Trabajo Fin de Máster: Teorema de Pitágoras

Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Alumna: Juliana Troyano Dueñas

Tutor: Pablo Flores Martínez

Especialidad: Matemáticas

Índice

Introducción

En este Trabajo de Fin de Máster se desarrolla una propuesta fundamentada de unidad didáctica del Teorema de Pitágoras dirigida a alumnos de 2º de E.S.O. Para su elaboración, se ha seguido el prototipo de análisis didáctico trabajado en el Máster, siendo fundamental la asignatura "Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas".

El documento está constituido por tres partes. En la primera se presentan la fundamentación teórica del trabajo, el análisis previo al desarrollo de la unidad didáctica, tanto el análisis de contenido como el cognitivo y el de instrucción. En la segunda se enuncia la unidad didáctica. La tercera parte consiste en una pequeña investigación en el aula a partir de una de las tareas propuestas en la unidad.

La tarea en cuestión se ha llevado a cabo durante el período de prácticas del Máster, en el I.E.S. Padre Suárez, con alumnos de 2º curso de E.S.O. En este escrito se presentan los resultados obtenidos una vez realizado el análisis de la tarea propuesta a los alumnos.

Algunas de las tareas que se proponen incorporan el uso de materiales manipulativos, con el objetivo de que los alumnos aprendan realmente y de forma más atractiva los contenidos trabajados. Además, algunas tareas serán llevadas a cabo por grupos para evitar la monotonía de las clases y favorecer y fomentar el trabajo colectivo entre los alumnos.

En cuanto al contenido, en este trabajo se ha intentado enfocar el tan conocido Teorema de Pitágoras desde diversos puntos de vista, como relación métrica entre longitudes, las aplicaciones, la versión geométrica a partir de las áreas, y su consideración como un enunciado de bicondicionalidad entre la cualidad de ser triángulo rectángulo y satisfacer la condición métrica entre longitudes o entre áreas. Esta consideración del teorema hace que el profesor aprecie su significado matemático, y ponga en juego una enseñanza en la que se pretende que el alumno, más allá de aplicar una fórmula bajo ciertas condiciones, comprenda el sentido y la veracidad de los resultados que utiliza.

Fundamentación teórica

El currículo se define como “la regulación de elementos que determinan los procesos de enseñanza y aprendizaje para cada una de las enseñanzas” (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre) y para su elaboración se establecen tres niveles de concreción curricular: nivel correspondiente a la sociedad, en el que el que las Administraciones fijan las enseñanzas mínimas objeto de estudio, nivel referente al centro educativo, donde es el profesorado quien concreta los contenidos por etapas, y finalmente, el nivel relativo al aula, donde es cada profesor quien establece el proceso de enseñanza-aprendizaje para cada grupo.

El teorema de Pitágoras es uno de los contenidos matemáticos más conocidos, y está presente en numerosas situaciones laborales, educativas, científicas e incluso sociales. Según la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa, (modificación de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo) por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Obligatoria Secundaria, el Teorema de Pitágoras debe trabajarse en el primer ciclo de Educación Secundaria, de forma más extensa, pero estará presente en el resto de cursos de Secundaria y Bachillerato.

Tal como se señala en el decreto que desarrolla el currículo, “La geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. El aprendizaje de la geometría debe ofrecer continuas oportunidades para construir, dibujar, modelizar, medir o clasificar de acuerdo con criterios libremente elegidos”.

En lo que refiere a la utilización de recursos manipulativos, es siempre aconsejable ya que permiten desarrollar el pensamiento de los alumnos, pero tiene especial interés en geometría donde la manipulación de los objetos físicos puede permitir a los alumnos reflexionar y llegar a la abstracción del contenido (Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre).

Consecuentemente, algunas de las tareas propuestas en el desarrollo de la unidad que hemos elaborado, incorporan el uso de materiales manipulativos, facilitando así el aprendizaje de los contenidos tratados.

A continuación, se presentan los contenidos que encontramos en la Ley, dentro del bloque de Geometría, en relación al Teorema de Pitágoras:

- Triángulos rectángulos.
- El teorema de Pitágoras.
- Justificación geométrica.
- Aplicaciones.

En este trabajo se han intentado abordar todos los contenidos mencionados en la Ley, prestando una especial atención al significado geométrico del teorema.

En cuanto a los criterios de evaluación especificados en la Ley, localizamos el siguiente:

∗ Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

Con este criterio se pretende evaluar la capacidad de los alumnos para:

1. Comprender los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y utilizarlos para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.
2. Aplicar el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

Para llevar a cabo la Unidad Didáctica en la que se tratarán estos contenidos, será necesaria la realización de un análisis didáctico. Este análisis previo se compone de cuatro análisis: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación (Rico y Gómez, 2013). Todos estos análisis se encuentran dentro de un ciclo, como se muestra en la siguiente figura (Gómez, 2002).

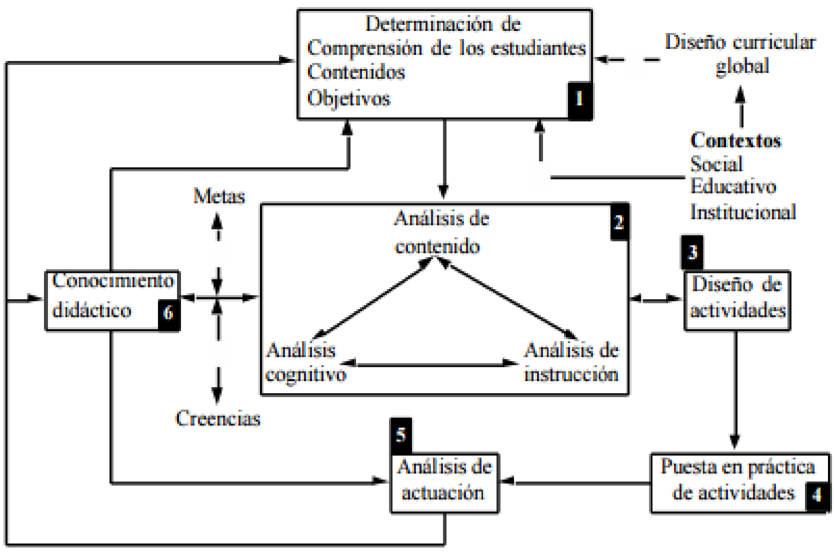


Figura nº1. Ciclo de análisis didáctico

Análisis didáctico

El análisis didáctico es un proceso cíclico que describe cómo el profesor debería diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Gómez y Rico, 2002). Se pueden distinguir cuatro fases: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación. Como primera componente para identificar y dar significado al contenido matemático, realizamos un resumen del desarrollo histórico del Teorema de Pitágoras. Posteriormente describimos la estructura conceptual del mismo, quien, junto con los sistemas de representación que se utilizan para expresarlo y el análisis de la fenomenología, nos suministran las tres dimensiones del triángulo semántico.

Análisis de contenido

El análisis de contenido es el procedimiento en el que el profesor identifica, organiza y selecciona los significados de un tema que considera relevantes (Lupiáñez y Rico, 2008).

1. Desarrollo histórico.

Bell (1985) afirma que ningún tema pierde tanto cuando de divorcia de su historia como los temas de Matemáticas.

El teorema de Pitágoras es el resultado matemático más conocido en prácticamente todas las civilizaciones, habiendo recibido numerosos nombres y pruebas.

El teorema de Pitágoras en las civilizaciones prehelénicas

Tradicionalmente se atribuye el teorema de Pitágoras a la escuela pitagórica. Sin embargo, el análisis arqueológico de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, reveló que los babilonios conocían el teorema, o al menos algunos aspectos del mismo. Otras zonas de las que se tiene constancia del conocimiento del teorema son Egipto, India y China. Lo que no se han encontrado son pruebas del teorema por parte de estas civilizaciones prehelénicas, parece ser que la primera demostración del teorema fue aportada por Pitágoras.

El teorema de Pitágoras en el mundo griego

* Las demostraciones de Pitágoras

Son muchas las conjeturas que ha habido a lo largo de la historia acerca de las pruebas aportadas por Pitágoras. Muchos historiadores afirman que la demostración de Pitágoras se basaría en su propia *Teoría de las Proporciones*, imperfecta por aplicarse sólo a cantidades conmensurables (Urbaneja, 2008).

Buscando una forma de obtener ternas de números a, b, c que verificaran la relación $c^2 = a^2 + b^2$, los pitagóricos encontraron que en las Ternas pitagóricas la hipotenusa y el cateto mayor se diferencian en una unidad.

* El Teorema de Pitágoras en la Academia de Platón

En el diálogo de Platón *El Menón* sobre el problema de la duplicación del cuadrado (el cual precedería al famoso problema de la duplicación del cubo) aparece el Teorema de Pitágoras en el caso de un triángulo rectángulo isósceles.

Platón encontró una ley que le permitía obtener ternas pitagóricas, basada en que la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian en dos unidades.

* El Teorema de Pitágoras en Los Elementos de Euclides

El primer libro de *Los elementos de Euclides* termina con un enunciado que corresponde al Teorema de Pitágoras y su recíproco, proporcionando una demostración basada en elementos muy simples de geometría elemental. Por ejemplo, la construcción de cuadrados sobre segmentos o ángulos adyacentes que suman dos rectos.

Euclides llega aún más lejos demostrando en el Libro I de Los Elementos el recíproco del Teorema de Pitágoras.

Se puede encontrar una ampliación más detallada del desarrollo histórico en el Anexo I.

2. Teorema de Pitágoras. Enunciado.

El teorema de Pitágoras establece una doble implicación entre dos condiciones métricas, que un triángulo sea rectángulo, y que se verifique que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa sea igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Como se ha señalado anteriormente, este enunciado se encuentra con distinta formulación, cuando se alude al área de cuadrados colocados sobre los lados del triángulo.

3. Estructura conceptual.

El análisis del contenido nos permite visualizar las matemáticas con sus estructuras teniendo como objetivo el aprendizaje y la enseñanza de los alumnos (Rico, 2008). Estudiar la estructura conceptual de un tema matemático consiste en analizar cómo se organiza en los textos matemáticos, qué elementos lo constituyen, cómo se organizan dichos elementos y sobre qué focos de contenido.

En el currículo de las matemáticas de secundaria (RD 1105/2014) se especifican los siguientes contenidos relacionados con el teorema de Pitágoras: triángulos rectángulos, teorema de Pitágoras, justificación geométrica y aplicaciones. Al examinar los contenidos conviene establecer categorías cognitivas para distinguirlos. De los contenidos anteriores, destacamos como focos los contenidos conceptuales siguientes:

* Triángulos rectángulos.
* Teorema de Pitágoras.
* Justificación geométrica del teorema de Pitágoras.

Y como contenido procedimental:

* Aplicaciones del teorema de Pitágoras.

Dentro de estos dos bloques vamos a clasificar las nociones que articulan el campo en tres niveles de complejidad. En la caracterización cognitiva del ámbito conceptual se distinguen hechos (términos, notaciones, convenios o resultados), conceptos y estructuras, en orden creciente de complejidad.

