



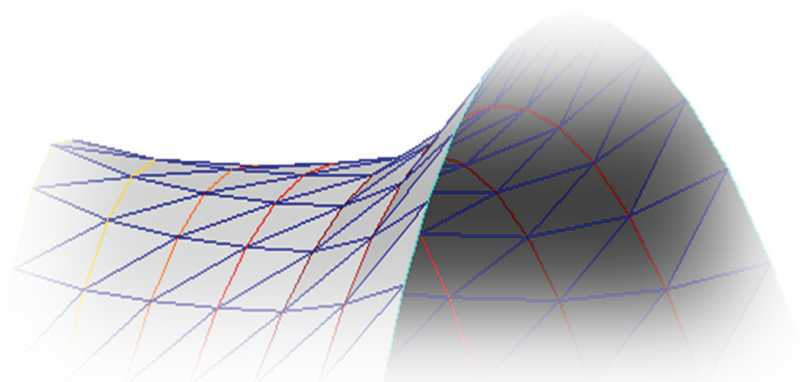
Universidad de Granada



Escuela  
Internacional  
de Posgrado

**TESIS DOCTORAL**

# MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA PARA LA OBTENCIÓN DE DENSIDADES DE FUERZA EN ESTRUCTURAS TENSADAS Y ANTIFUNICULARES



**PROGRAMA DE DOCTORADO EN INGENIERÍA CIVIL**

**ESCUELA DE DOCTORADO EN CIENCIAS,  
TECNOLOGÍAS E INGENIERÍA**

**ESCUELA INTERNACIONAL DE POSGRADO  
UNIVERSIDAD DE GRANADA**

**Granada, España**

**Abril de 2016**

**AUTOR:**

**Manuel Cañete Güeto**

**TUTOR Y DIRECTOR:**

**Enrique Hernández Montes**

Editor: Universidad de Granada. Tesis Doctorales

Autor: Manuel Cañete Güeto

ISBN: 978-84-9125-964-0

URI:<http://hdl.handle.net/10481/43942>





El doctorando, MANUEL CAÑETE GÜETO, y el director de la tesis, ENRIQUE HERNANDEZ MONTES, garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

Granada a 20 de abril de 2016

Director de la Tesis

Doctorando

Fdo.: Enrique Hernández Montes

Fdo.: Manuel Cañete Güeto





« La originalidad consiste en el retorno al origen; así pues, original es aquello que vuelve a la simplicidad de las primeras soluciones. »

Antoni Gaudí

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero agradecer a mi director de tesis D. Enrique Hernández Montes su dedicación, orientación, ayuda y motivación permanente. He tenido la suerte de tener a mi lado un formidable maestro del que tengo que destacar su impresionante capacidad y experiencia docente e investigadora. Mi más profunda gratitud y deseo de seguir colaborando, a la vez que aprendiendo, en futuros trabajos de investigación.

También quisiera agradecer a todos los profesores, compañeros y amigos del Máster Universitario de Estructuras de esta Universidad, curso 2011-2012, por haber compartido tan buenos momentos. Gracias por permitirme formar parte de aquellos grupos de trabajo en los que tantas horas hemos dedicado y en los que tanto hemos aprendido.

Por último, a mi toda mi familia y en especial a mi mujer y a mis hijos por el apoyo, paciencia e inagotable amor que siempre me brindan y sin el cual no sería capaz de superar aquellos momentos difíciles, ni de disfrutar plenamente de tantos otros más felices.





## ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>3</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>7</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>8</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>9</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS</b>	<b>14</b>
<b>ÍNDICE DE ACRÓNIMOS</b>	<b>16</b>
<b>1 . INTRODUCCIÓN</b>	<b>18</b>
<b>1.1. LA OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS</b>	<b>20</b>
1.1.1. VARIABLES DE DISEÑO	20
1.1.2. FUNCION OBJETIVO O CRITERIO DE VALORACIÓN	20
1.1.3. RESTRICCIONES	21
1.1.4. MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN. ESTADO DEL ARTE	22
1.1.4.1. TÉCNICAS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA	23
1.1.4.1.1. MÉTODOS EXACTOS DE PROGRAMACIÓN MATEMATICA	23
1.1.4.1.2. MÉTODOS HEURÍSTICOS	24
1.1.4.2. OPTIMIZACIÓN POR CRITERIOS	28
1.1.4.2.1. CRITERIOS DE OPTIMALIDAD	29
1.1.4.2.2. MÉTODOS DE DISTRIBUCIÓN DE MATERIAL	29
1.1.4.2.3. MÉTODOS EVOLUCIONARIOS	31
1.1.4.2.4. MODELOS BIOLÓGICOS	33
1.1.4.2.5. MÉTODOS DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS TENSADAS Y ANTIFUNICULARES	33
<b>1.2. ESTRUCTURAS TENSADAS</b>	<b>39</b>
1.2.1. BREVE HISTORIA DE LA ARQUITECTURA TEXTIL	39
1.2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS TENSOESTRUCTURAS	43
1.2.3. LAS CUBIERTAS COLGANTES PESADAS	56
<b>1.3. LA CATENARIA.</b>	<b>58</b>
1.3.1. ECUACIONES DE LA CATENARIA	59
1.3.2. LA FORMA FUNICULAR	62
<b>1.4. EL ARCO CATENARIO. EL MÉTODO DE INVERSIÓN DE LA CATENARIA</b>	<b>65</b>
<b>1.5. LAS ESTRUCTURAS ANTIFUNICULARES</b>	<b>67</b>
<b>2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN</b>	<b>77</b>
<b>2.1. JUSTIFICACIÓN</b>	<b>78</b>



<b>2.2. OBJETIVOS Y CONTRIBUCIONES</b>	<b>80</b>
<b>2.3. ESTADO DE LA CUESTIÓN</b>	<b>82</b>
2.3.1. LA BÚSQUEDA DE CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO SIN FLEXIÓN	82
2.3.2. EL MÉTODO DE DENSIDADES DE FUERZAS	87
2.3.3. EL MALLADO TOPOLÓGICO	93
2.3.4. CONSIDERACIÓN DEL PESO PROPIO EN EL FDM (FDM <sub>A</sub> )	99
2.3.5. ALGORITMOS DEL MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS CON MALLADO TOPOLÓGICO Y CONSIDERACIÓN DEL PESO PROPIO.	104
<b>2.4. INFLUENCIA DE LA DENSIDAD DE FUERZA EN LAS FORMAS DE EQUILIBRIO DE LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN.</b>	<b>107</b>
<b>2.5. HIPÓTESIS</b>	<b>110</b>
<b>2.6. MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA (MAC). DESCRIPCIÓN E IMPLEMENTACIÓN EN EL TM-FDM<sub>a</sub></b>	<b>112</b>
2.6.1. FORMULACIÓN DEL MAC	117
2.6.2. PROGRAMACIÓN DEL MAC EN ENTORNO MATLAB	121
<b>3. APLICACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO A CASOS PRÁCTICO</b>	<b>123</b>
<b>3.1. APLICACION A REDES ANTIFUNICULARES CERRADAS</b>	<b>123</b>
3.1.1. CÚPULAS DE BASE CIRCULAR	123
3.1.2. CÚPULAS CON VÉRTICE ABIERTO	128
3.1.3. CÚPULAS DE BASE CUADRADA	133
<b>3.2. APLICACION A REDES ANTIFUNICULARES ABIERTAS</b>	<b>139</b>
3.2.1. BÓVEDAS CON BASE TRAPEZOIDAL Y DIRECTRIZ OBLÍCUA	139
3.2.2. BÓVEDAS CON BASE Y DIRECTRIZ POLIGONAL	143
<b>3.3. APLICACION A CUBIERTAS COLGANTES PESADAS</b>	<b>147</b>
<b>3.4. APLICACIÓN A FORMAS COMPUESTAS</b>	<b>151</b>
<b>4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y COMPROBACIÓN DE HIPÓTESIS</b>	<b>159</b>
<b>5. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN</b>	<b>161</b>
5.1. CONCLUSIONES	161
5.2. FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN	164
<b>REFERENCIAS</b>	<b>166</b>
<b>ANEXO 1: ARTÍCULO Y COMUNICACIÓN GENERADA</b>	<b>173</b>



## RESUMEN

A diferencia de las estructuras tradicionales, en las que la disposición y dimensiones de los elementos son datos conocidos en la etapa de cálculo estructural, en las estructuras tensadas y antifuniculares, la geometría es otra incógnita más del problema. En estos casos es necesario calcular la forma geométrica que cumple con la ausencia completa de momentos flectores en toda la estructura: la configuración de equilibrio.

Este trabajo de investigación describe una nueva metodología para resolver un problema típico en el diseño de estructuras tensadas y antifuniculares: cómo obtener una configuración de equilibrio partiendo de condicionantes geométricos iniciales.

En los años 70 se introdujo el Método de Densidad de Fuerzas -FDM (Force Density Method) para la búsqueda de la configuración de equilibrio, método que hoy en día sigue utilizándose con éxito tanto en las estructuras tensadas como en las antifuniculares. Se introduce el concepto de densidad de fuerza definiéndolo como el cociente entre la tensión y la longitud de cada elemento o rama del mallado estructural. Para cada conjunto de densidades de fuerza escogido, el FDM permite plantear un sistema de ecuaciones cuya resolución aporta una configuración de equilibrio. De esta forma, el método no resulta directo sino que debe resolverse mediante iteraciones, ensayando con diferentes valores de densidades de fuerza hasta obtener la geometría deseada.

Este problema presenta aún mayor dificultad en las estructuras antifuniculares y en aquellas estructuras tensadas en las que es necesario considerar el peso propio. En estos casos el sistema de ecuaciones del FDM pierde su linealidad, lo que significa que, para determinadas elecciones de densidades de fuerza, no existirá una solución al problema.

En esta investigación, a través del que hemos denominado **Método de Aproximación Catenaria -MAC**, se ofrece una herramienta para la obtención de densidades de fuerza a partir de valores geométricos del diseño inicial.

El método consiste en aproximar las secciones transversales de las configuraciones de equilibrio a la forma de la catenaria. Al ser esta curva la solución de la configuración de equilibrio de un cable, es evidente que un mallado tridimensional de cables, como modelo adoptado para la estructura, adoptará secciones transversales próximas a la misma, y de manera análoga ocurrirá con estructuras sometidas a compresión simple en todos sus elementos. La ventaja de realizar esta aproximación, radica en que el problema de la catenaria fue resuelto en el siglo XVII, quedando completamente definida su ecuación matemática.

Partiendo de datos como la altura de una cúpula o de una bóveda antifunicular, o la flecha máxima de una cubierta colgante pesada, medidas en una sección transversal del diseño, es posible hallar la curva catenaria que aproxime estas formas geométricas. Posteriormente, tras un procedimiento de calibración en base a las características de los materiales y la estructura del mallado, se pueden obtener las densidades de fuerza de los elementos de dicha sección que proporcionan una configuración de equilibrio próxima al diseño inicial. De esta forma el cálculo de la forma de equilibrio resulta directo y de menor complejidad.



## ABSTRACT

Different from traditional structures, in which element's disposition and measurements are known data in the period of structural calculation, in tension and antifunicular structures, geometry is another unknown of the problem. In these cases, it is necessary to calculate the geometrical form which fulfil with the complete lack of bending moment is the whole structure: the equilibrium state.

This investigation project describes a new methodology to solve a common problem in tension and antifunicular structures: how to obtain an equilibrium state based on geometrical initial determinants.

In the 70s, the Force Density Method (FDM) was introduced in order to search the equilibrium state, method which is still successfully used as much in tension structures as in antifunicular ones nowadays. The force density concept was introduced defined as the quotient of the tension and the large of each element or branch of structural mash. For each group chosen of force densities, the FDM allow for stating a system of equations of which solution provide us with an equilibrium configuration. Like this, the method does not result direct but it must be solved by replays, testing with different force density values until the geometry wanted is obtained.

This problem presents even more difficulty in antifunicular structures and in those tension structures in which it is necessary to consider the own weight. In these cases, the system of equations of the FDM loses its linearity, what means that a solution to the problem will not exist to certain choices of force density.

In this investigation, through which we have named Catenary approximation method MAC (Método de Aproximación Catenaria), a tool for obtaining density values based on geometrical values of the initial design is offered.

The method consists in approximate the transverse sections of the equilibrium configuration to the catenary shape. As this curve is the solution of the equilibrium configuration of a cable, it is evident that a three-dimensional mash of cables, as a method adopted for the structure, will adopt transverse sections near to the same, and similarly it will occur with the structures subdued to a simple compression in all of its elements. The advantage of doing this approximation, resides in the fact that the catenary problem was solved in the 17th century, remaining completely defined its mathematic equation.

From data as the height of antifunicular domes or vaults, or the maximum sag of a heavy hanging roofs, measure in the design's transverse section, it is possible to find the catenary curve which approximates these geometrical shapes. Subsequently, after a calibration process based on the material's characteristics and the mash's structure, the force densities of the elements of that section which provide an equilibrium configuration near to the initial design can be obtained. Like this, the calculation of the equilibrium form results direct and less complicated.





## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: Esquema general de la optimización estructural	22
Figura 1.2: Tienda tuareg.	39
Figura 1.3: Jaima beduina	40
Figura 1.4: Yurt	40
Figura 1.5: Tipi	40
Figura 1.6: Izquierda: Representación del coliseo Romano donde se puede apreciar su Velarium. Óleo de Gêrome. 1859. Derecha: Proceso de levantamiento del Velarium en dos partes concebido por Carpicezi. Imagen tomada de Tan A.H y Tan F.H. (2015)[84].	41
Figura 1.7: Arriba: Imagen del montaje de la Gran Carpa del Circo Colle Bross en el año 1937. Abajo: Imagen actual de uno de los Chapiteau del Cirque du Soleil.	41
Figura 1.8: Izquierda: Sidney Meyer Music Bowl, de Barry Patten, 1959. Derecha: Pabellón de Alemania en la Exposición Universal de 1967. Gutbrod, Otto y Leonhard. Montreal.	42
Figura 1.9: Estadio Olímpico de Múnich proyectado por Behnisch, Otto y Leonhardt.	42
Figura 1.10: Cúpulas geodésicas Eden Project, Diseño de N. Grimshaw. Cornwall (Inglaterra) .	43
Figura 1.11: Estadio Allianz Arena. Proyecto de Herzog y de Meuron. Munich (Alemania).	43
Figura 1.12: Auditorio Campo de Marte. Tarragona (España)	44
Figura 1.13: Milenium Dome, Londres (Reino Unido).	44
Figura 1.14: Cubierta plegable del Estadio Nacional de Varsovia (Polonia).	45
Figura 1.15: Cubierta del Intercambiador Modal de Las Palmas (España).	45
Figura 1.16: Estructura neumática sinclástica: Modern Teahouse. Frankfurt/Main (Alemania). 2007	46
Figura 1.17: Formas simples anticlásticas más comunes: Conoide asimétrico de revolución, paraboloides, hiperboloides y paraboloides hiperbólicos.	46
Figura 1.18: Catenoide de revolución	47
Figura 1.19: Estructuras tensadas con forma simple: Conoide asimétrico invertido. Circuito internacional de F1 de Shanghai.	47
Figura 1.20: Estructura tensada con forma compuesta: La Tanzbrunnen o fuente de la danza de Frei Otto para la exposición federal de jardinería de Colonia (Alemania)	47
Figura 1.21: Carpa de circo "Chapiteau" de finales del siglo XIX.	48
Figura 1.22: Palacio de Tuwaiq. Frei Otto y Buro Happold. Riyadh (Saudi Arabia). 1985	48
Figura 1.23: Disposición en fachada: Hotel Burj Al Arab. Dubai (United arab emirates)	48
Figura 1.24: Disposición en cubierta: Piscina Olímpica de Munich (Alemania). 1972	49
Figura 1.25: Disposición en cerramiento y cubierta. Gran Carpa Blanca de Cavalia.	49
Figura 1.26: Disposición en interior. Dynamic Earth Centre. Holyroad Park, Edinburgo, Escocia (R. Unido)	50
Figura 1.27: Estructura del PES-PVC	51
Figura 1.28: Estructura de la fibra de vidrio recubierta de PTFE	51
Figura 1.29: Estructura soportada por aire: Cubierta del Tokio Dome. Bunkyô - Tokio (Japón)	53
Figura 1.30: Estación de tren de Yujiapu (China), formada por elementos hinchados de ETFE.	53
Figura 1.31: Cubierta de membranas suspendidas por malla de cables. Nowicki y Deitrick. Carolina N. (EEUU)	54



Figura 1.32: Velódromo de Londres para las olimpiadas de 2012. Hopkins architects. Londres (Reino Unido)	
Malla de cables cerrada (elíptica) con doble curvatura que sustenta los paneles. _____	55
Figura 1.33: Cilindro de Montevideo (Uruguay). 1957. L.I. Viera _____	56
Figura 1.34: Estadio Municipal de Braga (Portugal). 2003. E.S. de Moura _____	57
Figura 1.35: Soluciones remitidas por Leibniz y Huygens a J. Bernouille _____	59
Figura 1.36: Esquema de fuerzas que actúan sobre una porción AB de la catenaria de longitud $s$ , masa $m_{AB}$ y peso específico $\lambda$ . _____	59
Figura 1.37: Diferencia entre la curva parabólica y la catenaria _____	62
Figura 1.38: Aproximación de las curvas funiculares a la curva catenaria _____	62
Figura 1.39: Esquema de fuerzas actuantes en cada masa concentrada de una curva funicular _____	63
Figura 1.40: Arcos antifuniculares y sus curvas funiculares equivalentes _____	65
Figura 1.41: Idea de Gregory de que un arco cualquiera se sostiene si contiene un arco catenario en su interior _____	66
Figura 1.42: Palacio de Ctesifonte o Taq-i Kisra _____	67
Figura 1.43: Mezquita de la Roca. Jerusalén. _____	68
Figura 1.44: Casas Musgum en Camerún _____	68
Figura 1.45: Hangar del Aeropuerto de Orly de hormigón pretensado. Eugène Freyssinet 1916 . París (Francia) _____	69
Figura 1.46: Maqueta funicular de Gaudí expuesta en el Centre Reus (Tarragona) _____	70
Figura 1.47: Arcos catenarios en el Convento de las Teresianas (izquierda), Casa Batlló (centro) y La Pedrera (derecha) _____	71
Figura 1.48: Semejanza entre los hiperboloides del pórtico de la Casa Batlló y los huesos de una mano. _____	71
Figura 1.49: Forma de paraboloides hiperbólicos de la Cripta de la Colonia Güell. Gaudí. Barcelona (España) _____	72
Figura 1.50: Forma de hiperboloides de revolución de una hoja en la Sagrada Familia. Gaudí . Barcelona _____	72
Figura 1.51: Estación de Metro de City Hall ("La catedral subterránea"). Guastavino. Nueva York (EE.UU.) _____	73
Figura 1.52: Gateway Arch. San Luis – Missouri (EEUU) _____	73
Figura 1.53: Pabellón de rayos cósmicos. 1951. F. Candela y Jorge González. La Muela (Zaragoza) _____	74
Figura 1.54: Viviendas ultrabaratadas. 1953. R. de la Hoz y J.M. Paredes Villaviciosa de Córdoba (Córdoba). _____	74
Figura 1.55. Club Tachira. E. Torroja y F. Vivas. Caracas (Venezuela) _____	74
Figura 1.56. Izquierda: Garden Center Wyss de Heinz Isler. 1961. Zuchwil (Suiza). Derecha: Modelo colgante de Isler antes y después de solidificarse. _____	75
Figura 1.57. Estructura temporal Multihalle, Frei Otto. Mannheim (Alemania ) _____	75
Figura 1.58: Galería BCE Place. Toronto (Canadá) _____	76
Figura 2.1: Metodología de investigación. _____	77
Figura 2.2: Esquema del proceso iterativo de diseño de estructuras sin flexión. _____	78
Figura 2.3: Diferentes configuraciones de equilibrio de elementos 2D y 3D para unas mismas condiciones de contorno. _____	82
Figura 2.4: Caso planteado por Veenendaal y Block para comparar los rendimientos de los diferentes métodos de form-finding _____	85
Figura 2.5: Tiempo de computarización de los resultados arrojados por diferentes métodos form-finding obtenidos por Veenendaal y Block considerando diferentes grados de libertad. _____	85
Figura 2.6: Obtención de la Matriz de Conectividad "C". Siendo $n$ el número total de nodos y $r$ el número total de ramas _____	87



Figura 2.7: Ejemplo de estructura nodos-conexiones con tres nodos fijos (1,2 y 4) y un nodo móvil (3). Vista en planta. _____	89
Figura 2.8: Configuración de equilibrio de la estructura ejemplo para una matriz de densidad. Vista isométrica _____	91
Figura 2.9: Esquema de INPUTS - OUTPUTS del FDM _____	93
Figura 2.10: Proyección de una forma helicoidal. El mallado de la proyección no permite obtener la forma final. _____	94
Figura 2.11: Ejemplo de red cerrada y su mallado topológico. _____	95
Figura 2.12: Ejemplo de red abierta y proceso su mallado topológico _____	95
Figura 2.13: Malla topológica tipo A. Número de Nodos en cada paso para redes abiertas y cerradas. _____	96
Figura 2.14: Malla topológica tipo B Número de Nodos en cada paso para redes abiertas y cerradas. _____	97
Figura 2.15: Malla topológica tipo B Número de Nodos en cada paso para redes abiertas y cerradas. _____	97
Figura 2.16: Ejemplo de supresión de nodo inicial en red cerrada _____	98
Figura 2.17: Redes combinadas Formación de figuras compuestas a partir de formas simples.. _____	98
Figura 2.18: Mallado de un paraboloide hiperbólico combinando redes tipo A y B. Esquema, vista en planta y perspectiva. _____	99
Figura 2.19: Ejemplo de mallado y esquema vectorial para cálculo de la superficie de un triángulo ijk. _____	100
Figura 2.20: Superficie que corresponde al peso propio del un nudo conectado a tres nodos. _____	101
Figura 2.21: Representación de la función lineal y la no lineal que componen la ecuación de equilibrio del ejemplo representado en la figura 2.20 _____	102
Figura 2.22: Análisis de la solucionabilidad del problema bi-nodal y unidimensional sin y con la consideración del peso propio _____	103
Figura 2.23: Esquema de INPUTS - OUTPUTS en el TM-FDM <sub>A</sub> _____	103
Figura 2.24: Diagrama de flujo para el cálculo iterativo del programa Gaudi. _____	105
Figura 2.25: Interfaz de introducción de datos del programa Gaudi e interfaz gráfica de salida _____	106
Figura 2.26: Símil de una estructura simple de tres nodos fijos y uno libre con un sistema de muelles y bolas _____	107
Figura 2.27: Pérdida del paralelismo de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza radiales _____	108
Figura 2.28: Cambio de altura de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza anulares. _____	108
Figura 2.29: Cambio de altura de la cúpula con la modificación de las densidades de fuerza. _____	109
Figura 2.30: Descripción de los pasos a seguir para la aplicación del MAC ilustrados a través de un sencillo ejemplo. _____	111
Figura 2.31: Identificación de curvas funiculares en cúpulas y bóvedas (mallas cerradas y abiertas) _____	112
Figura 2.32: Configuración de equilibrio tipo cúpula obtenida adoptando las densidades de fuerza homogéneas en todas las ramas anuales y en todas las ramas radiales _____	113
Figura 2.33: Aproximación de la curva catenaria a la sección de la cúpula representada en la figura 2.32. Valores de q expresados en kN/m <sup>3</sup> _____	114
Figura 2.34: Configuración de equilibrio tipo cúpula obtenida adoptando las densidades de fuerza en los anillos con un crecimiento ponderado. _____	114
Figura 2.35: Aproximación de la curva catenaria a la sección de la cúpula representada en la figura 2.34 _____	115
Figura 2.36: Configuración de equilibrio tipo cúpula obtenida adoptando las densidades de fuerza en los anillos con un crecimiento de tipo exponencial. _____	115
Figura 2.37: Aproximación de la curva catenaria a la sección de la cúpula representada en la figura 2.36. Valores de q expresados en kN/m <sup>3</sup> _____	116



Figura 2.38: Obtención de la primera catenaria a partir de la sección funicular del ejemplo de la figura 2.32	117
Figura 2.39: Esquema de tensiones y datos geométricos para el primer tramo de la catenaria	118
Figura 3.1: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro y aplicando $q=8$ $\text{kN/m}^3$ en todas sus ramas.	123
Figura 3.2: Aproximación del MAC para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.1.	124
Figura 3.3: Segunda configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro calibrando el MAC a partir de la forma de figura 3.1.	125
Figura 3.4: Tercera configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro calibrando el MAC a partir de la forma de figura 3.2.	126
Figura 3.5: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro y aplicando $q=5$ $\text{kN/m}^3$ en ramas radiales y $q=2$ $\text{kN/m}^3$ en ramas anulares.	126
Figura 3.6: Aproximación del MAC para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5.	127
Figura 3.7: Cúpula del Panteón de Agripa. Año 126 d.C.	128
Figura 3.8: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de 40 metros de diámetro y sin nodo central, aplicando $q=8$ $\text{kN/m}^3$ en ramas radiales y $q=150$ $\text{kN/m}^3$ en ramas anulares.	129
Figura 3.9: Aproximación del MAC para una cúpula de base circular de 40 metros de diámetro y sin nodo central calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5.	130
Figura 3.10: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado, aplicando las densidades de fuerza y la topología que se indican.	133
Figura 3.11: Identificación de las curvas funiculares a aproximar mediante el MAC.	134
Figura 3.12: Esquema con identificación de tramos y anillos de una cúpula de base cuadrada	134
Figura 3.13: Aproximación del MAC para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.10.	135
Figura 3.14: Aproximación obtenida tras 5 iteraciones del MAC para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y 40 metros de altura, tomando la figura 3.10 como primera configuración de equilibrio.	136
Figura 3.15: Aproximación del MAC para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.13.	138
Figura 3.16: Primera configuración de equilibrio para una bóveda de base trapezoidal, con un mallado con 2 anillos y 75 nodos por anillo, aplicando las densidades de fuerza que se indican.	139
Figura 3.17: Aproximación del MAC aplicado al anillo 1 de una bóveda de base trapezoidal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.16.	140
Figura 3.18: Aproximación del MAC aplicado al anillo 2 de una bóveda de base trapezoidal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.16.	141
Figura 3.19: Aproximación obtenida tras 5 iteraciones del MAC para una bóveda de base trapezoidal y altura variable entre 4 y 8 metros, tomando la figura 3.16 como primera configuración de equilibrio.	142
Figura 3.20: Primera configuración de equilibrio para una bóveda de base trapezoidal y directriz poligonal, definida a través de un mallado con 5 anillos y 20 nodos por anillo, aplicando las densidades de fuerza que se indican.	143



Figura 3.21: Aproximación del MAC aplicado al anillo 1 de una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.20. _____	144
Figura 3.22: Aproximación del MAC aplicado al anillo 3 de una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.20. _____	145
Figura 3.23: Aproximación obtenida tras 4 iteraciones del MAC para una bóveda de base y directriz poligonal, tomando la figura 3.20 como primera configuración de equilibrio. _____	146
Figura 3.24: Primera configuración de equilibrio para cubierta colgante elíptica de 100 y 60 metros de longitud de ejes, aplicando las densidades de fuerza y el mallado que se indican. _____	147
Figura 3.25: Aproximación del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje focal de la configuración de equilibrio representada en la figura 3.24 _____	148
Figura 3.26: Aproximación del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje menor de la configuración de equilibrio representada en la figura 3.24 _____	149
Figura 3.27: Aproximación obtenida tras 4 iteraciones del MAC para un diseño de cubierta colgante de 20 metros de flecha máxima, partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.20 _____	150
Figura 3.28: Diseño general del Proyecto de Gran Estructura y esquema con identificación de bóvedas principales _____	151
Figura 3.29: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 1. _____	153
Figura 3.30: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 2. _____	154
Figura 3.31: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 3 _____	154
Figura 3.32: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 4 _____	155
Figura 3.33: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 5 _____	155
Figura 3.34: Primera configuración de equilibrio para la cúpula del Proyecto de Gran Estructura, aplicando las densidades de fuerza y la topología que se indican. _____	157
Figura 3.35: Configuración de equilibrio definitiva, ajustada al diseño del Proyecto de Gran Estructura. _____	158
Figura 5.1: Aplicación del MAC a una estructura a compresión de 2 plantas . Se indican en color negro aquellas secciones funiculares que tienen una mayor influencia en la estructura superior y en color rojo los arcos que tienen menor repercusión en esta. _____	164



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1: Principales ventajas y limitaciones de los métodos de búsqueda de configuraciones de equilibrio. _____	84
Tabla 3.1: Resultados obtenidos para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.1. _____	124
Tabla 3.2: Resultados obtenidos para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5. _____	127
Tabla 3.3: Resultados obtenidos para una cúpula de base circular de 40 metros de diámetro y sin nodo central, tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5. _____	129
Tabla 3.4: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cúpula de 40 metros de altura. El método es convergente y alcanza la solución tras la iteración 6. _____	130
Tabla 3.5: Variación del diámetro del óculo con las densidades de fuerza radiales, para una densidad de fuerza de las ramas anulares $q_{ANULARES} = 150 \text{ kN/m}^3$ _____	131
Tabla 3.6: Variación del diámetro del óculo con las densidades de fuerza anulares para una densidad de fuerza de las ramas radiales $q_{RADIALES} = 3,61 \text{ kN/m}^3$ _____	131
Tabla 3.7: Aplicación del procedimiento propuesto para cúpulas sin vértice central al objeto de cumplir una doble condición geométrica: altura de cúpula de 20 metros y diámetro de óculo de 9 metros, _____	132
Tabla 3.8: Resultados obtenidos para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y arcos torales, tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.10. _____	135
Tabla 3.9: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cúpula de 40 metros de altura. _____	136
Tabla 3.10: Variación de la altura total con la modificación de las densidades radiales y con la altura total de la cúpula, sin modificación de densidades de fuerza anulares (indicadas en la figura 3.10). _____	137
Tabla 3.11: Resultados obtenidos para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y arcos torales, tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.13. _____	137
Tabla 3.12: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cúpula de 40 metros de altura y arcos torales de 8 metros de altura. _____	138
Tabla 3.13: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base trapezoidal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.16., para diferentes alturas de diseño del anillo 1. _____	140
Tabla 3.14: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base trapezoidal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.16., para diferentes alturas de diseño del anillo 2. _____	141



Tabla 3.15: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de bóveda de altura variable entre 4 metros (anillo 1) y 8 metros (anillo 2), partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.16	142
Tabla 3.16: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.20, para diferentes alturas de diseño del anillo 1.	144
Tabla 3.17: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.20, para diferentes alturas de diseño del anillo 3.	145
Tabla 3.18: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de bóveda con directriz poligonal, partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.20	146
Tabla 3.19: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje focal de la configuración de equilibrio de la figura 3.24,	148
Tabla 3.20: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje menor de la configuración de equilibrio representada en la figura 3.24.	149
Tabla 3.21: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cubierta colgante de 20 metros de flecha máxima, partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.24	150
Tabla 3.22: Características geométricas de las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	151
Tabla 3.23: Coordenadas de los nodos fijos de las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	152
Tabla 3.24: INPUTS correspondientes a las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	152
Tabla 3.25: Alturas obtenidas tras primera aplicación del TM-FDM <sub>A</sub> para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	152
Tabla 3.26: Calibración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	152
Tabla 3.27: Densidades de fuerza obtenidas a través de la primera iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	153
Tabla 3.28: Aproximación obtenida en la primera iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	156
Tabla 3.29: Densidades de fuerza obtenidas tras la segunda iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	156
Tabla 3.30: Aproximación obtenida en la segunda iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura	156
Tabla 3.31: Resultados obtenidos de la aplicación iterativa del MAC para altura de cúpula del Proyecto de Gran Estructura.	157





## ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

- AESO** Optimización estructural evolucionaria aditiva (Additive Evolutionary Structural Optimization)
- BESO** Optimización estructural evolucionaria bidireccional (Bi-Directional Evolutionary Structural)
- CFS** Diseño totalmente tensionado y peso constante (Constant-weight Fully Stressed)
- DRM** Método de relajación dinámica (Dynamic Relaxation Method)
- ESO** Optimización estructural evolutiva (Evolutionary Structural Optimization)
- ETFE** Etileno-Tetra-Flúor-Etileno
- FDM** Método de densidades de fuerza (Form Density Method)
- FDM<sub>A</sub>** Método de densidades de fuerza con consideración del peso propio (Antifunicular Force Density Method)
- GSM** Método de rigidez geométrica (Geometric Stiffness Method)
- FSD** Diseño totalmente tensionado (Fully Stressed Design)
- GA** Algoritmos genéticos (Genetic Algorithm)
- GESO** Optimización estructural evolucionaria en grupo (Group Evolutionary Structural Optimization)
- GM** Método de la rejilla (Grid Method)
- GP** Programación genética (Genetic Programming)
- HK** Optimización estructural evolucionaria aditiva (Hard-Kill method)
- ICC** Método de creación inteligente de cavidades (Intelligent Cavity Creation)
- MAC** Método de Aproximación Catenaria
- MDFN** Método de las Densidades de Fuerza Natural
- MDMN** Método de desplazamientos no Lineal (Matrix Displacement Method Nonlinear)
- MEF** Método de Elementos Finitos
- MESO** Optimización estructural evolucionaria morfológica (Morphing Evolution Structural Optimization)
- MFDF** Método de densidades de fuerza de pasos múltiples con corrección de fuerza (Multi-step Force Density Method with Force adjustment)
- MFDS** Método de Densidad de Fuerza de pasos múltiples con corrección de tensión (Multi-step Force–Density method with Stress adjustment)
- NN** Redes neuronales (Neural Networks)
- PBOC** Criterios de optimalidad basados en la eficiencia (Performance Based Optimality Criteria)
- PSO** Optimización por enjambre de partículas (Particle Swarms Optimization)
- PSS** Método de partículas-muelles (Particle-Spring Systems)
- PTFE** Poli-TetraFluoroEtileno





---

<b>PVC</b>	Poli-Cloruro de Vinilo
<b>PVDF</b>	Poli-Fluoruro de Vinili-Deno
<b>RA</b>	Adaptatividad inversa (Reverse Adaptivity)
<b>SA</b>	Método de solidificación simulada (Simulated Annealing)
<b>SIMP</b>	Modelo de microestructuras sólidas isotrópicas con penalización (Sólid Isotropic Microstructure With Penalization)
<b>SMM</b>	Método de rigidez transitoria (Stiffness Matrix Method)
<b>TM</b>	Mallado Topológico (Topological Mapping)
<b>TNA</b>	Análisis de redes de empujes (Thrust Network Analysis).
<b>URS<sub>HM</sub></b>	Estrategia de actualización de referencias con mapeado homotópico (Updated Reference Strategy with Homotopy Mapping)
<b>VCFS</b>	Diseño totalmente tensionado, peso constante y elementos de dimensión Variable (Variable element dimension Constant-weight Fully Stressed)



## 1. INTRODUCCIÓN

Para ofrecer una perspectiva amplia del campo de aplicación de este trabajo de investigación, se analizarán previamente algunos aspectos claves.

En primer lugar se abordará el campo de la **Optimización Estructural**. Esta investigación ofrece un procedimiento específico para obtener formas estructurales óptimas, por lo que es importante conocer los aspectos comunes y diferenciales de las técnicas de optimización existentes, así como su encuadre en este marco general.

La optimización estructural puede perseguir diversos objetivos atendiendo a las necesidades del proyecto, aunque el fin último consistirá, sencillamente, en la obtención de una solución que ofrezca mejores prestaciones con el mínimo de recursos. Entre los objetivos más comunes, generalmente relacionados con un menor coste, caben destacar la obtención de un menor peso, de una superficie mínima, de un menor nivel de deformaciones o de un estado tensional puro de tracción o compresión para un mayor aprovechamiento de materiales. Este último es el caso de las estructuras sometidas a tracción o a compresión pura y está íntimamente relacionado con el "form-finding" o búsqueda de configuraciones de equilibrio.

Cabe preguntarse por qué un estado tensional sin flexión mejora el diseño del proyecto. La explicación es sencilla. Si se pretende un aprovechamiento óptimo del material, esto sólo se consigue, cuando todas las secciones están sometidas a una tensión máxima en todos sus puntos. Pero, dada la homogeneidad de los materiales que componen la estructura, este máximo aprovechamiento sólo es posible en la práctica con tensiones constantes en todas las secciones.

Se debe entender por estructuras sin flexión aquel sistema de elementos vinculados entre si capaz de alcanzar una posición de equilibrio mediante el exclusivo desarrollo de esfuerzos axiales a lo largo de sus elementos, gracias a la adaptación de su forma. El término engloba dos tipologías estructurales muy diferentes como son las tenso-estructuras y los diseños antifuniculares.

Los métodos de búsqueda de formas estructurales sin flexión pueden considerarse, bien como una evolución del diseño que permite obtener mejores resultados (optimización estructural), o bien como una técnica de obligada aplicación en el diseño de determinadas construcciones. Este es el caso de las estructuras tensadas en las que el empleo de determinados materiales como tejidos, membranas o cables, impide la existencia de flexión o compresión, pasando a ser el form-finding un requisito indispensable en su cálculo.

La optimización del diseño también resulta imprescindible con el empleo de materiales que poseen una baja resistencia a tracción. Es cierto que en la actualidad, especialmente en los países más desarrollados, han dejado de emplearse como elementos estructurales materiales como la piedra o el hormigón en masa, pero no hay que olvidar la gran ventaja que ofrecen: su



elevada durabilidad. Sin duda en las últimas décadas el uso generalizado del acero, tanto en perfiles como en las armaduras interiores, ha permitido ejecutar construcciones cada vez más impactantes y de mayor economía. Sin embargo ninguna construcción actual prevé una vida útil comparable con la de las clásicas construcciones griegas y romanas. El empleo de hormigones de alta durabilidad hace aún más interesante el diseño de estructuras de vida útil muy superior a las construcciones contemporáneas.

Por otra parte, se abordará el campo de las tenso-estructuras o **Estructuras Tensadas**, prestando especial atención a las diferentes tipologías. Resulta tan variada la familia de las tenso-estructuras que es importante distinguir los diferentes casos y comportamientos. Todas ellas comparten la particularidad, frente a las estructuras convencionales, de no tener una forma predefinida sino que esta depende de su estado tensional. Los métodos de cálculo de configuraciones de equilibrio surgieron para resolver este problema y proporcionan una herramienta muy eficaz y directa en la mayor parte de los casos. Pero para ciertos tipos de estructuras tensadas, es necesario considerar el peso propio en el cálculo de su forma de equilibrio y esto constituye un serio inconveniente al convertirse en un problema no lineal. El método MAC que se propone en este trabajo de investigación, simplifica el procedimiento de obtención de configuraciones de equilibrio cuando hay que enfrentarse a sistemas no lineales.

Otro concepto que es necesario abordar para el desarrollo de esta investigación es el de **La Curva Catenaria** y su resolución matemática, así como su método de inversión que deriva en **El Arco Catenario**. Las ecuaciones de la curva catenaria resuelven el problema bidimensional de la configuración de equilibrio por lo que puede convertirse en una herramienta útil para simplificar el problema tridimensional.

Por último, es importante realizar una introducción a las **Estructuras Antifuniculares** por ser el campo de mayor aplicación del MAC. Siendo una tipología estructural con características tan diferentes a las estructuras tensadas, plantea el mismo problema para la definición de su forma.

El análisis de estos aspectos permitirá comprender el objetivo de este trabajo de investigación y servirá de punto de partida para establecer una metodología apropiada.



## 1.1. LA OPTIMIZACIÓN DE ESTRUCTURAS

La búsqueda de una forma geométrica con ausencia de momentos flectores es una modalidad más de lo que se conoce como "optimización estructural". Ésta es, en términos generales, una técnica destinada a obtener un menor coste o un mejor comportamiento estructural a través de la modificación de la forma, de las propiedades, o de la topología de una estructura.

Un problema de optimización consiste en calcular el valor de ciertas variables de diseño que, cumpliendo con determinados requisitos o restricciones, proporcionen el mejor valor para una función que mide el rendimiento de nuestro diseño (menor coste, o mejor comportamiento).

Existen, por lo tanto, tres aspectos fundamentales a considerar en la optimización de estructuras: las variables de diseño, los criterios de evaluación y las restricciones a imponer.

### 1.1.1. VARIABLES DE DISEÑO

Las variables de diseño son las magnitudes que intervienen en un diseño y que pueden ser modificadas por el proyectista en el procedimiento de optimización. Los métodos de optimización generalmente utilizan variables continuas, quedando la utilización de variables discretas limitada a métodos poco extendidos.

Como ya se ha indicado, se distinguen tres tipos de variables:

- **La forma o geometría:** dimensiones generales de la estructura.
- **Propiedades de los elementos** que constituyen la estructura (módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson, etc), o de las secciones de los elementos (área, momentos de inercia y de torsión, etc).
- **Topología de la estructura:** conexiones entre los elementos.

Al espacio  $n$ -dimensional definido por el vector formado por todas las variables se le denomina *espacio de diseño*. Un conjunto de variables de diseño define un punto en el espacio de diseño.

Las variables de diseño utilizadas más habitualmente son la topología y, sobre todo, las propiedades del material y de las secciones de las piezas. Este último caso es el más sencillo y extendido de optimización estructural. Concretamente, en estructuras continuas, la propiedad de la sección que se utiliza más frecuentemente es el espesor de los elementos.

### 1.1.2. FUNCION OBJETIVO O CRITERIO DE VALORACIÓN

El planteamiento de cualquier método de optimización necesita la elección de un criterio con el que valorar el diseño, de forma que sea posible elegir cuál es el diseño que resulta más favorable (menor coste, mejor comportamiento, etc). En ocasiones, es posible establecer este criterio



mediante la formulación matemática, de forma que la solución óptima coincida con el máximo o el mínimo de una función objetivo. El método se resuelve entonces como un problema de maximización o minimización de funciones.

En la mayoría de los casos se trata de una función escalar, que depende de las variables del diseño. Tradicionalmente se ha empleado la masa de la pieza como criterio de valoración, ya que la masa estructural está directamente relacionada con el coste total de la misma. Cuanto menos material se utilice en el diseño, más económica será la fabricación de la pieza. No obstante, esta afirmación no es del todo correcta, ya que existen otros factores como la mano de obra, el tiempo de fabricación o la energía consumida en la producción, que pueden llegar a ser decisivos a la hora de evaluar la rentabilidad del diseño. También es importante valorar el comportamiento estructural (tensiones, deformaciones, rigidez, etc) a la hora de elegir la configuración óptima.

Por este motivo, actualmente se utilizan multitud de criterios de valoración como el coste anual, beneficio anual neto, tasa coste-beneficio, fiabilidad estructural, frecuencias naturales, tensión máxima, desplazamientos en puntos críticos, rigidez de la estructura, etc.

La linealidad o no de la función objetivo es otro de los aspectos importantes a tener en cuenta y es importante revelar que el problema más general es un problema no lineal.

---

### 1.1.3. RESTRICCIONES

El diseño de una estructura está sujeto a unos condicionantes, que limitan la elección del mismo. No sería válida la elección de un diseño si éste no cumple dichos condicionantes. Esto obliga a descomponer el problema de optimización en subproblemas separados, en los que se les exige a las variables tener un valor concreto en determinados puntos, o mantenerse dentro de unos límites de admisibilidad.

Las restricciones definen hipersuperficies que acotan un entorno en el espacio de diseño. Si un punto del espacio de diseño es tal que se cumplen todas las restricciones, ese punto es un *diseño válido* o *factible*; si, por el contrario, viola alguna restricción, se dice que el punto corresponde a un *diseño no válido* o *no factible*. Según los condicionantes afecten directamente a las variables o a magnitudes que dependan a su vez de las variables, se trata de restricciones explícitas o implícitas.

Por otra parte, se distingue entre restricciones de igualdad y de desigualdad. Las primeras son las que fijan el comportamiento de la estructura (condiciones de equilibrio, compatibilidad, ley de comportamiento del material, etc.) o las establecen relaciones entre las variables del diseño (condiciones de simetría, tangencia, curvatura, etc.). Las restricciones de desigualdad establecen limitaciones a la respuesta del elemento estructural (tensiones, desplazamientos máximos, frecuencias de vibración, etc), o delimitan el rango de valores que adquieren las variables.

Una vez establecido el esquema general de la optimización estructural (figura 1.1), es posible a partir del mismo clasificar los principales métodos de optimización en función de las variables, criterios y restricciones utilizadas. Cada método responde a una o varias tipologías señaladas en dicho esquema.

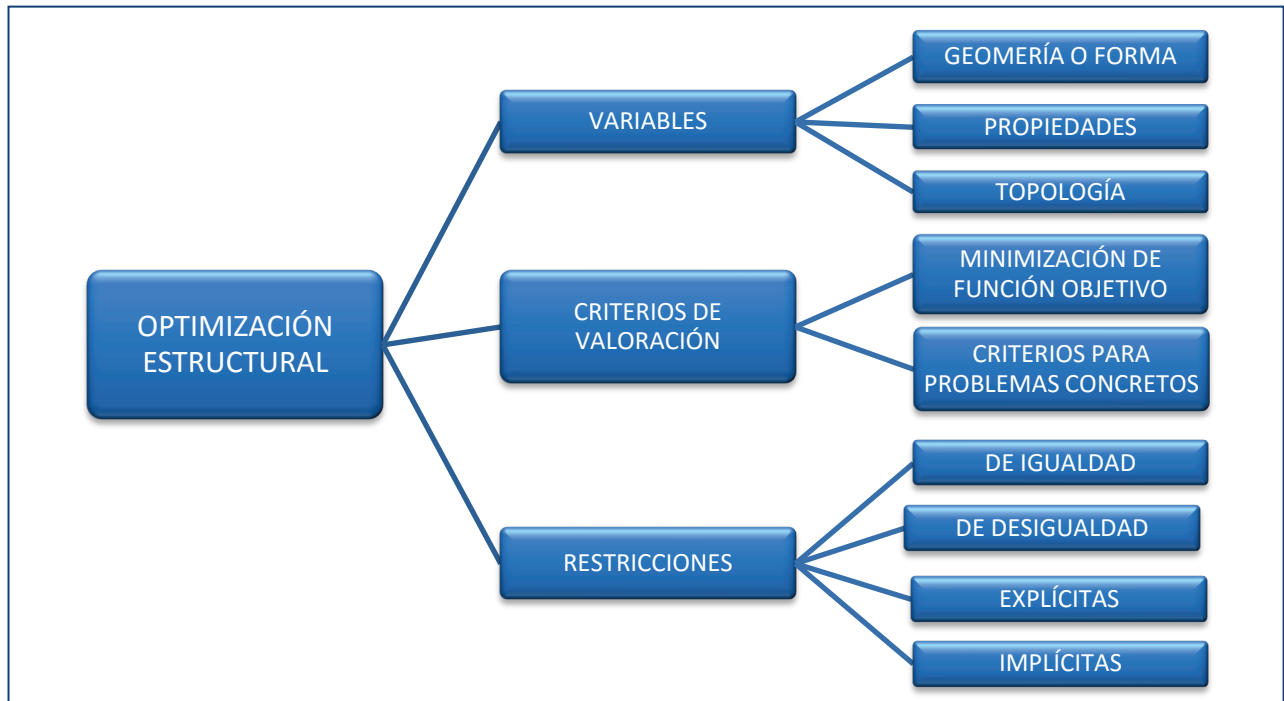


Figura 1.1: Esquema general de la optimización estructural

#### 1.1.4. MÉTODOS DE OPTIMIZACIÓN. ESTADO DEL ARTE

La Optimización Estructural es una idea revolucionaria que surge a mediados del siglo XX, aunque anteriormente existen algunos trabajos que pueden considerarse preliminares. Es el caso del estudio de la forma óptima de una viga en voladizo con una carga puntual en su extremo libre, realizado por Galilei en 1638 [26] y el de la optimización de forma de un voladizo planteada por Michell en 1904 [59].

Obviando estos antecedentes, hay que esperar hasta los años 50 para que se produzca un desarrollo de métodos de optimización de forma sistemática.

Caben distinguir dos vías de desarrollo de la optimización estructural:

- Técnicas de programación matemática
- Métodos de optimización por criterios

Ambas técnicas han coexistido y coexisten debido a las limitaciones que presentan cada una de ellas. Las Técnicas de programación matemática son capaces de resolver problemas generales de optimización aunque se encuentran muy limitadas ante las características de la función objetivo, existiendo multitud de casos en los que no es posible calcular la solución. En cambio, los métodos de optimización por criterios son mucho más eficientes, aunque cada método sólo es



capaz de resolver un determinado tipo de problema, estando su aplicación limitada a casos concretos. A continuación se presenta el estado del arte de ambas tendencias.

#### **1.1.4.1. TÉCNICAS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA**

---

Las técnicas de programación matemática consisten en aplicar métodos numéricos de minimización (o maximización) de funciones objetivo, sujetas o no a unas restricciones, siendo las características particulares del problema las que condicionan el método numérico más apropiado.

Es importante indicar que la programación matemática tiene numerosas aplicaciones además de la optimización estructural. Es frecuente plantear la resolución de problemas de optimización en el transporte, de economía y producción, de optimización de dietas alimentarias, de educación, etc. Resulta tan abundante la bibliografía al respecto que, para no extender demasiado esta introducción, conviene ceñirse al ámbito de la optimización de estructuras.

En la mayoría de las aplicaciones para el diseño óptimo de estructuras la función objetivo consiste en minimizar la masa de la misma, y las restricciones que se le imponen suelen consistir en limitaciones de tensión, de pandeo, o de desplazamientos en puntos específicos de la estructura.

En función de las características de las variables, puede distinguirse entre programación continua, cuando las variables pueden adoptar cualquier valor, programación entera, cuando las variables pueden adoptar únicamente valores enteros, y programación discreta, cuando las variables pueden adoptar valores enteros o no, dentro de una gama predefinida.

Otra clasificación se puede realizar atendiendo a la linealidad o no linealidad de las funciones. Si la función objetivo y todas las restricciones son funciones lineales, el problema es de programación lineal, en caso de que la función objetivo o alguna de las restricciones no lo fuera, el problema es de programación no lineal.

Pero, sin duda, la clasificación más reciente de las técnicas de programación matemática es la que distingue entre los métodos exactos o tradicionales y los métodos heurísticos.

##### **1.1.4.1.1. MÉTODOS EXACTOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA**

Son los métodos de programación matemática empleados tradicionalmente. Existen diferentes líneas de investigación atendiendo a las características de la función objetivo y de las restricciones:

- Programación lineal
- Programación lineal entera y entera-mixta
- Programación no lineal
- Programación dinámica



El primero en plantear el problema general de optimización estructural en términos de la minimización de una función objetivo fue Klein en el año 1955 [44]. Klein realizó una formulación generalizada del problema, programación no lineal, a la que tan sólo faltaba la posibilidad de optimizar un diseño estructural considerando diversas hipótesis de carga.

Lamentablemente, en el momento en que Klein publicó esta formulación generalizada, no habían surgido aún las técnicas de programación matemática no lineal, por lo que el problema debía de abordarse mediante los métodos básicos basados en la resolución de problemas de minimización con restricciones de igualdad mediante técnicas basadas en los multiplicadores de Lagrange.

Otros autores como Pearson en 1958 [68] complementaron el trabajo de Klein introduciendo ideas de gran importancia como es la conversión del problema con restricciones de desigualdad en uno o más problemas equivalentes sin restricciones, y la reducción de la dimensión del problema por medio de cambios de variables.

El desarrollo de los computadores y del método de los elementos finitos (MEF) a principios de la década de los 60, hizo posible el nacimiento de la optimización estructural como hoy se la conoce. En 1960 Schmit [81] fue el primero en combinar el MEF con la programación matemática no lineal. A partir del trabajo desarrollado por Schmit, comenzaron a aparecer programas informáticos que ponían en práctica esta integración del MEF en la programación matemática. Entre estos trabajos caben destacar los programas realizados por Gallagher, Gellatly y Lubracki en 1964 [27] o por Tocher y Karnes en 1971 [86].

A partir del desarrollo de estos programas, se comprendieron las desventajas de esta técnica, principalmente, la gran cantidad de tiempo y recursos que requería la resolución de problemas reales, incluso los más sencillos. Aún cuando se logró aumentar la eficiencia de los programas de elementos finitos, los métodos de programación matemática resultaban ineficientes debido a la gran cantidad de variables de diseño y de restricciones de desigualdad. Es por esto que se desarrollaron de forma paralela otras técnicas alternativas como el método de programación lineal secuencial, introducido por Smith y Woodhead en 1974, que contribuyen a acelerar notablemente la velocidad de convergencia.

No obstante, la programación matemática exacta sigue planteando dificultades para realizar la optimización simultánea de las variables de diseño debido a la elevada alinealidad de estas y sus restricciones. En ocasiones no existe solución para el problema matemático o bien el tiempo necesario para obtener la solución del problema resulta prohibitivo. Es por ello que, en los últimos años, estas técnicas han perdido peso frente a los métodos heurísticos y los ciertos métodos de optimización por criterios.

#### **1.1.4.1.2. MÉTODOS HEURÍSTICOS**

El reciente desarrollo de estos métodos está unido a la evolución de la inteligencia artificial. Se basan en considerar de forma simultánea varias soluciones en vez de trabajar secuencialmente





como en los métodos exactos, por lo que existe menor sensibilidad a los óptimos locales. Esto permite trabajar con la función de aptitud, no siendo necesario calcular la función derivada. Permiten construir algoritmos sencillos y fáciles de implementar en máquinas que trabajen en paralelo. Aunque no garantizan que se obtenga siempre una solución, permiten obtener resultados aceptables, con un coste computacional muy competitivo.

El uso de los métodos heurísticos están especialmente indicado en problemas de optimización no lineal, aunque pueden utilizarse para la resolución de todo tipo de problemas de programación matemática e incluso de optimización por criterios.

Las técnicas heurísticas incluyen multitud de algoritmos entre los que cabe destacar:

- Algoritmos genéticos
- Programación genética
- Optimización por enjambre de partículas
- Solidificación simulada
- Redes Neuronales.

Los **Algoritmos Genéticos GA** (Genetic Algorithm) se basan en las teorías de selección natural de Darwin. Son técnicas de programación que imitan la evolución biológica para la resolución de problemas. Se generan soluciones potenciales, generalmente de forma aleatoria, para ser evaluadas mediante una función de aptitud. Estas soluciones candidatas se codifican de forma que puedan ser procesadas por una computadora. Las candidatas que peor resultados arrojen serán eliminadas, pero el resto se conservarán. A partir de este primer grupo de candidatas, se introducen cambios aleatorios a modo de descendencia digital, formando un nuevo grupo de candidatas que serán nuevamente evaluadas y se eliminarán aquellas que no hayan mejorado. Este proceso se repite hasta conseguir buenas soluciones al problema.

Los AGs nacen a partir de las Estrategias Evolutivas y de la Programación Evolucionaria. Las primeras, desarrolladas por Rechenberg en 1965 [74], partían de una población de dos individuos, un padre e hijo, siendo éste una versión mutada del padre y era eliminado si no era mejor que aquel. Posteriormente se incorporaron poblaciones de más individuos y cruces entre ellos. En cuanto a los Programas Evolutivos, propuestos por Fogel, Owens y Walsh en 1966 [24], sólo utilizan mutaciones aleatorias para producir variaciones, usando una selección estocástica frente a la selección determinista de las Estrategias Evolutivas.

El término Algoritmo Genético se debe a Bagley en 1967 [2], aunque fue John Holland quien se considera el creador de estos a través de su trabajo sobre sistemas adaptativos del año 1962 [35]. Holland estableció las bases de los AGs y fue el primero en establecer explícitamente el cruzamiento y otras formas de recombinación. Otros autores como K.A. de Jong, en 1975 [20], mostraron que los AGs podían desenvolverse bien en una gran variedad de funciones de prueba, incluyendo las discontinuas, ruidosas y las multimodales.



A partir de estos trabajos fundacionales y hasta nuestros días, numerosos investigadores han aplicado y desarrollado los AGs en diversos campos como la economía, ecología, aprendizaje, sistemas inmunes, sociedad o la optimización.

Existen tres cuestiones básicas a la hora de definir un GA: la representación, el método de selección y el método de cambio.

La representación consiste en utilizar una técnica para codificar las soluciones potenciales de forma que la computadora pueda manejarlas. Las técnicas de codificación más empleadas suelen ser las secuencias de números binarios, de números enteros o de números decimales y de cadenas de letras. Cada letra o número representa siempre un aspecto específico de la solución. Cada uno de estos tres métodos facilitan la definición de operadores que generan los cambios aleatorios en las soluciones potenciales.

Existen multitud de métodos de selección de aquellos individuos que deben evolucionar hacia la siguiente generación. Entre ellos caben destacar:

- Selección elitista, en la que se escogen a los miembros más aptos.
- Selección proporcional a la aptitud, en la que los miembros más aptos tienen mayor probabilidad de ser seleccionados.
- Selección por torneo, en la que se eligen aleatoriamente diferentes subgrupos de población que compiten entre ellos.
- Selección por rango, en el que se le asigna un rango numérico basado en su aptitud a cada individuo y la selección se realiza en base a este ranking.
- Selección por rueda de ruleta, en la que la probabilidad de ser seleccionado es proporcional a la diferencia entre su aptitud y la de sus competidores.
- Selección escalada, en la que, al incrementarse la aptitud media de la población, la fuerza de la presión selectiva también aumenta y la función de aptitud se hace más discriminadora
- Selección jerárquica, en la que los individuos atraviesan múltiples rondas de selección en cada generación, siendo las evaluaciones de los primeros niveles más rápidas y menos discriminatorias.

Algunos de estos métodos se aplican en exclusividad mientras que otros pueden usarse en combinación con otros métodos.

Con respecto a los métodos de cambio, existen dos técnicas básicas para alterar aleatoriamente a la población al objeto de mejorarla: la mutación y el cruzamiento. La primera consiste en realizar pequeñas alteraciones en puntos concretos del código del individuo. Es importante no abusar de la mutación y realizar únicamente pequeñas alteraciones para que el algoritmo genético no se convierta únicamente en una búsqueda aleatoria. El cruzamiento implica elegir a dos individuos para intercambiar segmentos de su código, de forma que la "descendencia" es una combinación



del código de sus padres. En función del porcentaje de intercambio, se habla de cruzamiento uniforme o del cruzamiento en un punto.

La principal ventaja de los AGs radica en su paralelismo, es decir, es posible explorar soluciones en varias direcciones al mismo tiempo, permitiendo resolver problemas no lineales. En cambio, la limitación más importante de los AGs radica en la codificación o representación. Como ya se ha indicado, esta codificación puede realizarse de diferentes maneras, utilizando cadenas de números (binarios, enteros o reales) o letras. Pero si, como ejemplo, se emplea código binario, los 0s o 1s indicarán la ausencia o presencia de cierta característica que podrá ser alterada por mutación o cruzamiento aunque, independientemente de su valor, esta posición siempre hará referencia a dicha característica. Es decir, independientemente del código de representación elegido, habrá que establecer un código del programa que no es posible alterar, por lo que este código puede no representar fielmente a la realidad.

La es una evolución de los algoritmos genéticos introducida por Cramer en 1985 [17] y posteriormente desarrollada por Koza en 1992 y 1994 [46, 47]. En la GP cada individuo de la población es un programa ejecutable y sobre todos ellos se aplican las técnicas de selección, cruce y mutación utilizados en los GAs. De esta forma, a diferencia de lo que ocurre con los GAs, es posible cambiar el código de programación al que se hacía alusión en el párrafo anterior. Otra peculiaridad de la GP radica en que la codificación se organiza en forma de árbol sintáctico.

La **Optimización por Enjambre de Partículas PSO** (Particle Swarms Optimization) está inspirado en la inteligencia social de algunas especies naturales (colonias de abejas, termitas, aves, etc.) que, siguiendo unas reglas simples, presentan una conducta inteligente, capaz de resolver problemas complejos (búsqueda de alimentos, construcción de los nidos, alimentación de las crías, distribución del trabajo entre individuos, etc.)

Este método fue propuesto originalmente por Kennedy y Eberhart en 1995 [40] y modificado por Yuhui Shi y Eberhart en 1998 [94]. En el campo de las estructuras, fue utilizado inicialmente por Fourie y Groenwold en el año 2000 [25] para el diseño óptimo de forma y topología.

La **Solidificación Simulada SA** (Simulated Annealing), también denominada agregación simulada o recocido simulado, es otro procedimiento de optimización global inspirado, en este caso, en el recocido del acero u otros materiales sólidos. El proceso de calentar un material como el acero hasta fundirlo, para posteriormente modificar su forma y dejarlo enfriar lentamente, permite obtener configuraciones con un nivel de energía inferior al inicial. La SA busca el paralelismo existente entre minimizar una función objetivo y obtener una disminución de energía mediante el proceso de solidificación.

Se trata de un procedimiento iterativo en el que probabilísticamente se evalúa la opción de permanecer en un estado concreto, definido a través de la posición de todos los átomos, o de modificar la posición de algún átomo, por lo que se adoptaría un estado "vecino". La comparación de estados vecinos se repite hasta alcanzar un estado óptimo.



El método SA fue introducido por Metropolis, Rosenbluth, Teller et al. en 1953 [58], si bien la aplicación de la técnica a problemas de optimización parte de Kirkpatrick, Gellat y Vecchi en el año 1983 [43]

Las **Redes Neuronales NN** (Neural Networks) tratan de imitar la estructura de los sistemas nerviosos biológicos. De esta forma se trata de conseguir que las computadoras sean capaces de aprender a partir de sus experiencias en lugar de repetir indefinidamente un conjunto de instrucciones programadas. Están por tanto indicadas para la resolución de problemas complejos. Entre las aplicaciones más comunes se encuentran el reconocimiento de patrones, la predicción del tiempo, descifrado, mapeo, control de robots, etc. Como ejemplo, una red neuronal permite a una computadora reconocer un conjunto de caracteres escritos a mano tras realizar un entrenamiento previo.

El primer modelo matemático de red neuronal fue propuesto por McCulloch y Pitts en 1943 [57] aplicado al estudio de la actividad nerviosa. En 1958, Rosenblatt [80] desarrolló el Perceptrón simple, un algoritmo de redes neuronales destinado al reconocimiento de caracteres impresos. Pero este algoritmo no era capaz de resolver problemas relativamente fáciles, tales como el aprendizaje de una función no-lineal. Esta limitación no se superó hasta los años 80.

En 1960, Widrow y Hoff [91] desarrollaron el ADALINE, que fue la primera aplicación industrial real, destinada al filtrado de señales..

En 1986, Rumelhart et al. [77] desarrollaron un método que tenía por objetivo lograr que una red neuronal aprendiera la asociación que existe entre los patrones de entrada que ingresan a la misma y las clases correspondientes, utilizando más niveles de neuronas de los que empleó Rosenblatt en su Perceptrón. Desarrollaron lo que se conoce como algoritmo de aprendizaje de propagación hacia atrás (backpropagation).

A partir de 1986, el desarrollo de investigaciones relacionadas con redes neuronales ha sido impactante. En la actualidad, son numerosos los trabajos que se realizan y publican cada año, así como las empresas que lanzan al mercado productos nuevos, tanto de hardware como de software.

#### 1.1.4.2. OPTIMIZACIÓN POR CRITERIOS

---

A diferencia de la programación matemática, la optimización por criterios no trata de minimizar una función sino de establecer una condición o criterio específico. El criterio utilizado puede ser intuitivo o puede deducirse matemáticamente de las características particulares del problema.

Entre los principales métodos de optimización por criterios pueden destacarse:

- Criterios de Optimalidad
- Métodos de Distribución de Material
- Métodos Evolucionarios



- Modelos Biológicos
- Métodos de Diseño de Estructuras sin Flexión

#### 1.1.4.2.1. CRITERIOS DE OPTIMALIDAD

Los criterios de optimalidad consisten en solucionar problemas concretos aplicando criterios de optimización que son comúnmente admitidos como válidos.

Algunos de estos criterios tienen un sentido claramente físico, como ocurre en el **Diseño Totalmente Tensionado FSD** (Fully Stressed Design). Este método establece la condición de que cada elemento de la estructura soporte una tensión límite bajo, al menos, una de las hipótesis de cargas. Numerosos autores entre los que destacan Gellatly y Berke [28] desarrollaron esta rama de la optimización estructural.

Para una estructura sometida a un único estado de cargas el método FS ofrece la solución de mínima relación masa/resistencia, pero no puede asegurarse la convergencia a la masa mínima cuando se consideran diferentes estados de carga. Esto se debe a que posiblemente se obtendrá un diseño FS diferente para diferentes hipótesis de carga, por lo que se podrá obtener una solución óptima en ciertos casos, pero también se podrían dar soluciones diferentes a la óptima o incluso no encontrarse una solución para otros casos.

Otros autores como Hinton y Sienz en 1995 [34] desarrollaron el FSD proponiendo un algoritmo que incorpora un criterio de convergencia. Mediante este algoritmo, una vez analizada la estructura mediante el Método de los Elementos Finitos MEF, se ordenan los elementos atendiendo a su nivel de tensión y se eliminan aquellos elementos para los que la tensión resulta inferior a un valor de corte establecido. Llegado a este punto, si el criterio de convergencia (fracción de volumen) se satisface, se concluye el algoritmo y en caso contrario se incrementa el valor de corte y se vuelve a analizar la estructura, repitiendo el proceso.

