El objeto ecuación en la formación inicial de profesores: análisis de significados institucionales de un tipo de tareas en diferentes contextos

The equation object in the initial teacher education: analysing the institutional meanings of a type of task in different contexts

Silvia Etchegaray, Julia Corrales, Claudio Fernández, Karina Nahuin y Lía Vázquez

Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Caleta Olivia (UNPA-UACO)

Resumen

El propósito de este trabajo es compartir el análisis realizado a prácticas institucionales al revisar el objeto ECUACIÓN, en tanto objeto de estudio en la formación inicial de profesores en matemática. Este estudio se realiza en el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticos, tomando como contexto de reflexión escuelas secundarias de la Zona Norte de la Provincia de Santa Cruz y en la Unidad Académica Caleta Olivia de la UNPA, Argentina. Pretendemos identificar algunas tensiones y posibles conflictos semióticos en torno al objeto ecuación en lo que se refiere a la relación/conexión/complementariedad/ distancia entre cómo "vive" en el nivel medio y cómo se aborda en la formación inicial de profesores. Identificamos también los diferentes niveles de algebrización que se evidencian en cada uno de los tipos de prácticas analizadas.

Palabras claves: Significados, ecuación, contextos educativos, formación de profesores

Abstract

In this paper we share our analysis of institutional practices when revisiting the EQUATION, as an object of study in the first years of college in the education of mathematics teachers. The study is carried out within the Onto-semiotic Approach to Cognition and Mathematical Instruction framework and takes as a reflection context secondary schools in the Northern Region of the Province of Santa Cruz and in the "Unidad Academica Caleta Olivia" of the UNPA, Argentina. We intend to identify some tensions and possible semiotic conflicts around the object "equation", in relation to the connection / complementarity / distance between how it "lives" in high school and how it is approached in the first years of college. We also identify the different algebrisation levels involved in each type of practice under study.

Key words: Meanings, equation, educational contexts, teacher training

1. Introducción

En el marco de la investigación sobre análisis de conflictos semióticos en procesos de algebrización de la actividad matemática, vinculados tanto a tareas geométricas como numéricas e integrando las TIC, en la UNPA-UACO, Argentina, hemos realizado un estudio didáctico-matemático con el propósito de revisar/revisitar al objeto ECUACIÓN en tanto objeto de enseñanza en la formación inicial de profesores en matemática. Son variadas y numerosas las preguntas que nos planteamos ¿Qué significa una ecuación para quien tiene que enseñar ecuaciones? ¿Qué se debe enseñar y aprender de este objeto en la formación inicial de profesores? ¿Con cuáles otros objetos se lo relacionan? ¿Qué tipos de interrogantes ponen en evidencia su naturaleza? ¿Qué elementos conforman el significado global del objeto en cuestión? ¿Qué lenguaje significa y porta sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el / los

Etchegaray, S., Corrales, J., Fernández, C., Nahuin, K. y Vázquez, L. (2017). El objeto ecuación en la formación inicial de profesores: análisis de significados institucionales a un tipo de tareas en diferentes contextos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

significados pretendidos e implementados? ¿Cómo se relacionan esos sistemas de prácticas? ¿Qué dialécticas intra e interdisciplinares permiten cambios y evolución de sus significados? "Estos cuestionamientos nos enfrentan a una complejidad sistémica de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que se deben diferenciar significados, funcionamientos y relaciones que sólo *el problema de su enseñanza* pone en evidencia" (Etchegaray, 2010).

En este trabajo mostramos en el apartado 2 la fundamentación del problema abordado explicitando nuestra posición epistemológica y didáctica sobre la problemática de la enseñanza de la Matemática; a continuación exponemos el marco teórico y metodológico que lo sustenta (apartado3). Seguidamente desplegamos un análisis didáctico-matemático realizado a diferentes resoluciones de un tipo de tarea que involucra una ecuación, para luego sintetizar lo estudiado en la sección 5, donde se explicitarán las relaciones, complementariedades, tensiones matemáticas y didácticas que emergieron del análisis comparativo de los cuatro modelos obtenidos en el análisis precedente. Se cierra el trabajo con una reflexión en torno a los aportes de este tipo de estudio.