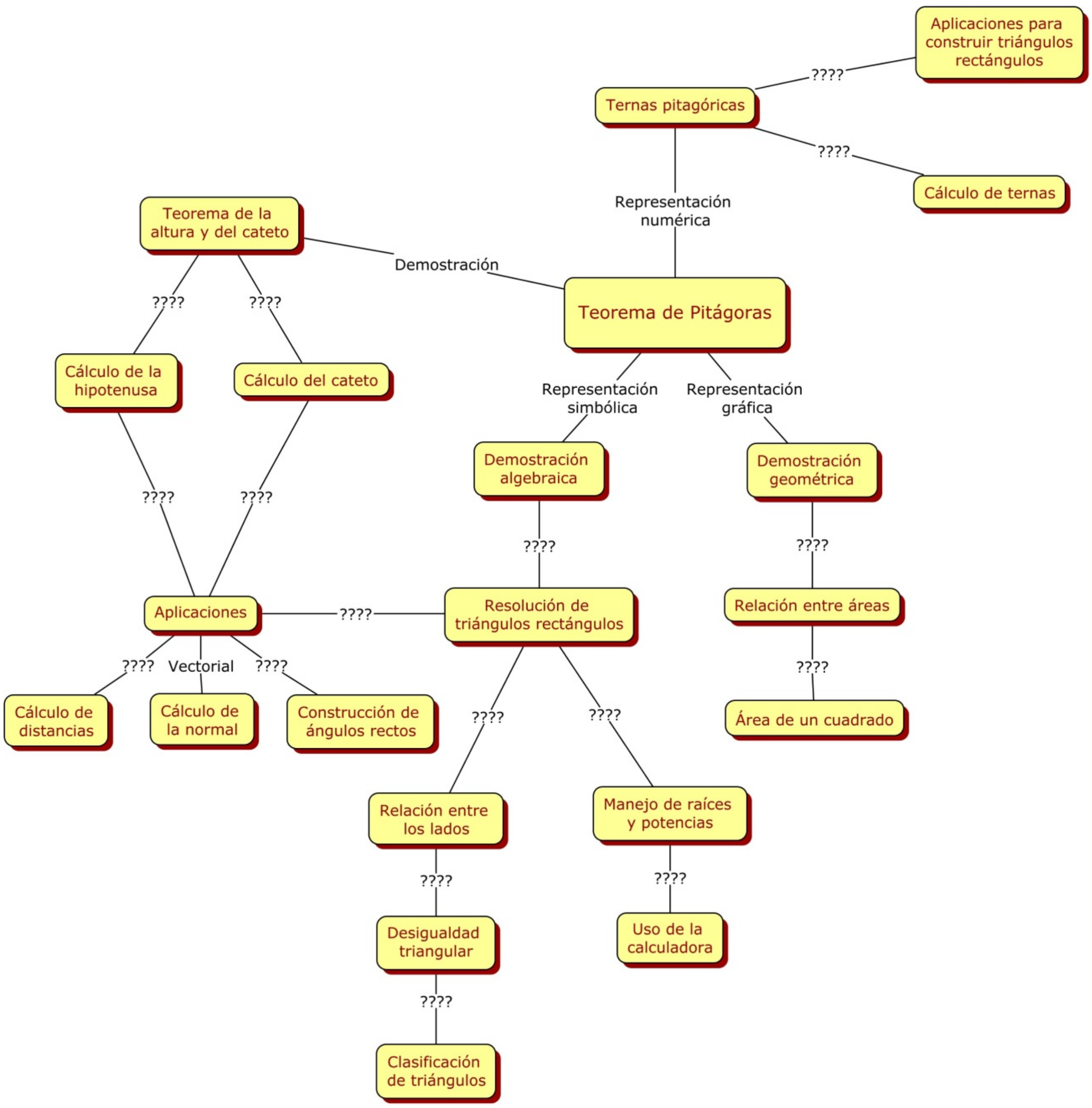
Hechos	Conceptos	Estructuras
• Triángulo • Triángulo rectángulo • Catetos de un triángulo • Hipotenusa de un triángulo • Ángulo recto • Cuadrado • Longitud • Distancia • Área • Igualdad • Desigualdad • Terna pitagórica • Cuadrado de un número • Raíz cuadrada	• Clasificación de los triángulos según sus ángulos • Distancia euclídea • Desigualdad triangular • Cuadrado construido sobre el lado de un triángulo • Teorema del cateto • Teorema de la altura • Trigonometría • Proyección	• (N, +, x, ≤) Semianillo arquimediano

Y en el campo procedimental se consideran destrezas, razonamientos y estrategias.

Destrezas	Razonamientos	Estrategias
• Algoritmos de la suma y de la resta • Algoritmos de la multiplicación y de la división • Diversidad de representaciones del teorema	• Formulación del teorema de Pitágoras • Argumentos para justificar el teorema	• Estimación de los resultados • Reconocimiento de triángulos rectángulos • Construcción de triángulos que verifican • Resolución de problemas métricos

Para profundizar en el análisis del contenido conviene establecer relaciones y prioridades entre las distintas nociones del tema (Rico, 2008). Para integrar los contenidos del tema que nos ocupa y sus relaciones, se muestra el siguiente mapa conceptual, en el que hemos distinguido tres focos conceptuales:

* Teorema de Pitágoras.
* Resolución de triángulos rectángulos.
* Demostración geométrica del teorema.



4. Sistemas de representación.

Al hablar de las representaciones de un objeto, concepto o idea, nos referimos a cualquier forma de hacerlo presente. En el caso de los conceptos y procedimientos matemáticos las presentaciones pueden ser de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Rico, 2009).

El hecho de trabajar las estructuras matemáticas con distintas representaciones tiene un gran interés didáctico, ya que permite asignar significados y comprender mejor los contenidos (Rico, 2009).

A continuación, se describen los distintos sistemas de representación empleados para algunos de los contenidos de la unidad.

Enunciado del teorema de Pitágoras

Representación Verbal

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (entre otras).

Representación Simbólica

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Representación Gráfica

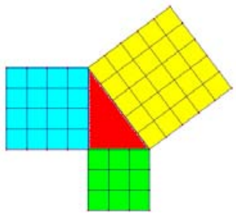


Figura nº2. Representación gráfica del Teorema de Pitágoras

Representación Numérica

Las ternas pitágoricas (tuplas de tres enteros positivos a, b, c que verifican $c^2 = a^2 + b^2$) son una representación numérica del teorema de Pitágoras. Las primeras ternas pitagóricas son:

(3, 4, 5)	(5, 12, 13)	(7, 24, 25)
(8, 15, 17)	(9, 40, 41)	(11, 60, 61)
(12, 35, 37)	(13, 84, 85)	(16, 63, 65)

Material manipulativo

Por ejemplo, papel cuadriculado, un puzle de cartulina para explicar el significado geométrico del teorema de Pitágoras y el Geoplano, entre otros.

Triángulo rectángulo

Representación Verbal

Un triángulo rectángulo es cualquier triángulo con un ángulo recto, esto es, un ángulo de 90º.

Representación Gráfica

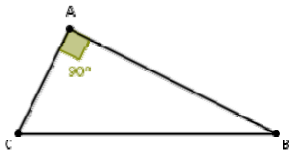


Figura nº 3

Material manipulativo

Para el estudio y clasificación de los triángulos según sus ángulos, resulta de gran utilidad el uso del Geoplano y Geogebra.

Además, existen representaciones físicas del teorema, como aparecen en las figuras siguientes.

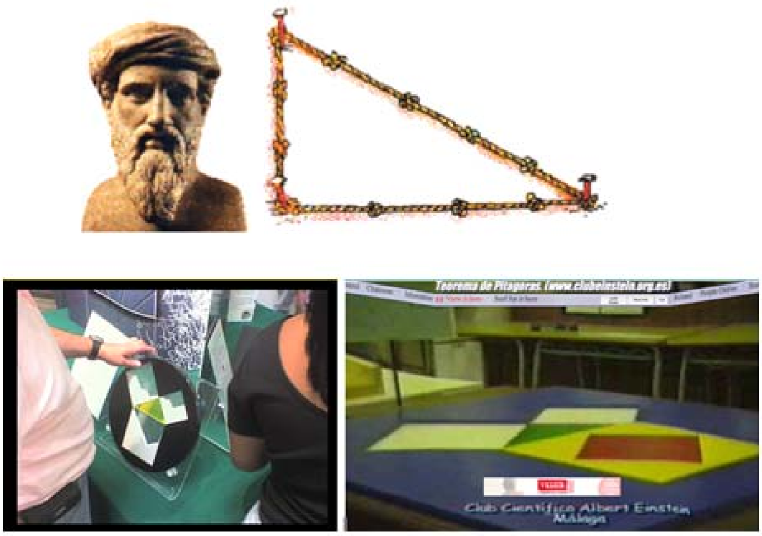


Figura nº 4: Representaciones físicas del Teorema de Pitágoras

Esta gran variedad de representaciones nos permite escoger la más conveniente según el objetivo perseguido. Por ejemplo, para trabajar la comprensión del enunciado del teorema de Pitágoras, así como su demostración, son muy eficientes la representación gráfica y los materiales manipulativos. No obstante, lo más habitual es trabajar la conversión entre distintas representaciones en un mismo problema.

5. Fenomenología

El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos (Puig, 1997).

Concepto	Contexto	Fenómeno	Situación
Triángulo rectángulo	Clasificación de triángulos según sus lados	* Teselación	Educativa Laboral
Teorema de Pitágoras	Cálculo de distancias	* Cálculo de la altura de un edificio * Cálculo de la sombra proyectada * Cálculo de la longitud del lado de la cerca de un terreno * Construcción de una rampa en lugar de escalones en un edificio	Laboral Educativa
	Construcción de ángulos rectos	* Construcción de paredes perpendiculares entre ellas y al suelo y techo en una habitación * Construcción de muebles (por ejemplo mesas y estanterías), ventanas, puertas, etc * Construcción de triángulos rectángulos con geoplano o mecano	Laboral Educativo
	Definir las	* Cálculo del	Educativo

	funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo	ángulo de observación * Resolución de ecuaciones trigonométricas * Operaciones con igualdades trigonométricas	Científico

Los análisis anteriores podemos sistematizarlos señalando diversos significados del Teorema de Pitágoras:

- Relación métrica entre las longitudes de los lados del triángulo rectángulo (el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos del dicho triángulo).
- Relación métrica entre las superficies de los cuadrados colocados sobre los lados del triángulo rectángulo (el área del cuadrado que tiene de lado la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de lados los catetos)
- Condición necesaria y suficiente para que un triángulo sea rectángulo (Un triángulo es rectángulo sí, y sólo sí, se verifica alguna de las condiciones anteriores)

Como puede apreciarse, estos significados están muy relacionados. Los dos primeros parten de la premisa de que el triángulo dado es rectángulo. Se diferencian en la magnitud que se utiliza en ambos. El segundo es generalizable, de manera que la figura que se construye sobre los lados puede variar, siempre que las tres figuras que se construyen sean semejantes, con razón de semejanza la relación entre las longitudes de los lados del triángulo. El primer enunciado se utiliza para obtener distancias en multitud de situaciones en las que puede construirse un triángulo rectángulo del que conocemos la longitud de algunos lados. Es el más trabajado en la enseñanza elemental. El segundo se utiliza preferentemente para demostrar el teorema, a partir de construcciones de áreas.

