proposición 3.1.1 (c) nos da que $P_1(x)(z) = \alpha P_1(x)(y) = 0$. Podemos concluir que $y \in \mathcal{E}_0(x)$.

Sea ahora x un elemento en $\mathcal{E}$ de norma uno que no es un tripotente en $\mathcal{E}$. Sea C el JB*-subtriple de $\mathcal{E}$ generado por x. Recordemos que existe un espacio localmente compacto $S_x \subseteq [0, 1]$ tal que $S_x \cup \{0\}$ es compacto, así como un isomorfismo isométrico de triples $F : C \to C_0(S_x)$, donde $C_0(S_x)$ es la C*-álgebra de todas las funciones complejo valuadas sobre S_x anulándose en el cero y $F(x)(t) = t$ para todo $t \in S_x$ (véase [40, 4.8] y [40, 1.15]). Como $F(x)$ no es un tripotente en $C_0(S_x)$ tenemos que $S_x \cap]0, 1[\neq \emptyset$. Tomemos g en $C_0(S_x)$ dado por $g(t) := (t - t^3)^9$. Como el valor mínimo de $(1-t)(t-t^3)^{-9}$ es estrictamente mayor que uno en $]0, 1[$, tenemos que $(1 - t) \geq g(t)$ para todo $t \in S_x$, de donde se sigue que

$$\|F(x) \pm g\| = sup\{|F(x)(t) \pm g(t)|, \ t \in S_x\} =$$

$$= sup\{|t \pm g(t)|, \ t \in S_x\} = 1.$$

Por otra parte dado que $g \in C(S_x \cup \{0\})$, $g(0) = 0 = g(1)$, $g \geq 0$ y g no es idénticamente nula, existirá $t_0 \in S_x \cap]0, 1[$ tal que $\|g\| = g(t_0)$. Por tanto

$$\|F(x) + \frac{1}{\|g\|} g\| \geq |t_0 + \frac{g(t_0)}{\|g\|}| = 1 + t_0 > 1.$$

En consecuencia, si tomamos $y = F^{-1}(g) = (x - x^3)^9$, entonces $y \in D_1(x)$ y sin embargo $y \notin D_2(x)$. Hemos probado que si $x \in \mathcal{E}$ es un elemento de norma uno tal que $D_1(x) = D_2(x)$ entonces x es necesariamente un tripotente en $\mathcal{E}$. $\square$

Como ya conocemos, todo JB*-triple complejo, $\mathcal{E}$, es un JB*-triple real sin más que considerar el espacio de Banach real subyacente y el conjunto de los tripotentes de $\mathcal{E}$ es independiente de que $\mathcal{E}$ sea visto como espacio de Banach complejo o real, dicho de otra forma, el hecho de que un elemento sea tripotente no depende del cuerpo base elegido. Sería pues deseable que en el teorema anterior el conjunto $D_2(x)$ pudiera ser substituido por el siguiente otro:

$$D_2'(x) := \{y \in E : \|x + \beta y\| = \text{máx}\{1, \|\beta y\|\} \text{ para todo } \beta \in \mathbb{R}\}.$$

A continuación probamos que la igualdad entre $D_1(x)$ y $D_2'(x)$ caracteriza a los tripotentes en JB*-triple reales y en consecuencia caracteriza a su vez a los tripotentes en JB*-triples complejos. También obtenemos una caracterización geométrica del subespacio de Peirce $E_0(e)$ asociado a un tripotente en un JB*-triple real.

Teorema 3.1.3 *Sea E un JB*-triple real y sea x un elemento de norma uno en E. Entonces x es un tripotente si y solo si*

$$D_1(x) = \{y \in E : \textit{ existe } \alpha > 0 \textit{ con } \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\| = 1\}$$

coincide con

$$D_2'(x) = \{y \in E : \|x + \beta y\| = max\{1, \|\beta y\|\} \textit{ para todo } \beta \in \mathbb{R}\}.$$

En particular si x es un tripotente se tiene que $D_1(x) = E_0(x) = D_2'(x)$.

Demostración.- Supongamos que x es un tripotente en E y por tanto un tripotente en $\widehat{E}$, la complexificación de E. Por el Teorema 3.1.2 tenemos

$$D_1^{\mathbb{C}}(x) = \{y \in \widehat{E} : \text{ existe } \alpha > 0 \text{ con } \|x \pm \alpha y\| = 1\} =$$

$$= D_2^{\mathbb{C}}(x) = \{y \in \widehat{E} : \|x+\beta y\| = \max\{1, \|\beta y\|\} \text{ para todo } \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Si $y \in D_1(x)$ entonces $y \in D_1^{\mathbb{C}}(x) = D_2^{\mathbb{C}}(x) = \widehat{E}_0(x)$ y por tanto $y \in E_0(x)$, lo que prueba la inclusión de $D_1(x)$ en $E_0(x)$. Por otra parte, dado que la norma en E coincide con la norma en su complexificación, de nuevo la Proposición 3.1.1 (a) asegura que $E_0(x) \subseteq D_2'(x)$. Finalmente, teniendo en cuenta que $D_2'(x) \subseteq D_1(x)$, podemos asegurar que $D_1(x) = D_2'(x) = E_0(x)$.

Supongamos ahora que x no es un tripotente en E. Denotemos por τ a la conjugación canónica que satisface $\widehat{E}^\tau = E$. Como x no es tampoco un tripotente en $\widehat{E}$, se sigue de la segunda parte de la demostración del Teorema 3.1.2 que tomando $y = (x-x^3)^9$, se tiene que $\|x \pm y\| = 1$ y sin embargo $\|x + \frac{y}{\|y\|}\| > 1$. Por otra parte, como τ conserva productos triples y $\tau(x) = x$, se deduce que $\tau(y) = y$. Todo ello prueba que $y \in D_1(x)$ y sin embargo $y \notin D_2'(x)$. En consecuencia la coincidencia de los conjuntos $D_1(x)$ y $D_2'(x)$ fuerza que x sea un tripotente. $\square$

En [45, Proposition 3.5] W. Kaup y H. Upmeier probaban que los puntos extremos de la bola unidad de un JB*-triple complejo $\mathcal{E}$ son precisamente los tripotentes completos de $\mathcal{E}$. En [37, Lemma 3.3] J. M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez demostraban que la misma conclusión es cierta en el caso de JB*-triples reales. Por otra parte, en virtud del Teorema 3.1.3, los tripotentes completos en un JB*-triple real coinciden con aquellos elementos x de norma uno, tales que $D_1(x) = 0$. Esta observación nos permite reencontrar de una forma directa los resultados anteriormente mencionados.

Corolario 3.1.4 *Sean E un JB*-triple real o complejo y x un elemento de norma uno en E. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) x es un tripotente completo.

(b) $D_1(x) = \{0\}$.

(c) x es un punto extremo de la bola unidad cerrada de E.

Demostración.- La equivalencia entre (a) y (b) se sigue directamente del Teorema 3.1.3.

Supongamos ahora que $D_1(x) = 0$. Sean ω, $z \in E$ tales que $\|\omega\| = 1 = \|z\|$ y $x = \frac{\omega+z}{2}$. Si notamos por $y = x - \omega$ se tiene que $\|x \pm y\| = 1$ lo que nos dice que $y \in D_1(x)$ y por tanto $x - \omega = y = 0$. En consecuencia x es un punto extremo de la bola unidad cerrada de E. Supongamos ahora que x es un punto extremo de la bola unidad de E y sea $y \in D_1(x)$. Entonces existe $\alpha > 0$ tal que $\|x+\alpha y\| = 1$, $\|x-\alpha y\| = 1$. Como x es la semisuma de $x + \alpha y$ y $x - \alpha y$ se deduce que $y = 0$. Tenemos probado pues la equivalencia entre (b) y (c) y con ello la demostración. $\Box$

C. Akemann y N. Weaver daban en [1] la siguiente caracterización de los elementos unitarios en C*-álgebras:

Teorema 3.1.5 *[1] Dado un elemento x de norma uno en una C*-álgebra unital, $\mathcal{A}$, entonces x es unitario ($xx^* = x^*x = 1$) si y solo si la envolvente lineal de $D(\mathcal{A}, x)$ es $\mathcal{A}^*$.* $\Box$

Recientemente, A. Rodríguez ha obtenido una prueba más simple del resultado anteriormente citado y ha extendido dicha caracterización al caso de tripotentes unitarios en JB*-triples [69]. Concretamente dicho autor ha probado el siguiente resultado:

Teorema 3.1.6 *[69] Sean $\mathcal{E}$ un JB*-triple y x un elemento de norma uno en $\mathcal{E}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *x es un tripotente unitario en $\mathcal{E}$.*

(b) *La envolvente lineal de $D(\mathcal{E}, x)$ es $\mathcal{E}^*$.*

(c) *x es un vértice de la bola unidad cerrada de $\mathcal{E}$.* □

Si consideramos $\mathbb{C}$ como un JB*-triple real, es claro que la unidad es un tripotente unitario y sin embargo las condiciones *(b)* y *(c)* del teorema anterior no son ciertas. Por consiguiente no cabe esperar un resultado análogo para el caso de JB*-triples reales. No obstante, utilizando el Corolario 3.1.4 podemos obtener la siguiente proposición.

Proposición 3.1.7 *Sea E un JB*-triple real y sea u un elemento de norma uno en E. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *La envolvente lineal de $D(E, u)$ coincide con E^*.*

(b) *u es un vértice de la bola unidad cerrada de E.*

(c) *E es una JB-álgebra con unidad u y producto $x \circ y = \{x, u, y\}$.*

Además cualquiera de las tres condiciones implica que u es un elemento unitario en E.

Demostración.- La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ es trivialmente cierta. Para probar $(b) \Rightarrow (c)$ primero procedemos a probar que un vértice de la bola unidad de un espacio de Banach es un punto extremo de la bola unidad. En efecto sea u un vértice de la bola unidad de E y supongamos que existen x, y de norma uno tales que $u = \frac{x+y}{2}$. Ya que para cada $f \in D(E,u)$ se tiene $\frac{f(x)+f(y)}{2} = f(u) = 1$, $|f(x)| \leq 1$ y $|f(y)| \leq 1$ y por consiguiente $f(x) = 1 = f(y)$. Ahora bien, como $D(E,u)$ separa puntos, se cumple $x = u = y$ y por tanto u es un punto extremo de la bola unidad cerrada. Ahora, la proposición 3.1.4 asegura que u es un tripotente completo y la descomposición de Peirce nos da que $E = E^1(u) \oplus E^{-1}(u) \oplus E_1(u)$. Por otra parte, es conocido (ver [64, Lemma 2.7]) que si f pertenece a $D(E,u)$, entonces $f = f \circ P^1(u)$. Por consiguiente podemos afirmar que $f(y) = 0$ para cada $y \in E^{-1}(u) \oplus E_1(u)$ y $f \in D(E,u)$. Nuevamente el hecho de que u es un vértice de la bola unidad garantiza que $E^{-1}(u) \oplus E_1(u) = \{0\}$ y por tanto $E = E^1(u)$ es una JB-álgebra unital satisfaciendo las condiciones de (c). Para terminar basta tener en cuenta que en una JB-álgebra unital la envolvente lineal de los estados relativos a la unidad coincide con su dual (ver [31, Lemma 3.6.8 y Lemma 1.2.6]). □

Nota 3.1.8 *J. Martínez, J. F. Mena, R. Payá y A. Rodríguez tienen probado (incluso en el ambiente más general de espacios de Banach, [52, Theorem 3.2]) que la condición* (a) *en la proposición anterior es equivalente al hecho de que el índice numérico del espacio de rango numérico* (E,u) *sea mayor que cero. Por otra parte, J. M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez establecían en [37, Corollary 3.4] que la condición* (c) *es equivalente al hecho de que* u *sea un punto extremo aislado de la bola unidad cerrada de* E.

3.2. El Teorema de Banach-Stone para JB*-triples reales

La caracterización geométrica de los tripotentes en un JB*-triple real o complejo que hemos visto en la sección anterior, nos permite dar una cómoda prueba del Teorema de Banach-Stone para JB*-triples, usando técnicas estándar. Asimismo obtendremos el hecho probado en [37], que asegura que las isometrías sobreyectivas entre JB*-triples reales conmutan con la operación cubo. A este menester le dedicamos la primera parte de esta sección y para su mejor comprensión comenzamos recopilando algunos hechos básicos que serán utilizados más tarde.

Sea E un JB*-triple real o complejo. Un elemento $a \in E$ se dice **algebraico** si es una combinación lineal finita de tripotentes mutuamente ortogonales. Es bien conocido que los elementos algebraicos son norma densos en un JBW*-triple real o complejo (ver [34, Lemma 3.1] y apartado $i) \Rightarrow ii)$ de la demostración de Theorem 4.8 en [37]).