Posteriormente han aparecido diferentes metodologías que intentan mejorar la eficiencia del procedimiento de Hinton. Este es el caso del **CFS** (*Constant-weight Fully Stressed*) y del **VCFS** (*Variable element dimension Constant-weight Fully Stressed*) propuestos por Lin y Chao en 2001 [51], y del **PBOC** (*Performance Based Optimality Criteria*) desarrollados por Liang y Steven en 2002 [50].

#### 1.1.4.2.2. MÉTODOS DE DISTRIBUCIÓN DE MATERIAL

Son métodos muy utilizados en el marco de la optimización topológica. El objetivo es encontrar el diseño de estructura de menor peso y/o máxima rigidez (mínima energía de deformación). Para ello se utilizan dos técnicas diferentes:



- **Modelos de homogenización**

La homogenización consiste en dividir la estructura en multitud de elementos y posteriormente se determina la microestructura de cada uno de ellos. Es decir, se simplifica la estructura formada por multitud elementos repetitivos en una o varias dimensiones, considerando que está formada por un material continuo con las propiedades elásticas y geométricas de la celda unitaria. Se intenta obtener informaciones macroscópicas en función de informaciones microscópicas. Estas microestructuras o celdas, presentan una forma y un hueco en su interior previamente definidos, utilizándose habitualmente microestructuras cuadradas, hexagonales y triangulares.

De esta forma se obtienen diseños con gran cantidad de áreas porosas, lo cual no resulta práctico en la mayoría de los casos.

Este método fue propuesto inicialmente por Murat y Tartar [62] en 1985, realizando una primera formulación básica. Posteriormente, en 1986, autores como Lurie y Cherkaev [53] y Kohn y Strang [45] profundizaron en la técnica y plantearon las dificultades que presenta en determinados casos los modelos "hole-in-cell": disposiciones en damero, dependencia de la malla, etc. Posteriormente, entre los numerosos autores que han publicado trabajos relacionados con estos modelos, hay que destacar la labor de Bendsoe y Kikuchi en 1988 [9], probando la eficiencia numérica del método y aplicando de forma práctica esta teoría. De forma paralela, ha aparecido numerosas aplicaciones prácticas que utilizan estos modelos de material.

- **Modelos de densidades relativas:**

Para solucionar los inconvenientes que plantean los modelos de homogenización, surgieron otros métodos basados en considerar un material ficticio, con una densidad que varía para cada elemento. El que más relevancia ha adquirido es el modelo **SIMP** (Sólido Isotropic Microstructure With Penalization), propuesto por Bendsoe en 1995 [8].

La función objetivo que se minimiza en este caso es la energía de deformación y la variable de diseño empleada es la densidad relativa, que adopta valores comprendidos entre "0" (ausencia de material) y "1" (material completamente sólido).

Inicialmente no se planteó la interpretación física del problema, sino que se atendió únicamente a la formulación matemática. Pero posteriormente, en 1999, Bendsoe y Sigmund [10] demostraron que este modelo correspondía a una microestructura real de material, un material compuesto con partes huecas y partes sólidas definidas, para unos valores del factor de penalización y del módulo de Poisson adecuados.

Frente a los métodos de homogenización, la formulación SIMP resulta más sencilla de implementar en programas informáticos. Sin embargo, se producen sistemáticamente



inestabilidades numéricas que impiden la convergencia del método dando lugar a configuraciones en damero de carácter oscilante o a estructuras con porosidad excesiva, lo que no resulta práctico. Por todo, en la formulación matemática del modelo, se utiliza un factor "p" permite penalizar las zonas de estructura con densidades intermedias y, también, estabilizar la solución. Por último, al resultado final se le suele aplicar un filtrado de imagen que favorezca su interpretación.

#### 1.1.4.2.3. MÉTODOS EVOLUCIONARIOS

La **Optimización Estructural Evolutiva ESO** (Evolutionary Structural Optimization), también denominado por algunos autores como Hard-Kill method (HK), es una técnica aplicable tanto a la forma como a la topología. Propuesta inicialmente por 1993 por Xie y Steven [92] el método plantea eliminar de forma progresiva el material menos eficiente de la estructura.

Se toma como criterio de diseño un valor mínimo de la tensión de comparación de Von Mises, de forma que se eliminan todos aquellos elementos de la estructura que no superen dicho valor de referencia. Posteriormente se incrementa este límite hasta obtener la solución deseada, compuesta por elementos que soportan esta tensión final establecida. La formulación del método presenta las siguientes fases:

1.- Se establece un valor límite para la tensión de Von Mises " $\sigma_{lim}^{VM}$ " y un índice de rechazo inicial " $RR_0$ " con un valor comprendido entre 0 y 1, de forma que se eliminan todos aquellos elementos "i" de la estructura cuya tensión de Von Mises " $\sigma_i^{VM}$ " no cumpla esta condición:

$$\sigma_i^{VM} \geq R_0 \cdot \sigma_{lim}^{VM} \quad (1.1)$$

2.- Se fija un ratio de Evolución "E" (habitualmente un 1%) y para cada iteración "j" se calcula un nuevo índice de rechazo " $R_j$ " actualizado:

$$R_{j+1} = R_j \cdot E \quad j = 0,1,2,3, \dots \quad (1.2)$$

3.- Se repiten los pasos anteriores, utilizando en la ecuación (1.1) el índice de rechazo actualizado  $R_j$ . De esta forma se van eliminando lentamente los elementos que no alcanzan la tensión mínima establecida hasta obtener una estructura optimizada.

No obstante, esta primera formulación ESO presenta ciertas limitaciones, como la imposibilidad de añadir elementos en aquellas regiones de la estructura donde son convenientes. Esto lleva a que las estructuras obtenidas utilizando esta formulación convencional presentan exceso de material, resultando una técnica ciertamente conservadora.

En el año 2000, Querin Steven y Xien [70] proponen una transformación del algoritmo ESO, permitiendo incorporar nuevos elementos a la estructuras, en aquellas zonas donde resultan necesarios. De esta forma nace la **Optimización Estructural Evolucionaria Aditiva AESO** (Additive Evolutionary Structural Optimization).





En la nueva formulación AESO se parte de un diseño de mínimos elementos estructurales y se define un ratio de inclusión " $I_j$ " que permite incorporar nuevos elementos que cumplan con la condición:

$$\sigma_i^{VM} \geq I_j \cdot \sigma_{lim}^{VM} \quad (1.3)$$

Tanto en el método ESO como en el AESO se establece un criterio de parada fijando un valor  $R_{min}$ .

Ambos métodos presentan una buena aproximación a la estructura óptima, pero resultan procedimientos iterativos lentos y con un importante coste computacional cuando se utiliza una malla densa o elementos tridimensionales. Para mejorar la eficacia y la eficiencia de estos procedimientos, surge la **Optimización Estructural Evolucionaria Bidireccional BESO** (Bi-Directional Evolutionary Structural), permitiendo eliminar o añadir elementos a la estructura en el proceso iterativo. Este nuevo algoritmo, presentado por Querin, Young, Steven y Xie en el año 2000 [71], mantiene las ventajas de los métodos anteriores, pero alcanzando la solución óptima de forma más rápida. Esto es especialmente cierto para estructuras 3D, ya que permite partir de una sencilla estructura inicial, en lugar de contraer una enorme geometría donde alrededor de un 90% del material se elimina mediante muchos cientos ciclos evolutivos de análisis de elementos finitos.

En cada iteración del algoritmo BESO, se eliminan los elementos que satisfacen la inecuación 1.1 y se añaden los elementos que cumplen la inecuación 1.3 hasta que se llega a un estado de oscilación en el cual, grupos de elementos son eliminados y reintroducidos en la siguiente.

Otra de las limitaciones de los métodos evolucionarios clásicos reside en que no es posible optimizar el espesor de los elementos. Es decir, los elementos pueden aparecer o desaparecer en las el proceso de cálculo iterativo, pero no pueden modificar sus características. Para mejorar este aspecto, Querin, Steven y Xie proponen en 1999 [72] una variación de los métodos evolutivos denominada **Optimización Estructural Evolucionaria Morfológica MESO** (Morphing Evolution Structural Optimization). La Optimización Morfológica, sencillamente, permite la posibilidad de eliminar o añadir el elemento gradualmente y no en una forma binaria como en los métodos anteriores.

En esta última línea, Lencus, Querin Steven y Xie introducen en el año 2002 [48] la **Optimización Estructural Evolucionaria en Grupo GESO** (Group Evolutionary Structural), que permite obtener configuraciones y espesores óptimos. Se trata de un método más avanzado que, para mejorar la eficiencia del algoritmo, trabaja con "grupos de elementos" o "super-elementos", que pueden representar componentes reales o piezas completas de la estructura.

Dentro de los métodos evolutivos, también es importante considerar la técnica de inclusión de cavidades. El **Método de Creación Ingeligente de Cavidades ICC** (Intelligent Cavity Creation), propuesto por Kim, Querin, Steven y Xie en el año 2000, permite controlar el número de cavidades en el proceso de optimización ESO. Es decir, obtiene la estructura óptima, para un número





concreto de cavidades establecido. Además, con este algoritmo se evita la formación de patrones de tablero de ajedrez y se generan topologías más prácticas.

En 1999 Reynolds, McConnachie, Bettess, Christie, y Bull proponen la **Adaptatividad Inversa RA** (Reverse Adaptivity) como método evolutivo de optimización topológica.

A diferencia de los métodos evolutivos convencionales, la RA no elimina directamente los elementos de menor tensión, sino que estos son eliminados tras un segundo análisis más refinado. En una primera etapa, se seleccionan los elementos que son candidatos a la eliminación, ordenando estos según el valor de su tensión y subdividiendo aquellos elementos cuya tensión no supera un valor de referencia. Después de este remallado de la estructura, se lleva a cabo un segundo análisis con el fin de obtener las tensiones en los elementos subdivididos. En una segunda etapa, a partir de este segundo análisis de tensiones, se identifican nuevamente los elementos de menor tensión y se eliminan.

Con la RA se obtienen diseños con detalles extremadamente bien definidos y se evitan los problemas más habituales que se dan en la mayoría de los métodos evolutivos. Sin embargo, el método presenta un elevado coste computacional asociado al proceso de remallado.

#### 1.1.4.2.4. MODELOS BIOLÓGICOS

En 1990, Mattheck [54] propone optimizar estructuras a partir de la simulación del crecimiento de plantas y animales. Las estructuras biológicas tratan de evitar los picos de esfuerzos, por lo que cabe pensar que es posible optimizar las estructuras adoptando el criterio de distribuir los esfuerzos de forma constante.

Otros autores como Querin y Lencus en 1998 [69] desarrollaron esta metodología, optimizando frente a estados de carga múltiples.

#### 1.1.4.2.5. MÉTODOS DE DISEÑO DE ESTRUCTURAS TENSADAS Y ANTIFUNICULARES

Muy pocos autores encuadran los métodos de diseño de estructuras libres de flexión como una técnica más de optimización estructural, pero es evidente que lo son y es indiscutible su relevancia en el campo de la ingeniería y de la arquitectura contemporánea.

Son métodos de optimización de forma, que adoptan como criterio de diseño óptimo aquel en el que la estructura se encuentra en equilibrio de fuerzas uniaxiales, bajo un estado de cargas y unas condiciones de contorno determinadas. Aunque en ocasiones se utilizan técnicas de programación matemática no lineal para la resolución del problema de búsqueda de la forma, teniendo en cuenta que se trata del cumplimiento de una condición y no de la minimización de una función objetivo, habría que incluir estos métodos entre los de optimización por criterios.



Maxwell en 1890 [56] fue el primero en plantear las ventajas de una estructura en la que todos sus elementos se encuentran sometidos a esfuerzos de tracción o compresión. En la búsqueda de una estructura estricta, definida como aquella en la todas las secciones están sometidas a la máxima tensión compatible con la seguridad, Maxwell sugirió que las piezas sometidas a flexión, es decir, con tensiones variables en la sección, no encajaban en este modelo de esfuerzos límites. Sin embargo, con tensiones uniformes en la sección si es posible conseguir una estructura estricta, asociada a un menor coste.

Maxwell concluyó que el mínimo absoluto de material para una posición de cargas y reacciones dada, es para aquella estructura en la que todas sus barras trabajan solamente a tracción o solamente a compresión. Además, indicó que este volumen mínimo  $V_{min}$  es igual a la constante de Maxwell  $K$ , definida como la suma algebraica de los esfuerzos de cada barra por cada una de sus longitudes, dividida por la tensión de trabajo  $\sigma$ .

$$V_{min} = \frac{K}{\sigma} \quad (1.4)$$

Lamentablemente, la teoría de Maxwell no fue valorada convenientemente en su época, en la que la investigación estructural se centraba en la Resistencia de Materiales. Tan sólo algunos autores como Michell, en 1904 [59], comprendieron el alcance de su razonamiento y profundizaron en el mismo.

A principios de siglo XX, Antoni Gaudí ponía en práctica esta idea a través de la búsqueda de la forma óptima utilizando la técnica funicular. Como bien es conocido, esta técnica consistía en invertir las cargas de gravedad para pasar de una estructura de tracción pura a otra de compresión pura. La determinación de la configuración de equilibrio podía resolverse siguiendo la vía experimental, con la utilización de modelos físicos, o bien por la vía teórica, con modelos gráficos o analíticos. Pero, en la práctica, hasta la aparición de computadoras capaces de llevar a cabo análisis numéricos de forma rápida, esta última vía sólo era aplicable a estructuras bidimensionales. Gaudí, con sus maquetas colgantes a escala, encontró la forma de obtener configuraciones de equilibrio para estructuras tridimensionales complejas.

En los años 50, Heinz Isler introduce la técnica de rigidizar el modelo suspendido antes de su inversión, obteniendo formas para láminas de hormigón armado.

A partir de mediados de siglo XX, con el nuevo auge de las tensoestructuras, aparecen diferentes técnicas para resolver el problema de búsqueda de la forma en equilibrio (form-finding). Se empieza a distinguir dos fases en el proceso de cálculo de las estructuras tensadas y de compresión: la fase de diseño o búsqueda de forma en equilibrio bajo un estado de cargas concreto y la fase de análisis estructural ante las diferentes hipótesis de cargas.

En 1962 Siev y Eidelmann [82] proponen el **Método de la Rejilla GM** (Grid Method) para resolver el problema de equilibrio inicial en una red de cables. Este método establece una condición de ortogonalidad sobre la solución, de forma que las ecuaciones de equilibrio son lineales. Se asume



como restricción geométrica la ortogonalidad de la proyección horizontal de la red de cables, lo que implica que, adoptando un valor fijo para las componentes horizontales de las fuerzas de tensado, la única incógnita del problema es la altura de los nodos libres. Resulta así un método muy sencillo y práctico para la resolución de problemas de equilibrio, sin embargo, debido a las restricciones impuestas, las formas resultantes son muy limitadas.

En 1965 Day [19] introdujo el **Método de Relajación Dinámica DRM** (Dynamic Relaxation Method) para el análisis de estructuras tensadas utilizando técnicas de análisis dinámico. Otros autores como Barnes en 1977, 1988 y 1999 [4, 5, 6], Wakefield en 1980 [89] y Lewis en 2003 [49], defendieron y perfeccionaron este método que funciona muy bien para grandes desplazamientos y ante casos con no linealidades muy fuertes.

El Método de Relajación Dinámica se basa en estudiar el movimiento de cada nodo de la estructura para pequeños incrementos del tiempo. Se discretiza la geometría de forma que se considera concentrada la masa en los nodos. Partiendo de una posición de equilibrio, se estudia la oscilación de los nodos por la aplicación de las fuerzas externas hasta llegar a la configuración final. Para obtener la posición final de los nodos es preciso resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones de segundo orden:

$$F = M \cdot \ddot{x} + C \cdot \dot{x} + K \cdot x \quad (1.5)$$

Siendo  $F$  el vector fuerza exterior nodal,  $M$  la matriz de masa o de inercia,  $C$  la matriz de amortiguamiento y  $K$  la matriz de rigidez y  $x$  el vector desplazamiento del nodo. Conociendo el desplazamiento, la velocidad y la aceleración inicial, se calcula el desplazamiento para  $n$  subintervalos de tiempo  $\Delta t = T/n$ .

En diciembre de 2013 Serguei Bagrianski y Halpern [3] han adaptado este método para su utilización en estructuras de compresión. A través de un procedimiento iterativo el método permite obtener configuraciones de equilibrio que cumplen con determinados requisitos geométricos del proyecto.

En enero de 1974, Argyris, Angelopoulos y Bichat [1] proponen resolver el equilibrio de estructuras tensadas empleando análisis matricial de estructuras. Es lo que se conoce como **Método de desplazamientos o de matriz de rigidez no lineal MDMN** (Matrix Displacement Method Nonlinear), también conocido como **Método de rigidez transitoria SMM** (Stiffness Matrix Method).

Como en el método anterior, se realiza una discretización del problema en un entramado de elementos aunque, en este caso, el procedimiento de cálculo es iterativo. Partiendo de la formulación matricial clásica representada en la ecuación 1.6, se calculan la deformación de cada elemento  $\Delta L_i$ . Posteriormente, conociendo las características de cada elemento (módulo de elasticidad  $E_i$ , Área de la sección  $S_i$  y longitud  $L_i$ ), se obtienen las fuerzas que actúan sobre los mismos a través de la ecuación 1.7.

$$F = K \cdot x \quad (1.6)$$



$$F_i = \frac{\Delta L_i \cdot E_i \cdot S_i}{L_i} \quad (1.7)$$

En esta misma fecha, enero de 1974, Schek propone el **Método de densidades de fuerza FDM** (Force Density Method) para la obtención de configuraciones de equilibrio de estructuras tensadas, técnica que fue introducida originariamente por Linkwitz y Schek, en 1971 [52], en el contexto de las estructuras de cables. En relación al FDM, resulta muy interesante el trabajo realizado por Gründig, Moncrieff, Singer y Ströbel en el año 2000 [30], que describe detalladamente el desarrollo histórico FDM y las técnicas para la búsqueda de forma analítica de las estructuras ligeras desde 1970 hasta el año 1999. El artículo presta especial atención a los trabajos de cálculo de mallas de cable, membranas y construcciones neumáticamente pretensadas realizados en la Universidad de Stuttgart, en la Universidad Técnica de Berlín y en la empresa de software especializada TechNet GmbH9.

En el apartado 2.1.2 se tratará en profundidad el FDM al ser de especial interés para esta tesis, por lo que a continuación se procederá a realizar una breve exposición del mismo y de sus variantes.

El FDM permite obtener una configuración de equilibrio a través de la resolución de un sistema lineal de ecuaciones. Para ello tan sólo es necesario definir una red de nodos conexiones, contemplar las cargas exteriores que actúan sobre los nodos y establecer para cada conexión un parámetro denominado densidad de fuerza, definido como tensión por unidad de longitud. El método representa una alternativa eficaz que evita los problemas asociados al análisis no lineal y mejora las soluciones que ofrece el GM, por lo que ha tenido gran repercusión en la búsqueda de formas sin flexión

Desde 1974 hasta la actualidad, han surgido diversas **variantes del FDM** que han mejorado la técnica extendiendo su campo de aplicación. Es el caso del conocido como Método de rigidez geométrica GSM (Geometric Stiffness Method) propuesto por Haber y Abel en 1982 [31, 32] y que extiende el método a uno más general donde la directriz de las conexiones es curva, extendiendo su aplicación a las membranas tensadas. Posteriormente, en 2004, el francés Nouri-Baranger estudia en profundidad el GSM analizando la respuesta dinámica de estructuras tensadas, así como la sensibilidad de su comportamiento en función de las variaciones de temperatura, la acción del viento, lluvia, etc.

Otra de las ventajas que plantea el FDM, además de la sencillez de su planteamiento matemático, es que resulta de aplicación tanto para estructuras sometidas tracción como a compresión simple. En 1984 Mollaert [60], fue el primero en aplicar el FDM a estructuras compuestas tanto por cables como por elementos rígidos trabajando a compresión. Más adelante, en 1997, Nicolas Vassart [87] introdujo el uso de FDM en la búsqueda de formas de equilibrio de estructuras "tensegrity", con elementos trabajando en tensión y elementos en compresión simple.



En el campo de las membranas tensadas, el FDM ha sido adaptado por diversos autores para considerar elementos superficiales en lugar del mallado original o para mejorar los resultados obtenidos. Surgen así diferentes variantes del FDM como el Método de densidad de tensión superficial SSDM (Surface Stress Density Method), propuesto por Bernard Maurin y René Motro en 1999 [55] para el cálculo de elementos superficiales triangulares. También en 1999 los alemanes Bletzinger y Ramm [12], desarrollan una Estrategia de actualización de referencias con mapeado homotópico  $URS_{HM}$  (Updated Reference Strategy with Homotopy Mapping) que mejora la convergencia del FDM. Desde la Universidad de Navarra, Javier Sánchez, Miguel Ángel Serna y Paz Morer, en 2005 [78], proponen dos procedimientos iterativo basado en el FDM, para obtener una mejor distribución de tensiones en membranas tensadas. Estas adaptaciones del FDM han sido denominadas Método de densidades de fuerza de pasos múltiples con corrección de fuerza MFDF (Multi-step Force Density Method with Force adjustment) y Método de densidades de fuerza de pasos múltiples con corrección de tensión MFDS (Multi-step Force–Density method with Stress adjustment). Otra variante del FDM es el Método de las Densidades de Fuerza Natural MDFN, introducida por Pauletti en el año 2006 [67] y permite el uso de mallas irregulares, típicas del modelado de membranas en forma libre. Como contrapartida, todas estas variantes del FDM comparten la pérdida de linealidad, por lo que requieren un procedimiento iterativo.

En el año 2005, Axel Kilian y John Ochsendorf [41] proponen un interesante método de obtención de configuraciones de equilibrio al que denominan **Método de partículas-muelles PSS** (Particle-Spring Systems). Este método permite al diseñador comenzar con una forma definida para buscar una forma más eficiente minimizando los esfuerzos de flexión. Se basa en establecer un modelo de masas conectadas por muelles elásticos a los que se asigna una rigidez axial constante, una longitud inicial y un coeficiente de amortiguamiento. Para obtener la forma de equilibrio se pueden utilizar diversas técnicas de análisis numérico iterativas como los métodos Runge-Kutta de resolución de ecuaciones diferenciales.

En el año 2007, Philippe Block y John Ochsendorf [88] proponen un nuevo método para obtención de configuraciones de equilibrio de superficies sometidas a compresión simple al que denominan **Análisis de redes de empujes TNA** (Thrust Network Analysis). El TNA se basa en la técnica descrita por Dermot O'Dwyer en 1999 [63] para el cálculo de bóvedas funiculares y consiste en una adaptación tridimensional del clásico método de cálculo de arcos mediante la línea de empujes, cuya primera formulación corresponde a Moseley en el año 1835 [61]. Presenta la ventaja frente al FDM de manejar tensiones en lugar de densidades de fuerza, cuyo sentido físico es más complejo.

Cabe preguntarse cuál de estos métodos resulta más ventajoso en su aplicación, pero no existe una respuesta fácil a esta pregunta. En el apartado 2.1. se justificará la elección del método de búsqueda de la forma para el desarrollo de este trabajo de investigación, analizando en profundidad las ventajas a las limitaciones de estos métodos. No obstante, esta elección estará



condicionada por los criterios subjetivos o preferencias del proyectista, así como de las particularidades del problema concreto a resolver.

Se puede concluir que el método empleado carece de importancia, siempre y cuando se asegure la convergencia hacia una configuración estable, en equilibrio.

Por otra parte, algunos autores como R. Jurado-Piña y M. A. Salazar-Troya (2014) [38], proponen la utilización combinada de varios métodos. Plantean un primer cálculo de la configuración de equilibrio empleando el FDM y tras una transformación de la red nodos conexiones al modelo de membrana del SMM proponen un segundo cálculo utilizando esta última técnica. Esta combinación de métodos resulta muy interesante pues permite salvar sus limitaciones y aprovechar las ventajas que ofrece cada uno.



## 1.2. ESTRUCTURAS TENSADAS

Las estructuras tensadas también conocidas como estructuras flexibles o tenso-estructuras, son ampliamente utilizadas hoy en día dentro del campo que denominamos Arquitectura textil o, de una forma más apropiada, a través del término anglosajón equivalente tensile architecture.

Dentro de esta gran familia se engloban multitud de estructuras, tales como: las mallas de cables, las membranas tensadas y las estructuras neumáticas y son conocidas por la simplicidad de sus elementos, así como por su fácil ensamblaje, mínimo consumo de materiales, mínimo desperdicio y eficiencia energética. Todos estos Aspectos les permiten sobrepasar a cualquier otro sistema estructural en términos de ligereza y capacidad para cubrir grandes luces.

Con formas atractivas, vistas sin obstáculos, e interiores iluminados, estas estructuras constituyen generalmente notables manifestaciones arquitectónicas de gran impacto visual y belleza.

### 1.2.1. BREVE HISTORIA DE LA ARQUITECTURA TEXTIL

Los orígenes de esta tipología constructiva se remontan a la historia de los pueblos trashumantes, a través de las construcciones ligeras realizadas con cueros tensados y materiales textiles. Incluso en la prehistoria, existen claros indicios de que los neandertales utilizaban las pieles de los mamut para construir cabañas rudimentarias. Estos indicios se apoyan en descubrimientos como los en restos hallados en Ucrania, de una construcción circular levantada por neandertales, con una antigüedad de 44.000 años, compuestas por huesos de mamut y recubierta de pieles y otros materiales ligeros ( Demay, L., Péan, S. y Patou-Mathis, M., 2012).

El fácil y rápido montaje, desmontaje y el transporte de las cabañas fabricadas con pieles de animales tensadas, permitió resguardarse de la climatología a los primeros pueblos transhumantes. En la arquitectura vernácula, basada en los conocimientos empíricos adquiridos a lo largo de generaciones, ha estado siempre presente este tipo de construcciones y perdura hoy en día en culturas nómadas africanas como la Tuareg (Figura 1.2. )



Figura 1.2: Tienda tuareg.

Otros ejemplos de pueblos nómadas que han utilizado durante cientos de años este tipo de construcciones, son los beduinos (figura 1.3), originarios de la península arábiga, y los Kazaja asentados en Kazajstan, que viven en "Yurts" (figura 1.4). Las Jaimas beduinas constan de tensores para soportar los fuertes vientos de la región y están cubiertas por tejido elaborado con piel de camello o de cabra. Los Yurts están adaptados para soportar las bajas temperaturas de la zona, estando cubiertos con fieltros de lana y otros materiales aislantes. Tienen forma cilindra, cubierta cónica y una estructura interior de madera formada por unos 60 mástiles aproximadamente.



Figura 1.3: Jaima beduina



Figura 1.4: Yurt



Figura 1.5: Tipi

La arquitectura textil también tiene su representación en Norteamérica a través de las tiendas Tipis que construían las tribus indígenas de las Grandes Llanuras (figura 1.5). Estas eran las viviendas que utilizaban durante la temporada de caza y que, a partir del siglo XVII, al convertirse en nómadas tras la ocupación española, utilizaron durante todo el año.

Estas construcciones estaban adaptadas a su estilo de vida nómada en las praderas norteamericanas. Formadas por una estructura cónica de madera, recubierta por corteza de árboles, pieles y otros materiales, podían ser transportadas a lomos de los caballos dada su ligereza. El tipi resulta ser una construcción resistente y durable, proporcionando abrigo y confort en el duro invierno de la región y resultando fresco durante el cálido verano.

Otro precedente histórico de la arquitectura textil, se encuentra en los Velarium utilizados en los anfiteatros romanos. Un claro ejemplo de estas cubiertas tensadas es el Velarium del Coliseo de



Roma (figura 1.6). Se trataba de una cubierta de tela, apoyada en un entramado de cuerdas que sustentadas en unos 250 mástiles de madera, tenía la capacidad de plegarse mediante un sofisticado sistema de poleas movidas por un centenar de marineros.

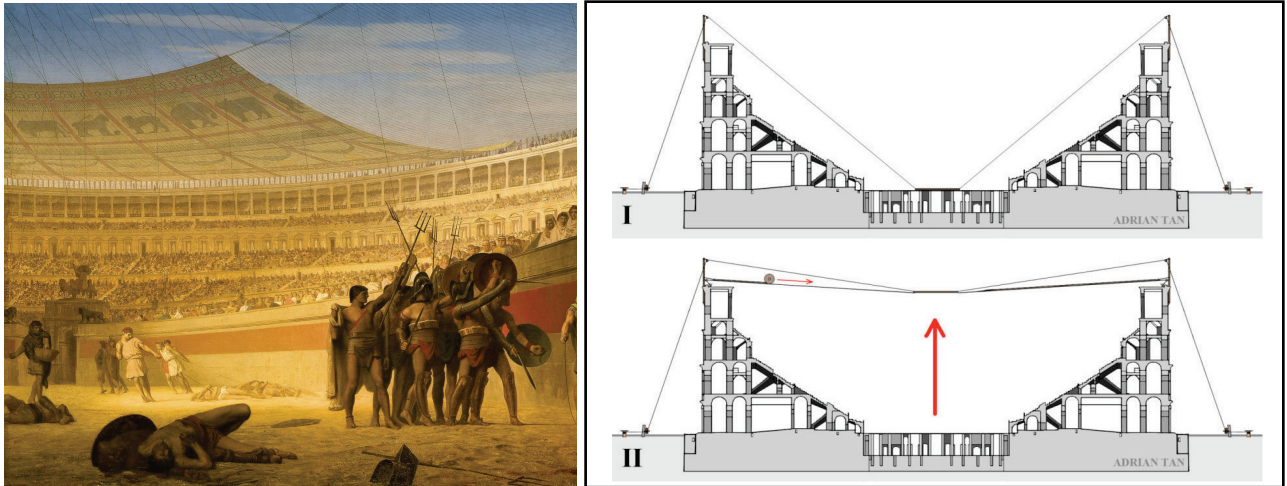


Figura 1.6: Izquierda: Representación del coliseo Romano donde se puede apreciar su Velarium. Óleo de Gêrome. 1859. Derecha: Proceso de levantamiento del Velarium en dos partes concebido por Carpicezi. Imagen tomada de Tan A.H y Tan F.H. (2015)[84].

Los primeros cálculos de tensoestructuras de los que se tienen constancia, fueron realizados por el ingeniero ruso Vladimir Shukhov y corresponden a la cubierta del Pabellón Shukov Rotunda, construido en 1895 para el All-Russia Exhibition. Se trataba de una cubierta realizada de membrana textil sobre una malla de acero colgante.

Pero fue en el siglo XX, gracias al desarrollo industrial y el mecanizado en la producción de tejidos, cuando se produce la gran evolución de esta tecnología, ampliando el concepto de tensoestructuras para contemplar nuevos materiales y sistemas constructivos innovadores. Un ejemplo de esta evolución se refleja en las carpas de los grandes circos mundiales. A partir de 1930, se produce un crecimiento en el tamaño de estas carpas hasta alcanzar los 50 metros de diámetro y los 20 metros de altura de los grandes "Chapiteau" contemporáneos (figura 1.7). Estos grandes colosos ambulantes pueden ser montados en pocos días y han permitido el auge y la supervivencia de estos magníficos espectáculos.

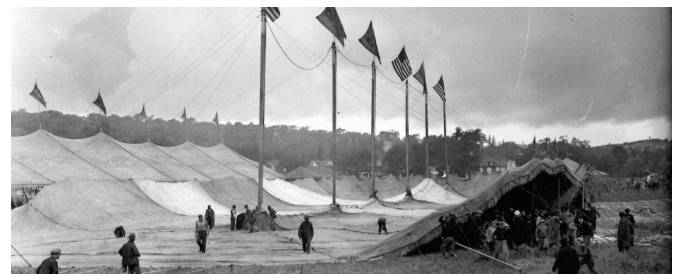


Figura 1.7: Arriba: Imagen del montaje de la Gran Carpa del Circo Colle Bross en el año 1937. Abajo: Imagen actual de uno de los Chapiteau del Cirque du Soleil.

Tras la Segunda Guerra Mundial surgen nuevos diseños de estructuras tensadas como el Sidney Meyer Music Bowl en 1959, de Barry Patten, o el Pabellón de Alemania en la Exposición Universal de Montreal en 1967, de Gutbrod, Leonhard y Frei Otto (figura 1.8). Este último arquitecto representa un papel primordial en el desarrollo de las tensoestructuras, siendo considerado hoy en día como la más grande autoridad en esta tipología estructural. En 1957 inicia el Centro de Desarrollo de Estructuras Livianas en Berlín y en 1964 fundó el Instituto de Estructuras Livianas de la Universidad de Stuttgart, Alemania.

Frei Otto fue pionero en determinar que la forma no estaba predeterminada sino que surgía a partir del diagrama de fuerzas, siendo necesario encontrar la forma más eficiente, capaz de responder a todas las exigencias. Se apoyó en formas orgánicas y naturales, como las películas de jabón que le proporcionaban superficies específicas mínimas y con tensiones iguales.

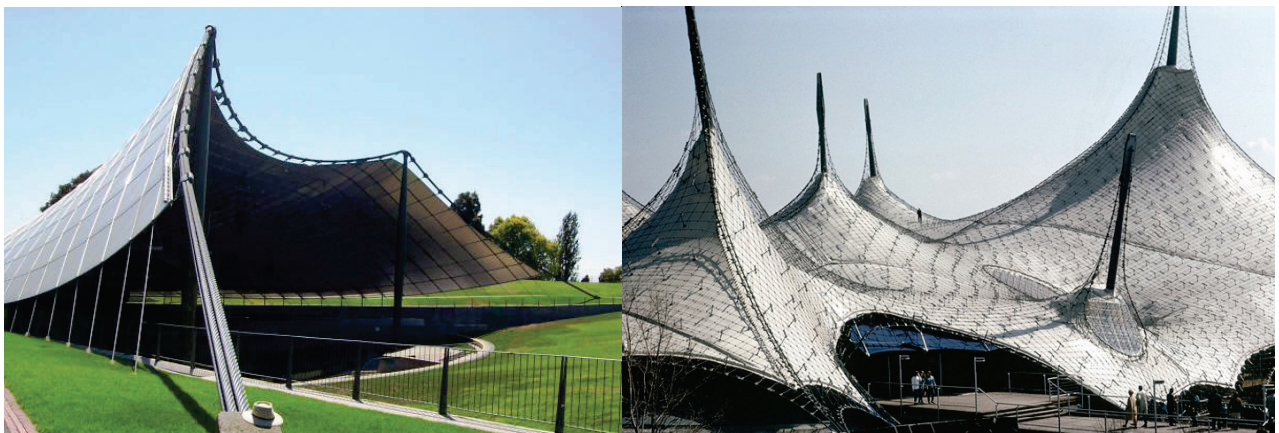


Figura 1.8: Izquierda: Sidney Meyer Music Bowl, de Barry Patten, 1959. Derecha: Pabellón de Alemania en la Exposición Universal de 1967. Gutbrod, Otto y Leonhard. Montreal.

Las estructuras tensadas actualmente se encuentran en constante evolución, proyectándose con mayor tamaño y sofisticación. Su uso se ha extendido para construcciones temporales o ambulantes así como permanentes o de larga duración. Caben destacar impactantes obras arquitectónicas donde están presentes las estructuras tensadas como el Estadio Olímpico de Munich, inaugurado en 1972 (figura 1.9), las cúpulas geodésicas del Eden Project en Cornwall (Inglaterra), construidas en el año 2001 (figura 1.10), o el nuevo estadio Allianz Arena de Munich inaugurado en el año 2005 (figura 1.11).

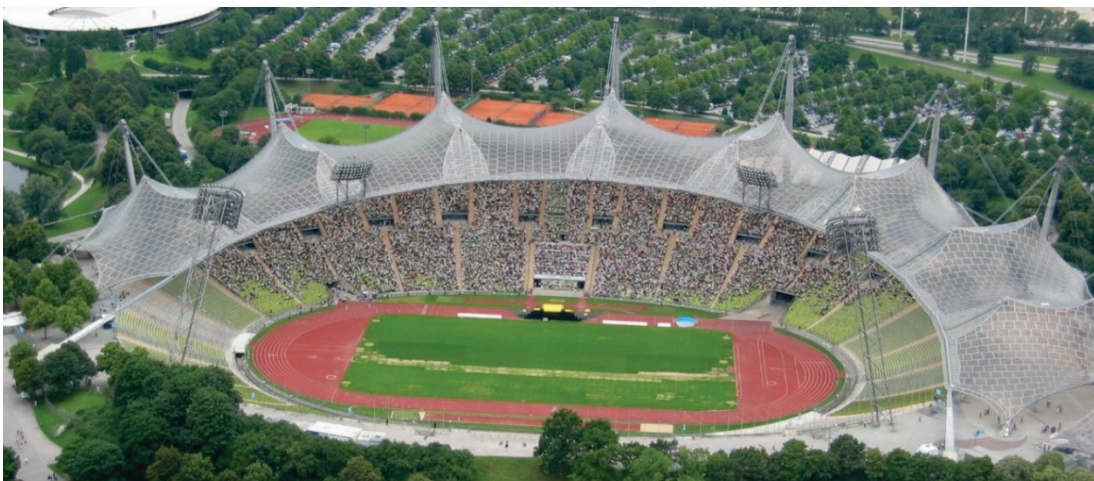


Figura 1.9: Estadio Olímpico de Múnich proyectado por Behnisch, Otto y Leonhardt.





Figura 1.10: Cúpulas geodésicas Eden Project, Diseño de N. Grimshaw. Cornwell (Inglaterra) .



Figura 1.11: Estadio Allianz Arena. Proyecto de Herzog y de Meuron. Munich (Alemania).

### 1.2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS TENSOESTRUCTURAS

Las Tensoestructuras pueden clasificarse en función de sus características principales: su forma, su temporalidad, su disposición, sus características estructurales y composición.

Esta clasificación no pretende ser restrictiva, sino más bien evidenciar la multitud de soluciones aplicables a cada función arquitectónica demandada.

○ **Por su forma:**

Las formas de las estructuras superficiales tensadas son ilimitadas. El proceso de búsqueda de la forma de equilibrio, parte de una completa comprensión de este tipo de estructuras.

**1. Abiertas , cerradas o abatibles:**

Las primeras son ampliamente utilizadas en forma de marquesinas, carpas en pórticos o puntos de referencia y atracción arquitectónica. Un buen ejemplo de estructura tensada abierta es la cubierta del auditorio Campo de Marte en Tarragona construida en el año 1993 (figura 1.12).



*Figura 1.12: Auditorio Campo de Marte. Tarragona (España)*

Las estructuras cerradas tienen numerosas aplicaciones empleándose en muchas ocasiones con múltiples hojas al objeto de mejorar el aislamiento acústico, térmico o disminuir la transmisión de la luz. El Milenium Dome de Londres representa un claro ejemplo de estructura tensada cerrada (figura 1.13)



*Figura 1.13: Milenium Dome, Londres (Reino Unido).*

Las estructuras abatibles o plegables son utilizadas por su adaptabilidad, de manera que la tela tensada puede adoptar diferentes configuraciones dependiendo del uso. Estas estructuras retráctiles son más complicadas de diseñar al disponer



de elementos móviles y tener que asegurar la tensión de la tela en la posición abierta. La cubierta plegable del Estadio Nacional de Varsovia sirve de ejemplo de esta tipología (figura 1.14).



Figura 1.14: Cubierta plegable del Estadio Nacional de Varsovia (Polonia).

## 2. Anticlásticas o Sinclásticas:

Las primeras, con doble curvatura gaussiana negativa, son las más comunes de las estructuras tensadas. Los cascarones anticlásticos o reglados tienen forma de silla de montar, por lo que se obtienen diferentes curvaturas en cada dirección. Los conoides, paraboloides hiperbólicos e hiperboloides se encuentran dentro de esta clasificación. Uno de los numerosos ejemplos de superficies anticlásticas se muestra en la cubierta del nuevo Intercambiador Modal de Las Palmas del muelle de Santa Catalina de Las Palmas inaugurado en el año 2001 (figura 1.15).



Figura 1.15: Cubierta del Intercambiador Modal de Las Palmas (España).

Las formas sinclásticas, de curvatura similar en cada dirección, se consiguen mediante una diferencia de presión del fluido o gas a ambos lados de la superficie. El Modern Teahouse, que se instala en los jardines del Museo de las Artes Decorativas de Frankfurt (figura 1.16), representa un ejemplo de estas superficies.

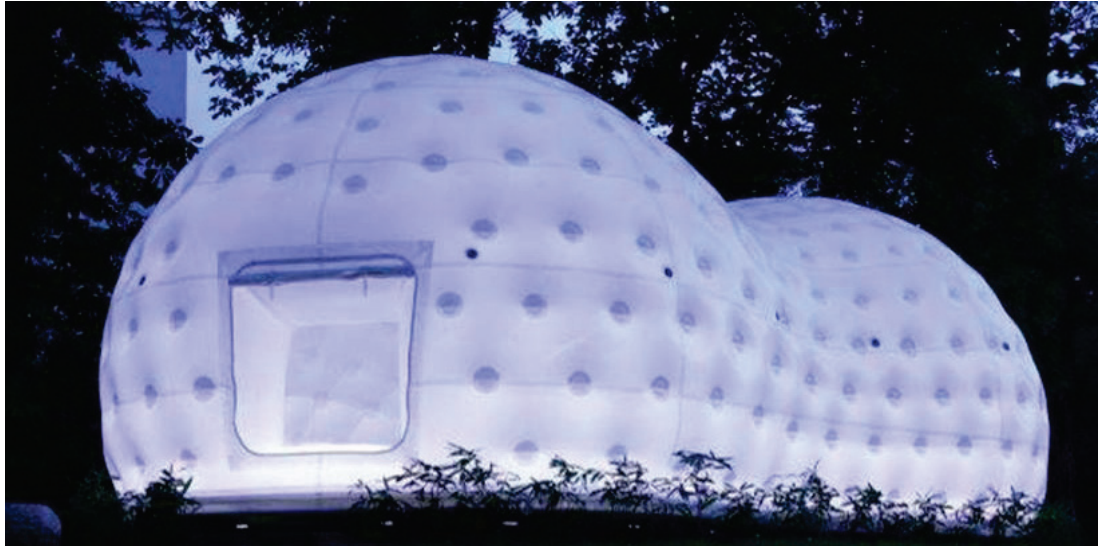


Figura 1.16: Estructura neumática sinclástica: Modern Teahouse. Frankfurt/Main (Alemania). 2007

### 3. De formas simples o compuestas:

Básicamente existen cuatro tipos de superficies básicas, cuya curvatura es anticlástica en todos sus puntos: El conoide de revolución, el paraboloides, el hiperboloides y el paraboloides hiperbólicos.

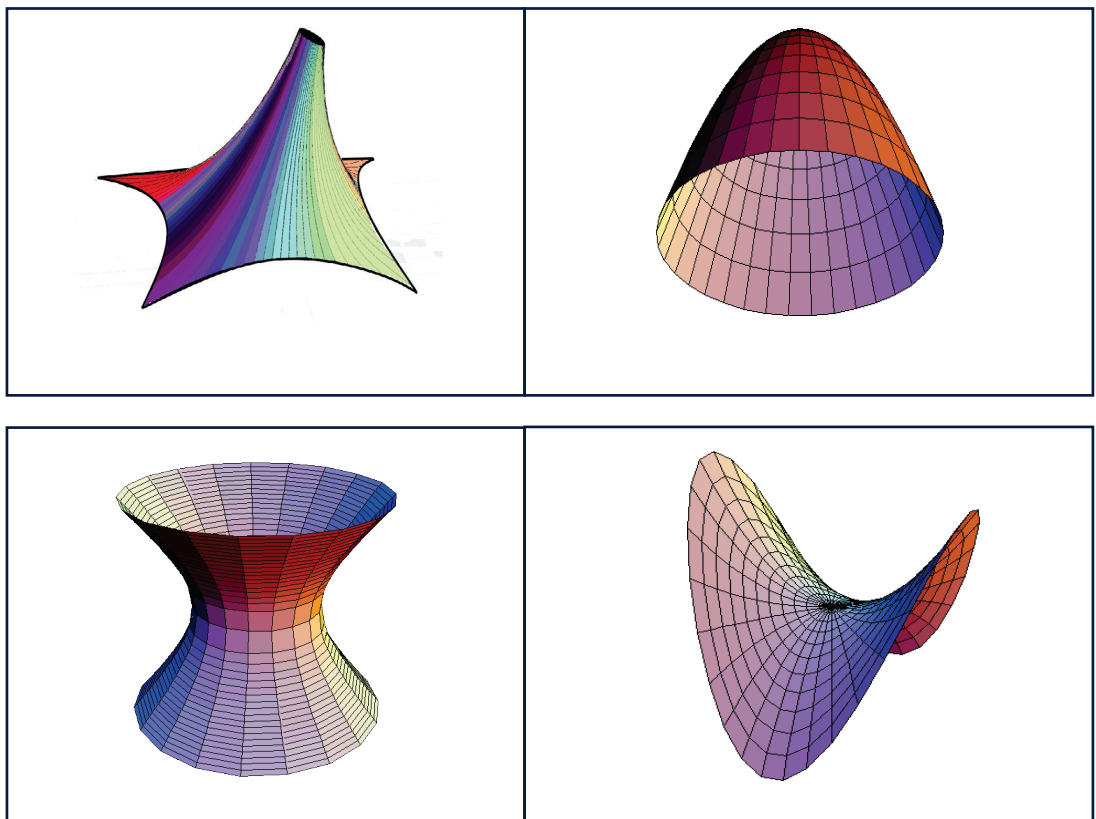


Figura 1.17: Formas simples anticlásticas más comunes: Conoide asimétrico de revolución, paraboloides, hiperboloides y paraboloides hiperbólicos.



Otro ejemplo interesante de forma simple anticlástica, similar al hiperboloide, es el catenoide (Figura 1.17), descubierto por Euler en 1952 [23]. Se obtiene a partir de la revolución de la curva catenaria y es un ejemplo clásico de forma minimal o superficie de curvatura media cero.

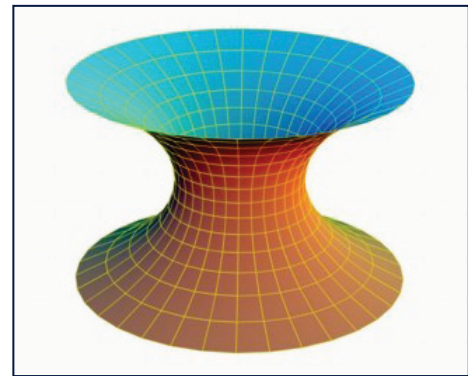


Figura 1.18: Catenoide de revolución

Las estructuras tensadas habitualmente adoptan diferentes formas simples a través de deformaciones lineales o puntuales inducidas en los apoyos (Figura 1.19).



Figura 1.19: Estructuras tensadas con forma simple: Conoide asimétrico invertido. Circuito internacional de F1 de Shanghai.

También es frecuente observar, en la Arquitectura Textil contemporánea, ejemplos de formas compuestas, obtenidas mediante la combinación de formas simples o de sus variantes (Figura 1.20).



Figura 1.20: Estructura tensada con forma compuesta: La Tanzbrunnen o fuente de la danza de Freii Oto para la exposición federal de jardinería de Colonia (Alemania)

- **Por su temporalidad:**

- 1. Móviles o Permanentes:**

Aunque inicialmente la Arquitectura textil se empleaba en instalaciones móviles o desmontables (Figura 1.21), hoy en día se utilizan a menudo en estructuras permanentes (Figura 1.22).

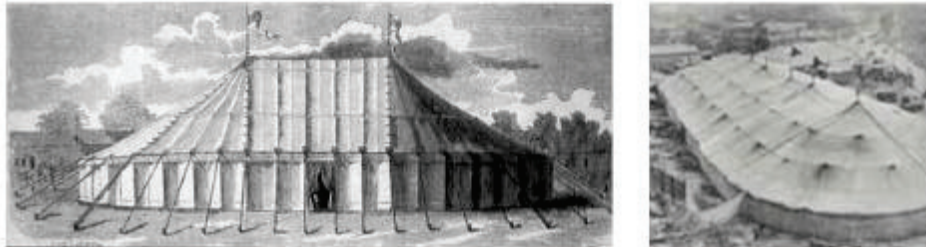


Figura 1.21: Carpa de circo “Chapiteau” de finales del siglo XIX.



Figura 1.22: Palacio de Tuwaiq. Frei Otto y Buro Happold. Riyadh (Saudi Arabia). 1985

- **Por su disposición:**

- 1. En fachada, en cubierta o de cerramiento completo.**

La arquitectura textil contiene numerosos ejemplos de aplicaciones en fachada, cubierta o ambos (Figuras 1.23, 1.24 y 1.25)



Figura 1.23: Disposición en fachada: Hotel Burj Al Arab. Dubai (United arab emirates)





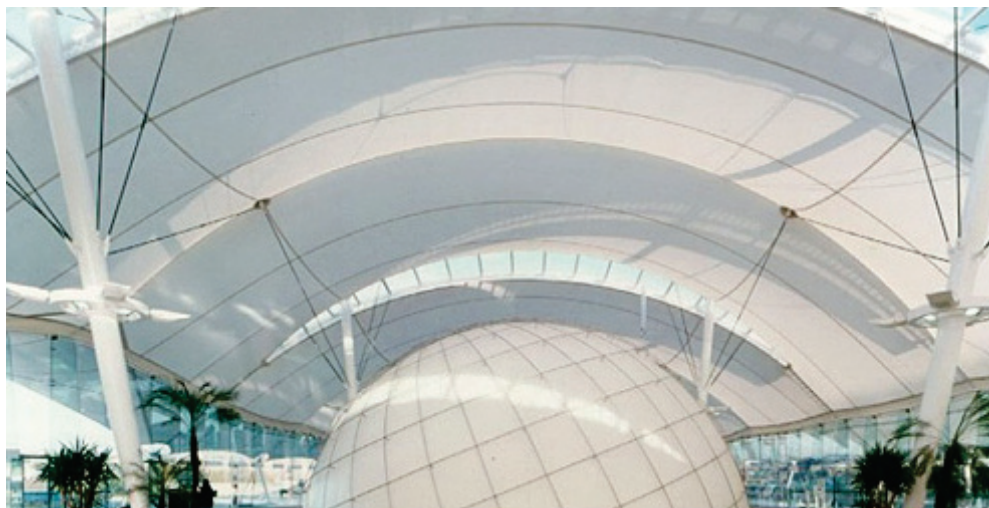
*Figura 1.24: Disposición en cubierta: Piscina Olímpica de Munich (Alemania). 1972*



*Figura 1.25: Disposición en cerramiento y cubierta. Gran Carpa Blanca de Cavalía.*

## **2. Interiores o Exteriores:**

También podemos clasificar las estructuras tensadas en función de su ubicación: en el exterior o en el interior de un edificio.





*Figura 1.26: Disposición en interior. Dynamic Earth Centre. Holyroad Park, Edinburgo, Escocia (R. Unido)*

○ **Por su tipología estructural y composición:**

Podemos distinguir tres grandes grupos:

**1. Las membranas y láminas tensadas**

Consisten en elementos superficiales sin rigidez a la flexión. Una membrana es una hoja de material tan delgada que, para todo fin práctico, puede desarrollar solamente tracción. Buenos ejemplos de membrana constituyen un trozo de tela o de caucho. En general, las membranas deben estabilizarse, principalmente porque su forma funicular para cargas horizontales difiere de las de las cargas verticales. La estabilización se obtiene por medio de un esqueleto interno o por pre-tensión producido por las fuerzas externas o por presión interna.

Se podría distinguir entre membranas sin pretensado y membranas pretensadas, aunque las primeras, cuya forma más simple es la de la bóveda catenaria, no suelen emplearse dada la poca estabilidad de las mismas. Este pretensado suele realizarse en dos direcciones dando lugar a las membranas curvas frente al pretensado en una única dirección que presentan las membranas planas

Las membranas utilizadas en la fabricación de estructuras tensadas están constituidas generalmente por una serie de fibras entrecruzadas en las dos direcciones principales, que aportan las características mecánicas a la tela.

Son numerosos los materiales utilizados entre los que podemos destacar:

- Algodón
- Poliamida (nylon)
- Fibra de Poliéster (Trevira, Terylene, Dacron, Violen)
- Fibra de vidrio
- Fibra de aramida
- PVC (policloruro de vinilo): El tejido de PVC se emplea habitualmente a modo de lona impermeable.
- PVDF: Polifluoruro de vinilideno
- El ETFE, (etileno-tetra-flúor-etileno) es un co-polímero modificado único en su inalterabilidad bajo efectos de rayos ultravioleta o bajo polución atmosférica, con un alto grado de transparencia. Gracias a que el ETFE es extremadamente duradero, puede ser usado como parte del revestimiento permanente de las cubiertas.
- PTFE: Poli-TetraFluoroEtileno, más conocido como Teflón. Este polímero es ideal para estas estructuras debido a su elasticidad, y a su escasa fragilidad. El uso de este material se ha ido incrementando recientemente, gracias a las bondades del mismo. Sus cualidades translúcidas permiten el ahorro de luz durante el día y el uso escaso de luminarias reflejadas en la noche y sus propiedades reflectantes mantienen una baja temperatura en el interior, y son además resistentes al fuego.

Por esto, su desarrollo ha tenido un impacto monumental principalmente en el Medio Oriente, Australia y Sur América, donde el calor es más intenso y las necesidades de ahorro en aire acondicionado e iluminación se hacen más importantes.

- Fibra de carbono: también tiene aplicaciones en el sector de los textiles debido a las magníficas propiedades que presenta: alta resistencia mecánica, elasticidad, baja densidad, resistencia a variaciones de temperaturas, ignífugo y buen aislante térmico.

Es habitual en la actualidad recubrir estas fibras con resinas que protegen y mejoran el acabado superficial. Así se obtienen materiales compuestos de:

- Material textil simple (habitualmente poliéster o fibra de vidrio).
- Coating o cobertura
- Top coat o acabado superficial

Entre los más utilizados se encuentran:

- **Fibra de poliéster recubierta de PVC:** Este tipo de material es el más extendido en las estructuras tensadas. Se utiliza para estructuras permanentes, siendo su vida de 15 a 20 años.



Figura 1.27: Estructura del PES-PVC

- **Fibra de vidrio recubierta de PTFE:** Su uso está también extendido para estructuras permanentes, siendo su vida de unos 30 años. Se considera no combustible. Los niveles de transmisión de luz pueden llegar al 25%. Se ha de manipular con cuidado, evitando doblar. Esta fibra ha sido utilizada en proyectos de gran envergadura como el Georgia Dome, el aeropuerto de Denver o el Millenium Dome.



Figura 1.28: Estructura de la fibra de vidrio recubierta de PTFE

- **Fibra de vidrio recubierta de Silicona:** Este recubrimiento es más flexible que el teflón por lo que es más sencilla su manipulación y transporte. Su transparencia varía del 25% al 40%. El uso de la silicona como recubrimiento ocasionaba problemas de uniones entre telas en los comienzos y se considera un recubrimiento que puede atraer la suciedad.



- **Fibra de PTFE recubierta de PTFE:** Es completamente resistente a UV y a la acción de ácidos. La textura recuerda a una seda fina, siendo extremadamente flexible y utilizada frecuentemente como material para estructuras retráctiles. La transparencia es del 40%, pudiendo disminuirse si fuese necesario.
- **Fibra de aramida, recubierta de PVC, PTFE o silicona:** Dada su gran resistencia, se utiliza para aplicaciones especiales. Su poca resistencia a UV hace que haya que protegerla, disminuyendo su transparencia. Se ha utilizado recubierta de PVC en la cubierta del estadio olímpico de Montreal, por las elevadas tensiones que ha de soportar debido a las cargas de nieve.
- **Fibras de PVDF :**Es un material relativamente nuevo, que puede ser recubierto con Fluoropolímeros o Poliuretano. El nivel de transparencia llega al 95%. Está disponible también en blanco con un nivel de transparencia del 40%. Se utiliza como material retardante para el fuego. Resistente a ácidos, es fácil de colorear y reciclable.
- **Láminas de ETFE:** Este material no está compuesto de fibras, sino que se utiliza en láminas de 50 a 250 micras de espesor, por lo que no es un elemento estructural. Se utiliza como material de cierre en paneles de aire y su transparencia es del 95%. Su resistencia al fuego es buena. La principal ventaja es su bajo peso comparado con el vidrio y la posibilidad de ser adaptable a formas. Por lo tanto, es un material ideal para aquellas soluciones que requieran alta transparencia y libertad en formas

### 1. Estructuras neumáticas:

También están constituidas por membranas compartiendo algunos de los materiales vistos en el apartado anterior, pero su estabilización se produce por la diferencia de presión en toda su superficie. Es decir, las estructuras neumáticas desafían la gravedad de una manera completamente original, pues contrariamente a las estructuras comunes cuyo peso debe ser distribuido en el suelo, imponen una carga que actúa en sentido contrario a la gravedad, la presión de un gas interior. Las formas logradas son siempre sinclásticas.

Cabe distinguir entre estructuras **soportadas por aire** y las estructuras formadas por **elementos hinchados superficiales**. Entre estas últimas son habituales las de doble lámina de ETFE con las que se crean cubiertas cálidas que tienen gran transparencia.





Figura 1.29: Estructura soportada por aire: Cubierta del Tokio Dome. Bunkyô - Tokio (Japón)



Figura 1.30: Estación de tren de Yujiaju (China), formada por elementos hinchados de ETFE.

En las estructuras soportadas por aire no hacen falta elementos de soporte rígidos como columnas, muros, arcos, etc. Son las construcciones más ligeras y mínimas creadas por el hombre.

Ambos tipos poseen un peso estructural extremadamente bajo (el cual está determinado por el tipo de membrana que se utiliza).

## 2. Las mallas de cables:

Los cables son también elementos que sólo resisten esfuerzos de tracción. Para simplificación del lenguaje, se habla de cables puesto que casi siempre se emplean las cuerdas o cables de acero, pero este papel puede ser desempeñado por cualquier material que sea flexible y resistente a la tracción, bien sean **metálicos** (alambre,

haces de alambres, cintas, redondos, perfiles de acero o incluso cintas de plancha y cadenas) y **no metálicos**( cuerdas de fibras orgánicas como el cáñamo o el algodón o bien cuerdas sintéticas o incluso madera, especialmente, tiras a base de láminas de madera).

Fue en 1953 cuando se construyó el primer edificio con cubierta de este tipo: Arena de Raleigh, proyectado por Nowicki y situado en Carolina del Norte (Estados Unidos).

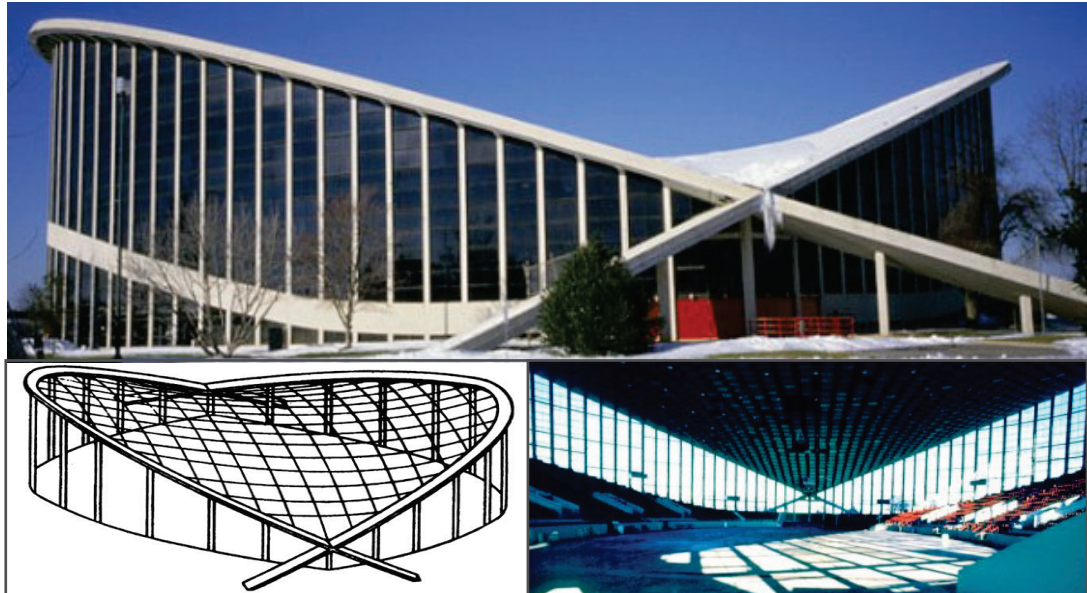


Figura 1.31: Cubierta de membranas suspendidas por malla de cables. Nowicki y Deitrick. Carolina N. (EEUU)

Otros ejemplos de grandes estructuras de mallas de cables son los ya mencionados Estadio Olímpico de Múnich de 1972 o el Pabellón de Alemania de la Exposición Universal de 1967 ambos de Frei Otto.

Este tipo de estructuras de malla se asemejan sorprendentemente a las a las telas de Araña. Las arañas tejen figuras que parecen desordenadas pero que obedecen a ciertas razones. Primero hilan un cordón grueso (equivalente a las cuerdas de contorno de nuestras mallas abiertas) cruzando un rincón entre muros, y con un ir y venir lo refuerzan convenientemente. Aunque por distintos caminos, el hombre y la araña llegan a soluciones de un gran parecido exterior.

De forma análoga a las membranas podemos distinguir entre mallas de cables **sin pretensar**, libremente colgantes, y **pretensadas** cuya forma es prácticamente independiente de su peso propio. Estas últimas son las más habituales al permitir figuras curvadas más bellas y al mismo tiempo más estables. Las mallas de cables sin postensar son las utilizadas habitualmente para soportar las cubiertas colgantes pesadas que se analizarán en el apartado siguiente.

El pretensado se distingue del empleado ordinariamente en el hormigón, pues en nuestro caso los cables se mantienen en tensión independientemente de las cargas exteriores, es decir, nunca dejan de estar sometidas a tracción.

Según la forma del esqueleto de apoyo se pueden distinguir entre mallas de cables **cerradas y abiertas**.

Las primeras se forman cuando el contorno lineal de apoyo es cerrado. La forma más conocida es la formada por la red que cuelga de dos arcos de parábola como es el caso del Arena de Raleigh. No obstante la forma de parábola no es la más favorable para tejer una malla de cables pretensados, puesto que en la zona próxima al vértice de parábolas la red no resulta pretensada.

De estructura similar al Arena de Raleigh, con forma de paraboloides hiperbólicos, el Velódromo de Londres construido para las olimpiadas de 2012 es otro ejemplo de cubierta ligera con estructura formada por malla de cables (figura 1.32).



*Figura 1.32: Velódromo de Londres para las olimpiadas de 2012. Hopkins architects. Londres (Reino Unido) Malla de cables cerrada (elíptica) con doble curvatura que sustenta los paneles.*

Las mallas abiertas se tienden entre superficies o puntos de apoyo o reacción y no sobre un anillo cerrado. En este tipo de mallas se distinguen los cables denominados relingas y los cables de tensión o soportantes. Una de las formas más empleadas dentro del grupo de mallas abiertas es la de la silla de montar de cuatro puntos de apoyo y la combinación o modificación de este tipo de figuras.



### 1.2.3. LAS CUBIERTAS COLGANTES PESADAS

Una de las principales ventajas que presentan las estructuras tensadas se debe a su bajo peso propio, que permite cubrir grandes luces mediante cubiertas extraordinariamente ligeras. El uso de materiales textiles y plásticos permiten desprestigiar su peso en el cálculo de la forma de equilibrio.

Sin embargo, existen otro tipo de soluciones en tensión simple en las que el peso propio de la estructura participa activamente en la propia configuración de equilibrio. Este tipo de construcciones se conoce como cubiertas colgantes pesadas y permite el uso de una mayor variedad de materiales constructivos, como el acero, el hormigón o la madera.

J. J. Santos Guerra (1990) [79] señala que "las cubiertas colgantes pesadas son básicamente superficies sinclásticas de curvatura negativa con forma de catenaria que, para lograr la estabilidad frente a cargas puntuales o esfuerzos de succión del viento, necesitan la contribución de su peso propio.

Esta técnica comenzó su desarrollo en los años 50 a partir de la construcción de la citada cubierta del edificio Arena Raleigh (figura 1.31). El diseño original de Nowicki no tenía previsto el empleo de cables tensores, pero en el desarrollo de la construcción se introdujo una segunda familia de cables transversales, corrigiendo la forma catenaria de esta construcción.

El primer trabajo de investigación sobre esta materia corresponde a Frei Otto en 1954 [65], que cautivado por el dibujo del Raleigh Arena, desarrolló su tesis doctoral sobre este tema.

Pocos años después se desarrollaron sobre esta idea importantes proyectos como la Piscina Cubierta de Wuppertal, del arquitecto F. Leonhardt o el Pabellón de Montevideo del ingeniero L. I. Viera (figura 1.33.). Este último, construido en 1957 sobre un contorno circular, cubría una luz libre de 100 metros gracias a la introducción de un postensado. Una vez montados sobre los cables las placas de hormigón que cubren el pabellón y antes de proceder al hormigonado de de las juntas, se sobrecargó la cubierta con ladrillos que fueron retirados posteriormente para conseguir de esta forma el postensado y evitar así la aparición de grietas por efecto del viento.