Aunque aparezcan como enunciados de la forma “Sí es rectángulo, entonces se verifica la relación métrica”, estos enunciados se emplearon desde el principio con el convencimiento de tratarse de relaciones de equivalencia entre hipótesis y tesis, usándose para construir triángulos rectángulos, ángulos rectos, o para decidir si un triángulo es rectángulo. Con ello se entra en el tercer aspecto de su significado, apreciando que este teorema puede decidir si un triángulo es rectángulo, y además puede generalizarse a otros triángulos, mediante desigualdades entre la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de los lados y el tercero. En el triángulo acutángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de dos de sus lados es siempre mayor que la del otro. En un triángulo obtusángulo, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados que forman el ángulo obtuso es menor que el cuadrado del tercer lado.

Análisis cognitivo

El análisis cognitivo ayuda a organizar las capacidades que se espera que los alumnos desarrollen sobre el tema trabajado, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido. Además, los profesores llevan a cabo un análisis del aporte de esas capacidades al desarrollo de competencias matemáticas, así como un estudio de los errores y dificultades de los escolares (Lupiáñez y Rico, 2008).

De acuerdo con lo anterior, en esta parte del análisis didáctico vamos a desarrollar los objetivos que pensamos que los alumnos deben alcanzar, según lo dispuesto en el currículo matemático acerca del Teorema de Pitágoras.

1. Focos

Fijándonos en el mapa conceptual, podemos distinguir dos focos principales:

* Demostración geométrica del Teorema de Pitágoras.
* Resolución de triángulos rectángulos.

2. Objetivos y competencias

Una vez localizados los focos del tema, se presentan los objetivos asociados a cada uno de ellos, así como las competencias PISA a las que contribuye cada objetivo. La adquisición de las competencias es un objetivo a largo plazo que se debe desarrollar durante toda la etapa escolar. En el Anexo II se adjuntan las Competencias Matemáticas PISA 2012.

Resolución de triángulos rectángulos		**RA**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HM**
1	Reconocer y construir triángulos rectángulos.	X			X	X		X
2	Clasificar triángulos según la longitud de sus lados.	X						
3	Aplicar correctamente el Teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en problemas reales.	X		X		X	X	
4	Interpretar la solución obtenida en términos del problema.		X	X				

Demostración gráfica del Teorema		**RA**	**C**	**M**	**RP**	**R**	**LS**	**HM**
5	Construir cuadrados sobre los lados de un triángulo.				X	X		X
6	Determinar la relación entre el área de los cuadrados.					X		
7	Asociar la relación entre el área de los cuadrados a la relación entre los lados del triángulo.	X						

8	Deducir y enunciar el Teorema de Pitágoras a partir de la relación anterior.	X	X				X	

En el Anexo III Se justifica la elección de las competencias a las que contribuye cada objetivo.

3. Dificultades y errores

Uno de los trabajos de los profesores es guiar a los estudiantes, partiendo de sus errores, hacia un conocimiento oficial matemático (Kilpatrick, Gómez y Rico, 1998).

Los errores son el reflejo de una serie de dificultades provocadas por la forma en la que transmitimos los contenidos a los alumnos, los conocimientos adquiridos anteriormente, la complejidad de los conceptos, etc. Los alumnos pueden aprender, a partir de sus errores, conceptos que anteriormente no comprendían. Por ello, debemos prever los errores y considerarlos en el proceso de aprendizaje. Con las tareas podemos identificar la presencia de errores y, en su caso, superarlos.

En el tema que nos ocupa destacamos las siguientes dificultades, obtenidas en conversación con la profesora tutora del prácticum y del documento de Cañadas (2001):

1. Falta de comprensión lectora, lo que obstaculiza la correcta comprensión del enunciado del problema.
2. Representar con letras la longitud de un segmento o el área de una figura (Cañadas, 2001).
3. Apreciación de la doble implicación entre condiciones y relaciones numéricas.
4. Identificación de triángulos rectángulos cuando sus catetos no son paralelos a los bordes del papel o cuando no está dibujada la hipotenusa, como sucede al calcular la diagonal de un cuadrado o un rectángulo.
5. Visualización de la situación geométrica descrita.
6. Comprensión del lenguaje matemático.
7. Relación entre los enunciados analíticos y geométricos del Teorema de Pitágoras (Cañadas, 2001).
8. Aprendizaje a corto plazo y sin partir de los conocimientos anteriores.

Y los siguientes errores:

1. Confundir los conceptos de triángulo obtusángulo, rectángulo y acutángulo.
2. Aplicar el Teorema de Pitágoras en cualquier triángulo, sin comprobar previamente la hipótesis.
3. Errores de cálculo, al despejar la longitud desconocida en la fórmula del Teorema de Pitágoras.

4. Interpretar incorrectamente el problema planteado, representando un triángulo rectángulo que no se corresponde con el descrito o asignando indebidamente los datos.
5. Sumar las longitudes de los catetos al calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. De forma análoga, restar el valor del cateto a la hipotenusa al calcular el valor del otro cateto.
6. Aplicar de forma incorrecta el Teorema de Pitágoras, al considerar que el cuadrado de uno de los catetos es igual a la suma del cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.
7. Tomar como válido un resultado negativo para una longitud.
8. Construir los cuadrados sobre los lados de un triángulo sin que sus lados sean perpendiculares o tengan la misma longitud. Esta construcción no es trivial, pero contamos con materiales que pueden contribuir a superar la dificultad que hay detrás.
9. No reconocer las figuras geométricas incluidas en una figura dada.

A continuación, se muestran los errores mencionados junto con los objetivos a los que están asociados.

Error	Objetivo asociado
Confundir los conceptos de triángulo obtusángulo, rectángulo y acutángulo.	1, 2
Aplicar el Teorema de Pitágoras sin comprobar la hipótesis.	1, 2, 3
Errores de cálculo.	1, 2, 3, 6
Interpretar incorrectamente el problema planteado.	3
Sumar las longitudes de los catetos al calcular la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo.	1, 2, 3
Considerar que el cuadrado de uno de los catetos es igual a la suma del cuadrado de la hipotenusa y el cuadrado del otro cateto.	1, 2, 3
Tomar como válido un resultado negativo para una longitud.	4
Construir los cuadrados sobre los lados de un triángulo sin que sus lados sean perpendiculares o tengan la misma longitud.	5
No reconocer las figuras geométricas incluidas en una figura dada.	1, 5, 6

Análisis de instrucción

Cuando se habla de instrucción matemática se hace referencia a los procesos de enseñanza y aprendizaje organizados, en los que intervienen una serie de sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), los estudiantes que son quienes realizan estas prácticas, el profesor y unos recursos para llevar a cabo las prácticas mencionadas (Godino, 2006).

El análisis de instrucción se refiere, por tanto, a la parte del análisis didáctico en la que se identifican los procesos de modelización y de resolución de problemas, así como los materiales y recursos disponibles (Gómez, 2002).

Por tanto, en este análisis se diseñan y analizan las tareas, partiendo del análisis de contenido y cognitivo. Se entiende el término tarea matemática escolar como una secuenciación lógica propuesta por el profesor, de contenido matemático y con un propósito de aprendizaje de los alumnos (Gómez, 2015). Dichas tareas deben contribuir al logro de los objetivos planteados, así como a la detección y superación de errores. Las tareas tienen distinto grado de complejidad, en base a ello distinguimos entre tareas de:

* Reproducción.
* Conexión.
* Reflexión.

Una vez llevado a cabo el análisis de instrucción, llegamos a la fase de actuación, en la que se desarrollan detalladamente las sesiones.

En el Anexo IV se presenta el análisis de las tareas propuestas para la unidad del Teorema de Pitágoras.

Desarrollo de la unidad didáctica: Teorema de Pitágoras

La Unidad Didáctica es la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de un determinado contenido, mediante tareas matemáticas escolares bien diseñadas, para dar consistencia y significatividad al proceso formativo. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe tener en cuenta los distintos aspectos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para seleccionar los objetivos básicos que pretende alcanzar, la metodología con la que trabajará, etc. (Escamilla, 1993).

Esta unidad didáctica se llevará a cabo en 7 sesiones. La primera de ellas será de introducción y nos permitirá detectar los conocimientos previos sobre el tema. En las sesiones de desarrollo se han intercalado tareas que persiguen la comprensión del Teorema con tareas de aplicación del mismo. Todas ellas siempre buscando la implicación de los alumnos. Finalmente, en la última sesión evaluaremos los contenidos trabajados durante las sesiones anteriores.

Respecto al agrupamiento a la hora de llevar a cabo las tareas, algunas se realizarán individualmente y otras en pequeños grupos, pero al final se hará una puesta en común para favorecer el intercambio de opiniones y que los alumnos aprendan a argumentar sus resoluciones, así como a escuchar y comprender las de los compañeros. Se pretende así fomentar la comunicación matemática.

En lo que respecta a los **materiales**, se han intentado introducir en la unidad materiales manipulativos para motivar a los alumnos y ayudar a su aprendizaje. Entre ellos destacamos el Tangram, Geoplano y cuadrículas. Además, en una sesión se trabaja con Geogebra, programa que permite visualizar las dos partes del teorema de Pitágoras (relación métrica entre las longitudes y la amplitud del ángulo recto). Por otra parte, las tareas de aplicación del Teorema no proporcionan los datos específicos, sino que serán los alumnos los responsables de identificar cuál es el triángulo rectángulo de la situación problemática y tomar los datos.

A continuación, se presentan las tareas propuestas para cada sesión, junto a la temporización. La distribución del tiempo es aproximada, totalmente flexible, habiendo previsto ajustarlo dependiendo de las necesidades de los alumnos.

El esquema de las sesiones es el siguiente:

Sesión 1:

- Identificar distintos conceptos geométricos relacionados con el teorema de Pitágoras.

- Construir y formalizar el teorema de Pitágoras.

Sesión 2:

- Aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo.
- Aplicar el teorema de Pitágoras para resolver un problema real.

Sesión 3:

- Identificar situaciones de la vida real en las que se puede, y resultaría útil, aplicar el teorema de Pitágoras.
- Aplicar el teorema a una situación práctica.

Sesión 4:

- Descomponer figuras en triángulos rectángulos.
- Comprender geométricamente el teorema de Pitágoras con material manipulativo como es el Tangram.

Sesión 5:

- Comprender la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos y la amplitud de los ángulos de dichos triángulos.

Sesión 6:

- Comprobar la relación existente entre las áreas de los cuadrados y la amplitud de los ángulos del triángulo con Geogebra.
- Aplicar el teorema de Pitágoras para la resolución de un problema real.

Sesión 7:

- Aplicar lo aprendido durante la unidad a un problema.

