Mimetismo ostensivo de objetos matemáticos. El caso de los números irracionales

Ostensive mimicry of mathematical objects. The case of irrational numbers

Luis Reina[1] y Miguel R. Wilhelmi[2]

[1]Instituto de Enseñanza Superior "Del Atuel",[2]Universidad Pública de Navarra

Resumen

Se estudian algunos conflictos semióticos asociadas al proceso de visualización de los números irracionales con estudiantes de 14-15 años de Educación Secundaria y docentes de Matemáticas en formación inicial, mediante el enfoque ontológico y semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Se observa un fenómeno de *mimetismo ostensivo* asociado a la búsqueda de periodicidad y aperiodicidad numérica, de algunos números reales expresados en notación decimal. Este fenómeno obedece a cuestiones normativas (contrato didáctico), cognitivas y epistemológicas de nociones matemáticas previas.

Palabras clave: Número irracional, mimetismo ostensivo, percepción visual, periodicidad numérica, patrón.

Abstract

We study some semiotic conflicts linked to the process of visualising irrational numbers with 14-15 year-olds secondary education students and mathematics teachers in initial formation, through the ontological and semiotic approach of mathematical knowledge and instruction. It is observed a phenomenon of ostensive mimicry associated to the search for periodicity and numerical aperiodicity, of some real numbers expressed in decimal notation. This phenomenon is due to normative (didactic contract), cognitive and epistemological questions of previous mathematical notions.

Keywords: irrational number, ostensive mimicry, visual perception, numerical periodicity, pattern.

1. Visualización, ostensión y naturaleza de los números reales

A menudo, al introducir los números irracionales en la Enseñanza Secundaria, una de las dificultades señaladas por los profesores es la diferenciación entre números racionales e irracionales (Reina, 2016).La expresión decimal de ambos tipos de números constituye, para algunos profesores, uno de los modos privilegiados para que el alumno logre la identificación de cada clase.

Pero enfrentar a los alumnos a la "percepción visual" del desarrollo decimal de un número real trae aparejado cuestiones que implican el análisis de cuestiones que van más allá de lo estrictamente matemático o didáctico (Reina, 2016).

En este trabajo se muestran resultados de experimentaciones con estudiantes de Educación Secundaria (14-15 años) y con docentes de Matemáticas en formación inicial sobre la búsqueda de periodicidad y aperiodicidad numérica de algunos números reales expresados en notación decimal, como un medio para determinar la naturaleza racional o irracional de un número real. Se observará que la identificación de la naturaleza de un número real a partir de su representación decimal es problemática.

Reina, L. y Wilhelmi, M. R. (2017). Mimetismo ostensivo de objetos matemático. El caso de los números irracionales. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Para poder alcanzar este objetivo, en el apartado 2 se describe someramente el marco teórico y se introduce la noción de *mimetismo ostensivo*. En el apartado 3, las relaciones entre periodicidad y aperiodicidad numérica, que permitirán describir la experimentación con estudiantes de profesorado y estudiantes de Educación Secundaria, sus resultados y su discusión (apartado 4). Por último, se determinan algunas conclusiones y recomendaciones para la enseñanza (apartado 5).

2. Objetos primarios, visualización y mimetismo ostensivo

El EOS propone una ontología matemática que clasifica los objetos en: lenguaje, definiciones, proposiciones, situaciones, procedimientos y argumentos (figura 1).