2. Fundamentación del problema

Esta investigación supone que las tensiones y conflictos que surgen en los procesos de enseñanza y aprendizaje en cualquier nivel educativo están íntimamente ligados con los procesos de aprendizaje transitados por el docente sobre el objeto en cuestión, en otras palabras cómo los propios docentes aprendieron las ecuaciones. Este supuesto se refuerza ante la disociación existente entre los diferentes *tipos de prácticas* que se despliegan en torno a este objeto y que "viven" aisladamente en la institución formadora. En efecto, se enseñan las ecuaciones tanto en contextos puramente matemáticos (aritmético, algebraico, funcional, analítico y/o geométrico) como en contextos extra matemáticos (físico, didáctico) pero, en general, estos tipos de prácticas "no dialogan" en las instituciones formadoras aunque confluyen en el Currículo de formación del profesor en matemática.

Los profesores de educación secundaria que participan en nuestro proyecto de investigación, con el propósito de construir espacios de articulación entre la escuela secundaria y la universidad, — en tanto institución formadora de profesores — sostienen que el estudio de las ecuaciones para la enseñanza del álgebra desempeña un papel importante en el aprendizaje de los estudiantes, no sólo por estar relacionado con temas de otras asignaturas, sino porque resultan una de las herramientas más importantes para modelizar situaciones reales. Sin embargo, el tratamiento que se le da al estudio de las ecuaciones en la escuela secundaria, genera dificultades en su aprendizaje e ideas incompletas de la ecuación, lo que se ve reflejado, por ejemplo, en la actividad realizada por los estudiantes ingresantes a la universidad, transformándose así estas producciones a veces equivocadas, otras veces incompletas en un claro indicador de la problemática educativa que nos aboca.

En primer lugar sostenemos que la ecuación como "objeto de enseñanza" debe estar presente en la formación docente no solo como un contenido matemático de los espacios curriculares correspondientes a la formación disciplinar (análisis I, II; álgebra I, II), para luego ser abordado como conocimiento a enseñar en materias de contenido puramente didáctico; sino que se debería encontrar en prácticas matemáticas articuladoras que "vivan" en los espacios específicos de matemática, transformándose así en prácticas de referencia para su posterior enseñanza. En segundo lugar, sostenemos que revisar la actividad docente de los profesores que actualmente se desempeñan en las instituciones de enseñanza, puede ayudar a explicar el tratamiento que los mismos le otorgan a este contenido en sus clases universitarias y/o secundarias y por ende tomar nuevas decisiones acerca de cómo debiera tratarse en la formación docente inicial. En otras palabras, hacer funcionar una dialéctica formativa poniendo "en diálogo", a través de las voces y actividad matemática de sus respectivos docentes, dos tipos de instituciones de enseñanza: la institución formadora y la institución de enseñanza donde se ejerce la profesión. Justamente en nuestro Proyecto de investigación se intenta construir un escenario fructífero para movilizar tal dialéctica, dado que trabajamos en conjunto tantos docentes universitarios como egresados de la universidad que están desempeñándose en las escuelas secundarias y estudiantes actuales del profesorado.