Sesión 1

Tarea 1: Adivina, adivinanza (20 minutos)

La tarea se llevará a cabo por parejas. Se repartirá a los alumnos una serie de tarjetas cuyo contenido será un concepto matemático relacionado con la unidad, por ejemplo, cateto, hipotenusa, Pitágoras, ángulo recto, área, perímetro, triángulo, triángulo rectángulo, triángulo acutángulo, triángulo obtusángulo, etc. Cada compañero debe definir el concepto escrito en la tarjeta a su pareja, sin pronunciar la palabra escrita, para que ésta lo adivine y lo dibuje.

Al finalizar la tarea, los alumnos pondrán en común con el profesor los resultados obtenidos, identificando así sus aciertos y errores, así como el motivo de éstos últimos.

<u>Tarea 2:</u> Manualidades con Pitágoras (30 minutos)

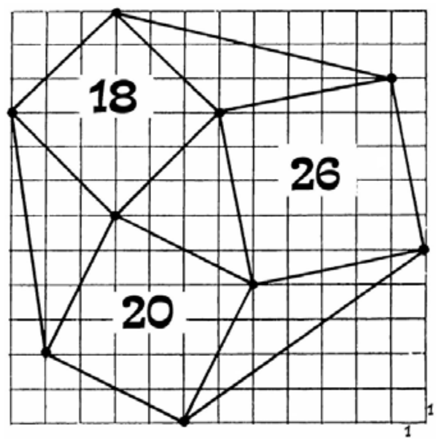
En papel cuadriculado representar un triángulo rectángulo cuyos lados midan 3, 4 y 5 cuadritos, respectivamente, y dibujar cuadrados sobre sus lados, recortarlos y comprobar la relación que hay entre el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa y el área de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo. Según esto, ¿qué relación podríamos decir que hay entre los lados de un triángulo rectángulo? ¿Ocurrirá esto en cualquier triángulo?

A continuación, en los últimos 5 minutos se formalizará el Teorema de Pitágoras.

Sesión 2

<u>Tarea 3:</u> Siete figuras (25 minutos)

Observa la figura representada en esta cuadrícula 12 x 12. Está compuesta por tres cuadrados de superficies 18 cm², 20 cm² y 26 cm², respectivamente, y por cuatro triángulos:



- En primer lugar, calcula los perímetros de las siete figuras.
- ¿Qué relación existe entre los triángulos?
- Determina la superficie que ocupan en total las siete figuras.

<u>Tarea 4:</u> Recuperación de los balones (25 minutos)

Junto a la pista de fútbol del instituto, justo detrás de una de las porterías, hay una nave, por lo que a menudo se embarcan los balones. El profesor de Educación Física nos ha pedido ayuda para recuperarlos porque empieza a faltar material para sus clases. El centro cuenta con una pequeña escalera, pero no es lo suficientemente larga para subir a la nave. ¿Qué longitud debe tener la escalera que compremos para poder llegar a la parte de arriba de la nave y así coger los balones?

Sesión 3

Tarea 5: Fotografía (25 minutos)

Las matemáticas están presentes continuamente en el mundo que nos rodea. Para percatarnos de ello, vamos a fotografiar tres triángulos rectángulos que podamos encontrar en distintas situaciones de la vida real. Además, habrá que medir la longitud de los lados de los triángulos y demostrar en clase que, efectivamente, en las situaciones captadas se verifica el Teorema de Pitágoras. (La demostración en clase se hará en grupos de 4)

Tarea 6: Construcción de estanterías (25 minutos)

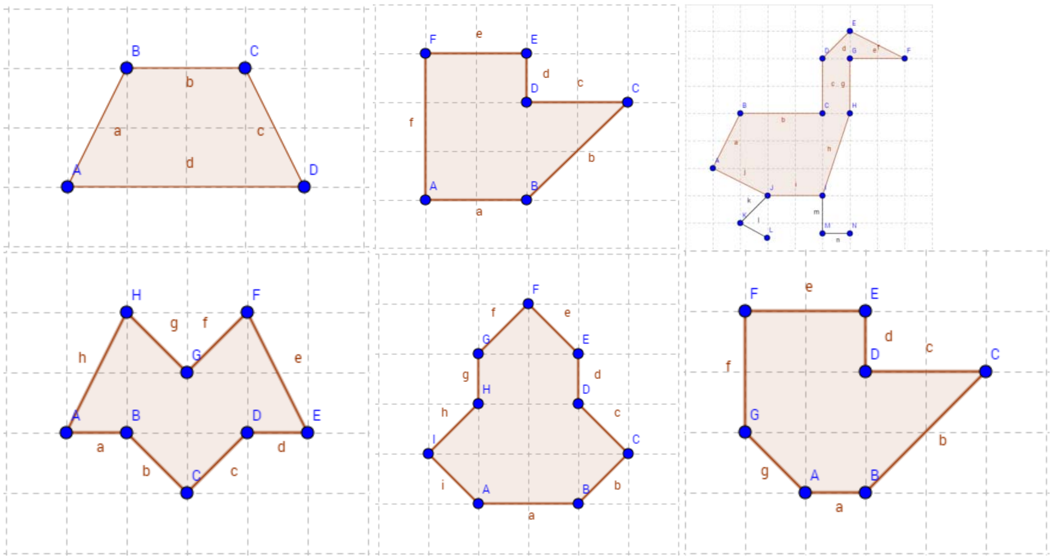
Queremos distribuir algunas estanterías, sobre las que colocaremos algunos libros de lectura, en las paredes de la clase. Para que los libros no se caigan es importante asegurarse de que las estanterías estén colocadas perpendicularmente a la pared. ¿Cómo podemos garantizar esta perpendicularidad? Una opción es ayudarnos de listones de madera, ¿cuánto deben medir los listones para que las estanterías queden bien colocadas?

Sesión 4

Tarea 7: Descomposición de figuras (35 minutos)

Cada alumno debe descomponer tres de las siguientes figuras en triángulos rectángulos, comprobando que son rectángulos. Podemos o bien proporcionar a los alumnos las figuras representadas en papel cuadriculado, o bien que sean ellos los encargados de representarlas y descomponerlas en el geoplano.

A continuación, cada alumno pasará su actividad al alumno de la derecha, quien comprobará si la resolución es correcta, en el caso de que no lo sea, debe aclarar al autor el porqué y la solución correcta.



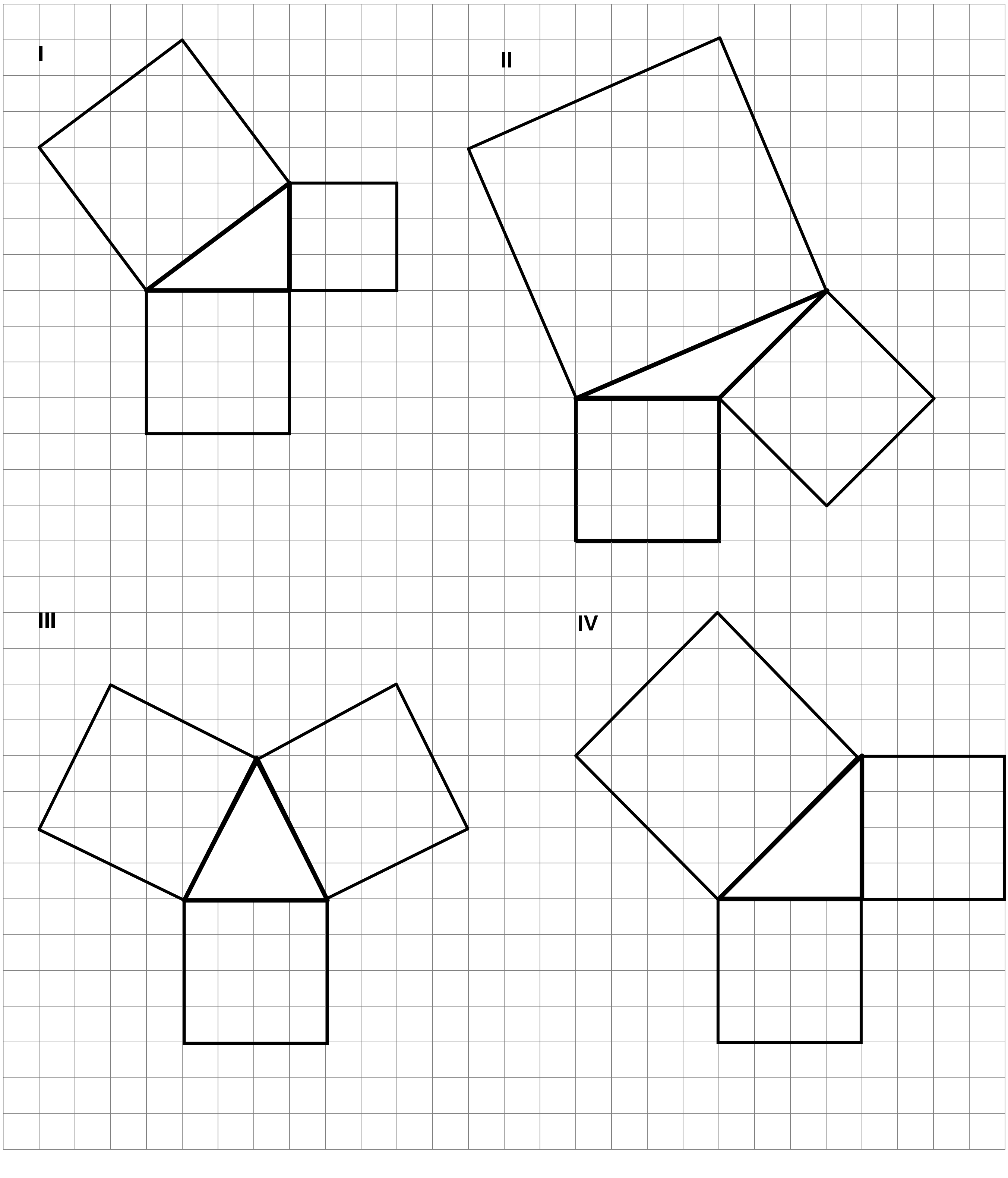
Tarea 8: Tangram (15 minutos)