El siguiente teorema, establecido por L. A. Harris en el caso particular de J*-álgebras [32, Theorem 4], fue probado originariamente por W. Kaup en [42] utilizando holomorfía infinito dimensional y constituye uno de los resultados más famosos y útiles en la teoría de los JB*-triples. Este resultado engloba no solo al teorema original de Kadison para el caso de C*-álgebras unitales, sino también las extensiones al caso de C*-álgebras no unitales y de JB*-álgebras (ver [39], [60] y [85] respectivamente), demostrando que el ambiente apropiado para su formulación es precisamente el de los JB*-triples.

Teorema 3.2.1 *Sea $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ una isometría sobreyectiva entre dos JB*-triples. Entonces Φ es un isomorfismo de triples.*

Demostración.- Gracias al Teorema de Hahn-Banach podemos afirmar que la aplicación bi-traspuesta de Φ, Φ^{**}, es también una isometría sobreyectiva entre los JBW*-triples $\mathcal{E}^{**}$ y $\mathcal{F}^{**}$. Además, el producto triple en $\mathcal{E}^{**}$ y $\mathcal{F}^{**}$ extiende a los respectivos productos triples en $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$. Por tanto, salvo considerar Φ^{**} en el lugar de Φ, podemos asumir que Φ es una isometría sobreyectiva entre dos JBW*-triples.

Si x es un elemento de norma uno en $\mathcal{E}$, es claro que toda isometría sobreyectiva conserva los conjuntos $D_1(x)$ y $D_2(x)$ definidos en el Teorema 3.1.2 y por consiguiente $\Phi(Tri(\mathcal{E})) = Tri(\mathcal{F})$. Por otra parte ya que dos tripotentes e y f en $\mathcal{E}$ son ortogonales si y solo si $f \in \mathcal{E}_0(e) = D_1(e)$ se tiene que una tal isometría conserva la relación de ortogonalidad entre tripotentes. En consecuencia Φ conserva cubos de elementos algebraicos, es decir $\Phi(\{a,a,a\}) = \{\Phi(a),\Phi(a),\Phi(a)\}$ para todo a elemento algebraico. La continuidad de Φ, la densidad de los elementos algebraicos en $\mathcal{E}$ y el hecho de que el producto triple es juntamente norma continuo, nos permite afirmar que $\Phi(\{x,x,x\}) = \{\Phi(x),\Phi(x),\Phi(x)\}$ para todo $x \in \mathcal{E}$. Ahora, si en la identidad de polarización (1.2) tomamos $\alpha = \beta = 1$, tenemos que

$$\{x,y,x\} = 4^{-1}\sum_{k=0}^{3}(-i)^k\left\{x+i^k y, x+i^k y, x+i^k y\right\} \quad (x,y \in \mathcal{E})$$

y por tanto podemos afirmar que Φ conserva productos triples de la forma $\{x,y,x\}$ $(x,y \in \mathcal{E})$. Por el proceso de linealización en las variables externas (ver si acaso la identidad (1.3)), podemos concluir que Φ es un isomorfismo de triples. $\square$

El siguiente ejemplo (ver si acaso [14, Remark 2.7]) pone de manifiesto que las isometrías lineales sobreyectivas entre JB*-triples reales no tienen por que conservar el producto triple. En efecto, sea E la realificación del JB*-triple $M_{1,2}(\mathbb{C})$ de las matrices uno por dos con entradas en los números complejos y consideremos la aplicación $\Phi : E \to E$ dada por $\Phi((\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)) = (\alpha + i\gamma, \beta + i\delta)$. Ya que la norma de un elemento $(a,b) \in E$ viene dada por $\|(a,b)\|^2 = |a|^2 + |b|^2$, se tiene que Φ es una isometría lineal y sobreyectiva sobre E y sin embargo no conserva el producto triple. Por ejemplo, si tomamos $x = (1 + i, 0)$ e $y = (0, 1)$ se tiene que $\Phi\{x, y, x\} = 0$ mientras que $\{\Phi(x), \Phi(y), \Phi(x)\} \neq 0$. No obstante, Φ preserva cubos. De hecho T. Dang tiene probado que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales sobreyectivas entre JB*-triples complejos conservan cubos y ortogonalidad entre elementos [14, Proposition 1.2].

El resultado de Dang era extendido por J. M. Isidro, W. Kaup y A. Rodríguez al caso de isometrías lineales sobreyectivas entre JB*-triples reales [37]. El hecho de que los elementos algebraicos son densos en JB*-triples reales, el Teorema 3.1.3 y la misma argumentación dada en el Teorema 3.2.1 permiten obtener una demostración alternativa al resultado de Isidro, Kaup y Rodríguez. La siguiente Proposición recoge éste y otros resultados incluidos en [37] y nos será de utilidad en lo que sigue.

Proposición 3.2.2 *Sea $\Phi : E \to F$ una isometría lineal sobreyectiva entre dos JB*-triples reales. Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*

1. *$\Phi(x) \perp \Phi(y)$ si y solo si $x \perp y$.*

2. *Φ conserva cubos, o equivalentente, conserva los productos triples simetrizados*

$$< x, y, z >= \frac{1}{3}(\{x, y, z\} + \{z, x, y\} + \{y, z, x\}).$$

3. *Para cada tripotente $e \in E$, Φ aplica los espacios $E^1(e)$, $E_0(e)$, y $E^{-1}(e) \oplus E_1(e)$ en los correspondientes espacios con respecto a $\Phi(e)$.*

En vista de que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales sobreyectivas entre JB*-triples reales o complejos no tienen por qué conservar el producto triple, se plantea el problema de determinar aquellos JB*-triples reales o complejos donde dichas isometrías son isomorfismos $\mathbb{R}$-lineales. Como es natural la atención se dirige en primer lugar a la consideración de factores de Cartan.

Un primer trabajo se debe a T. Dang, donde se afirma que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales y sobreyectivas entre factores de Cartan (complejos) de rango mayor que uno conservan el producto triple [14, Proposition 2.6]. Como consecuencia se obtiene el principal resultado de [14] que afirma que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales y sobreyectivas entre dos JB*-triples complejos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ tales que el bidual de $\mathcal{E}$ no contiene factores de Cartan de rango uno, conservan el producto triple [14, Theorem 3.1].

Dang prueba que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales sobreyectivas entre factores de Cartan de rango mayor que uno conservan cuadrángulos y trángulos conteniendo dos tripotentes minimales ortogonales y además son débil-* continuas. Por consiguiente, teniendo en cuenta que todos los factores de Cartan de rango mayor que uno salvo el factor $\mathbf{III_n}$ son la expansión lineal débil-* cerrada de una parrilla formada por trángulos y cuadrángulos conteniendo tripotentes minimales ortogonales (ver Sección 2.2), se puede asegurar que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales sobreyectivas conservan tales parrillas y, ya que el producto triple es separadamente débil-* continuo (ver [9] o [53]), también conservan el producto triple. Nuestro próximo resultado demuestra en particular que toda isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva de $\mathbf{III_n}$ en si mismo es un isomorfismo $\mathbb{R}$-lineal.

Proposición 3.2.3 *Sea $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ una isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre dos factores de Cartan complejos. Supóngase que $\mathcal{E}$ contiene un elemento unitario u. Entonces Φ es un isomorfismo real de triples. Aquí el factor $\mathcal{E}$ puede ser uno de los siguientes:* $\mathbf{I_{n,n}}$, $\mathbf{II_{2k}}$, $\mathbf{III_n}$, $\mathbf{IV_n}$ *y* $\mathbf{VI}$.

Demostración.- Podemos suponer que $r(\mathcal{E}) > 1$ ya que en otro caso $\mathcal{E} = \mathbb{C}$ y el resultado es trivial. Por otra parte es conocido [44, Proposition 5.7] que $\Phi(\mathcal{E}_2(u)) = \mathcal{F}_2(\Phi(u))$. Por consiguiente se tiene que $\mathcal{F} = \Phi(\mathcal{E}) = \Phi(\mathcal{E}_2(u)) = \mathcal{F}_2(\Phi(u))$, lo que prueba que $v = \Phi(u)$ es un tripotente unitario en $\mathcal{F}$. Como ya conocemos $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ pueden ser estructurados como álgebras de Jordan con involución mediante productos e involuciones dadas por

$$x \circ y := \{x, u, y\}\,, \quad x^* := \{u, x, u\}\,,$$
$$x \circ y := \{x, v, y\}\,, \quad x^* := \{v, x, v\}\,,$$

respectivamente. Por otra parte el apartado (2) de la Proposición 3.2.2 nos asegura que Φ conserva el producto triple simetrizado. Podemos concluir pues que

$$\frac{1}{3}\Phi(x^* + 2x) = \Phi < u, x, u >=< v, \Phi(x), v >= \frac{1}{3}(\Phi(x)^* + 2\Phi(x))$$

y por tanto Φ conserva las involuciones y en consecuencia los elementos simétricos y antisimétricos. Éste hecho unido a que $< x, u, y >= \frac{1}{3}(x \circ y + x^* \circ y + x \circ y^*)$, nos permite asegurar que Φ conserva los productos Jordan de cualquier par de elementos de $\mathcal{E}$. Finalmente, ya que el producto triple puede ser recuperado del producto Jordan via la identidad

$$\{x, y, z\} = (x \circ y^*) \circ z + (z \circ y^*) \circ x - (x \circ z) \circ y^*,$$

podemos asegurar que Φ conserva el producto triple. La última afirmación es consecuencia de la Proposición 1.4.1 y el hecho de que el factor **VI** es una JB*-álgebra. □

Los comentarios previos a la proposición anterior junto a dicha proposición, dan plena validez a la Proposición 2.6 y al Teorema 3.1 en [14]. Por consiguiente podemos enunciar la siguiente otra que será utilizada a lo largo de este trabajo.

Proposición 3.2.4 *Sea $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ una isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre dos factores de Cartan complejos de rango mayor que uno. Entonces Φ es un isomorfismo real de triples.* $\square$

Nuestra atención se dirige ahora a la consideración de isometrías lineales sobreyectivas entre factores de Cartan reales. En 1997, W. Kaup prueba que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales y sobreyectivas, cuyo dominio es un factor de Cartan real no excepcional de rango mayor que uno y cuya imagen es un JB*-triple real, son isomorfismos [44, Theorem 5.18]. Este resultado tiene como precedentes el trabajo de C. H. Chu, T. Dang, B. Russo y B. Ventura, que asegura que las isometrías lineales sobreyectivas entre C*-álgebras reales conservan el producto triple, y un resultado análogo, debido a J. M. Isidro y A. Rodríguez, para isometrías lineales sobreyectivas entre JB-álgebras (ver [13, Theorem 6.4] y [38, Theorem 1.9 (i)$\Rightarrow$(v)] respectivamente).

Realmente el resultado de Kaup es aplicable a todo factor de Cartan real de rango mayor que uno salvo a los factores $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$ y $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$. Precisamente en [44, pag 217] Kaup plantea como problema si dicho teorema se verifica también en los mencionados factores. Nuestro principal objetivo en esta sección es dar una respuesta afirmativa a dicho problema. La novedad de nuestras técnicas reside en el análisis de las isometrías lineales sobreyectivas entre JBW*-triples reales reducidos.

El siguiente lema se puede derivar de la clasificación de los JB*-triples de rango finito (véase [41, Theorem 4.10]). Nosotros presentamos aquí una prueba basada en la descripción de los factores de Cartan dada en el Capítulo 2 y siguiendo ideas contenidas en [15].

Lema 3.2.5 *Sea $\mathcal{E}$ un JBW*-triple y sean u_1, $\widetilde{u}_1$ dos tripotentes minimales ortogonales en $\mathcal{E}$. Entonces $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$ es $\mathbb{C} \oplus^\infty \mathbb{C}$ o bien un factor spin.*

Demostración.- Utilizando la descomposición de Peirce es fácil comprobar que $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1) = \mathcal{E}_2(u_1) \oplus \mathcal{E}_2(\widetilde{u}_1) \oplus \mathcal{E}_1(u_1) \cap \mathcal{E}_1(\widetilde{u}_1)$. Por consiguiente si $\mathcal{E}_1(u_1) \cap \mathcal{E}_1(\widetilde{u}_1) = \{0\}$, la Proposición 3.1.1 (a) asegura que $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$ es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C} \oplus^\infty \mathbb{C}$.

Supongamos pues que $\mathcal{E}_1(u_1) \cap \mathcal{E}_1(\widetilde{u}_1) \neq \{0\}$. Nos proponemos construir en $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$ una parrilla spin que lo genera.