Figura 1.33: Cilindro de Montevideo (Uruguay). 1957. L.I. Viera



En los países del bloque comunista como Checoslovaquia o la URSS, gracias a su fácil montaje y economía, tuvo mucho éxito el empleo de estas cubiertas. Se emplearon en todo tipo de construcciones como garajes, almacenes o pabellones. Muestra del gran desarrollo que alcanzaron en estos países, en 1980 se construyó el Pabellón de Deportes de los Juegos Olímpicos de Moscú, de planta elíptica con unas impresionantes dimensiones: 224 x 183 metros de longitud de ejes.

La exposición General de Primera Categoría de Bruselas, celebrada en 1958, supuso un gran hito en el desarrollo de estas estructuras. Buena parte de los pabellones se cubrieron con esta nueva técnica constructiva, destacando entre ellos el Pabellón Europeo, con una luz libre de 89 metros.

A raíz de esta Exposición surgieron nuevos proyectos de cubiertas colgantes en todo el mundo, como la terminal de pasajeros del aeropuerto de Washington o las cubiertas Kenzo Tange para la olimpiada de Tokio. En España cabe mencionar la cubierta colgante construida en 1962 para el salón de actos del Palacio de las Naciones, en la feria de muestras de Barcelona. En Portugal, el Estadio Municipal de Braga diseñado para la Eurocopa de 2004 por arquitecto portugués Eduardo Souto de Moura, por la que ganó el Premio Pritzker de arquitectura en 2011, posee una cubierta colgante que salva una luz de 220 metros (figura 1.34).



*Figura 1.34: Estadio Municipal de Braga (Portugal). 2003. E.S. de Moura*

Otra disciplina vinculada a las cubiertas colgantes es la de los puentes de banda tensada. Permiten salvar grandes luces, sobre todo en la construcción de pasarelas. De construcción análoga a las cubiertas colgantes, los puentes de banda tensada poseen una plataforma de hormigón, chapa de acero o incluso madera, montada sobre un conjunto de cables portantes dispuestos en dos o más bandas.



### 1.3. LA CATENARIA.

Algunos elementos lineales como el hilo, la cuerda, el cable o la cadena, son incapaces de transmitir esfuerzos de compresión ni de flexión. Por este motivo, ante un determinado estado de cargas, modifican su geometría bidimensional hasta alcanzar el equilibrio en estado de tracción de todos sus elementos.

De igual forma, existen elementos planos como tejidos, membranas, redes o mallas de cables que adoptan una geometría tridimensional de equilibrio en tracción. Estas últimas son las denominadas estructuras tensadas o tensoestructuras que se han analizado en el apartado anterior.

En el caso de los elementos lineales, cuyo estudio resulta más sencillo, el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales se compensan, careciendo de tensiones laterales, se denomina curva catenaria.

El problema de la forma que adopta la cadena colgante o catenaria estuvo presente durante muchísimos años en la mente de grandes científicos del renacimiento. Una prueba de la dificultad que entrañaba, es que hasta el propio Galileo Galilei, en 1638 [26], se equivocó al afirmar que la forma que adquiriría la cadena colgante era la de una parábola. No obstante, hay que aclarar que esta afirmación la realizó a los 74 años edad y que sencillamente se limitó a aceptar como cierto lo que era comúnmente admitido por los científicos de principios del siglo XVII.

Autores como el alemán Joachin Jungius [37], en una obra escrita en el año 1627, aunque esta no fue hallada hasta el año 1669, o el francés Ignatius Pardies [66], en un trabajo publicado en 1673, analizaron el problema de la cadena colgante y consiguieron demostrar que la solución no correspondía a la parábola, aunque ninguno de los dos fueron capaces de encontrar la ecuación matemática.

El problema se había convertido en un verdadero enigma, hasta el punto de que, en 1690, el suizo Jakob Bernoulli [11] planteó en la prestigiosa revista *Acta Eruditorum* el desafío de descubrir la fórmula matemática verdadera. Tan sólo un año después, en 1691, su hermano Johann Bernoulli junto a Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens, resolvieron el problema de forma simultánea e independiente. Johann Bernoulli obtuvo la solución utilizando una ecuación diferencial, mientras que la solución de Huygens, alumno de Leibniz, utilizaba un método geométrico más críptico (Figura 1.35).

Precisamente fue Huygens, en una carta dirigida a Leibniz en 1690, el primero en emplear el término catenaria, derivándolo de la palabra latina *catena*, que significa cadena.

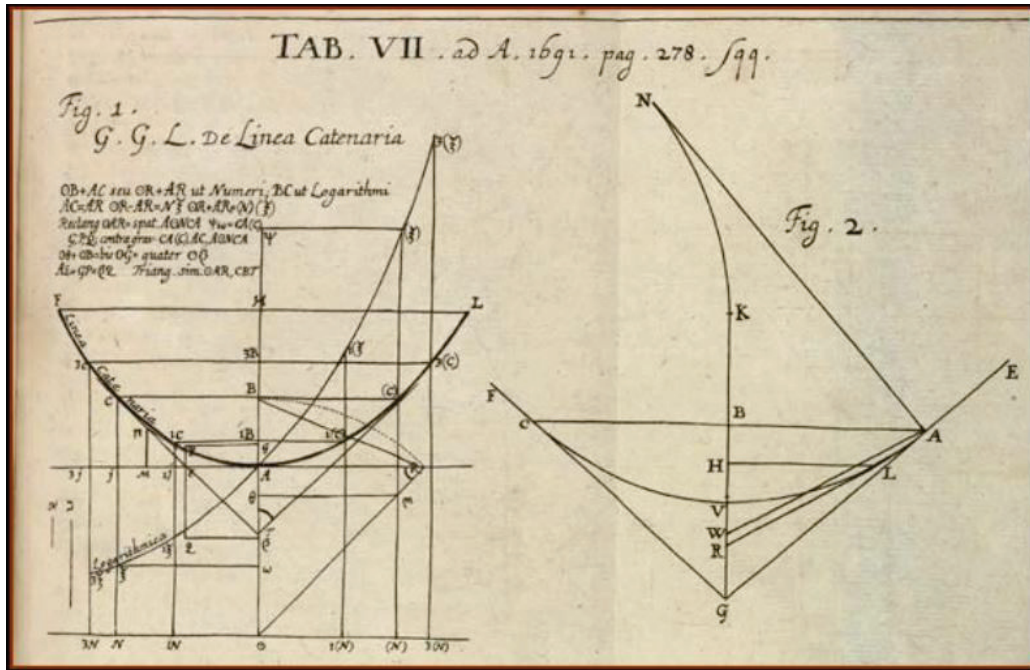


Figura 1.35: Soluciones remitidas por Leibniz y Huygens a J. Bernouille

### 1.3.1. ECUACIONES DE LA CATENARIA

Considérese una cuerda ideal perfectamente flexible e indeformable, con masa distribuida uniformemente por unidad de longitud, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme. Considerando la mitad de esta cuerda (tramo A-B), de longitud  $s$ , las fuerzas que actúan sobre esta porción de cuerda son las indicadas en la figura 1.36.

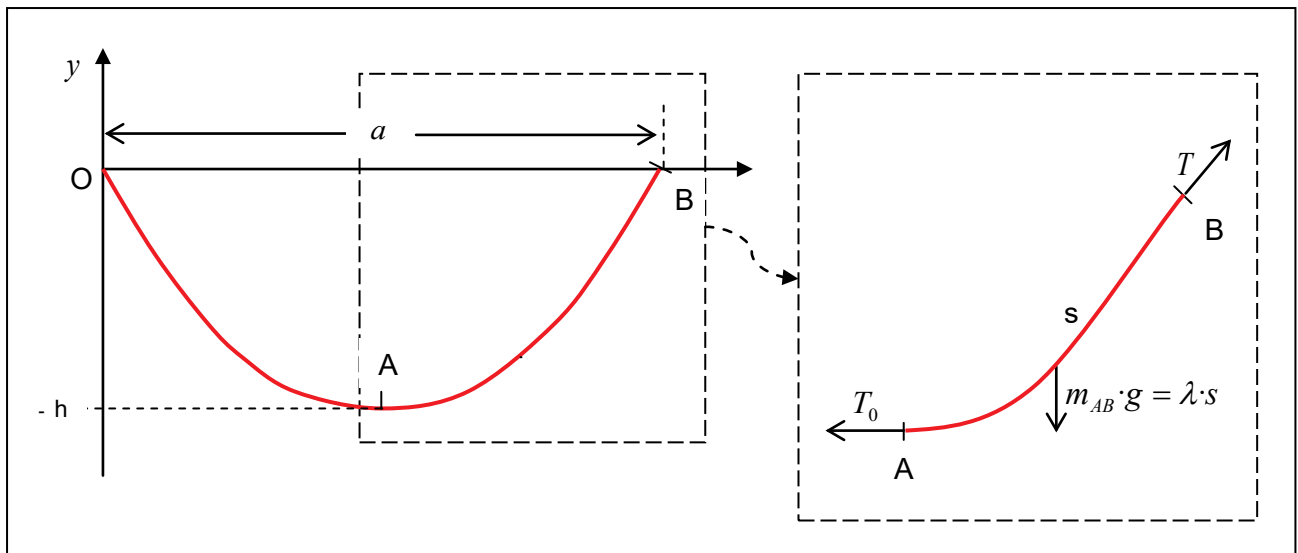


Figura 1.36: Esquema de fuerzas que actúan sobre una porción AB de la catenaria de longitud  $s$ , masa  $m_{AB}$  y peso específico  $\lambda$ .

Planteando el equilibrio de fuerzas horizontales y verticales se obtienen las siguientes expresiones:



$$\sum F_H = 0 \rightarrow T \cos \theta - T_0 = 0 \quad (1.8)$$

$$\sum F_V = 0 \rightarrow T \sin \theta - \lambda \cdot s = 0 \quad (1.9)$$

Siendo:

T la fuerza de tracción en el punto B

$T_0$  la fuerza de tracción en el punto A

$\theta$  el ángulo formado por la fuerza T y la horizontal

$\lambda$  el peso por unidad de longitud.

s la mitad de la longitud total de la cuerda

De la ecuación 1.8 se deduce que  $T \cdot \cos \theta = T_0 = cte$ , es decir, **la tensión horizontal permanece constante** a lo largo de toda la catenaria.

Dividiendo la ecuación 1.9 entre 1.8 queda:

$$\tan \theta = \frac{\lambda \cdot s}{T_0} \quad (1.10)$$

Considerando ahora elementos infinitesimales se pueden considerar las siguientes expresiones:

$$\tan \alpha = dy/dx \quad \text{y} \quad ds^2 = dy^2 + dx^2 \quad (1.11)$$

Derivando (1.10) y sustituyendo (1.11) se obtiene que:

$$\frac{d}{dx} (\tan \alpha) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \frac{ds}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} \quad (1.12)$$

Realizando el cambio de variable  $u = dy/dx$  queda:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \sqrt{1 + u^2} \quad (1.13)$$

Separando variables, integrando y teniendo en cuenta que para  $x = a/2$ , (en el punto más bajo A de la curva)  $dy/dx = 0$  se puede escribir

$$\int_A^P \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \int_{a/2}^x dx \quad (1.14)$$

$$\sinh^{-1}(u) = \frac{\lambda}{T_0} \cdot \left( x - \frac{a}{2} \right) \rightarrow u = \sinh \left[ \frac{\lambda}{T_0} \cdot \left( x - \frac{a}{2} \right) \right] \quad (1.15)$$

Integrando nuevamente, para  $x = a/2$ ,  $y = -h$  se encuentra



$$y = -h + \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[ \frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] + \frac{T_0}{\lambda} \quad (1.16)$$

Dada la simetría de la curva anterior (catenaria) para  $x = a$  e  $y = 0$  se obtiene

$$h = \frac{T_0}{\lambda} \cosh \left[ \frac{\lambda a}{2T_0} \right] - \frac{T_0}{\lambda} \quad (1.17)$$

de donde se encuentra que la **ecuación de la catenaria** queda como

$$y = \frac{T_0}{\lambda} \left\{ \cosh \left[ \frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] - \cosh \left[ \frac{\lambda a}{2T_0} \right] \right\} \quad (1.18)$$

Por otro lado, la longitud de la catenaria está dada por

$$L = \int ds = \int_0^a \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \int_0^a \cosh \left[ \frac{\lambda}{2T_0} \cdot (2x - a) \right] dx \quad (1.19)$$

Con lo que queda que

$$L = \frac{2T_0}{\lambda} \sinh \left[ \frac{\lambda a}{2T_0} \right] \quad (1.20)$$

La expresión 1.20 es una ecuación trascendente, la cual se resuelve numéricamente y permite determinar  $T_0$  para luego representar la ecuación de la catenaria 1.18, se suponen conocidos, o como datos del sistema: La longitud del cable ( $L$ ), la densidad lineal del cable ( $\lambda$ ) y la distancia ( $a$ ) de la catenaria

Si se desarrolla en series de Taylor la función coseno hiperbólico,  $\cosh(x)$ , se obtiene que:

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O^4(x) \quad (1.21)$$

Esto corresponde a la ecuación de una parábola más un término de cuarto orden. Es por este motivo que las gráficas son tan parecidas en el entorno de cero.

Si se observan superpuestas las gráficas de una catenaria y una parábola (Figura 1.37) se puede entender porqué los antiguos matemáticos en un principio suponían que era la parábola la curva que se combaba bajo su propio peso.

El desarrollo de las fórmulas matemáticas de una catenaria y una parábola coincide en sus tres primeros términos ( $y = a + bx + cx^2$ ) y solo a partir del cuarto ambas expresiones se diferencian (pudiendo existir en los últimos términos de la expresión de la catenaria  $x$  elevadas a potencias mayores). Esto hace que las gráficas de ambas curvas se parezcan para valores pequeños de la  $x$ , acusando más su diferenciación según aumentan los valores de ésta.

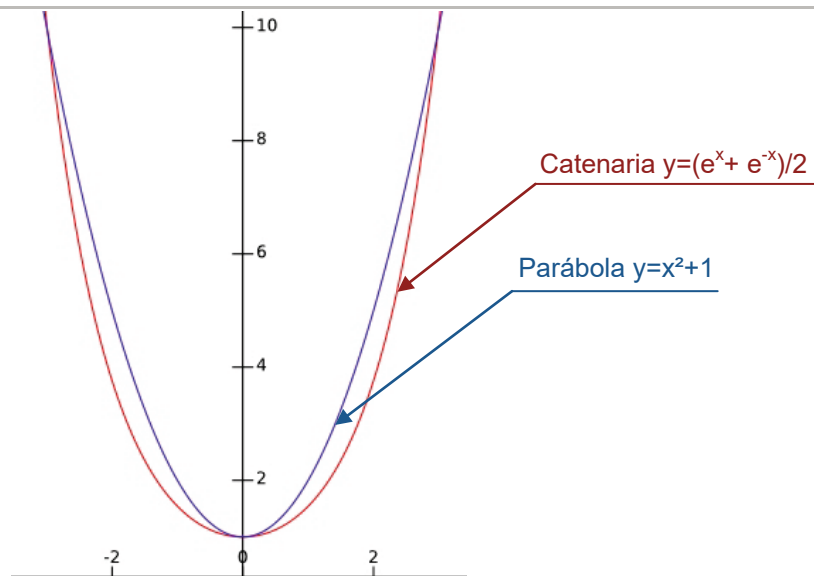


Figura 1.37: Diferencia entre la curva parabólica y la catenaria

La mayor diferencia entre las curvas corresponde a sus respectivas tangentes, en la catenaria el valor de la tangente tiende a la verticalidad mientras que en la parábola este valor tiene a una constante. Esto condiciona que en la catenaria, para valores infinitos de la  $y$ , la  $x$  tiende a valores limitados, mientras que en la parábola para los valores infinitos de la  $y$  se obtienen valores infinitos de la  $x$ .

### 1.3.2. LA FORMA FUNICULAR

Si se considera un sistema de masas concentradas unidas por un hilo de peso despreciable, El hilo adoptaría una forma diferente en función del número de cargas y del valor de cada una de estas cargas o masas concentradas. Esta forma es conocida por el nombre de polígono o curva funicular. Conforme se aumenta el número de cargas, la forma funicular tiende a aproximarse a la curva catenaria pues esta última es la que resultaría de aplicar una carga vertical distribuida uniformemente.

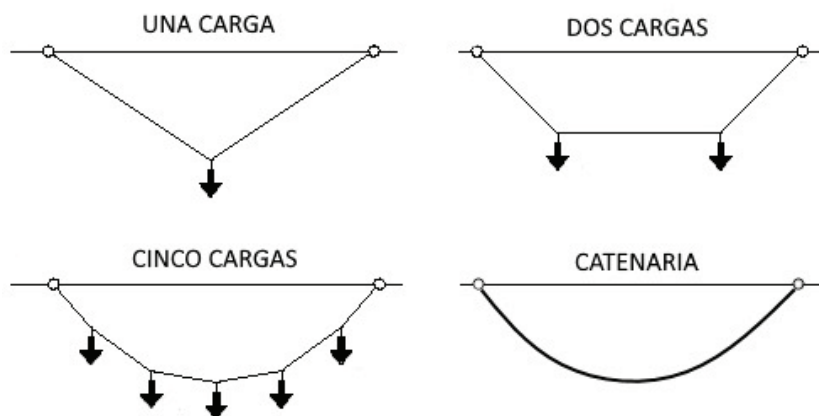


Figura 1.38: Aproximación de las curvas funiculares a la curva catenaria

Por tanto, puede considerarse la curva funicular como el caso discreto de la curva catenaria, obteniéndose la formulación matemática como se muestra a continuación.



Considerando  $N$  masas concentradas, la curva de equilibrio obtenida podría definirse por el ángulo que forma cada masa con la horizontal. Sobre la masa  $i$  actuarán las fuerzas de tracción que ejercen los dos tramos de hilo

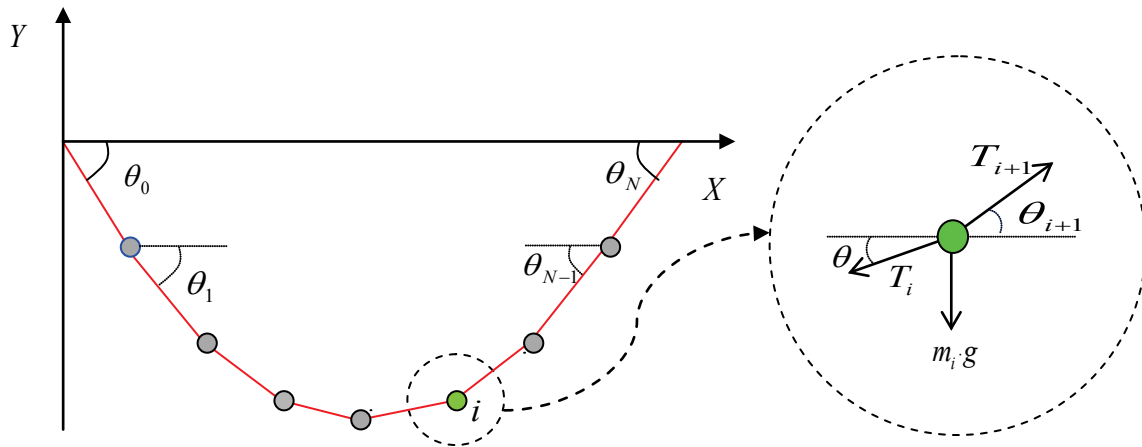


Figura 1.39: Esquema de fuerzas actuantes en cada masa concentrada de una curva funicular

Si se consideran todas las masas idénticas, la condición de equilibrio estático para la masa  $i$ -ésima  $m_i = m$  queda expresada como:

$$\text{Eje } x: \quad \sum F_x = 0 \Rightarrow \quad T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} \quad (1.22)$$

$$\text{Eje } y: \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow \quad T_i \text{ sen } \theta_i - T_{i+1} \text{ sen } \theta_{i+1} = mg \quad (1.23)$$

Dado que todas las componentes horizontales de la tensión del hilo  $T_x$  son iguales, se puede escribir.

$$T_x = T_0 \cos \theta_0 = T_i \cos \theta_i = T_{i+1} \cos \theta_{i+1} = T_N \cos \theta_N \quad (1.24)$$

Por otra parte, dividiendo la ecuación 1.23 entre  $T_x$  se tiene

$$\frac{T_i \text{ sen } \theta_i}{T_x} - \frac{T_{i+1} \text{ sen } \theta_{i+1}}{T_x} = \frac{mg}{T_x} \quad (1.25)$$

De la expresión anterior, es posible encontrar la relación entre  $\theta_i$  y  $\theta_{i+1}$ , para lo cual reemplazamos (1.24) en (1.25) obteniéndose

$$\tan \theta_{i+1} = \tan \theta_i - \frac{mg}{T_x} \quad (1.26)$$

Definiendo:  $\gamma = \frac{mg}{T_x}$  como el cociente entre el peso de cada elemento y la componente horizontal de la tensión, la relación de recurrencia a partir de (1.26) se puede expresar como:



$$\begin{aligned}
 \tan \theta_1 &= \tan \theta_0 - \gamma \\
 \tan \theta_2 &= \tan \theta_1 - \gamma \\
 &\vdots \\
 \tan \theta_i &= \tan \theta_{i-1} - \gamma \\
 &\vdots \\
 \tan \theta_N &= \tan \theta_{N-1} - \gamma
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Sumando miembro a miembro se obtiene el ángulo  $\theta_N$  en términos de del ángulo inicial  $\theta_0$  en la forma:

$$\boxed{\tan \theta_N = \tan \theta_0 - N \gamma} \tag{1.28}$$

Para el caso particular en que los extremos del cable están a la misma altura, por simetría, se tiene  $\tan \theta_0 = -\tan \theta_N$  lo cual permite escribir

$$\tan \theta_0 = \frac{1}{2} N \gamma \tag{1.29}$$

Al sumar miembro a miembro la relación de recurrencia (1.27) hasta el término  $N = i$ , luego utilizando (1.28) es posible determinar la relación entre los ángulos  $\theta_i$  y  $\theta_N$

$$\tan \theta_i = \tan \theta_0 - i \gamma = \frac{(N - 2i) \gamma}{2} \tag{1.30}$$

Los ángulos  $\theta_0$  y  $\theta_N$  se determinan a través de la siguiente relación

$$\theta_i = \arctan\left(\frac{(N - 2i) \gamma}{2}\right) \quad i = 0, 1, 2, 3 \dots N \tag{1.31}$$

Las coordenadas  $(x_i, y_i)$  del elemento  $i$ -ésimo se obtienen sumando las proyecciones sobre el eje  $X$  ( $d \cos \theta_j$ ), y sobre el eje  $Y$  ( $-d \sen \theta_j$ ,  $j = 0 \dots, i - 1$ ), donde  $d$  es la distancia entre dos elementos consecutivos, luego  $d = L/(N + 1)$ , de donde se obtiene

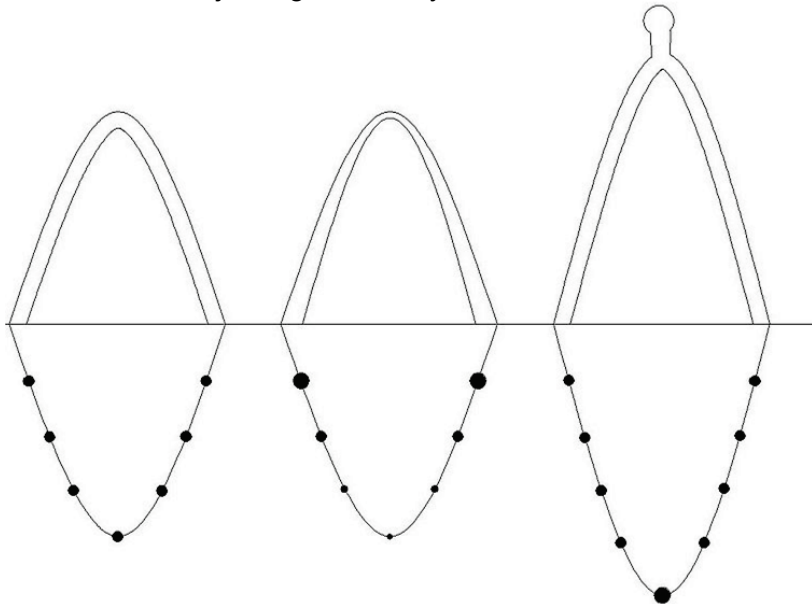
$$x_i = \frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{j=i-1} \cos \theta_j \quad ; \quad y_i = -\frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{j=i-1} \sen \theta_j \tag{1.32}$$



## 1.4. EL ARCO CATENARIO. EL MÉTODO DE INVERSIÓN DE LA CATENARIA

Cabe preguntarse qué relación guarda la curva catenaria con el diseño de los arcos. La explicación se encuentra en el hecho de que si consideramos un arco que tenga la misma geometría que la catenaria invertida, este arco se encontrará sometido únicamente a compresión. Esta es por tanto la forma ideal para el arco sometido únicamente a su propio peso, ya que es posible optimizar la sección del mismo ajustándola a la resistencia máxima a compresión del material. Cuando el arco está formado por elementos individuales cuyas superficies son perpendiculares a la curva del arco, no existen fuerzas de cizalla significativas en las uniones y el empuje al apoyo se transmite a lo largo de la línea del arco.

Del arco catenario se derivan los arcos antifuniculares, que tienen igualmente óptimas características constructivas y que se pueden obtener con facilidad invirtiendo la forma de una cuerda sometida a los efectos de cargas puntuales. La elección de las cargas puntuales apropiadas permite definir mejor la geometría y sección de los arcos.



*Figura 1.40: Arcos antifuniculares y sus curvas funiculares equivalentes*

En la medida que la forma de los arcos se corresponde con la antifunicular de la distribución de cargas, la estructura funcionará a compresión y en la medida que se separe de esta forma lo hará utilizando mecanismos auxiliares de flexión. Visto así un pórtico es un arco mal diseñado que evacúa la carga a base de flexiones. Se podría incluso afirmar que todas las estructuras funcionan como un arco y es importante descubrir el arco que albergan en su interior.

Además, para arcos catenarios de igual longitud, se cumple la norma de que a mayor altura, más pequeño es el empuje horizontal en los puntos de arranque, con lo que se pueden obtener grandes alturas con mínimos empujes laterales.

Esta idea de invertir la curva catenaria surgió mucho antes de conocer su formulación matemática. Probablemente fue Leonardo da Vinci, a finales del siglo XV, el primero en comprender esta vinculación entre catenarias y arcos. Entre sus manuscritos pueden encontrarse cadenas

colgando y geniales anotaciones como la de que "el arco trabaja de forma análoga puesto del derecho que del revés", lo que demuestra que conocía que la catenaria debía ser el antifunicular de las fuerzas sobre las dovelas del arco. Pero hubo que esperar casi dos siglos para que Robert Hooke, en 1675 [36], plasmase claramente esta idea, al afirmar que *"del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido se sostendrá el arco rígido"*.

Aunque Hooke no fue quien resolvió el problema matemático, algunos autores defienden que sí resolvió el problema técnico, al comprender que un arco funciona como un cable invertido.

Años después, en 1697, David Gregory [29] añadió un interesante matiz al afirmar que "si el resto de arcos se sostienen es porque hay una catenaria en su interior".

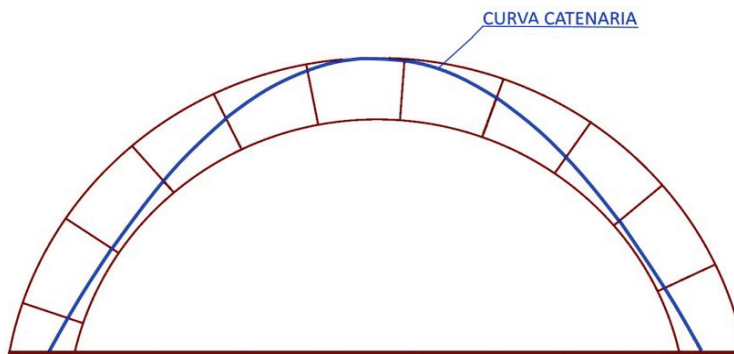


Figura 1.41: Idea de Gregory de que un arco cualquiera se sostiene si contiene un arco catenario en su interior



## 1.5. LAS ESTRUCTURAS ANTIFUNICULARES

De forma análoga a las Estructuras Tensadas, las estructuras antifuniculares o de compresión presentan líneas de presiones que coinciden en todos los puntos con el centro de gravedad de la sección recta. Pero, en este caso y a diferencia con las estructuras tensadas, dicha presión tiene signo negativo. Es decir, para un estado de cargas determinado, la estructura está sometida a compresión simple en todos sus puntos, sin flexión.

Como ya se ha comentado anteriormente, esta singularidad de los diseños sin flexión presenta grandes ventajas de cara a optimizar la sección de la estructura. Ha permitido salvar grandes luces con construcciones tradicionales de piedra o ladrillo, antes del desarrollo de las tecnologías del acero y del hormigón y de su empleo generalizado en la construcción.

En occidente se han utilizado históricamente geometrías poco eficientes. La arquitectura griega y romana utilizaba arcos derivados de la circunferencia que facilitaban su construcción. Los arcos apuntados de la arquitectura gótica presentan un mejor comportamiento pero aún están lejos de ser una buena aproximación a la catenaria. A pesar de las ideas expresadas por Hooke y Gregory y de la obtención de la formulación matemática de la catenaria a finales del siglo XVII, hubo que esperar hasta mediados del siglo XIX para contemplar formas catenarias en grandes obras arquitectónicas. El motivo principal es que la curva catenaria era considerada antiestética en esta época y la eficiencia y durabilidad no estaba convenientemente valorada.

Sin embargo, en otras culturas si se construían arcos, bóvedas y cúpulas con formas catenarias muchos siglos antes, aunque su empleo se debiese más a la intuición o al conocimiento empírico adquirido que al conocimiento científico.

Efectivamente, a lo largo de la historia aparecen algunos ejemplos de construcciones que muestran un acercamiento intuitivo o empírico al arco catenario. Posiblemente, el más antiguo de estos ejemplos lo constituye el Gran Arco del Palacio o Taq-i Kisra en la antigua Persia (figura 1.42), a 35 kilómetros al sur de la actual ciudad de Bagdad (Irak). Construido en el siglo III durante la dinastía sasánida, esta colosal bóveda, de más de 30 metros de altura, sigue en pie en la actualidad a pesar del terremoto y de la inundación sufrida a finales del siglo XIX, que derribaron una de las alas del palacio. Además, la acertada geometría de esta bóveda permitió realizar su construcción sin cimbrado o, al menos sin emplear cimbras completas, tal y como aseguran autores como Ortega y Noval, 1995 [64].



Figura 1.42: Palacio de Ctesifonte o Taq-i Kisra

La cúpula de la Mezquita de la Roca en Jerusalén (figura 1.43), con un diámetro de 31,87 metros y una altura de 56,60 metros, tiene también una geometría que próxima a la catenaria perfecta. Construida en Jerusalén entre los años 687 y 691, esta cúpula es una muestra de cómo el arte islámico mostraba un conocimiento arquitectónico muy evolucionado.



*Figura 1.43: Mezquita de la Roca. Jerusalén.*

También se puede apreciar una buena aproximación a la curva catenaria en la arquitectura tradicional de barro de la comunidad Musgum en las llanuras del norte de Camerún (figura 1.44). Estas viviendas, cuya existencia estaba contrastada ya en el siglo XVII, están hechas de barro comprimido secado al sol.



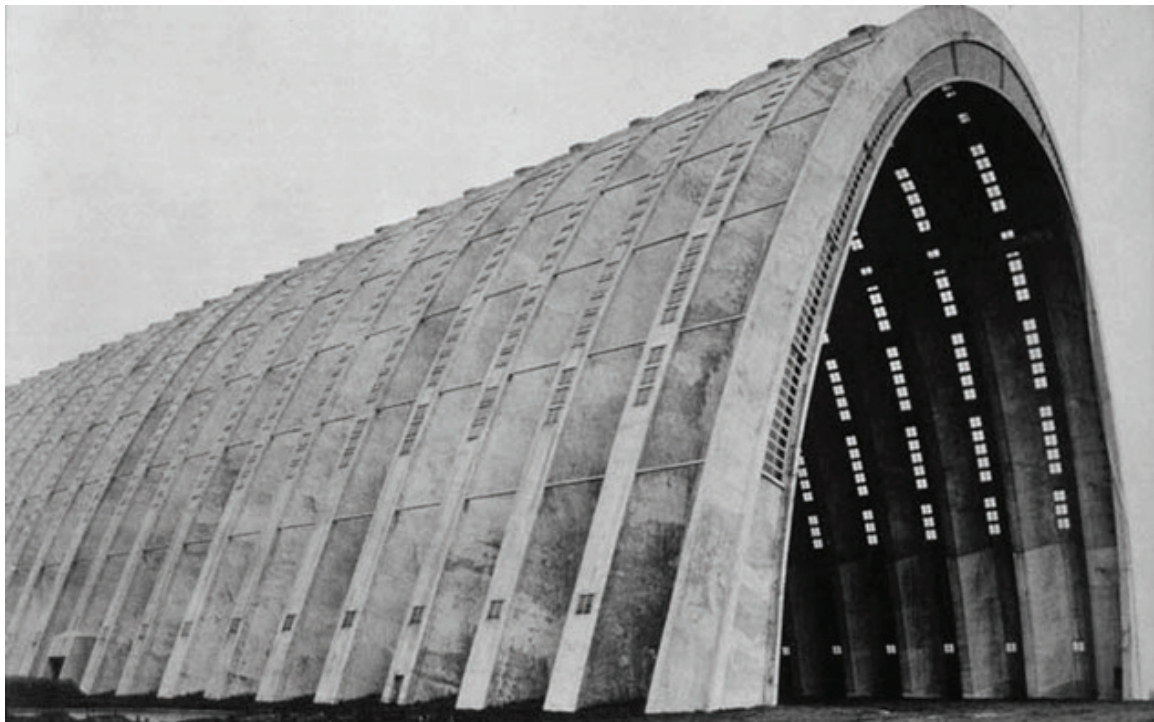
*Figura 1.44: Casas Musgum en Camerún*



De forma análoga, en el Noreste de África, durante siglos se encontró la forma de construir amplias habitaciones circulares cubiertas con una cúpula catenaria utilizando únicamente adobe y sin necesidad de entibar. Mientras duraba la construcción, los empujes horizontales eran tan pequeños que los adobes se mantenían en su posición simplemente con el rozamiento de los ya instalados y una vez cerrada la cúpula, ésta adquiría una resistencia extraordinaria. El desarrollo de ésta técnica surgió en Sudan como respuesta a la escasez y el alto coste de la madera, resultando inaccesible para la construcción de viviendas pobres, así como para realizar los andamiajes.

Volviendo a occidente, tras las aportaciones de Hooke y Gregory, son muy tímidas las apariciones de formas catenarias en las obras de arquitectura y de ingeniería. La cúpula de la Catedral de San Pablo, en cuyo diseño se cree que participó el propio Hooke, es uno de los pocos ejemplos que se encuentran. Una de las primeras aplicaciones del método de la inversión catenaria, que describió Thomas Young, en 1845 [93], aparece en la construcción de puentes en la Inglaterra del siglo XVIII. El alemán Wilhelm Tappe, en 1818 [85], propuso una arquitectura de formas catenarias, pero que desgraciadamente no se llegó a ejecutar.

A partir del siglo XX han sido numerosas las obras que han empleado geometrías antifuniculares. Eugène Freyssinet fue pionero en el diseño de estructuras a compresión con la construcción, en 1916, de dos Hangares para el Aeropuerto de Orly con forma de bóveda catenaria (figura 1.45).



*Figura 1.45: Hangar del Aeropuerto de Orly de hormigón pretensado. Eugène Freyssinet 1916 . París (Francia)*

Sin duda uno de los hitos históricos del método de inversión de formas funiculares corresponde a la obra de **Antoni Gaudí i Cornet** (1852-1926) cuya gran aportación fue el desarrollo y la aplicación sistemática de estos modelos en algunas de sus obras más conocidas.

Una de las principales características que diferencia a Gaudí del resto de arquitectos de su época es que, desde el inicio, hay una preocupación por el diseño de una estructura estable y no una mera comprobación de estabilidad a posteriori. Gaudí poseía una buena formación en cálculo de estructuras mediante métodos gráficos, que había tenido una enorme difusión a partir de los trabajos de Culmann en 1866 [18].

También fue pionero en el diseño de edificios a compresión construyendo maquetas funiculares partiendo de una estructura de hilos a la que añadía pequeños sacos cargados con perdigones hasta obtener la forma deseada (figura 1.46)



Figura 1.46: Maqueta funicular de Gaudí expuesta en el Centre Reus (Tarragona)

Este interés en construir estructuras estables le lleva a ser un gran defensor de los arcos catenarios y parabólicos, que eran muy poco habituales hasta entonces. Gaudí supo apreciar la belleza de estos arcos llegando a manifestar que *“La catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad a la construcción entera. La construcción autoestable de la catenaria evita los contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos”* (Bohigas, Giralt-Miracle y Casanova, 2002, p.169 [14]).

En la obra de Gaudí hay muchos ejemplos del uso de arcos catenarios, destacando los del Colegio de las Teresianas, la Casa Batlló o la Pedrera (Casa Milá) (figura 1.47).





Figura 1.47: Arcos catenarios en el Convento de las Teresianas (izquierda), Casa Batlló (centro) y La Pedrera (derecha)

Como reconocen algunos estudiosos del arquitecto, como Juan Bassegoda Nonell [12], el principal mérito de Gaudí es el de haber creado formas nuevas e inéditas utilizando materiales y técnicas tradicionales y esto es en buena parte gracias a la utilización de geometrías que colaboran a la estabilidad de la estructura.

Otra gran aportación de Gaudí fue la observación de la naturaleza. Esta se convierte en un referente continuo para su obra imitando sus formas y creando otras nuevas inspiradas en ella. Un ejemplo de ello se encuentra en el pórtico de la fachada de la Colonia Güell, con hiperboloides a semejanza de la geometría de los huesos (figura 1.48).



Figura 1.48: Semejanza entre los hiperboloides del pórtico de la Casa Batlló y los huesos de una mano.

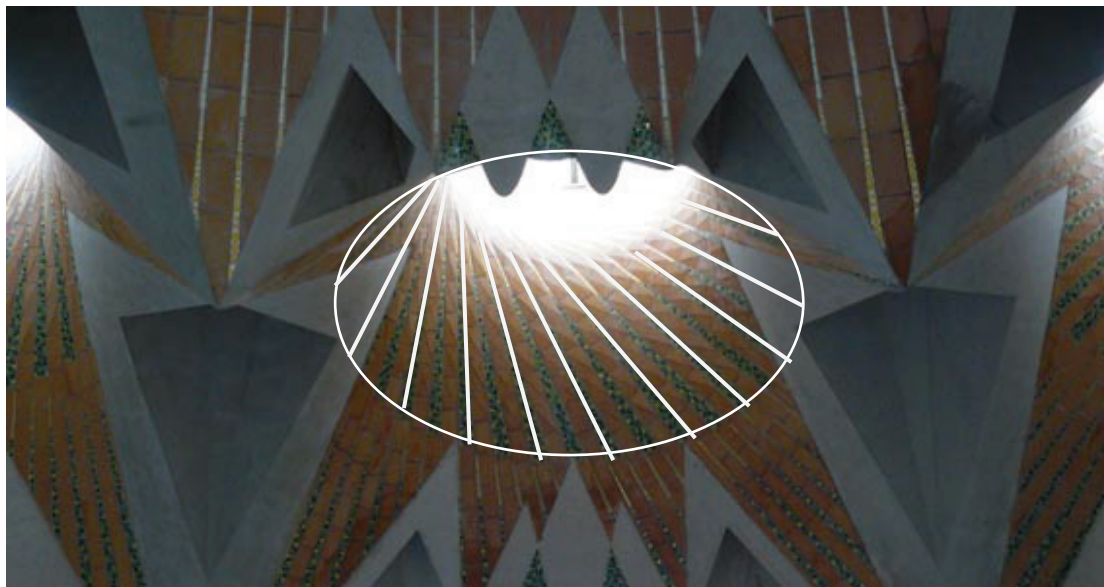
Gaudí también experimentó con nuevas formas geométricas para las bóvedas empleando superficies regladas: paraboloides hiperbólicos e hiperboloides de revolución. De nuevo se trata de una aportación completamente original.

Como ejemplo, las bóvedas del pórtico que rodea la cripta de la Colonia Güell (figura 1.49) tienen forma de paraboloides hiperbólicos. Esta forma, debido a su doble curvatura gaussiana negativa, trabaja a compresión en todos sus puntos a pesar de presentar un abombamiento que parece contradecir la esencia de toda construcción de fábrica.



*Figura 1.49: Forma de paraboloides hiperbólicos de la Cripta de la Colonia Güell. Gaudí. Barcelona (España)*

Además del Paraboloides hiperbólicos, en la Sagrada Familia pueden también apreciarse otras figuras geométricas que conforman las bóvedas de la catedral, como los hiperboloides de revolución de una hoja (figura 1.50)



*Figura 1.50: Forma de hiperboloides de revolución de una hoja en la Sagrada Família. Gaudí . Barcelona*

Otros arquitectos contemporáneos a Gaudí dejaron su huella en la arquitectura tradicional diseñada a compresión. El valenciano Rafael Guastavino Moreno, junto con su hijo Rafael Guastavino Expósito, utilizando la estática gráfica, construyeron en todo Estados Unidos impresionantes bóvedas y cúpulas de ladrillo plano con formas antifuniculares y secciones muy





livianas sin ningún tipo de cimbra. Aunque algunas de sus teorías no eran acertadas, como la cohesiva, Guastavino poseía el conocimiento de que el problema crucial en el proyecto de las fabricas no es la resistencia sino la geometría (figura 1.51).

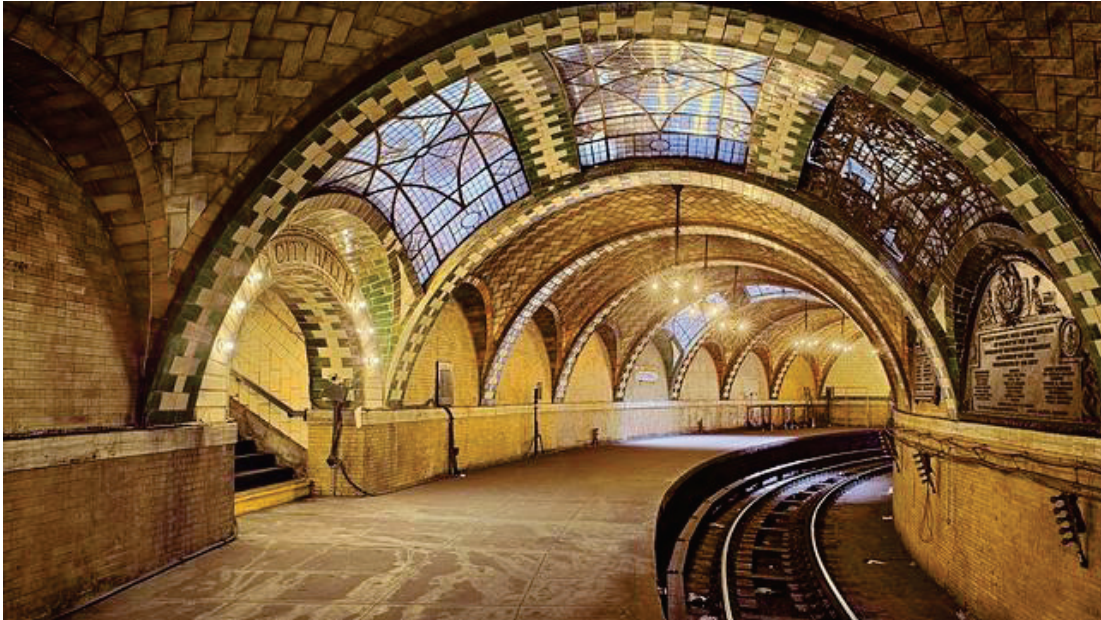


Figura 1.51: Estación de Metro de City Hall ("La catedral subterránea"). Guastavino. Nueva York (EE.UU.)

No cabe duda de que el arco catenario más famoso de la arquitectura es el Gateway Arch de San Luis (Missouri), con 192 metros de altura (figura 1.52). Este inmenso arco de acero inoxidable, obra del arquitecto norteamericano de origen finlandés Eero Saarinen y del ingeniero de estructuras alemán Hannskarl Bandel, constituye una maravilla de la construcción, sobre todo teniendo en cuenta que fue proyectado en 1947, antes de la aparición de las computadoras.



Figura 1.52: Gateway Arch. San Luis – Missouri (EEUU)

A partir de la segunda mitad del siglo XX, son numerosas las obras arquitectónicas con criterios de optimización a compresión simple. Tras la segunda guerra mundial surge una corriente arquitectónica que defiende las bóvedas catenarias como modelo de construcción de bajo coste. Es lo que algunos autores han denominado Sistema Ctesiphonte (Rabasco P., 2011 [73]). Dignos de mención son los proyectos del arquitecto hispano mejicano Félix Candela, que acude en numerables ocasiones a la bóveda catenaria y al paraboloides hiperbólico (figura 1.53), así como los de viviendas ultrabaratadas llevados a cabo por arquitectos como Rafael de La-Hoz y J. M<sup>a</sup>. García de Paredes en 1953 (figura 1.54).



Figura 1.53: Pabellón de rayos cósmicos. 1951. F. Candela y Jorge González. La Muela (Zaragoza)



Figura 1.54: Viviendas ultrabaratadas. 1953. R. de la Hoz y J.M. Paredes Villaviciosa de Córdoba (Córdoba).

En 1955, los arquitectos Eduardo Torroja y Fruto Vivas diseñaron la bóveda de hormigón del club Tachira en Caracas (Venezuela) (Escrig y Sánchez, 2007 [22]). El diseño se obtuvo a partir de una doble curvatura generadas a partir de un arco catenario que se desplaza de forma paralela a través de una directriz trigonométrica alabeada (figura 1.55)



Figura 1.55: Club Tachira. E. Torroja y F. Vivas. Caracas (Venezuela)



El ingeniero suizo Heinz Isler diseñó sus láminas de hormigón armado a partir de modelos suspendidos que elaboraba de una forma muy novedosa y original (Chilton, 2000 [16]). Sumergía un tejido o una malla de hilo en un fluido de poliéster o parafina líquida y dejaba que se solidificara suspendido de unos hilos para así, una vez invertido, obtener la geometría antifunicular deseada (figura 1.56).



Figura 1.56. Izquierda: Garden Center Wyss de Heinz Isler.1961. Zuchwil (Suiza). Derecha: Modelo colgante de Isler antes y después de solidificarse.

En 1975 Frei Otto y su equipo utilizaron modelos colgantes para encontrar la forma de la cubierta de celosía madera de cicuta en Mannheim (figura 1.57). La piel del edificio estaba compuesta por fibras de poliéster tejidas impregnadas con pasta de PVC y con una capa de pigmentación, reflectante al calor.



Figura 1.57. Estructura temporal Multihalle, Frei Otto. Mannheim (Alemania )



Otros arquitectos contemporáneos como Santiago Calatrava han seguido la escuela de Gaudí con la introducción de formas catenarias. Como ejemplo, la Galería BCE Place de Toronto (figura 1.58), construida en 1992, donde se puede ver cierta influencia del arquitecto catalán. Observando la imagen de la Galería, se aprecia cierto parecido con el Colegio de las Teresianas. Además, las vigas, que luego se cierran en un arco parabólico, recuerdan a los árboles (de nuevo, la presencia de Gaudí); más concretamente, la Galería nos muestra un “camino entre árboles” que la comunica con la ciudad. La Galería se cierra con una cubierta acristalada por la que entra la luz natural.



*Figura 1.58: Galería BCE Place. Toronto (Canadá)*



## 2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presentan los principales elementos que constituyen el trabajo de investigación.

Se identificarán para ello las razones que justifican abordar este estudio, los objetivos de la investigación, el estado del arte, las hipótesis para finalmente realizar un desarrollo teórico del método que se propone. Una vez finalizado el planteamiento del método, se llevará a cabo una comprobación práctica del método propuesto evaluando la consecución de objetivos para extraer las conclusiones finales.

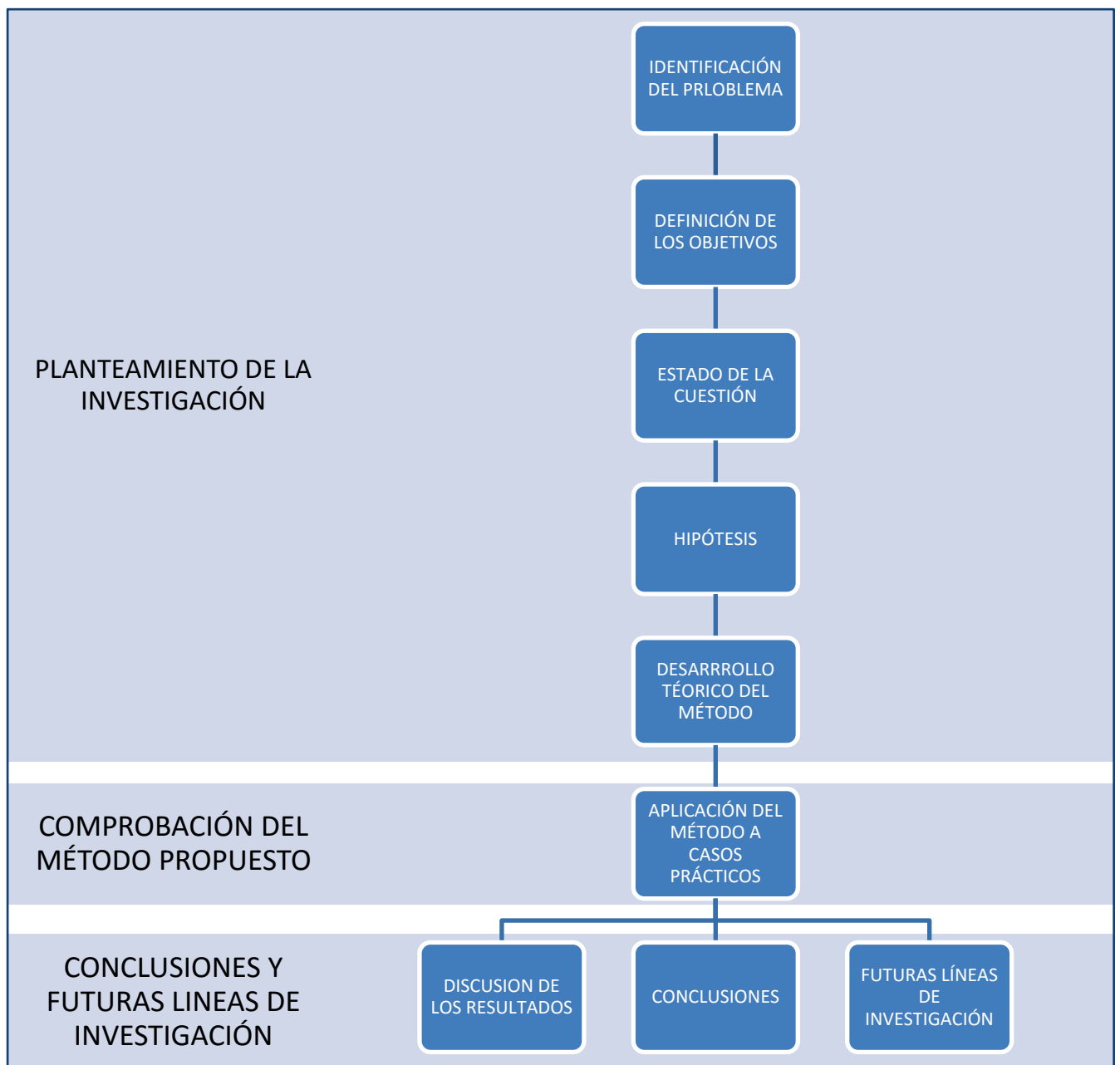


Figura 2.1: Metodología de investigación.

## 2.1. JUSTIFICACIÓN

El motivo principal que justifica esta investigación es la necesidad de disponer de un método general de búsqueda de forma que pueda aplicarse a todo tipo de diseños sin flexión y que permita al proyectista establecer condicionantes geométricos y obtener resultados en tiempo real.

En el apartado 1.1.4.2.5 se expusieron los principales métodos de obtención de formas de equilibrio. Cada uno de ellos tiene un campo de aplicación determinado, aunque generalmente es posible escoger entre diferentes métodos para resolver un determinado problema.

Pero, independientemente del método que se elija, si se desea que la configuración de equilibrio obtenida cumpla ciertos requisitos geométricos, es necesario repetir el cálculo en numerosas ocasiones a modo de ensayo-error.

Para el diseñador puede resultar un procedimiento lento y complejo al tener que modificar multitud de variables hasta conseguir una forma de equilibrio que se aproxime al diseño preconcebido. En determinados casos los métodos a utilizar presentan no linealidades que llevan a no obtener una solución del problema por falta de convergencia.

Como muestra la figura 2.1, se trata de un proceso iterativo en el que se van obteniendo distintas formas de equilibrio hasta escoger la forma deseada o la que se aproxime a la idea preconcebida del diseñador.

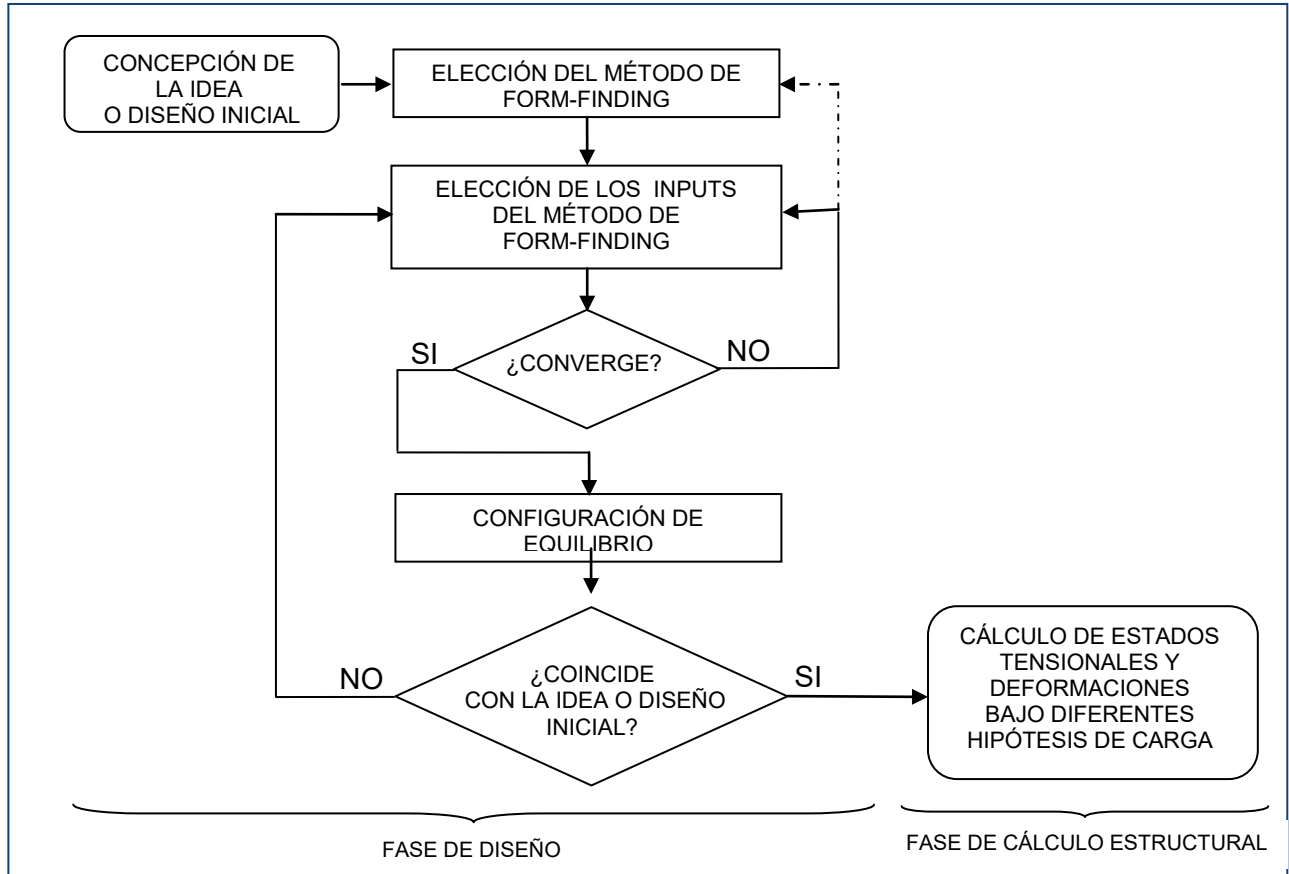


Figura 2.2: Esquema del proceso iterativo de diseño de estructuras sin flexión.



Del esquema anterior se deduce la siguiente problemática a la hora de abordar un diseño sin flexión:

- A. LA ELECCIÓN DEL MÉTODO DE FORM-FINDING:** No hay una única herramienta para la búsqueda de forma sin flexión sino que existen multitud de métodos con formulaciones muy diferentes. El proyectista debe tener conocimiento de estas técnicas y elegir la que resulte más apropiada para cada caso concreto, resultando importante una buena práctica en el uso del método elegido para evitar problemas en la forma final. Es sin duda un enorme esfuerzo que puede evitarse planteando un método general que sea eficiente y válido para todos los casos. Como explica Wakefield en su artículo publicado en 1999 [90], lo importante no es el método de cálculo que se utilice, sino la experiencia del diseñador con dicho método.
- B. LA ELECCIÓN DE LAS VARIABLES "INPUTS" DEL MÉTODO:** Una vez elegida la técnica de form-finding a emplear es necesario escoger unas variables de entrada apropiados para obtener una solución de equilibrio satisfactoria. Cada método necesita unos parámetros determinados y cada elección modificará la solución obtenida. Algunos INPUTS son comunes en todos los métodos, como las coordenadas de los nodos fijos o las fuerzas externas, pero otros son específicos de cada método, como las densidades de fuerza en el FDM, las tensiones en el TNA o el coeficiente de amortiguamiento viscoso, las masas o los incrementos de tiempo en el DRM. Esta elección determinará la forma de equilibrio obtenida e incluso, en problemas no lineales, puede llevar a una falta de convergencia. En estos casos habrá que repetir el procedimiento modificando estos parámetros o adoptando un método diferente. Puede convertirse en un trabajo que requiere mucho tiempo y recursos debido a que se manejan multitud de parámetros y los sistemas de ecuaciones a resolver pueden llegar a tener un tamaño considerable.
- C. LA APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN AL BOCETO INICIAL:** Actualmente no existe ninguna herramienta que permita, a partir de una configuración de equilibrio obtenida, modificar esta geometría para aproximarla al diseño preconcebido de una forma directa, es decir, estableciendo sus dimensiones. Los INPUTS que permiten cambiar las configuraciones de equilibrio no guardan relación con la geometría, lo que obliga a realizar numerosas iteraciones y poseer una buena práctica en el manejo de estos métodos.

Queda evidenciada así la necesidad de encontrar una técnica que simplifique este procedimiento y que sea aplicable a todos los casos, permitiendo obtener una configuración de equilibrio de forma directa y con unas características geométricas determinadas.



## 2.2. OBJETIVOS Y CONTRIBUCIONES

El **objetivo principal** de este proyecto es ofrecer un método que permita obtener configuraciones de equilibrio de estructuras sin flexión a partir de características del diseño, cumpliendo así los condicionantes geométricos del proyectista. De esta forma se evitan numerosos tanteos durante el procedimiento de diseño de este tipo de estructuras.

Para alcanzar este objetivo general es preciso lograr previamente los siguientes **objetivos específicos**:

1. Analizar el procedimiento de búsqueda de configuraciones de equilibrio y la problemática que surge en su aplicación práctica.
2. Establecer un método general de cálculo de configuraciones de equilibrio que resulte válido tanto para las estructuras tensadas como para las antifuniculares. Esta técnica deberá además de ser además eficaz y resolver el problema con el menor consumo de recursos posible. Para escoger justificadamente este método habrá que valorar las ventajas y limitaciones de los principales métodos de búsqueda de forma hoy día disponibles.
3. Estudiar en qué medida afecta la variación de los parámetros o variables iniciales del método escogido a la solución alcanzada.
4. Proponer una técnica que proporcione los datos de partida del método general de diseño de estructuras sin flexión a partir de parámetros geométricos del diseño.
5. Validar el método propuesto a mediante la resolución de los diferentes diseños posibles.
6. Discutir los resultados obtenidos, analizar las limitaciones del método y proponer futuras líneas de trabajo relacionadas con esta investigación.

Estos objetivos quedarán plasmados mediante las siguientes **contribuciones** de este trabajo al campo de las estructuras tensadas y antifuniculares:

1. Se adopta un enfoque práctico del cálculo de configuraciones de equilibrio sin flexión, planteando los problemas del diseño de este tipo de estructuras. En el apartado 1.1. se ha realizado una descripción de los métodos de búsqueda de forma tratándolos como técnicas de optimización estructural, aspecto que parece haberse olvidado hoy día en la mayoría de publicaciones relacionadas con este campo de investigación. Además se plantea el diseño de estructuras sin flexión desde un punto de vista práctico, mostrando la problemática para obtener una configuración de equilibrio sin flexión y aproximar los





resultados al diseño preconcebido. Esta problemática ha quedado claramente plasmada en el apartado anterior.

2. Se analizarán las ventajas y las limitaciones de los diferentes métodos de búsqueda de configuraciones de equilibrio al objeto de facilitar al diseñador la elección del método. En base a este análisis se escogerá el método que, a criterio de este autor, resulta más apropiado para el desarrollo del resto de objetivos de esta investigación.

La técnica que elegida es una variante del FDM propuesta por Carbonell-Marquez, Gil-Martín, Hernández-Montes y Jurado-Piña en el año 2012 [15] que se describirá detalladamente en el apartado 2.3. y al que denotaremos como **Método antifunicular de densidades de fuerza con mallado topológico TM-FDM<sub>A</sub>** (Topological Mapping implemented in Force Density Method for antifunicular structures).

3. Se analiza la influencia de las densidades de fuerza en las formas de equilibrio estableciendo técnicas de agrupamiento que reduzcan el número de variables. Una de las desventajas del FDM es que no existe una relación clara entre estos parámetros y la forma de equilibrio obtenida, ya que estos están relacionados con los estados tensionales y no con la geometría. El presente trabajo de investigación pretende así facilitar la obtención de la forma deseada a través la comprensión del significado de estos parámetros.
4. A través del **Método de Aproximación Catenaria MAC** que se propone en esta investigación y que se describirá en el apartado 2.6., es posible la obtención de las densidades de fuerza a partir de valores geométricos del diseño. De esta forma se pretende abordar los problemas B y C expuestos anteriormente.

Partiendo de datos como la altura o el perímetro de una sección de cúpula o de bóveda, es posible calcular la curva catenaria equivalente que se aproxime a dicha sección estructural. Posteriormente, tras un procedimiento de calibración en base a las características de los materiales y la estructura del mallado, se puede obtener la densidad de fuerza equivalente para todos los elementos de dicha sección estructural. De esta forma el cálculo de la forma de equilibrio a través del TM-FDM<sub>A</sub> resulta directo y de menor complejidad.

5. Se comprueba la validez del MAC a través de su aplicación a diferentes estructuras y se proponen nuevas líneas de investigación que mejoren esta técnica.

## 2.3. ESTADO DE LA CUESTIÓN

En el capítulo de introducción se han analizado dos tipologías estructurales aparentemente muy distintas entre sí: las Estructuras Tensadas y las Antifuniculares. A pesar de presentar una morfología muy diferente, pueden incluirse ambas en un mismo grupo o tipo estructural atendiendo a la falta de esfuerzos flectores en sus elementos.

También se ha visto como esta característica común permite utilizar las mismas herramientas para determinar su forma y estado tensional en la fase de diseño: los métodos de form-finding. A continuación se valorarán las ventajas y limitaciones de estas técnicas de diseño eligiendo la que, a criterio de este autor, resulta más eficaz para el cumplimiento de los objetivos marcados.

### 2.3.1. LA BÚSQUEDA DE CONFIGURACIONES DE EQUILIBRIO SIN FLEXIÓN

A diferencia de las obras de ingeniería y arquitectura tradicionales, en las estructuras sin flexión, la forma geométrica no resulta conocida inicialmente sino que es otra incógnita más del problema. La solución geométrica o configuración de equilibrio coincidirá con la que presente ausencia de flexiones en todos los puntos.

Además, partiendo de las mismas condiciones de contorno, no hay una única solución al problema. Es evidente que existen infinitos polígonos funiculares que comparten los mismos puntos de apoyo y que varían su geometría en función de la longitud de los hilos o de la distribución de las masas. De forma análoga, pueden encontrarse infinitas soluciones de equilibrio para una misma superficie tensada tridimensional o para una estructura de compresión (figura 2.3). Cada solución al problema estará íntimamente ligada a su estado tensional.