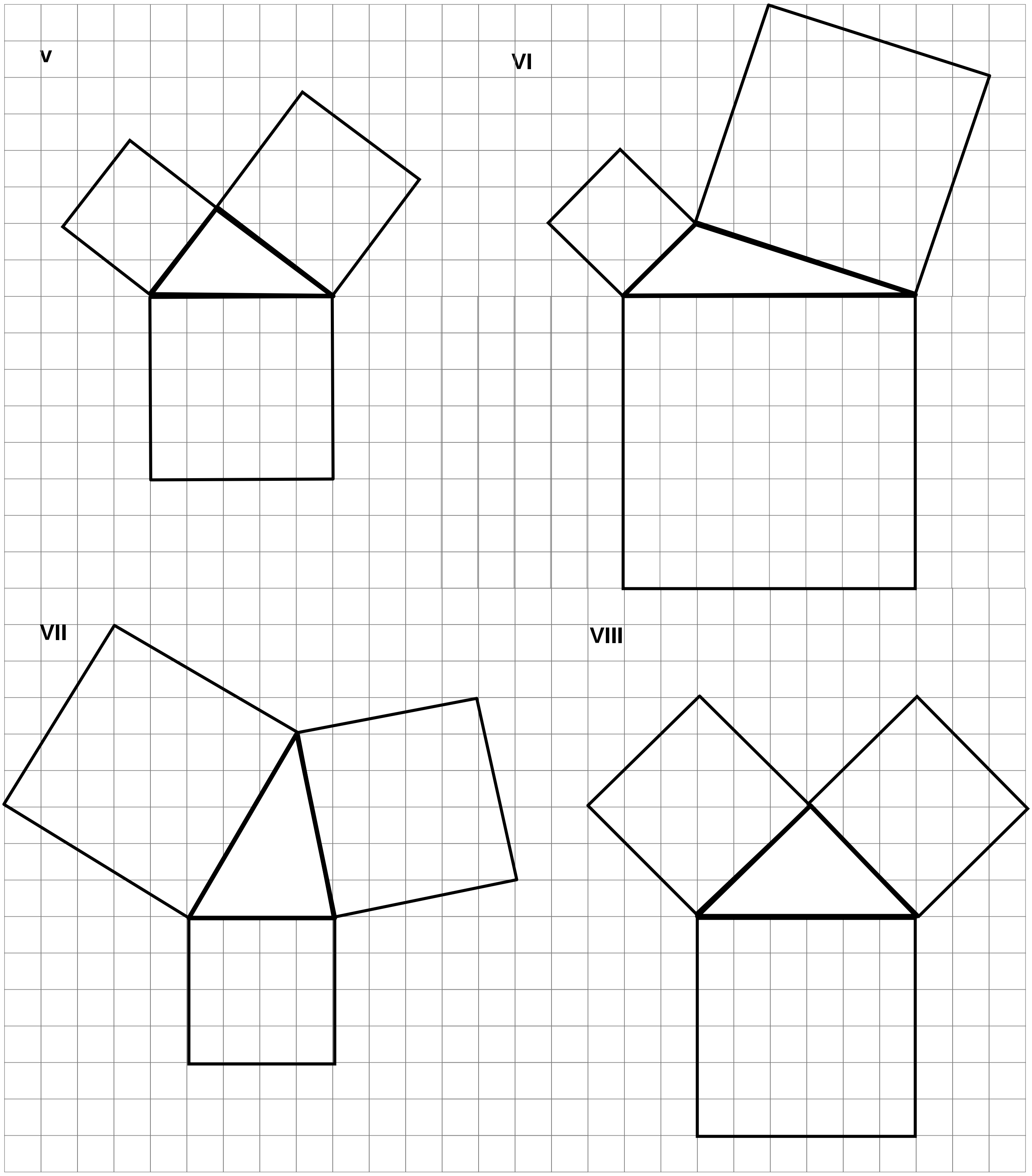
Ya sabemos que en un triángulo rectángulo el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa coincide con la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos. Por parejas y con todas las piezas de un tangram, se deben construir los cuadrados cuyo lado coincide con los catetos del triángulo. A continuación, con todas las piezas de otro tangram, se debe formar el cuadrado correspondiente a la hipotenusa del triángulo. ¿Qué relación se observa entre los cuadrados obtenidos? ¿Qué propiedad cumple el triángulo sobre el que se han construido los cuadrados con el tangram?

Sesión 5

Tarea 9: (50 minutos)

RELACIÓN ENTRE LAS ÁREAS DE LOS CUADRADOS CONSTRUIDOS EN LADOS DE TRIÁNGULOS




V
VI
VII
VIII

Ejercicio 1: Completa la siguiente tabla

		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Longitud de lado	Pequeño								
	Mediano								
	Grande								
Área de cuadrado sobre	lado pequeño								
	lado mediano								
	lado grande								
Clase triángulo									

Ejercicio 2: Enuncia la propiedad que hayas obtenido, para expresar la relación que existe entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos y la amplitud de los ángulos del triángulo o su clase, según los ángulos.

Ejercicio 3: Empleando papel cuadriculado, dibuja cada triángulo, los cuadrados sobre sus lados y completa la siguiente tabla, siempre referida a triángulos rectángulos:

		A	B	C	D
Longitud de	Cateto pequeño	1		2	

	Cateto mediano	2			
	hipotenusa			6	
Área de cuadrado sobre	Cateto pequeño		36		
	cateto mediano		64		24
	hipotenusa				81
Clase triángulo		RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO	RECTÁNGULO

Ejercicio 4: Averigua cuál de los siguientes triángulos es rectángulo:

a) lados: 9, 12 y 15 b) lados: 2, 2 y 3 c) lados 4, 5 y 6

Ejercicio 5: Enuncia de varias formas el Teorema de Pitágoras

Sesión 6

<u>Tarea 10:</u> ¡Juega con Geogebra! (20 minutos)

Usando Geogebra, construir un triángulo rectángulo junto con los cuadrados sobre sus lados (de forma que los lados de los cuadrados midan lo mismo que los respectivos lados del triángulo). A continuación, utilizamos la opción del programa que nos permite visualizar el área de las figuras representadas. Con ello comprobamos cómo varía el área de las figuras y que, al deformar el triángulo (dejando por tanto de ser rectángulo), no se verifica el Teorema de Pitágoras.

<u>Tarea 11:</u> Construcción de cometas (30 minutos)

Queremos construir cometas para volarlas en una excursión al campo. Para formar la estructura hemos comprado 40 metros de listones de madera. Teniendo en cuenta que en la clase hay 25 alumnos, ¿cuántos metros pueden usar cada alumno para su cometa? ¿Cuánto debe medir cada listón de la estructura para garantizar una correcta construcción (listones centrales perpendiculares)?

Una vez construida la estructura, procedemos a cubrirla con tela, formando la vela. ¿Cuánta tela será necesaria comprar para que cada alumno pueda formar la vela?

Finalmente, tenemos que decidir cuántos metros de hilo ponemos en el ovillo. Para ello debemos tener en cuenta que vamos a un llano rodeado de árboles en los que las cometas pueden quedar atrapadas. La longitud máxima del llano sin árboles es de 144 m y los árboles alcanzan una altura máxima de 17 m.

Sesión 7

En esta sesión comprobaremos si los alumnos han alcanzado los objetivos propuestos acerca del Teorema de Pitágoras. Para ello realizaremos la siguiente tarea.

Tarea 12: (50 minutos)

Por grupos de cuatro, los alumnos deben identificar un problema de la vida cotidiana en el que sería útil aplicar el Teorema de Pitágoras. El siguiente paso es tomar los datos reales del problema (esta parte puede llevarse a cabo durante la sesión o realizarse previamente). A continuación, se procederá a la resolución del problema. Finalmente, si hay tiempo suficiente, los grupos deberán exponer el problema escogido y argumentar su forma de proceder a la resolución.

En lo que a la **atención a la diversidad** se refiere, el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, refleja en el artículo 16 las medidas organizativas y curriculares para la atención a la diversidad y la organización flexible de las enseñanzas.

Hay que tener en cuenta en todo momento que las sesiones son organizadas de forman orientativa, pero cada grupo y cada alumno responderá de una manera diferente. Es por ello que debemos preparar tareas tanto de refuerzo, para aquellos alumnos que necesiten repasar los contenidos, como de ampliación, para los que tengan un aprendizaje más rápido. A modo de ilustración, se presenta a continuación una tarea de cada tipo.

Tarea de refuerzo: En el patio rectangular del instituto se van a llevar a cabo una serie de actividades como motivo de la conmemoración de la inauguración del centro. Para ello se quieren poner puestos con las diferentes actividades en la diagonal del recinto, cada uno de los cuales mide tres metros de largo. ¿Cuántos puestos se podrán formar?

Tarea de ampliación: Con la ayuda de un geoplano, ¿podrías justificar el Teorema de Pitágoras?

Para llevar a cabo la **evaluación**, y con ella conocer el grado de comprensión de los alumnos y la eficacia de la enseñanza, se utilizarán los siguientes instrumentos:

* Registro de la participación de los estudiantes en clase. Diariamente se evaluará la actitud positiva de los alumnos hacia la asignatura: realización de las tareas, colaboración cuando se trabaje en grupo, etc.
* Respuestas de los alumnos a la tarea final.

Para evaluar la tarea final, se utilizará la siguiente rúbrica.

Aspectos evaluables	1	2	3	4
Identificación del problema	La situación identificada no es un problema trascendente y no se resuelve mediante el Teorema de Pitágoras	La situación identificada no es un problema trascendente y el Teorema de Pitágoras lo resuelve, pero hay métodos más eficaces y sencillos	El problema no es demasiado trascendente y el Teorema de Pitágoras es útil para su resolución	La situación identificada es un problema trascendente y el Teorema de Pitágoras es útil para su resolución
Recogida de datos	Las medidas no se han tomado correctamente	Las medidas son aproximadas	Las medidas se han tomado correctamente aunque no con los instrumentos más exactos	Las medidas se han tomado correctamente y con los instrumentos adecuados
Comprobación de la hipótesis	No se ha comprobado la hipótesis	La hipótesis se ha comprobado de forma incorrecta	La hipótesis se ha comprobado, pero se han cometido errores de cálculo	La hipótesis se ha comprobado correctamente
Aplicación del Teorema	No se aplica correctamente el Teorema	Se aplica bien el Teorema, pero no se comprueba la solución obtenida	Se aplica bien el Teorema, pero hay errores de cálculo. Siendo comprobada la lógica de la solución	Se aplica el Teorema correctamente, comprobando la lógica de la solución obtenida
Argumentación	No se argumenta	Apenas se argumentan las	Las mayoría de las	La mayoría de las decisiones

	nada a lo largo de la resolución del problema	decisiones tomadas en el problema	decisiones tomadas en la resolución del problema son justificadas, pero los argumentos no son los adecuados	tomadas en la resolución del problema son correctamente justificadas

Investigación educativa

El teorema de Pitágoras tiene muchas aplicaciones en el ámbito educativo, laboral e incluso social. Pero nos encontramos con que, a menudo, es aplicado de forma mecánica y prestando atención únicamente a los cálculos numéricos, es decir, empleando la versión métrica referida a las longitudes de los lados. Esto conlleva uno de los errores más frecuentes en lo que respecta al teorema de Pitágoras: aplicar el teorema en cualquier situación sin comprobar que el triángulo es rectángulo.

Esta pequeña investigación busca precisamente analizar en qué grado los alumnos comprenden el significado del teorema de Pitágoras. Además, se intenta que al realizar la tarea propuesta, ellos mismos vayan construyendo el teorema, comprobando las propiedades métricas de los tipos de triángulos en los que se verifica. Asimismo, en la tarea se intenta que los alumnos interpreten el teorema de Pitágoras tanto desde un punto de vista geométrico como analítico.