El conjunto de las familias de tripotentes minimales mutuamente colineales está parcialmente ordenada por la relación de inclusión y tiene la propiedad de que cada subconjunto no vacío totalmente ordenado posee una cota superior, por tanto el Lema de Zorn nos permite afirmar que existe en $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$ una familia maximal, $u_1 \cup \{u_i\}_{i \in I}$, de tripotentes minimales mutuamente colineales, donde I es algún conjunto de índices. Para todo $i \in I$, definimos $\widetilde{u}_i = -2\{u_1, u_i, \widetilde{u}_1\} = -Q(u_1 + \widetilde{u}_1)u_i$. Ya que $Q(u_1 + \widetilde{u}_1)$ es un automorfismo, conjugado lineal, de triples sobre $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$, se tiene que $\widetilde{u}_i$ es un tripotente minimal en $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$ y por tanto minimal en $\mathcal{E}$. Además $\widetilde{u}_i \in \mathcal{E}_1(u_1) \cap \mathcal{E}_1(\widetilde{u}_1)$ y es ortogonal a u_i. Por consiguiente podemos afirmar que para todo $i \in I$, la cuádrupla $(u_1, u_i, \widetilde{u}_1, -\widetilde{u}_i)$ forma un cuadrángulo. El Lema 2.2.15 nos asegura que $(u_i, u_j, \widetilde{u}_i, -\widetilde{u}_j)$ forma un cuadrángulo para cada par de índices distintos $i, j \in I$.

Sea J la unión disjunta de I y $\{1\}$, notemos por V al JBW*-triple

$$V = \bigcap_{i \in J} \mathcal{E}_1(u_i) \cap \mathcal{E}_1(\widetilde{u}_i).$$

Si $V \neq \{0\}$ existirá algún tripotente $v \in V$. Teniendo en cuenta la maximalidad de la familia $u_1 \cup \{u_i\}_{i \in I}$, el Teorema 2.2.13 aplicado a u_j y v (respectivamente $\widetilde{u}_j$ y v) en $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$, fuerza que v es un tripotente minimal en V que gobierna a u_j (respectivamente $\widetilde{u}_j$) para todo $j \in J$. Además, ya que para cada $x \in V$ se tiene $\{v, v, x\} = 2\{v, v, \{u_1, u_1, x\}\}$, la identidad de Jordan y la aritmética de Peirce nos permite asegurar que $V = \mathbb{C}v$ y por tanto $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1) = \mathcal{E}_2(v)$.

Dado que $\{v, u_1, v\} \in \mathcal{E}_0(u_1) \cap \mathcal{E}_2(v)$ es claro que existe u_0, un conveniente múltiplo escalar de v, tal que $\{u_0, u_1, u_0\} = \widetilde{u}_1$. Ya que $(u_1, u_i, \widetilde{u}_1, -\widetilde{u}_i)$ forma un cuadrángulo, de nuevo la identidad de Jordan y la aritmética de Peirce nos permiten asegurar que $Q(u_0)u_i = \widetilde{u}_i$ para todo $i \in I$. Hemos probado pues que la familia $\{u_1, \widetilde{u_1}\} \cup \{u_i, \widetilde{u}_i\}_{i \in I}$, junto con u_0 si ha lugar, es una parrilla spin (Definición 2.2.5) que genera $\mathcal{E}_2(u_1 + \widetilde{u}_1)$ y por la Proposición 2.2.6 es un factor spin. $\square$

Corolario 3.2.6 *Sea E un JBW*-triple real reducido y sean v, $\widetilde{v}$ dos tripotentes minimales ortogonales en E. Entonces $E_2(v+\widetilde{v})$ es $\mathbb{R} \oplus^\infty \mathbb{R}$ o bien un factor spin real.*

Demostración.- El mismo argumento dado en el lema anterior permite afirmar que $E_2(v + \widetilde{v}) = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}\widetilde{v} \oplus E_1(v) \cap E_1(\widetilde{v})$, así pues si $E_1(v) \cap E_1(\widetilde{v}) = \{0\}$, entonces $E_2(v + \widetilde{v})$ puede ser identificado con $\mathbb{R} \oplus^\infty \mathbb{R}$. En otro caso, ya que E es reducido se tiene que v, $\widetilde{v}$ son dos tripotentes minimales ortogonales en $\widehat{E}$ y en virtud del lema anterior, podemos concluir que $\widehat{E}_2(v + \widetilde{v})$ un factor spin. Por consiguiente $E_2(v + \widetilde{v}) = \widehat{E}_2(v + \widetilde{v})^\tau$ es una forma real de un factor spin y en consecuencia es un factor spin real. $\square$

Nos proponemos refinar la información dada en el Lema 3.2.5 y en el Corolario 3.2.6 en el caso de factores de Cartan complejos y reales reducidos. A tal efecto introducimos las siguientes nociones. Una proyección p en una JBW*-álgebra M se dice que es una **proyección abeliana** si $M_2(p)$ es una JBW*-álgebra asociativa. El **centro** de un álgebra de Jordan J es el subconjunto de J formado por todos aquellos elementos que asocian con todos los elementos de J.

Lema 3.2.7 *Sea E un factor de Cartan complejo (respectivamente, un factor de Cartan real reducido), y sean v y $\widetilde{v}$ dos tripotentes minimales ortogonales en E. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(*a*) *$E_2(v+\widetilde{v})$ es un spin complejo (respectivamente, real).*

(*b*) *Existe $u \in E_2(v+\widetilde{v})$ tal que $(v,u,\widetilde{v})$ es un trángulo (respectivamente, $(v,u,\widetilde{v})$ o bien $(v,u,-\widetilde{v})$ es un trángulo). Además, en ambos casos, si (a,b,c) representa a un tal trángulo se tiene que $\varepsilon(a+b+c)$ es un tripotente minimal si y solo si $|\varepsilon| = \frac{1}{2}$, y $\varepsilon(a+b-c)$ es un tripotente si y solo si $|\varepsilon| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

Demostración.- (*a*) Sean v y $\widetilde{v}$ dos tripotentes minimales ortogonales en un factor de Cartan complejo E. Por [34, Lemma 3.12 (2)] sabemos que existe un tripotente completo $e \in E$ tal que $v, \widetilde{v} \in E_2(e)$ y ambos tripotentes son proyecciones ortogonales en $E_2(e)$. Como E es un factor de Cartan complejo, el Lemma 4.6 en [34] asegura que $E_2(e)$ es una JBW*-álgebra factor, es decir, su centro coincide con $\mathbb{C}e$. Por otra parte, el Lema 3.2.5 nos asegura que $E_2(v+\widetilde{v})$ coincide con $\mathbb{C} \oplus^\infty \mathbb{C}$ o con un factor spin. En el caso de que $E_2(v+\widetilde{v}) = \mathbb{C}\, v \oplus^\infty \mathbb{C}\, \widetilde{v}$, entonces $v+\widetilde{v}$ es una proyección abeliana en $E_2(e)$. Como además $v \leq v+\widetilde{v}$ en $E_2(e)$, el Lemma 5.3.2 en [31] asegura que $v = c(v) \circ (v+\widetilde{v})$, donde $c(v)$ es la menor proyección en el centro de $E_2(e)$ que mayoriza a v. Por tanto, dado que el centro de $E_2(e)$ es $\mathbb{C}e$, se tiene que $v = e \circ (v+\widetilde{v}) = (v+\widetilde{v})$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente podemos afirmar que $E_2(v+\widetilde{v})$ es un factor spin.

Por otro lado si E es un factor de Cartan real reducido se tiene que v y $\widetilde{v}$ son tripotentes minimales ortogonales en la complexificación de E. Ya que $\widehat{E}_2(v+\widetilde{v})$ es un factor spin se tiene que $E_2(v+\widetilde{v})$ es un factor spin real.

El apartado (b) se sigue de los comentarios finales de los apartados 2.1.5 y 2.1.4. □

El próximo resultado es clave para la obtención de un Teorema de tipo Banach-Stone para factores de Cartan reales reducidos.

Teorema 3.2.8 *Sea $\Phi : E \to F$ una isometría sobreyectiva entre dos JBW*-triples reales reducidos. Entonces Φ conserva cuadrángulos formados por tripotentes minimales. Además, si $(v, u, \widetilde{v})$ es un trángulo en E con $v, \widetilde{v}$ minimales, entonces $(\Phi(v), \Phi(u), \Phi(\widetilde{v}))$ es un trángulo en F.*

Demostración.- Por la Proposición 3.2.2, Φ conserva tripotentes y las relaciones de minimalidad y ortogonalidad entre ellos. Además, ya que E y F son JBW*-triples reducidos, Φ también conserva el espacio de Peirce $E_1(v)$ para todo tripotente minimal v y en consecuencia Φ conserva la relación de colinealidad entre tripotentes minimales. Así pues, si (u_1, u_2, u_3, u_4) es un cuadrángulo de tripotentes minimales en E, entonces la tripleta $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \Phi(u_3))$ forma un pre-cuadrángulo. Para probar que $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \Phi(u_3), \Phi(u_4))$ es un cuadrángulo bastará probar que $\Phi(u_4) = 2\{\Phi(u_1), \Phi(u_2), \Phi(u_3)\}$. A tal efecto, notaremos por $v_i = \Phi(u_i)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Por el Corolario 3.2.6 y la Proposición 2.1.3 se tiene que $F_2(v_1 + v_3)$ es un factor spin real de rango 2 conteniendo a v_2 y a v_4. Además, como $Q(v_1 + v_3)$ es un automorfismo sobre $F_2(v_1 + v_3)$, tenemos que $2\{v_1, v_2, v_3\} = Q(v_1 + v_3)(v_2)$ es un tripotente minimal en $F_2(v_1 + v_3)$ el cual es ortogonal a v_2. Por tanto ya que en todo factor spin real de rango dos, el espacio ortogonal relativo a un tripotente minimal tiene dimensión 1 (véase el apartado 2.1.4), y dicho espacio contiene a los tripotentes $2\{v_1, v_2, v_3\}$ y v_4, se tiene necesariamente que

$2\{v_1, v_2, v_3\} = \pm v_4$. Supongamos que $2\{v_1, v_2, v_3\} = -v_4$, es decir la cuadrupla $(v_1, v_2, v_3, -v_4)$ forma un cuadrángulo. El Lema 1.1.4 aplicado a los cuadrángulos (u_1, u_2, u_3, u_4) y $(v_1, v_2, v_3, -v_4)$ asegura que $e = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_1 + u_2 + u_3 - u_4)$ es un tripotente, mientras que $\Phi(e) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2 + v_3 - v_4)$ no lo es, lo que contradice el hecho de que Φ conserva tripotentes. En consecuencia $2\{v_1, v_2, v_3\} = v_4$.

Sea ahora $(v, u, \widetilde{v})$ un trángulo en E con $v, \widetilde{v}$ tripotentes minimales. Dado que $\Phi(E_1(v)) = F_1(\Phi(v)), \Phi(E_1(\widetilde{v})) = F_1(\Phi(\widetilde{v}))$, de nuevo el Corolario 3.2.6 y la Proposición 2.1.3 nos permiten asegurar que

$$\Phi|_{E_2(v+\widetilde{v})} : E_2(v + \widetilde{v}) \to F_2(\Phi(v) + \Phi(\widetilde{v}))$$

es una isometría lineal sobreyectiva entre dos factores spin reales de rango 2. Ya que u es un tripotente en $E_1(v) \cap E_1(\widetilde{v})$ se tiene que $\Phi(u) \in F_1(\Phi(v)) \cap F_1(\Phi(\widetilde{v}))$. Como $\Phi(u)$ no es minimal en $F_2(\Phi(v) + \Phi(\widetilde{v}))$, el Teorema 2.2.13 nos asegura que $\Phi(u) \vdash \Phi(v)$ y $\Phi(u) \vdash \Phi(\widetilde{v})$. En consecuencia, para poder afirmar que la tripleta $(\Phi(v), \Phi(u), \Phi(\widetilde{v}))$ forma un trángulo, basta probar que $Q(\Phi(u))(\Phi(v)) = \Phi(\widetilde{v})$. En efecto, utilizando la aritmética de Peirce, el hecho, anteriormente comentado, de que el espacio ortogonal relativo a un tripotente minimal en un factor spin real de rango dos tiene dimensión 1, y que $Q(\Phi(u))$ es un automorfismo sobre $F_2(\Phi(u))$, podemos deducir que el tripotente $Q(\Phi(u))(\Phi(v)) \in F_0(\Phi(v)) \cap F_2(\Phi(v) + \Phi(\widetilde{v})) = \mathbb{R}\Phi(\widetilde{v})$, y en consecuencia

$$Q(\Phi(u))(\Phi(v)) = \pm\Phi(\widetilde{v}).$$

Si $Q(\Phi(u))(\Phi(v)) = -\Phi(\widetilde{v})$, entonces $(\Phi(v), \Phi(u), -\Phi(\widetilde{v}))$ es un trángulo. Ahora el Lema 3.2.7 (b) nos asegura que $\frac{1}{2}(v + u + \widetilde{v})$ es un tripotente en E, mientras que

$$\frac{1}{2}(\Phi(v) + \Phi(u) + \Phi(\widetilde{v})) = \Phi(\frac{1}{2}(v + u + \widetilde{v}))$$

no es un tripotente, lo que es una contradicción. En consecuencia $Q(\Phi(u))(\Phi(v)) = \Phi(\widetilde{v})$. □

En 1992 T. Dang ([14, Lemma 2.5]) probaba que toda isometría $\mathbb{R}$-lineal entre dos factores de Cartan complejos de rango mayor o igual que uno es débil-* continua. Más tarde, A. Peralta y J. Martínez establecían que toda isometría lineal sobreyectiva de un JBW*-triple real en sí mismo, es automáticamente débil-* continua (ver [53, Proposition 2.3]). Este resultado se puede extender al caso de isometrías lineales sobreyectivas entre JBW*-triples reales arbitrarios, como prueba la siguiente proposición.