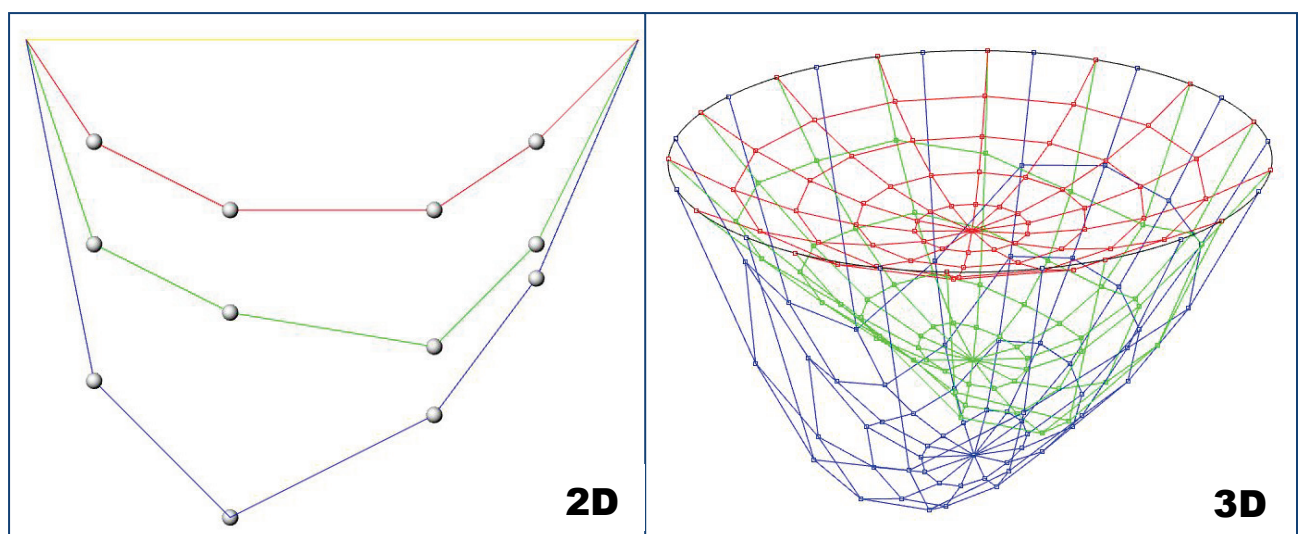


Figura 2.3: Diferentes configuraciones de equilibrio de elementos 2D y 3D para unas mismas condiciones de contorno.



En el apartado 1.1.4.2.5 se han expuesto los diferentes métodos de cálculo de configuraciones de equilibrio para estructuras sin flexión: GM, DRM, MDMN o SMM, FDM y sus variantes, TNA y PSS.

Los métodos difieren en dos aspectos principales: cómo se definen las fuerzas internas, y la forma de resolución matemática.

La definición de las fuerzas internas depende de qué tipo de información geométrica está disponible para el diseñador. En ocasiones se tiene información sobre la geometría inicial lo que puede ser la razón principal para la elección de un método u otro. En los casos en los que cualquier forma de equilibrio estático es aceptable se abordan de manera más eficiente a través de métodos como el FDM y TNA, mientras que los casos en los que las propiedades del material, la geometría inicial y la posterior deformación son conocidos, los métodos como DRM o SMM son más apropiados al ser más sencilla su aplicación. Los esquemas de integración explícita de la DRM también evitan cualquier necesidad de álgebra matricial (resolución de un sistema lineal, invertir una matriz), que puede ser una ventaja en términos de sencillez en la implementación siempre que la integración de estas funciones sea factible.

También se puede distinguir entre métodos discretos y continuos. Los primeros métodos que aparecieron, en los años 60 y 70, se aplicaban a las estructuras discretas, del tipo redes de cables. Posteriormente fueron apareciendo nuevos métodos y adaptaciones de los existentes para su aplicación a elementos de superficie, del tipo membranas. Teniendo en cuenta que es posible modelizar un elemento superficial a través de un mallado, no resulta complicado adaptar los métodos discretos para obtener configuraciones de equilibrio de membranas tensadas.

Por otra parte, atendiendo al modelo o la forma de resolver el problema, es posible clasificar estos métodos en tres principales categorías:

- **Métodos matriciales de rigidez:** Se basan en el uso de modelos elásticos y matrices de rigidez. Son los métodos más antiguos de búsqueda de formas de equilibrio sin tensión. En esta categoría se incluyen GM, MDMN o SMM
- **Métodos geométricos:** considera elementos independientes con una única rigidez geométrica. Forman parte de esta categoría el FDM y sus variantes así como el TNA.
- **Métodos de equilibrio dinámico** resuelven el problema de la dinámica de equilibrio para llegar a una solución de estado estacionario. Forman parte de esta categoría el DRM y el PSS.

Los métodos de form-finding se aplican indistintamente a estructuras tensadas y antifuniculares puesto que, mediante la aplicación de una simetría con respecto al plano horizontal (método de inversión), es posible pasar de un sistema a otro. Pero es importante indicar que algunos métodos geométricos permiten la consideración del peso propio en la generación de formas de equilibrio, sin la necesidad de introducirlo como fuerzas externas, lo que evita realizar numerosas iteraciones en la búsqueda de configuraciones de equilibrio de estructuras pesadas.



La elección del método es pues una decisión que debe tomar el proyectista según su criterio y valorando las ventajas y los inconvenientes de cada técnica para cada caso concreto. En la tabla 2.1 se resumen las ventajas y limitaciones de los principales métodos de form-finding.

PRINCIPALES MÉTODOS DE FORM-FINDING		VENTAJAS	LIMITACIONES
<b>Método de relajación dinámica</b>	<b>DRM</b>	Funciona muy bien ante casos con grandes desplazamientos y con no-linealidades muy fuertes.	Se formula con ecuaciones de segundo orden, con lo que siempre obliga a un procedimiento iterativo y no facilita una solución para determinados problemas. Presupone una relación lineal entre fuerzas y desplazamientos.
<b>Método de densidades de fuerza y sus variantes</b>	<b>FDM GSM, MFDS, MFDF, MDFN SSDM, URS<sub>HM</sub></b>	Rapidez y calidad de las formas generadas para estructuras tensadas. Flexibilidad en su aplicación, con buenos resultados. Resulta muy apropiada y sencilla la implementación en un algoritmo junto a la técnica de mallado topológico.	Con la consideración del peso propio en estructuras antifuniculares, el método se convierte en no lineal.
<b>Método de la rejilla</b>	<b>GM</b>	Rapidez en su aplicación y sencillez de formulación.	Condición de ortogonalidad de la solución. Resultados poco exactos
<b>Método de desplazamientos no lineal o de la rigidez transitoria</b>	<b>MDMN o SMM</b>	Ofrece resultados muy precisos. Permite emplear las mismas herramientas tanto para la obtención de la forma como para el cálculo posterior bajo diferentes hipótesis de carga	La no linealidad obliga a iteraciones y no facilita una solución para determinados problemas. El tamaño de la matriz de rigidez aumenta de manera exponencial con el número de nodos
<b>Método de partículas-muelles</b>	<b>PSS</b>	Calidad de las formas generadas, y sencillez de aplicación puesto que utiliza un sistema de muelles que funciona de forma análoga al FDM.	La no linealidad obliga a iteraciones y no facilita una solución para determinados problemas.
<b>Análisis de redes de empujes</b>	<b>TNA</b>	Rapidez y calidad de las formas generadas para estructuras tensadas. Resulta sencillo modificar la configuración de equilibrio obtenida puesto que basta con modificar las tensiones de las barras.	Es un método diseñado para estructuras antifuniculares, no contemplando configuraciones en tensión. Es un método no lineal, por lo que en ocasiones no habrá convergencia

Tabla 2.1: Principales ventajas y limitaciones de los métodos de búsqueda de configuraciones de equilibrio.

Uno de los criterios de elección del método es su rapidez medida en el tiempo que tarda la computadora en resolver la configuración de equilibrio. En este sentido resulta muy interesante el artículo presentado por Veenendaal y Block en el año 2012 [88]. En este trabajo se compara el rendimiento de los diferentes métodos aplicados a la obtención de la configuración de equilibrio representado en la figura 2.4 (paraboloide hiperbólico), adoptando fuerzas constantes  $f=1$ .

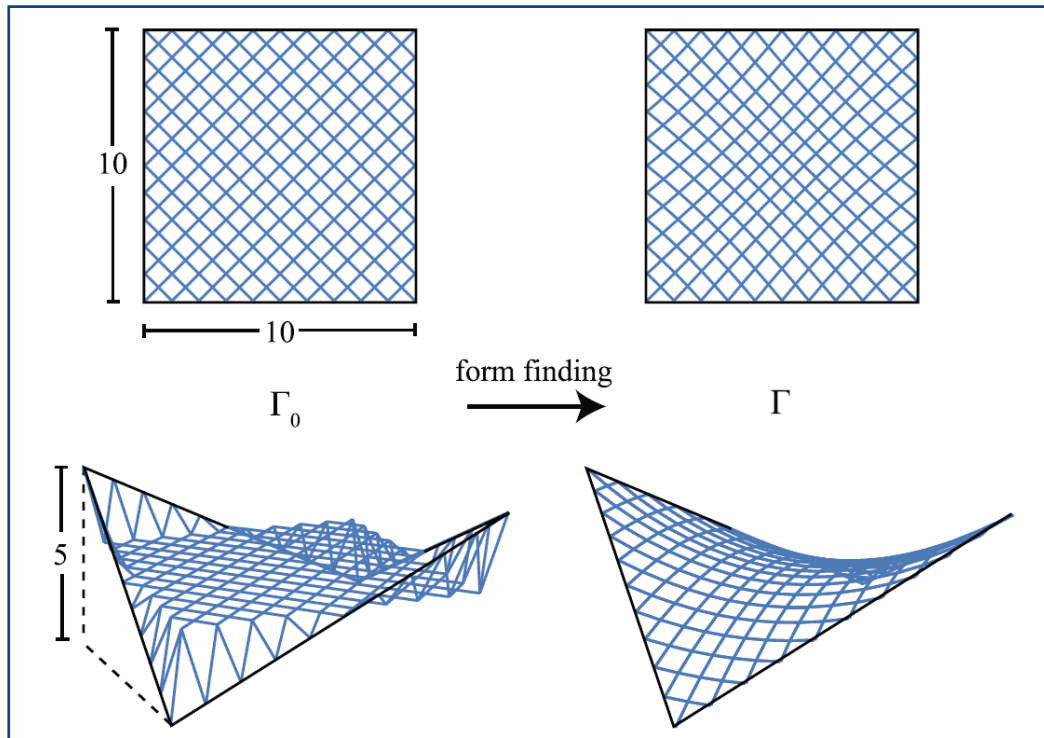


Figura 2.4: Caso planteado por Veenendaal y Block para comparar los rendimientos de los diferentes métodos de form-finding

Los resultados obtenidos considerando diferentes densidades de mallado o grados de libertad (dof) se representan en la figura 2.5. Cada método se ejecutó 100 veces para cada densidad de mallado representada en la gráfica y los resultados han sido promediados.

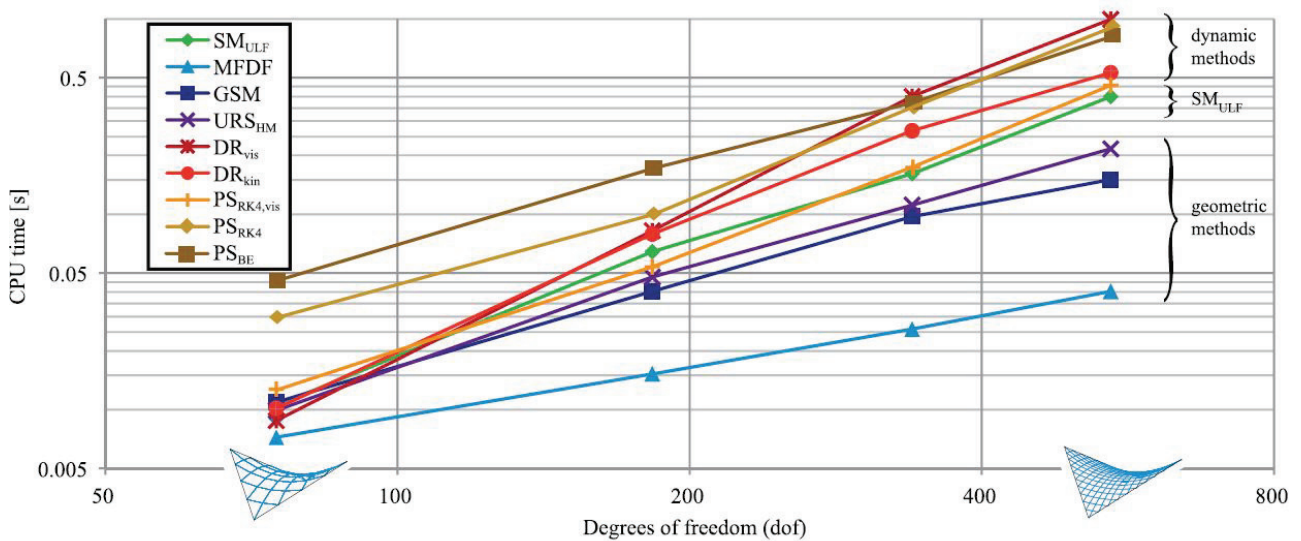


Figura 2.5: Tiempo de computarización de los resultados arrojados por diferentes métodos form-finding obtenidos por Veenendaal y Block considerando diferentes grados de libertad.





Puesto que la nomenclatura utilizada por Veenendaal y Block difiere sensiblemente de la utilizada en esta investigación, conviene aclarar que  $SM_{ULF}$  se refiere al SMM utilizando la formulación de Lagrange actualizada (Updated Lagrangian Formulation),  $DR_{VIS}$  y  $DR_{KIN}$  se refieren al DRM considerando amortiguamiento viscoso o amortiguamiento cinético respectivamente, mientras que los términos  $PS_{BE}$ ,  $PS_{RK4}$ ,  $PS_{RK4,vis}$  se refieren a diferentes modalidades del PSS.

De la gráfica anterior se desprende que el FDM, en la versión mejorada empleada en este caso (MFDF), resulta el método más eficaz para obtener la forma equilibrio en este rango de grados de libertad. Ha quedado fuera de este estudio el TNA al ser un método no aplicable a membranas tensadas.

En sintonía con estos resultados y atendiendo además a otras razones que se indican a continuación, se ha optado por la utilización del FDM en este trabajo de investigación. Es un método cuya eficacia y versatilidad ha quedado contrastada por multitud de autores y que reúne las siguientes condiciones:

1. Es una técnica que puede emplearse en estructuras tensadas, en estructuras de compresión e incluso en estructuras sin flexión de tipo mixto, es decir, con elementos trabajando a tracción y elementos sometidos a compresión simple. Esta es la principal ventaja del FDM frente al resto de los métodos utilizados en el form-finding, ya que ninguno de ellos resulta tan versátil como el FDM.
2. Admite una programación informática sencilla y directa gracias a que se formula a través de un sistema de ecuaciones lineales. Eso permite obtener formas de equilibrio de forma rápida aun considerando muchos grados de libertad. Si se atiende a la formulación matemática, los métodos geométricos se encuentran en clara ventaja frente a los métodos dinámicos, que plantean un sistema de ecuaciones de segundo orden y a los métodos de matriciales de rigidez que proponen un procedimiento iterativo en el cálculo de cada configuración de equilibrio.
3. Resulta sencilla la construcción de algoritmos que integren el FDM junto a técnicas de automallado que atienden a las características topológicas de la estructura.
4. Mediante una sencilla modificación en su formulación es posible calcular formas de equilibrio que tienen en consideración el peso propio de la estructura. Esta modificación de la formulación original de Linkwitz y Schek, que denotaremos como  $FDM_A$ , permite abordar el equilibrio de estructuras antifuniculares de una forma directa, aunque perdiendo la linealidad en el sistema de ecuaciones. Dado que el método que se propone en esta investigación tiene su aplicación principal en estructuras antifuniculares, resulta muy práctica esta variante del método.

### 2.3.2. EL MÉTODO DE DENSIDADES DE FUERZAS

Tal y como se avanzó en el apartado 1.1.4.2.5. el FDM fue introducido en los años 70 por Linkwitz y Schek y es uno de los más utilizados en el diseño de estructuras sin flexión. Permite obtener la forma de equilibrio de una tensoestructura o de una estructura antifuncular a través de la resolución de un sistema de ecuaciones.

El procedimiento puede resumirse en cuatro sencillos pasos:

#### 1. Definición de la estructura de nodos-conexiones:

Es posible representar la estructura como una malla de nodos conectados entre sí a través de un número determinado de ramas dispuestas a criterio del calculista. Esta estructura de nodos-conexiones podrá adoptar múltiples formas en función del valor que adquieran los **VECTORES DE COORDENADAS**, formados por las coordenadas  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  de todos los nodos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad (2.01)$$

El método permite la imposición de unas condiciones de contorno en una serie de nodos (nodos fijos) mientras que el resto (nodos libres) serán incógnitas del sistema de ecuaciones.

Las conexiones entre los distintos nodos se representan a través de la **MATRIZ DE CONECTIVIDAD "C"**, matriz fundamental dentro del FDM. Cada fila de esta matriz define una rama de la malla mientras que cada columna equivale a un nodo de la estructura. En cada fila "i" sólo existirán dos valores distintos de cero, con valor 1 o -1, que indicarán los nodos conectados por la rama i.

Con el signo se define la dirección de la rama o conexión. De esta forma la matriz **C** tendrá tantas filas como ramas posea la malla y tantas columnas como nodos existan (figura 2.6).

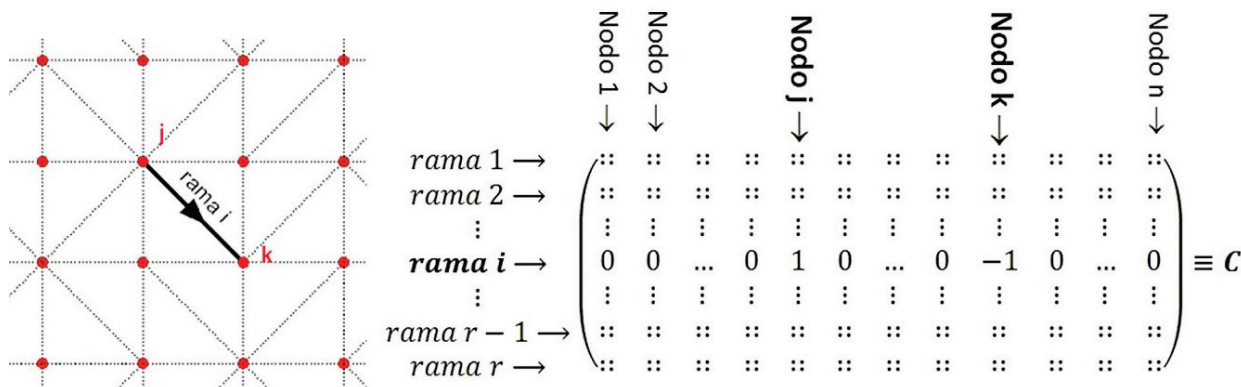


Figura 2.6: Obtención de la Matriz de Conectividad "C". Siendo n el número total de nodos y r el número total de ramas



## 2. Obtención de las fuerzas externas:

Las fuerzas externas se introducen como fuerzas puntuales aplicadas en cada nodo y se representan a través de los **VECTORES DE FUERZA**, formados por las componentes  $f_{xi}$ ,  $f_{yi}$ ,  $f_{zi}$  de las fuerza aplicadas a cada nodo:

$$\mathbf{f}_x = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ \vdots \\ f_{xn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_y = \begin{pmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \\ \vdots \\ f_{yn} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_z = \begin{pmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ \vdots \\ f_{zn} \end{pmatrix} \quad (2.02)$$

Ciertos valores de estos vectores serán conocidos, como es el caso de las componentes de las fuerzas externas aplicadas en cada nodo, mientras que otros valores, como las componentes de las fuerzas de reacción de los nodos fijos, serán incógnitas del sistema de ecuaciones.

Uno de los mayores inconvenientes del método consiste en la necesidad de transformar a fuerzas nodales todas las fuerzas superficiales o de volumen que afectan a la estructura.

## 3. Determinación de las densidades de fuerza:

Estas se definen como la relación entre la fuerza de tracción o compresión “s” y la longitud “l” de cada conexión o rama.

Es decir, para cada rama i:

$$q_i = \frac{s_i}{l_i} \quad [2.03]$$

Así es posible definir la **MATRIZ DE DENSIDAD DE FUERZAS Q** como la matriz diagonal, de dimensión rxr, formada por las densidades de fuerzas de todas las ramas:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_r \end{pmatrix} \quad [2.04]$$

## 4. Resolución del sistema de ecuaciones del MDF

Finalmente, planteando el equilibrio de fuerzas en los nodos, se obtienen las ecuaciones del Método de Densidad de Fuerzas:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}_x &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}_y &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{z} + \mathbf{f}_z &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.05)$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema lineal donde los valores conocidos son las coordenadas de los puntos fijos, los vectores de fuerza aplicados en los nodos y las densidades de fuerza de cada rama.

Para comprender la equivalencia de estas ecuaciones con las ecuaciones de equilibrio consideraremos a modo de ejemplo una malla de cuatro nodos definida en la figura 2.7.

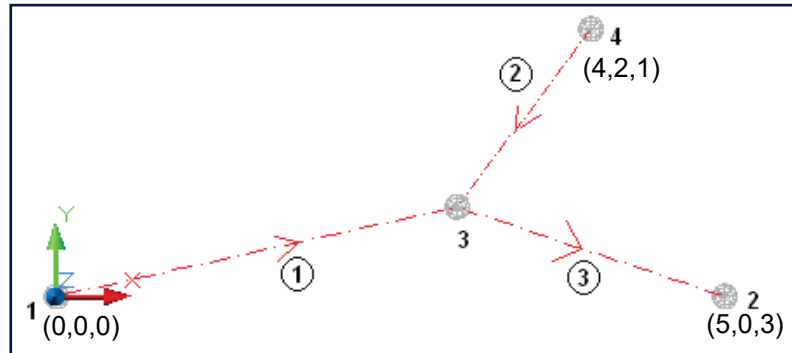


Figura 2.7: Ejemplo de estructura nodos-conexiones con tres nodos fijos (1,2 y 4) y un nodo móvil (3). Vista en planta.

La matriz de conectividad de esta estructura es:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.06)$$

Las ecuaciones de equilibrio para el nodo 3 se pueden expresar igualando la suma de las proyecciones de las fuerzas internas a lo largo de cada uno de los ejes cartesianos, con la proyección de la fuerza externa aplicada en dicho nodo:

$$\text{Nodo 3} \begin{cases} \frac{s_1}{l_1} \cdot (x_3 - x_1) + \frac{s_2}{l_2} \cdot (x_3 - x_4) + \frac{s_3}{l_3} \cdot (x_3 - x_2) = -f_{3x} \\ \frac{s_1}{l_1} \cdot (y_3 - y_1) + \frac{s_2}{l_2} \cdot (y_3 - y_4) + \frac{s_3}{l_3} \cdot (y_3 - y_2) = -f_{3y} \\ \frac{s_1}{l_1} \cdot (z_3 - z_1) + \frac{s_2}{l_2} \cdot (z_3 - z_4) + \frac{s_3}{l_3} \cdot (z_3 - z_2) = -f_{3z} \end{cases} \quad (2.07)$$

Análogamente se pueden obtener las ecuaciones de equilibrio para el resto de los nodos:

$$\text{Nodo 1} \begin{cases} \frac{s_1}{l_1} \cdot (x_1 - x_3) = -f_{1x} \\ \frac{s_1}{l_1} \cdot (y_1 - y_3) = -f_{1y} \\ \frac{s_1}{l_1} \cdot (z_1 - z_3) = -f_{1z} \end{cases} \quad (2.08)$$



$$\text{Nodo 2} \quad \begin{cases} \frac{s_3}{l_3} \cdot (x_2 - x_3) = -f_{2x} \\ \frac{s_3}{l_3} \cdot (y_2 - y_3) = -f_{2y} \\ \frac{s_3}{l_3} \cdot (z_2 - z_3) = -f_{2z} \end{cases} \quad (2.09)$$

$$\text{Nodo 4} \quad \begin{cases} \frac{s_2}{l_2} \cdot (x_3 - x_4) = -f_{4x} \\ \frac{s_2}{l_2} \cdot (y_3 - y_4) = -f_{4y} \\ \frac{s_2}{l_2} \cdot (z_3 - z_4) = -f_{4z} \end{cases} \quad (2.10)$$

La primera ecuación de cada uno de estos sistemas se puede obtener descomponiendo el primer término en el producto de la matriz de conectividad traspuesta  $C^T$  y otra matriz auxiliar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{s_1}{l_1}(x_1 - x_3) \\ \frac{s_2}{l_2}(x_3 - x_4) \\ \frac{s_3}{l_3}(x_2 - x_3) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{2x} \\ f_{3x} \\ f_{4x} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Esta matriz auxiliar a su vez se puede descomponer en el producto de estas tres matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{s_1}{l_1}(x_1 - x_3) \\ \frac{s_2}{l_2}(x_3 - x_4) \\ \frac{s_3}{l_3}(x_2 - x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - x_3) \\ (x_3 - x_4) \\ (x_2 - x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_2}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_3}{l_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{QCx} \quad (2.12)$$

Por lo que podemos afirmar que las ecuaciones que representan el equilibrio de las componentes de fuerzas en el eje x para cada nodo se pueden expresar como:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{QCx} + \mathbf{f}_x = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Expresión que coincide con la primera ecuación del Método de Densidad de Fuerzas.

Análogamente se comprueba la equivalencia del resto de ecuaciones del sistema, con lo que podemos afirmar que estas expresiones representan el equilibrio de nuestra estructura de nodos-conexiones desacopladas para cada componente x, y, z.

$$\text{ECUACIONES DE EQUILIBRIO} \equiv \begin{cases} (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{f}_x = \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{y} + \mathbf{f}_y = \mathbf{0} \\ (\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{z} + \mathbf{f}_z = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.14)$$



Imagínese que se ha de resolver esta estructura que se ha tomado como ejemplo, donde el nodo 3 queda libre (desconocemos su posición) y los nodos 1, 2, y 4 son fijos con las siguientes coordenadas:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ x_3 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y_3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Supóngase que la densidad de fuerzas de las conexiones es:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones del MDF se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{array}{llll} x_3=3; & f_{x1}=3; & f_{x2}=-2; & f_{x4}=-1 \\ y_3=0.67; & f_{y1}=0.67; & f_{y2}=0.67; & f_{y4}=-1.33 \\ z_3=1.33; & f_{z1}=1.33; & f_{z2}=-1.67; & f_{z4}=0.33 \end{array} \quad (2.17)$$

Con estos resultados se ha obtenido las coordenadas del nodo 3, pudiendo representar ahora la forma de equilibrio de la estructura planteada así como su estado tensional para las densidades de fuerza consideradas.

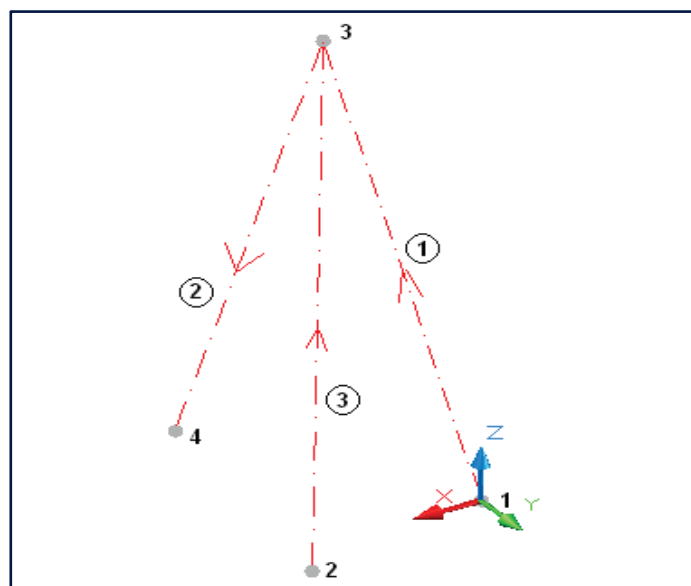


Figura 2.8: Configuración de equilibrio de la estructura ejemplo para una matriz de densidad. Vista isométrica



Un aspecto interesante a la hora de construir la matriz de conectividad es que resulta recomendable ordenar los nodos de tal forma que los nodos fijos aparezcan agrupados al comienzo de la matriz de conectividad. De esta forma la matriz  $\mathbf{C}$  puede dividirse en las matrices  $\mathbf{C}_s$  [ $r \times n_s$ ] y  $\mathbf{C}_f$  [ $r \times n_f$ ] siendo  $n_s$  los nodos fijos y  $n_f$  los nodos libres. En el ejemplo de

En el ejemplo propuesto en la figura 2.7 la matriz  $\mathbf{C}$  quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} \begin{matrix} \text{Nodo 1} \\ \downarrow \\ \text{Nodo 2} \\ \downarrow \\ \text{Nodo 4} \\ \downarrow \\ \text{Nodo 3} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{C}_s} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\mathbf{C}_f} \end{matrix} \quad (2.18)$$

Los vectores  $\mathbf{x}_s$ ,  $\mathbf{y}_s$ ,  $\mathbf{z}_s$  contienen las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de cada nodo fijo. A su vez, los vectores  $\mathbf{x}_f$ ,  $\mathbf{y}_f$ ,  $\mathbf{z}_f$  contienen las coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de cada nodo libre. La matriz  $\mathbf{Q}$  es una matriz diagonal [ $r \times r$ ] que contiene las densidades de fuerza  $q$  correspondientes a cada rama. Así las ecuaciones de equilibrio son las siguientes:

$$\begin{cases} ((\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_s) \cdot \mathbf{x}_s + (\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_f) \cdot \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_x = 0 \\ (\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_s) \cdot \mathbf{y}_s + (\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_f) \cdot \mathbf{y}_f + \mathbf{p}_y = 0 \\ (\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_s) \cdot \mathbf{z}_s + (\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_f) \cdot \mathbf{z}_f + \mathbf{p}_z = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Siendo  $\mathbf{p}_x$ ,  $\mathbf{p}_y$  y  $\mathbf{p}_z$  las componentes de las fuerzas aplicadas en los nodos libres.

De esta forma es posible obtener directamente el valor de los nodos libres a partir del resto de variables del problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}_s = -\mathbf{D}_s^{-1}(\mathbf{D}_f \cdot \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_x) \\ \mathbf{y}_s = -\mathbf{D}_s^{-1}(\mathbf{D}_f \cdot \mathbf{y}_f + \mathbf{p}_y) \\ \mathbf{z}_s = -\mathbf{D}_s^{-1}(\mathbf{D}_f \cdot \mathbf{z}_f + \mathbf{p}_z) \end{cases} \quad (2.20)$$

Siendo  $\mathbf{D}_s = (\mathbf{C}_s^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_s)$  y  $\mathbf{D}_f = (\mathbf{C}_f^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{C}_f)$

En resumen, el FDM es un método de búsqueda de formas de equilibrio de redes de nodos que presenta una formulación muy sencilla. Se basa en definir la topología de la red mediante una "matriz de conectividad" y en fijar las "densidades de fuerza", que corresponden con el ratio fuerza-longitud de cada una de las ramas de la malla. Esta es la clave de la simplicidad del método puesto que el sistema de ecuaciones correspondiente al equilibrio de fuerzas de una red es no lineal, mientras que, introduciendo las densidades de fuerza, el sistema de ecuaciones de equilibrio se linealiza.

Para obtener una configuración de equilibrio con el FDM es preciso determinar previamente los siguientes datos o INPUT: las coordenadas de los nodos fijos, las fuerzas que afectan a cada nodo y las densidades de fuerza de cada rama. Resolviendo este sistema de “ $3n$ ” ecuaciones se obtienen las “ $3n$ ” incógnitas u OUTPUTS que corresponden a las coordenadas de los nodos libres y a las reacciones en los apoyos (figura 2.9).

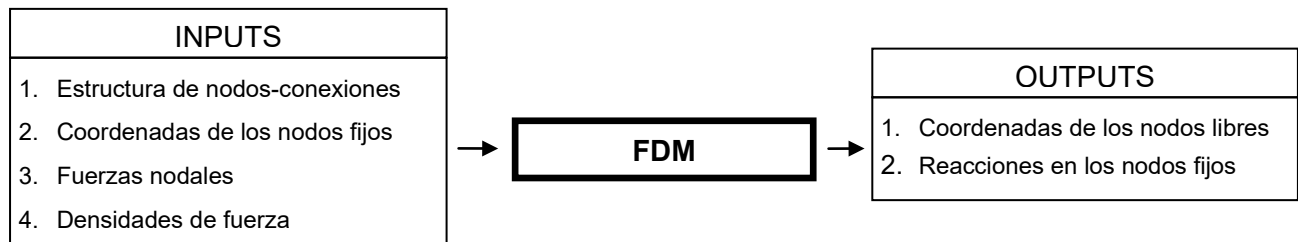


Figura 2.9: Esquema de INPUTS - OUTPUTS del FDM

### 2.3.3. EL MALLADO TOPOLÓGICO

La primera dificultad que plantea el FDM guarda relación con la definición de la estructura nodos-conexiones. Hoy día es posible escoger entre diferentes técnicas de mallado con algoritmos muy desarrollados y de uso generalizado. Pero el mallado de las estructuras sin flexión presenta ciertas singularidades frente al mallado convencional en el que la geometría está perfectamente establecida. Según se ha visto en el apartado anterior, el procedimiento de diseño sin flexión obliga elegir una geometría inicial para después tantear diferentes soluciones hasta aproximarse a la forma deseada. Por lo tanto, es necesario disponer de una técnica que permita generar una malla de nodos-conexiones y que esta se adapte convenientemente a la geometría inicial y a las geometrías transformadas, correspondientes a las configuraciones de equilibrio obtenidas. El problema radica en la elección de la forma inicial o punto de partida, ya que el mallado de esta superficie debe ser compatible con un mallado adecuado de la configuración final.

Algunos autores proponen resolver este problema adoptando como punto de partida la proyección en planta de la estructura, ya que esta permanece invariable durante procedimiento de búsqueda de la forma. Pero en ocasiones no es posible obtener la configuración final partiendo del mallado de su proyección, como ocurre en el ejemplo mostrado en la figura 2.10.

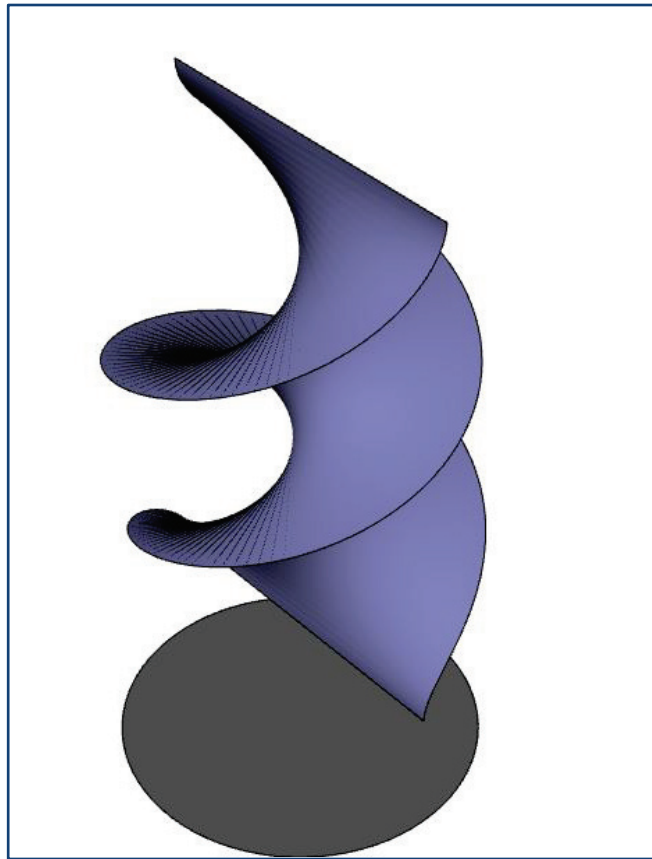


Figura 2.10: Proyección de una forma helicoidal. El mallado de la proyección no permite obtener la forma final.

En el año 2006, Hernández-Montes, Jurado-Piña y Bayo [33] presentan la técnica del **Mallado Topológico - TM** - (Topological Mapping), que permite, con unas pocas reglas topológicas, realizar un mallado independientemente de la configuración geométrica final. En un principio el TM se propuso para estructuras tensadas, pero esta técnica es igualmente apropiada para estructuras de compresión (Jurado-Piña, Martín-Gil y Hernández-Montes, 2009 [39]). La ventaja que presenta el TM frente a las técnicas convencionales, radica en que no es preciso conocer la geometría final sino que basta con establecer unos criterios topológicos.

La malla se define en diferentes fases o pasos a través de los que se incorporan un determinado número de nodos conectados entre sí. De esta forma la topología de la red se define través de los siguientes datos:

- El número de nodos del primer paso o, cuando este posee un único nodo inicial, los nodos del segundo paso
- El número de pasos,
- El tipo red, que indica la relación entre un paso y el siguiente y si es una red cerrada o abierta

Para comprender esta técnica, en primer lugar es preciso distinguir entre **redes cerradas** y **redes abiertas**. En las redes cerradas, el primer nodo de cada paso coincide con el nodo final del mismo, generándose los denominados anillos. Es el caso de las redes tipo cúpula (figura 2.11).

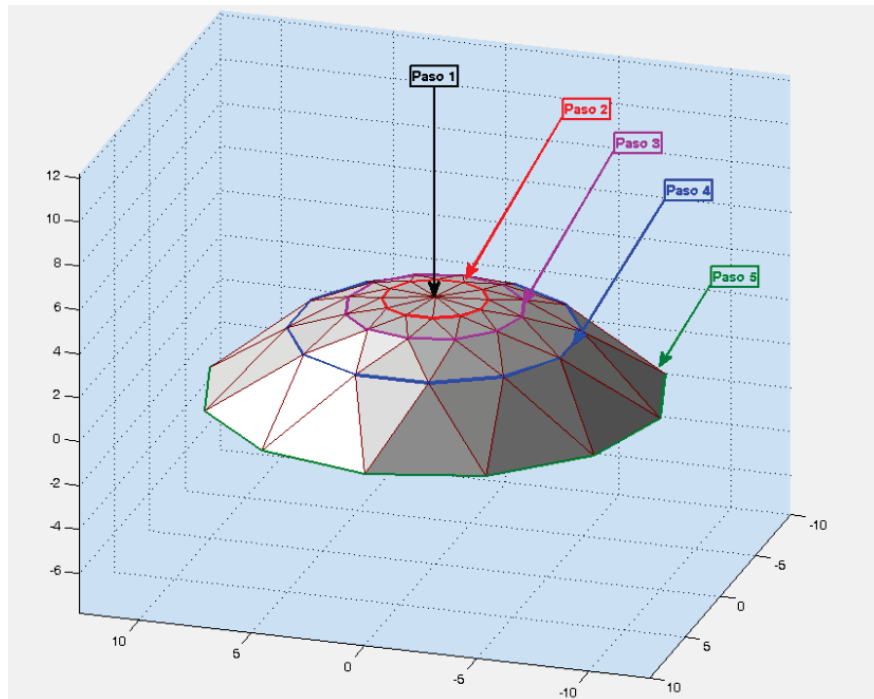


Figura 2.11: Ejemplo de red cerrada y su mallado topológico.

En las redes abiertas los nodos iniciales y finales de cada paso no coinciden, como ocurre en los mallados de estructuras tipo bóveda (figura 2.12).

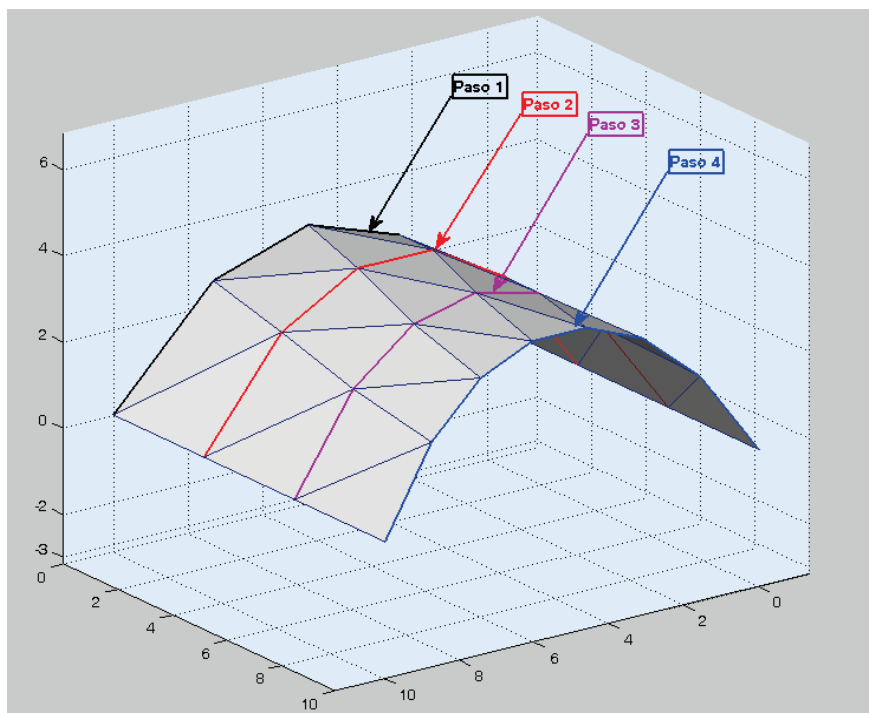


Figura 2.12: Ejemplo de red abierta y proceso su mallado topológico

Por otra parte, el TM describe tres tipos de redes básicas: A, B, y C.



La red básica tipo A sigue un patrón en el que cada nodo está conectado a los adyacentes del mismo paso, así como al doble más tres nodos de la fase siguiente. De esta manera el número de nodos de cada paso es el doble de la cantidad de la anterior para la configuración cerrada, y doble más un nodo para la configuración abierta (figura 2.13).

En el caso de topológicas cerradas, la conectividad entre los nodos está representada por líneas continuas azules, y las líneas discontinuas rojas indican conexiones repetidas. Asimismo los círculos azules representan nodos, y los círculos rojos representan nodos repetidos.

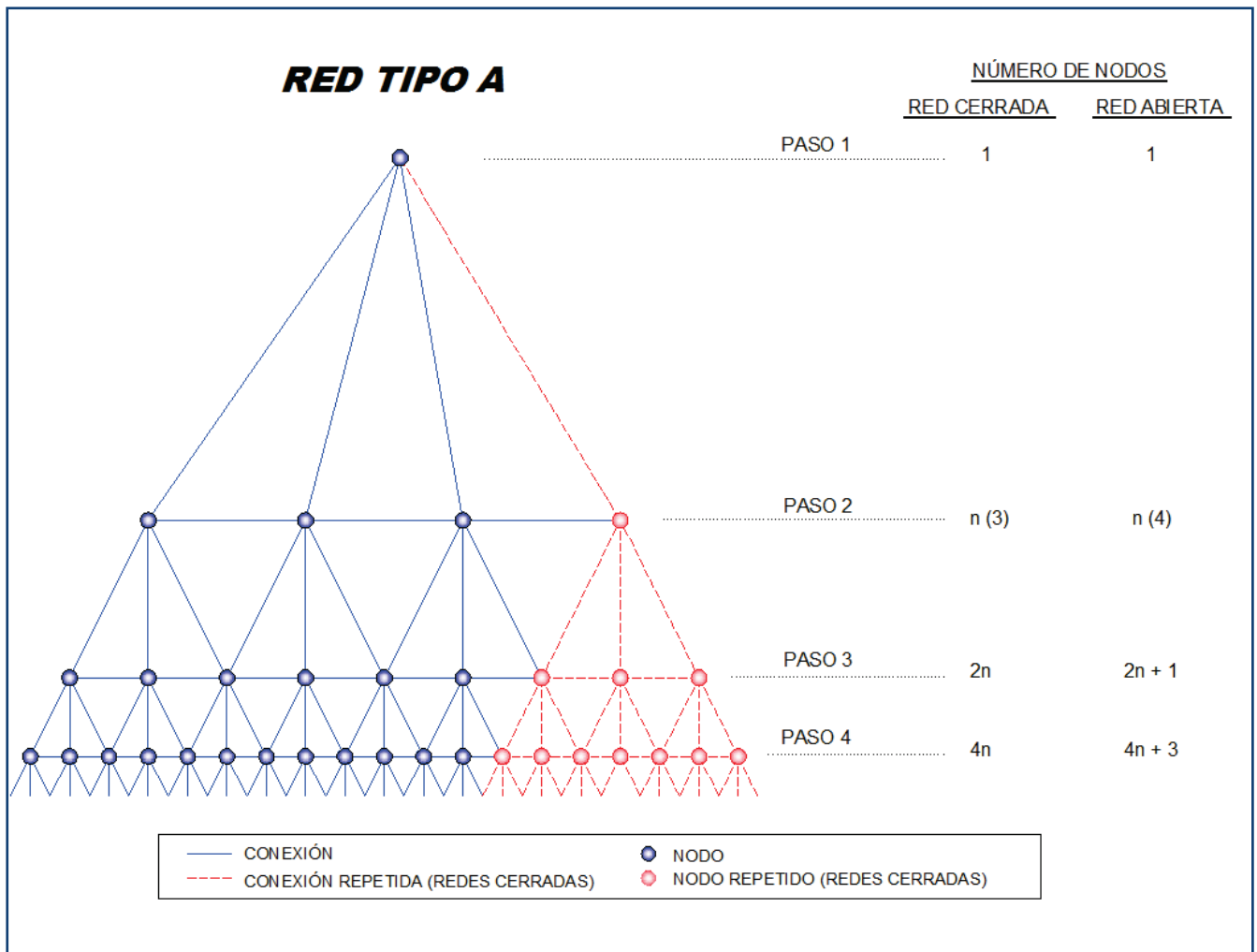


Figura 2.13: Malla topológica tipo A. Número de Nodos en cada paso para redes abiertas y cerradas.

La red básica tipo B es similar a la tipo A con la diferencia de que cada nodo de un determinado paso está conectado a dos nodos de la etapa siguiente. Con la red B el número de nodos de cada paso es igual a la de la etapa anterior para la configuración cerrada y al de la etapa anterior más uno para la configuración abierta.

En la figura 2.14 se representa la malla tipo B para redes abiertas y cerradas. En este caso, las conexiones y nodos representados en color gris corresponden a aquellas conexiones y nodos que se incorporan al mallado para el caso de redes abiertas.

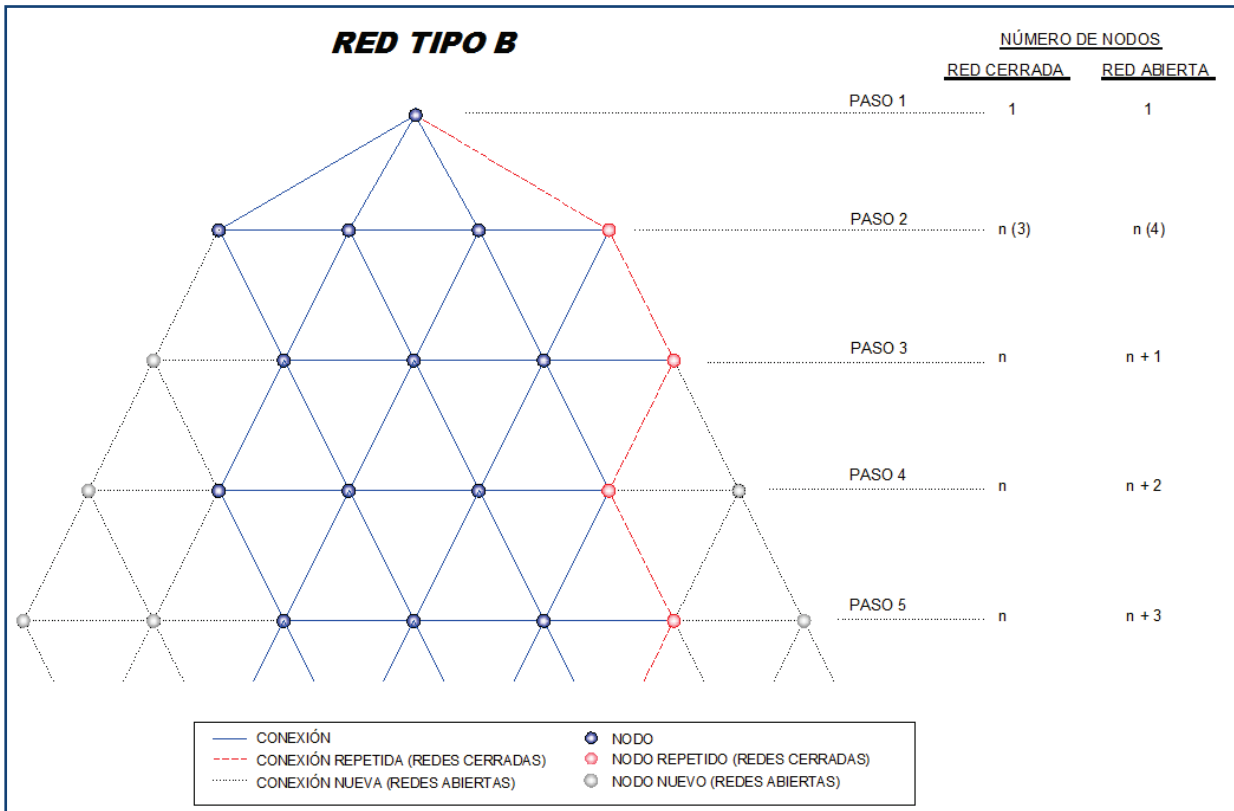


Figura 2.14: Malla topológica tipo B Número de Nodos en cada paso para redes abiertas y cerradas.

En el patrón de la red básica tipo C, cada nodo de un determinado paso está conectado alternativamente a uno y a tres nodos de la etapa siguiente (figura 2.15). De esta manera el número de nodos sigue siendo el mismo en cada paso tanto en redes abiertas como en redes cerradas.

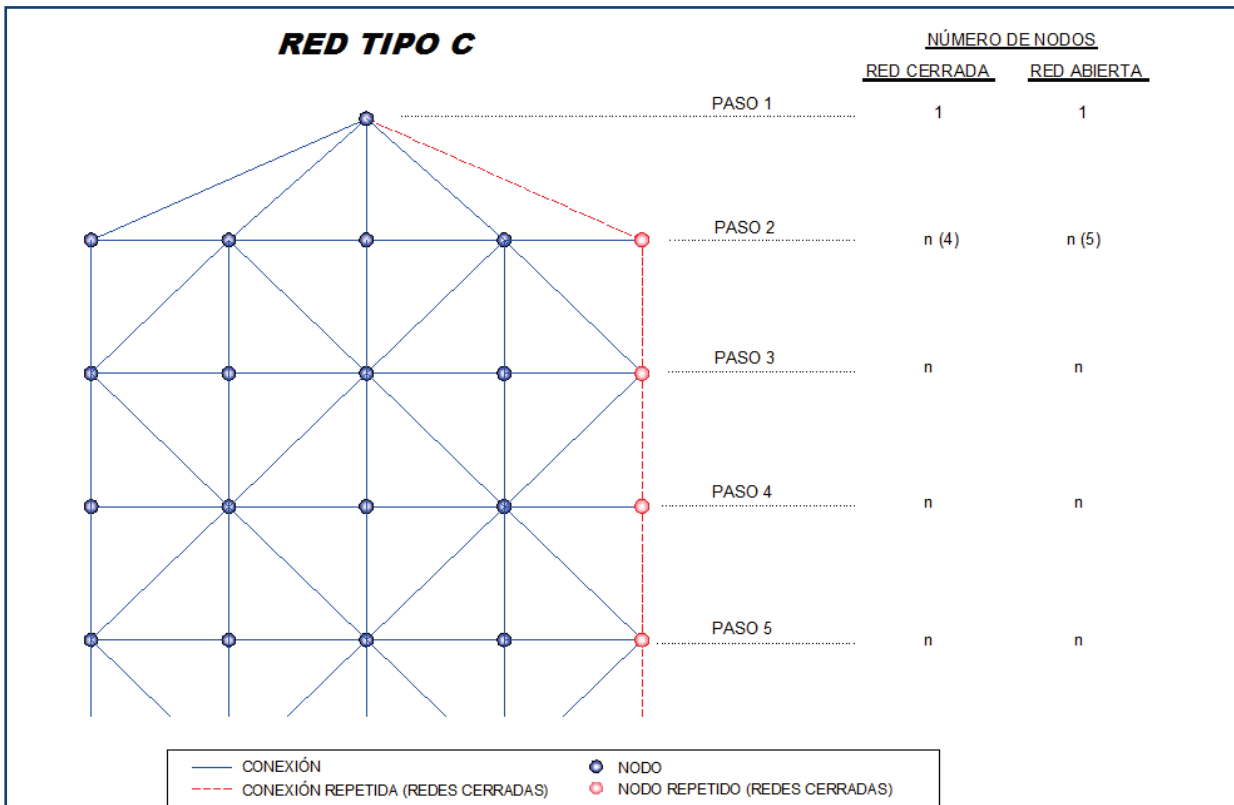


Figura 2.15: Malla topológica tipo B Número de Nodos en cada paso para redes abiertas y cerradas.

Las redes básicas descritas se originan a partir de un nodo inicial que está conectado a  $n$  nodos de la segunda etapa.

Sin embargo, este nodo inicial puede suprimirse en redes abiertas, y también en redes cerradas, cuando se desea crear un nuevo contorno en el interior de la red (figura 2.16).

Con el fin de resolver el problema de configuraciones complejas, con diversos contornos, se pueden unir redes simples abiertas y/o cerradas. Estas combinaciones conducen al concepto de redes combinadas (figura 2.17).

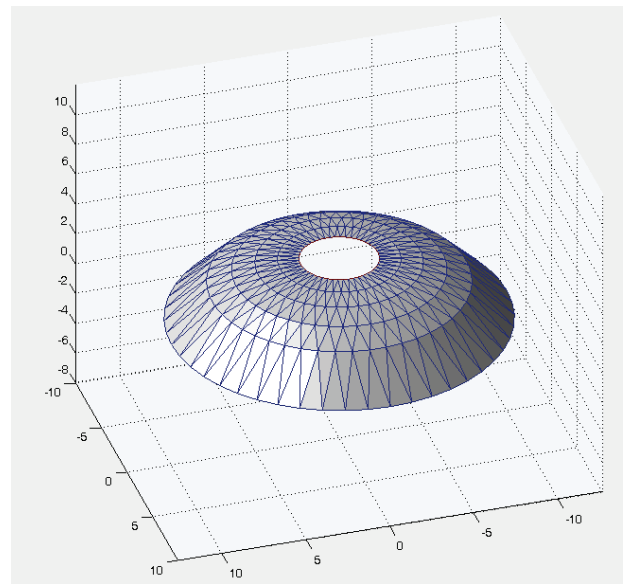


Figura 2.16: Ejemplo de supresión de nodo inicial en red cerrada

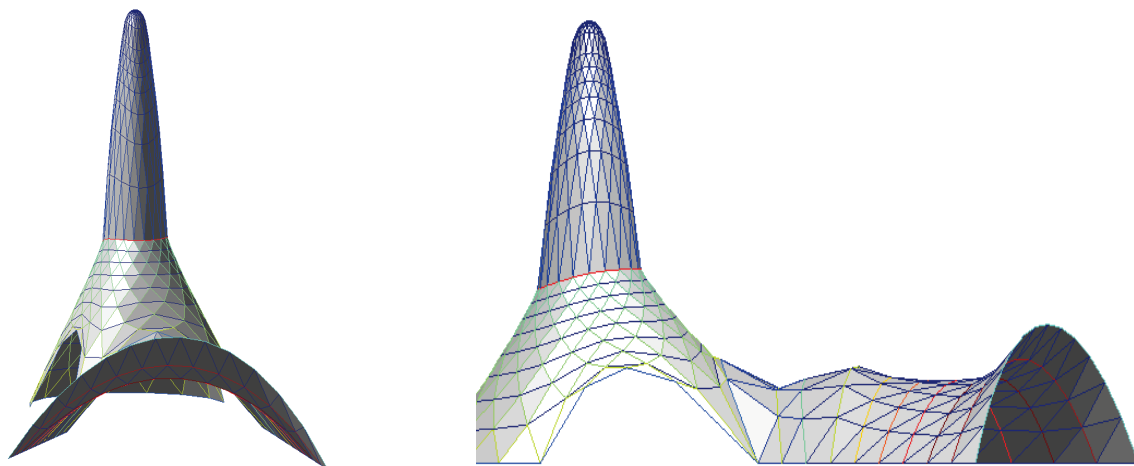


Figura 2.17: Redes combinadas Formación de figuras compuestas a partir de formas simples..

En las redes cerradas los nodos del último paso o anillo están situados en el contorno final, pudiendo coincidir con los nodos fijos de la estructura. La cantidad de nodos entre puntos fijos consecutivos deberá ser proporcional a la distancia entre ellos. En el caso de las redes abiertas los nodos fuera corresponden a la parte exterior del árbol gráfico.

El diseñador debe escoger la tipología de mallado más adecuada a la topología de la estructura. Un mallado idóneo presentará triángulos de superficie mínima, una distribución y forma homogénea. La forma de los triángulos deberá aproximarse al equilátero. Pero en ocasiones puede interesar que ciertas zonas tengan una mayor concentración de nodos para obtener una mejor definición de la geometría o de las tensiones.

Cada tipología se adapta a un caso determinado. Como ejemplo, las redes cerradas del tipo B, el número de nodos es constante en cada anillo, lo que resulta especialmente adecuado para estructuras con simetría radial o estructuras no alargadas.

Pero las redes básicas pueden presentar varios problemas si se aplican de forma independiente. Por ejemplo, los tipos B y C requieren un elevado número de nodos en su segundo paso para redes cerradas. Por otro lado, la red A produce un elevado número de nodos justo después de unos pocos pasos. Estas limitaciones pueden ser eliminadas mediante el uso de combinaciones de topología de las redes de base A, B y C, para formar lo que se llama redes simples. En este caso, el usuario tiene que definir la secuencia deseada de combinaciones. La figura 2.18 muestra como intercalando las tipologías A y B se puede obtener un buen mallado de un paraboloides hiperbólico.

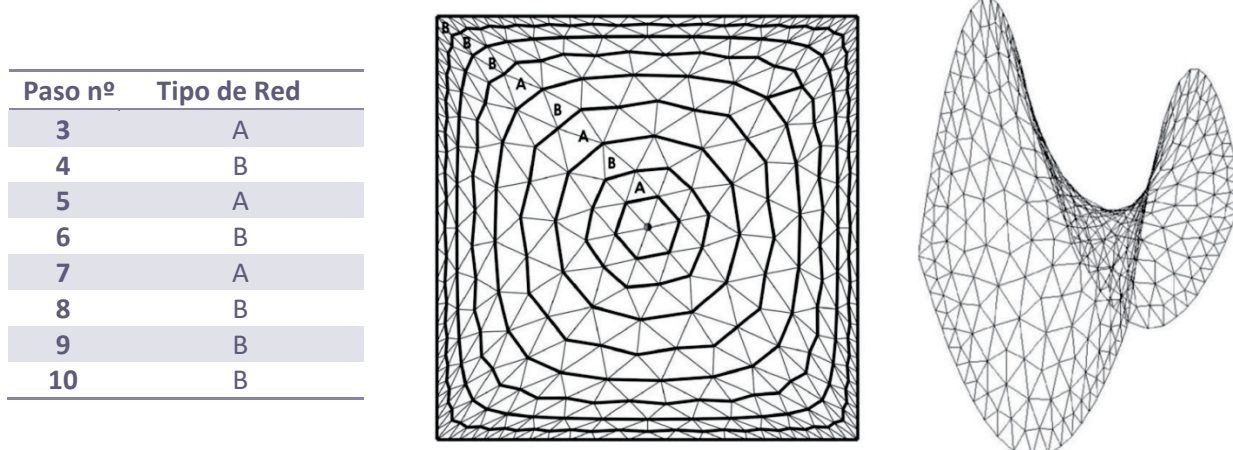


Figura 2.18: Mallado de un paraboloides hiperbólico combinando redes tipo A y B. Esquema, vista en planta y perspectiva.

#### 2.3.4. CONSIDERACIÓN DEL PESO PROPIO EN EL FDM (FDM<sub>A</sub>)

Se ha visto hasta ahora como con la conjunción del Método de Densidad de Fuerzas y el Mallado Topológico (TM-FDM) se pueden obtener las formas de equilibrio de cualquier tensoestructura o estructura de compresión.

Pero la aplicación del formulación original del FDM obliga a calcular el peso propio en introducirlo en el sistema como una fuerza nodal externa. Esto obligaría a recalcular las fuerzas nodales correspondientes al peso propio para cada variación de la geometría, convirtiéndose en un procedimiento iterativo que finalizaría cuando la configuración de equilibrio modificase su geometría con la corrección del peso propio del paso anterior.

La alternativa consiste en considerar el peso propio en la formulación del FDM.

Pero al ser el peso propio una función que depende de las tres variables  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$ , las ecuaciones del FDM perderían su linealidad (ecuación 2.17):

$$\begin{aligned}
 (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot \vec{x} + \vec{f}_x &= 0 \\
 (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot \vec{y} + \vec{f}_y &= 0 \\
 (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot \vec{z} + \vec{f}_z(x_i, y_i, z_i) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

El vector  $\vec{f}_z$  que incluye las componentes verticales de las fuerzas nodales y que adoptaba en la formulación original valores constantes, ahora se convierte en un vector que contiene ecuaciones dependientes de las coordenadas nodales  $x_i, y_i, z_i$ . Esto hace que el sistema de ecuaciones se desacople convirtiéndose en un problema no lineal.

A continuación se deducirán las ecuaciones componentes del vector  $f_{zi}$  con la consideración del peso propio.

En un mallado genérico, cada nodo estará conectado a un número determinado de nodos adyacentes. Como ejemplo, en el mallado representado en la figura 2.19, se ha considerado un nodo  $i$  conectado a tres nodos  $j, k$  y  $l$ . El peso de la estructura dependerá de los tamaños de los triángulos definidos en su mallado. El área de cada triángulo se puede calcular como la mitad de la norma del producto vectorial de los vectores que conforman dos de sus lados. De esta forma, si consideramos el triángulo formado por los nodos  $i, j$  y  $k$ , el área de este triángulo  $S_{ijk}$  estará definida por la ecuación 2.18.

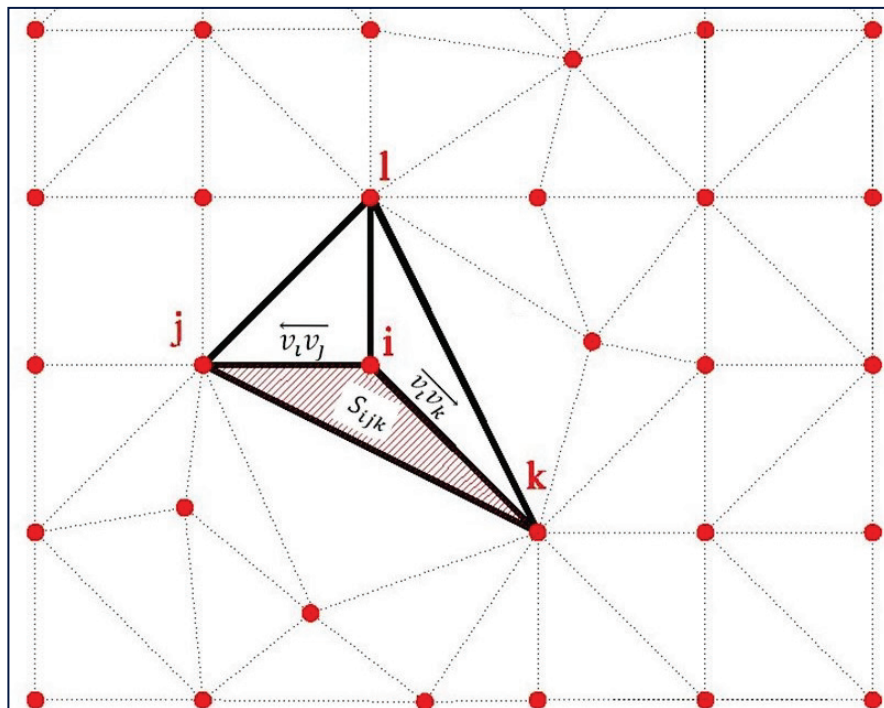


Figura 2.19: Ejemplo de mallado y esquema vectorial para cálculo de la superficie de un triángulo  $ijk$ .

$$S_{ijk} = \frac{1}{2} \|\vec{v}_i v_j \times \vec{v}_i v_k\|
 \tag{2.18}$$



siendo  $\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \\ z_j \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}$ ,  $\overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j} = \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \\ z_j - z_i \end{pmatrix}$  y  $\overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k} = \begin{pmatrix} x_k - x_i \\ y_k - y_i \\ z_k - z_i \end{pmatrix}$

El peso que soporta el nodo  $i$  del ejemplo anterior equivale al área sombreada en la figura 2.20 y podrá obtenerse como la tercera parte de la suma de estas áreas, multiplicarlas por el peso específico  $\gamma$  del material empleado en la construcción.