La investigación se ha llevado a cabo en el I.E.S. Padre Suárez, de Granada, durante el período de prácticas del Máster. La tarea ha sido propuesta en una de las clases de 3º E.S.O., formada por 33 alumnos. En general se trata de un grupo con un buen rendimiento en Matemáticas, muestra de ello es que en los dos primeros trimestres sólo ha habido seis alumnos que han suspendido la asignatura. Además, únicamente hay un alumno que está repitiendo curso, el resto está en el año que le corresponde por edad. Es un grupo de alumnos muy trabajador y con muchas ganas de aprender, que se implican en las tareas y actividades que se les proponen.

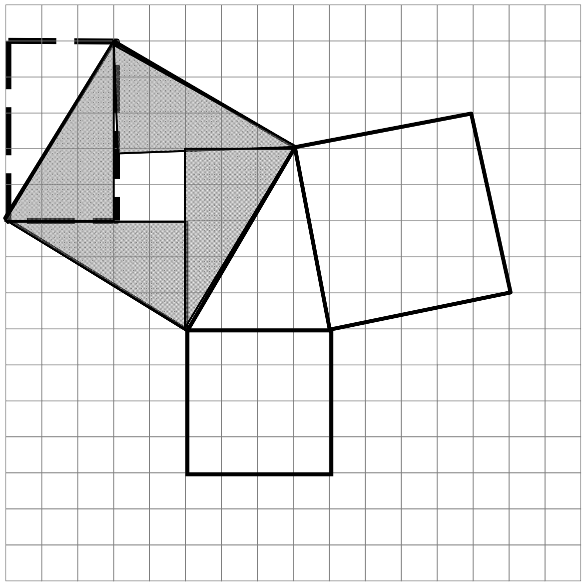
La tarea que ha sido planteada a los alumnos como objeto de esta investigación, ha sido la tarea 9 presentada en la Unidad Didáctica. Se propuso al comienzo de la unidad, sin enseñanza previa, con la intención de que los alumnos ampliaran su visión del teorema de Pitágoras, partiendo de la relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo. Dicha tarea fue llevada a cabo en grupos de tres y en un tiempo de 50 minutos.

Los instrumentos utilizados han sido dos. Por una parte las anotaciones tomadas durante el proceso de actuación acerca de los razonamientos de los alumnos, las dudas que se les planteaban, etc. Y por otra, los informes entregados por los alumnos con la resolución de la tarea.

Las variables que se pretenden analizar son las siguientes:

1. El alumno mide correctamente los lados de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos dados.
2. El alumno expresa correctamente la relación existente entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos.
3. El alumno construye correctamente los cuadrados sobre los lados de los triángulos.
4. El alumno enuncia de distintas formas el teorema de Pitágoras.

La intención al plantear esta tarea era que los alumnos calcularan el área de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos dados, contando los cuadritos que quedaban encerrados entre sus lados, al estar situados en papel cuadriculado. Para ello podían emplear diversos métodos, como contar los cuadritos que quedan completamente dentro del cuadrado y apreciar cómo y cuáles se complementan, o bien descompusieran los cuadrados en diversas figuras, como triángulos rectángulos con catetos en las líneas de la cuadrícula, de los que siempre pueden calcular el número de cuadritos interior, bien por el método anterior, o determinando el número de cuadrados del rectángulo que lo contiene y dividiendo por dos (Figura).



Una vez obtenidas las áreas, aplicando la fórmula del área del cuadrado, bastaría con hacer la raíz cuadrada para calcular la longitud de los lados de dichos cuadrados. Esta situación es relativamente fácil en las figuras que están construidas con vértices en la cuadrícula, siendo más difícil en la única que no tiene todos sus vértices en la cuadrícula (figura V).

Las figuras construidas son triángulos rectángulos (I, IV, V y VIII), con dos diferencias, tener los vértices en los de la cuadrícula (I, IV y VIII), y tener los catetos sobre las líneas de la cuadrícula (I y IV, con lo que se aprecia fácilmente que son rectángulos), o tener la hipotenusa sobre una línea de la cuadrícula (V y VIII, en los que los alumnos tienen que identificar que es rectángulo). Son triángulos acutángulos los III y VII y obtusángulos los II y VI.

De esta forma, se perseguía que los alumnos llegaran la siguiente discusión:

* Si la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre dos de los lados de un triángulo es igual al área del cuadrado construido sobre el tercer lado, entonces el triángulo mencionado es rectángulo (descubrimiento especialmente interesante en el caso VIII, en el que no se aprecia tan claramente el ángulo

recto; y por supuesto el V, cuya dificultad consiste en no poder obtener fácilmente la medida de la longitud de los catetos).

* Si la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre dos de los lados de un triángulo es mayor que el área del cuadrado construido sobre el tercer lado, entonces el triángulo es acutángulo (circunstancia que debe agrupar las figuras III y VII y permitirle apreciar que la VIII es de un triángulo rectángulo).
* Si la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre dos de los lados de un triángulo es menor que el área del cuadrado construido sobre el tercer lado, entonces el triángulo aludido es obtusángulo (los demás casos, en todos los cuales se aprecia claramente el ángulo obtuso, pues es notablemente mayor de 90º).

Como se ha mencionado, en la figura V se esperaba que los alumnos tuvieran una mayor dificultad, ya que los vértices de dos de los cuadrados no coinciden con los vértices de la cuadrícula.

A continuación se analizan los resultados obtenidos a partir de las respuestas dadas por los alumnos.

1. Medición de los lados de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos.

En lugar de calcular las áreas como se esperaba, la forma de proceder, en la mayoría de los casos, ha sido calcular la longitud de los lados de los cuadrados y obtener posteriormente el área elevando al cuadrado. Por tanto han partido de la relación métrica de longitudes del teorema de Pitágoras y la han aplicado directamente. Cuando los lados de los cuadrados coinciden con la cuadrícula les ha sido fácil obtener la longitud de los mismos y lo han resuelto sin dificultad. En el caso de la figura V, los alumnos han intentado buscar triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el lado del que quieren averiguar la longitud y cuyos catetos queden representados sobre la cuadrícula. Con ello han pasado a figuras diferentes de las dadas, mediante aproximaciones. Una vez que tienen este triángulo rectángulo calculan la longitud de los catetos contando los cuadritos y, mediante el teorema de Pitágoras, calculan el valor de la longitud de la hipotenusa.

Algunos alumnos empezaron a resolver la tarea contando cuadritos para calcular el área, pero al comparar con sus compañeros y ver que ellos obtenían el mismo resultado de manera más rápida, acabaron buscando también triángulos rectángulos sobre los que aplicar la forma métrica de longitudes del teorema de Pitágoras.

La forma en la que los alumnos han resuelto la tarea denota que tienen muy asentada la fórmula aritmética del teorema de Pitágoras y ya la dan por supuesta, para ellos es sólo una fórmula que les permite calcular el lado desconocido de un triángulo rectángulo. Por tanto, el Teorema de Pitágoras, que era el fin de la tarea, se ha convertido en la herramienta principal para obtener los datos.

Aun teniendo en cuenta que la tarea no ha sido resuelta por el método esperado, la mayoría de los alumnos han medido de forma correcta los lados de los cuadrados, en torno al 63%, exceptuando el caso de la figura V, cuyas medidas no han sido tomadas adecuadamente por ninguno de los alumnos.

Resultado	Número de grupos
La respuesta dada es adecuada	7
La respuesta dada no es acertada	2
No ha respondido	2

En cuanto a los errores, el más común es considerar, en la cuadrícula, la longitud de la diagonal de un cuadrado igual a la longitud del lado del cuadrado. Además, como era de esperar, en el caso de la figura V es donde más dificultades han tenido, pues no podían construir triángulos rectángulos como venían haciendo en el resto de figuras. En este caso, lo que han hecho es desplazar la figura para hacerla coincidir con los vértices de la cuadrícula, cambiando de esa manera el problema planteado.

2. Expresión de la relación existente entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de los triángulos, en función de la amplitud de los ángulos del triángulo.

Son muy pocos los alumnos que han expresado perfectamente esta relación. Aún así, podríamos decir que el 54% de los alumnos han obtenido la relación entre las áreas, siempre en el caso del triángulo rectángulo, aunque no todos la han expresado correctamente, debido a imprecisiones en el lenguaje matemático. Por ejemplo, una de las respuestas ha sido: “En un triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los lados pequeños es igual al área del lado mayor”, cuando ellos mismos saben que los lados de una figura geométrica no tiene área.

Resultado	Número de grupos
La respuesta dada es adecuada	6
La respuesta dada no es acertada	2
No ha respondido	3

Se observa que los alumnos se contentan con descubrir la relación entre las áreas en el triángulo rectángulo, no sintiendo la necesidad de expresar esta relación para otro tipo de triángulos, y por tanto no discuten la relación entre las áreas en función de la amplitud de los ángulos de los triángulos. Algunos alumnos han afirmado que la suma de las áreas de los cuadrados pequeños es igual al área del cuadrado grande, pero no han especificado que esto ocurre sólo en el caso de que el triángulo sea rectángulo.

Otros alumnos han escrito que cuando los triángulos son rectángulos se verifica el teorema de Pitágoras, pero no hacen referencia al área de los cuadrados. Una vez más, se pone de manifiesto lo interiorizada que tienen los alumnos la fórmula aritmética entre las longitudes de los lados, para el teorema de Pitágoras.

3. Construcción de los cuadrados sobre los lados de los triángulos.

Como se puede apreciar, en esta tarea (ejercicio 3), se dan informaciones directas, a partir de las medidas de las longitudes de dos de los lados (dos catetos A, o un cateto y la hipotenusa, C), o mediante las áreas de los cuadrados construidos sobre estos elementos (dos catetos, B; o un cateto y la hipotenusa, D). Los dos primeros pueden construirlos con facilidad, dibujando los catetos sobre las líneas de la cuadrícula, bien directamente los catetos (1 y 2, en A), o determinando esta longitud de catetos, a partir del área del cuadrado (6 y 8 en B, que además forman parte de una terna pitagórica). La construcción de los otros dos resulta muy complicada, y debería arrancar de dibujar la hipotenusa sobre una de las líneas de la cuadrícula, y completar mediante la idea de "arco capaz de 90º", o determinando la longitud del otro cateto antes del dibujo. Esto se complica, al tener longitudes irracionales los catetos.

Éste ha sido uno de los indicadores en los que los alumnos han tenido más errores. Dadas ciertas medidas de los triángulos y cuadrados construidos sobre sus lados, calculan muy bien el resto de longitudes de los lados y el resto de áreas. Sin embargo, cuando intentan representar dichas figuras, los cuadrados cuyos lados coinciden con la cuadrícula están bien dibujados en general, pero aquellos cuyos lados no coinciden con la cuadrícula tan sólo un 18% de los alumnos los han esbozado correctamente.

Resultado	Número de grupos
La respuesta dada es adecuada	2
La respuesta dada no es acertada	5
No ha respondido	4

Los alumnos que han resuelto esta cuestión como se esperaba, han procedido de forma similar a la primera pregunta, esto es, han construido los lados de los cuadrados trazando previamente los catetos que junto al lado buscado forman un triángulo rectángulo.