Proposición 3.2.9 *Toda isometría lineal sobreyectiva entre JBW*-triples reales es automáticamente débil-* continua.*

Demostración.- Sea $\Phi : E \to F$ una isometría lineal sobreyectiva entre dos JBW*-triples reales y sean E_* y F_* los preduales de E y F, respectivamente. Es fácil ver que el JB*-triple $E \oplus^\infty F$ es un espacio de Banach dual cuyo predual coincide con la ℓ_1-suma de E_* y F_*. En consecuencia $E \oplus^\infty F$ es un JBW*-triple.

Sea ahora Ψ la aplicación de $E \oplus^\infty F$ en sí mismo definida por $\Psi(e, f) = (\Phi^{-1}(f), \Phi(e))$. Claramente Ψ es una biyección lineal isométrica sobre $E \oplus^\infty F$, por lo que, en virtud de [53, Proposition 2.3], Ψ es débil-* continua. Ahora la continuidad débil-* de Φ se deduce sin más que observar que $\Phi(e) = \Psi(e, 0)$. □

Nuestro próximo objetivo será probar que las isometrías lineales sobreyectivas entre factores de Cartan reales reducidos son isomorfismos de triples. En particular obtendremos una respuesta afirmativa al problema planteado por W. Kaup en [44, pag. 217].

Proposición 3.2.10 *Sea $\Phi : E \to F$ una isometría lineal sobreyectiva entre dos factores de Cartan reales reducidos. Entonces Φ es un isomorfismo de triples.*

Demostración.- La Proposición 3.2.2 asegura que las isometrías lineales sobreyectivas conservan la ortogonalidad de elementos y por tanto E y F tienen el mismo rango.

Supongamos primero que E es uno de los factores siguientes $\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{n,m}$, $\mathbf{II}^{\mathbb{R}}_{n}$, $\mathbf{IV}^{r,s}_{n}$, $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}_0}$, $\mathbf{V}^{\mathbb{O}_0}$, donde $r, s, n-1 \geq 1$. En este primer caso E coincide con el cierre débil-* de la envolvente lineal de una cierta parrilla construida a base de cuadrángulos de tripotentes minimales y de trángulos $(v, u, \widetilde{v})$, donde v, $\widetilde{v}$ son minimales (ver Capítulo 2, §2). El Teorema 3.2.8 no permite afirmar que una tal parrilla es transformada por Φ en otra parrilla del mismo tipo en F. Ahora la Proposición 3.2.9 unida al hecho de que el producto triple es separadamente débil-* continuo, nos permite asegurar que Φ es un isomorfismo de triples.

Los restantes factores de Cartan reales reducidos de rango mayor que uno son $\mathbf{I}^{\mathbb{C}}_{\mathbf{n}}$, $\mathbf{II}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}}$, $\mathbf{III}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{n}}$ y $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}}$ (ver Proposition 2.1.7). Como ya conocemos $\mathbf{VI}^{\mathbb{O}} = H_3(\mathbb{O})$ es una JB-álgebra y la Proposición 1.4.2 nos asegura que todos los factores anteriores son JB-álgebras. La tesis de nuestro resultado se sigue en este caso de [37, Proposition 4.11].

Por último si el rango de E y F es uno, entonces $E = \mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1,m}} = F$ y el resultado es trivial, ya que $\mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1,m}}$ se puede identificar con un espacio de Hilbert real con producto triple dado por $\{x, y, z\} = \frac{1}{2}(\langle\, x\,,\, y\,\rangle z + \langle\, z\,,\, y\,\rangle x)$. $\square$

Lema 3.2.11 *Sean $\{C_i, i \in I\}$ y $\{C_j, j \in J\}$ dos familias de factores de Cartan reales o realificaciones de factores de Cartan complejos. Sea $\Phi : \oplus^{\infty}_{i\in I} C_i \to \oplus^{\infty}_{j\in J} C_j$ una isometría lineal sobreyectiva. Entonces para cada $i \in I$ existe un único $j \in J$ tal que $\Phi|_{C_i} : C_i \to C_j$ es una isometría lineal sobreyectiva.*

Demostración.- En primer lugar hacemos notar que tanto $\oplus_{i\in I}^{\infty} C_i$ como $\oplus_{j\in J}^{\infty} C_j$ son JBW*-triples con preduales $\oplus_{i\in I}^{\ell_1}(C_i)_*$ y $\oplus_{j\in J}^{\ell_1}(C_j)_*$, respectivamente y en virtud de la Proposición 3.2.9, podemos afirmar que Φ es débil-* continua. Por otra parte la Proposición 2.0.1 nos dice que cada factor de Cartan real o realificación de un factor de Cartan complejo coincide con el cierre, en la topología débil-*, de la envolvente lineal de sus tripotentes minimales. Por consiguiente, ya que Φ^{-1} es también lineal, sobreyectiva e isométrica, bastará probar que para cada $i \in I$ existe un único $j \in J$ tal que $\Phi(MinTrip(C_i)) \subseteq C_j$. En efecto:

Ya que los tripotentes minimales no pueden expresarse como suma de dos tripotentes ortogonales, es claro que todo tripotente minimal en $\oplus_{j\in J}^{\infty} C_j$ pertenece a un único factor de Cartan y que dos tripotentes minimales no ortogonales están contenidos en el mismo factor de Cartan. Por otra parte, la Proposición 3.2.2 asegura que Φ conserva tripotentes minimales y la relación de ortogonalidad.

Sea v un tripotente minimal en C_i. Entonces $\Phi(v)$ pertenece a un único factor de Cartan real o complejo C_j y la imagen por Φ de todo tripotente minimal en C_i no ortogonal a v está contenida en C_j. Supongamos ahora que existe en C_i un tripotente minimal, $\widetilde{v}$, ortogonal a v. En este caso C_i tiene rango mayor que uno, por lo que las proposiciones 2.1.7, 2.1.1 y 2.1.6 y el Lema 3.2.7(b) nos aseguran que es posible encontrar un tercer tripotente minimal en C_i que no es ortogonal a v ni a $\widetilde{v}$. En consecuencia $\Phi(\widetilde{v}) \in C_j$, lo que acaba la demostración. $\square$

Estamos ahora en condiciones de establecer el Teorema 5.18 en [44] sin restricciones sobre la excepcionalidad, siguiendo argumentos similares a los empleados en la prueba de dicho teorema.

Teorema 3.2.12 *Toda isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva con dominio un factor de Cartan real o complejo de rango mayor que uno e imagen un JBW*-triple real es un isomorfismo de triples.*

Demostración.- Sean E, F y $\Phi : E \to F$ en las condiciones del teorema. Los teoremas de descomposición atómica aseguran que $F = A \oplus^{\infty} N$, donde A es la ℓ_{∞}-suma de factores de Cartan reales o realificaciones de factores de Cartan complejos y N es un ideal débil-* cerrado que carece de tripotentes minimales (ver la introducción del Capitulo 2). Por otra parte, dado que Φ es débil-* continua, conserva tripotentes minimales y la relación de ortogonalidad, se tiene que $F = \Phi(E) = A$. Además el Lema 3.2.11 nos dice que F ha de ser un factor de Cartan real o complejo. Ahora, ya que Φ conserva ortogonalidad y por tanto el parámetro z en la Tabla 1 [44, página 210], en virtud de [44, Lemma 5.6] se ha de verificar que E y F son simultáneamente reducidos o bien complejos o $E = F = \mathbf{I}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p,2q}}$ o $E = F = \mathbf{III}^{\mathbb{H}}_{\mathbf{2p}}$. Finalmente, las proposiciones 3.2.10, 3.2.4 y los lemas 5.14, 5.17 en [44], permiten asegurar que Φ es un isomorfismo de triples. $\square$

Como resultado principal de esta sección establecemos el siguiente teorema que puede ser considerado como una extensión de [14, Theorem 3.1].

Teorema 3.2.13 *Sea $\Phi : E \to F$ una isometría lineal sobreyectiva entre dos JB*-triples reales y supongamos que E^{**} no contiene factores de Cartan reales o complejos de rango uno. Entonces Φ es un isomorfismo de triples.*

Demostración.- Como ya conocemos el bidual de un JB*-triple real es un JBW*-triple real, por tanto la aplicación bitraspuesta de Φ, $\Phi^{**} : E^{**} \to F^{**}$ es una isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva débil-* continua entre JBW*-triples reales. Argumentando como en el Teorema anterior, Φ^{**} aplica la parte atómica de

E^{**}, $A_{E^{**}} = \oplus^{\ell_\infty} C_i$, en la parte atómica de F^{**}, $A_{F^{**}} = \oplus^{\ell_\infty} C_j$. Por consiguiente,

$$\Psi := \Phi^{**}|_{A_{E^{**}}} : \oplus^{\ell_\infty} C_i \to \oplus^{\ell_\infty} C_j$$

es una isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva. Ahora, el Lema 3.2.11 asegura que para cada i, $\Psi|_{C_i} : C_i \to C_j$ es una isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre dos factores de Cartan reales o complejos. Dado que C_i tiene rango mayor que uno, el Teorema 3.2.12 nos permite afirmar que $\Psi|_{C_i}$ es un isomorfismo de triples y en consecuencia Ψ también lo es. Para finalizar, sean $\pi_E : E^{**} \to A_{E^{**}}$ y $\pi_F : F^{**} \to A_{F^{**}}$ las proyecciones canónicas de E^{**} y F^{**} sobre sus partes atómicas y j_E y j_F las inclusiones canónicas de E y F en sus biduales. Es claro que $\pi_E \circ j_E$ y $\pi_F \circ j_F$ son homomorfismos de triples. Además son isométricos. En efecto:

Sea $x \in E$ de norma uno. El teorema de Krein-Milman nos da que $D(E, x)$ tiene puntos extremos y por tanto podemos encontrar un φ en la bola unidad de E^*, tal que $\varphi(x) = 1$. En virtud de [64, Corollary 2.1 y Lemma 2.7], existe un tripotente minimal $u \in E^{**}$ tal que $\varphi = \varphi \circ P^1(u)$. Por consiguiente φ se anula en la parte no atómica de E^{**} de aquí que $\varphi = \varphi \circ \pi_E$. Las desigualdades

$$1 = \|x\| = \|j_E(x)\| \geq \|\pi_E(j_E(x))\| \geq \varphi(\pi_E(j_E(x))) = \varphi(x) = 1,$$

prueban que $\pi_E \circ j$ es una isometría lineal. Un argumento análogo prueba que $\pi_F \circ j_F$.

Finalmente, de la igualdad $(\pi_F \circ j_F) \circ \Phi = \Psi \circ (\pi_E \circ j_E)$, se deduce que Φ es un isomorfismo de triples. $\square$

Nota 3.2.14 *La tesis del Teorema 3.2.13 puede no cumplirse cuando el bidual de E contiene factores de Cartan de rango uno.*

Por ejemplo si consideramos $E = \mathbf{I}^{\mathbb{R}}_{\mathbf{1,n}}$, $F = \mathbf{IV}^{\mathbf{n,0}}_{\mathbf{n}}$, *entonces la aplicación identidad de* E *en* F*, vistos ambos como espacios de Hilbert* n*-dimensionales, es una isometría lineal sobreyectiva que no conserva el triple producto.*

La equivalencia entre isometrías lineales sobreyectivas e isomorfismos de JB-triples complejos ha sido mencionada varias veces en este capítulo. El hecho de que todo isomorfismo de triples sea automáticamente isométrico es un resultado bien conocido, incluso en el ambiente de los JB*-triples reales, que puede ser fácilmente deducido del axioma de Gelfand-Naimark. El lector interesado en la prueba puede consultar [37, Theorem 4.8] para el caso de JB*-triples reales y [42, Proposition 5.5] para el caso complejo (comparar con [34, 2.4]).*

Concluimos esta sección presentando algunas aplicaciones de nuestro principal resultado. A tal efecto recordemos que el bidual de una JB-álgebra es una JBW-álgebra con unidad (ver [31, Theorem 4.4.3 y Lemma 4.1.7] o [76]).