El aprendizaje de este objeto matemático no es sencillo, lo cual queda evidenciado al observar la diversidad y recurrencia de errores que se evidencian en ambos subsistemas educativos. También reconocemos que existen importantes investigaciones nacionales e internacionales que tratan acerca de las causas que originan dichos errores. Algunas de estas causas son de corte epistemológico, al tener en cuenta los cambios conceptuales que se dan en la transición de la aritmética al álgebra; otras están enfocadas en las prácticas de los estudiantes del secundario, particularmente en sus actitudes hacia el aprendizaje, o en los necesarios procesos cognitivos por los que habría de transitar (Godino y Font, 2003; Sessa, 2005). Sin embargo, se ha investigado en menor medida, especialmente en nuestro país, cómo se aborda esta problemática en la formación inicial del profesor de matemáticas. En particular, sí se ha avanzado sobre el tratamiento que le dan los profesores de secundaria a la enseñanza de este objeto y se intenta dar razones que pueden contribuir al surgimiento de errores. Por ejemplo, se suele definir una ecuación como una igualdad con una incógnita, lo cual induce a la idea de que para resolver una ecuación hay que encontrar un número que existe pero que es desconocido y, en consecuencia, no es posible concebir la idea de ecuaciones sin solución o de ecuaciones con soluciones infinitas. Es así que en la escuela, a la ecuación se le da un tratamiento que, por un lado, dificulta el aprendizaje del álgebra, y por otro, plantea ideas inadecuadas o incompletas de lo que significa para la institución matemática.

3. Marco teórico y metodológico

El marco teórico desde el cual realizamos los análisis a diferentes prácticas que involucran distintos tipos de ecuaciones es el Enfoque Ontosemiótico sobre la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS), cuyo principal referente e iniciador es el Dr. Juan Díaz Godino (Granada, España). En diversos trabajos, Godino y colaboradores han elaborado un sistema de nociones teóricas y categorías sobre la naturaleza, origen y significado de los objetos matemáticos desde una perspectiva educativa, tratando de articular de manera coherente la dimensión epistémica (significados institucionales o socioculturales), o sea lo que se ocupa del desarrollo de los saberes pensados en las diferentes instituciones; con la dimensión cognitiva (significados personales, psicológicos o individuales) que se ocupa de cómo el alumno conoce.

Más específicamente y siempre en este marco teórico, se toma como problema a investigar la complejidad del razonamiento algebraico, emergiendo actualmente en esta línea de investigación seis niveles de algebrización desde la escuela primaria y su articulación con la secundaria y universitaria. El fundamento para definir los distintos niveles de algebrización en Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) es de índole ontosemiótico, esto es, se tiene en cuenta la diversa naturaleza de los objetos y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas operativas y discursivas que realiza un sujeto epistémico o ideal dada una tarea específica. Todas estas nociones y categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre el razonamiento algebraico elemental, en tanto visión ampliada del álgebra escolar que propone desarrollar Godino, Aké, Gonzato, M. y Wilhelmi (2014), tienen en cuenta los procesos de generalización, simbolización, modelización estructural y funcional, así como el cálculo analítico, permitiendo una articulación coherente entre el pensamiento algebraico en educación primaria y secundaria. Por ejemplo el uso de parámetros y su tratamiento es entendido como un criterio para delimitar niveles superiores de algebrización, ya que está ligado a la presencia de familias de ecuaciones y funciones, y por tanto, implica nuevas "capas" o grados de generalidad Como afirman Caspi y Sfard (2012) "Si cada capa en la jerarquía es un discurso sobre su predecesor, una introducción de una nueva capa antes de que el estudiante domine la precedente conlleva el riesgo de que el estudiante simplemente no sabría a qué se refiriere el nuevo discurso" (p.47). El primer encuentro con los parámetros se liga a un cuarto nivel de algebrización y la realización de cálculos o tratamientos conjuntos con parámetros y variables a un quinto nivel. También se reconoce un sexto nivel de algebrización ligado al estudio de estructuras, pero que no se utilizará para esta investigación particular.