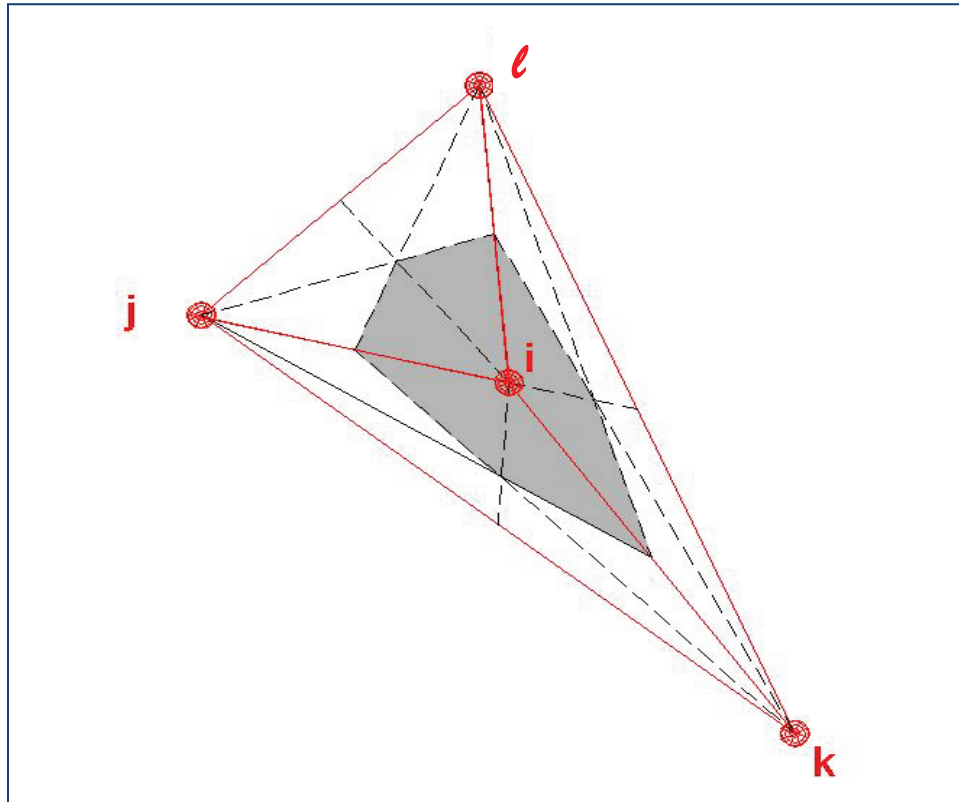


Figura 2.20: Superficie que corresponde al peso propio de un nodo conectado a tres nodos.

Considérese la matriz  $\mathbf{A}=(a_{ij})$  de tamaño  $n \times n$ , siendo  $n$  el número total de nodos del mallado, en la que el elemento  $a_{ij}$  de la fila  $i$  y columna  $j$  toma el valor 1 si el nodo  $i$  comparte una rama con el nodo  $j$  y 0 si no cumple esta condición.

La formulación general del vector  $\mathbf{f}_z = (f_{zi})$ , para  $i=1,2,\dots,n$  será:

$$f_{zi} = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n (a_{ij} \cdot a_{ik} \cdot a_{jk}) \left[ \frac{\gamma}{3} \left( \frac{1}{2} \|\overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j} \times \overline{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k}\| \right) \right] \quad (2.18)$$

La sumatoria de la ecuación anterior es multiplicada por  $\frac{1}{2}$  debido a que el triángulo que parte del nodo  $i$  formado por los nodos  $i, j, k$  se puede formar igualmente partiendo del nodo  $i$  a través de los nodos  $i, k, j$ .

Volviendo al ejemplo del apartado anterior (nodo  $i$  conectado únicamente con tres nodos  $j, k$  y  $l$ ), adoptando la misma densidad de fuerza  $q$  en todas las conexiones, al objeto de obtener una

expresión más sencilla y suponiendo que no intervienen otras fuerzas aparte del peso propio, la tercera ecuación del FDM (ecuaciones 2.17) quedaría de la siguiente forma:

$$3qz_i - q(z_k + z_l + z_j) - \frac{\gamma}{6} (\|\vec{v}_i \vec{v}_k \times \vec{v}_i \vec{v}_l\| + \|\vec{v}_i \vec{v}_k \times \vec{v}_i \vec{v}_j\| + \|\vec{v}_i \vec{v}_l \times \vec{v}_i \vec{v}_j\|) = 0 \quad (2.19)$$

Se puede observar como la ecuación 2.20 tiene una parte lineal, sólo afectada por la densidad de fuerza, y un parte no lineal que depende del tamaño de los triángulos y del peso específico. Con una representación gráfica de estas dos funciones, se comprende que la expresión 2.19 se cumplirá cuando la función no lineal intersekte a la función lineal (figura 2.21a) mientras que cuando ambas funciones no se intersekten, no existirá una solución al problema (figura 2.21b)

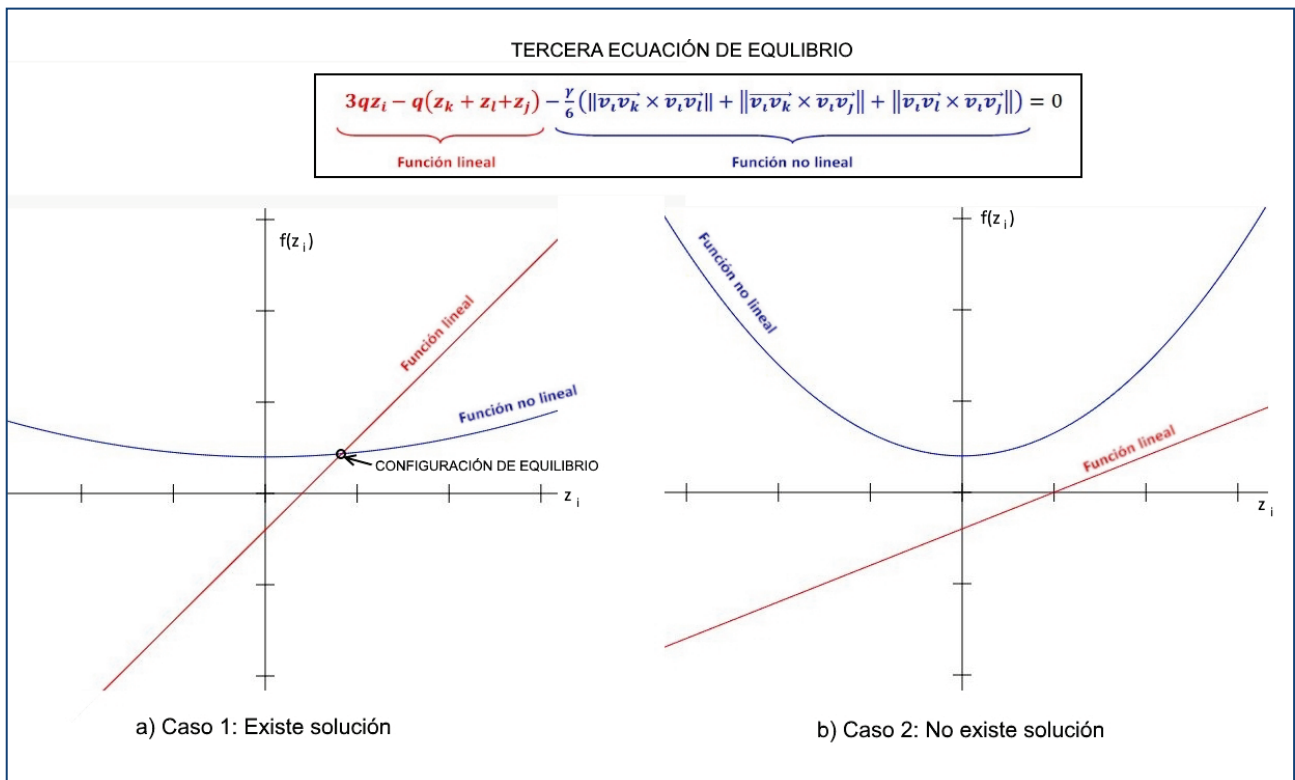


Figura 2.21: Representación de la función lineal y la no lineal que componen la ecuación de equilibrio del ejemplo representado en la figura 2.20

De esta forma el problema del cálculo de la configuración de equilibrio adquiere una mayor complejidad, puesto que para determinados INPUTS, no se alcanzará una solución de equilibrio.

Analizando el problema bi-nodal se puede comprender de manera sencilla por qué no es siempre posible obtener una configuración de equilibrio. Considérese una estructura compuesta por una única barra vertical con un extremo fijo, sometida a una fuerza constante  $f_z$  en sentido longitudinal (figura 2.22). La forma de equilibrio se determinará simplemente calculando la longitud  $z$  que debe tener la barra para que la densidad de fuerza tenga un valor  $q$  determinado. Los sistemas de ecuaciones del MDF quedan reducidos a una única ecuación lineal que establece el equilibrio de fuerzas (ecuación 2.20).

$$q \cdot z - f_z = 0 \rightarrow z = \frac{f_z}{q} \quad (2.20)$$

El problema siempre tendría solución para cualquier valor de densidad de fuerza  $q$  adoptado.

En cambio, si se tiene en consideración el peso propio de la barra y su peso específico  $\gamma$  fuese conocido, el equilibrio de fuerzas quedaría representado a través de la expresión 2.21.

$$q \cdot z - f_z - \gamma \cdot z = 0 \rightarrow z = \frac{f_z}{q - \gamma} \quad (2.21)$$

De acuerdo con esta ecuación, el problema no alcanzaría solución para valores  $q < \gamma$ .

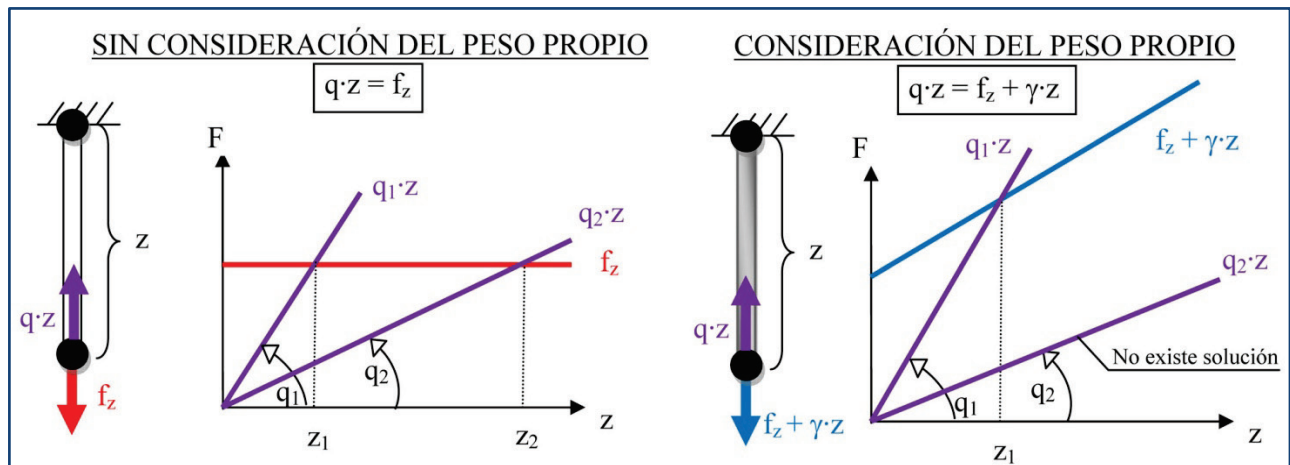


Figura 2.22: Análisis de la solucionabilidad del problema bi-nodal y unidimensional sin y con la consideración del peso propio

En resumen, la aplicación de la adaptación del FDM que se propone,  $MT-FDM_A$ , que utiliza el TM en la definición de la malla de nodos conexiones y considera el peso propio, se convierte en un procedimiento complejo que hay que resolver de forma iterativa y con el inconveniente añadido de no tener solución para determinados casos. El esquema de INPUTS-OUTPUTS se representa en la figura 2.23.

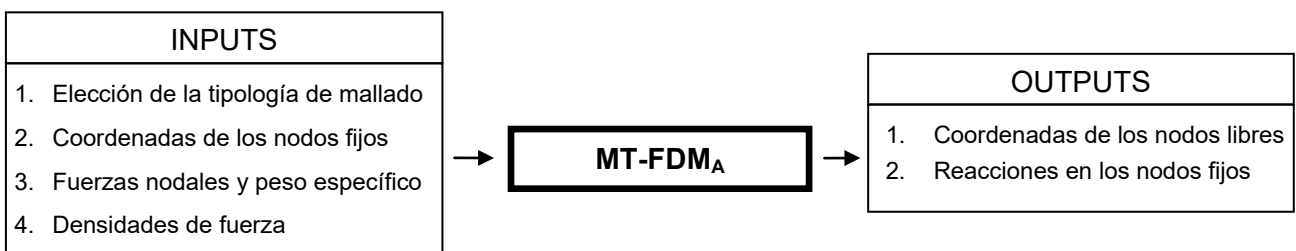


Figura 2.23: Esquema de INPUTS - OUTPUTS en el  $TM-FDM_A$



El concepto de Densidad de Fuerza, adquiere así un papel fundamental en la forma de equilibrio obtenida. Partiendo de unas condiciones de contorno definidas y conocidas por el proyectista, este parámetro se convierte en la única variable del sistema para modificar la forma geométrica. El resto de variables o bien resultan conocidas, como las coordenadas de los puntos de apoyo o el peso específico del material, o bien tienen una menor influencia en la forma de equilibrio obtenida, como la densidad de nodos empleada o la tipología de malla escogida. Para cada matriz de densidades de fuerza podrá existir una solución al problema y, en el caso de que esta exista, la forma de equilibrio alcanzada diferirá considerablemente de otra obtenida con una matriz de densidades de fuerza diferente. Ello obliga de nuevo a realizar un cálculo iterativo en el que una vez obtenida la primera solución o forma de equilibrio, es necesario modificar el valor de las densidades de fuerza empleadas hasta conseguir la geometría deseada. Este proceso no es sencillo, ya que no resulta fácil relacionar el valor de las densidades de fuerza con la forma geométrica que se persigue. Para el diseñador se convierte pues en un procedimiento largo y complejo al tener que modificar multitud de valores hasta obtener una forma de equilibrio que se aproxime al modelo inicial diseñado.

### 2.3.5. ALGORITMOS DEL MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS CON MALLADO TOPOLÓGICO Y CONSIDERACIÓN DEL PESO PROPIO.

El departamento de estructuras de la Universidad de Granada, en el año 2012 a través del grupo de investigación TEP-190 "INGENIERÍA E INFRAESTRUCTURAS", ha desarrollado un algoritmo escrito en código Matlab© que permite obtener formas de equilibrio para este tipo de estructuras. El programa denominado GAUDI tiene implementado el TM y el FDM con la adaptación de sus ecuaciones para la consideración del peso propio (MT-FDM<sub>A</sub>).

Puesto que el sistema de ecuaciones obtenido resulta no lineal, es necesario aplicar un cálculo iterativo y al no existir siempre una solución al problema es necesario establecer un número máximo de iteraciones a realizar para interrumpir el proceso en caso de no convergencia.

En una primera iteración se ignora el peso propio de los triángulos y se obtienen las coordenadas  $x$  e  $y$  de la estructura, que se mantienen constantes a lo largo del proceso. También se obtiene un primer valor de la coordenada vertical  $z_1$  que se utiliza para comprobar la convergencia. A partir de este momento se calcula el peso de los triángulos y se vuelve a introducir en el FDM como carga exterior. Al obtener una nueva cota  $z_2$ , se comprueba si la diferencia con respecto  $z_1$  es relevante, en cuyo caso se realiza una nueva iteración calculando nuevamente el peso de los triángulos de la nueva forma geométrica y obteniendo una nueva coordenada  $z_3$ . Así se realizarán nuevas iteraciones hasta conseguir, en su caso, la convergencia a un valor  $z_n$  determinado.

La figura 2.24 muestra el diagrama de flujo que sigue el programa.

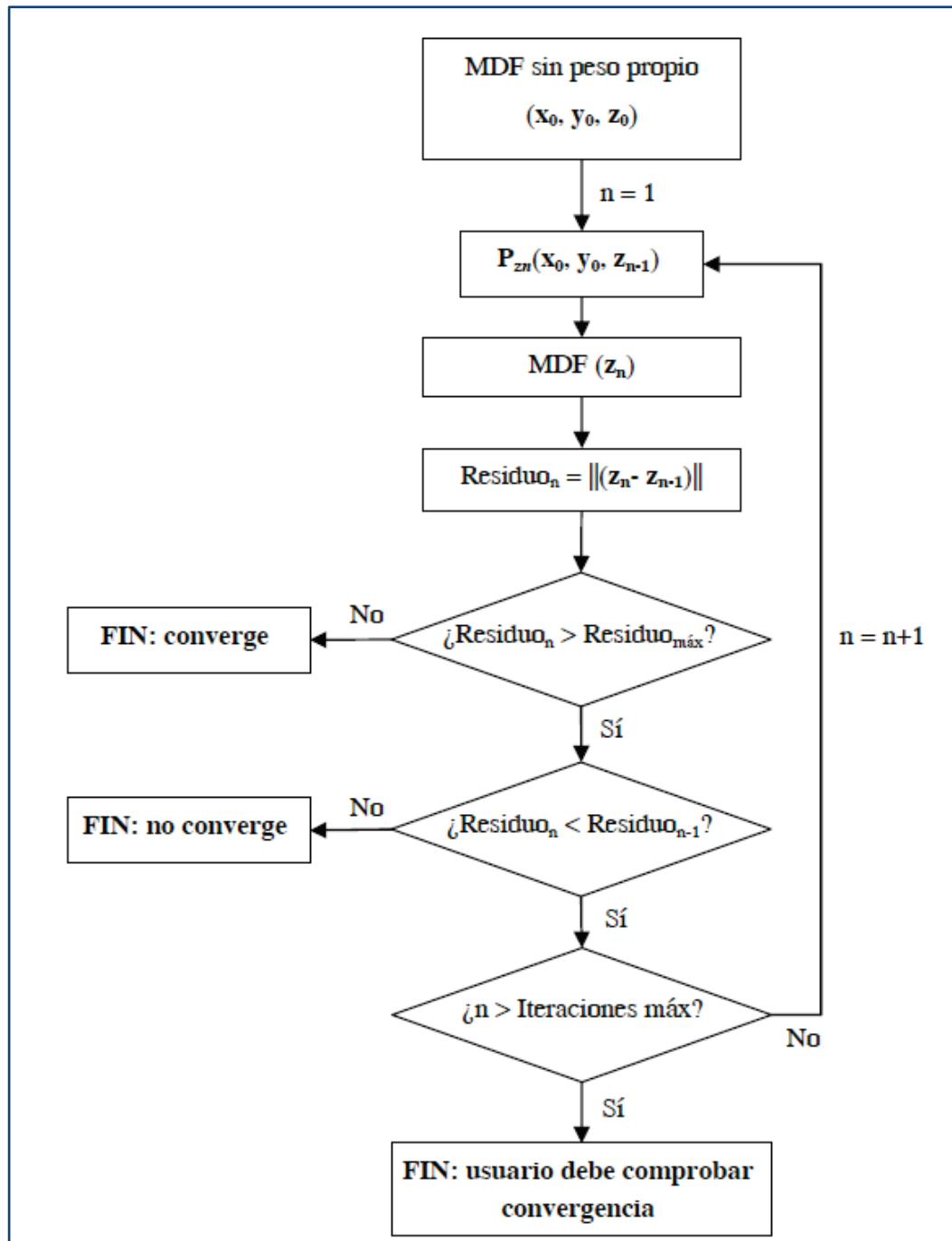


Figura 2.24: Diagrama de flujo para el cálculo iterativo del programa Gaudi.

El programa Gaudi realiza un mallado topológico tipo B por lo que el número de nodos permanece constante en cada paso o anillo. Los únicos datos que precisa el programa para realizar el mallado son el número de anillos o pasos, el número de nodos del primer anillo y las coordenadas de los puntos fijos. Por otra parte es preciso indicar la densidad y el espesor de la superficie para el cálculo del peso propio. Establecidos estos datos de partida se obtendrán infinitas formas de equilibrio en función de las densidades de fuerza que se adopten para cada conexión. La figura



2.25 muestra la interface de entrada de datos y de salida de resultados del programa Gaudi para un ejemplo concreto.

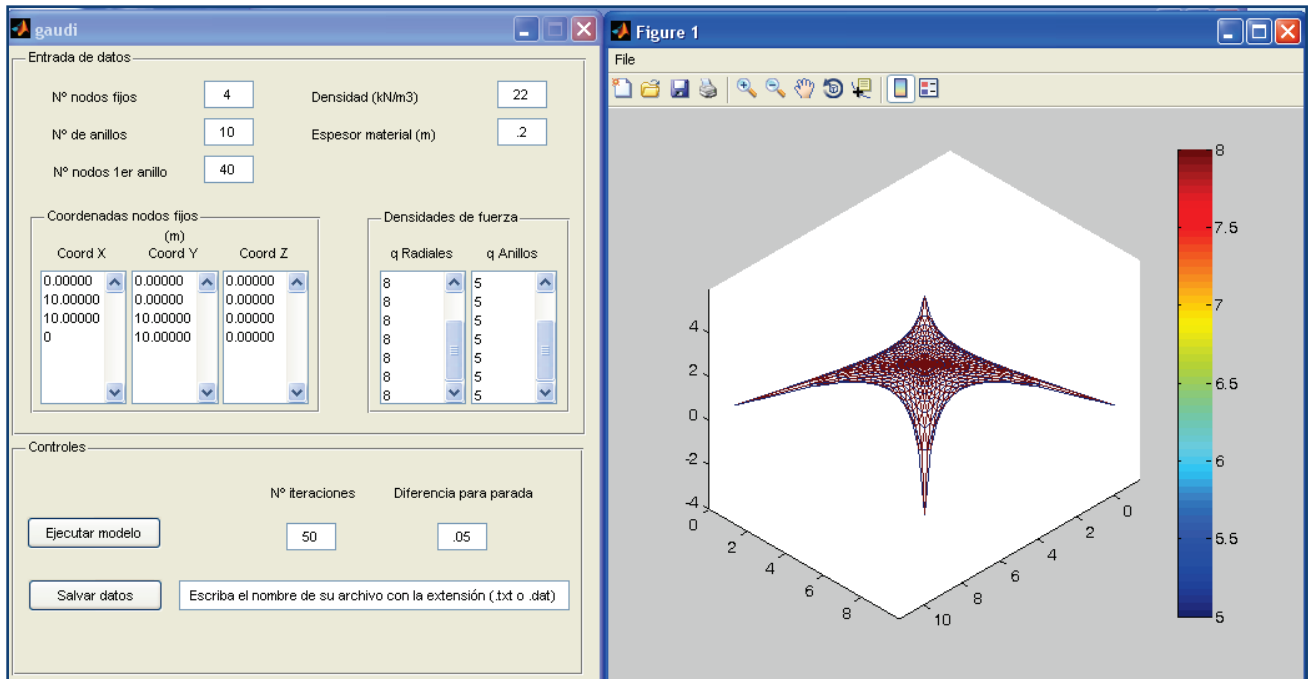


Figura 2.25: Interfaz de introducción de datos del programa Gaudi e interfaz gráfica de salida

La ventana de resultados muestra la forma de equilibrio 3D a la izquierda y a la derecha una barra de color numerada correspondiente a las densidades de fuerza de las ramas de la estructura. Cada rama de la estructura aparecerá coloreada según la densidad de fuerza que el usuario le haya designado previamente. Esto puede resultar útil a la hora de identificar las densidades de fuerza que han sido modificadas para obtener variaciones en las formas obtenidas.

Este programa se encuentra disponible con acceso libre a través del portal de la Universidad de Granada (<http://www.ugr.es/~tep190/investigacion/gaudi.html>).

## 2.4. INFLUENCIA DE LA DENSIDAD DE FUERZA EN LAS FORMAS DE EQUILIBRIO DE LAS ESTRUCTURAS DE COMPRESIÓN.

Las densidades de fuerzas introducidas en una estructura de nodos-conexiones, como se ha explicado anteriormente, influye de forma determinante en la forma de equilibrio alcanzada.

Este concepto, definido como la fuerza por unidad de longitud, es de comprensión teórica sencilla pero aunque resulta muy difícil su aplicación práctica. Unas ligeras variaciones en algunas densidades de fuerza de nuestra estructura provocan importantes transformaciones en la forma de equilibrio de la misma y además estas diferencias se generan de una forma no proporcional.

Para comprender su significado práctico, resulta muy útil realizar un símil de nuestra estructura de nodos y ramas con un sistema de muelles y bolas (figura 2.19).

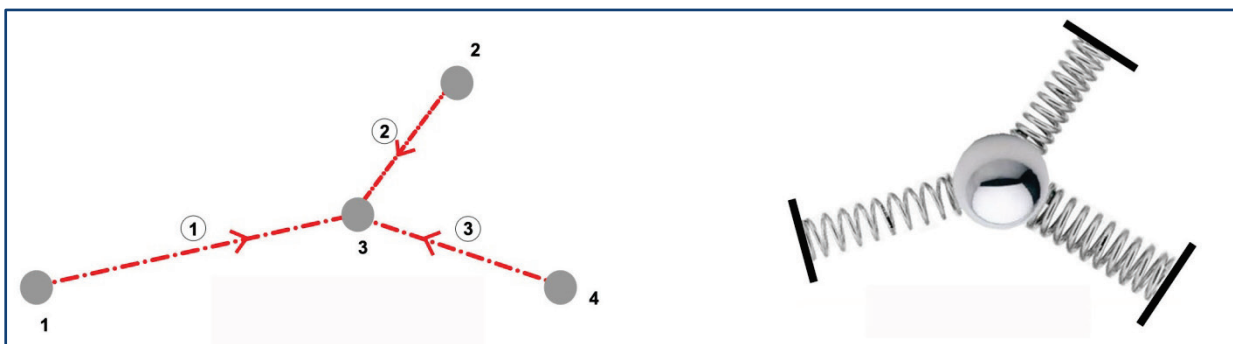


Figura 2.26: Símil de una estructura simple de tres nodos fijos y uno libre con un sistema de muelles y bolas

Cuanto mayor sea la densidad de fuerza de la rama mayor será la resistencia del muelle y menor será la deformación del mismo a causa del peso que soporta. Así es posible obtener formas muy diversas con la simple modificación de este parámetro. En el caso de la forma catenaria podemos obtener mayor altura con la modificación del tipo de muelle empleado.

La forma de obtener estructuras simétricas con la forma deseada es agrupar estas densidades de fuerza según pertenezcan a un anillo o a una rama radial o de unión.

En las estructuras abiertas, tipo bóveda, el paralelismo de los anillos se conseguirá a través del uso de iguales densidades de fuerza para las ramas que unen los arcos entre sí con un valor muy bajo, casi nulo. Como ejemplo en la figura 2.27 se muestra como se pierde el paralelismo de los arcos o anillos con la modificación de un solo valor en las densidades de fuerza radiales (densidades de fuerza de las ramas que unen dos anillos). Asimismo esta modificación afecta a los anillos contiguos.

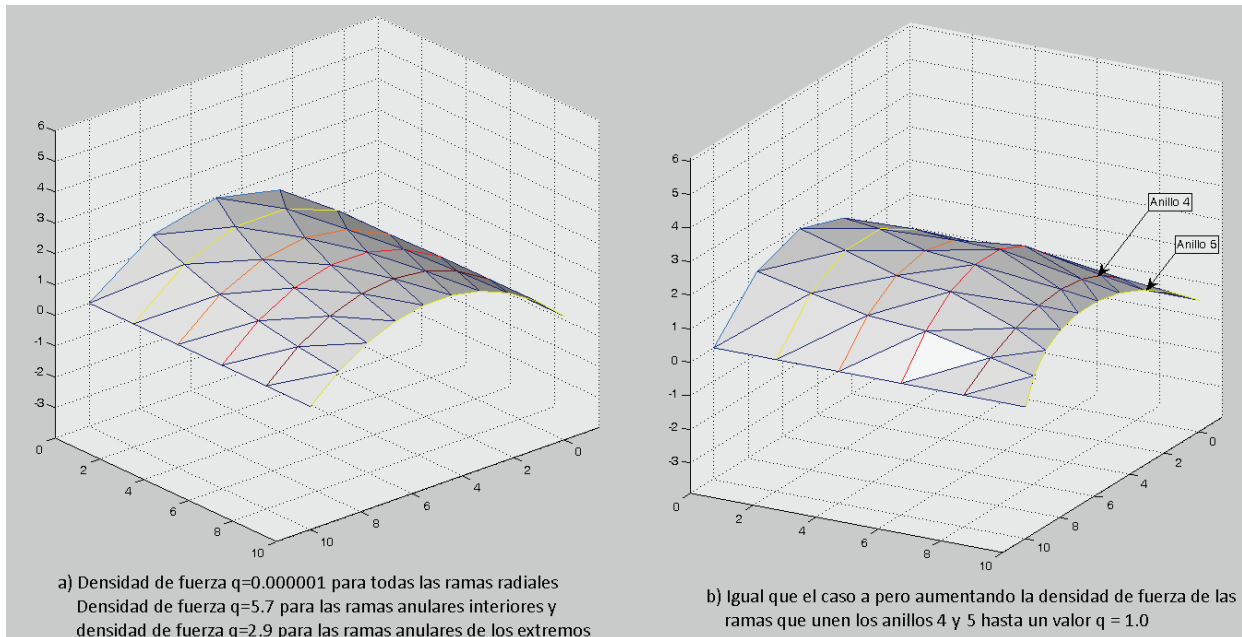


Figura 2.27: Pérdida del paralelismo de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza radiales

En cambio, modificando las densidades de fuerza de los anillos o arcos en las estructuras abiertas se consigue aumentar la altura de la bóveda (figura 2.28).

Para mantener uniforme la altura de la bóveda, la densidad de fuerza de los arcos extremos, se ha reducido a la mitad de la densidad de fuerza del resto de los anillos, puesto que los anillos centrales soportan el doble de peso.

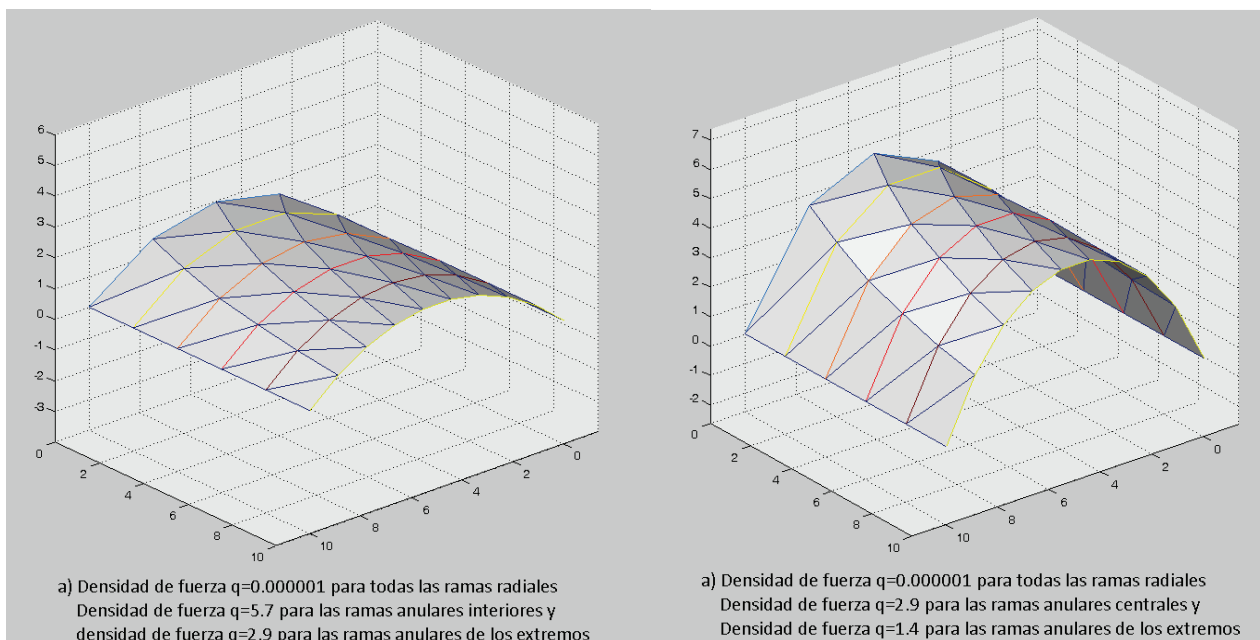


Figura 2.28: Cambio de altura de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza anulares.

Intuitivamente todo esto se puede deducir utilizando el símil de bolas-muelles con forma catenaria. Utilizando muelles de mayor resistencia se alcanzará menor separación entre las masas.



De forma análoga, en las mallas cerradas tipo cúpula, las ramas radiales son las que modifican la altura de la bóveda mientras que las ramas anilladas controlan la forma más o menos abierta de la cúpula sin afectar en gran medida su altura.

En la figura 2.29 se muestra con varía la forma de una cúpula de 20 metros de diámetro al modificar las densidades de fuerza de las ramas radiales (figura 2.29.b) o al modificar las densidades de fuerza de las ramas anulares (figura 2.29c). Se puede observar cómo lógicamente la altura de la cúpula es mucho más sensible a la variación de las densidades de fuerza de las ramas radiales mientras que las densidades de fuerza adoptadas para los anillos tienen una mayor influencia en la curvatura de la cúpula. Este último aspecto se ha estudiado con mayor profundidad en el apartado 2.6.

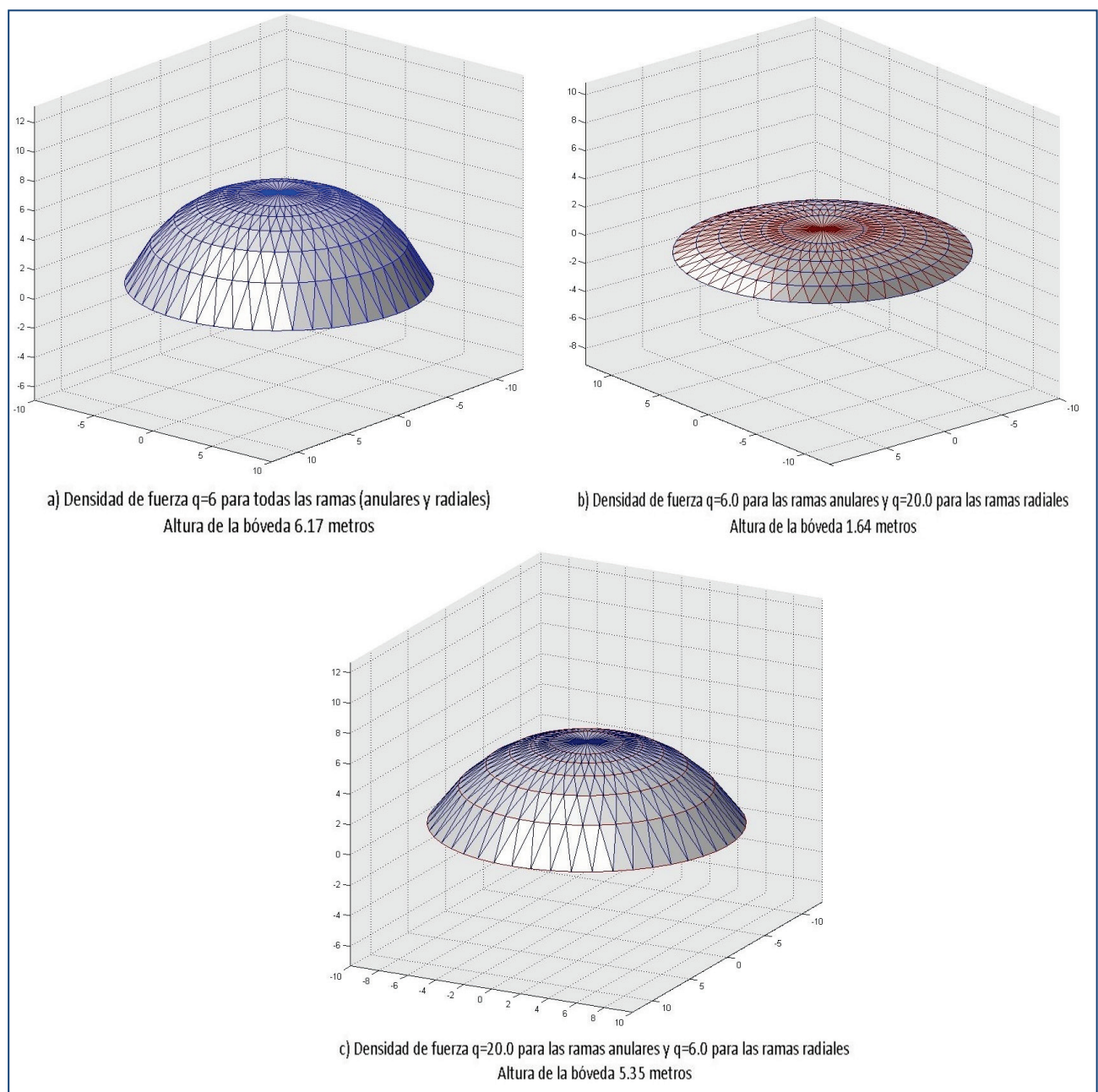


Figura 2.29: Cambio de altura de la cúpula con la modificación de las densidades de fuerza.

## 2.5. HIPÓTESIS

Con el Método de Aproximación Catenaria, MAC, que se propone en este trabajo de investigación, se pretende obtener los valores de densidades de fuerza que deben adoptarse para que la configuración de equilibrio resultante posea las dimensiones deseadas.

Para ello se seguirán los pasos indicados en la figura 2.30, ilustrados a través de un sencillo ejemplo:

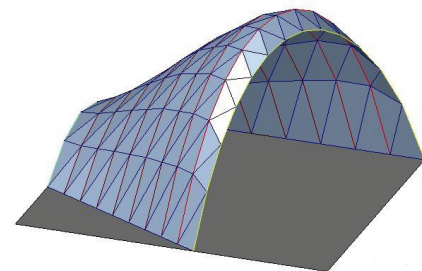
### 1. BOCETO INICIAL

Se parte de un diseño o boceto en el que están definidas las condiciones de contorno así como unas dimensiones o condicionantes geométricos determinados.



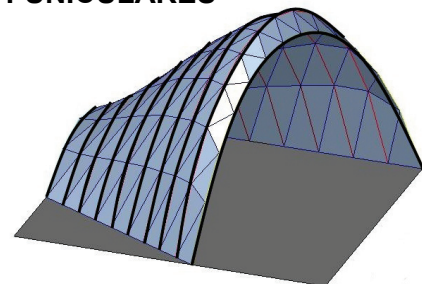
### 2. PRIMERA CONFIGURACIÓN MT-FDM<sub>A</sub>

Utilizando el TM-FDM<sub>A</sub>, se genera una primera configuración de equilibrio respetando las condiciones de contorno del problema. Lógicamente esta forma no cumplirá los condicionantes geométricos del diseño original.



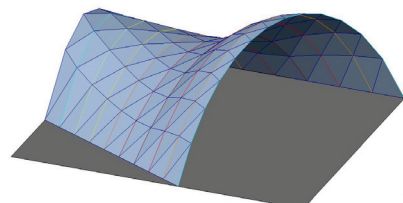
### 3. IDENTIFICACIÓN DE CURVAS FUNICULARES

Se identifican las secciones de esta primera configuración que tienen forma de arco funicular y se comparan con las mismas secciones del boceto. Este paso equivale a convertir el problema tridimensional en varios problemas bidimensionales.



### 4. APLICACIÓN DEL MAC Y CÁLCULO DE UNA SEGUNDA CONFIGURACION

Se utilizará el MAC para obtener las densidades de fuerza de las barras que conforman la/s sección/es elegida/s para que se ajusten a la forma deseada.



### 5. REPETICIÓN DEL PROCEDIMIENTO SI FUESE NECESARIO

En caso de que la aproximación no sea lo suficientemente ajustada se repetirá el procedimiento partiendo de la última configuración obtenida





Figura 2.30: Descripción de los pasos a seguir para la aplicación del MAC ilustrados a través de un sencillo ejemplo.

En resumen, partiendo de una primera forma de equilibrio obtenida mediante el MT-MDF<sub>A</sub>, se divide el problema tridimensional en varios problemas bidimensionales que se resuelven a través del MAC, obteniendo unos nuevos valores de densidades de fuerza. Aplicando nuevamente el MT-MDF<sub>A</sub>, con las densidades de fuerza calculadas, se consigue una segunda configuración de equilibrio que se aproxima al diseño y si la aproximación no es suficiente, se repite el proceso a partir de la nueva configuración de equilibrio.

Se establece así una **primera hipótesis** que considera que las secciones transversales de formas de equilibrio sin flexión se aproximan al problema bidimensional: la curva catenaria. En la medida que esta hipótesis se cumpla, el método propuesto convergerá a la solución de equilibrio de una forma más directa.

Esta es por tanto una hipótesis de asociación o covariación al establecer una correlación entre dos variables: la altura que se pretende conseguir en la forma de equilibrio y las densidades de fuerza calculadas resolviendo el problema bidimensional. Para comprobar el cumplimiento de esta hipótesis se comparará la altura que se pretende conseguir con la altura de la forma de equilibrio obtenida tras la aplicación del MAC.

Además, al aplicar el MAC, cabe esperar la convergencia del TM-FDM<sub>A</sub> puesto que se parte de un conjunto de densidades de fuerzas que proporcionan una primera solución y las secciones transversales siguen cumpliendo la configuración sin tensión.

Esta **segunda hipótesis** podría formularse de la siguiente forma: al calibrar el MAC utilizando densidades de fuerza que generan una primera configuración de equilibrio, las nuevas densidades de fuerza que facilita el MAC volverán a generar la convergencia del TM-FDM<sub>A</sub> (segunda configuración de equilibrio).

Por último también cabe plantear una **tercera hipótesis**: la aplicación de forma reiterada de esta técnica, TM-FMD<sub>A</sub>-MAC, mejora la aproximación al boceto en cada iteración, haciendo converger la configuración de equilibrio obtenida al diseño preconcebido.

## 2.6. MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA (MAC). DESCRIPCIÓN E IMPLEMENTACIÓN EN EL TM-FDM<sub>A</sub>

Aunque resulte intuitivo la utilización de las densidades de fuerza en la obtención de formas de equilibrio deseadas, resulta de gran utilidad disponer de una herramienta que vincule estas densidades de fuerza con la geometría del diseño.

Si se analizan las formas más habituales de estructuras de compresión, bóvedas y cúpulas, es posible distinguir la forma catenaria como parte integrante de todas ellas. Incluso se pueden generar estas formas con la simple traslación o giro de este arco funicular. En base a esta observación, el MAC consiste en aproximar estas secciones de la estructura a una catenaria para así obtener las densidades de fuerza que corresponden a las dimensiones deseadas.

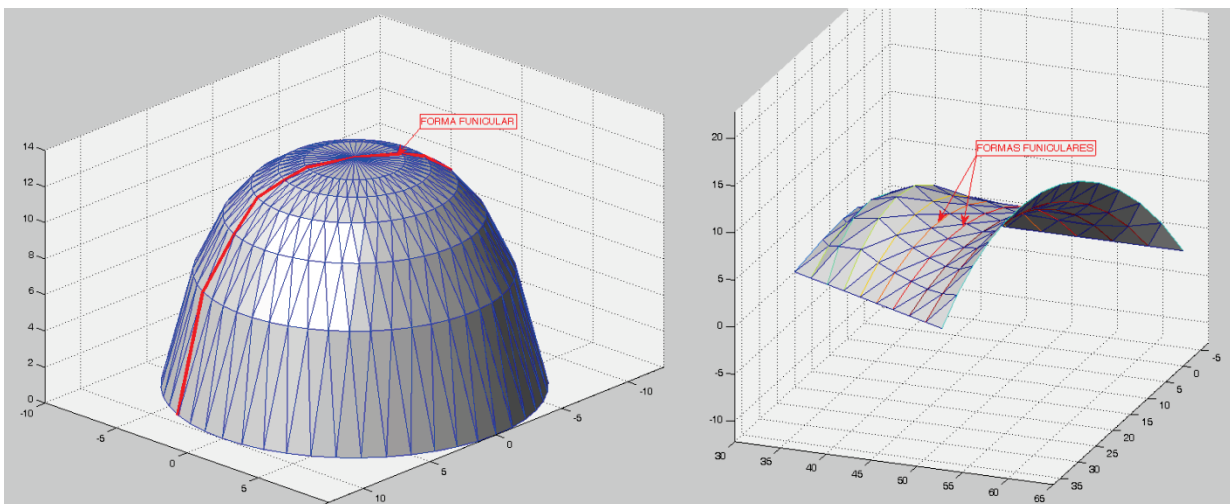


Figura 2.31: Identificación de curvas funiculares en cúpulas y bóvedas (mallas cerradas y abiertas)

Como ya se ha expuesto en el apartado 1.3., las curvas catenarias y funiculares tienen una fórmula, hoy día conocida, que nos permite dibujarlas a partir de una mínima información. Se podría, por ejemplo, trazar una catenaria conociendo la distancia de sus apoyos  $a$  y su altura o flecha máxima  $h$  (ecuación 2.23).

Definiendo la constante de la catenaria  $g$  como:

$$g = \frac{\lambda}{2T_0} \quad (2.22)$$

recordando que  $T_0$  es la componente horizontal de la tensión y  $\lambda$  es el peso específico de la catenaria, es posible calcular esta constante  $g$  a partir de los valores de  $a$  y  $h$ , aplicando la ecuación 1.17, que adoptaría la siguiente forma en función de  $g$ :

$$\frac{1}{2g} \cosh[a \cdot g] - \frac{1}{2g} - h = 0 \quad (2.23)$$

Aunque quizás resulte menos práctico, también se puede obtener el valor de  $g$  conociendo longitud  $L$  de la catenaria en lugar de su altura. Para ello habría que resolver la siguiente expresión que proviene de la ecuación 1.20:

$$L = \frac{1}{g} \sinh(g \cdot a) \quad (2.24)$$

Una vez obtenido el valor de  $g$ , la forma de la catenaria se define a través de la siguiente expresión, derivada de la ecuación 1.18:

$$y = \frac{1}{2g} \{ \cosh[g \cdot (2x - a)] - \cosh[g \cdot a] \} \quad (2.25)$$

Si se compara la forma de la catenaria, obtenida a través de estas ecuaciones, con la sección de una cúpula de su misma altura y distancia entre apoyos, calculada a través del TM-FDM<sub>A</sub>, se obtienen resultados como los representados en las figura 2.33 y 2.35. Se puede comprobar que existe una buena coincidencia entre ambas formas. Las diferencias pueden corregirse modificando las densidades de fuerza empleadas para los anillos como se muestra a continuación.

Como ejemplo, si se considera una cúpula de base circular con veinte metros de diámetro y adoptando densidades de fuerza de valor  $q = 20 \text{ kN/m}^3$  para sus ramas anulares, y  $q = 3,2 \text{ kN/m}^3$  para las ramas radiales, la forma de equilibrio obtenida (figura 2.32) presenta una altura de 11,68 metros.

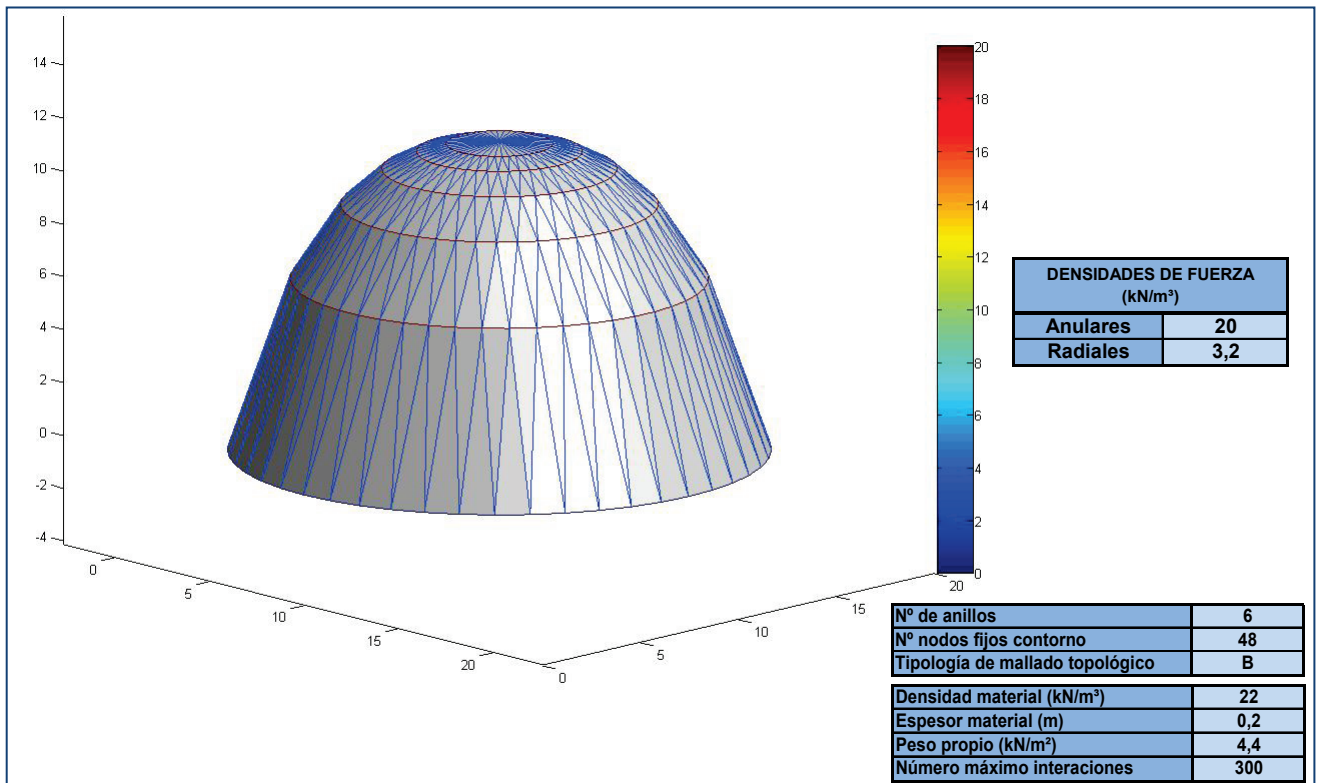


Figura 2.32: Configuración de equilibrio tipo cúpula obtenida adoptando las densidades de fuerza homogéneas en todas las ramas anulares y en todas las ramas radiales

La sección transversal facilita una curva funicular que se aproxima a la curva catenaria que posee la misma altura según se muestra a continuación.

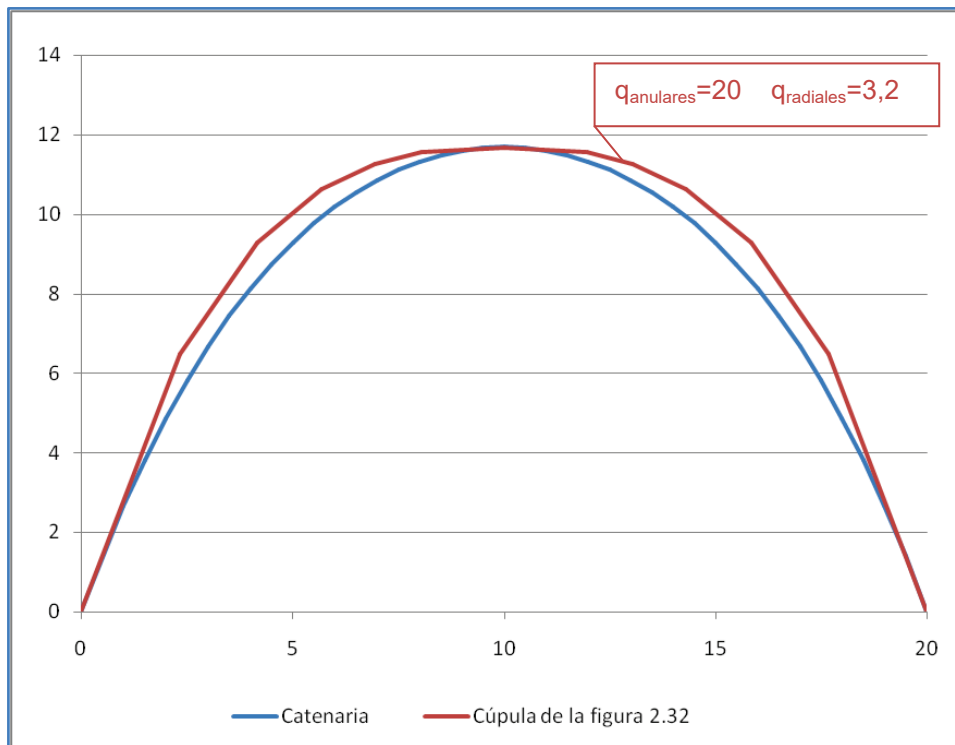


Figura 2.33: Aproximación de la curva catenaria a la sección de la cúpula representada en la figura 2.32. Valores de  $q$  expresados en  $kN/m^3$

En la figura 2.33 se aprecia como la cúpula presenta una curvatura más abierta que la catenaria, pero esto se debe principalmente a las densidades de fuerza escogidas para los anillos. Aumentando estas densidades de fuerza de forma proporcional se pueden conseguir configuraciones de equilibrio con una curvatura más ajustada a la catenaria, como muestran las figuras 2.34 y 2.35

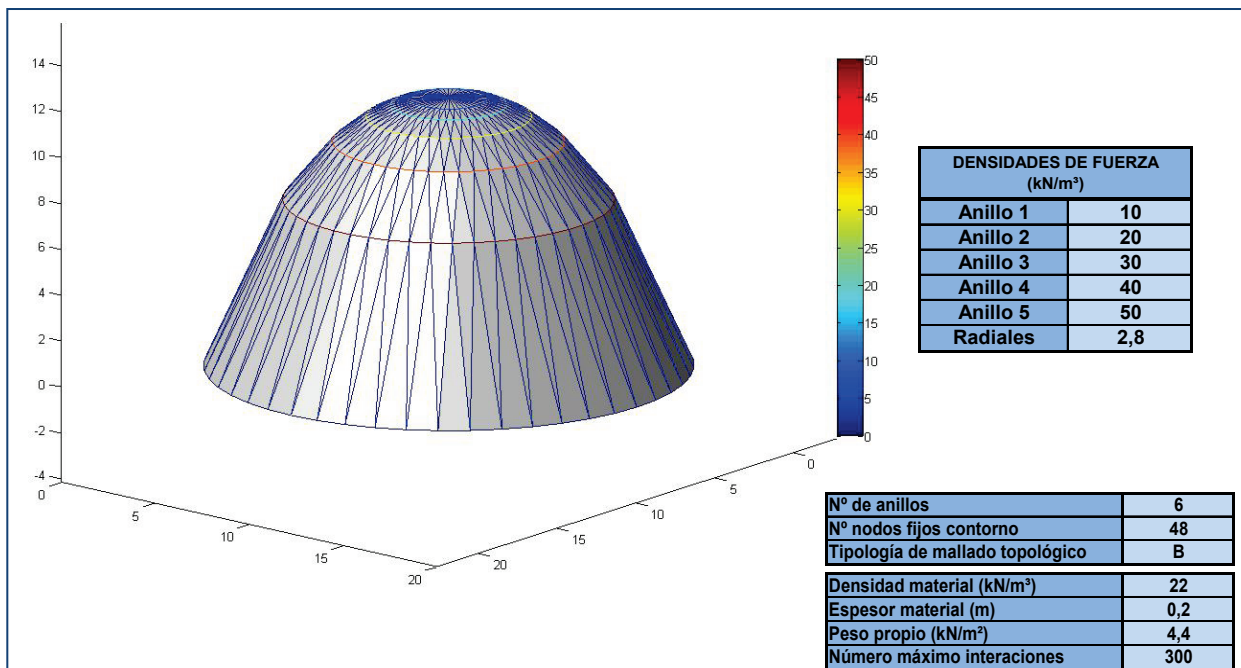


Figura 2.34: Configuración de equilibrio tipo cúpula obtenida adoptando las densidades de fuerza en los anillos con un crecimiento ponderado.

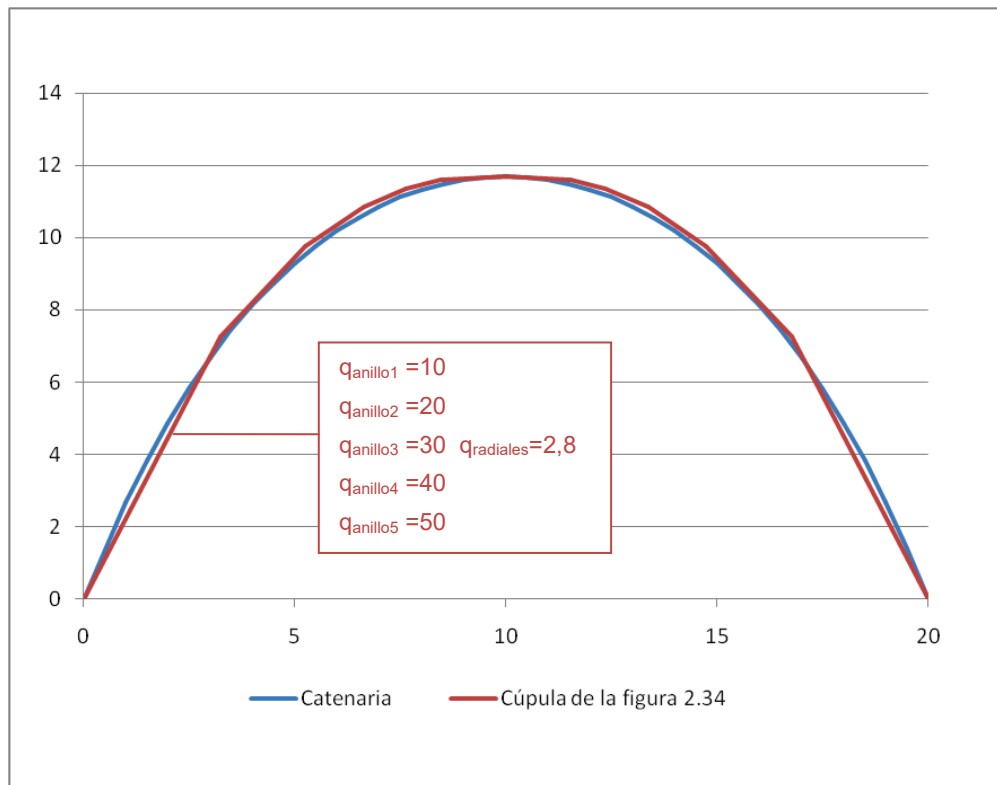


Figura 2.35: Aproximación de la curva catenaria a la sección de la cúpula representada en la figura 2.34

Incluso, si se adoptan densidades de fuerza para los anillos con un crecimiento más brusco, se puede obtener una sección funicular con mayor curvatura que la catenaria (figura 2.37).

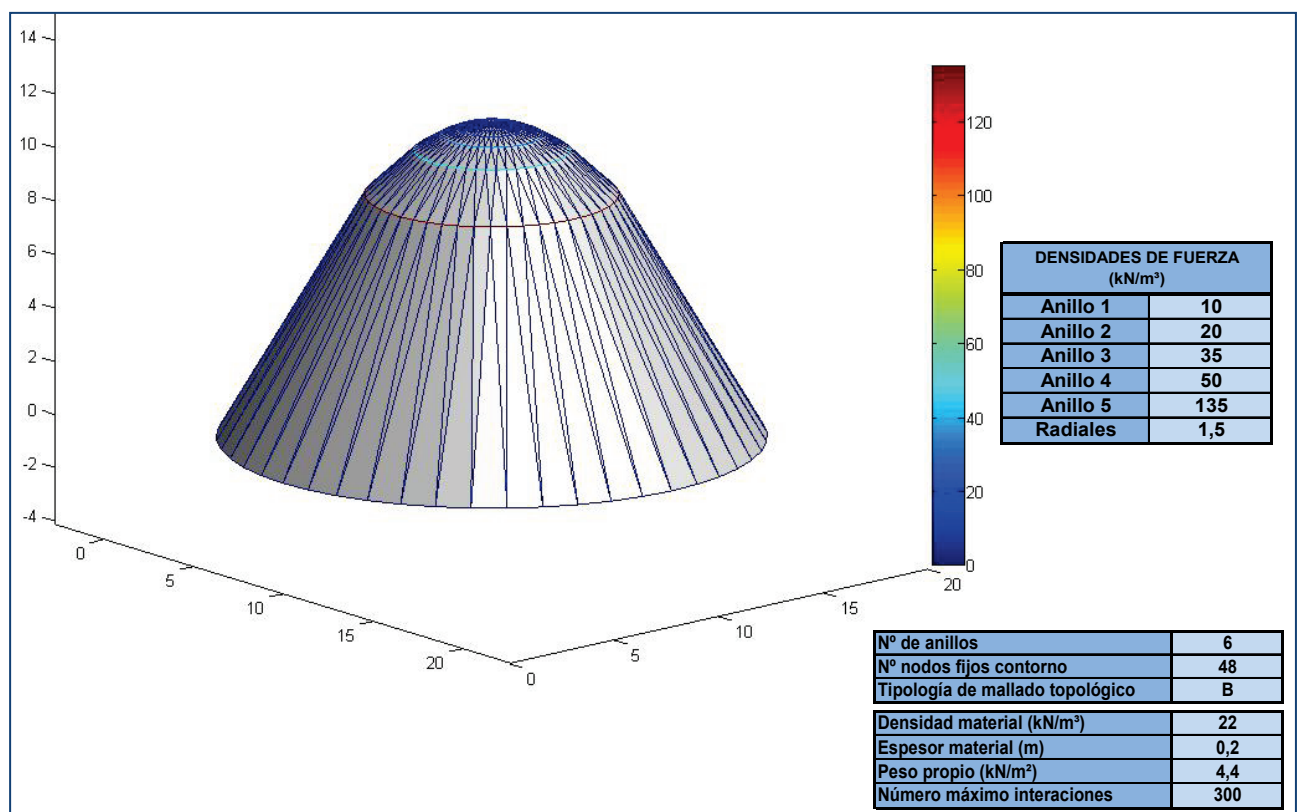


Figura 2.36: Configuración de equilibrio tipo cúpula obtenida adoptando las densidades de fuerza en los anillos con un crecimiento de tipo exponencial.



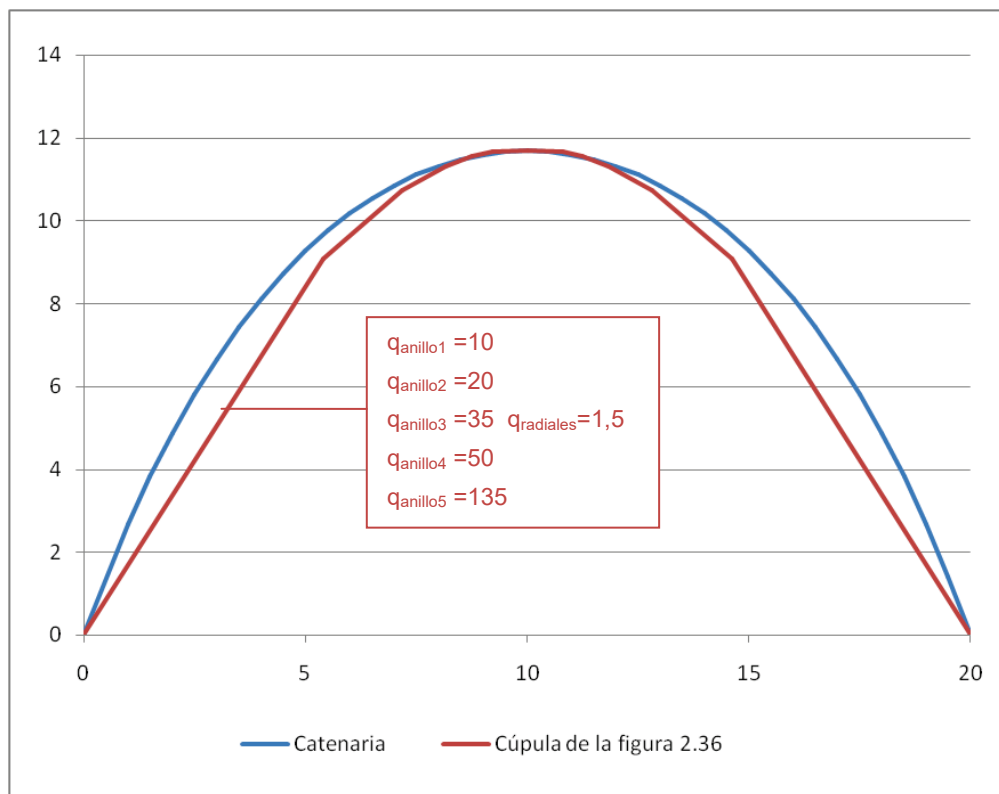


Figura 2.37: Aproximación de la curva catenaria a la sección de la cúpula representada en la figura 2.36. Valores de  $q$  expresados en  $kN/m^3$

Independientemente de este ajuste en curvatura, la parte esencial de este método radica en descifrar el valor de la densidad de fuerza de la forma catenaria que posee la altura del diseño y aplicarla para obtener una nueva forma de equilibrio con la altura deseada. Expresado de otro modo, se busca una solución aproximada del problema tridimensional mediante la resolución del problema bidimensional.