Corolario 3.2.15 *Sea* $\Phi : A \to B$ *una isometría lineal sobreyectiva entre dos J*B-álgebras (respectivamente, dos JB-álgebras). Entonces* Φ *es un isomorfismo de triples. En caso de que* Φ *sea unital (respectivamente,* A *y* B *unitales y* Φ *unital) se tiene que es un* $*$*-isomorfismo (respectivamente, isomorfismo).*

Demostración.- Si la parte atómica del JBW*-triple real A^{**} no contiene factores de Cartan reales o complejos de rango uno, la afirmación se sigue del Teorema 3.2.13.

Supongamos pues que la parte atómica del JBW*-triple real A^{**} contiene factores de Cartan reales o complejos de rango uno. Por otra parte, ya que en cualquier caso el JBW*-triple real A^{**} (respectivamente B^{**}) tienen un elemento unitario, se tiene que todo factor de Cartan real o complejo en la parte atómica de A^{**} (respectivamente B^{**}) contiene un elemento unitario. Ahora, en virtud de la Proposición 2.1.7, se deduce que los factores de Cartan reales o complejos de rango uno tanto en A^{**} como en B^{**} coinciden con $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbf{IV_n^{n,0}}$. Sea C cualesquiera de estos tres factores. El Lema 3.2.11 junto al hecho de que Φ^{**} conserva la dimensión nos permiten afirmar que $\Phi^{**}|_C$ aplica C en sí mismo. Por consiguiente, ya que C puede ser visto como un espacio de Hilbert real, $\Phi^{**}|_C$ es un isomorfismo de triples. En conclusión Φ^{**} restringido a los factores de Cartan reales o complejos de rango uno de A^{**} es un isomorfismo sobre su imagen. El argumento final de la prueba del Teorema 3.2.13 permite concluir que Φ es un isomorfismo de triples.

La segunda afirmación se sigue fácilmente sin más que tener en cuenta que en presencia de unidad, el producto binario y la involución se recuperan a partir del producto triple (ver Capítulo 1). □

Un razonamiento análogo al empleado en el corolario anterior permite obtener el siguiente otro (comparar con [14, Corollary 3.3]).

Corolario 3.2.16 *Toda isometría $\mathbb{R}$-lineal sobreyectiva entre dos JB*-álgebras conserva el producto triple. En particular, si dichas álgebras son unitales y la isometría conserva la unidad, entonces dicha isometría es un $*$-isomorfismo.* □

Una consecuencia trivial de los dos corolarios anteriores es que las isometrías $\mathbb{R}$-lineales sobreyectivas entre dos C*-álgebras o bien dos C*-álgebras reales conservan el producto triple (comparar con [14, Corollary 3.3] y [13, Theorem 6.4]).

Capítulo 4

Teorema de Saitô-Tomita-Lusin para JB*-triples

El bien conocido criterio de Lebesgue para funciones Riemann integrables afirma que una función real y acotada definida en un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ es Riemann integrable si y solo si el conjunto de sus puntos de discontinuidad tiene medida nula. En el primer tercio del siglo pasado, N. Lusin extendía este resultado al caso de funciones medibles Lebesgue [75]. El resultado que hoy día se conoce en la literatura como Teorema de Lusin (ver [70, 2.6.1]) puede formularse en los siguientes términos:

Sean Ω un espacio localmente compacto Hausdorff y μ una medida de Radon positiva sobre Ω. Dada una función medible $f : \Omega \to \mathbb{C}$ verificando que existe un conjunto de Borel $A \subseteq \Omega$ con $\mu(A) < \infty$ y $f(x) = 0$, $\forall x \notin A$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existen un conjunto de Borel $E \subseteq \Omega$ con $\mu(\Omega \backslash E) < \varepsilon$ y una función $g \in C_0(\Omega)$ tal que f y g coinciden en E. Además se puede conseguir que

$$\sup_{x\in\Omega}\{|g(x)|\} \leq \sup_{x\in\Omega}\{|f(x)|\}.$$

Supongamos que Ω es un espacio localmente compacto Hausdorff y μ es una medida de Radon positiva y finita ($\mu(\Omega) < \infty$) sobre Ω. Notemos por $L^\infty(\Omega, \mu)$ al espacio de las clases de funciones complejo valuadas, medibles y esencialmente acotadas sobre Ω. Es bien conocido que $L^\infty(\Omega, \mu)$ es una C*-álgebra. Gracias al Teorema de Radon-Nikodym podemos asegurar que $L^\infty(\Omega, \mu)$ es una W*-álgebra cuyo predual coincide con $L^1(\Omega, \mu)$, el espacio de Banach de las clases de funciones μ-integrables sobre Ω. Toda función $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ cumple las hipótesis del Teorema de Lusin, y en consecuencia $C_0(\Omega)$ es una C*-subálgebra débil-* densa de la W*-álgebra conmutativa $L^\infty(\Omega, \mu)$.

En 1959, M. Tomita obtuvo una extensión no conmutativa del Teorema de Lusin para el caso de C*-álgebras arbitrarias, que más tarde fue reelaborada y ampliada por K. Saitô [73, Theorem 2], utilizando para tal fin una versión no conmutativa del Teorema de Egoroff. La versión no conmutativa del Teorema de Lusin puede ser enunciada en los siguientes términos:

Sean N una C*-álgebra con unidad $\mathbb{1}$ actuando sobre un espacio de Hilbert, M la clausura débil de N, a un elemento cualquiera de M y e una proyección en M. Entonces para cada funcional φ positivo no cero en el predual de M y cada par de números positivos ε y δ menores que uno existen una proyección $f \in M$, con $f \leq e$, y $b \in N$ tales que $\varphi(e - f) < \varepsilon$, $af = bf$ y $\|b\| \leq (1 + \delta)\|af\|$.

El anterior Teorema permitió un gran desarrollo de la teoría de C*-álgebras y sigue siendo hoy en día una herramienta muy útil (ver por ejemplo [61, 80]).

El objetivo de este capítulo es extender el Teorema de Lusin al ambiente no ordenado de los JB*-triples.

4.1. Requisitos geométricos

La ausencia de un buen orden en el conjunto de los elementos tripotentes de un JB*-triple es el principal obstáculo a salvar a la hora de extender el Teorema de Lusin desde el ambiente de las C*-álgebras a los JB*-triples. Para solventar esta carencia vamos a profundizar en alguno de los aspectos geométricos estudiados en los capítulos anteriores. A ello dedicamos esta primera sección. Más concretamente, en la Proposición 4.1.4 establecemos una desigualdad geométrica que será la herramienta clave para la obtención de una versión no ordenada del Teorema de Lusin para JB*-triples.

Comenzamos obteniendo algunos lemas técnicos necesarios para la demostración.

Sean J un álgebra de Jordan, $x \in J$ y U_x la aplicación lineal de J en J dada por $U_x(z) = 2(x \circ z) \circ x - x^2 \circ z$ $(z \in J)$. Es bien sabido que para cada $x \in J$ se verifica que $U_{x^2} = U_x^2$ [31, Lemma 2.4.21].

Lema 4.1.1 *Sea J una JB-álgebra con unidad 1 y sea $p \in J$ tal que $p^2 = p$. Entonces para cada x en $J_1(p)$ se verifica la siguiente igualdad:*

$$\|x\|^2 = \|x^2\| = \| \{x, x, p\} \| = \| \{x, x, 1-p\} \|.$$

Demostración.- Como $x \in J_1(p)$ (es decir, $\{p, p, x\} = \frac{1}{2}x$) se tiene $p \circ x = (1-p) \circ x = \frac{1}{2}x$. Por consiguiente se verifica que

$$x^2 \circ (1-p) = \{x, p, x\}$$

y también que

$$x^2 \circ p = \{x, 1-p, x\}.$$

Además
$$x^2 = x^2 \circ p + x^2 \circ (1-p).$$
Por la aritmética de Peirce podemos asegurar que $x^2 \circ p \in J_2(p)$ y que $x^2 \circ (1-p) \in J_0(p)$. Por consiguiente, el apartado (a) de la Proposición 3.1.1 nos asegura que

$$\|x\|^2 = \|x^2\| = \max\{\|x^2 \circ p\|, \|x^2 \circ (1-p)\|\}.$$

Podemos asumir que $\|x\| = 1 = \|x^2 \circ p\|$. Afirmamos que, en este caso, también se verifica que $\|x^2 \circ (1-p)\| = 1$. Supongamos, por el contrario, que $\|x^2 \circ (1-p)\| = \| \{x, p, x\} \| < 1$. Nuevamente la aritmética de Peirce nos permite comprobar que

$$x^4 = (x^2 \circ p)^2 + (x^2 \circ (1-p))^2,$$

$$(x^2 \circ p)^2 = \left\{x^2, p, x^2\right\} \text{ y } (x^2 \circ (1-p))^2 = \left\{x^2, 1-p, x^2\right\}.$$

Ahora, la desigualdad

$$\|x^2 \circ p\|^2 = \|(x^2 \circ p)^2\| = \| \left\{x^2, p, x^2\right\} \| = \|U_{x^2}(p)\|$$

$$= \|U_x^2(p)\| \leq \|x\|^2 \|U_x(p)\| = \| \{x, p, x\} \| < 1$$

contradice el hecho de que $1 = \|x^2 \circ p\|$, lo que a su vez concluye la demostración. □

El lema anterior permite formular el siguiente corolario.

Corolario 4.1.2 *Sean J una JB*-álgebra unital y p una proyección en J. Entonces para cada $x \in J_1(p) \cup J_2(p)$, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\| \{x, x, p\} \| \geq \frac{1}{4} \|x\|^2.$$

Demostración.- Supongamos que $x \in J_1(p)$ y sean $h, k \in J_1(p)$ tales que $h^* = h$, $k^* = k$ y $x = h + ik$. Gracias al Lemma 1.5 en [27] podemos concluir que $\{x, x, p\}$ es un elemento positivo en $J_2(p)$ y por tanto simétrico en J. En consecuencia $\{x, x, p\} = p \circ (x \circ x^*) = p \circ (h^2 + k^2)$. Teniendo en cuenta que $\{k, k, p\} = p \circ k^2$ y $\{h, h, p\} = p \circ h^2$ son elementos positivos en J, se deduce que

$$\| \{x, x, p\} \| \geq \text{máx}\{\| \{h, h, p\} \|, \| \{k, k, p\} \|\}.$$

Ahora, ya que $h, k \in J_1(p)$, el Lema 4.1.1 nos asegura que

$$\| \{x, x, p\} \| \geq \text{máx}\{\|h\|^2, \|k\|^2\} \geq \frac{1}{4}(\|h\| + \|k\|)^2 \geq \frac{1}{4}\|x\|^2.$$

Para terminar, si $x \in J_2(p)$, entonces

$$\| \{x, x, p\} \| = \|x \circ x^*\| = \|h^2 + k^2\| \geq \text{máx}\{\|h\|^2, \|k\|^2\} \geq \frac{1}{4}\|x\|^2.$$

$\square$

El siguiente resultado establece una relación entre las isometrías parciales y las proyecciones de $BL(H)$.

Lema 4.1.3 *Sea H un espacio de Hilbert complejo y sea e una isometría parcial en $BL(H)$. Entonces existen una proyección p en $BL(H)$ y un homomorfismo de triples isométrico $T : BL(H) \to BL(H)$ tales que $T(e) = p$.*

Demostración.- Dado que $BL(H)$ es un JBW*-triple, [34, Lemma 3.12] asegura la existencia de un tripotente completo $u \in BL(H)$ satisfaciendo $e \leq u$. Por consiguiente uu^* y u^*u son proyecciones en $BL(H)$ siendo alguna de ellas la identidad. Supongamos que uu^* es la identidad en $BL(H)$ y notemos respectivamente q y K a la proyección u^*u y al subespacio $u^*u(H)$. Afirmamos que la aplicación lineal $T : BL(H) \to BL(H)$ dada por $T(x) = u^*x$ satisface la tesis del lema. En efecto, teniendo en cuenta que $u^* : H \to K$ es una isometría lineal sobreyectiva, es fácil comprobar que $T : BL(H) \to BL(H, K)$ es un isometría lineal sobreyectiva entre dos JB*-triples y por tanto un isomorfismo de triples (Teorema 3.2.1). Por tanto $T(e) \leq Tu = u^*u = q$, lo que implica que $T(e)$ es una proyección en $BL(H)$. $\square$

Sea C un factor de Cartan finito dimensional y sean u, v dos tripotentes en C. Por [50, Corollary 5.12] sabemos que existe una isometría lineal sobreyectiva T de C en C tal que $Tu = v$ si y solo si $C_2(u)$ y $C_2(v)$ tienen el mismo rango. En particular, ya que el rango de $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ es tres y en virtud del Teorema 3.2.1, podemos afirmar que, dado un tripotente e en $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ existen una proyección $p \in H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ y un isomorfismo de triples $T : H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}}) \to H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$ que aplica e en p.