En este marco teórico y metodológico nuestro *objetivo específico* es analizar determinadas situaciones/problemas que "viven" y se "desarrollan" con absoluta naturalidad en la formación inicial de profesores en diferentes contextos intra o extra matemáticos. Además identificamos los diferentes niveles de algebrización que se evidencian en cada uno de los tipos de prácticas posibles ya que el reconocimiento de los niveles de algebrización puede ser una ayuda para analizar la articulación de las configuraciones ontosemióticas implicadas, (numérico-icónicas y analítico-algebraicas) a fin de identificar y resolver posibles discontinuidades en los niveles de generalidad, representación, cálculo y construcción de nuevos objetos algebraicos en las distintas instituciones de enseñanza (Godino et al., 2015).

4. Desarrollo del estudio didáctico-matemático

Con el fin de ilustrar el trabajo que estamos realizando, compartiremos una producción didáctico-matemática que desarrollamos, en tanto docentes investigadores, la cual se enriqueció con un trabajo de extensión realizado en un taller con docentes del nivel medio, sobre el estudio de dos ecuaciones en un contexto intra-matemático, de muy conocida presencia y tratamiento en la formación inicial de profesores.

Tarea: ***Resolver:*** $x + \sqrt{x} = 5$ (1)

$\sqrt{\mathrm{x} + 3} = -2$ (2)

Estas ecuaciones fueron abordadas, discutidas, y puestas en relación, desde cuatro tipos de prácticas diferentes, correspondientes a significados personales diversos, transitando por niveles de algebrización diferentes pero que pretendemos poner "en diálogo" para avanzar en nuestra problemática educativa:

a. Desde la aproximación de la solución en el contexto aritmético.
b. Desde las transformaciones algebraicas de la ecuación (contexto algebraico)
c. Desde la igualdad establecida por la ecuación pensándolo como igualdad de dos funciones *f(x) = g(x)* (contexto funcional).

d. Desde el inter juego de diferentes lenguajes que plantea el Geogebra, trabajando la ecuación como función con el cálculo analítico de la solución (contexto computacional)

Analizamos en cada caso, las tensiones y conflictos que emergen al abordar su resolución en los diferentes contextos a partir de las siguientes preguntas que refieren al significado institucional matemático de un tipo de tarea como: ***Resolver.*** ¿Existe la solución? ¿Cuántas? ¿La/s solución/es a qué campo numérico pertenece/n? En otras palabras, pretendemos desvelar de los esenciales problemas matemáticos de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación los diferentes niveles de algebrización por los que se pueden transitar en un determinado tipo de tareas.

Ilustramos, por razones de extensión para esta comunicación, las resoluciones y el análisis realizado a los sistemas de prácticas generados sólo para la primera ecuación.

Los cuatro tipos de prácticas diferentes, que inmersas en sendos contextos nos plantea la presencia de cuatro modelos diferentes, "conviven" (desarticulados, atomizados) en la formación inicial del profesor y en el secundario, planteadas por profesores de secundaria, de la universidad del área de matemática, de didáctica, de física y alumnos avanzados del profesorado. Primaron las producciones en el contexto algebraico realizadas por profesores universitarios y varios de secundaria, en el contexto funcional por los profesores de física y algunos de matemática del nivel universitario, en el aritmético por pocos docentes del nivel secundario y por profesores que no son del área disciplinar, y en el computacional por docentes universitarios responsables de asignaturas como cálculo numérico u otras que hacen uso de software educativos.

4.1. Contexto aritmético

El método elegido fue el de aproximación no sistemática, esto es, mediante tanteo.

En primer lugar se definen los límites del tanteo como una manera de significar el dominio de la ecuación. Considerando la siguiente transformación: $\sqrt{x} = 5 - \mathrm{x}$, se sabe que la raíz cuadrada existe, en el campo real, para valores mayores e iguales a cero. Además, considerando por defecto la raíz positiva, lo que se encuentra a la derecha de la igualdad debe ser también mayor o igual a cero. En síntesis, $x \geq 0$ y $5\text{-}x \geq 0$. Se concluye así, a priori, que el intervalo donde se encuentra la solución es: $0 \leq x \leq 5$. A continuación se muestran los valores obtenidos para $x + \sqrt{x} = 5$ a partir de distintos valores de x en dicho intervalo.