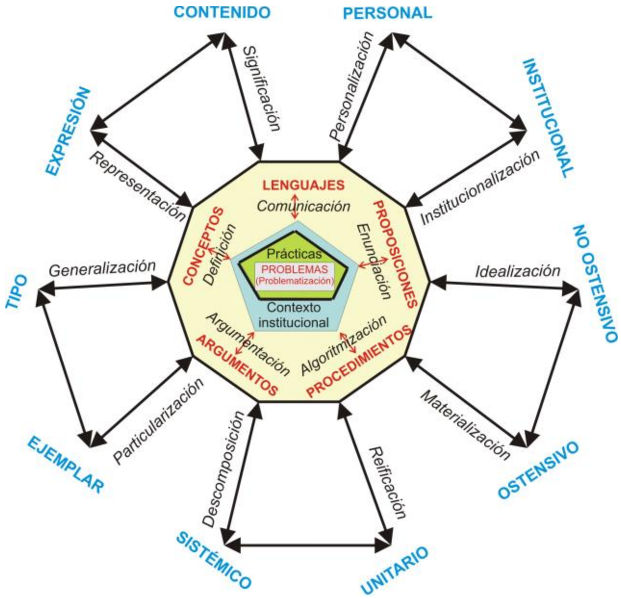

Figura 1. Objetos, procesos y dualidades

En el contexto de procesos de estudio para la introducción y desarrollo de la noción de número real es necesario tener en cuenta los siguientes:

- *Lenguaje*. Expresión decimal de números racionales e irracionales.
- *Definiciones*. Número racional, irracional; número periódico y no periódico.
- *Proposiciones*. Proposiciones relativas a la periodicidad y no periodicidad de números reales.
- *Situaciones*. Identificación y diferenciación de un número racional y de un irracional por reconocimiento de cifras en la expansión decimal de un número.
- *Procedimientos*. Reconocimiento de la periodicidad y no periodicidad de números reales. Identificación de regularidades, patrones y repetitividad finita e infinita de cifras decimales.
- *Argumentos*. Justificación de la racionalidad e irracionalidad de números; refutación de la periodicidad, en la expresión decimal, de un número irracional; justificación de la no periodicidad, en su expansión decimal, de un número irracional.

Además, estos objetos deben ser comprendidos en su contexto de uso, que está condicionado por las dualidades asociadas a los objetos (Godino *et al*., 2012): a) personal - institucional, b) ostensivo (perceptible) - no ostensivo (inmaterial o ideal), c) unitario - sistémico, d) extensivo (ejemplar, particular) – intensivo (tipo, general, clase) y expresión - contenido (figura 1). En particular, aquí es necesario analizar la relación entre la representación de un número real mediante una expresión decimal (ostensivo) y el análisis de su naturaleza (no ostensivo), dado que puede darse un fenómeno de "mimetismo".

> [Gr. mimos, mimo]:La semejanza superficial en forma, color o comportamiento de ciertos organismos (miméticos) con otros (modelos) o con objetos del ambiente, lo que da por resultado la protección, el ocultamiento o alguna otra ventaja para el mimético" (Curtis , Barnes , Schnek y Massarini , 2008,G-22).

Si bien esta última cita se enmarca en el dominio de la Biología, y no se pretende realizar un reduccionismo ingenuo, se puede pensar que los objetos matemáticos se pueden mimetizar desde la "percepción visual" de un estudiante. Esta metáfora sirve para ilustrar algunos de los hechos observados en el estudio. De hecho, el reconocimiento de la periodicidad o de la aperiodicidad numérica por decimales, no es tan sencilla de identificar, salvo para casos prototípicos, donde el período tiene pocas cifras o la aperiodicidad se manifiesta por una ley de formación previamente conocida.

Estas dificultades en torno al reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de periodicidad y aperiodicidad numérica pueden implicar conflictos epistemológicos, vinculados al significado personal atribuido por los estudiantes a los objetos matemáticos involucrados. Asimismo, se pueden observar conflictos asociados a la "visualización" en el reconocimiento de patrones y regularidades por parte del estudiante, y cuestiones sociológicas relativas a las expectativas mutuas entre docentes y estudiantes en relación con el conocimiento (*dimensión normativa*). Siendo entonces necesario un análisis de la adecuación de los significados personales e institucionales y, por lo tanto, de la importancia de la *dualidad personal- institucional* en los proceso de enseñanza y aprendizaje para la adquisición de la noción de número.