Sea $\mathcal{E}$ un JB*-triple. Por el Teorema de Gelfand-Naimark para JB*-triples (Teorema 1.4.3) sabemos que $\mathcal{E}$ es isométricamente isomorfo a un subtriple de una ℓ_∞-suma de factores de Cartan. Como los factores de Cartan de tipo 1 a 4 pueden embeberse isométricamente en algún $BL(H)$ y el factor de Cartan de tipo **V** es un subtriple de $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$, entonces $\mathcal{E}$ puede ser visto como un subtriple de

$$BL(H) \bigoplus^{\ell_\infty} \left(\bigoplus_{i\in I}^{\ell_\infty} H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}}) \right).$$

Estamos ahora en condiciones de establecer la siguiente proposición.

Proposición 4.1.4 *Sean $\mathcal{E}$ un JB*-triple y e un tripotente en $\mathcal{E}$. Entonces para cada $x \in \mathcal{E}_1(e) \cup \mathcal{E}_2(e)$ tenemos*

$$\| \{x, x, e\} \| \geq \frac{1}{4} \|x\|^2.$$

Demostración.- En efecto, por los comentarios anteriores $\mathcal{E}$ puede ser visto como un subtriple de una ℓ_∞-suma de un $BL(H)$ y una colección de JB*-álgebras idénticas a $H_3(\mathbb{O}^{\mathbb{C}})$. Nuevamente, los comentarios anteriores y el Lema 4.1.3 nos permiten asegurar que existe un homomorfismo de triples isométrico sobre dicha ℓ_∞-suma que aplica al tripotente e en una proyección. Estamos, por tanto, en condiciones de aplicar el Corolario 4.1.2, lo que concluye la prueba. □

La siguiente nota pone de manifiesto cómo la proposición anterior puede ser aplicada para obtener un conocimiento más profundo del subtriple $\mathcal{E}_1(e)$.

Nota 4.1.5 *Uno de los ingredientes necesarios para la demostración de la Proposición 4.1.4 es el Lemma 1.5 en [27]. Dicho resultado establece que para cada tripotente e en un JB*-triple, $\mathcal{E}$, la aplicación sesquilineal definida por*

$$F_1 : \mathcal{E}_1(e) \times \mathcal{E}_1(e) \to \mathcal{E}_2(e)$$

$$F_1(x, y) := \{x, y, e\}$$

es hermitiana, es decir $F_1(x, y)^* = F_1(y, x)$ para cada $x, y \in \mathcal{E}_1(e)$, positiva (léase $F_1(x, x) \geq 0$) y además satisface que $F_1(x, x) = 0$ si y solo si $x = 0$. Por consiguiente, la ley $x \mapsto \|x\|_e := \|F_1(x, x)\|^{\frac{1}{2}}$, define una norma sobre $\mathcal{E}_1(e)$ verificando que $\|x\|_e \leq \|x\|$ para todo $x \in \mathcal{E}_1(e)$. Sin embargo no era conocido que la norma $\|.\|_e$ fuera equivalente a la natural en $\mathcal{E}_1(e)$. Ahora, la Proposición 4.1.4 asegura que ambas normas son de hecho equivalentes. Más concretamente:

$$\|x\|_e \leq \|x\| \leq 2\|x\|_e.$$

Lo que nos dice que podemos controlar la norma de los elementos de $\mathcal{E}_1(e)$ a partir de la estructura algebraica de $\mathcal{E}_2(e)$.

En particular, cuando e es un tripotente minimal, la aplicación $\langle x\,,\,y\rangle := F_1(x,y)$ *es un producto escalar sobre* $\mathcal{E}_1(e)$ *y* $(\mathcal{E}_1(e), \langle\ ,\ \rangle)$ *es un espacio de Hilbert isomorfo, como espacio de Banach, a* $\mathcal{E}_1(e)$.

Lema 4.1.6 *Sean* $\mathcal{E}$ *un JB*-triple y* $e \in \mathcal{E}$ *un tripotente. Sea* $x \in \mathcal{E}$ *y para cada* $j = 1, 2$ *denotemos por* $x_j = P_j(e)x$. *Entonces* $P_2(e)\{x, x, e\}$ *es un elemento positivo en la JB*-álgebra* $\mathcal{E}_2(e)$ *y para cada* $j = 1, 2$, *se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\| \{x_j, x_j, e\} \| \leq \|P_2(e)\{x, x, e\}\|.$$

Demostración.- Dado que x_2 es un elemento de la JB*-álgebra $\mathcal{E}_2(e)$ y $\{x_2, x_2, e\} = x_2 \circ x_2^*$, tenemos que $\{x_2, x_2, e\}$ es un elemento positivo en $\mathcal{E}_2(e)$. Los comentarios de la Nota 4.1.5 permiten concluir que $\{x_1, x_1, e\}$ es también un elemento positivo en $\mathcal{E}_2(e)$. Por último, la aritmética de Peirce implica que

$$P_2(e)\{x, x, e\} = \{x_2, x_2, e\} + \{x_1, x_1, e\}.$$

La demostración concluye observando que la norma en una JB*-álgebra conserva el orden en el conjunto de los elementos positivos. □

4.2. Teoremas de Egoroff y Lusin

Los resultados geométricos obtenidos en la sección anterior nos van a permitir la demostración del Teorema de Lusin en el ambiente de los JB*-triples. Nuestra estrategia, al igual que la de K. Saitô en el caso de las C*-álgebras, pasa por la obtención de un teorema de tipo Egoroff para JB*-triples.

Sean $\mathcal{W}$ un JBW*-triple y φ un elemento de norma uno en $\mathcal{W}_*$. Sea z un elemento de norma uno en $\mathcal{W}$ tal que $\varphi(z) = 1$.

En [8, Proposition 1.2], T. Barton y Y. Friedman prueban que la aplicación $(x, y) \mapsto \varphi\{x, y, z\}$ define una forma sesquilineal positiva sobre $\mathcal{W}$ que no depende del elemento z, es decir, si z_1 es otro elemento de norma uno en $\mathcal{W}$ verificando que $\varphi(z_1) = 1$ entonces $\varphi\{x, y, z\} = \varphi\{x, y, z_1\}$. En consecuencia, la ley $x \mapsto \|x\|_\varphi := (\varphi\{x, x, z\})^{\frac{1}{2}}$ $(x \in \mathcal{W})$ define una seminorma prehilbertiana sobre $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{E}$ es un JB*-triple y φ es un elemento de norma uno en $\mathcal{E}^*$ entonces $\|.\|_\varphi$ es una seminorma prehilbertiana sobre $\mathcal{E}^{**}$ y por tanto sobre $\mathcal{E}$. La topología fuerte-* de $\mathcal{W}$, introducida por Barton y Friedman en [7], es la topología sobre $\mathcal{W}$ generada por la familia de seminormas $\{\|.\|_\varphi : \varphi \in \mathcal{W}_*, \|\varphi\| = 1\}$. Usaremos la simbología $S^*(\mathcal{W}, \mathcal{W}_*)$ para denotar la topología fuerte-* de $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{A}$ es una JBW*-álgebra vista como JB*-triple, entonces $S^*(\mathcal{A}, \mathcal{A}_*)$ coincide con la topología en $\mathcal{A}$ generada por todas las seminormas de la forma $x \mapsto \sqrt{\phi(x \circ x^*)}$, donde ϕ es cualquier estado normal sobre $\mathcal{A}$. Consecuentemente, cuando un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ es vista como JBW*-triple, entonces $S^*(M, M_*)$ coincide con la usual topología fuerte-* sobre M (ver [72, Definition 1.8.7]).

Desde su introducción por T. Barton y Y. Friedman, la topología fuerte-* ha sido desarrollada en trabajos de A. Rodríguez [67] y A. Peralta y A. Rodríguez [65]. Esta topología ha tenido un papel importante en el desarrollo de la teoría de los JB*-triples (ver por ejemplo [8, 65]). La topología fuerte-* es compatible con la dualidad (M, M_*) y además la topología fuerte-* es estrictamente más fuerte que la topología débil-* (ver [8, 67]). La virtud más destacada de la topología fuerte-* es quizás la propiedad de hacer al producto triple juntamente continuo en conjuntos acotados [67].

A continuación establecemos un teorema de tipo Egoroff para JB*-triples.

Teorema 4.2.1 *Sean $\mathcal{E}$ un JB*-triple, N un subconjunto de la bola unidad de $\mathcal{E}^{**}$ y $a \in \mathcal{E}^{**}$ un elemento en la adherencia fuerte-* del conjunto N. Sean $e \in \mathcal{E}^{**}$ un tripotente, $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in \mathcal{E}^*$. Entonces existen una sucesión $(a_n) \subseteq N$ y e_0 un tripotente en $\mathcal{E}^{**}$ verificando: $e_0 \leq e$, $|\varphi(e - e_0)| < \varepsilon$, y*

$$\lim_{n \to +\infty} \|P_2(e_0)(a_n - a)\| = \lim_{n \to +\infty} \|P_1(e_0)(a_n - a)\| = 0.$$

Demostración.- Fijemos $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in \mathcal{E}^*$. Como a pertenece a la adherencia del conjunto N en la topología fuerte-*, entonces existe una red $(a_\lambda) \subset N$ que converge a a en la topología fuerte-* de $\mathcal{E}^{**}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $a = 0$ y que $\|\varphi\| = 1$.

Para cada λ, denotemos por b_λ al elemento $P_2(e)\{a_\lambda, a_\lambda, e\}$. La continuidad conjunta del producto triple en conjuntos acotados para la topología fuerte-* nos permite asegurar que $b_\lambda \to 0$ en dicha topología. Por el Lema 4.1.6, podemos concluir que b_λ es un elemento positivo en la bola unidad de la JBW*-álgebra $\mathcal{E}_2^{**}(e)$.

Denotemos a su vez por C_λ al JBW*-subtriple de $\mathcal{E}^{**}$ generado por e y b_λ. Por [42], C_λ es isométricamente isomorfo a $C(K)$ para algún espacio compacto Hausdorff $K \subset [0, 1]$. Sea χ la función característica del intervalo $(-2^{-4}, 2^{-4})$ y $e_\lambda = \chi(b_\lambda)$. Claramente, e_λ es una proyección en $\mathcal{E}_2^{**}(e)$ verificando que

$$2^4 b_\lambda \geq e - e_\lambda \geq 0.$$

Como $b_\lambda \to 0$ en la topología fuerte-* y esta topología es más fuerte que la topología débil-* de $\mathcal{E}_2^{**}(e)$, concluimos que b_λ y por tanto $e - e_\lambda$ tiende a cero en la topología débil-* de $\mathcal{E}_2^{**}(e)$ (y en consecuencia en la topología $\sigma(\mathcal{E}^{**}, \mathcal{E}^*)$).

Tomemos λ_1 verificando que $|\varphi(e - e_{\lambda_1})| < \varepsilon\, 2^{-1}$. Denotemos $e_1 = e_{\lambda_1}$, $a_1 = a_{\lambda_1}$ y $b_1 = b_{\lambda_1}$. Ahora, la Proposición 4.1.4 y el Lema 4.1.6 aplicados en la segunda y en la tercera de las siguientes desigualdades, respectivamente, nos permiten concluir que

$$\|P_2(e_1)a_1 + P_1(e_1)a_1\|^2 \leq 2\left(\|P_2(e_1)a_1\|^2 + \|P_1(e_1)a_1\|^2\right)$$

$$\leq 2^3 \ (\|\{P_2(e_1)a_1, P_2(e_1)a_1, e_1\}\| + \|\{P_1(e_1)a_1, P_1(e_1)a_1, e_1\}\|)$$

$$\leq 2^4\|P_2(e_1)\{a_1, a_1, e\}\| \leq 1.$$

Consideremos ahora la subred $(a_\lambda)_{\lambda\geq\lambda_1}$. Es claro que la anterior subred sigue convergiendo a cero en la topología fuerte-* de $\mathcal{E}^{**}$. Definamos ahora $\widetilde{b_\lambda} = P_2(e_1)\{a_\lambda, a_\lambda, e_1\}$. Argumentando como en el párrafo anterior, pero reemplazando χ por la función característica del intervalo $(-2^{-6}, 2^{-6})$, obtenemos un tripotente, e_2, en $\mathcal{E}^{**}$ y un elemento, $a_{\lambda_2} = a_2$ $(\lambda_2 \geq \lambda_1)$, tales que $|\varphi(e_1 - e_2)| < \varepsilon\ 2^{-2}$ y $\|P_2(e_2)(a_2) + P_1(e_2)(a_2)\|^2 \leq 2^{-1}$.