Valor de x	$x + \sqrt{x} = 5$
0	0
1	2
2	3,414213562
3	4,732050808
4	6

Es decir, que por tanteo, se puede concluir que la solución estaría en el intervalo [3, 4]. Si se continúa

Valor de x	$x + \sqrt{x} = 5$
3	4,732050808
3,1	4,860681686
3,2	4,988854382
3,3	5,116590212

La solución estaría en el intervalo [3,2, 3,3]

Se observa en esta producción que, se ha naturalizado el problema de la existencia e incluso el de la unicidad ya que se asegura que con este método se converge a una solución. Una ventaja es que se relaciona este tipo de práctica con la aproximación y el error derivado de esta aproximación. Respecto al nivel de algebrización que se desarrolla en esta práctica podemos enmarcarla en un nivel 2, ya que se caracteriza por pensar y transformar un lenguaje simbólico – literal, usado para referir a los intensivos[1] reconocidos, aunque siempre ligados a la información emergente del contexto espacial y temporal.

4.2. Contexto algebraico

Primer tipo de Práctica	*Segundo tipo de Práctica*
$x+\sqrt{x}-5=0$ Considerando la Sustitución $\sqrt{x}=u$ ó $x=u^2$, obtenemos la siguiente transformación: $u^2+u-5=0$. Analizando el discriminante, $=b^2-4ac$ donde $a=b=1\ y c=-5$, $D=1^2-4\cdot 1\cdot(-5)$ Obtenemos $D=21$ Que es mayor a cero, de lo cual, podemos deducir que existen dos raíces reales distintas: $u_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow u_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.(-5)}}{2(1)}$ $u_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ y $u_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ Sabiendo que $\sqrt{x}=u$ $u_{1},_{2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}=\sqrt{x}$ $x=u^2=\left(\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}\right)^2=\frac{1\pm 2\sqrt{21}+21}{4}=\frac{11\pm\sqrt{21}}{2}$ Luego $x_1=\frac{11+\sqrt{21}}{2}$ y $x_2=\frac{11-\sqrt{21}}{2}$ ¿Cuál de las dos soluciones es la solución de la ecuación original?	Si consideramos la ecuación: $x+\sqrt{x}-5=0$ y utilizando el "despeje" como técnica, obtenemos lo siguiente: $\sqrt{x}=5-x$ Elevamos al cuadrado ambos miembros de la igualdad: $(\sqrt{x})^2=(5-x)^2$ $x=x^2-10x+25$ $0=x^2-10x+25-x$ $0=x^2-11x+25$ $Donde\ a=1;\ b=-11\ y\ c=25$ Si utilizamos la fórmula de Bhaskara, para la resolución de ecuaciones cuadráticas tenemos: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot 1\cdot(25)}}{2(1)}$ $x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-100}}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{21}}{2}$ ¿Cuál de las dos soluciones es la solución de la ecuación original? Si corroboramos ambas soluciones,

[1]En el marco del EOS se considera que los objetos intensivos (entidades generales, abstractas) emergen de colecciones de objetos y de las acciones que se realizan con ellos. En el nivel 0 de algebrización no se puede decir que no intervienen estos objetos, sino que les corresponde un primer grado de intensión. La atribución de un carácter algebraico a una práctica matemática supone la intervención de intensivos al menos de un segundo grado de generalización, es decir, clases de intensivos de grado 1, como en este caso los valores que se le dan a x, encuadrado en un intervalo.

Si corroboramos ambas soluciones, reemplazando en la ecuación $x + \sqrt{x} - 5 = 0$, nos llevaría a concluir que la solución es: $x_2 = \frac{11-\sqrt{21}}{2}$	reemplazando en la ecuación $x + \sqrt{x} - 5 = 0$, nos llevaría a concluir que la solución es: $x_2 = \frac{11-\sqrt{21}}{2}$

En ambos tipos de prácticas se observa un nivel consolidado de algebrización (nivel 3) el cual supone la intervención de objetos intensivos de grado 2 representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax^2+C = Bx$ (A, B, C, $\in \mathbf{R}$) y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas como el método de Bhaskara.