4. Enunciados del teorema de Pitágoras.

A la hora de enunciar el teorema de Pitágoras, las formas más frecuentes han sido la fórmula aritmética del teorema, el enunciado que relaciona la hipotenusa y los catetos, y el enunciado que hace referencia a las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo. Una vez más, las respuestas dadas muestran que los alumnos han adquirido el concepto, pero a la hora de expresarlo, tan sólo el 36% de los alumnos, aproximadamente, han dado un enunciado del teorema correctamente expresado e incluyendo la hipótesis. Sin embargo, ninguno de los alumnos menciona la doble implicación del teorema.

Resultado	Número de grupos
La respuesta dada es adecuada	4
La respuesta dada no es acertada	5

No ha respondido	2

Un ejemplo de un enunciado dado por uno de los alumnos y que expone lo que se ha comentado anteriormente es el siguiente: "La suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado, en los triángulos rectángulos". Este alumno aplica perfectamente el teorema de Pitágoras, pero no expresa correctamente la relación matemática que hay entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

Los alumnos no son precisos en su formulación, y no suelen mencionar que el teorema se verifica si el triángulo es rectángulo. Además, como se ha señalado anteriormente, ninguno de los alumnos menciona la doble implicación del teorema de Pitágoras.

En general, la tarea ha contribuido a la comprensión del teorema de Pitágoras por parte de los alumnos, y les ha permitido hacer un estudio bastante completo del mismo. No obstante, sería muy útil llevar a cabo una sesión de reflexión y puesta en común de los resultados, con el objetivo de que los alumnos adquirieran la capacidad de expresar correctamente los resultados matemáticos, así como de que se percatasen de la necesidad de las hipótesis. Asimismo, un aspecto al que habría que dedicar alguna tarea más es la doble implicación del teorema. En la práctica lo aplican bien, pero a la hora de enunciar el teorema, no tienen en cuenta esta doble implicación.

Conclusiones

Impartir una unidad didáctica consiste en dar una explicación de los contenidos en clase y realizar algunos ejercicios para practicar. Ésta es una idea bastante extendida y hace unos meses es la que yo misma tenía. A través de la realización de este trabajo, he tenido la oportunidad de comprobar que la elaboración de una unidad didáctica es un proceso laborioso que requiere de un análisis didáctico previo. Además, esta elaboración es un procedimiento cíclico, pues al poner la unidad en práctica encontraremos aspectos que deberemos mejorar.

Tanto el análisis de contenido como el cognitivo y el de instrucción nos han permitido conocer en profundidad el tema del teorema de Pitágoras y decidir el enfoque que queríamos dar a la unidad. En este caso, me decanté porque los alumnos trabajaran la parte geométrica del teorema de Pitágoras, en lugar de centrarnos tanto en la fórmula.

Otro aspecto que me ha ayudado en la elaboración del trabajo ha sido el hecho de impartir la unidad correspondiente al teorema de Pitágoras en el instituto en el que he realizado las prácticas del Máster. Esto me ha permitido llevar a cabo en el aula algunas de las tareas que se presentan en la unidad didáctica de este trabajo, pudiendo comprobar la utilidad de las mismas, la temporización, la eficacia, etc.

En lo que respecta a la investigación, ha sido un primer contacto con este ámbito y me ha permitido reconocer ciertas dificultades de los alumnos de las que no tenía conciencia previamente. Asimismo, he podido comprobar lo asentada que tienen la fórmula del teorema, sin darle un sentido geométrico.

Tras la elaboración de la unidad didáctica y la investigación, los aspectos en los que intentaría hacer un mayor hincapié en el futuro son el trabajar el teorema de Pitágoras desde un punto de vista geométrico desde un principio, para evitar la vinculación continua con la fórmula, trabajar la doble implicación del teorema e intentar mejorar la expresión matemática de los alumnos.

La continua formación del profesorado es fundamental para lograr el aprendizaje de los alumnos, y la elaboración de este trabajo ha sido una buena forma de iniciar esa formación.

Referencias bibliográficas

Bell, E.T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica. México.

Cabañas, M.G. y Cantoral, R. (2005). La conservación en el estudio del área. *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. México: Reverté-Clame, A.C.

Cañadas, M. C. (2001). Demostraciones del teorema de Pitágoras para todos. En J. M. Cardeñoso, A.J. Moreno, J. M. Navas & F. Ruiz, (Eds.). *Actas de las jornadas Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad*,(pp. 111-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES. Recuperado en : http://funes.uniandes.edu.co/258/1/CannadasM01-2718.PDF

Escamilla, C. P. (1993). *Unidad didáctica*. Síntesis.

Godino, J. D., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(76), 39.

Gómez, P. (2002). Análisis didático y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-292.

Gómez, P., & Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 61-87). Madrid: Pirámide.

Gómez, P. y Rico, L. (2002). Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

González Urbaneja, P. M. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (32), 103-130.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1998). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia*. Bogotá: una empresa docente.

Lupiáñez, J. L., & Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, *3*(1), 35-48.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE núm. 3, de 3 de enero de 2015*, páginas 169 a 546

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 61-94). Barcelona, Horosri. Recuperado de http://www.uv.es/puigl/fd.pdf

Reale, G. y Antíseri, D. (2007). *Historia de la Filosofía I. Filosofía pagana antigua*. Bogotá, Universidad Pedagógica General, San Pablo.

Rico, L. (2009). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática*. *Pna*, *4*(1), 1-14. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/662/1/Rico2009Sobre.pdf

Rico, L., Lupiáñez, J.L. y Molina, M. (Eds.). *Análisis didáctico en Educación* Matemática. Granada: Comares.

Rico, L., Marín, A. Lupiáñez, J.L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *Suma 58*, 7-23.

Anexos

Anexo I: Desarrollo histórico

El teorema de Pitágoras en las civilizaciones prehelénicas

Tradicionalmente se atribuye el teorema de Pitágoras al propio Pitágoras. Sin embargo, el análisis arqueológico de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia, datadas del segundo milenio antes de Cristo, reveló que los babilonios conocían el teorema, o al menos algunos aspectos del mismo. Otras zonas de las que se tiene constancia del conocimiento del teorema son Egipto, India y China. Lo que no se han encontrado son pruebas del teorema por parte de estas civilizaciones prehelénicas, parece ser que la primera demostración del teorema fue aportada por Pitágoras.

* El teorema de Pitágoras en Babilonia

Se han encontrado cerca de trescientas tablillas con contenido matemático, entre las que destacan la tablilla YALE 7289 y PLIMPTON 322. En la primera aparece un cuadrado con los triángulos rectángulos que resultan al trazar las diagonales y varios números escritos en el sistema sexagesimal babilónico (basado en potencias de 60). Al escribir estos números en el sistema decimal, encontramos que el número que aparece en la diagonal es 1,414213…, una aproximación de $\sqrt{2}$ bastante superior a la obtenida posteriormente por los griegos. En cuanto a la tablilla PLIMPTON es el documento matemático más importante encontrado de Babilonia. Esta tablilla está formada por cuatro columnas de números distribuidos en quince filas y contiene 15 ternas pitagóricas.

* El teorema de Pitágoras en Egipto

Los egipcios conocían el hecho de que el triángulo egipcio, de lados 3, 4 y 5 (y sus proporcionales), es rectángulo y lo utilizaban como escuadra para trazar una línea perpendicular a otra y delimitar así las tierras. Además, este triángulo rectángulo aparece, de alguna manera, en todas las pirámides egipcias, salvo la de Keops.

* El teorema de Pitágoras en La India

En los Sulvasutras Baudhayana y Apastamba (manuales para la construcción de altares de una determinada forma y tamaño) se describe el uso de la cuerda para medir y para trazar líneas perpendiculares. Las longitudes de estas cuerdas constituyen ternas pitagóricas, siendo la más usada para el trazo de líneas perpendiculares 15, 36 y 39, procedente del triángulo de lados 5, 12 y 13 (triángulo indio).

* El teorema de Pitágoras en China

Los tratados chinos Chou Pei Suan Ching y Chui Chang Suang Shu contienen aspectos geométricos relacionados con el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, en el segundo se encuentran 24 problemas referidos a triángulos rectángulos y todas las soluciones se basan en el teorema de Pitágoras.

El teorema de Pitágoras en el mundo griego

* Las demostraciones de Pitágoras

Pitágoras nació en la isla de Samos, junto a Mileto, en el siglo VI a.C. En general, se habla del pensamiento de los Pitagóricos en sentido global más que el pensamiento de Pitágoras de forma individual, pues ni siquiera Aristóteles contaba con elementos para diferenciar las aportaciones de Pitágoras de las de sus discípulos. En este momento de la historia, los Pitagóricos heredaron de sus predecesores la problemática del principio, con la diferencia de que para ellos no es un elemento físico sino que la causa de todo es el "número" (Antíseri y Reale, 2007).

Son muchas las conjeturas que ha habido a lo largo de la historia acerca de las pruebas aportadas por Pitágoras. Muchos historiadores afirman que la demostración de Pitágoras se basaría en su propia *Teoría de las Proporciones*, imperfecta por aplicarse sólo a cantidades conmensurables (Urbaneja, 2008).

Buscando una forma de obtener ternas de números a, b, c que verificaran la relación $c^2 = a^2 + b^2$, los pitagóricos encontraron que en las Ternas pitagóricas la hipotenusa y el cateto mayor se diferencian en una unidad. De forma que para m=3 se obtiene el triángulo egipcio y para m=5 el triángulo indio.

* El Teorema de Pitágoras en la Academia de Platón

En el diálogo de Platón *El Menón* sobre el problema de la duplicación del cuadrado (el cual precedería al famoso problema de la duplicación del cubo) aparece el Teorema de Pitágoras en el caso de un triángulo rectángulo isósceles.

Platón encontró una ley que le permitía obtener ternas pitagóricas, basada en que la hipotenusa y uno de los catetos se diferencian en dos unidades.

* El Teorema de Pitágoras en Los Elementos de Euclides

El primer libro de *Los elementos de Euclides* termina con el Teorema de Pitágoras y su recíproco, proporcionando una demostración con una lógica impecable, una inusitada elegancia y una modesta economía de elementos geométricos construidos de forma muy cuidadosa en las proposiciones anteriores (Urbaneja, 2008). Debido a la presencia de magnitudes inconmensurables, Euclides no podía usar las proporciones en forma pitagórica, por lo que aplica elementos muy simples de geometría elemental. Por ejemplo, la construcción de cuadrados sobre segmentos o ángulos adyacentes que suman dos rectos.

Euclides llega aún más lejos demostrando en el Libro I de Los Elementos el recíproco del Teorema de Pitágoras.

Anexo II: Competencias Matemáticas PISA 2012

Razonar y argumentar (RA)

Es una competencia que se activa a lo largo de las distintas etapas y actividades relacionadas con la alfabetización matemática, que involucra procesos de pensamiento lógico que exploran y vinculan los elementos de un problema para:

RA1: Hacer inferencias (basadas en razonamientos inductivos y deductivos).

RA2: Comprobar una hipótesis.

RA3: Proporcionar una justificación de afirmaciones realizadas y de las soluciones encontradas.

Comunicar (C)

La comunicación resulta clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, es fundamental en el planteamiento, la comprensión y la resolución de problemas. Esta competencia implica:

C1: Reconocer y comprender una situación problemática.