Argumentando mediante inducción matemática obtenemos que existen sucesiones $(e_n) \subset \mathcal{E}_2^{**}(e)$ y $(a_n) \subset N$ verificando que $e \geq e_1$, (e_n) es una sucesión decreciente de tripotentes en $\mathcal{E}_2^{**}(e)$,

$$|\varphi(e - e_1)| < 2^{-1}\varepsilon, |\varphi(e_{n-1} - e_n)| < 2^{-n}\varepsilon, \quad (\forall n \geq 2),$$

y

$$\|P_2(e_n)(a_n) + P_1(e_n)(a_n)\|^2 \leq n^{-1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Sea e_0 el límite en $\mathcal{E}^{**}$ bajo la topología débil-* de la sucesión (e_n). Por [34, Corollary 3.13] concluimos que e_0 es un tripotente en $\mathcal{E}^{**}$ y $e_0 \leq e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\varphi \in \mathcal{E}^*$ tenemos que

$$|\varphi(e - e_0)| = |\varphi(e) - \lim_{n\to+\infty} \varphi(e_n)|$$

$$= |\varphi(e - e_1) + \sum_{n\geq 2}^{+\infty} \varphi(e_{n-1} - e_n)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Finalmente, como para cada natural n se tiene que $e_0 \leq e_n$ (y por consiguiente $\mathcal{E}_0^{**}(e_n) \subseteq \mathcal{E}_0^{**}(e_0)$), se sigue que

$$\|P_2(e_0)(a_n)\| = \|P_2(e_0)(P_2(e_n)(a_n) + P_1(e_n)(a_n))\| \leq \frac{1}{n},$$

y

$$\|P_1(e_0)(a_n)\| = \|P_1(e_0)(P_2(e_n)(a_n) + P_1(e_n)(a_n))\| \leq \frac{1}{n},$$

desigualdades que permiten concluir la demostración. $\square$

El Teorema de Egoroff para JB*-triples permite demostrar el siguiente corolario cuyo enunciado nos proporciona la última herramienta necesaria para la obtención del Teorema de Lusin para JB*-triples.

Corolario 4.2.2 *Sean $\mathcal{E}$ un JB*-triple, φ un funcional en $\mathcal{E}^*$ y α un elemento en $\mathcal{E}^{**}$. Entonces para cada tripotente $e \in \mathcal{E}^{**}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existen un tripotente e_1 en $\mathcal{E}^{**}$ con $e_1 \leq e$ y un elemento $a_1 \in \mathcal{E}$ verificando:*

$$\|P_2(e_1)(\alpha - a_1)\| < \delta, \quad \|P_1(e_1)(\alpha - a_1)\| < \delta,$$

$$\|a_1\| \leq \|(P_2(e) + P_1(e))\alpha\| \quad y \quad |\varphi(e - e_1)| < \varepsilon.$$

Demostración.- El Corolario 3.3 en [8] asegura que la bola unidad cerrada de $\mathcal{E}$ es fuerte-* densa en la bola unidad cerrada de $\mathcal{E}^{**}$. En consecuencia, la afirmación del corolario se sigue cuando aplicamos el Teorema 4.2.1 a $a = (P_2(e) + P_1(e))\alpha$ y $N = \{x \in \mathcal{E} : \|x\| \leq \|(P_2(e) + P_1(e))\alpha\|\}$. $\square$

Estamos ahora en disposición de obtener un Teorema de Saitô-Tomita-Lusin para JB*-triples.

Teorema 4.2.3 *Sean $\mathcal{E}$ un JB*-triple, φ un funcional en $\mathcal{E}^*$, y α un elemento en $\mathcal{E}^{**}$. Entonces para cada tripotente $e \in \mathcal{E}^{**}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existen un tripotente e_0 en $\mathcal{E}^{**}$ con $e_0 \leq e$ y $a_0 \in \mathcal{E}$ verificando:*

$$P_2(e_0)(\alpha - a_0) = P_1(e_0)(\alpha - a_0) = 0,$$

$$\|a_0\| \leq (1+\delta)\|(P_2(e) + P_1(e))\alpha\| \quad y \quad |\varphi(e - e_0)| < \varepsilon.$$

Demostración.- No es restrictivo asumir que $(P_2(e)+P_1(e))\alpha$ tiene norma uno. El Corolario 4.2.2 garantiza la existencia de un elemento $a_1 \in \mathcal{E}$ y un tripotente e_1 en $\mathcal{E}^{**}$ verificando que $e_1 \leq e$,

$$\|a_1\| \leq \|(P_2(e) + P_1(e))\alpha\| = 1, \quad \|P_2(e_1)(\alpha - a_1)\| < 2^{-2}\,\delta,$$

$$\|P_1(e_1)(\alpha - a_1)\| < 2^{-2}\,\delta \ \text{ y } \ |\varphi(e - e_1)| < 2^{-1}\,\varepsilon.$$

Una nueva aplicación del Corolario 4.2.2 reemplazando e por e_1 y α por $(P_2(e_1) + P_1(e_1))(\alpha - a_1)$ nos permite asegurar la existencia de $a_2 \in \mathcal{E}$ y un tripotente $e_2 \leq e_1$ en $\mathcal{E}^{**}$, verificando las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
\|a_2\| &\leq \|(P_2(e_1) + P_1(e_1))(\alpha - a_1)\| < 2^{-1}\,\delta,\\
&\|P_2(e_2)((P_2(e_1) + P_1(e_1))(\alpha - a_1) - a_2)\|\\
&= \|P_2(e_2)(\alpha - a_1 - a_2)\| < 2^{-3}\,\delta,\\
&\|P_1(e_2)((P_2(e_1) + P_1(e_1))(\alpha - a_1) - a_2)\|\\
&= \|P_1(e_2)(\alpha - a_1 - a_2)\| < 2^{-3}\,\delta,\\
&\text{y} \quad |\varphi(e_1 - e_2)| < 2^{-2}\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Procediendo mediante inducción obtenemos una sucesión (a_n) en $\mathcal{E}$ y una sucesión decreciente de tripotentes $(e_n) \in \mathcal{E}^{**}$ con $e_1 \leq e$ satisfaciendo las siguientes desigualdades

$$\|P_2(e_n)(\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k)\| < 2^{-(n+1)}\,\delta, \ \ \|P_1(e_n)(\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k)\| < 2^{-(n+1)}\,\delta,$$

$$\|a_{n+1}\| \leq \|(P_2(e_n) + P_1(e_n))(\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k)\| \ \text{ y } \ \|a_1\| \leq 1$$

$$|\varphi(e_{n-1} - e_n)| < 2^{-n}\ \varepsilon \text{ y } |\varphi(e - e_1)| < 2^{-1}\ \varepsilon.$$

Las desigualdades anteriores nos permiten concluir que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|a_n\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|(P_2(e_{n-1}) + P_1(e_{n-1}))(\alpha - \sum_{k=1}^{n-1} a_k)\| + \|a_1\|$$

$$\leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\delta}{2^{n+1}} \leq 1 + \delta.$$

Por consiguiente $a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es un elemento en $\mathcal{E}$ verificando además que $\|a_0\| \leq 1 + \delta$.

Notemos por e_0 al límite en la topología débil-* de la sucesión (e_n). Tal y como hemos visto en la demostración del Teorema 4.2.1, e_0 es un tripotente en $\mathcal{E}^{**}$ y $|\varphi(e - e_0)| < \varepsilon$.

Finalmente, para $i = 1, 2$, la desigualdad

$$\|P_i(e_0)(\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k)\| = \|P_i(e_0)(P_2(e_n) + P_1(e_n))(\alpha - \sum_{k=1}^{n} a_k)\| \leq 2^{-n}\ \delta,$$

muestra que $P_i(e_0)(\alpha - a_0) = 0$. $\square$

Terminamos esta memoria con un Teorema de Lusin para JB*-triples reales.

Sea E un JB*-triple real, $\widehat{E}$ la complexificación de E y τ la conjugación canónica en $\widehat{E}$ que verifica que $\widehat{E}^\tau = E$. Para cada $\phi \in \widehat{E}^*$ definimos $\widehat{\tau}(\phi) \in \widehat{E}^*$ mediante $\widehat{\tau}(\phi)(x) := \overline{\phi(\tau(x))}$. Es conocido que la ley $\phi \mapsto \widehat{\tau}(\phi)$ define una nueva conjugación en $\widehat{E}^*$. Es también conocido que la aplicación

$$(\widehat{E}^*)^{\widehat{\tau}} \to E^*$$

$$\phi \to \phi|_E$$

es una isometría lineal sobreyectiva (ver [37, Lemma 4.2]). Realizando una vez más esta misma construcción obtenemos una conjugación $\widehat{\widehat{\tau}}$ en $\widehat{E}^{**}$ verificando que $E^{**} = (\widehat{E}^{**})^{\widehat{\widehat{\tau}}}$. Para simplificar la notación seguiremos notando mediante τ a la conjugación $\widehat{\widehat{\tau}}$.

Al igual que en el caso complejo, dados un JBW*-triple real W, φ un elemento en la esfera unidad de W_* y un elemento de norma uno, z, en W tales que $\varphi(z) = 1$, la aplicación $(x, y) \mapsto \varphi\{x, y, z\}$ define una forma bilineal positiva sobre W que no depende del elemento z [63, Lemma 2.4]. En consecuencia, la ley $x \mapsto \|x\|_\varphi := (\varphi\{x, x, z\})^{\frac{1}{2}} \quad (x \in \mathcal{W})$ define una seminorma prehilbertiana sobre W. La topología fuerte-* de W, $S^*(W, W_*)$, es la topología sobre W generada por la familia de seminormas $\{\|.\|_\varphi : \varphi \in \mathcal{W}_*, \|\varphi\| = 1\}$. En [67, Corollary 3] y [65, pag. 621] se prueba que las aplicaciones lineales entre JBW*-triples reales o complejos son fuerte-* continuas si, y solo si, son débil-* continuas.

Si E es un JB*-triple real y τ es la conjugación canónica en su complexificación, entonces $\widehat{\widehat{\tau}}$ es fuerte-* continua. En realidad, la Proposición 3.2.9 nos permite asegurar que cualquier isometría lineal y sobreyectiva entre JBW*-triples reales es automáticamente fuerte-* continua. Como ya hemos comentado la bola unidad cerrada de $\widehat{E}$ es fuerte-* densa en la bola unidad cerrada de $\widehat{E}^{**}$, lo que unido a la continuidad fuerte-* de la conjugación $\widehat{\widehat{\tau}}$ nos permite afirmar que la bola unidad cerrada de E es fuerte-* densa en la bola unidad cerrada de E^{**}.

Las desigualdades geométricas obtenidas en la Proposición 4.1.4 y el Lema 4.1.6 continúan siendo ciertas para JB*-triples reales sin más que pasar por su complexificación. En consecuencia, los comentarios anteriores permiten adaptar de manera literal las demostraciones del Teorema 4.2.1 y el Corolario 4.2.2 para obtener el siguiente Teorema de Lusin para JB*-triples reales.

Teorema 4.2.4 *Sean E un JB*-triple real, φ un funcional en E^* y α un elemento en E^{**}. Entonces para cada tripotente $e \in E^{**}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, existen un tripotente e_0 en E^{**} con $e_0 \leq e$ y $a_0 \in E$ satisfaciendo*

$$P_2(e_0)(\alpha - a_0) = P_1(e_0)(\alpha - a_0) = 0,$$

$$\|a_0\| \leq (1+\delta)\|(P_2(e) + P_1(e))\alpha\| \text{ y } |\varphi(e - e_0)| < \varepsilon.$$

□

Nota 4.2.5 *Supongamos que E es un JB*-triple real o complejo. Es necesario destacar que los resultados obtenidos en los Teoremas 4.2.3 y 4.2.4 continúan siendo ciertos cuando reemplazamos E^{**} por cualquier JBW*-triple real o complejo W verificando que E es débil-* denso en W.*

Bibliografía

[1] Akemann, C. and Weawer, N.: Geometric characterizations of some classes of operators in C*-algebras and von Neumann algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **130**, 3033-3037 (2002).