4.3. Contexto funcional

Si se piensa a: $5 = x + \sqrt{x}$ como la intersección de dos funciones $f(x)$ y $h(x)$: $f(x) = h(x)$; $5 - x = \sqrt{x}$ gráficamente, podemos visualizar que existe una solución, que es la intersección de ambas funciones continuas. Lo cual, no basta para dar respuesta a los tres interrogantes que guían este estudio, ya que la solución es irracional y lo que visualizamos acarrea un error de aproximación.

También podemos considerar la función $\mathrm{g(x)} = x + \sqrt{x} - 5$, y analizarla haciendo uso del Teorema de Bolzano (TB), que nos dice:

Sea g continua en un intervalo cerrado [a, b] y tal que $g(a)$ es mayor que cero y $g(b)$ es menor que cero, entonces existe c ∈ (a, b) tal que g(c) = 0.

En este caso, si eso sucede, existe al menos una raíz para esa función, o sea tal raíz resulta la solución de la ecuación en cuestión. Un intervalo que cumple con las hipótesis del TB para la función *g* es el [1,4], ya que *g(1) = -3 < 0* y *g(4) = 1 > 0.*

Para analizar la unicidad de la solución, calculamos la función derivada de g que es $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, la cual es positiva en todo su dominio. Esto implica que la función g es estrictamente creciente y por ende uno a uno, por lo que podemos concluir que la raíz es única. O sea el discurso argumentativo analítico valida y permite asegurar existencia y unicidad de la solución.

Este modo de pensar y hacer exige un primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica discriminación del dominio y rango de la *función paramétrica*, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Como afirman Ely y Adams (2012):

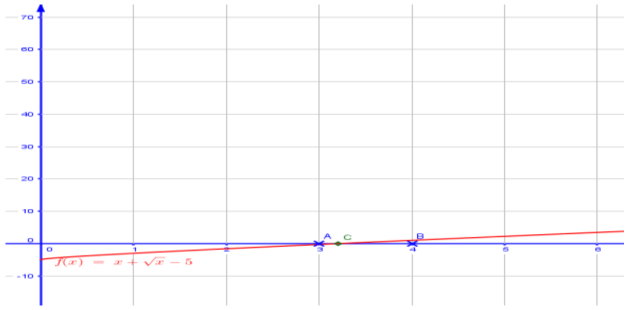
> Un significativo cambio conceptual debe ocurrir para que los estudiantes se sientan seguros usando parámetros en las expresiones algebraicas en lugar de números. Esto claramente marca un nuevo nivel de algebrización que el EOS identifica como un cuarto nivel de algebrización. (p.22)

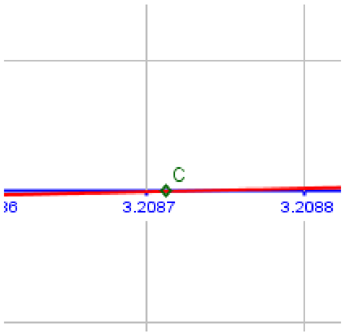
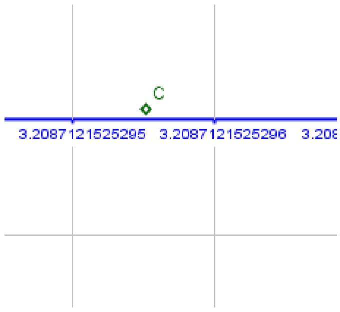
4.4. Contexto computacional – Geogebra 3.3 y 3D