La percepción visual juega aquí un papel fundamental, los estudiantes perciben un número irracional donde deberían "ver" un número racional. El fenómeno de *mimetismo ostensivo* se manifiesta cuando un estudiante atribuye a un número real una naturaleza por su similitud con el ejemplar prototípico ostensivamente mostrado en la enseñanza. Es pues un fenómeno que pone en juego dos dualidades, asociadas a dos conflictos:

- *Ostensivo / no ostensivo*. La representación como expansión decimal de un número real es la medida de su naturaleza (racional o irracional).
- *Ejemplar / Tipo*. El ejemplo prototípico del significado institucional enseñado es la medida de las clases (racional e irracional).

3. Sobre la periodicidad y aperiodicidad de los números reales

La expansión decimal de un numero racional es periódica cuando "una vez aparecido un cierto conjunto finito de cifras, dicho conjunto se repetirá infinitas veces" (Courant y Robbins, 1962, p.75).Así, un número racional expresado en forma decimal es aquel que presenta un periodo. Esto no implica que no puedan existir "bloques" finitos de cifras aperiódicas, ni que el período tenga que darse a pocas cifras decimales de la parte entera del número.Por ejemplo, para el racional $\frac{1}{998}$, el período comienza a partir del segundo decimal y cuenta con 498 cifras decimales (figura 2).

0,0010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094188376753507014028056112224448897795591182364729458917835671342685370741482965931863727454909819639278557114228456913827655310621242484969939879759519038076152304609218436873747494989979959919839679358717434869739478957915831663326653306613226452905811623246492985971943887775551102204408817635270541082164328657314629258517034068136272545090180360721442885771543086172344689378757515030060120240480961923847695390781563126252505010
02…

Figura 2. Desarrollo decimal del número $\frac{1}{998}$, con indicación del período (en rojo)

Asimismo un numero irracional, expresado en forma decimal, es aquel que no es periódico, lo que no significa que no pueda presentar “bloques” finitos de cifras periódicas u otras regularidades o patrones en sus cifras decimales. Por ejemplo, los *números irracionales cebra* (Pickover, 2007a):

$$f(50) = \sqrt{\frac{9}{121} \cdot 100^{50} + \frac{(112 - 44 \cdot 50)}{121}}$$

Presentan pseudo-regularidades y de pseudo-patrones en sus dígitos (figura 3).Así, si bien la “aperiodicidad” de un número irracional implica la no repetición infinita de cifras, no limita la existencia de patrones y regularidades. Pero esto no es privativo de los números cebra. Otros ejemplos son los denominados *números esquizofrénicos* descubiertos por Kevin Brown (Pickover, 2007b). Más aún, esta estructura puede también observarse en números racionales (figura 4), lo que no permite asociar estas representaciones a números irracionales.

Esto último muestra que no es posible el reconocimiento de un número racional o irracional basado en la búsqueda de regularidades, patrones y repetitividad en sus cifras decimales. Con otras palabras, desde el punto de vista estrictamente matemático se precisa conocer previamente su estructura de origen. Sin embargo, los procesos de aprendizaje deben incluir el estudio de la “percepción visual” de posibles regularidades e irregularidades en el proceso de “visualización” de la noción de número irracional, dado que esta práctica es propia del contexto escolar (*idoneidad ecológica*) y permite la resolución de clases amplias de situaciones (*idoneidad epistemológica*).

2,7272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727
272727272727272727272695636363636363636363636363636363636363636363636363636
363636363636363636363636363636363636363636363634528727272727272727272727272
727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727251442327272
727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727272727
272727269640955636363636363636363636363636363636363636363636363636363636363
636363636363636363636363636363635862418468072727272727272727272727272727272
727272727272727272727272727272727272727272727272718551535889919999999999999
999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999998410251
399362559999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999999
999999999999997003323887798425599999999999999999999999999999999999999999999
999999999999999999999999999999999942064261830769561599999999999999999999999
999999999999999999999999999999999999999999999999999998857507243302775754752
…

Nota: El número se ha dividido por $1 \cdot 10^{49}$ para que la coma decimal aparezca luego del primer dos y de esta manera le sea más “familiar” al estudiante una expresión con una parte entera con un dígito.