Pero esto no resulta tan sencillo como puede parecer en un principio dado que una catenaria con peso específico constante, no posee la misma densidad de fuerza en todos sus puntos sino que esta varía desde un extremo hasta el otro de la misma. La tensión en la catenaria varía en cada punto puesto que la dirección de esta tensión es variable y la componente horizontal de esta permanece constante. Por este motivo, la densidad de fuerza, definida como tensión dividida por la longitud, varía con la coordenada horizontal.

No ocurre lo mismo con la curva funicular en la que, al poder utilizar masas de distinto tamaño o peso, es posible conseguir la misma densidad de fuerza en todos sus ramas. Sin embargo el empleo de diversas masas obligaría a contar con muchos datos de partida o INPUTS y esto complicaría el método. De esta forma el MAC no sería apropiado para el fin que se busca: obtener el parámetro de densidad de fuerza de una forma rápida y sencilla.



Por este motivo se acude a la curva catenaria pero segmentándola de igual forma que la sección funicular de la primera configuración de equilibrio y calculando las densidades de fuerza equivalentes a estos segmentos. Resultan así un método rápido y bastante aproximado como se comprobará a continuación.

### 2.6.1. FORMULACIÓN DEL MAC

Como se ha explicado en el apartado anterior, el MAC se basa en aproximar una sección de la estructura a la forma catenaria. Se partirá por tanto de una sección funicular tomada de la primera configuración de equilibrio obtenida y se seguirán los siguientes pasos:

#### 1. Cálculo de la primera catenaria:

Se calcula la curva catenaria que posee la misma altura y la misma distancia entre apoyos que la sección funicular tomada de la primera configuración de equilibrio y a la que denominaremos en lo sucesivo "primera catenaria".

Conociendo la distancia entre los apoyos de la curva funicular  $a$  y su altura  $h$ , se calcula  $g$  a partir de la ecuación 2.23. y a partir de este valor se traza la curva catenaria aplicando la ecuación 2.25.

Como ejemplo, si se tiene como primera configuración de equilibrio la cúpula representada en la figura 2.32, la primera curva catenaria se puede calcular aplicando dichas ecuaciones, conforme se muestra en la figura 2.37:

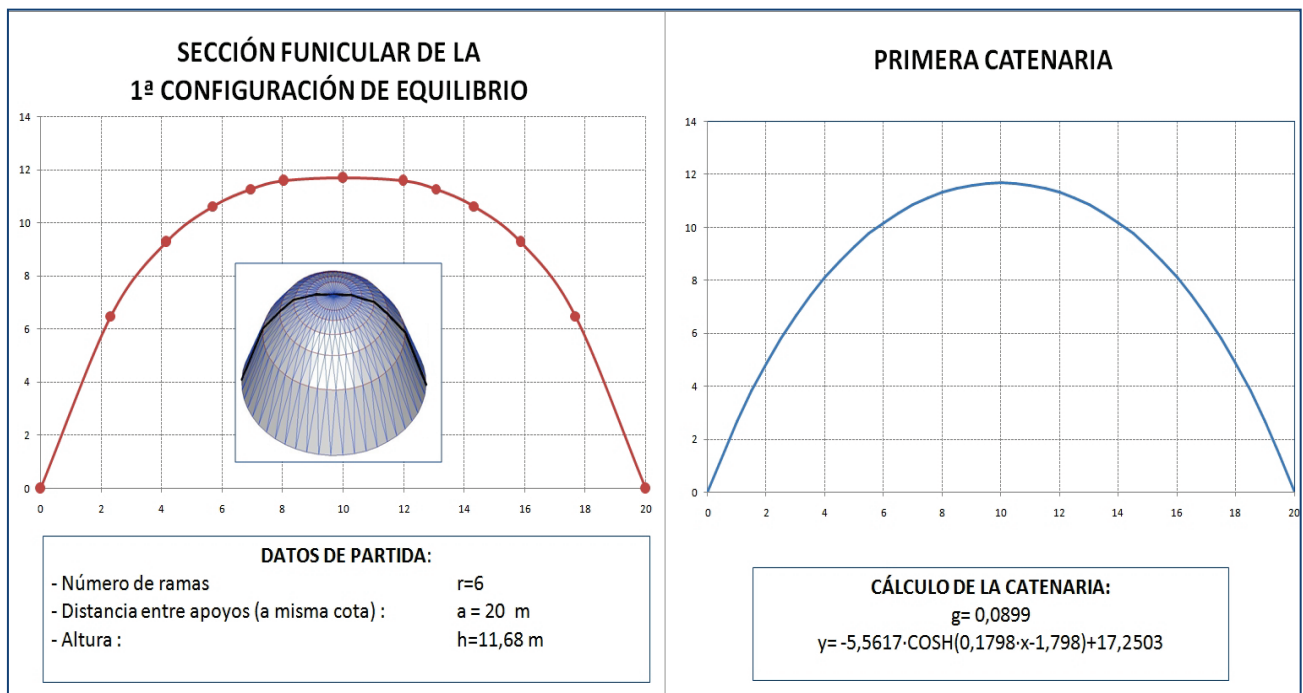


Figura 2.38: Obtención de la primera catenaria a partir de la sección funicular del ejemplo de la figura 2.32

## 2. Obtención peso específico (Calibración del MAC):

La densidad de fuerza de la primera catenaria dependerá lógicamente del peso específico  $\lambda$  de la misma, por lo que, en primer lugar, hará falta estimarlo. Puesto que se busca la equivalencia entre la primera catenaria y la sección funicular de la primera configuración de equilibrio, es lógico que el peso específico de ambas curvas se igualen, de esta forma las tensiones y las densidades de fuerza de ambas curvas adoptarán valores muy aproximados.

El valor del peso específico  $\lambda$  puede obtenerse de forma aproximada a partir de la ecuación 1.10:

$$\lambda = \frac{T_0 \tan \theta}{s} \cong \frac{2 T_0 \tan \theta}{L} \quad (2.26)$$

Donde:

$T_0$  es la componente horizontal de la tensión,

$\theta$  es el ángulo que forma la tensión

$s$  es la semi-longitud de la catenaria

$L$  es la longitud de la catenaria

Para calcular el valor de  $\theta$  habrá que dividir la catenaria en segmentos con las mismas proyecciones  $x_i$  que las ramas de la sección funicular.

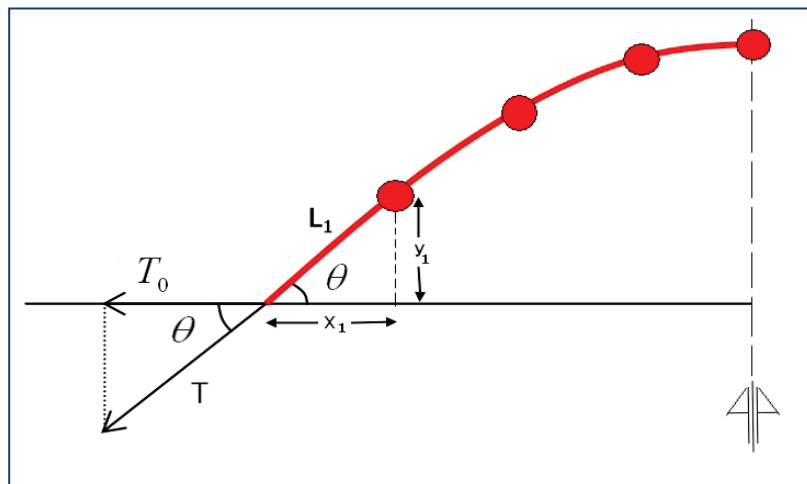


Figura 2.39: Esquema de tensiones y datos geométricos para el primer tramo de la catenaria

Considerando el primer tramo de la catenaria, de acuerdo con el esquema de la figura 2.39, se puede calcular el valor de  $\theta$  a partir de los valores de  $x_1$  e  $y_1$  que corresponden al primer segmento.

$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} \quad (2.27)$$



El valor de  $x_1$  se tomará de la sección funicular de la primera configuración de equilibrio mientras que el valor de  $y_1$  se calculará a través de la ecuación de la catenaria:

$$y_1 = \frac{1}{2g} \{ \cosh[g \cdot (2x_1 - a)] - \cosh[g \cdot a] \} \quad (2.28)$$

En los casos en los que las densidades de fuerza adoptadas sean homogéneas, y los nodos queden distribuidos uniformemente a lo largo de la curva funicular, se puede aproximar el valor de  $x_1$  mediante la expresión 2.29:

$$x_1 = \frac{a}{N} \quad (2.29)$$

El valor de  $T_0$  se obtendrá a partir del valor de la densidad de fuerza del primer tramo de la sección funicular según la ecuación de la primera configuración de equilibrio  $q_1$ :

$$q_1 = \frac{T}{L_1} = \frac{T_0}{L_1 \cdot \cos \theta} = \frac{T_0 \cdot L_1}{L_1 \cdot x_1} = \frac{T_0}{x_1} \Rightarrow T_0 = q_1 \cdot x_1 \quad (2.30)$$

Finalmente la longitud total de la catenaria puede calcularse a través de la ecuación 2.24 que se recuerda a continuación:

$$L = \frac{1}{g} \sinh(g \cdot a) \quad (2.31)$$

El peso específico  $\lambda$  se utiliza de esta forma para calibrar el MAC. Al considerar que las secciones funiculares de la primera y de la segunda configuración de equilibrio y sus formas catenarias aproximadas, poseen el mismo peso específico, se consigue que cada geometría esté vinculada a unos valores de densidades de fuerza concretos.

### 3. Cálculo de la segunda catenaria

Se calculará a continuación una segunda catenaria que comparta los mismos puntos de apoyos y el mismo peso específico pero que tenga la altura deseada:  $h'$ .

Para ello se aplicará nuevamente la ecuación 2.23. para obtener el valor de la constante  $g'$  de la segunda catenaria

$$\frac{1}{2g'} \cosh[a \cdot g'] - \frac{1}{2g'} - h' = 0 \quad (2.32)$$

A partir de este valor se podrá obtener su representación gráfica aplicando la ecuación 2.25.

$$y' = \frac{1}{2g'} \{ \cosh[g' \cdot (2x - a)] - \cosh[g' \cdot a] \} \quad (2.33)$$



#### 4. Cálculo densidades de fuerzas equivalentes

A partir de las ecuaciones 2.26 y 2.30 se deduce la ecuación 2.35 que permite calcular la densidad de fuerza  $q'_1$ :

$$T'_0 = \frac{\lambda L'}{2 \tan \theta'} = q'_1 \cdot x_1 \quad \Rightarrow \quad q'_1 = \frac{\lambda L'}{2 \tan \theta' x_1} \quad (2.34)$$

y teniendo en cuenta que  $y'_1 = \tan \theta' \cdot x_1$ :

$$q'_1 = \frac{\lambda L'}{2 y'_1} \quad (2.35)$$

Los valores de  $L'$  e  $y_1$  se podrán calcular a partir de geometría de la segunda catenaria.

$$y'_1 = \frac{1}{2g'} \{ \cosh[g' \cdot (2x_1 - a)] - \cosh[g' \cdot a] \} \quad (2.36)$$

$$L = \frac{1}{g'} \sinh(g' \cdot a) \quad (2.37)$$

En caso de que se desee emplear densidades de fuerza diferentes para los distintos tramos de la sección funicular se aplicará el MAC de forma independiente a cada tramo. De esta forma, en cada calibración se adoptará la densidad de fuerza que tenga el tramo en la primera configuración de equilibrio, mientras el resto de INPUTS serán idénticos, al pertenecer todos los tramos a la misma sección funicular.





## 2.6.2. PROGRAMACIÓN DEL MAC EN ENTORNO MATLAB

A continuación se presenta un algoritmo realizado en lenguaje Matlab© que calcula la densidad de fuerza necesaria para obtener la altura deseada de una cúpula o bóveda a través del MAC:

```
% % MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA (MAC)
% % PARA OBTENCIÓN DE DENSIDAD DE FUERZA
% % Manuel Cañete Güeto
% % Programa que estima la Densidad de fuerza de una
% % cúpula o bóveda a partir de la altura de la misma.
% %
% % El programa necesita como "inputs":
% % - Distancia entre los apoyos
% % - Altura de la cúpula o bóveda
% % - Número de ramas o discretización realizada
% % - Peso por unidad de longitud de la catenaria
%% Limpieza de memoria
clc
clear all
%% ENTRADA DE DATOS
% Distancia entre los apoyos
a=20;
%Altura de la bóveda o cúpula deseada
h=40;
%Número de ramas de la catenaria
N=12;
%Peso por unidad de longitud (parámetro landa)
landa=0.98;
%% CÁLCULOS
%Cálculo del coeficiente  $g=landa/(2*T0)$ 
syms g
g=solve(1/2/g*cosh(g*a)-1/2/g-h,g);
%Cálculo y dibujo de la catenaria
x=0:0.1:a;
y = 1/2/g*(cosh(g*(2*x-a))-cosh(g*a));
plot(x,y);
%Cálculo de la longitud de la catenaria
L=1/g*sinh(g*a);
%Cálculo del la densidad de fuerza
x1 = a/N;
y1 = 1/2/g*(cosh(g*(2*x1-a))-cosh(g*a));
q = abs(landa*L/2/y1)
```



Se propone el siguiente algoritmo que calcula el valor de  $\lambda$  a introducir en el MAC a partir de una forma de equilibrio obtenida (Proceso de Calibración):

```
%%          CÁLCULO DEL PESO UNITARIO DE LA CATENARIA
% %          CALIBRACIÓN DE MAC
% %          Manuel Cañete Güeto
% % Programa que calcula el valor del peso unitario de una catenaria
% % equivalente a la sección funicular de una cúpula o bóveda de compresión
% %
% % El programa necesita como "inputs":
% % - Altura de la cúpula o bóveda
% % - Distancia entre los apoyos
% % - Número de ramas o discretización realizada
% % - Densidad de fuerzas empleada en el cálculo de la forma de % equilibrio
%% Limpieza de memoria
clc
clear all
%% ENTRADA DE DATOS
%Altura de la bóveda o cúpula obtenida
h=4.283;
% Distancia entre los apoyos
a=20;
%Número de Ramas
N=12;
%Densidad de fuerza utilizada
q=8;
%% CÁLCULOS
%Cálculo del coeficiente  $g=r/(2*T0)$ 
syms g
g=solve(1/2/g*cosh(g*a)-1/2/g-h,g);
%Cálculo de la longitud de la catenaria
L=1/g*sinh(g*a);
%Cálculo del ángulo teta
x1 = a/N;
y1 = 1/2/g*(cosh(g*(2*x1-a))-cosh(g*a));
teta = atan(y1/x1);
%Cálculo de la componente horizontal de la tensión (T0)
T0=q*x1;
%Cálculo del peso unitario de la catenaria (landa)
landa= abs(2*tan(teta)*T0/L)
```

### 3. APLICACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO A CASOS PRÁCTICO

A continuación se aplicará el método propuesto a diferentes estructuras tanto antifuniculares como tensadas, así como a un proyecto completo formado por diversos tipos de estructuras simples.

#### 3.1. APLICACION A REDES ANTIFUNICULARES CERRADAS

##### 3.1.1. CÚPULAS DE BASE CIRCULAR

Aplicando el MAC a una cúpula de **base circular de 20 m de diámetro** se comprueba a continuación los resultados que se obtienen a partir de dos configuraciones de equilibrio diferentes.

Adoptando las **mismas densidades de fuerza para todas las ramas**, tanto las radiales como las anulares se obtienen formas de equilibrio con curvaturas muy abiertas y con una separación entre anillos muy uniforme.

Aplicando el  $TM-FDM_A$  para valores de  $q=8 \text{ kN/m}^3$  en todas las ramas de la estructura se obtiene una primera configuración de equilibrio con una altura de  $h=4.283 \text{ m}$  y un valor de  $x_1=1,584\text{m}$ , como muestra la figura 3.1.

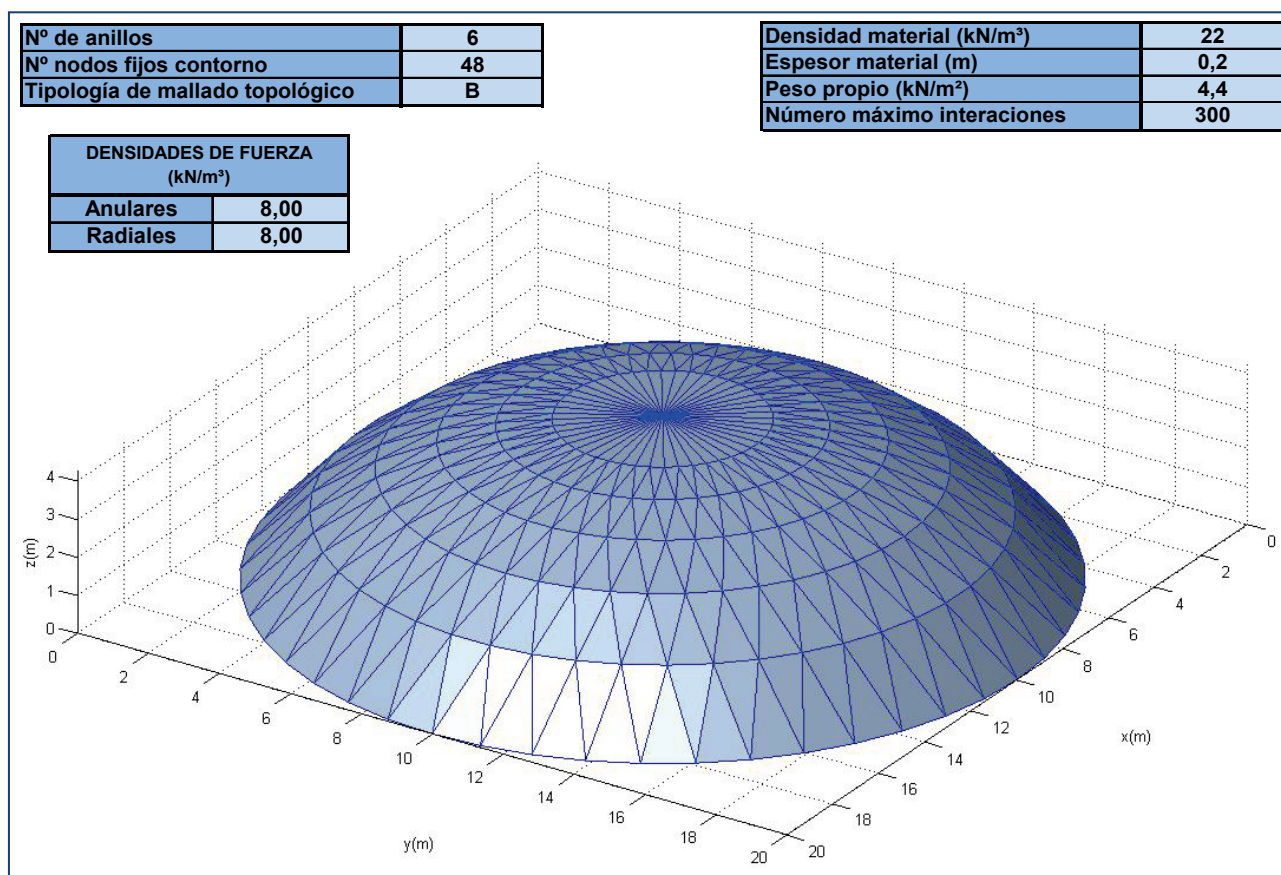


Figura 3.1: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro y aplicando  $q=8 \text{ kN/m}^3$  en todas sus ramas.

Si se calibra el MAC para la sección central de esta primera configuración de equilibrio se obtiene un peso específico  $\lambda=0.98$  kN/m a partir del cual se puede calcular la densidad que se propone para obtener la altura de cúpula deseada.

Si se aplica el MAC considerando diferentes alturas de diseño se obtienen los resultados mostrados en la tabla 3.1.

ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA (m)	DENSIDAD DE FUERZAS OBTENIDA CON EL MAC (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DEL TM-FDM <sub>A</sub> (m)
2	16.31	1.95
4	8.53	3.97
6	6.06	6.09
8	4.88	8.32
10	4.20	10.67
15	3.34	16.81
20	2.91	23.57
30	2.50	37.24
40	2.28	52.14

Tabla 3.1: Resultados obtenidos para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.1.

Así puede comprobarse la aproximación obtenida tras una primera aplicación del MAC:

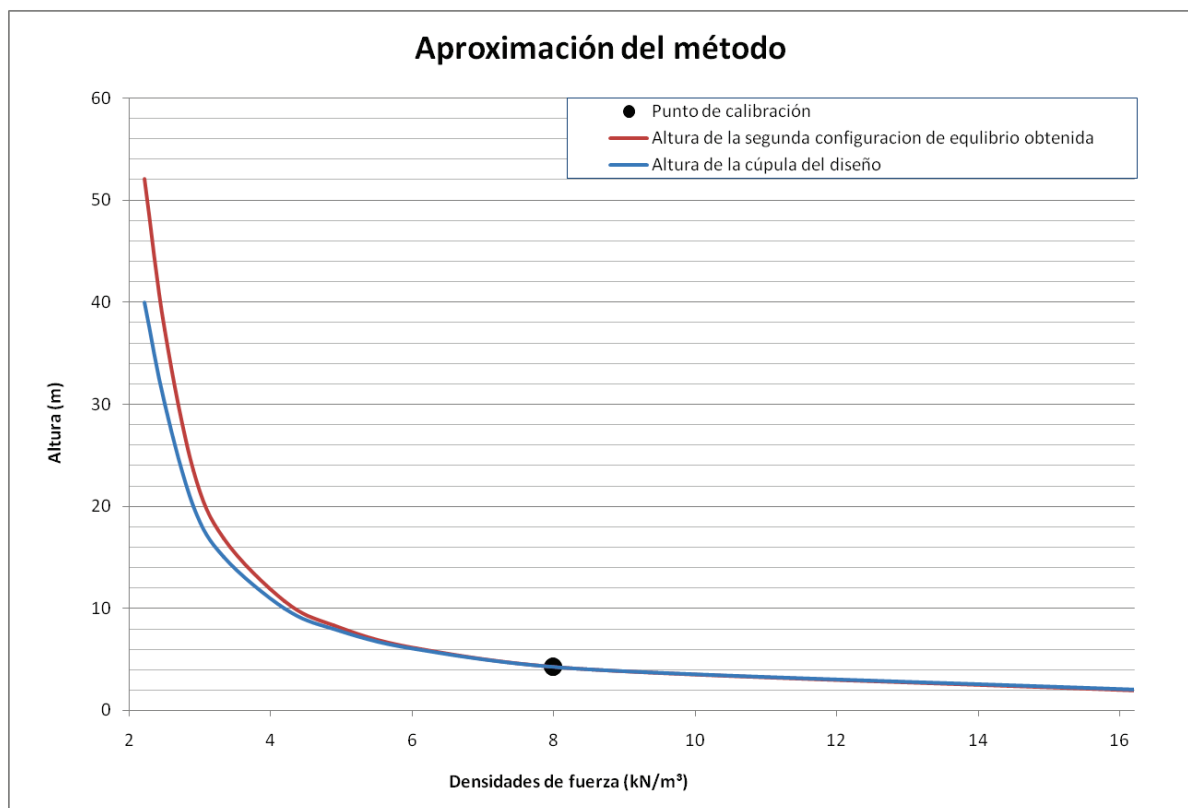


Figura 3.2: Aproximación del MAC para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.1.

Como muestra la figura 3.2, tras una única aplicación del MAC, se obtiene una muy buena aproximación y sólo existen diferencias considerables para valores de densidades de fuerza muy alejados de la primera configuración de equilibrio ( $q = 8 \text{ kN/m}^3$ ). En estos casos, sería necesario aplicar nuevamente el MAC, calibrándolo ahora a partir de la segunda configuración de equilibrio. De esta forma se obtendría un resultado mucho más ajustado al del diseño.

Tomando como ejemplo el caso más desfavorable de la tabla 3.1, altura de cúpula de diseño  $h=40$  metros, se procederá a continuación a realizar una segunda aplicación del MAC.

Se calibrará ahora el MAC para la configuración de equilibrio obtenida tras la primera iteración, que presenta una altura  $h=52,14$  metros y un valor de  $x_1=1,67$  m(figura 3.3).

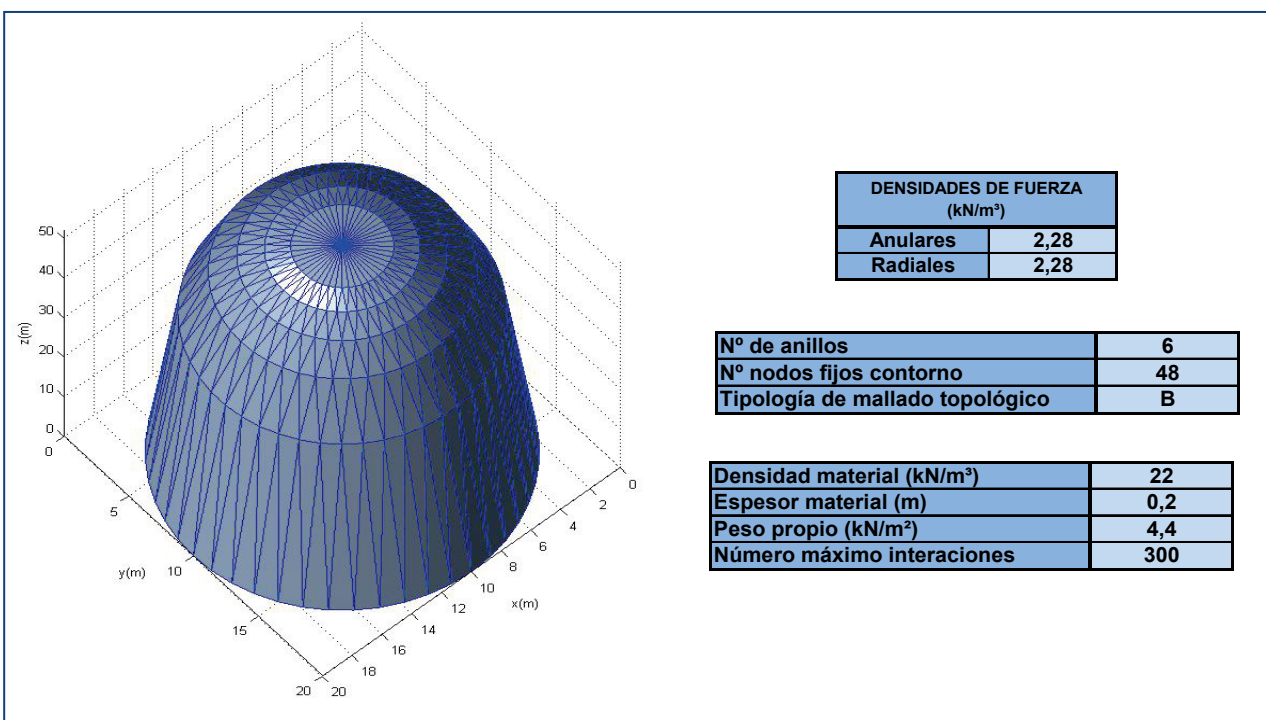


Figura 3.3: Segunda configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro calibrando el MAC a partir de la forma de figura 3.1.

La segunda calibración proporciona un peso específico para la catenaria de valor  $\lambda=1,05 \text{ kN/m}^3$ , valor con el que se obtiene, a través del MAC, una densidad de fuerza para las ramas radiales  $q^r=2,4484 \text{ kN/m}^3$

Aplicando nuevamente el  $\text{TM-FDM}_A$ , adoptando esta densidad de fuerza, se obtiene una cúpula de altura  $h=40,01$  metros que se muestra en la figura 3.4. Este nuevo valor está ya muy próximo a la altura de diseño  $h=40$  metros.

A través de este ejemplo se comprueba que la aproximación es excelente con muy pocas iteraciones. Incluso puede obtenerse una buena aproximación con una sola aplicación si se parte de una primera configuración de equilibrio no muy alejada del diseño buscado.



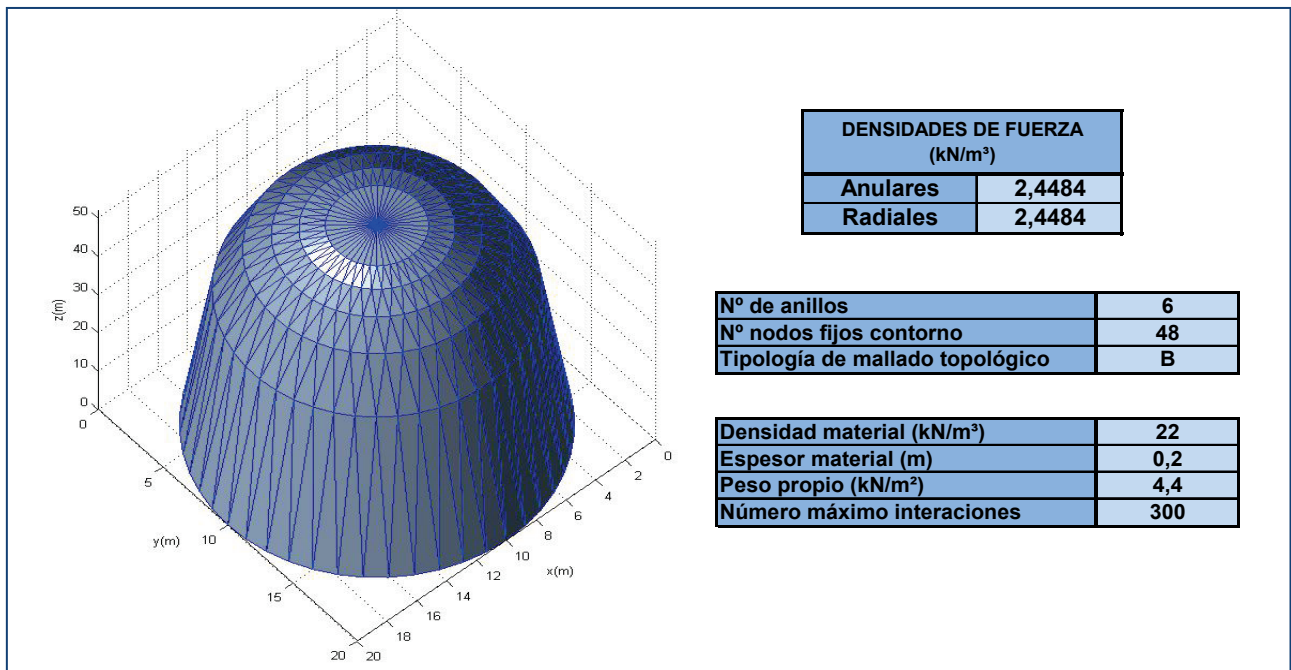


Figura 3.4: Tercera configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro calibrando el MAC a partir de la forma de figura 3.2.

Adoptando valores de **densidades de fuerza diferentes para ramas anulares y radiales**, se obtienen resultados muy similares a los anteriores, como puede comprobarse a continuación.

Se tomará como primera configuración de equilibrio la que muestra la figura 3.5, con una altura  $h=8,41$  metros y un valor de  $x_1=1,584$ m. Ha sido obtenida a través del TM-FDM<sub>A</sub> para unas densidades de fuerza en los anillos  $q_{ANULARES}=2 \text{ kN/m}^3$  y densidades de fuerza en las ramas radiales  $q_{RADIALES}=5 \text{ kN/m}^3$ .

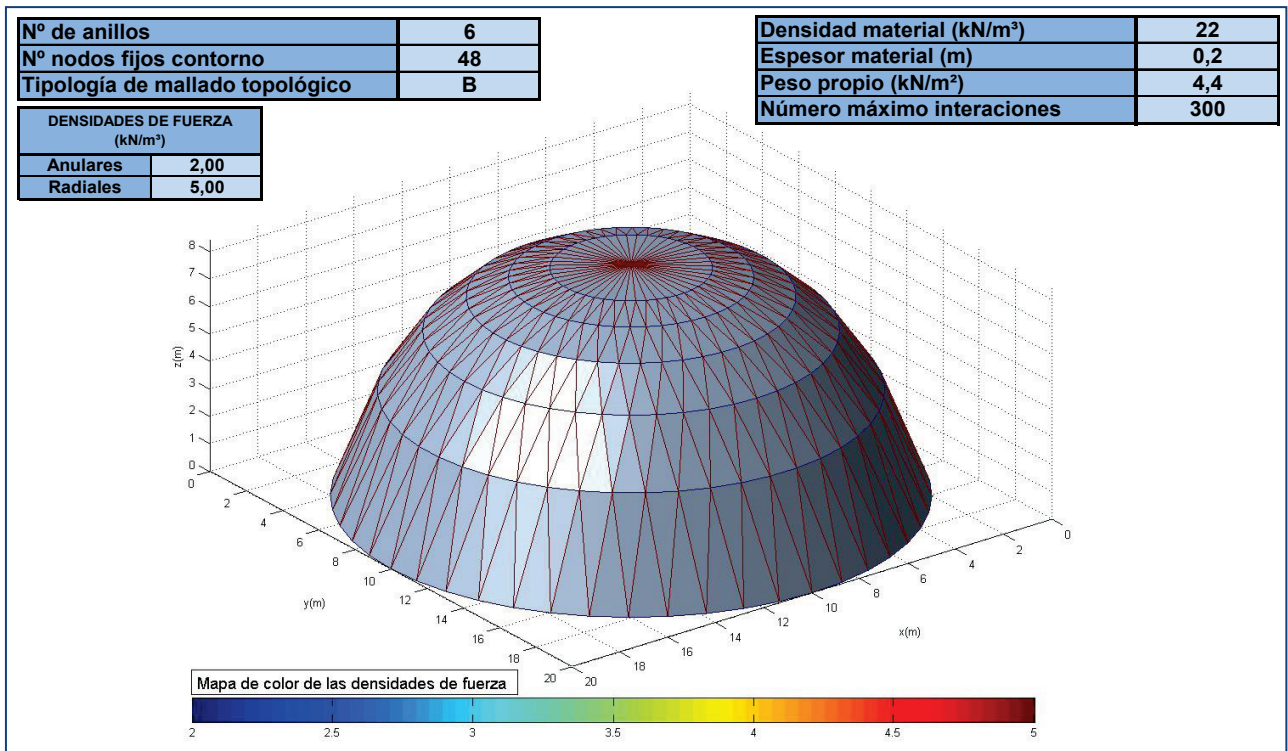


Figura 3.5: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de 20 metros de diámetro y aplicando  $q=5 \text{ kN/m}^3$  en ramas radiales y  $q=2 \text{ kN/m}^3$  en ramas anulares.



Una vez calibrado el MAC ( $\lambda=0,9941$  kN/m), se obtienen las densidades de fuerza mostradas en la tabla 3.2, calculadas para diferentes alturas de diseño. Asimismo, esta tabla muestra las alturas que se obtienen tras aplicar nuevamente el TM-FDM<sub>A</sub> adoptando las densidades de fuerza obtenidas para las ramas radiales y manteniendo las densidades de los anillos de la primera configuración ( $q_{ANULARES}=2$  kN/m<sup>3</sup>).

ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA (m)	DENSIDAD DE FUERZAS OBTENIDA CON EL MAC (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DEL TM-FDM <sub>A</sub> (m)
2	17,33	1,92
4	9,06	3,87
6	6,43	5,89
8	5,18	7,97
10	4,46	10,11
15	3,53	15,58
20	3,08	21,15
30	2,64	32,35
40	2,41	43,5

Tabla 3.2: Resultados obtenidos para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5.

Tras una única aplicación del MAC, la figura 3.6 muestra que la aproximación es aún mejor que la obtenida en el ejemplo anterior

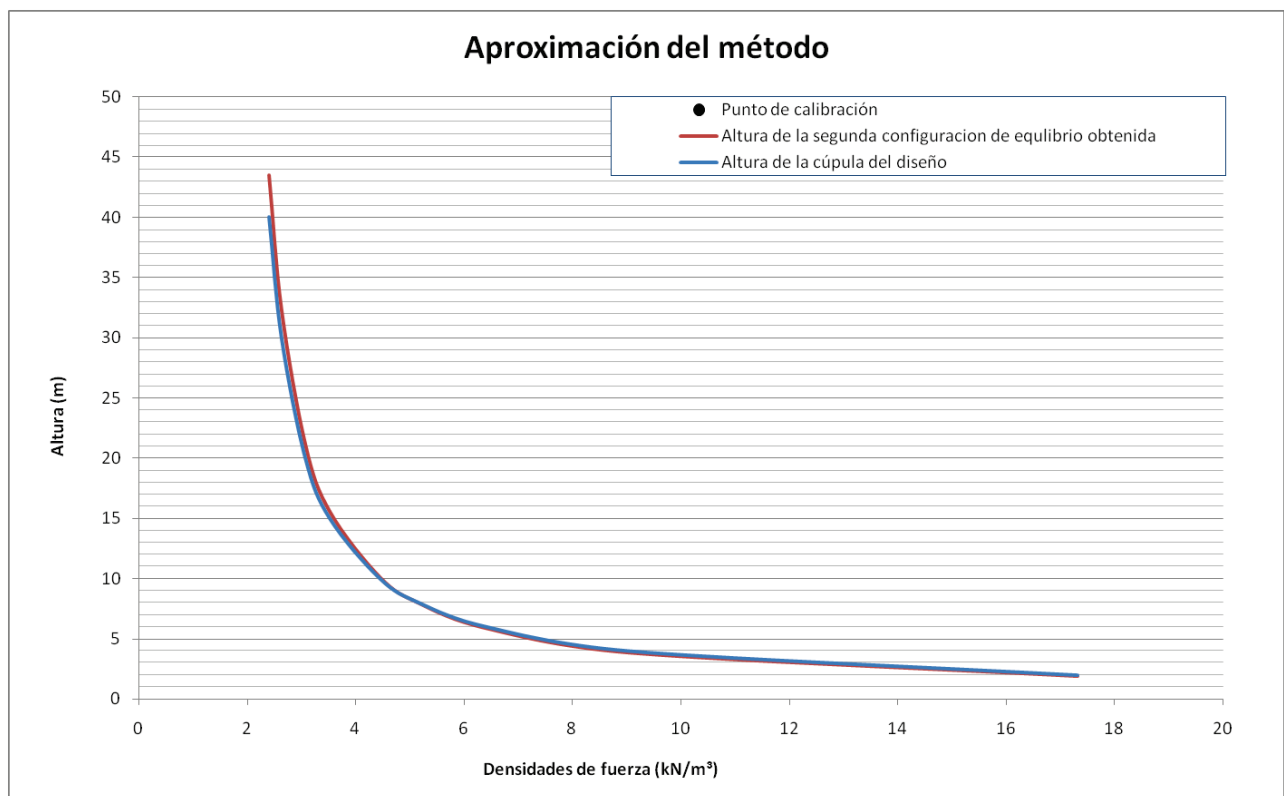


Figura 3.6: Aproximación del MAC para una cúpula de base circular de 20 metros de diámetro tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5.

### 3.1.2. CÚPULAS CON VÉRTICE ABIERTO

A continuación se aplicará el método a una cúpula de base circular y vértice abierto. Este tipo de cúpulas, con óculo central para mejorar la visibilidad, puede contemplarse en algunas construcciones romanas y renacentistas, que incorporaron linternas centrales para proteger de la lluvia.

Para la aplicación del método, se adoptará un diámetro de base de 40 metros, similar a que posee la cúpula del Panteón de Agripa (figura 3.7).

De igual forma que en el apartado anterior, se estudiará la aproximación del método para diferentes alturas y finalmente se buscarán las proporciones que presenta el Panteón, con una altura de cúpula de 20 metros y un óculo central de 9 metros de diámetro aproximadamente. Con esta doble condición geométrica se comprobará también cómo influye la variación de las densidades de fuerza de las ramas radiales en la dimensión de la abertura central.



Figura 3.7: Cúpula del Panteón de Agripa. Año 126 d.C.

Se calibrará el método tomando una primera configuración de equilibrio obtenida con unas densidades de fuerza anulares  $q_{\text{ANULARES}}=150 \text{ kN/m}^3$  y unas densidades de fuerza radiales  $q_{\text{RADIALES}}=8 \text{ kN/m}^3$ .

La topología empleada será idéntica al caso anterior, con 48 nodos en cada anillo, pero eliminando el nodo central y sus conexiones con los nodos del primer anillo. De esta forma se obtiene la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.8., con una altura de 8.99 metros, correspondiente a la cota de los nodos del anillo 1.



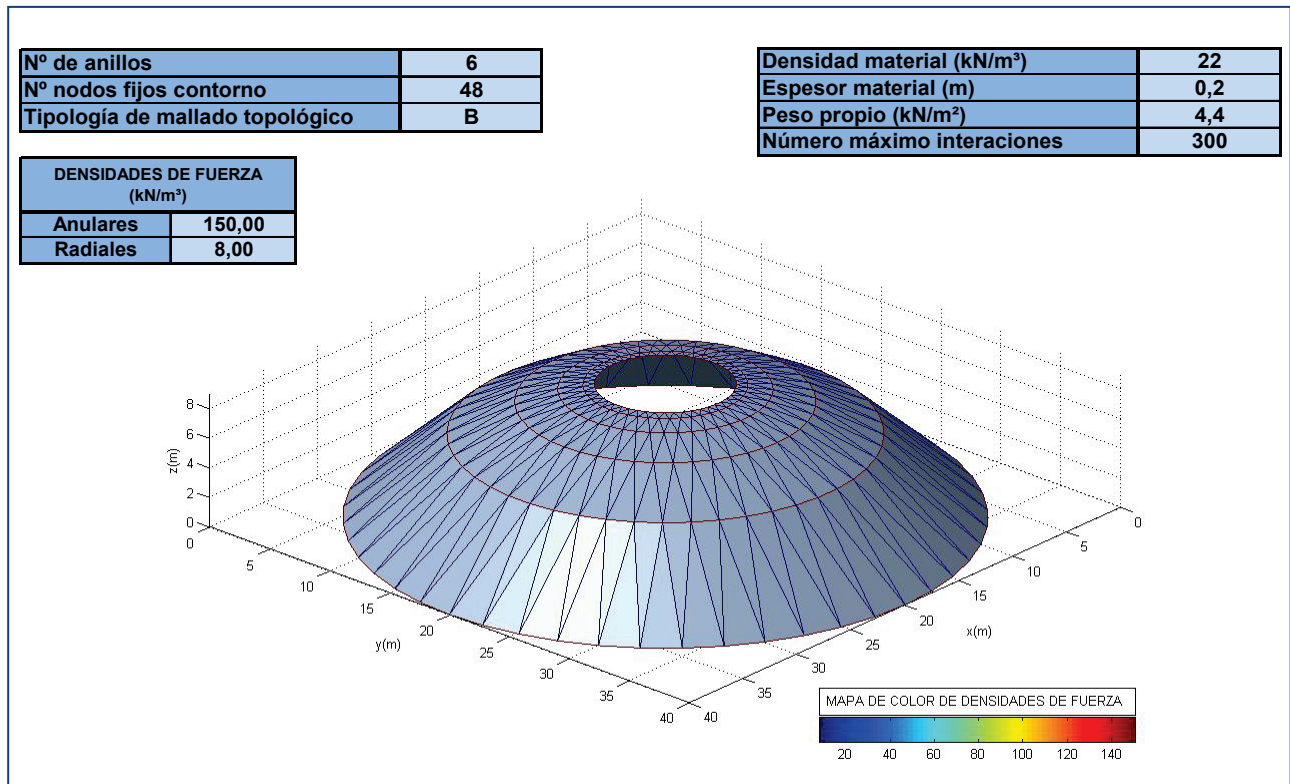


Figura 3.8: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de 40 metros de diámetro y sin nodo central, aplicando  $q = 8 \text{ kN/m}^3$  en ramas radiales y  $q = 150 \text{ kN/m}^3$  en ramas anulares.

De forma análoga al ejemplo anterior, al aplicar el MAC se modificarán las densidades de fuerza radiales, manteniendo el valor inicial de las densidades de fuerza de los anillos. De esta forma se obtienen mejores aproximaciones, como ha quedado probado en el apartado anterior para cúpulas sin abertura.

Calibrando el método para esta primera configuración de equilibrio, los resultados obtenidos para diferentes alturas de diseño son los mostrados en la tabla 3.3.

ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA (m)	DENSIDAD DE FUERZAS OBTENIDA CON EL MAC (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DEL TM-FDM <sub>A</sub> (m)
2	33,12	1,82
4	16,80	4,21
6	11,45	6,33
8	8,84	8,17
10	7,32	9,78
15	5,38	13,11
20	4,47	15,83
30	3,61	20,19
40	3,21	23,72

Tabla 3.3: Resultados obtenidos para una cúpula de base circular de 40 metros de diámetro y sin nodo central, tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5.

En este caso se observa como el método se comporta de peor forma que en casos anteriores, obteniendo un mal resultado para valores de altura de cúpula de diseño alejados del punto de calibración (figura 3.9)

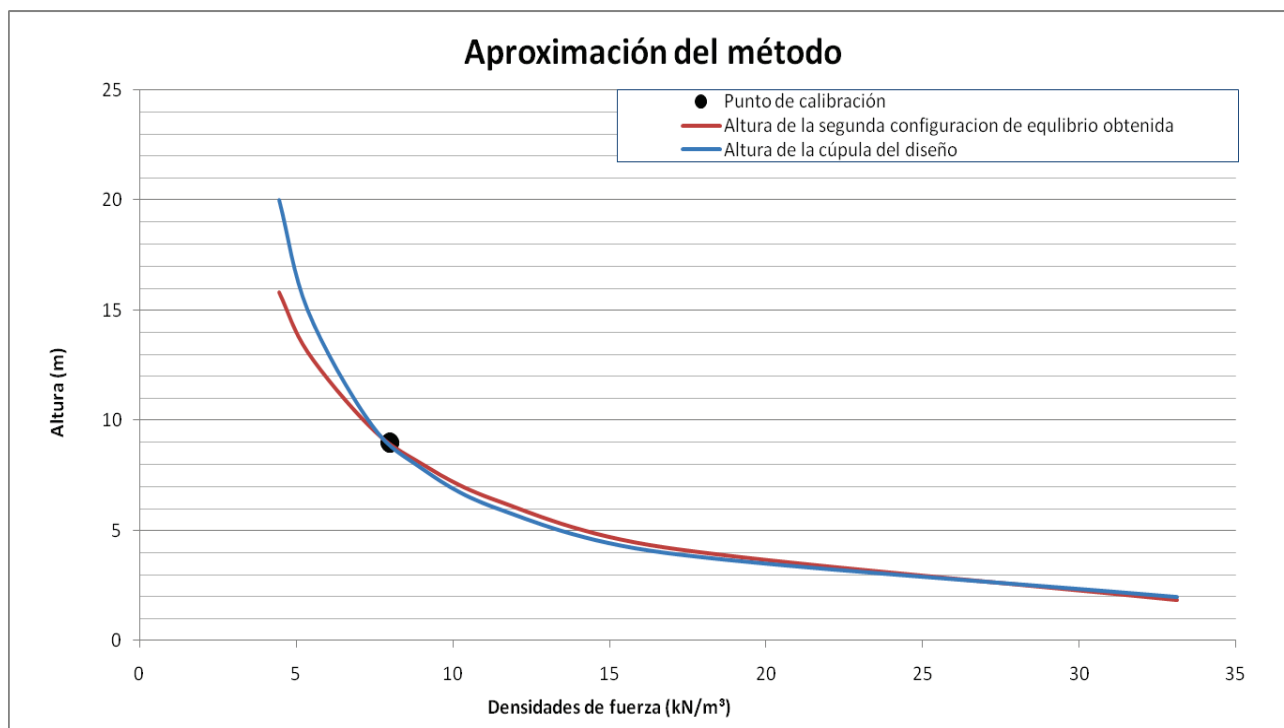


Figura 3.9: Aproximación del MAC para una cúpula de base circular de 40 metros de diámetro y sin nodo central calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.5.

Sin embargo, tomando el caso más desfavorable de la tabla anterior, cúpula de diseño de 40 metros, la aplicación del MAC de forma iterativa converge hacia la solución buscada. La tabla 3.4. muestra como con tan sólo seis iteraciones se obtiene la solución exacta.

ITERACIÓN	VALORES DE CALIBRACIÓN			q' (kN/m³)	ALTURA DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO h'(m)
	q (kN/m³)	h (m)	x1(m)		
1	8,00	8,99	5,63	3,21	23,62
2	3,21	23,62	9,30	2,63	33,78
3	2,63	33,78	9,96	2,48	38,68
4	2,48	38,68	10,16	2,46	39,67
5	2,46	39,67	10,19	2,45	39,94
6	2,45	39,94	10,20	2,45	40,00

Tabla 3.4: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cúpula de 40 metros de altura. El método es convergente y alcanza la solución tras la iteración 6.

Otro aspecto importante a considerar es la abertura de óculo central. La densidades de fuerza adoptadas tanto para las ramas radiales como para las anulares afectan al tamaño de esta abertura. La tabla 3.5 muestra como varía el diámetro del óculo con la variación de las densidades de fuerza radiales, para unas densidades de fuerza en todas las ramas anulares de valor  $q_{ANULARES} = 150 \text{ kN/m}^3$ .





DENSIDADES DE FUERZA RADIALES (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL TM-FDM <sub>A</sub> (m)	DIÁMETRO DEL ÓCULO (m)
33,12	1,82	23,46
16,80	4,21	16,34
11,45	6,33	12,26
8,84	8,17	9,72
7,32	9,78	8,00
5,38	13,11	5,58
4,47	15,83	4,38
3,61	20,19	3,22
3,21	23,72	2,66

Tabla 3.5: Variación del diámetro del óculo con las densidades de fuerza radiales, para una densidad de fuerza de las ramas anulares  $q_{ANULARES} = 150 \text{ kN/m}^3$

Por otra parte para una densidad de fuerza de las ramas radiales fija de valor  $q_{RADIALES} = 3,61 \text{ kN/m}^3$  la tabla 3.6 muestra la variación del diámetro del óculo en relación a las densidades de fuerza de las ramas anulares.

DENSIDADES DE FUERZA ANULARES (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL TM-FDM <sub>A</sub> (m)	DIÁMETRO DEL ÓCULO (m)
50,00	51,17	11,68
75,00	34,98	7,88
100,00	27,42	5,64
125,00	23,06	4,18
150,00	20,21	3,22
175,00	18,21	2,52
200,00	16,71	2,02
225,00	15,54	1,64
250,00	14,61	1,34

Tabla 3.6: Variación del diámetro del óculo con las densidades de fuerza anulares para una densidad de fuerza de las ramas radiales  $q_{RADIALES} = 3,61 \text{ kN/m}^3$

Aunque el MAC permita obtener de forma rápida la altura de la cúpula deseada, no facilita la obtención de la abertura del óculo deseada, puesto que esta dependerá principalmente de las densidades de fuerza radiales, pero está también afectada por las densidades de fuerza anulares. Además no existe una relación entre estas variaciones. El problema es bastante complejo aunque con la ayuda del MAC resulta más sencillo obtener la solución. La forma de obtener una cúpula que cumpla a la vez con una altura y un diámetro de óculo concretos es repetir el MAC para diferentes densidades de fuerza anulares, incrementando el valor de estas si se desea disminuir el diámetro del óculo.

Tomando como ejemplo las proporciones de la cúpula del Panteón de Agripa con altura de diseño 20 metros, el procedimiento que se propone para conseguir este objetivo es el siguiente:



**Paso 1. APLICACIÓN DEL MAC:** aplicando el MAC para altura de diseño de 20 metros, partiendo de la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.8 se obtiene una segunda configuración de equilibrio con una altura de cúpula  $h'=15,83$  metros (tabla 3.3) y un diámetro del óculo de valor  $d=5.58$ .

**Paso 2. CORRECCIÓN DE DENSIDADES DE FUERZA ANULARES:** Como el diámetro del óculo hace falta incrementarlo hasta los 9 metros, lo que puede lograrse disminuyendo la densidad de fuerza de los anillos, se propone que esta disminución se realice de forma inversamente proporcional al incremento de diámetro de óculo necesario. Aunque no existe una proporcionalidad entre el crecimiento del diámetro ocular y el decrecimiento de las densidades de fuerza anulares la media si se acerca a esta proporcionalidad por lo que adoptando este criterio pueden alcanzarse resultados de forma eficaz. Si fuese necesario disminuir el diámetro del óculo sería preciso aumentar de manera inversamente proporcional las densidades de fuerza anulares.

En el caso analizado, se obtendrían una densidades de fuerza anulares  $q_{ANULARES} = 92$   $kN/m^3$ . A partir de este valor y manteniendo las densidades de fuerza radiales del paso anterior ( $q_{RADIALES}= 4,47$   $kN/m^3$ ) se calculará una nueva configuración de equilibrio con una altura de cúpula de  $h'=21,16$  metros y un diámetro del óculo de valor  $d=7.96$ .

A continuación se repetiría el paso 1 calibrando el MAC para la configuración de equilibrio anterior y posteriormente se realiza otra corrección de densidades de fuerza anulares, repitiendo el procedimiento hasta obtener el valor deseado. Los resultados para este ejemplo se muestran en la tabla 3.7.

	DENSIDADES DE FUERZA ANULARES ( $kN/m^3$ )	DENSIDADES DE FUERZA RADIALES ( $kN/m^3$ )	ALTURA DE LA CÚPULA MEDIANTE TM-FDM <sub>A</sub> (m)	X <sub>1</sub> (m)	DIÁMETRO DEL ÓCULO (m)
<b>Paso 1</b>	150	4,47	15,83	8,23	4,38
<b>Paso 2</b>	92	4,47	21,16	6,75	7,96
<b>Paso 1</b>	92	4,61	20,27	6,65	8,234
<b>Paso 2</b>	84	4,61	21,37	6,39	7,52
<b>Paso 1</b>	84	4,78	20,29	6,39	9,3792
<b>Paso 2</b>	87	4,78	19,90	6,39	9,04
<b>Paso 1</b>	87	4,77	<b>19,99</b>	6,39	<b>9,02</b>

Tabla 3.7: Aplicación del procedimiento propuesto para cúpulas sin vértice central al objeto de cumplir una doble condición geométrica: altura de cúpula de 20 metros y diámetro de óculo de 9 metros,

El procedimiento converge hacia la solución buscada en muy pocos pasos. Pero lo que resulta aún más interesante para el diseñador es que se trata de un procedimiento iterativo completamente definido, pudiendo implementarse en un mismo algoritmo TM-FDM<sub>A</sub>-MAC.

### 3.1.3. CÚPULAS DE BASE CUADRADA

Se aplicará ahora el método a una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y con cuatro arcos torales. La primera configuración de equilibrio será la que muestra la figura 3.10.

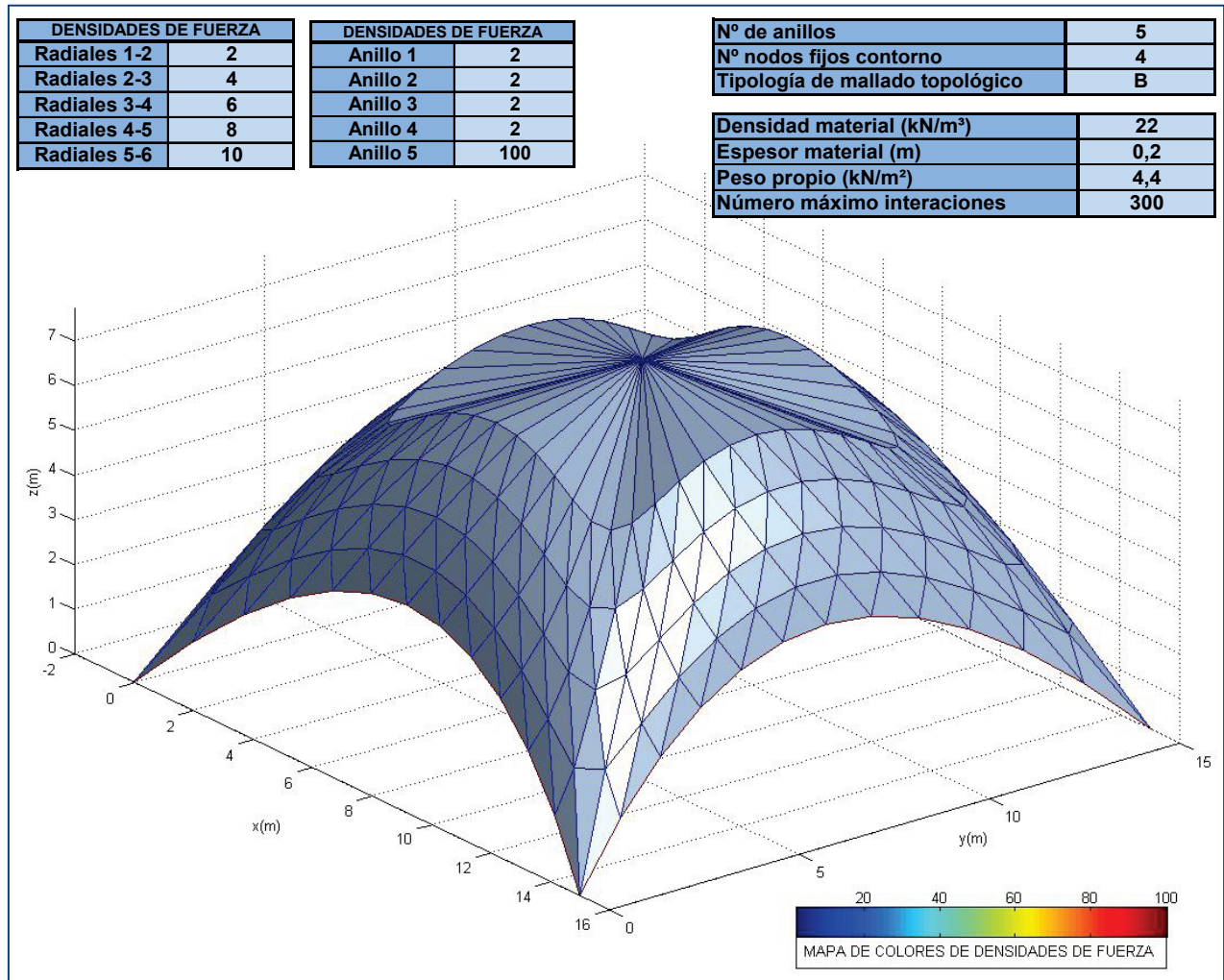


Figura 3.10: Primera configuración de equilibrio para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado, aplicando las densidades de fuerza y la topología que se indican.

Para obtener una configuración de equilibrio en este tipo de estructuras se han escogido un conjunto de densidades de fuerza más heterogéneo que en ejemplos anteriores. Además, como se verá a continuación, aparecen nuevos arcos funiculares que pueden vincularse a determinadas densidades de fuerza.

Se identifican dos tipos de curvas funiculares (figura 3.11): los que establecen la altura de la cúpula (Curva funicular 1) y los que fijan la altura de los arcos torales (Curva funicular 2). Los primeros se encuentran formados por ramas radiales mientras que los segundos engloban las ramas del anillo 5.

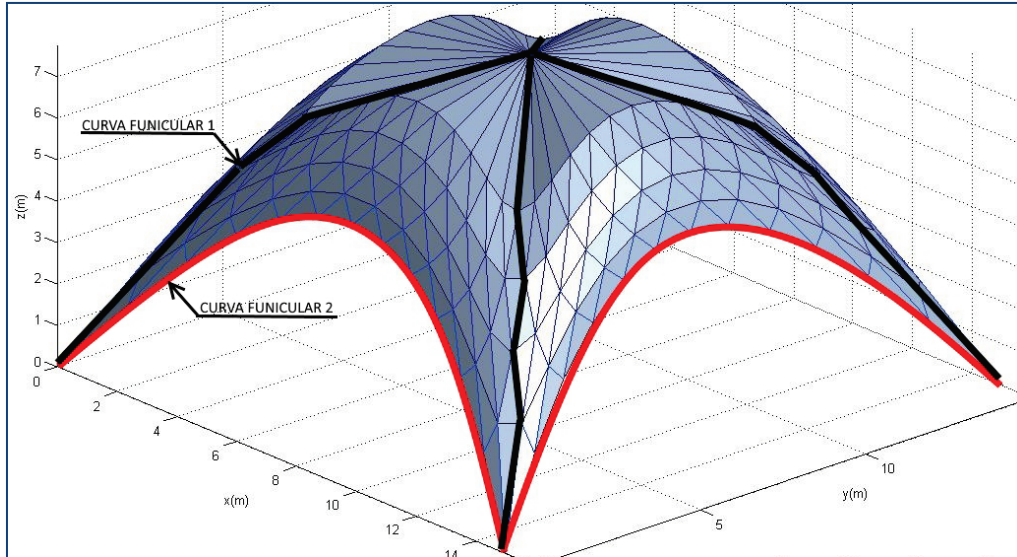


Figura 3.11: Identificación de las curvas funiculares a aproximar mediante el MAC.

En primer lugar se aplicará el MAC para diferentes alturas de cúpula, por lo que, como en los ejemplos anteriores, se modificarán las densidades de fuerza radiales.

En este caso, al tener diferentes densidades de fuerza en cada tramo de la curva funicular, el método proporcionará los nuevos valores para cada tramo, conteniendo el tramo 1 las ramas radiales que unen los nodos del anillo 5 con los nodos del anillo 4 y el tramo 5 las ramas que unen el anillo 1 con el nodo central, de acuerdo con el esquema de la figura 3.12

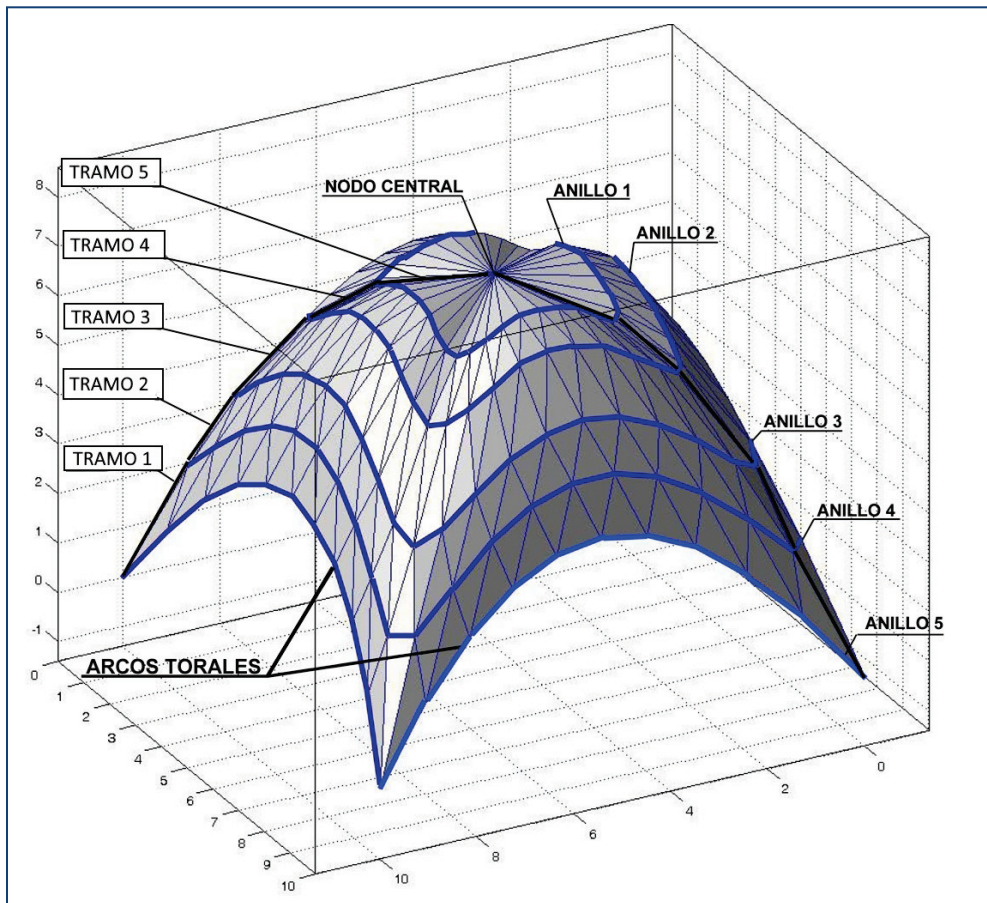


Figura 3.12: Esquema con identificación de tramos y anillos de una cúpula de base cuadrada





Los resultados obtenidos a través de una primera aplicación del MAC a la **CURVA FUNICULAR 1**, para diferentes alturas de cúpula de diseño, se muestran en la tabla 3.8..