Se usó el Geogebra, en especial con dos de sus ventanas: analítica y CAS. En otras palabras, éste es un contexto que "obliga" al diálogo entre dos juegos de lenguajes

Se comenzó con $x + \sqrt{x} = 5$ considerando una función $f(x) = x + \sqrt{x} - 5$

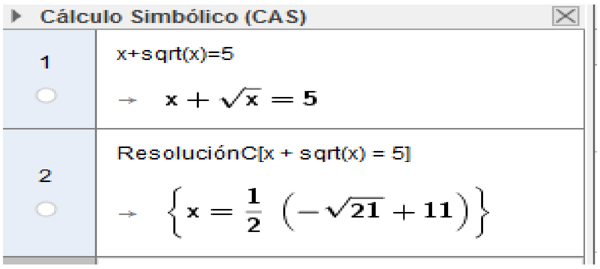
Utilizando el Registro Gráfico y la herramienta de Zoom reiteradamente alrededor de la solución que se visualiza, se observó:



Se consideró el redondeo en 15 cifras decimales, al utilizar siete veces la herramienta Zoom:	Y al continuar reiteradamente, utilizando la herramienta, nos encontramos con lo siguiente
	

Ahora bien, ¿Qué sucedió con el punto de intersección que se visualizaba en un principio? ¿La solución pertenece al campo de los números reales o complejos?

Esto obligó a abrir la ventana CAS, que se utiliza para cálculos simbólicos, ingresando la ecuación en estudio y con la herramienta Resolución C [Ecuación], se visualizó lo siguiente:



Nuevas preguntas surgen a partir de este tipo de prácticas computacionales que proponen la articulación de dos sistemas muy diferentes respecto a los niveles de algebrización desarrollados: ¿Tiene solución? ¿Por qué sucede lo que sucede en el gráfico? ¿Qué tipo de solución nos da el CAS?

Claramente se bascula entre el cuarto nivel de algebrización y el quinto ya que se exige interpretar cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, conjuntamente con otras variables. Las operaciones con parámetros, y el establecimiento de relaciones entre ellos, conllevan una complejidad semiótica de mayor nivel dado que los objetos intervinientes y emergentes de estos sistemas de prácticas ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior.

5. Relaciones, complementariedades, tensiones matemático-didácticas que emergen del análisis comparativo de los cuatro modelos obtenidos

Para este análisis comparativo se retomaron los tres interrogantes que refieren al significado institucional matemático de un tipo de tarea, logrando así nuestras primeras conclusiones.

¿Existe la solución? En este caso sólo los tipos de prácticas que sostienen un juego de lenguaje que se desarrolla en los contextos algebraico, funcional y computacional con la ventana CAS logran responder a la pregunta. El contexto aritmético sólo permite aproximar a una posible solución, lo cual **no** asegura la existencia de la misma, al igual que la ventana analítica del contexto computacional. En el primer caso hay que interactuar, por ejemplo, con el contexto funcional y en el segundo caso interactuar con la otra ventana que ofrece el Geogebra. Teniendo en cuenta los niveles de algebrización observamos que lograr la comprensión sobre el planteo y solución de este interrogante necesita del avance al quinto nivel de algebrización

¿Dónde "vive" la solución? Indudablemente el contexto algebraico a través del primer tipo de práctica obliga a dar las razones de por qué x tiene que ser positiva y entonces el conjunto solución tiene una única solución. En el segundo tipo de práctica en ese mismo contexto aparece un nuevo problema ya que ambas soluciones son positivas y no es para nada evidente que una de ellas NO es solución. Estamos frente a un nuevo conflicto: utilizar transformaciones algebraicas que "agregan" soluciones. El proceso de validación de la solución en el mismo contexto se realiza sustituyéndolas en la ecuación original, como un criterio que le permite distinguir las soluciones válidas de las que no lo son, porque las primeras producen una identidad. La interacción entre prácticas que se caracterizan por desarrollarse en el tercer y cuarto nivel de algebrización permite una actividad matemática en torno a esta pregunta de alto grado de idoneidad epistémica.