C2: Leer, decodificar e interpretar distintas ideas matemáticas.

C3: Resumir y presentar resultados intermedios de forma oral o escrita durante el proceso de resolución.

C4: Presentar la solución, ofreciendo a otros alguna explicación.

Matematizar (M)

Es un proceso complejo que resulta clave para lograr la alfabetización matemática y puede implicar:

M1: Transformar un problema definido en el mundo real a una forma estrictamente matemática.

M2: Estructurar, conceptualizar y/o formular un modelo de resolución.

M3: Interpretar y evaluar un resultado o un modelo matemática en términos del problema original.

Elaborar estrategias para resolver problemas (RP)

Las actividades propias de la matemática requieren con frecuencia la elaboración de estrategias para resolver problemas. Esta competencia se puede concretar en:

RP1: Reconocer, formular y resolver problemas de una manera efectiva.

RP2: Seleccionar o elaborar un plan o una estrategia para resolver problemas derivados de una tarea o un contexto, así como para guiar su implementación.

RP3: Valorar la solución o soluciones encontradas.

Representar (R)

La alfabetización matemática implica frecuentemente diferentes representaciones de objetos y situaciones matemáticos, así como relaciones entre ellas. Estas representaciones incluyen gráficos, tablas, diagramas, imágenes, ecuaciones, fórmulas, descripciones textuales y materiales concretos. Esta competencia se activa al describir una situación, interactuar con un problema o presentar el trabajo propio, e implica:

R1: Seleccionar y usar las formas de representación más adecuadas según el propósito.

R2: Interpretar la información que suministran diferentes representaciones.

R3: Relacionar y traducir entre una variedad de representaciones.

Usar lenguaje formal, técnico y simbólico y las operaciones (LS)

La alfabetización matemática requiere usar el lenguaje propio de la matemática y varios de sus elementos básicos. Los símbolos, reglas y sistemas utilizados variarán de acuerdo con el conocimiento concreto del contenido matemático necesario para una tarea específica a fin de formular, resolver e interpretar las matemáticas. Esta competencia implica:

LS1: Comprender e interpretar expresiones simbólicas (incluyendo expresiones y operaciones aritméticas) dentro de un contexto matemático que se rige por las convenciones y reglas matemáticas.

LS2: Manipular ese tipo de expresiones simbólicas.

LS3: Comprender y utilizar constructos formales basados en definiciones, reglas y sistemas formales (incluyendo el uso de algoritmos con estas entidades).

Usar herramientas matemáticas (HM)

Las herramientas matemáticas abarcan herramientas físicas tales como instrumentos de medición, así como calculadoras y herramientas informáticas que están cada vez más ampliamente disponibles. Esta competencia implica:

HM1: Conocer y poder usar diversas herramientas que pueden ayudar a la actividad matemática, conociendo sus propias limitaciones.

HM2: Emplear herramientas matemáticas en la comunicación de resultados.

Anexo III: Justificación de las competencias a las que contribuyen los objetivos

El primer objetivo está relacionado con la competencia de razonar y argumentar porque para reconocer los triángulos rectángulos deben comprobar cierta hipótesis. Y con la elaboración de estrategias puesto que requiere seleccionar o elaborar un método o una forma para resolver problemas.

El segundo objetivo se vincula a la competencia de razonar y argumentar porque para realizar la clasificación habrá que justificar las propiedades métricas del tipo de triángulo estudiado.

En lo que al tercer objetivo se refiere, lo hemos relacionado con la competencia razonar y argumentar porque es necesario comprobar la hipótesis de que el triángulo sea rectángulo. También se contribuye a alcanzar la competencia de matematizar, al tener que transformar un problema definido en el mundo real a una forma matemática y formular un modelo de resolución. En cuanto a la competencia de representar, es muy útil usar la representación gráfica para plantear y comprender la situación problemática, para posteriormente traducirla a una representación algebraica. Finalmente, la competencia de usar lenguaje formal, técnico y simbólico y las operaciones se desarrolla al comprender y utilizar definiciones y reglas.

El cuarto objetivo contribuye a la competencia de comunicar, siempre que se pida una justificación en la tarea, porque se debe presentar la solución ofreciendo una explicación. Además, se asocia a la competencia de matematizar puesto que se interpreta y evalúa el resultado obtenido en términos del problema dado.

El quinto objetivo está relacionado con la elaboración de estrategias, ya que se pueden seleccionar diferentes estrategias para construir los cuadrados. Con la competencia representar porque la construcción se puede llevar a cabo geométricamente (lo más intuitivo) o describiéndolos de forma verbal o algebraica. La competencia de usar herramientas matemáticas también se desarrolla puesto que la construcción, además de llevarse a cabo en papel, se puede realizar con alguna herramienta informática.

El sexto objetivo se asocia a la competencia de representar, porque la relación entre el área de los cuadrados se puede llevar a cabo numéricamente o también gráficamente con material manipulativo.

El séptimo objetivo contribuye al desarrollo de la competencia razonar y argumentar porque, siempre que se requiera en la tarea, de deben justificar las afirmaciones.

El último objetivo está relacionado con la competencia razonar y argumentar porque se basa en un razonamiento deductivo, con la competencia comunicar debido a que es necesaria la interpretación de distintas ideas matemáticas y con la competencia LS ya que se deben comprender y manipular expresiones simbólicas.

Anexo IV: Análisis de las tareas propuestas para la Unidad Didáctica

Tarea 1: Adivina, adivinanza		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Recordar algunos conceptos geométricos
	Recursos/Operaciones	Papel, lápiz y tarjetas
	Contenido	Contenidos geométricos como triángulos, área o perímetro
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Tarjetas
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Parejas. Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de inicio que nos permite detectar conocimientos previos	

Tarea 2: Manualidades con Pitágoras		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Construir el concepto del Teorema de Pitágoras
	Recursos/Operaciones	Papel cuadriculado, lápiz y tijeras
	Contenido	Construcción de cuadrados sobre los lados de un triángulo. Teorema de Pitágoras
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Llevándose a cabo un debate acerca de las

		preguntas planteadas al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Parejas, para la construcción de las figuras. Gran grupo, para el debate
OBSERVACIONES	Tarea de inicio que nos permite motivar a los alumnos y que muestren inquietud por el tema que comienza	

Tarea 3: Siete figuras		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Reconocer triángulos rectángulos (descomponiendo figuras o visualizándolos cuando no están explícitamente representados). Diferenciar entre perímetro y área.
	Recursos/Operaciones	Ficha con las figuras representadas
	Contenido	Triángulos rectángulos. Perímetro y área
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Ficha (gráfica)
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Grupos de tres Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo	

Tarea 4: Recuperación de los balones

ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Identificar triángulos rectángulos en situaciones de la vida cotidiana. Aplicar correctamente el Teorema de Pitágoras
	Recursos/Operaciones	Listones de madera de distintas longitudes y cinta métrica
	Contenido	Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras
	Situación de aprendizaje	Académica, personal, social
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la situación problemática en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Grupos de cuatro. Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo en la que los alumnos se deben cuestionar una situación problemática y encontrar las condiciones para aplicar correctamente el Teorema de Pitágoras	

Tarea 5: Fotografía		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Reconocer triángulos rectángulos en situaciones de la vida cotidiana
	Recursos/Operaciones	Cámara de fotos o móvil con cámara
	Contenido	Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras.
	Situación de aprendizaje	Académica, social
	Complejidad	Conexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea y los alumnos la llevan a cabo. Haciendo una puesta en común al

		finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Individual. Grupos de cuatro, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo que permite cuestionarse la presencia de triángulos rectángulos en el mundo que nos rodea, e incluso la utilidad del Teorema de Pitágoras en dichas situaciones	

Tarea 6: Construcción de estanterías		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Reconocer situaciones en las que es útil aplicar el Teorema de Pitágoras
	Recursos/Operaciones	Estanterías y listones de madera
	Contenido	Triángulos rectángulos. Ternas pitagóricas. Teorema de Pitágoras.
	Situación de aprendizaje	Académica, personal, social
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Grupos de cuatro. Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo que permite introducir el Teorema de Pitágoras desde un punto de vista práctico	

Tarea 7: Descomposición de figuras		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Reconocer triángulos rectángulos cuando éstos no están explícitamente representados, sino dentro de otras figuras
	Recursos/Operaciones	Ficha o geoplano
	Contenido	Triángulos rectángulos
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reproducción
CONDICIONES	Presentación	Gráfica
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Individual. Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo	

Tarea 8: Tangram		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Relacionar las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo
	Recursos/Operaciones	Dos Tangram
	Contenido	Triángulos rectángulos. Cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo. Teorema de Pitágoras.
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea

	Agrupamiento alumnos	Parejas. Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de desarrollo	

Tarea 9: Relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de triángulos		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Obtener la hipótesis del Teorema de Pitágoras a partir de distintos triángulos. Construir poco a poco el Teorema.
	Recursos/Operaciones	Ficha
	Contenido	Triángulos rectángulos. Ternas pitagóricas. Teorema de Pitágoras.
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Gráfica
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Grupos de tres. Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de cierre para afianzar y ampliar los contenidos sobre el Teorema de Pitágoras	

Tarea 10: ¡Juega con Geogebra!		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Comprobar que la hipótesis del Teorema de Pitágoras es necesaria.
	Recursos/Operaciones	Geogebra

	Contenido	Triángulos. Teorema de Pitágoras
	Situación de aprendizaje	Académica
	Complejidad	Reproducción
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo una puesta en común al finalizar la tarea
	Agrupamiento alumnos	Individual o parejas (según la disponibilidad de ordenadores en el centro) Gran grupo, para la puesta en común
OBSERVACIONES	Tarea de cierre que permite a los alumnos afianzar y sintetizar los contenidos trabajados durante la unidad	

Tarea 11: Construcción de cometas		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Identificar cuándo es útil el Teorema de Pitágoras y aplicarlo correctamente para la resolución de problemas de la vida cotidiana
	Recursos/Operaciones	Listones de madera, tela e hilo
	Contenido	Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras
	Situación de aprendizaje	Académica, personal
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Haciendo puestas en común a lo largo de la actividad
	Agrupamiento alumnos	Grupos de cuatro
OBSERVACIONES	Tarea de cierre que permite a los alumnos reforzar lo trabajado y aplicarlo a una situación real	

Tarea 12: Evaluación		
ELEMENTOS DE LA TAREA	Meta	Aplicar lo aprendido sobre el Teorema de Pitágoras
	Recursos/Operaciones	Papel, lápiz, cinta métrica, listones de madera.
	Contenido	Triángulos rectángulos. Teorema de Pitágoras
	Situación de aprendizaje	Académica, personal y social
	Complejidad	Reflexión
CONDICIONES	Presentación	Verbal
	Comunicación	El profesor presenta la tarea en clase y los alumnos la realizan. Exponiendo cada grupo los resultados obtenidos
	Agrupamiento alumnos	Grupos de cuatro
OBSERVACIONES	Tarea de cierre que permite a los alumnos poner en práctica lo aprendido durante las sesiones anteriores.	