[2] Alfsen, E. and Shultz, F. W.: Non-commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets, Mem. Amer. Math. Soc. **172**, (1976).

[3] Alfsen, E., Shultz, F. W. and Störmer, E.: A Gelfand Neumark theorem for Jordan algebras, Adv. in Math. **28**, 11-56 (1978).

[4] Alvermann, K.: Real normed Jordan algebras with involution, Arch. Math. **47**, 135-150 (1986).

[5] Araki, H. and Elliott, G.: On the definition of C*-algebras, Publ. Research Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. **9**, 93-112 (1973).

[6] Banach, S.: *Théorie des Opérations Linéaires*, Warsaw, 1932.

[7] Barton, T. and Friedman Y.: Grothendieck's inequality for JB*-triples and applications, J. London Math. Soc. (2) **36** 513-523 (1987).

[8] Barton, T. and Friedman, Y.: Bounded derivations of JB*-triples, Quart. J. Math. Oxford (2) **41**, 255-268 (1990).

[9] Barton, T. and Timoney, R. M.: Weak*-continuity of Jordan triple products and its applications, Math. Scand. **59**, 177-191 (1986).

[10] Bonsall, F. F. and Duncan, J.: *Complete Normed Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1973.

[11] Bunce, L. J., Fernández-Polo, F. J., Martínez J. and Peralta A. M.: Saitô-Tomita-Lusin Theorem for JB*-triples and applications, aparecerá en Q. J. Math.

[12] Cartan E.: Sur les domains bornés homogènes de l'espace de n variables complex, Abh. Math. Sem. Uni. Hamburg, **11**, 116-162 (1935).

[13] Chu, C-H., Dang, T., Russo, B., and Ventura, B.: Surjective isometries of real C*-algebras, J. London Math. Soc. **47**, 97-118 (1993).

[14] Dang, T.: Real isometries between JB*-triples, Proc. Amer. Math. Soc. **114**, 971-980 (1992).

[15] Dang, T. and Friedman, Y.: Classification of JBW*-Triple factors and applications, Math. Scand. **61**, 292-330 (1987).

[16] Dang, T., Friedman, Y. and Russo B:: Affine geometric proofs of the Banach Stone Theorems of Kadison and Kaup, Rocky Mountain Journal of Mathematics. **20**, 2, 409-428 (1990).

[17] Dang, T. and Russo, B.: Real Banach Jordan triples, Proc. Amer. Math. Soc. **122**, 135-145 (1994).

[18] Dineen, S.: Complete holomorphic vector fields on the second dual of a Banach space, Math. Scand. **59**, 131-142 (1986).

[19] Dixmier, J.: *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1969.

[20] Doran R. S. and Belfi V. A.: *Characterizations of C*-algebras. The Gelfand-Naimark theorems*, Marcel Dekker, Inc. 1986.

[21] Ebbinghaus, H. D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A. and Remmert, R.: *Numbers*, Springer-Verlag, New York Inc. 1990.

[22] Edwards, C. M. and Rüttimann, G. T.: On the facial structure of the unit balls in a JBW*-triple and its predual, J. London Math. Soc. Ser.(2) **38**, 317-332 (1988).

[23] Edwards, C. M. and Rüttimann, G. T.: The facial and inner ideal structures of a real JBW*-triple, Math. Nachrichten **222**, 1, 159-184 (2001).

[24] Fernández-Polo, F. J., Martínez J. and Peralta A. M.: Surjective isometries between real JB*-triples, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137**, 703–723 (2004).

[25] Fernández-Polo, F. J., Martínez J. and Peralta A. M.: Geometric characterization of tripotents in real and complex JB*-triples, J. Math. Anal. Appl. **295**, 435–443 (2004).

[26] Friedman, Y. and Russo, B.: Contractive projections on operator triple systems, Math. Scand. **52**, 279-311 (1983).

[27] Friedman, Y. and Russo, B.: Structure of the predual of a JBW*-triple, J. Reine u. Angew. Math. **356**, 67-89 (1985).

[28] Friedman, Y. and Russo, B.: Solution of the contractive projection problem, J. Funct. Anal. **60**, 56-79 (1985).

[29] Friedman, Y. and Russo, B.: The Gelfand-Naimark Theorem for JB*-triples, Duke Math. J. **53**, 139-148 (1986).

[30] Goodearl, K. R.: *Notes on real and complex C*-algebras*, Shiva Publ., Nantwich, Cheshire, England 1982.

[31] Hanche-Olsen, H. and Størmer, E.: *Jordan operator algebras*, Monographs and Studies in Mathematics 21, Pitman, London-Boston-Melbourne, 1984.

[32] Harris, L. A.: Bounded Symmetric Homogeneous Domains in infinite dimensional spaces, In: Proceedings on infinite dimensional Holomorphy (Kentucky 1973), pp. 13-40, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1974.

[33] Ho, T., Martínez, J., Peralta, A. M. and Russo, B.: Derivations on real and complex JB*-triples, J. London Math. Soc. (2) **65**, 85-102 (2002).

[34] Horn, G.: Characterization of the predual and ideal structure of a JBW*-triple, Math. Scand. **61**, 117-133 (1987).

[35] Horn, G.: Classification of JBW*-triples of type I, Math. Z. **196**, 271-291 (1987).

[36] Ingelstam, L.: Real Banach algebras, Arkiv. för Mat. **5**, 239-270 (1964).

[37] Isidro, J. M., Kaup, W. and Rodríguez, A.: On real forms of JB*-triples, Manuscripta Math. **86**, 311-335 (1995).

[38] Isidro J. M. and Rodríguez A., Isometries of JB-algebras, Manuscripta Math. **86**, 337-348 (1995).

[39] Kadison, R. V.: Isometries of operator algebras, Ann. of Math. **54**, 325-338 (1951).

[40] Kaup, W.: Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds, Math. Ann. **228**, 39-64 (1977).

[41] Kaup, W.: Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension I, Math. Ann. **257**, 463-486 (1981).

[42] Kaup, W.: A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces, Math. Z. **183**, 503-529 (1983).

[43] Kaup, W.: Contractive projections on Jordan C*-algebras and generalizations, Math. Scand. **54**, 95-100 (1984).

[44] Kaup, W.: On real Cartan factors, Manuscripta Math. **92**, 191-222 (1997).

[45] Kaup, W. and Upmeier, H.: Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces, Math. Z. **157**, 179-200, (1977).

[46] Kaup, W. and Upmeier, H.: Banach spaces with biholomorphically equivalent unit balls are isomorphic, Proc. Amer. Math. Soc. **58**, 129-133, (1976).

[47] Koecher, M.: Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras, Am. J. Math. **89**, 787-816, (1967).

[48] Koecher, M.: *An elementary approach to bounded symmetric domains*, Lecture Notes, Rice Univ. 1969.

[49] Loos, O.: *Lectures on Jordan triples*. The University of British Columbia, Vancouver, B.C., 1971.

[50] Loos, O.: *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Math. Lectures, University of California, Irvine 1977.

[51] Martínez, J. : *Sobre álgebras de Jordan normadas completas*, Secretariado de publicaciones de la universidad de Granada (Spain), Un.Gr.40.77.04 (1977).

[52] Martínez, J., Mena, J. F., Payá, R. and Rodríguez, A.: An approach to numerical ranges without Banach algebra theory, Illinois Journal of Mathematics **29** (4), 609-622 (1985).

[53] Martínez, J. and Peralta A. M.: Separate weak*-continuity of the triple product in dual real JB*-triples, Math. Z. **234**, 635-646 (2000).

[54] McCrimmon, K: Compatible Peirce decompositions of Jordan triple systems, Pacific J. Math. **103** (1), 57-102, (1982).

[55] McCrimmon, K. and Meyberg, K.: Coordinatization of Jordan triple systems, Comm. Algebra, **9** (14), 1495-1542 (1981).

[56] Meyberg, K.: *Lectures on algebras and triple systems*, Lectures Notes. University of Virginia. Charlottesville 1972.

[57] Moreno Galindo, A. and Rodríguez-Palacios, A.: On the Zelmanovian classification of prime JB*-triples. J. Algebra **226** (1), 577–613 (2000).

[58] Moreno Galindo, A. and Rodríguez-Palacios, A.: On the Zelmanovian classification of prime JB*- and JBW*-triples. Comm. Algebra **31** (3), 1301–1328 (2003).

[59] Neher, E.: *Jordan triple systems by the grid approach*, Lecture Notes in Mathematics 1280. Springer-Verlag, Berlin 1987.

[60] Paterson, A. L. T. and Sinclair, A. M.: Characterisation of isometries between C*-algebras, J. London Math. Soc. **5**, 755-761 (1972).

[61] Pedersen, G. K.: *C*-algebras and their automorphism groups*, London Mathematical Society Monographs, 14. Academic Press, Inc. London-New York, 1979.

[62] Peralta, A. M.: *Sobre JB*-triples reales*, Tesis Doctoral, Granada 2000.

[63] Peralta, A. M.: Little Grothendieck's theorem for real JB*-triples, Math. Z. **237**, no. 3, 531-545 (2001).

[64] Peralta, A. M. and Stachó, L.: Atomic decomposition of real JBW*-triples, Quart. J. of Mathematics **52**, 79-87 (2001).

[65] Peralta, A. M. and Rodríguez Palacios, A.: Grothendieck's innequalities for real and complex JBW*-triples, Proc. London Math. Soc. **3**, 605-625 (2001).

[66] Rickart, C. E.: *General theory of Banach algebras*, Kreiger, New York, 1974.

[67] Rodríguez-Palacios, A.: On the strong* topology of a JBW*-triple, Quart. J. Math. Oxford (2) **42**, no. 165, 99-103 (1991).

[68] Rodríguez-Palacios A.: Jordan structures in Analysis. In Jordan algebras: Proc. Oberwolfach Conf., August 9-15, 1992 (ed. by W. Kaup, K. McCrimmon and H. Petersson), 97-186. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[69] Rodríguez-Palacios A.: Banach space characterizations of unitaries, preprint 2003.

[70] Rudin, W.: *Análisis real y complejo*, Alhambra S. A., Madrid 1979.

[71] Russo B.: Structure of JB*-triples. In Jordan algebras: Proc. Oberwolfach Conf., August 9-15, 1992 (ed. by W. Kaup, K. McCrimmon and H. Petersson), 209-280. Walter de Gruyter, Berlin, 1994.

[72] Sakai, S.: *C*- and W*-algebras*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[73] Saitô, K.: Non-commutative extension of Lusin's Theorem, Tôhoku Math. Journ. **19** (3), 332-340, (1967).

[74] Sherman, S.: On Segal's postulates for general quantum mechanics, Ann. of Math. **64**, 593-601, (1956).

[75] Shilov, G. E., Gurevich, B. L.: *Integral, measure and derivative: A unified approach,* Revised English edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1966.

[76] Shultz, F. W.: On normed Jordan algebras wich are Banach dual spaces, J. Funct. Anal. **31**, 360-376 (1979).

[77] Stachó, L.: A projection principle concerning biholomorphic automorphisms, Acta Sci. Math. **44**, 99-124 (1982).

[78] Stachó, L.: A counterexample concerning contractive projections of real JB*-triples, Publ. Math. Debrecen **58**, 223-230 (2001).

[79] Stone M., Applications of the Theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375-481 (1937).

[80] Takesaki, M.: *Theory of operator algebras I*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.

[81] Tomita, M.: Spectral theory of operator algebras I, Math. J. Okayama Univ. **9**, 63-98 (1959).

[82] Upmeier, H.: *Symmetric Banach Manifolds and Jordan C*-algebras*, Mathematics Studies 104, (Notas de Matemática, ed. by L. Nachbin) North Holland, 1985.

[83] Werner, W.: Subdifferentiability and the noncommutative Banach-Stone theorem. Function spaces (Edwardsville, IL, 1994), 377–386, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 172, Dekker, New York, 1995.

[84] Wright, J. M.: Jordan C*-Algebras, Mich. Math. J. **24**, 291-302 (1977).

[85] Wright, J. M. and Youngson, M. A.: On Isometries of Jordan Algebras, J. London Math. Soc. (2) **17**, 339-344 (1978).

[86] Zel'manov, E. I.: Primary Jordan triple systems. Siberian Math. J. **24**, (4), 23-37 (1983).

[87] Zel'manov, E. I.: Primary Jordan triple systems. II. Siberian Math. J. **25** , (5), 50-61 (1984).

[88] Zel'manov, E. I.: On Prime Jordan triple systems. III. Siberian Math. J. **26** , (1), 71-82 (1985).

[89] Zhevlakov, K. A., Slinko, A. M., Shestakov, I. P. and Shirshov, A. I.: *Rings that are nearly associative*, Academic Press, New York, 1982.

Glosario