Figura3. Primeros mil decimales del número irracional $f(50)$

0,00000000000000000000000111111111111111111111111122222222222222222222222222
333333333333333333333333344444444444444444444444445555555555555555555555566
666666666666666666666666777777777777777777777777788888888888888888888889000
000000000000000000001111111111111111111111111222222222222222222222222233333
333333333333333333444444444444444444444444455555555555555555555555556666666
666666666666666667777777777777777777777777888888888888888888888889000000000
000000000000000111111111111111111111111122222222222222222222222223333333333
333333333333444444444444444444444444455555555555555555555555556666666666666
666666666667777777777777777777777777888888888888888888888888900000000000000
000000000111111111111111111111111122222222222222222222222223333333333333333
333333344444444444444444444444445555555555555555555555555666666666666666666
666677777777777777777777777778888888888888888888888889000000000000000000000
000111111111111111111111111122222222222222222222222223333333333333333333333
344444444444444444444444…

Figura 4. Primeros mil decimales de 1/8999999999999999999999991

Por ello, en la etapa de Educación Secundaria se utilizan ejemplos de números irracionales que permiten “percibir” visualmente la aperiodicidad numérica en las cifras decimales de un irracional. Es más, en algunos casos, el docente “muestra” números irracionales que se construyen con una “ley de formación” en sus cifras decimales (Reina, 2016). También los libros de texto plantean ejercicios donde es necesario el reconocimiento de regularidades para la determinación de la periodicidad y aperiodicidad numérica. Por ello, la aparente “transparencia” en nociones como las de “patrón”, “regularidad” y “periodicidad” puede conllevar conflictos semióticos en la construcción de la noción de número irracional.

4. Experimentación, resultados y su discusión

Se plantea el estudio del reconocimiento de patrones y regularidades en la búsqueda de la periodicidad y de aperiodicidad numérica por futuros docentes de Matemáticas (FDM) (2º año de formación terciaria no universitaria) y por estudiantes de 3ºde Educación Secundaria (15-16 años). En el cuestionario propuesto se incluye la expansión decimal de los números:

- $f(50)=\sqrt{\frac{9}{121}\cdot 100^{50}+\frac{(112-44\cdot 50)}{121}}$(figura 3).
- 1/998 (figura 2).

En ambos casos, no se muestra la fracción ni la raíz cuadrada que dan origen a la expansión decimal de los números. De esta forma, dado que no es posible a priori reconocer si un número es racional o irracional solo por sus cifras decimales, se pretende poner de manifiesto que las respuestas están condicionadas por cuestiones de *contrato didáctico* (Brousseau, 2007) o, de manera más extensa, por la *dimensión normativa* (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009).

Para el primer número, $f(50)$, los resultados indican que la mayoría de los FDM creen reconocer la no periodicidad "infinita" en la cifras decimales de los números, en sus conclusiones apelan a la no posibilidad de expresión en fracción de números enteros y al hecho de que reconocen que "es periódico por partes". Dos alumnos responden correctamente que no pueden determinarlo (tabla 1).

Tabla 1. Determinación de la naturaleza de f(50) y 1/998.

	2º FDM		3º Secundaria (14-15 años)	
Naturaleza de número	Nº cebra *f*(50)	1/998	Nº cebra *f*(50)	1/998
Irracional	16	14	31	25
Racional	2	5	0	6
No se puede determinar	2	1	0	0

La inadecuación en la respuesta de los FDM a la naturaleza del número cebra *f*(50) se constata en la que estos mismos estudiantes dan al observar la expansión decimal del número racional $\frac{1}{998}$, cuyo ante-período consta de una sola cifra y cuyo período consta de 498 cifras decimales. Aquí la mayoría de los estudiantes (14) razona de manera similar que se trata de un número de tipo irracional. Únicamente un FDM responde correctamente que no se puede determinar la naturaleza.