¿**Es única la solución?** El contexto funcional es el que otorga inmediatamente herramientas para asegurar que es única la solución utilizando el Teorema de Bolzano, por ejemplo. Pero…desde este contexto, ¿podría definir el conjunto numérico al que pertenece la solución? La respuesta es NO, ya que sólo se puede visualizar gráficamente su existencia y demostrarla deductivamente pero NO construirla. Para contestar la siguiente pregunta: *¿La/s solución/es a qué campo numérico pertenece/n?* es necesario volver al contexto algebraico en el sentido de significar la ecuación como un polinomio, y validar una posible respuesta con el Teorema de Gauss[2]. Por lo tanto, no posee raíces racionales; si no, irracionales.

Este inter-juego entre contextos y el tránsito necesario entre niveles de algebrización de las prácticas matemáticas movilizadas por un tipo de interrogantes esencialmente epistémicos, como lo son la *existencia, unicidad y dominio de las soluciones*, permite no sólo que el objeto de estudio ECUACIÓN bascule necesariamente entre varios contextos, algunos estáticos (como el algebraico o la ventana CAS del computacional) y otros dinámicos (aritmético, funcional, o la ventana analítica del computacional), sino también, haga necesario la puesta en funcionamiento de una actividad matemática por parte de los estudiantes que también bascule entre diferentes niveles de algebrización.

[2]Si un polinomio tiene raíces racionales, éstas son de la forma p/q donde p divide al término independiente y q al coeficiente principal. Al ser mónico, si existiesen raíces racionales, éstas serían enteras. Luego, los únicos candidatos son $x = 5$ y $x = -5$, que al descartarlos nos asegura que las raíces son irracionales (porque ya sabíamos previamente que $D > 0$, entonces tiene dos raíces reales distintas)

6. A modo de reflexión final

Discutir estas cuestiones desde una concepción de aprendizaje a partir de la producción matemática de los profesores, tanto de secundaria como universitarios a cargo de la formación inicial del profesor en matemática, nos resulta de gran importancia y nos proporciona datos muy significativos sobre el estado actual de la formación de nuestros futuros profesores en Matemática. Queda muy en evidencia que la formación inicial de un profesor de Matemática se realiza en la mayor parte de los casos en un único ambiente reconocido como “algebraico”, estando ausente en general la distinción de los diferentes y graduales niveles de algebrización en las diferentes áreas de la Matemática (aritmética, geometría, análisis…). Las afirmaciones, propiedades, definiciones aparecen en dicha formación, usualmente, en su mayor nivel, tanto de generalización como de algebrización y consecuentemente ya simbolizadas y más aún atomizadas según el espacio curricular en el que se trabaja con ecuaciones.

Se ha avanzado en el grupo de investigación con el estudio de situaciones que se pueden desarrollar en los contextos aritmético/operacional, algebraico/estructural y analítico/funcional, desde donde se ha podido observar que, interrogantes ligados a problemáticas intra-matemáticas, como la existencia, unicidad y campo de variación de las soluciones poseen una fortaleza didáctico-matemática que permitiría cargar de sentido la necesaria relación entre diferentes prácticas emergentes de contextos varios.

Referencias

Caspi S. y Sfard A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research, 51*, 45–65.

Ely R. y Adams A. (2012). Unknown, placeholder, or variable: what is x*? Mathematics Education Research Journal, 24*(1), 199–38.

Etchegaray, S. (2010). Reflexiones y aportes para repensar la enseñanza de la Matemática. *Revista de Educación Matemática de la Universidad Nacional del Litoral. Facultad de Humanidades y Ciencias. YUPANA. Nº5. 11-26.*

Godino J. D. y Font V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros. Disponible en, http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino J. D. Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 199-219.

Godino J. D., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8*, 117-142.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.