ALTURA DEL DISEÑO (m)	DENSIDADES DE FUERZAS RADIALES DEL MAC (kN/m <sup>3</sup> )					ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL TM-FDM <sub>A</sub> (m)
	TRAMO 1	TRAMO 2	TRAMO 3	TRAMO 4	TRAMO 5	
5	14,16	11,33	8,49	5,66	2,83	4,82
10	8,38	6,70	5,03	3,35	1,68	10,28
20	5,76	4,61	3,46	2,31	1,15	22,57
30	4,93	3,94	2,96	1,97	0,99	35,84
40	4,50	3,60	2,70	1,80	0,90	49,75

Tabla 3.8: Resultados obtenidos para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y arcos torales, tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.10.

Como muestra la figura 3.13, vuelve a obtenerse una buena aproximación para valores de altura de diseño próximos al punto de calibración.

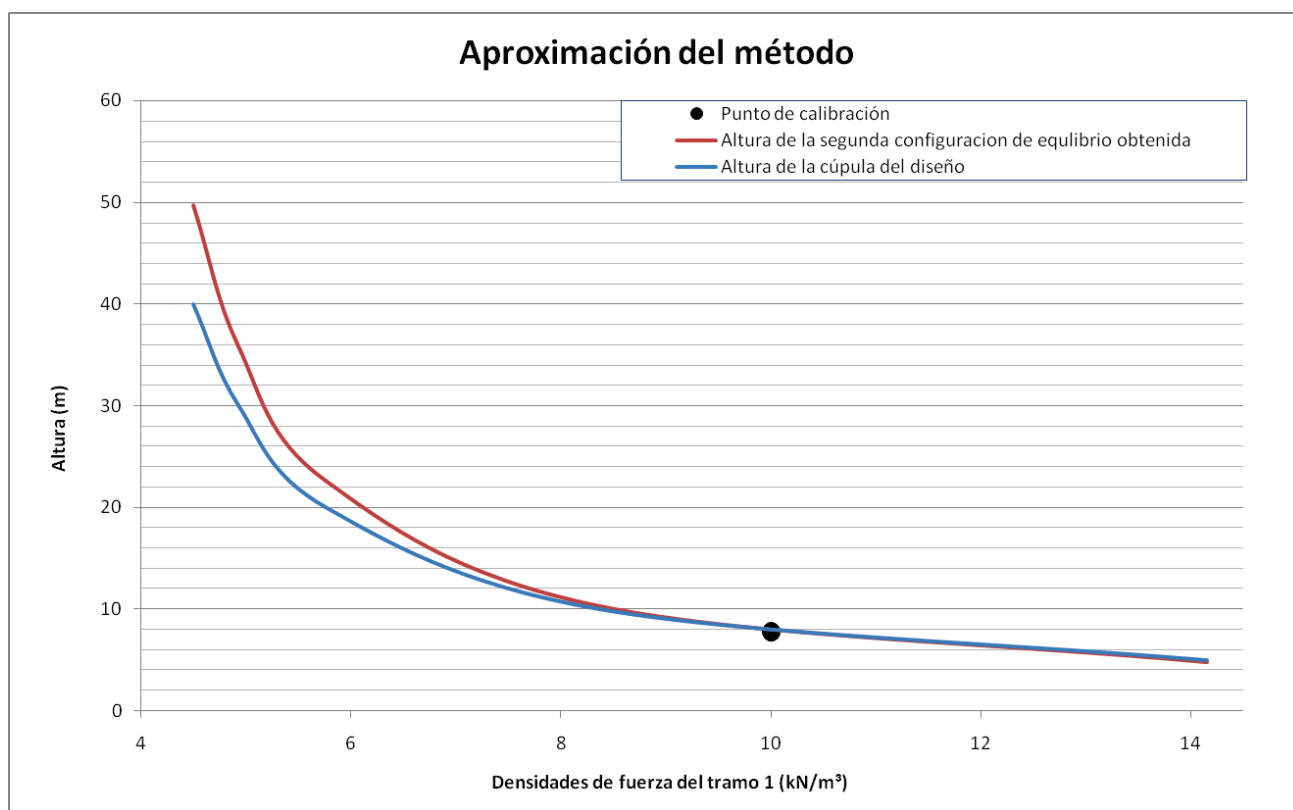


Figura 3.13: Aproximación del MAC para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.10.

Volviendo a aplicar el método de forma iterativa para el resultado con peor aproximación, cúpula de 40 metros de altura, se consigue la altura de diseño tras pocas iteraciones. La tabla 3.10 muestra los resultados obtenidos en cada iteración para las calibraciones realizadas en las calibraciones (véanse los resultados de la tabla 3.9).





ITERACIÓN	DENSIDADES DE FUERZAS RADIALES OBTENIDAS DEL MAC (kN/m <sup>3</sup> )					ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL TM-FDMA (m)
	Tramo 1	Tramo 2	Tramo 3	Tramo 4	Tramo 5	
1	4,497	3,598	2,698	1,799	0,899	49,75
2	4,780	3,830	2,870	1,915	0,958	39,50
3	4,760	3,814	2,858	1,912	0,956	39,82
4	4,754	3,805	2,854	1,909	0,954	40,08
5	4,757	3,808	2,856	1,910	0,955	39,99

Tabla 3.9: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cúpula de 40 metros de altura.

La solución obtenida tras la cuarta iteración, con una altura de cúpula  $h=40,08$  metros y una altura de arcos torales  $h_{\text{TORALES}}= 17,87$  metros, se muestra en la figura 3.14.

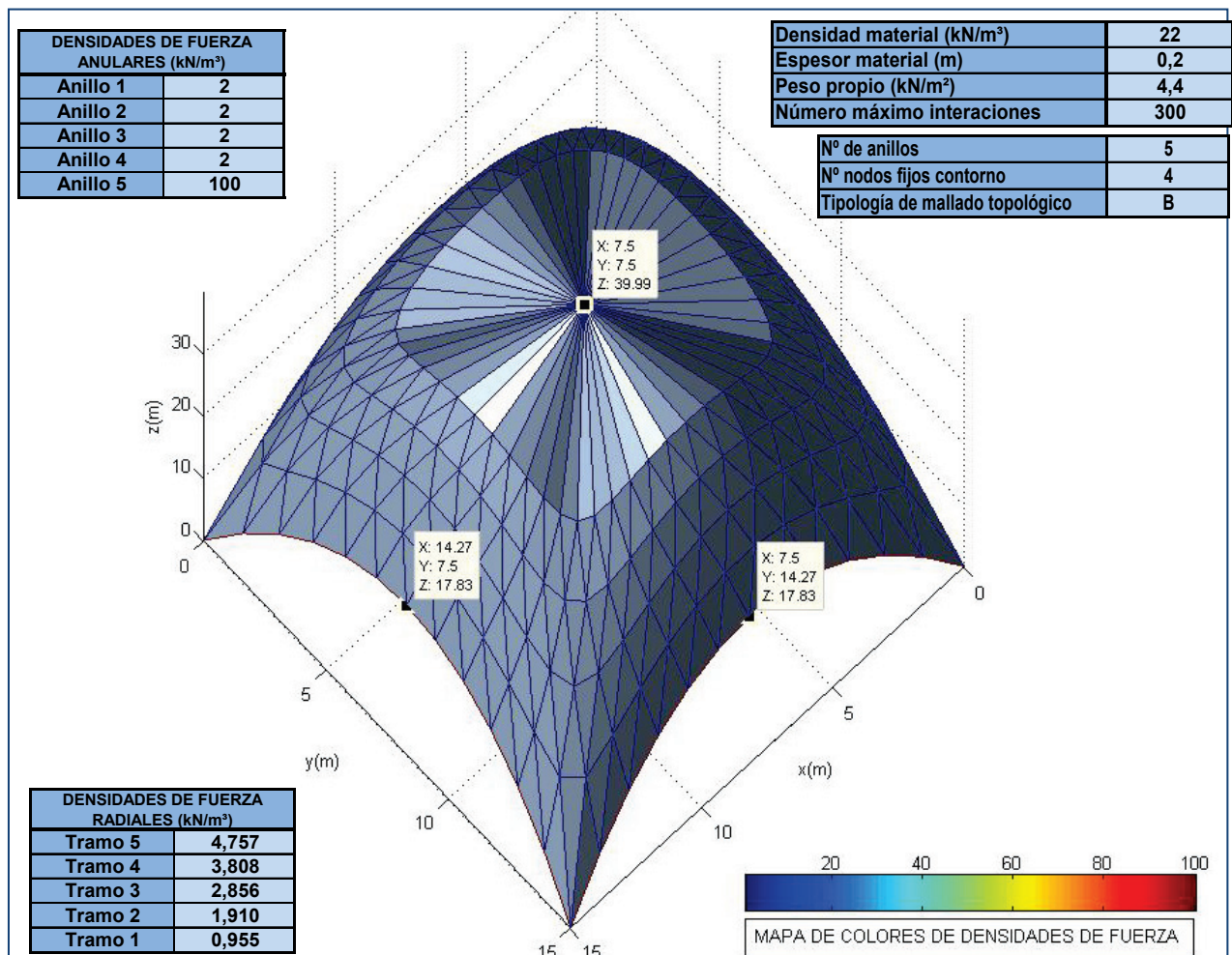


Figura 3.14: Aproximación obtenida tras 5 iteraciones del MAC para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y 40 metros de altura, tomando la figura 3.10 como primera configuración de equilibrio.

Un aspecto importante que se observa al comparar la solución obtenida en la quinta iteración con la primera configuración de equilibrio, es la variación de la altura de los arcos torales con la modificación de las densidades de fuerza radial. La influencia de estas densidades de fuerza en



la altura de estos arcos, sin modificar las densidades de fuerza anulares, no es ni mucho menos despreciable tal y como muestra la tabla 3.10.

DENSIDADES DE FUERZAS RADIALES (kN/m <sup>3</sup> )					DIMENSIONES OBTENIDAS CON EL TM-FDMA	
TRAMO 1	TRAMO 2	TRAMO 3	TRAMO 4	TRAMO 5	ALTURA DE LA CÚPULA (m)	ALTURA TORAL (m)
14,16	11,33	8,49	5,66	2,83	4,82	2,64
8,38	6,70	5,03	3,35	1,68	10,28	4,81
5,76	4,61	3,46	2,31	1,15	22,57	10,06
4,93	3,94	2,96	1,97	0,99	35,84	15,95
4,50	3,60	2,70	1,80	0,90	49,75	22,25

Tabla 3.10: Variación de la altura total con la modificación de las densidades radiales y con la altura total de la cúpula, sin modificación de densidades de fuerza anulares (indicadas en la figura 3.10).

La aplicación del MAC a la **CURVA FUNICULAR 2** resulta más sencilla y directa debido a que se ven afectadas únicamente a las densidades de fuerza del anillo 5. La tabla 3.11 muestra los resultados obtenidos calibrando el método para la configuración de equilibrio de la figura 3.13. Esta configuración de equilibrio parte de una altura total de cúpula de 40,08 metros y de una altura de arcos torales de 49,83 metros.

ALTURA DE DISEÑO DE LOS ARCOS TORALES (m)	DENSIDADES DE FUERZAS PARA ANILLO 5 OBTENIDAS DEL MAC (kN/m <sup>3</sup> )	DIMENSIONES OBTENIDAS CON EL TM-FDMA	
		ALTURA DE LA CÚPULA (m)	ALTURA DE LOS ARCOS TORALES (m)
8	147,76	38,24	13,52
10	130,04	38,80	14,86
12	118,51	39,22	15,88
14	110,39	39,54	16,68
16	104,34	39,79	17,33
18	99,64	40,01	17,87
20	95,87	40,18	18,32
22	92,76	40,33	18,71
24	90,16	40,45	19,05

Tabla 3.11: Resultados obtenidos para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado y arcos torales, tras una primera iteración del MAC calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.13.

Se observa que la altura de la cúpula no se ve muy afectada por la densidad de fuerza del anillo 5 mientras que la altura de los arcos torales si varían de forma considerable. No obstante, puesto que el objetivo ahora es la obtención de la altura de arcos torales fijada en el diseño, hay que admitir que la aproximación no es buena (figura 3.15). Ello debe la influencia que ejerce las densidades de fuerza radiales en la altura de los arcos torales.

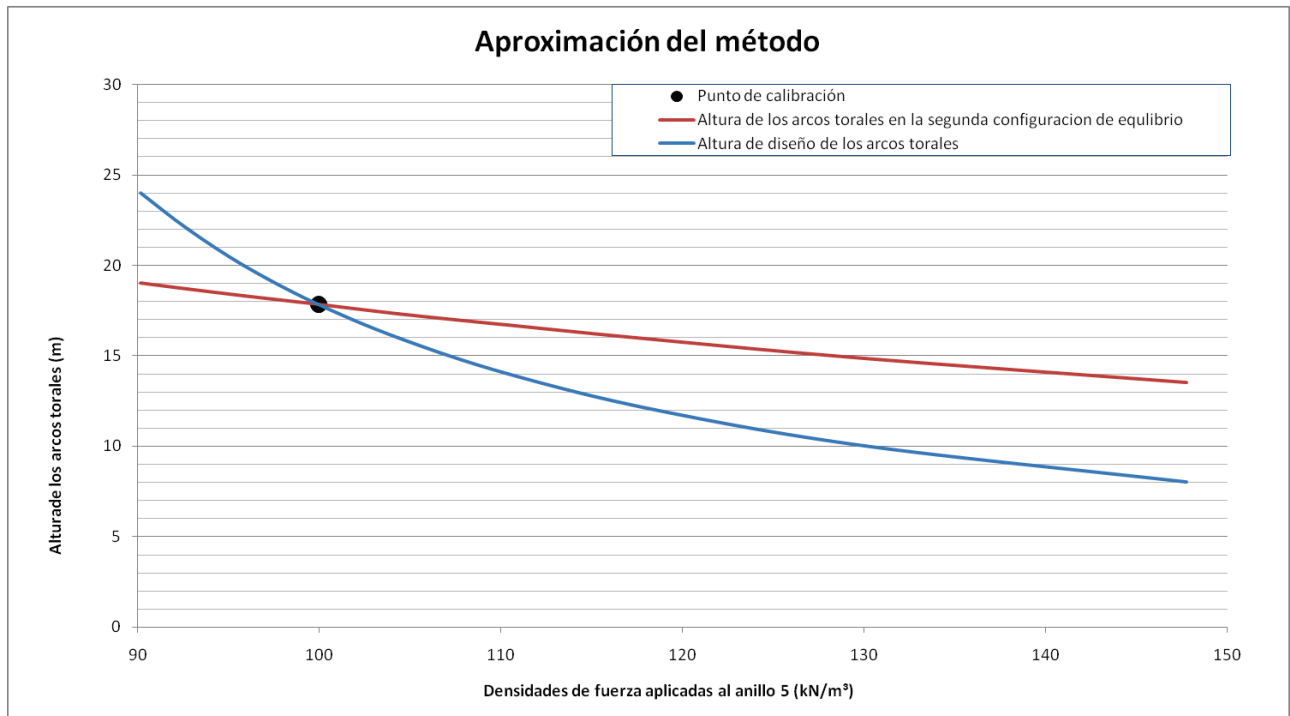


Figura 3.15: Aproximación del MAC para una cúpula de base cuadrada de 15 metros de lado, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.13.

No obstante el método aplicado de forma repetitiva sigue convergiendo hacia la solución buscada ofreciendo buenas aproximaciones en pocas iteraciones. La tabla 3.12 muestra los resultados de la aplicación del MAC para la obtención de una altura de arcos torales  $h_{\text{TORALES}} = 8 \text{ m}$ , a partir de la configuración de equilibrio de la figura 3.14.

ITERACIÓN	VALORES DE CALIBRACIÓN			RESULTADOS DEL MAC	TM-FDM <sub>A</sub>
	q (kN/m <sup>3</sup> )	h <sub>TORALES</sub> (m)	x1 (m)	q' <sub>TORALES</sub> (kN/m <sup>3</sup> )	h' <sub>TORALES</sub> (m)
1	100,00	17,85	1,34	147,76	13,52
2	147,76	13,52	1,31	194,91	10,9009
3	194,91	10,90	1,30	231,89	9,4576
4	231,89	9,46	1,29	255,71	8,7135
5	255,71	8,71	1,29	269,10	8,3443
6	269,10	8,34	1,28	276,05	8,1648
7	276,05	8,16	1,28	279,50	8,07
8	279,50	8,07	1,28	280,99	8,04
9	280,99	8,04	1,28	281,85	8,02
10	281,85	8,02	1,28	282,28	8,01

Tabla 3.12: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cúpula de 40 metros de altura y arcos torales de 8 metros de altura.

### 3.2. APLICACION A REDES ANTIFUNICULARES ABIERTAS

La aplicación del MAC a redes abiertas, tipo bóveda, es similar a la de las redes cerradas. En este caso, las densidades de fuerza obtenidas se aplican únicamente a las ramas anulares que son las que definen los arcos funiculares, mientras que las de las conexiones radiales, conforme a lo explicado en el apartado 2.4, deben de introducirse con valores próximos a cero para mantener el paralelismo entre los arcos.

Por otra parte, el número de anillos del mallado debe acogerse al estrictamente imprescindible para definir adecuadamente el contorno, ya que aproximar al diseño inicial configuraciones de equilibrio con mayor número de anillos que los necesarios conlleva un esfuerzo muy considerable y, al mismo tiempo, inútil.

#### 3.2.1. BÓVEDAS CON BASE TRAPEZOIDAL Y DIRECTRIZ OBLÍCUA

Se analizará a continuación la aplicación del MAC a una bóveda de base trapezoidal y directriz superior oblicua. Una vez fijadas las coordenadas de los puntos de apoyo, el problema queda definido al establecer dos condiciones geométricas: la altura del arco de entrada y la del arco de salida.

Se tomará como ejemplo, el diseño una bóveda de base trapezoidal, como la mostrada en la figura 3.16.

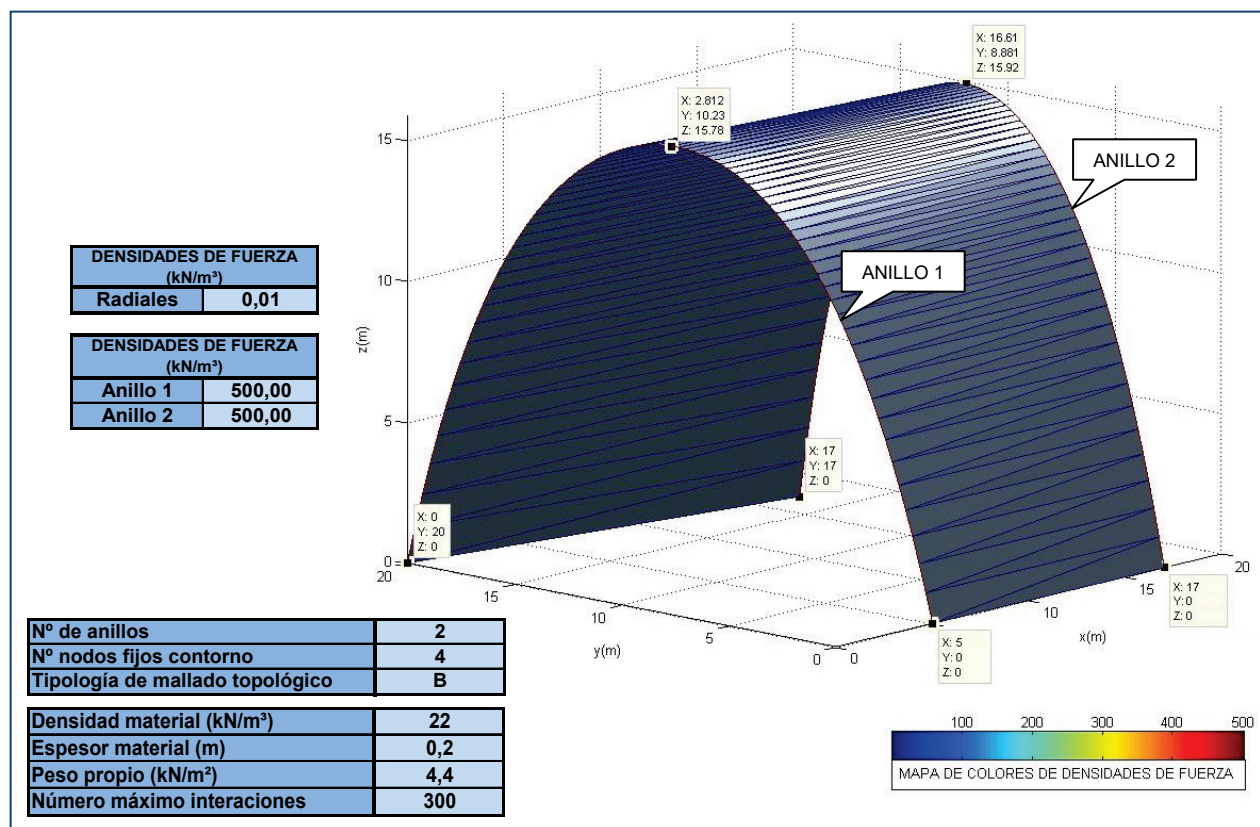


Figura 3.16: Primera configuración de equilibrio para una bóveda de base trapezoidal, con un mallado con 2 anillos y 75 nodos por anillo, aplicando las densidades de fuerza que se indican.



Partiendo de esta configuración de equilibrio, puede comprobarse como afectan las densidades de fuerza de los anillos a la altura de cada arco.

Aplicando el MAC para diferentes alturas de diseño del anillo 1, se obtienen los resultados mostrados en la tabla 3.13, donde se indican las alturas de los dos anillos en la segunda configuración de equilibrio para así poder analizar la influencia de la variación en densidades de fuerza de un anillo en el anillo contrario.

ALTURA DE DISEÑO DEL ANILLO 1	RESULTADOS DEL MAC	RESULTADOS DEL TM-FDMA	
	DENSIDADES DE FUERZA DEL ANILLO 1 (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DEL ANILLO 1 (m)	ALTURA DEL ANILLO 2 (m)
4	1415,89	5,71	17,24
6	991,90	7,67	16,09
8	787,46	9,45	15,58
10	668,50	11,12	15,40
12	590,99	12,74	15,45
16	496,07	15,96	15,96
20	439,79	19,40	16,93
25	394,66	24,44	18,83
30	364,16	31,24	21,91

Tabla 3.13: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base trapezoidal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.16., para diferentes alturas de diseño del anillo 1.

Nuevamente se observa una buena aproximación del método, sobre todo, para valores cercanos al punto de calibración (figura 3.17)

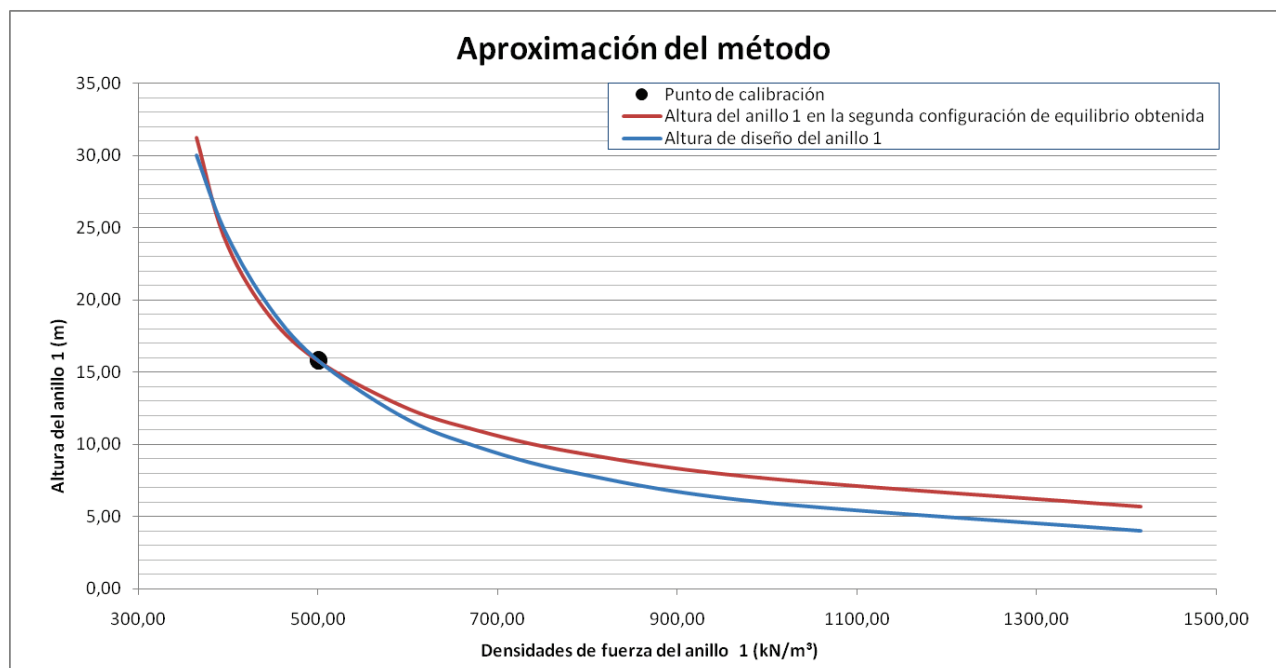


Figura 3.17: Aproximación del MAC aplicado al anillo 1 de una bóveda de base trapezoidal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.16.





Los resultados obtenidos para diferentes valores de altura de diseño del anillo 2 son, como cabía esperar, muy similares a los anteriores (véase la tabla 3.14 y la figura 3.18).

ALTURA DE DISEÑO DEL ANILLO 2	RESULTADOS DEL MAC	RESULTADOS DEL TM-FDMA	
	DENSIDADES DE FUERZA DEL ANILLO 2 (kN/m <sup>3</sup> )	ALTURA DEL ANILLO 1 (m)	ALTURA DEL ANILLO 2 (m)
4	1328,96	17,49	6,07
6	946,10	16,24	8,07
8	762,26	15,66	9,93
10	655,17	15,43	11,45
12	585,14	15,41	12,98
16	498,70	15,80	15,98
20	446,87	16,58	19,06
25	404,83	18,07	23,37
30	376,10	20,31	28,71

Tabla 3.14: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base trapezoidal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.16., para diferentes alturas de diseño del anillo 2.

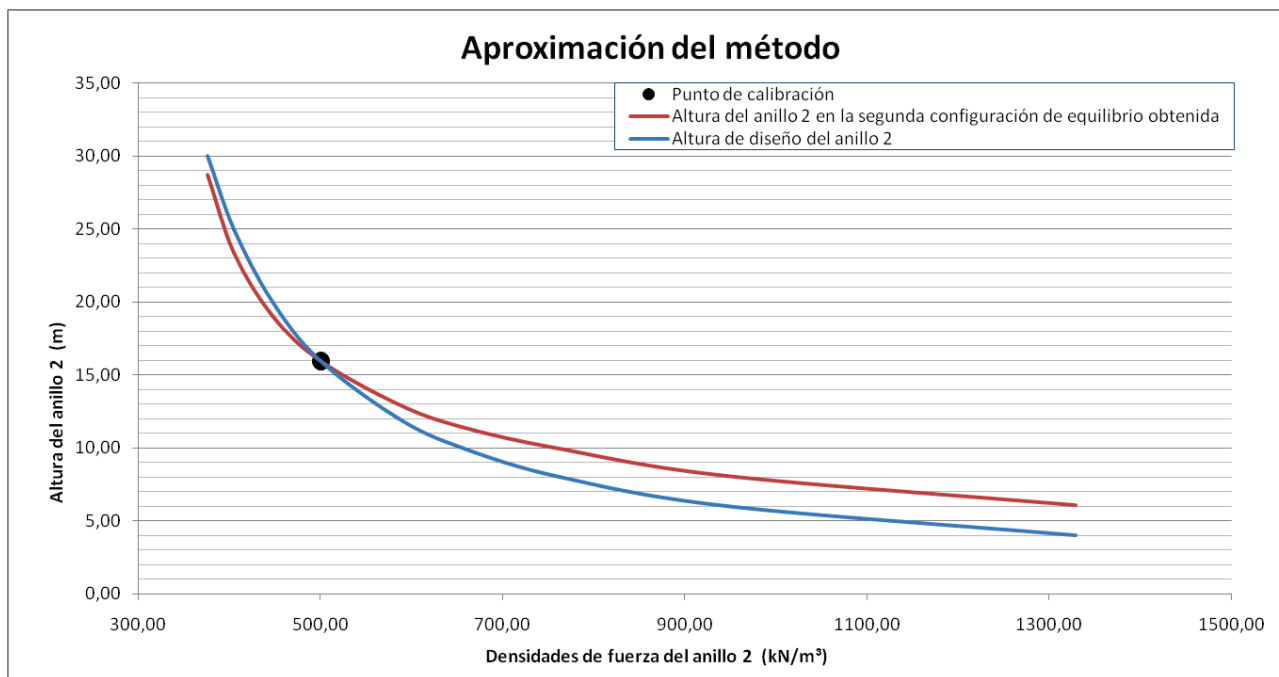


Figura 3.18: Aproximación del MAC aplicado al anillo 2 de una bóveda de base trapezoidal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.16.

Para comprobar la eficacia del método, a continuación se aplicará de forma iterativa con el objetivo de cumplir una doble condición geométrica con valores alejados de la primera configuración de equilibrio:

- Altura de diseño del anillo 1:  $h_{ANILLO1} = 4$  m
- Altura de diseño del anillo 2:  $h_{ANILLO2} = 8$  m



Para aproximar a este diseño establecido habrá que alternar la aplicación del método a cada anillo hasta alcanzar las alturas deseadas.

ITERACIÓN	APLICACIÓN DEL MAC	VALORES DE CALIBRACIÓN				q' (kN/m3)	RESULTADOS TM-FDM <sub>A</sub>	
		q (kN/m <sup>3</sup> )	a (m)	h (m)	x <sub>1</sub> (m)		ALTURA ANILLO 1 (m)	ALTURA ANILLO 2 (m)
1	ANILLO 1	500,0	20,61	15,78	0,27	1415,89	5,71	17,24
2	ANILLO 2	500,0	17,00	17,24	0,23	793,85	4,29	7,73
3	ANILLO 1	1415,9	20,61	4,29	0,27	1508,73	4,03	7,73
4	ANILLO 2	793,9	17,00	7,73	0,23	774,63	4,05	7,99
5	ANILLO 1	1508,7	20,61	4,05	0,27	1525,90	4,00	7,99

Tabla 3.15: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de bóveda de altura variable entre 4 metros (anillo 1) y 8 metros (anillo 2), partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.16

Como muestra la tabla 3.15, se alcanza un valor muy aproximado tras la quinta iteración del MAC aplicada de forma alternada a cada anillo. El método vuelve a converger en muy pocos pasos facilitando la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.19.

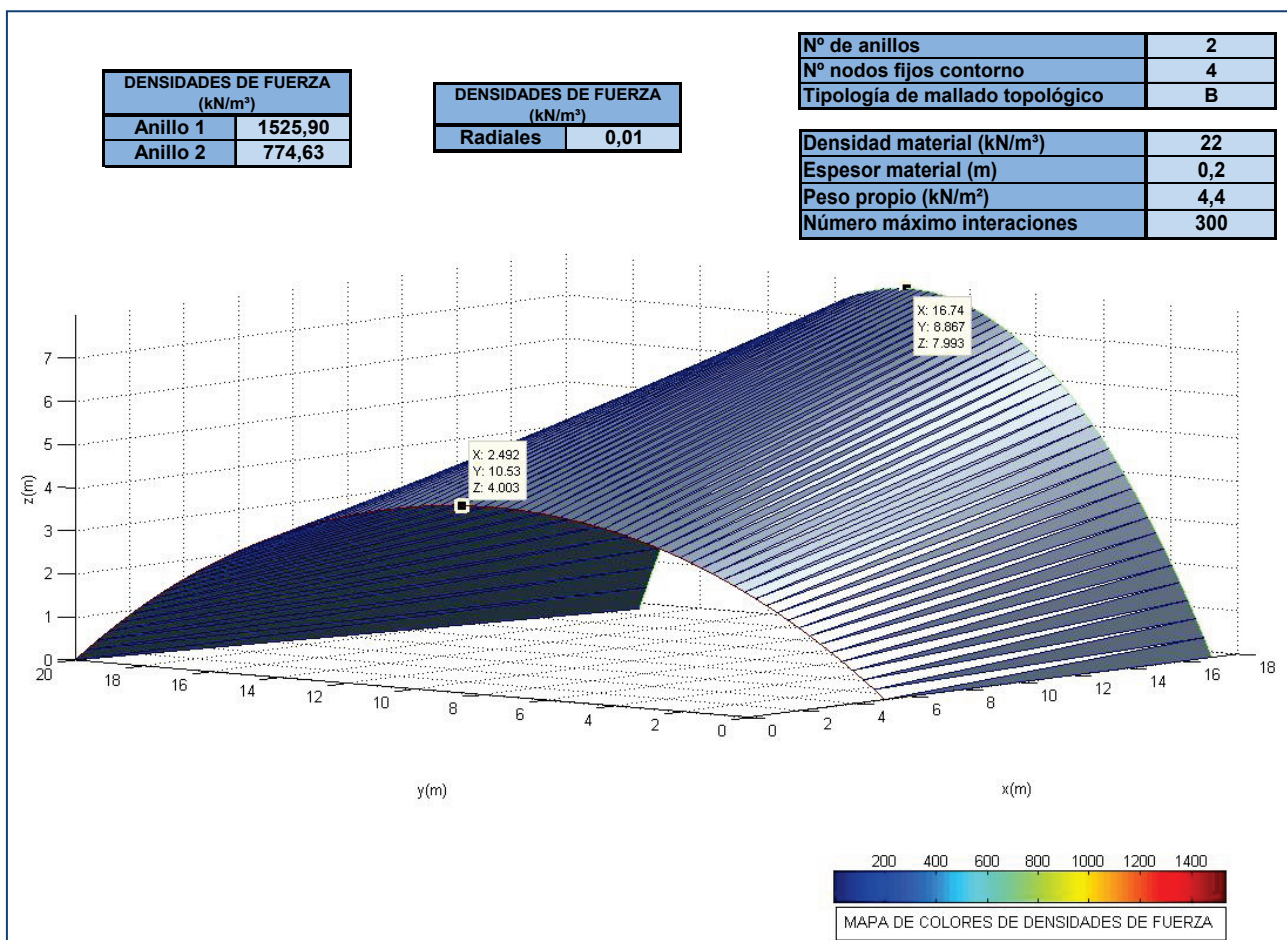


Figura 3.19: Aproximación obtenida tras 5 iteraciones del MAC para una bóveda de base trapezoidal y altura variable entre 4 y 8 metros, tomando la figura 3.16 como primera configuración de equilibrio.

### 3.2.2. BÓVEDAS CON BASE Y DIRECTRIZ POLIGONAL

Cuando se parte de un diseño de bóveda que posee una base y directriz poligonal, es necesario realizar un mallado con un mayor número de anillos al objeto de ajustarse correctamente a su contorno.

Para comprobar la efectividad del MAC a estos casos, se tomará como primera configuración de equilibrio la bóveda con un mallado compuesto de 5 anillos representada en la figura 3.20.

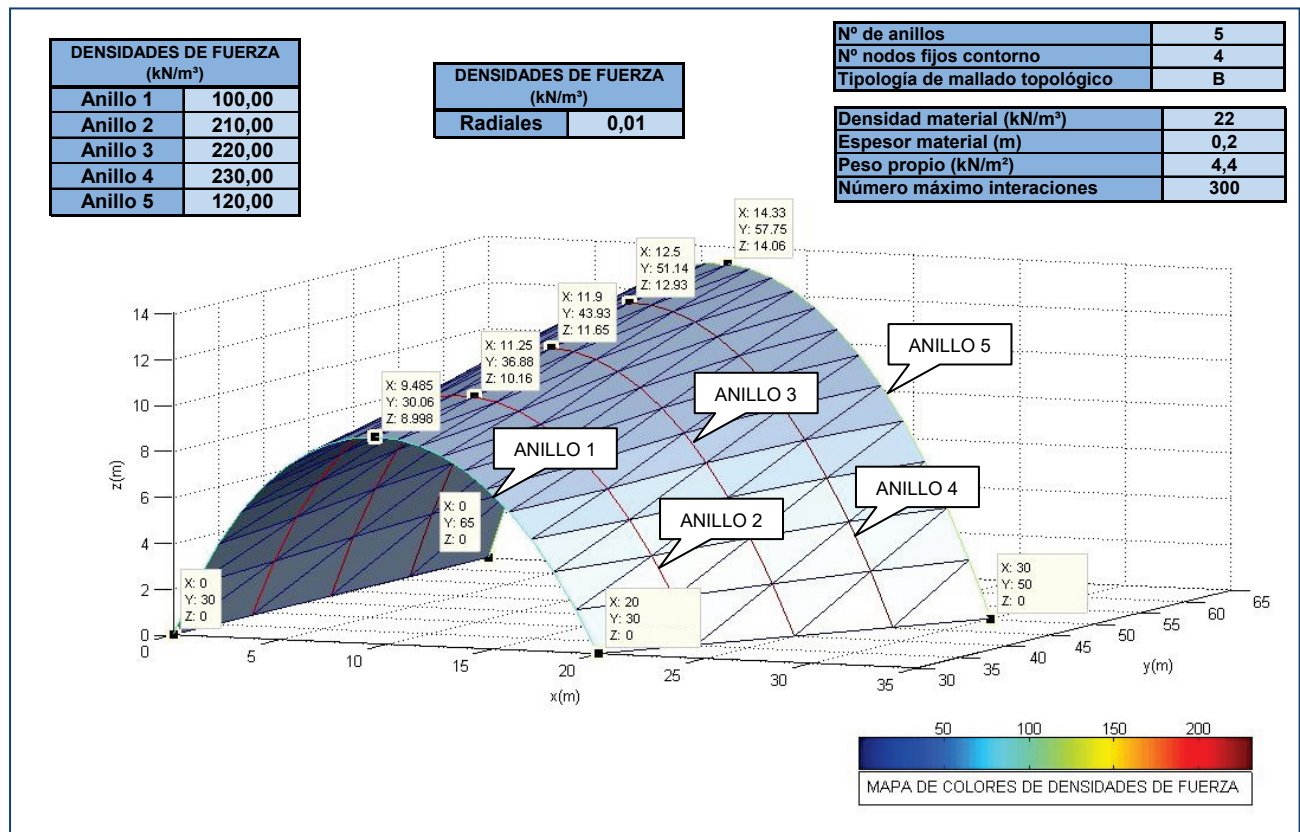


Figura 3.20: Primera configuración de equilibrio para una bóveda de base trapezoidal y directriz poligonal, definida a través de un mallado con 5 anillos y 20 nodos por anillo, aplicando las densidades de fuerza que se indican.

De forma similar al análisis realizado en el apartado anterior, partiendo de la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.20, puede comprobarse como afectan las densidades de fuerza de los anillos a la altura de cada arco.

Para ello se aplicará el MAC para diferentes alturas de diseño del anillo 1 comprobando la influencia de la variación en densidades de fuerza de este anillo en las alturas alcanzadas en equilibrio sin flexión del resto de los anillos.

Los resultados se muestran en la tabla 3.16 y la aproximación obtenida se representa gráficamente en la figura 3.21.

ALTURA DE DISEÑO ANILLO 1 (m)	DENSIDADES DE FUERZA DEL ANILLO 1 (kN/m <sup>3</sup> )	RESULTADOS DEL TM-FDM <sub>A</sub>				
		ALTURA ANILLO 1 (m)	ALTURA ANILLO 2 (m)	ALTURA ANILLO 3 (m)	ALTURA ANILLO 4 (m)	ALTURA ANILLO 5 (m)
5	157,87	<b>6,12</b>	10,64	11,63	12,93	14,06
10	93,11	<b>9,70</b>	10,15	11,65	12,93	14,06
15	73,09	<b>14,23</b>	10,71	11,62	12,93	14,06
20	63,35	<b>28,01</b>	14,65	11,91	12,93	14,06
25	57,51	<b>32,93</b>	15,13	11,81	12,92	14,06
30	53,57	<b>35,99</b>	15,22	11,72	12,91	14,03

Tabla 3.16: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.20, para diferentes alturas de diseño del anillo 1.

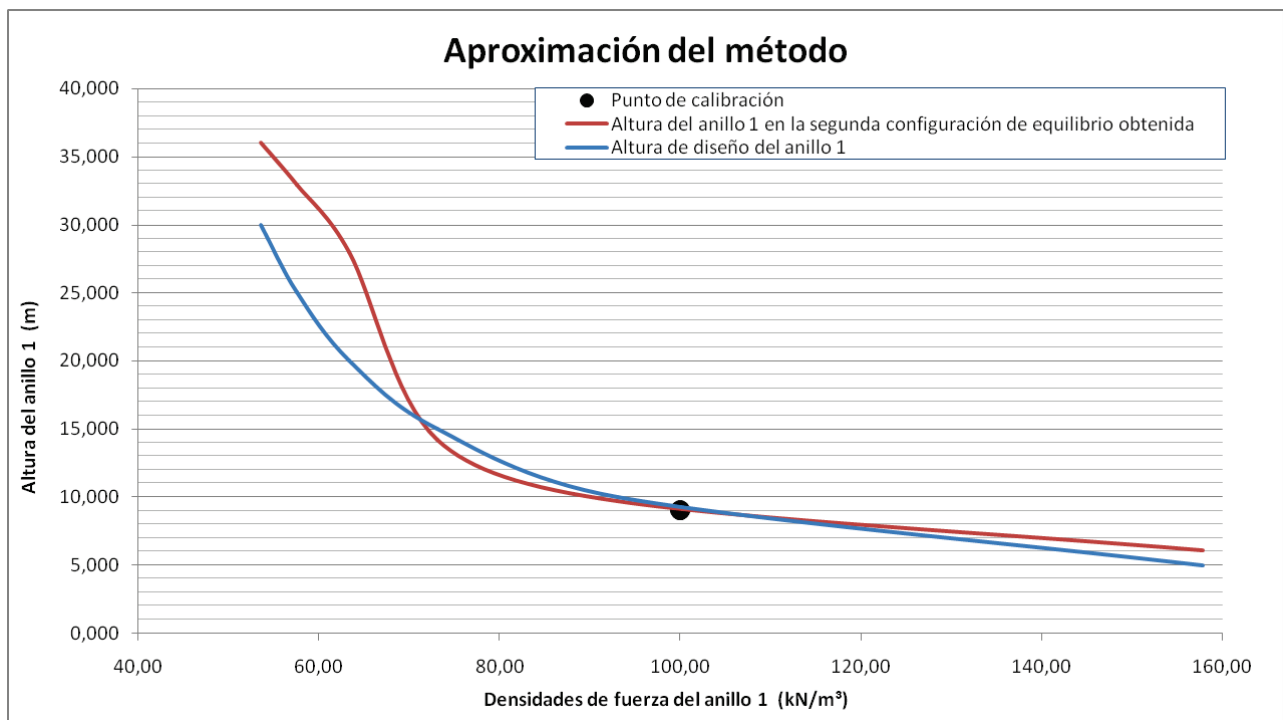


Figura 3.21: Aproximación del MAC aplicado al anillo 1 de una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.20.

Nuevamente se comprueba que existe una buena aproximación para valores altura de diseño próximas al punto de calibración.

Por otra parte, del análisis de los resultados expuestos en la tabla 3.16 se desprende que la modificación de densidades de fuerza del anillo 1, además de influir en la altura del propio anillo en la segunda configuración de equilibrio, afecta a las alturas del resto de los anillos. Además esta afección es mayor en función de su proximidad, de forma que los anillos 4 y 5 apenas sufren variaciones en su altura.

Si se repite el proceso para el anillo central los resultados que se obtienen confirman las conclusiones del análisis anterior (véase tabla 3.17 y figura 3.22).



ALTURA DE DISEÑO ANILLO 3 (m)	DENSIDADES DE FUERZA DEL ANILLO 3 (kN/m <sup>3</sup> )	RESULTADOS DEL TM-FDM <sub>A</sub>				
		ALTURA ANILLO 1 (m)	ALTURA ANILLO 2 (m)	ALTURA ANILLO 3 (m)	ALTURA ANILLO 4 (m)	ALTURA ANILLO 5 (m)
5	437,82	9,02	10,22	<b>6,81</b>	15,53	14,34
10	245,69	8,96	9,99	<b>10,37</b>	13,13	14,03
15	186,13	9,24	11,05	<b>15,24</b>	13,18	14,02
20	157,55	10,45	14,90	<b>25,50</b>	16,38	14,62
25	140,69	12,05	18,01	<b>32,11</b>	19,48	14,88
30	129,47	13,45	20,34	<b>36,68</b>	21,86	16,25

Tabla 3.17: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC en una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado con la configuración de equilibrio de la figura 3.20, para diferentes alturas de diseño del anillo 3.

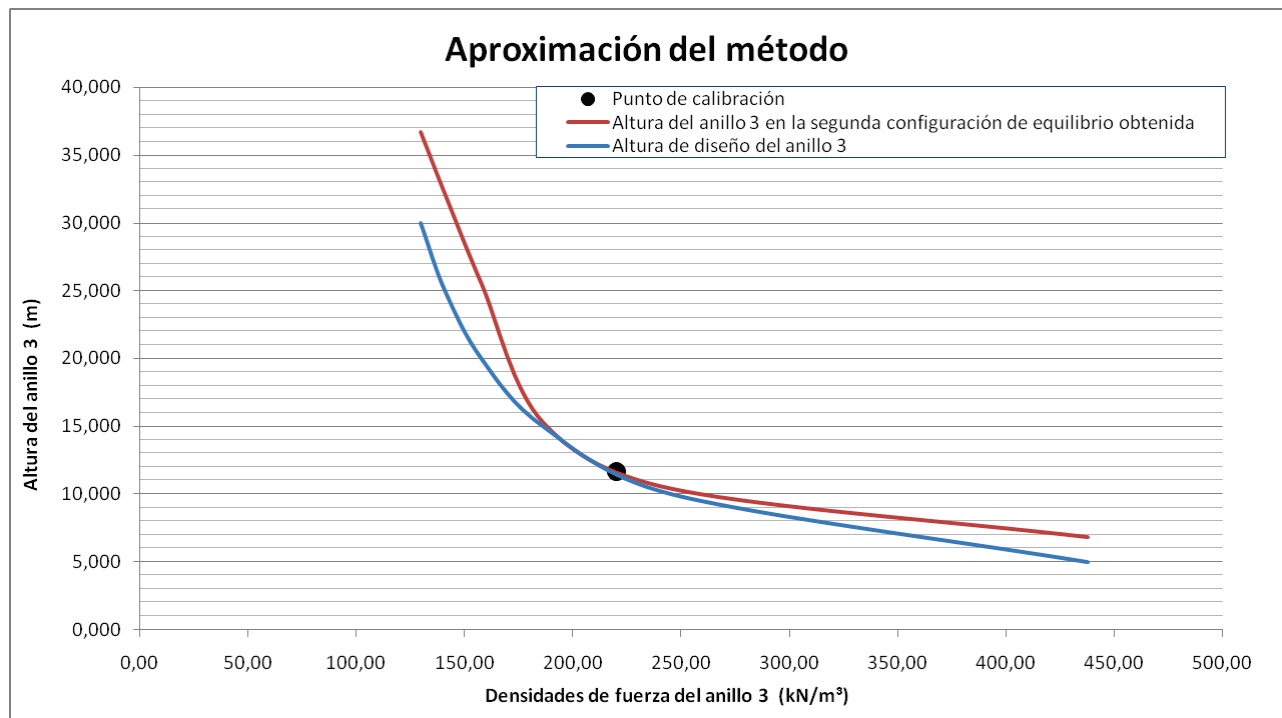


Figura 3.22: Aproximación del MAC aplicado al anillo 3 de una bóveda de base y directriz poligonal, calibrado para la configuración de equilibrio de la figura 3.20.

Para comprobar la efectividad del método, aplicado de forma iterativa, en la obtención de configuraciones de equilibrio con cumplimiento de condicionantes de diseño múltiples, se adoptarán las siguientes alturas de diseño:

- Altura de diseño del anillo 1:  $h_{ANILLO\ 1} = 10\ m$
- Altura de diseño del anillo 2:  $h_{ANILLO\ 2} = 8\ m$
- Altura de diseño del anillo 3:  $h_{ANILLO\ 3} = 6\ m$
- Altura de diseño del anillo 4:  $h_{ANILLO\ 4} = 7\ m$
- Altura de diseño del anillo 5:  $h_{ANILLO\ 5} = 8\ m$

Partiendo de la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.20, será necesario aplicar el método a cada uno de los anillos de forma alternativa en cada iteración. La tabla 3.18 muestra cómo es posible alcanzar una configuración de equilibrio que cumple estos condicionantes de diseño tras realizar cuatro iteraciones. La configuración alcanzada se muestra en la figura 3.23.





ITERACIÓN	APLICACIÓN DEL MAC	CALIBRACIÓN					RESULTADOS DEL TM-FDMA					
		q (kN/m³)	a (m)	h (m)	x1 (m)	q' (kN/m3)	h1 (m)	h2 (m)	h3 (m)	h4 (m)	h5 (m)	
1	ANILLO 1	100,0	20,00	9,00	1,05	93,13	→	9,56	8,08	6,17	7,01	8,01
	ANILLO 2	210,0	22,81	10,16	1,12	250,27						
	ANILLO 3	220,0	26,10	11,65	1,19	372,27						
	ANILLO 4	230,0	30,95	12,93	1,25	377,30						
	ANILLO 5	120,0	33,54	14,06	1,30	188,48						
2	ANILLO 1	93,1	20,00	9,56	1,05	90,60	→	9,97	8,07	6,02	7,01	8,00
	ANILLO 2	250,3	22,81	8,08	1,12	252,21						
	ANILLO 3	372,3	26,10	6,17	1,19	381,46						
	ANILLO 4	377,3	30,95	7,01	1,25	377,77						
	ANILLO 5	188,5	33,54	8,01	1,30	188,70						
3	ANILLO 1	90,6	20,00	9,97	1,05	90,42	→	10,01	8,02	6,00	7,00	8,00
	ANILLO 2	252,2	22,81	8,07	1,12	253,89						
	ANILLO 3	381,5	26,10	6,02	1,19	382,61						
	ANILLO 4	377,8	30,95	7,01	1,25	378,24						
	ANILLO 5	188,7	33,54	8,00	1,30	188,70						
4	ANILLO 1	90,4	20,00	10,01	1,05	90,54	→	10,00	8,00	6,00	7,00	8,00
	ANILLO 2	253,9	22,81	8,02	1,12	254,39						
	ANILLO 3	382,6	26,10	6,00	1,19	382,61						
	ANILLO 4	378,2	30,95	7,00	1,25	378,24						
	ANILLO 5	188,7	33,54	8,00	1,30	188,70						

Tabla 3.18: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de bóveda con directriz poligonal, partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.20

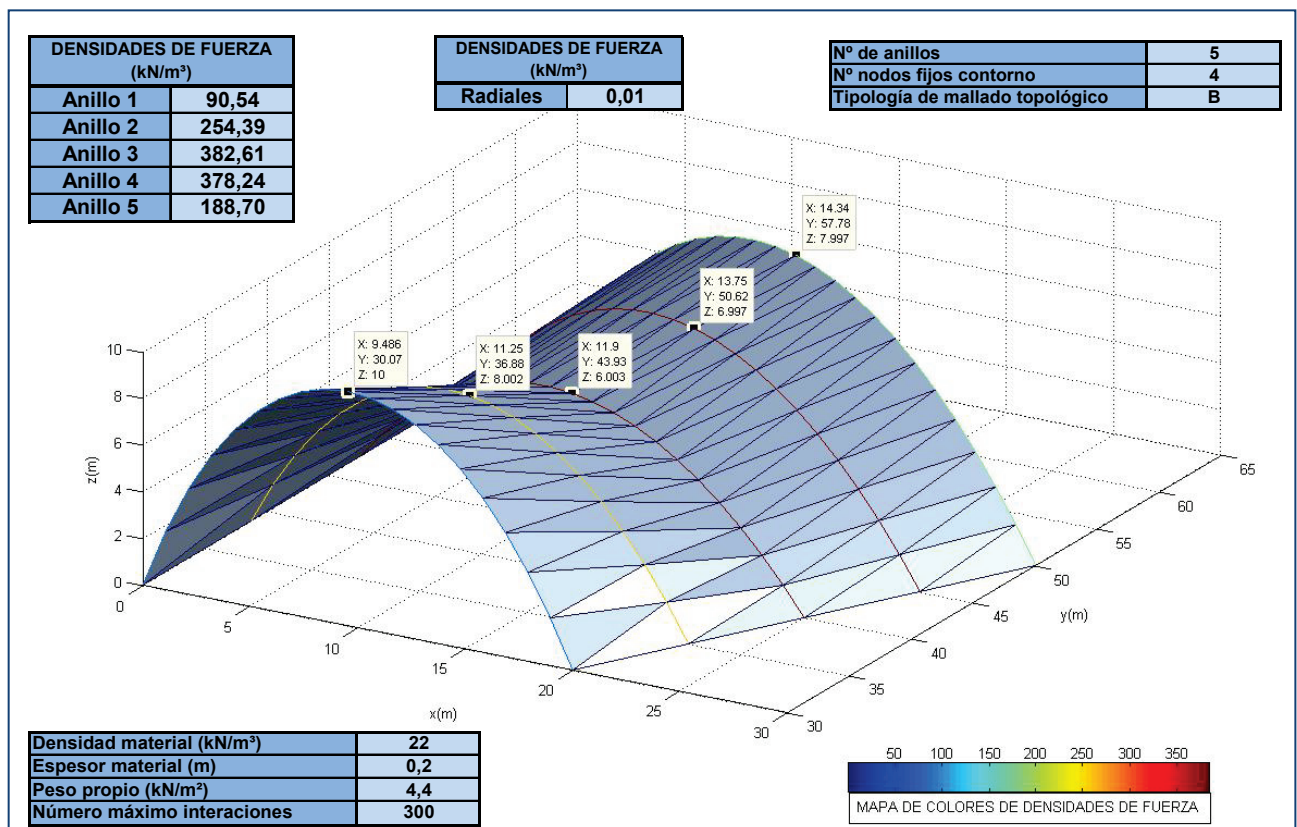


Figura 3.23: Aproximación obtenida tras 4 iteraciones del MAC para una bóveda de base y directriz poligonal, tomando la figura 3.20 como primera configuración de equilibrio.

### 3.3. APLICACION A CUBIERTAS COLGANTES PESADAS

La utilización del MAC en el diseño de cubiertas colgantes no difiere de su aplicación a estructuras antifunculares, si bien hay dos aspectos importantes a tener en cuenta:

- Son estructuras tensadas y, por lo tanto, se obtendrán figuras geométricas inversas a las antifunculares. Todos las tensiones tendrán, en este caso, valor positivo.
- Dependiendo principalmente de la forma del contorno, pueden tratarse de topologías abiertas, como la cubierta del Estadio Municipal de Braga (figura 1.34), o cerradas, como la cubierta del Cilindro de Montevideo (figura 1.33).

Para comprobar la efectividad del MAC en cubiertas colgantes pesadas se aplicará sobre un diseño de cubierta de contorno elíptico de 100 y 60 metros de longitud de ejes. Se partirá de la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.24.

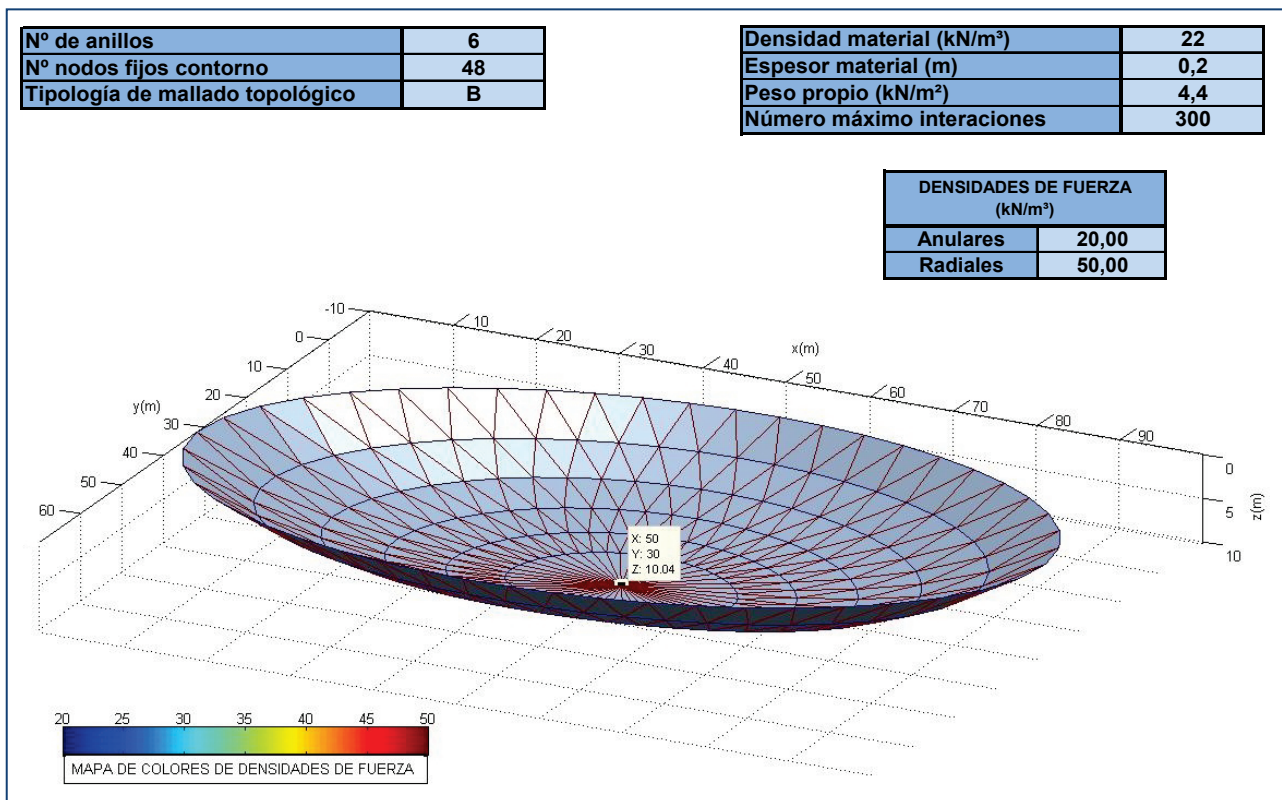


Figura 3.24: Primera configuración de equilibrio para cubierta colgante elíptica de 100 y 60 metros de longitud de ejes, aplicando las densidades de fuerza y el mallado que se indican.

Al tratarse de una topología cerrada, se aplicará el MAC de forma análoga a las cúpulas, modificando las densidades de fuerza de las ramas radiales y manteniendo estable los valores adoptados para las ramas anulares.

Pero al tener, en este caso, forma elíptica y no circular, para aplicar el método se deberá elegir entre una de las dos secciones correspondientes a los ejes de la elipse.

En la tabla 3.19 se presentan los valores obtenidos en la primera aplicación del MAC a la sección correspondiente al eje focal, con una distancia entre apoyos de valor  $a=100$  m.

FLECHA MÁXIMA DE DISEÑO (m)	RESULTADOS DEL MAC	RESULTADOS DEL TM-FDM <sub>A</sub>
	DENSIDADES DE FUERZA RADIALES (kN/m <sup>3</sup> )	FLECHA MÁXIMA OBTENIDA (m)
2	246,93	1,98
4	123,72	3,95
6	82,76	5,94
8	62,37	7,95
10	50,19	10,00
12	42,13	12,10
14	36,41	14,25
16	32,15	16,47
18	28,87	18,74
20	26,27	21,09

Tabla 3.19: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje focal de la configuración de equilibrio de la figura 3.24,

La aproximación obtenida en este caso es excelente, como muestra la gráfica de la figura 3.25.

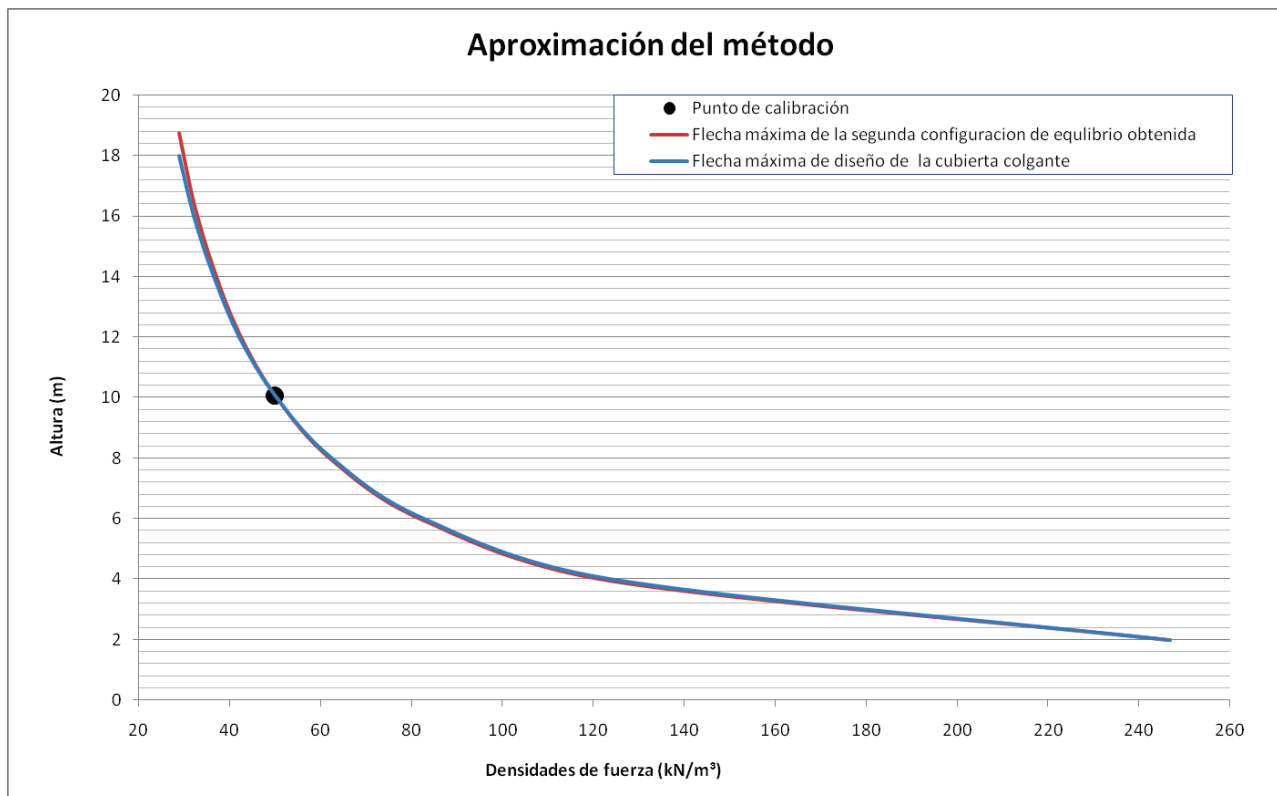


Figura 3.25: Aproximación del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje focal de la configuración de equilibrio representada en la figura 3.24

En el caso de elegir la sección funicular correspondiente al eje menor de la elipse, el método proporciona igualmente muy buenos resultados, como muestran la tabla 3.20 y la figura 3.26.

FLECHA MÁXIMA DE DISEÑO (m)	RESULTADOS DEL MAC	RESULTADOS DEL TM-FDM <sub>A</sub>
	DENSIDADES DE FUERZA RADIALES (kN/m <sup>3</sup> )	FLECHA MÁXIMA OBTENIDA (m)
2	238,45	2,05
4	120,04	4,07
6	80,91	6,08
8	61,59	8,06
10	50,18	10,01
12	42,70	11,92
14	37,47	13,80
16	33,61	15,63
18	30,68	17,41
20	28,38	19,14

Tabla 3.20: Resultados obtenidos tras la primera iteración del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje menor de la configuración de equilibrio representada en la figura 3.24.