Todos los estudiantes de 3º de Educación Secundaria (15-16 años) participantes en el estudio (31) determinan que el número cebra *f*(50)es irracional; ninguno indica la imposibilidad de determinación de la naturaleza del número a partir de un número finito de cifras decimales. La mayoría (25 de 31) de estos estudiantes no encuentra en el número 1/998 ninguna regularidad o patrón y determina erróneamente, en consecuencia con esta observación, que el número es irracional. Además, ningún estudiante plantea la imposibilidad de determinación de la naturaleza a partir de un número finito de cifras.

Arcavi (2003) clasifica las dificultades en la visualización en tres categorías: culturales, cognitivas y sociológicas. Si se analizan las dificultades en el estudio de las expansiones decimales de números reales pueden implicar que, en algunos casos, estas provengan de:

- *Cuestiones ecológicas*, relativas al desarrollo de los contenidos en un nivel educativo de los objetos matemáticos asociados.
- *Cuestiones cognitivas*, como la "percepción visual" y el "proceso de visualización" al momento del reconocimiento de patrones y regularidades por parte del estudiante.

- *Cuestiones sociológicas*, relativas a las expectativas mutuas entre profesores y alumnos en relación con el conocimiento (contrato didáctico o dimensión normativa) (figura 5).

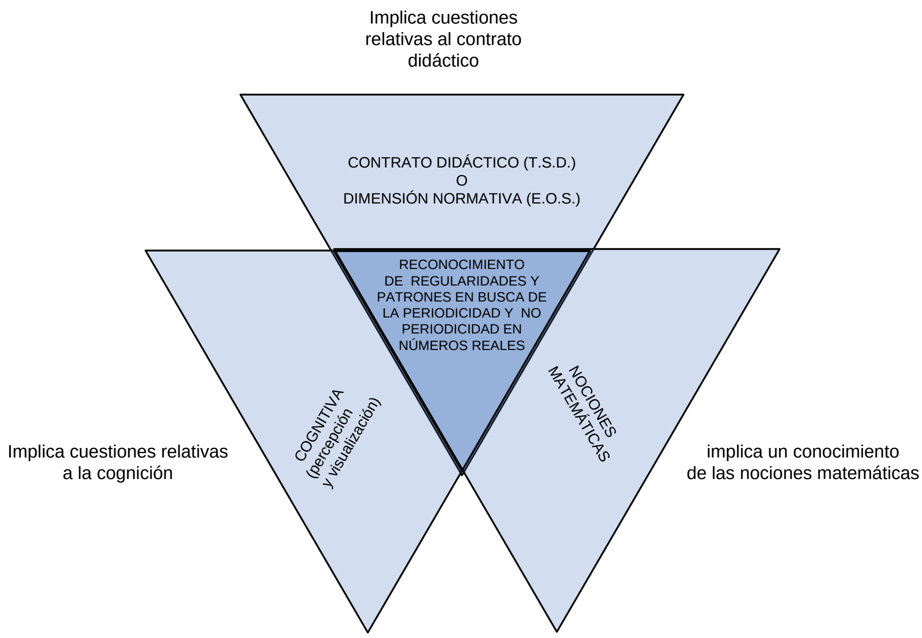

Figura 5. Cuestiones relativas al reconocimiento de patrones y regularidades numéricas en la búsqueda de una periodicidad.

5. Conclusiones y comentarios finales

La noción matemática de período de un número ocupa un lugar importante en las producciones matemáticas. Así, el estudio de las nociones matemáticas de "período" y de "cuasiperíodo" en números reales sigue hoy vigente (Reina, 2016). La experimentación realizada permite afirmar que:

- Identificar la periodicidad y aperiodicidad numérica, en el desarrollo decimal de un número, implica desarrollar habilidades de reconocimiento de patrones y regularidades, así como la búsqueda de repetitividad de elementos en el período.
- El reconocimiento de la naturaleza racional o irracional de un número basado en una expresión decimal finita no es posible, si se desconoce su estructura de origen. Sin embargo, tanto estudiantes de Secundaria (14-15 años) como docentes de Matemáticas en formación inicial (2º curso nivel terciario no universitario) otorgan esta característica a expresiones por razones *ecológicas* (desarrollo de los contenidos en un contexto) o *didácticas* (medios de introducción en la enseñanza).

Aquí, la percepción visual y la visualización del objeto matemático juegan un papel crucial. Los estudios realizados sobre la "percepción visual" (Leeuwenberg, 2003) y los "patrones visuales" (Van Der Helm y Leeuwenberg, 1991) dan cuenta de lo complejo que se manifiesta el proceso de percepción visual.

Lograr la "visualización" del objeto matemático número irracional no es una tarea sencilla dada la complejidad ontosemiótica de los objetos y procesos involucrados

(Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012; Reina, Wilhelmi, Carranza y Lasa, 2014; Reina, Wilhelmi, Lasa y Carranza, 2013). Por ello, en el estudio de los números reales, es preciso progresar en el análisis de las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes.

Se trata un proceso cognitivo necesariamente "lento", que debe implicar un aumento en los tiempos empleados en el estudio de dichos números y la incorporación de situaciones que articulen "lo periódico" (Buendía Abalos, 2010) y lo "aperiódico", ya que, al fin y al cabo, la periodicidad y la aperiodicidad numérica, la racionalidad y la irracionalidad son dos caras de una misma moneda.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*, 215–241.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Buendía Abalos, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Relime*, *13*(4-1), 11–28.

Courant, R. y Robbins, H. (1962). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*. Madrid: Aguilar.

Curtis, H., Barnes, S., Schnek, A., y Massarini, A. (2008). *Biología* (Séptima ed.). Buenos Aires: Editorial Médica Panamericana.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30*(2),163-184.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. R. y de Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Leeuwenberg, E. (2003).Miracles of perception. *Acta Psychologica*, *114*(3),379–396.

Pickover, C. A. (2007a). *Las Matemáticas de Oz*. España: RBA Coleccionables.

Pickover, C. A. (2007b). *El prodigio de los números*. España: RBA Coleccionables.

Reina, L. (2016). *Simbiosis didáctica curricular entre el número irracional y la fracción continua en Educación Secundaria: restricciones, interacciones e idoneidad*. Tesis doctoral inédita. Mendoza, ARG: Universidad Nacional de Cuyo.

Reina, L., Wilhelmi, M. R., Carranza, P. y Lasa, A. (2014). Construcción de la noción de número irracional en formación de profesores: conflictos semióticos y desafíos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 629–637). México, D.F: CLAME. Disponible en, http:http://www.crfdies.edu.mx/sitiov2/ponencias/Art%C3%ADculo-91114.pdf

Reina, L., Wilhelmi, M. R. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–97.

Reina, L., Wilhelmi, M., Lasa, A., y Carranza, P. (2013). Entre lo ostensible y lo no ostensible. Simbiosis didáctica curricular entre objetos matemáticos. El caso de los números irracionales, su representación y clasificación en enseñanza secundaria. En *XI Congreso Virtual Internacional de Enseñanza de las Matemáticas: CVEM 2013.*Disponible en, https://www.researchgate.net/publication/305992523_Entre_lo_ostensible_y_lo_no_ostens ible_Simbiosis_didactica_curricular_entre_objetos_matematicos_El_caso_de_los_numeros_irracionales_su_representacion_y_clasificacion_en_Ensenanza_Secundaria

Van der Helm, P. y Leeuwenberg, E. (1991). Accessibility: A criterion for regularity in visual pattern codes and hierarchy. *Journal of the Mathematical Psychology, 35*, 151–213.