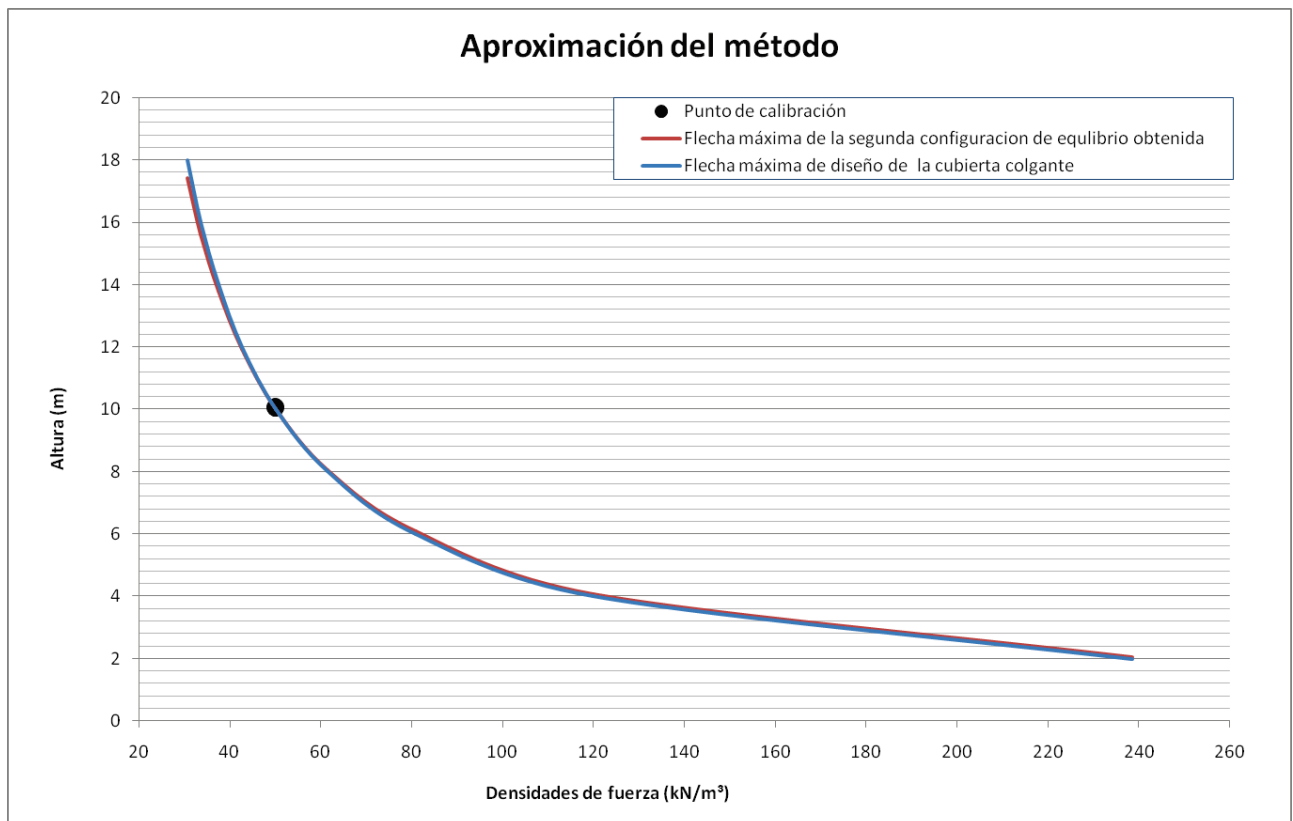


Figura 3.26: Aproximación del MAC para diferentes flechas máximas de diseño de una cubierta colgante pesada de contorno elíptico con 100 y 60 metros de longitud de ejes, calibrado para la sección correspondiente al eje menor de la configuración de equilibrio representada en la figura 3.24

Por último, se comprueba la efectividad del método aplicado de forma iterativa para el caso con mayor desviación, es decir, considerando una flecha máxima de diseño de 20 metros y calibrando el MAC para la sección correspondiente al eje focal, a partir de la configuración de equilibrio mostrada en la figura 3.24.

ITERACIÓN	CALIBRACIÓN DEL MAC				RESULTADOS DEL MAC	RESULTADOS DEL TM-FDM <sub>A</sub>
	q (kN/m <sup>3</sup> )	a (m)	h (m)	x <sub>1</sub> (m)	DENSIDADES DE FUERZA RADIALES (kN/m <sup>3</sup> )	FLECHA MÁXIMA OBTENIDA (m)
1	50,00	100	10,04	8,33	26,27	21,09
2	26,27	100	21,09	8,33	27,53	19,87
3	27,53	100	19,87	8,33	27,37	20,02
4	27,37	100	20,02	8,33	27,39	20,00

Tabla 3.21: Resultados obtenidos tras la aplicación del MAC de forma iterativa para un diseño de cubierta colgante de 20 metros de flecha máxima, partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.24

La tabla 3.21 muestra como se obtiene la configuración de equilibrio deseada (figura 3.27) tras realizar de cuatro iteraciones.

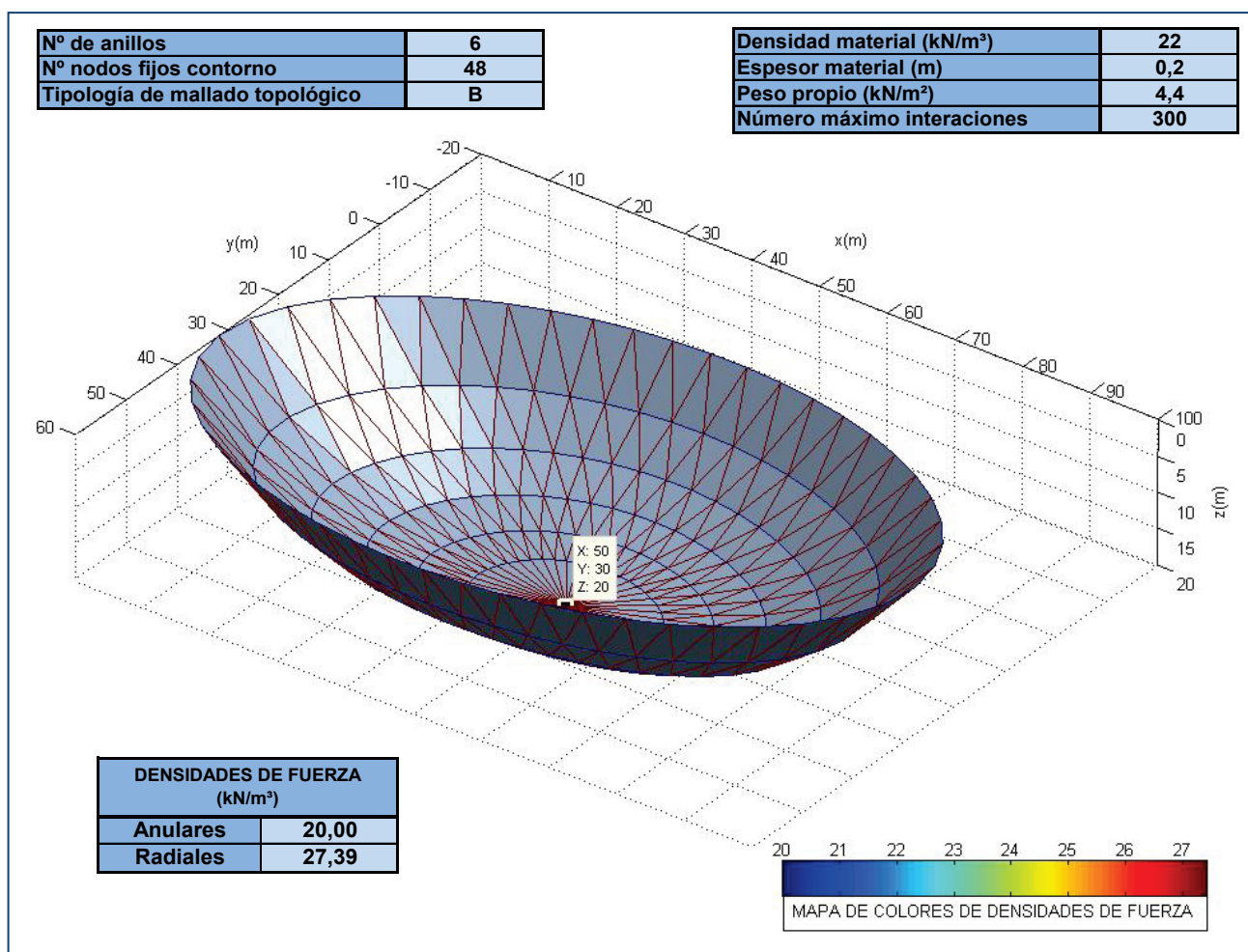


Figura 3.27: Aproximación obtenida tras 4 iteraciones del MAC para un diseño de cubierta colgante de 20 metros de flecha máxima, partiendo de la configuración de equilibrio de la figura 3.20



### 3.4. APLICACIÓN A FORMAS COMPUESTAS

Por último, se aplicará el método a una forma compuesta de diversas formas simples, analizando independientemente cada una de ellas hasta conseguir el diseño deseado.

Alumnos del curso 2011-2012 del Máster de Estructuras de la Universidad de Granada desarrollaron un **Proyecto de Gran Estructura** a partir del diseño inicial que muestra la figura siguiente. El conjunto se compone de una serie de estructuras de compresión básicas abiertas (tipo bóveda) que se integran en una estructura cerrada central (tipo cúpula).

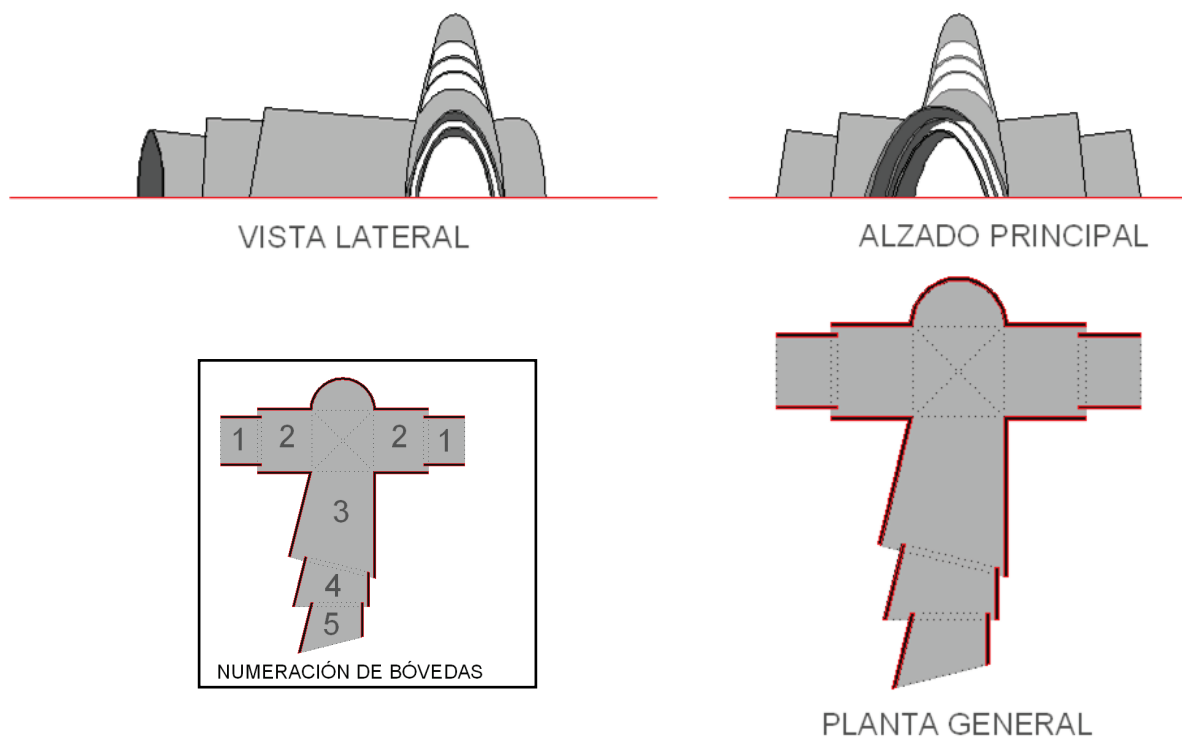


Figura 3.28: Diseño general del Proyecto de Gran Estructura y esquema con identificación de bóvedas principales

En primer lugar se obtendrán, mediante la aplicación del MAC, las densidades de fuerza de las cinco bóvedas principales de la estructura cuyas características geométricas se definen en la tablas 3.22. y 3.23.

BÓVEDA	ALTURA DE ARCOS		ANCHURA DE ARCOS	
	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL
1	13.65	14.66	15.00	15.00
2	17.08	19.00	20.00	20.00
3	17.08	19.77	20.00	27.89
4	17.03	17.33	20.25	23.75
5	13.43	14.66	15.63	20.37

Tabla 3.22: Características geométricas de las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura



BÓVEDA	COORDENADAS LOCALES DE LOS VÉRTICES DE APOYO							
	X1	Y1	X2	Y2	X3	Y3	X4	Y4
1	0.00	0.00	13.50	0.00	0.00	15.00	13.50	15
2	0.00	0.00	18.00	0.00	0.00	20.00	18.00	20
3	0.00	0.00	35.00	0.00	6.76	27.06	35.00	20
4	0.00	0.00	11.50	0.00	0.00	23.75	16.41	19.65
5	5.00	0.00	16.50	0.00	0.00	19.75	16.50	15.63

Tabla 3.23: Coordenadas de los nodos fijos de las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

En primer lugar se obtiene mediante la aplicación del TM-FDM<sub>A</sub> la primera configuración de equilibrio para cada bóveda. Los inputs establecidos en el programa se muestran en la tabla 3.24 mientras que las alturas de estas primeras configuraciones de equilibrio son las indicadas en la tabal 3.25.

DATOS INTRODUCIDOS EN PROGRAMA GAUDÍ						
BÓVEDA	Nº DE ARCOS	RAMAS POR ARCO		DENSIDAD DE FUERZA EN ARCOS		DENSIDAD DE FUERZA RADIAL
		INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL	
1	2	75	75	400	411	1E-10
2	2	75	75	450	459	1E-10
3	2	75	75	1000	1000	1E-10
4	2	75	75	600	600	1E-10
5	2	75	75	600	600	1E-10

Tabla 3.24: INPUTS correspondientes a las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

BÓVEDA	ALTURA OBTENIDA DEL TM-FDM <sub>A</sub> (m)	
	ARCO INICIAL	ARCO FINAL
1	18.34	18.44
2	36.23	36.95
3	25.49	28.07
4	13.43	14.35
5	10.52	11.35

Tabla 3.25: Alturas obtenidas tras primera aplicación del TM-FDM<sub>A</sub> para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

Con estas densidades de fuerza y primeras alturas obtenidas, se procede a calibrar el MAC calculando el peso unitario de cada arco catenario (tabla 3.26).

BÓVEDA	PESO UNITARIO DE LA CATENARIA (N/m)	
	ARCO INICIAL	ARCO FINAL
1	28.03	28.5
2	37.18	37.45
3	71.08	63.83
4	30.37	28.65
5	30.66	27.19

Tabla 3.26: Calibración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

Utilizando estos pesos unitarios junto con el resto de inputs necesarios en el algoritmo propuesto se obtienen directamente las densidades de fuerza que es preciso aplicar a cada rama para aproximarse a las alturas de bóveda diseñada (tabla 3.27).

BÓVEDA	DENSIDADES DE FUERZA MAC	
	INICIAL	FINAL
1	462.48	459.01
2	634.67	611.99
3	1218.79	1211.23
4	522.06	534.59
5	521.51	511.28

Tabla 3.27: Densidades de fuerza obtenidas a través de la primera iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

A continuación se muestran las configuraciones obtenidas tras la primera aplicación del MAC.

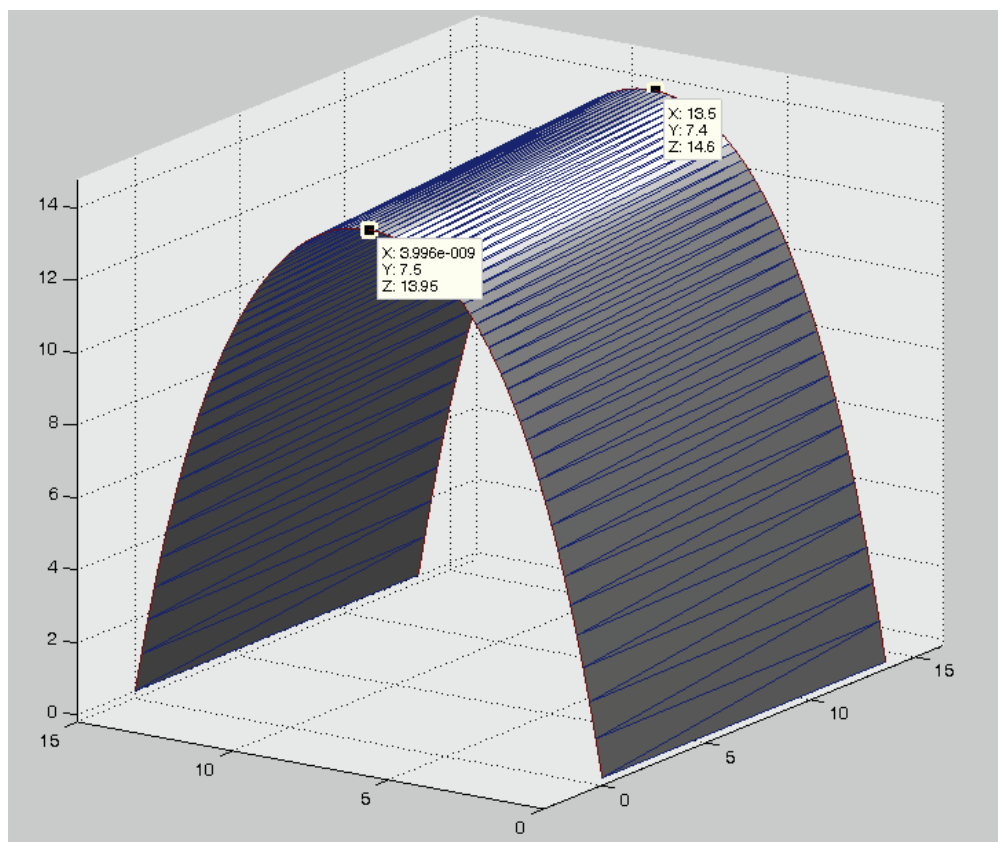


Figura 3.29: Forma de *equilibrio* obtenida para la Bóveda nº 1.

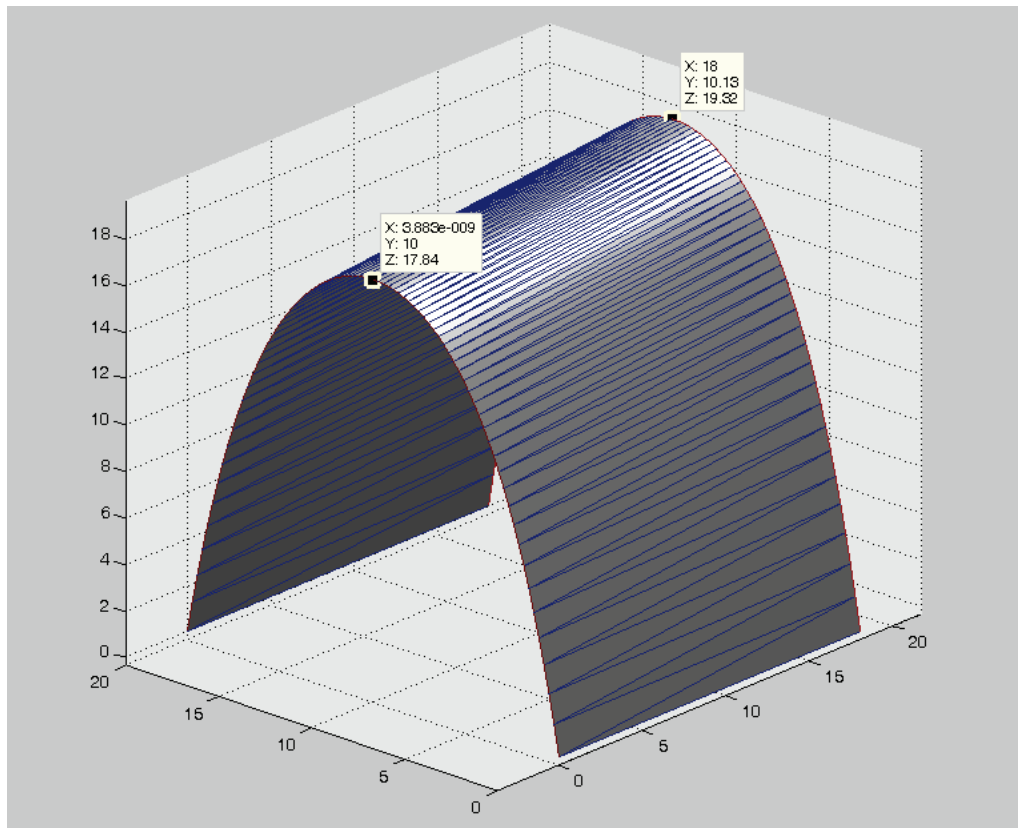


Figura 3.30: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 2.

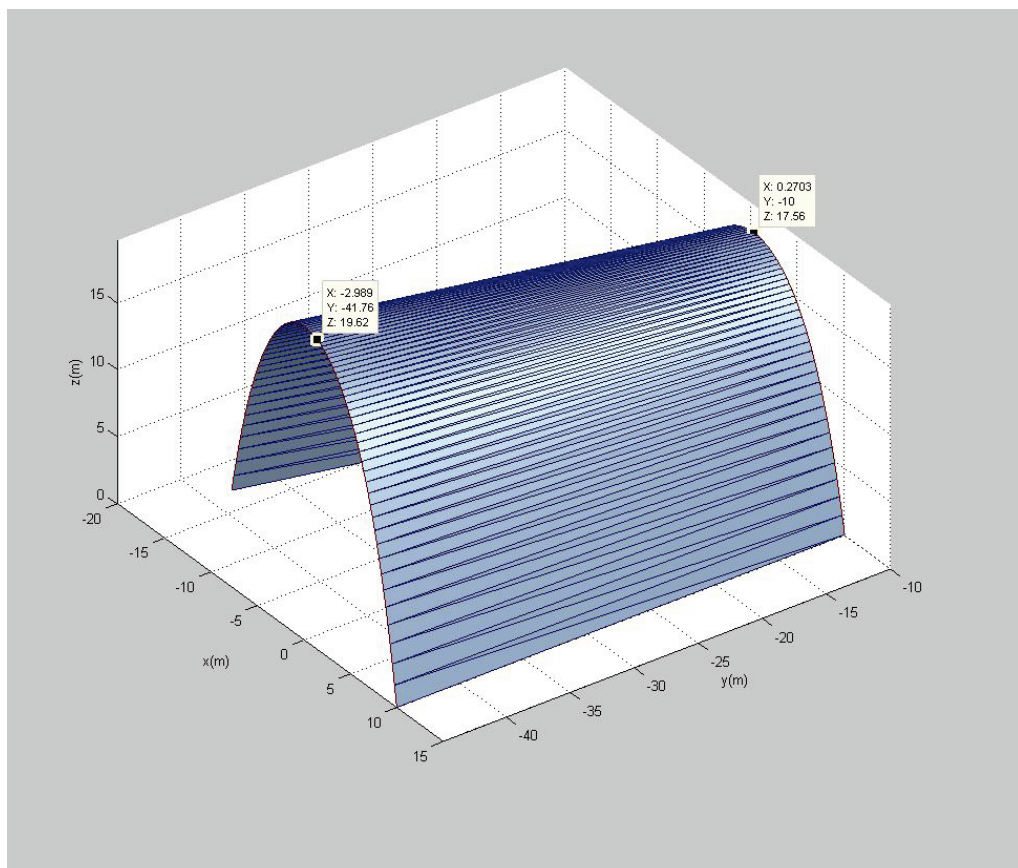


Figura 3.31: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 3

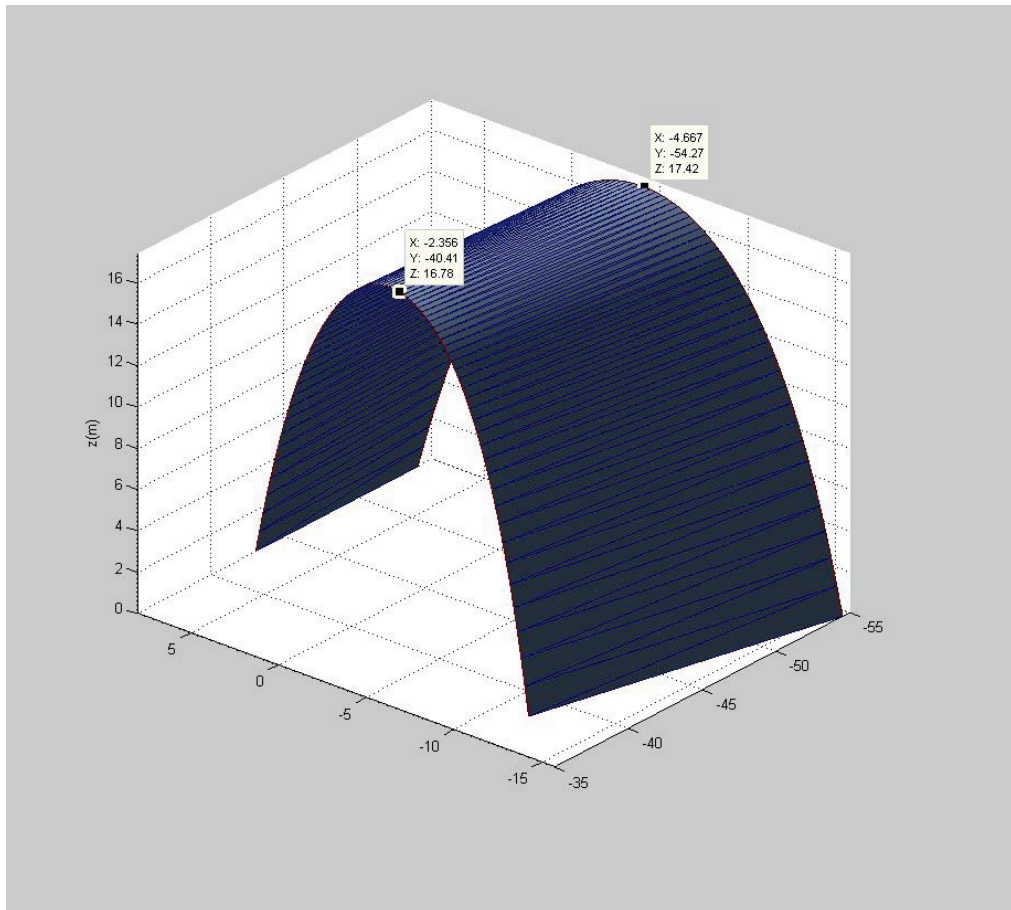


Figura 3.32: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 4

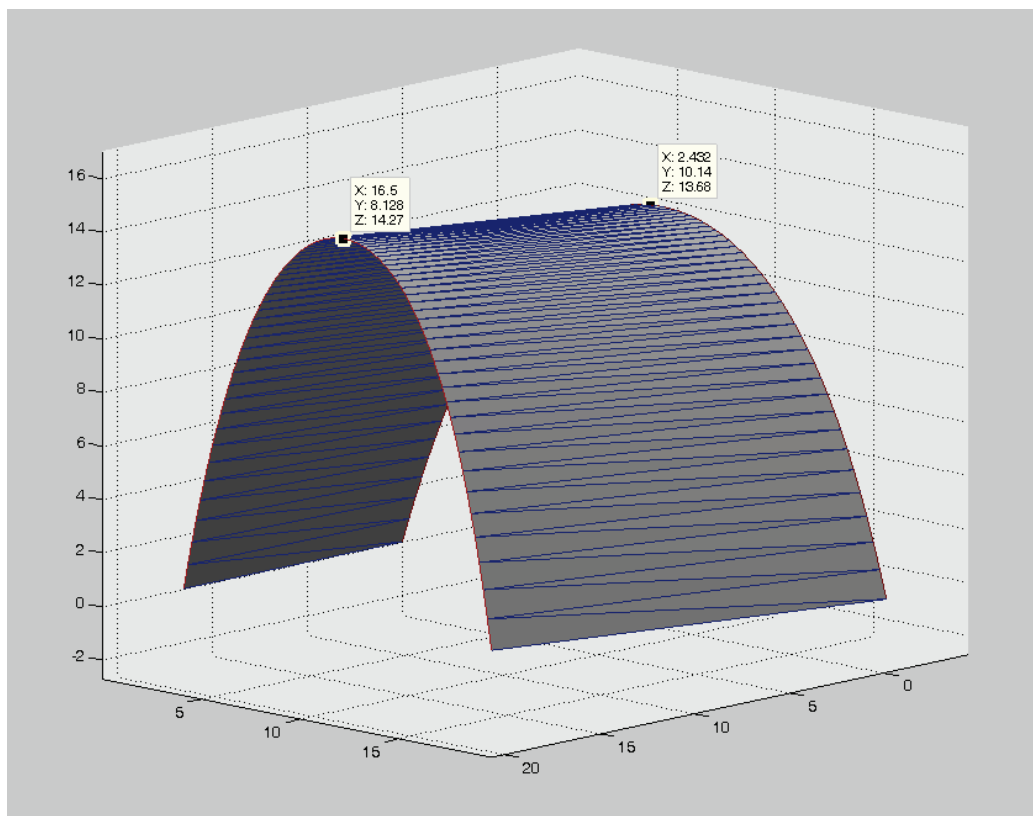


Figura 3.33: Forma de equilibrio obtenida para la Bóveda nº 5





Comparando las alturas obtenidas con las originales del proyecto se pueden comprobar las desviaciones o errores cometidos tras la primera aplicación del método.

BÓVEDA	ALTURA DE ARCOS DE DISEÑO		ALTURA DE ARCOS CALCULADA		ERROR COMETIDO	
	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL
1	13,95	14,66	13,95	14,60	0.00%	-0.41%
2	17,08	19,00	17,84	19,32	4.45%	1.68%
3	17,08	19,77	17,59	19,62	2.99%	-0.76%
4	17,03	17,33	16,78	17,42	-1.47%	-0.52%
5	13,43	14,66	13,41	14,79	0,15%	-0,89%

Tabla 3.28: Aproximación obtenida en la primera iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

Aplicando una segunda iteración del método se obtienen los siguientes resultados:

BÓVEDA	DENSIDADES DE FUERZA MAC	
	INICIAL	FINAL
1	462,48	458,05
2	649,70	617,27
3	1237,16	1205,39
4	517,84	536,21
5	522,34	515,30

Tabla 3.29: Densidades de fuerza obtenidas tras la segunda iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

BÓVEDA	ALTURA DE ARCOS DE DISEÑO		ALTURA DE ARCOS CALCULADA		ERROR COMETIDO	
	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL	INICIAL	FINAL
1	13,95	14,66	13,95	14,64	0.00%	-0.14%
2	17,08	19,00	17,19	18,94	0.64%	-0.32%
3	17,08	19,77	17,22	19,70	0.82%	-0.35%
4	17,03	17,33	16,95	17,37	-0,47%	0,23%
5	13,43	14,66	13,43	14,68	0,00%	-0,14%

Tabla 3.30: Aproximación obtenida en la segunda iteración del MAC para las bóvedas 1 a 5 del Proyecto de Gran Estructura

Las desviaciones no superan el 1,00 % por lo que no se considera necesario realizar una tercera iteración.

A continuación se aplicará el MAC para obtener la configuración de equilibrio de la cúpula de este Proyecto de Gran Estructura. El diseño contempla esta cúpula con una base cuadrada de 20 metros de lado, una altura de 40 metros y unos arcos torales de 17,08 metros de altura. Se procederá de forma análoga a ejemplo planteado en el apartado 3.1.3.

Se partirá de la configuración de equilibrio que muestra la figura 3.34, con una altura de cúpula de 11,96 metros y una altura de arcos torales de 6,67 metros.

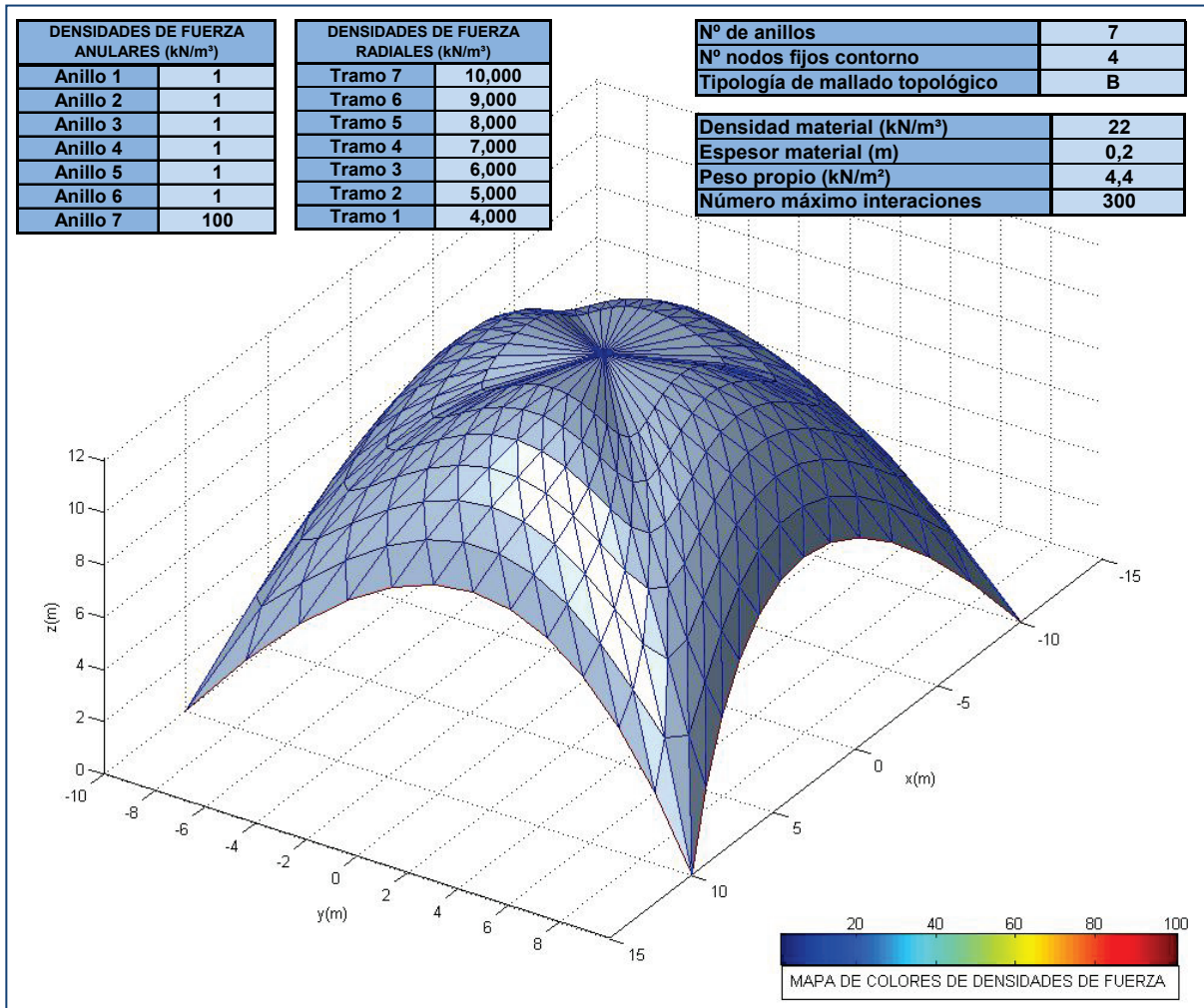


Figura 3.34: Primera configuración de equilibrio para la cúpula del Proyecto de Gran Estructura, aplicando las densidades de fuerza y la topología que se indican.

Aplicando el MAC para obtener la altura de cúpula deseada se obtienen los siguientes resultados:

ITERACIÓN	DENSIDADES DE FUERZAS OBTENIDAS DEL MAC (kN/m³)								ALTURAS OBTENIDAS DEL TM-FDM <sub>A</sub>	
	RADIALES							ANILLO 7	CÚPULA (m)	TORAL (m)
	Tramo 1	Tramo 2	Tramo 3	Tramo 4	Tramo 5	Tramo 6	Tramo 7			
1	2,070	2,600	3,120	3,630	4,150	4,670	5,190	100,000	58,93	31,18
2	2,380	2,980	3,580	4,170	4,760	5,360	5,950	100,000	37,48	19,73
3	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	100,000	40,56	21,36
4	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	110,850	40,43	20,26
5	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	120,060	40,31	19,39
6	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	127,488	40,2	18,74
7	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	133,430	40,11	18,24
8	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	138,182	40,04	17,86
9	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	141,982	39,99	17,57
10	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	145,022	39,94	17,33
11	2,319	2,903	3,488	4,060	4,638	5,223	5,798	147,454	<b>39,91</b>	<b>17,16</b>

Tabla 3.31: Resultados obtenidos de la aplicación iterativa del MAC para altura de cúpula del Proyecto de Gran Estructura.



Tras realizar 11 iteraciones, las desviaciones no superan el 1,00 % por lo que no se considera necesario nuevas aplicaciones del método.

La figura 3.35 muestra el resultado final de la configuración de equilibrio con el ensamblaje de todos los módulos del proyecto.

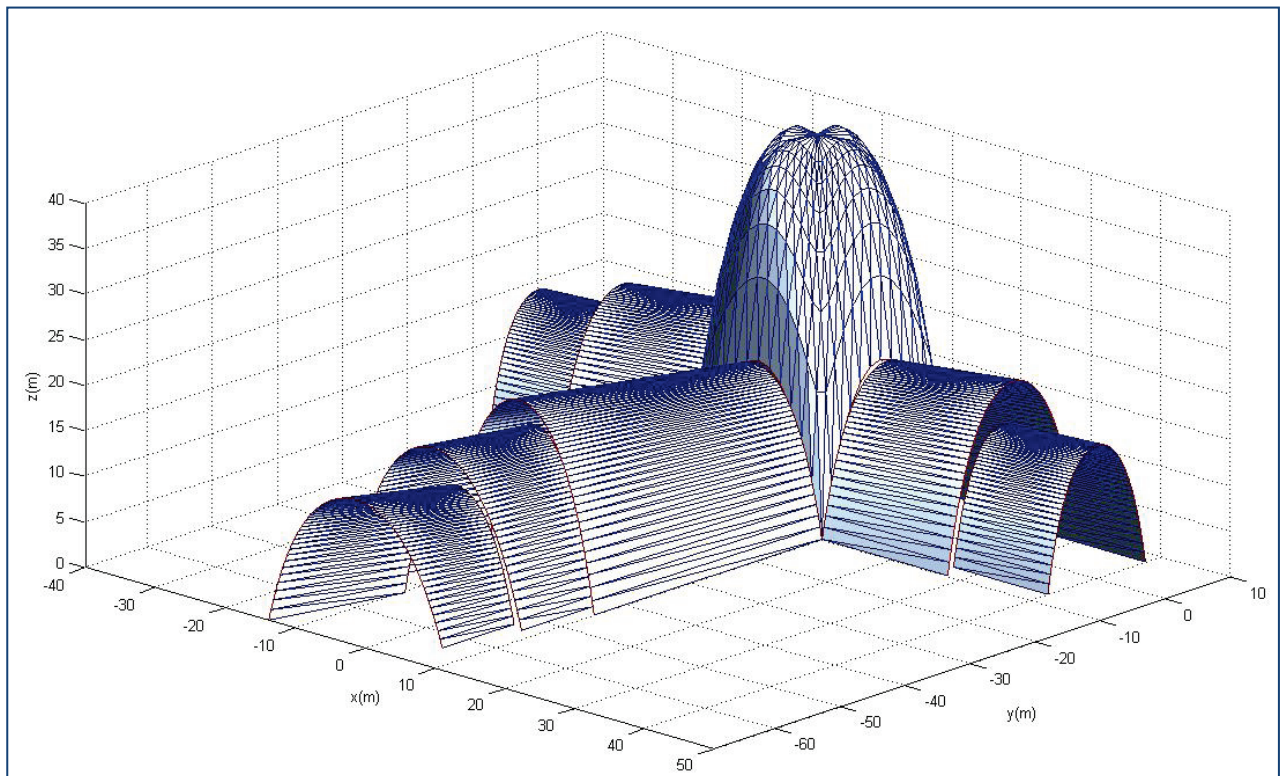


Figura 3.35: Configuración de equilibrio definitiva, ajustada al diseño del Proyecto de Gran Estructura.



## 4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y COMPROBACIÓN DE HIPÓTESIS

En las tres tipologías analizadas, cúpulas, bóvedas y cubiertas colgantes pesadas, así como en la aplicación al proyecto de gran estructura, se han obtenido muy buenas aproximaciones mediante la aplicación iterativa del MAC. Incluso, en la mayoría de los casos ya se obtiene ya un valor muy próximo al del diseño con una única aplicación del método.

Todos los ejemplos estudiados han sido dimensionados de forma completamente aleatoria, sin el menor intento de obtener mejores resultados e intentando abarcar el mayor número de posibilidades. En todos ellos la aplicación del MAC ha sido exitosa, arrojando resultados en algunos casos sorprendentes.

Pero, lo más interesante, es que se facilita al diseñador unos pasos claros para obtener la forma deseada. Esto permite incluso diseñar algoritmos, adaptados a cada tipología estructural, que permitan solucionar este problema de forma automática.

Las hipótesis planteadas han sido validadas en todos los casos analizados como se justifica a continuación:

1. **PRIMERA HIPÓTESIS:** Las secciones transversales de las configuraciones de equilibrio se comportan de forma aproximada a un sistema funicular bidimensional, por lo que es viable buscar la solución al problema tridimensional resolviendo uno o varios problemas bidimensionales.

En los formas estructurales analizadas, esta primera hipótesis se ha cumplido siempre, aunque ha quedado claro que la aproximación es mejor cuanto más se acerque la primera configuración de equilibrio a la solución buscada. Es decir, existe una desviación de esta aproximación aunque esto no impide que pueda encontrarse la solución exacta mediante la aplicación iterativa.

También se ha visto como para determinadas formas funiculares, como los arcos torales de las cúpulas de base poligonal, la aproximación es de peor calidad. Esto se debe a la influencia que ejercen las densidades de fuerza del resto de ramas que no contempla el problema bidimensional.

2. **SEGUNDA HIPÓTESIS:** También se ha cumplido en todas los casos analizados, la convergencia del  $TM-FDM_A$  aplicando las densidades de fuerza que facilita el MAC. Esto se debe a que se parte de una configuración de equilibrio y que las variaciones se realizan atendiendo al comportamiento del problema bidimensional.

De no emplearse el MAC, sería necesario tener un buen conocimiento del comportamiento de las formas analizadas frente a la alteración de densidades de fuerza. En caso contrario



es fácil dar con combinaciones de valores que llevan a sistemas de ecuaciones sin solución.

- 3. TERCERA HIPÓTESIS:** Por último y quizás, mas importante, el método aplicado de forma iterativa tiende hacia la solución buscada.

Se ha visto como en cada iteración el resultado obtenido era siempre mejor que el conseguido en el paso previo, disminuyendo siempre la desviación existente.

Esto permite liberar al diseñador del trabajo de tanteo para cumplir los condicionantes del diseño, puesto que esta labor puede asignarse a los sistemas informáticos mediante la programación de algoritmos TM-FDM<sub>A</sub>-MAC.





## 5. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

### 5.1. CONCLUSIONES

La complejidad que presenta el diseño de estructuras sin flexión y la dificultad para ajustarlas a las características del diseño, lleva a la búsqueda de estrategias que simplifiquen el procedimiento.

El MAC es una nueva herramienta que permite al diseñador conseguir configuraciones de equilibrio sin flexión que cumplan determinados condicionantes geométricos. Permite relacionar las densidades de fuerza con características geométricas del diseño.

Tras un análisis detallado del diseño de estructuras sin flexión, se ha propuesto un algoritmo que presenta interesantes ventajas frente a otras técnicas:

1. Es un procedimiento de formulación sencilla, lo que conlleva un bajo coste computacional.
2. Se elimina la discrecionalidad del procedimiento permitiendo su implementación en el mismo programa informático que desarrolle el TM-FDM<sub>A</sub>.
3. Aunque se trata de un método aproximado, admite una aplicación iterativa y cada ciclo mejora el resultado anterior. Esto permite con pocas iteraciones obtener la configuración de equilibrio deseada, cumpliendo los condicionantes de diseño. Es decir, la aplicación del método de forma iterativa hace converger la configuración de equilibrio al diseño establecido.

Finalmente, el algoritmo propuesto ha sido testado convenientemente mediante su aplicación a diversas tipologías estructurales, con características y dimensiones muy diferentes, obteniendo resultados totalmente satisfactorios.

En el desarrollo de la investigación se ofrecen además las siguientes aportaciones que pueden resultar de interés en este campo del diseño de estructuras tensadas y antifuniculares:

1. Se ha realizado un completo estudio de los métodos de cálculo de configuraciones de equilibrio en el marco de las técnicas de optimización estructural.

Pese a la abundante bibliografía consultada en relación a los métodos de optimización, no se han encontrado referencias que vinculen claramente el diseño de estructuras sin flexión con estos métodos. Por otra parte, los trabajos relacionados con el diseño de estructuras sin flexión, se ciñen generalmente al campo de las estructuras tensadas o al de las de compresión, pero de forma independiente. Sin embargo, considerando que ambas comparten los mismos métodos de cálculo en fase de diseño, sería lógico que estos trabajos abarcasen ambos campos.



En esta investigación se ha realizado un esfuerzo para aclarar este aspecto y presentar una clasificación completa que incluya el diseño de estructuras sin flexión, tensadas y antifuniculares, como una rama de la optimización por criterios.

2. Se han analizado las ventajas y los inconvenientes de los diferentes métodos de búsqueda de configuraciones de equilibrio al objeto de facilitar al diseñador la elección del método más apropiado. Al mismo tiempo, este análisis ha servido para justificar la elección del FDM como método más apropiado para el desarrollo de este trabajo.

Conviene aclarar que el MAC no es en sí mismo una técnica de obtención de configuraciones de equilibrio sino un complemento que permite ajustar los resultados al diseño original. Para desarrollar esta idea y aplicarla a casos concretos se ha escogido el TM-FDM<sub>A</sub>, una variante del FDM que permite considerar el peso propio de las estructuras e incorpora una herramienta de mallado a partir de la topología del diseño.

3. La elección de densidades de fuerza adquiere un papel fundamental en las formas de equilibrio obtenidas mediante el TM-FDM<sub>A</sub>.

Partiendo de unas condiciones de contorno definidas, este parámetro se convierte en la principal herramienta para modificar la forma de equilibrio. Pero no resulta fácil relacionar el valor de la densidad de fuerzas de determinados elementos con la forma geométrica que se busca. Por este motivo, se ha realizado un análisis detallado de las densidades de fuerza y de su influencia en las formas de equilibrio. Por otra parte, se han establecido técnicas de agrupamiento de densidades de fuerza para facilitar la convergencia del TM-FDM<sub>A</sub> y la corrección de las formas obtenidas.

4. Se realiza un planteamiento del diseño de estructuras sin flexión desde un punto de vista práctico, mostrando la problemática para ajustar las configuraciones de equilibrio a los valores geométricos del diseño.

Con el MAC se muestra un camino directo a la obtención de formas de equilibrio sin flexión. Hasta ahora, el diseño de estas estructuras requería un proceso de tanteo necesario para conseguir unas proporciones geométricas determinadas. Pero la técnica propuesta logra que esta estrategia pueda realizarse directamente mediante sistemas informáticos, a través su implementación en algoritmos de búsqueda de forma.

5. A través de la aplicación del MAC a casos concretos se han aclarado algunos aspectos que pueden resultar de interés en este campo de investigación.

El método propuesto aproxima un problema no lineal de tres dimensiones a través de su descomposición en uno o varios problemas bidimensionales. Esto permite calcular las densidades de fuerza del problema bidimensional para aplicarlas al problema completo.



Pero en este proceso cabe preguntarse si conviene alterar también otras densidades de fuerza que no intervienen en el problema bidimensional.

Al aplicar el MAC a redes cerradas, tipo cúpula, se ha comprobado cómo se obtiene una mejor aproximación alterando únicamente las densidades de fuerza de las ramas radiales. A partir de esta comprobación, en el resto de ejemplos estudiados, se ha adoptado el criterio de alterar únicamente las densidades de fuerza que intervienen en el problema bidimensional, obteniendo resultados muy satisfactorios.

Una mala aproximación del método puede justificarse por una fuerte influencia de densidades de fuerza no consideradas en el problema bidimensional. El caso de los arcos torales de las cúpulas de base cuadrada es un claro ejemplo de ello. En la altura de estos arcos influyen las densidades de fuerza de las ramas radiales y anulares. Sin embargo, el problema bidimensional sólo tiene en cuenta las ramas del último anillo del mallado. Pero, aún en estos casos en los que existe una peor aproximación del método, se ha comprobado como la aplicación iterativa permite alcanzar el objetivo en muy pocos pasos.

## 5.2. FUTURAS LINEAS DE INVESTIGACIÓN

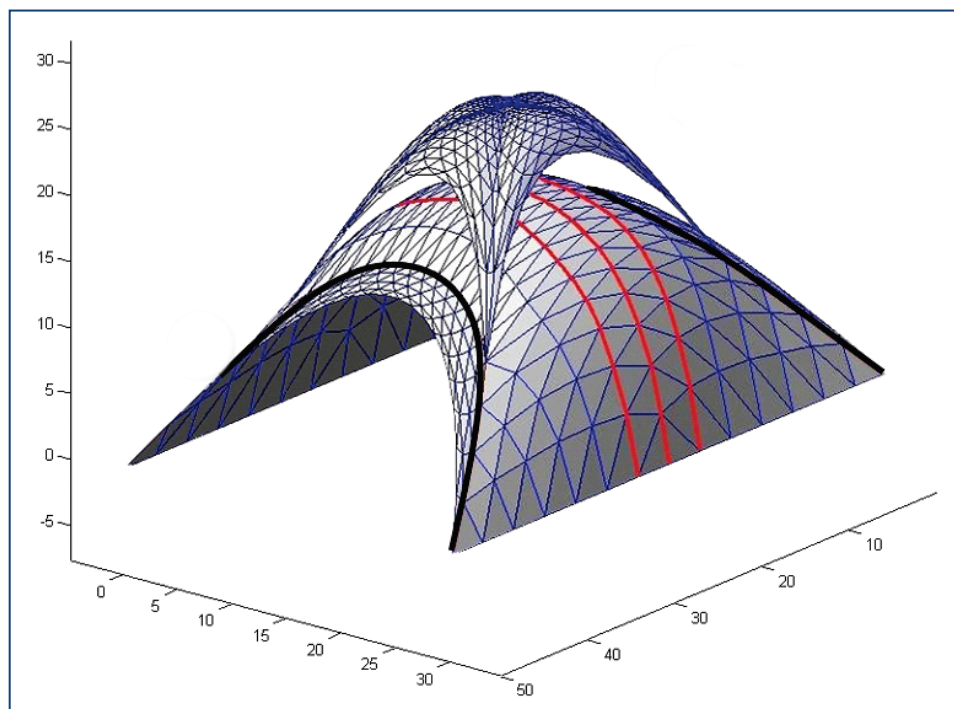
Como complemento del trabajo expuesto pueden desarrollarse las siguientes líneas de investigación:

- La implementación del método en otros algoritmos de cálculo de configuraciones de equilibrio diferentes al FDM. En concreto, la formulación del MAC para su implementación en el TNA puede resultar interesante.

El TNA es un método que presenta algunas ventajas frente al FDM, aunque su aplicación está limitada a estructuras antifuniculares. La principal ventaja radica en que, en lugar de densidades de fuerza, el TNA utiliza tensiones, que resultan más fáciles de interpretar.

La aplicación del MAC a esta técnica mantiene el mismo planteamiento teórico, sustituyendo el cálculo de densidades de fuerza de la catenaria por el cálculo de tensiones.

- Otra línea de trabajo interesante, es el análisis del comportamiento del MAC en estructuras con diferentes niveles, como la mostrada en la figura 5.1.



*Figura 5.1: Aplicación del MAC a una estructura a compresión de 2 plantas . Se indican en color negro aquellas secciones funiculares que tienen una mayor influencia en la estructura superior y en color rojo los arcos que tienen menor repercusión en esta.*

En estos casos se propone distinguir entre aquellas secciones funiculares que tienen una mayor influencia en otros niveles de la estructura, de aquellas que repercuten únicamente en su nivel.



- Por último, para completar esta línea de trabajo iniciada, es interesante desarrollar aplicaciones informáticas que, mediante una interface gráfica, permitan al diseñador corregir las dimensiones de la configuración de equilibrio.

Otra alternativa a estos software de diseño libre sería el desarrollo de aplicaciones que faciliten configuraciones de equilibrio a partir de tipologías preestablecidas, como las analizadas en este trabajo. Frente a la anterior opción, presentan la limitación de ceñirse a unas formas determinadas, aunque simplificarían considerablemente la programación informática.





## REFERENCIAS

1. Argyris, J. H., Angelopoulos, T., & Bichat, B. (1974). A general method for the shape finding of lightweight tension structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1), 135-149. doi://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(74)90046-2
2. Bagley, J. D. (1967). The behavior of adaptive systems which employ genetic and correlation algorithms.
3. Bagrianski, S., & Halpern, A. B. (2013). Form-finding of compressive structures using prescriptive dynamic relaxation. *Computers & Structures*, 132, 65-74. doi://dx.doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.10.018
4. Barnes, M. R. (1977). *Form finding and analysis of tension space structure by dynamic relaxation* (Doctoral dissertation, City University London).
5. Barnes, M. R. (1988). Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. *Computers & Structures*, 30(3), 685-695. doi://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(88)90304-5
6. Barnes, M. R. (1999). Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation. *International Journal of Space Structures*, 14(2), 89-104.
7. Bassegoda Nonell. (2012). La construcción tradicional en la arquitectura de gaudí. *Informes De La Construcción*, 42(408), 9-14. doi:10.3989/ic.1990.v42.i408
8. Bendsoe, M. P. (1995). *Optimization of structural topology, shape, and material* Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-662-03115-5
9. Bendsoe, M. P., & Kikuchi, N. (1988). Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2), 197-224.
10. Bendsoe, M. P., & Sigmund, O. (1999). Material interpolation schemes in topology optimization. *Archive of Applied Mechanics*, 69(9-10), 635-654.
11. Bernoulli, J. Analysis problematis antehac propositi. *Acta Eruditorum*, 9,(1690), 217-219.
12. Bletzinger, K., & Ramm, E. (1999). A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy. *International Journal of Space Structures*, 14(2), 131-145.
13. Block, P., & Ochsendorf, J. (2007). Thrust network analysis: A new methodology for three-dimensional equilibrium. *Journal-International Association for Shell and Spatial Structures*, 155, 167.



14. Bohigas, O., Giralt-Miracle, D., & Casanova, R. (2002). *Gaudi*: Planeta.
15. Carbonell-Márquez, J. F., Gil-Martín, L. M., Hernández-Montes, E., & Jurado-Piña, R. (2012). *Gaud 1.0-manual de usuario* Universidad de Granada.
16. Chilton, J. C., & Isler, H. (2000). *Heinz isler* Thomas Telford.
17. Cramer, N. L. (1985). A representation for the adaptive generation of simple sequential programs. *Proceedings of the First International Conference on Genetic Algorithms*, 183-187.
18. Culmann, K. (1866). *Die graphische statik* Meyer & Zeller.
19. Day, A. S. (1965). An introduction to dynamic relaxation(dynamic relaxation method for structural analysis, using computer to calculate internal forces following development from initially unloaded state). *The Engineer*, 219, 218-221.
20. De Jong, K. A. (1975). Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems.
21. Demay, L., Pan, S., & Patou-Mathis, M. (2012). Mammoths used as food and building resources by neanderthals: Zooarchaeological study applied to layer 4, molodova I (ukraine). *Quaternary International*, 276, 212-226.
22. Escrig, & Sánchez. (2007). La bóveda de hormigón del club táchira en caracas. *Informes De La Construcción*, 57(499-500) doi:10.3989/ic.2005.v57.i499-500
23. Euler, L. (1952). *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti* Springer Science & Business Media.
24. Fogel, L. J., Owens, A. J., & Walsh, M. J. (1966). Artificial intelligence through simulated evolution.
25. Fourie, P. C., & Groenwold, A. A. (2000). Particle swarms in size and shape optimization. *Proceedings of the International Workshop on Multidisciplinary Design Optimization, Pretoria, South Africa*, 97-106.
26. Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*
27. Gallagher, R. H., Gellatly, R. A., & Lubracki, W. A. (1964). Development of a procedure for automated synthesis of minimum weight structures technical documentary report, 1 jul. 1963-31 aug. 1964(computer program for synthesis of minimum weight design for highly redundant aerospace structures). 1964.101 P,
28. Gellatly, R. A., & Berke, L. (1973). Optimality-criterion-based algorithms. *Optimum Structural Design*.Wiley, Chichester, , 33-49.



29. Gregory, D. On the properties of the catenary. *Philosophical Transactions*, 231(1697), 637.
30. Gründig, L., Moncrieff, E., Singer, P., & Ströbel, D. (2000). A history of the principal developments and applications of the force density method in germany 1970–1999. *4th Int. Coll. Computation of Shell & Spatial Structures*,
31. Haber, R. B., & Abel, J. F. (1982). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes part i—formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30(3), 263-284. doi://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(82)90080-9
32. Haber, R. B., & Abel, J. F. (1982). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes part II—implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 30(3), 285-306. doi://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(82)90081-0
33. Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R., & Bayo, E. (2006). Topological mapping for tension structures. *Journal of Structural Engineering*, 132(6), 970-977.
34. Hinton, E., & Sienz, J. (1994). *Aspects of adaptive finite element analysis and structural optimization* University College of Swansea, Department of Civil Engineering.
35. Holland, J. H. (1962). Outline for a logical theory of adaptive systems. *Journal of the ACM (JACM)*, 9(3), 297-314.
36. Hooke, R. *A description of helioscopes, and some other instruments, by hooke, robert, 1676, 1*
37. Jungius, J. (1627). *Geometria empirica*. Rostock: Siver, Heinrich.
38. Jurado-Piña, R., & Salazar-Troya, M. A. (2014). A simple method for the design of tension structures combining topological mapping and nonlinear structural analysis. *Informes De La Construcción*, 66(Extra-1)
39. Jurado-Piña, R., Gil-Martín, L. M., & Hernández-Montes, E. (2009). Topological mesh for shell structures. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2), 948-958. doi:10.1016/j.apm.2007.12.018
40. Kennedy, J., & Eberhart, R. (1995). Particle swarm optimization. *Neural Networks, 1995. Proceedings., IEEE International Conference On, , 4 1948* vol.4. doi:10.1109/ICNN.1995.488968
41. Kilian, A., & Ochsendorf, J. (2005). Particle-spring systems for structural form finding. *Journal-International Association for Shell and Spatial Structures*, 148, 77.
42. Kim, Querin, Steven, & Xie. (2014). A method for varying the number of cavities in an optimized topology using evolutionary structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 19(2), 140-147. Retrieved from <http://link.springer.com/10.1007/s001580050094>



43. Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671-680.
44. Klein, B. (1955). Direct use of extremal principles in solving certain optimizing problems involving inequalities. *Journal of the Operations Research Society of America*, 3(2), 168-175.
45. Kohn, R. V., & Strang, G. (1986). *Optimal design and relaxation of variational problems, I-II-III* Wiley Online Library.
46. Koza, J. R. (1992). *Genetic programming: On the programming of computers by means of natural selection* MIT press.
47. Koza, J. R. (1994). *Genetic programming II: Automatic discovery of reusable programs*. MIT press.
48. Lencus, A., Querin, O. M., Steven, G. P., & Xie, Y. M. (2002). Aircraft wing design automation with ESO and GESO. *International Journal of Vehicle Design*, 28(4), 356-369.
49. Lewis, W. J. (2003). *Tension structures: Form and behaviour* Thomas Telford.
50. Liang, Q. Q., & Steven, G. P. (2002). A performance-based optimization method for topology design of continuum structures with mean compliance constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(13-14), 1471-1489. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782501003334>
51. Lin, C., & Chao, L. (2001). Constant-weight fully stressed methods for topological design of continuum structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52), 6867-6879. Retrieved from <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782501002638>
52. Linkwitz, K., & Schek, H. -. (1971). Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetzkonstruktionen. *Ingenieur-Archiv*, 40(3), 145-158. doi:10.1007/BF00532146
53. Lurie, K. A., & Cherkaev, A. V. (1986). Exact estimates of the conductivity of a binary mixture of isotropic materials. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 104(1-2), 21-38. doi:10.1017/S0308210500019041
54. Mattheck, C. (1990). Engineering components grow like trees. *Materialwissenschaft Und Werkstofftechnik*, 21(4), 143-168. doi:10.1002/mawe.19900210403
55. Maurin, B., & Motro, R. (1998). The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures*, 20(8), 712-719. doi://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00108-9
56. Maxwell, J. C. (1890). *The scientific papers of james clerk maxwell. 2 (1890)* University Press.



57. McCulloch, W., & Pitts, W. (1943). A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *The Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5(4), 115-133. doi:10.1007/BF02478259
58. Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., Teller, A. H., & Teller, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 21(6), 1087-1092.
59. Michell, A. G. M. (1904). The limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8(47), 589-597.
60. Mollaert, M. (1984). Form finding of mixed structures. *Third International Conference on Space Structures*, 180-185.
61. Moseley, H. (1835). On the equilibrium of the arch. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 5, 293.
62. Murat, F., & Tartar, L. (1985). Calcul des variations et homogénéisation. *Les Méthodes De L'homogénéisation: Théorie Et Applications En Physique*, (57), 319-369.
63. O'Dwyer, D. (1999). Funicular analysis of masonry vaults. *Computers & Structures*, 73(1-5), 187-197. doi://dx.doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00279-X
64. Ortega, F., & Noval, A. (1995). Calculando el pasado: La bóveda del palacio de ctesifonte. *Revista De Edificacin*, (20), 15-23.
65. Otto, F. (1954). *Das hängende dach* [La cubierta colgante. Versión española traducida por Francisco Folguera. Barcelona. Editorial Labor.] Verlag der Kunst.
66. Pardies, I. G. (1725). *Oeuvres de mathematique de Coup*.
67. Pauletti, R. (2006). An extension of the force density procedure to membrane structures. *Proceedings of the IASS Symposium/APCS Conference—New Olympics, New Shell and Spacial Structures, Beijing*,
68. Pearson, C. E. (1958). Structural design by high-speed computing machines. *Conference on Electronic Computation, Structural Division, ASCE, Kansas City, Mo*,
69. Querin, O. M., & Lencus, A. (1998). Optimisation of structures subject to multiple load cases using biological growth laws. *SORGA Structural Optimisation Notes*,
70. Querin, O. M., Steven, G. P., & Xie, Y. M. (2000). Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. *Finite Elements in Analysis and Design*, 34(3-4), 291-308. doi://dx.doi.org/10.1016/S0168-874X(99)00044-X
71. Querin, O. M., Young, V., Steven, G. P., & Xie, Y. M. (2000). Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. *Computer Methods in Applied*





*Mechanics and Engineering*, 189(2), 559-573. doi://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00309-6

72. Querin, O. M., Steven, G. P., & Xie, Y. M. (1999). Morphing evolutionary structural optimisation (MESO). *1st ASMO UK/ISSMO Conference on Engineering Design Optimization*,
73. Rabasco, P. (2011). El sistema ctesiphonte. evolucion de la estructura catenaria. *Informes De La Construccin*, 63(522), 43-52.
74. Rechenberg, I. (1965). Cybernetic solution path of an experimental problem", (royal aircraft establishment translation no. 1122, BF toms, trans.). *Farnborough Hants: Ministry of Aviation, Royal Aircraft Establishment, 1122*
75. Reynolds, D., McConnachie, J., Bettess, P., Christie, W. C., & Bull, J. W. (1999). Reverse adaptivity—a new evolutionary tool for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5), 529–552. Retrieved from [http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5%3C529::AID-NME599%3E3.0.CO;2-2/abstract](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5%3C529::AID-NME599%3E3.0.CO;2-2/abstract)
76. Rosenblatt, F. (1958). The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*, 65(6), 386.
77. Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., & PDP Research Group. (1986). Parallel distributed processing, vols 1 and 2. *Cambridge, MA: The MIT Press*,
78. Sánchez, J., Serna, M. Á, & Morer, P. (2007). A multi-step force–density method and surface-fitting approach for the preliminary shape design of tensile structures. *Engineering Structures*, 29(8), 1966-1976. doi://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2006.10.015
79. Santos Guerras, J. J. (1990). El desarrollo de las cubiertas colgantes pesadas. *Informes De La Construccin*, (405), 5. doi:10.3989/ic.1990.v41.i405
80. Schek, H. -. (1974). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1), 115-134. doi:10.1016/0045-7825(74)90045-0
81. Schmit, L. A. (1960). Structural design by systematic synthesis in: Proceedings of 2nd ASCE conference electronic computation. *ASCE, New York*,
82. Siev, A., & Eidelman, J. (1962). Shapes of suspended roofs. *Proceedings of IASS Colloquium on Hanging Roofs, Continuous Metallic Shell Roofs and Superficial Lattice Roofs*, , 348 141.
83. Smith, G. K., & Woodhead, R. G. (1974). An optimal design scheme with application to tanker transverse structure. *Engineering Optimization*, 1(2), 79-98. doi:10.1080/03052157408960579



84. Tan, A. H., & Tan, F. H. Digital graphics and virtual reality for the presentation of ancient roman construction techniques. *Age*, 26, 1.
85. Tappe, W. (1818). *Darstellung einer neuen äußerst wenig holz erfordernden höchst feuersicheren bauart: ¬Die hütte* Selbstverl.
86. Tocher, J. L., & Karnes, R. N. (1971). The impact of automated structural optimization on actual design. *AIAA Paper*, (73-361)
87. Vassart, N. (1997). *Recherche de forme et stabilite des systemes reticules autocontraints - applications aux systemes de tensecrete*
88. Veenendaal, D., & Block, P. (2012). An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. *International Journal of Solids and Structures*, 49(26), 3741-3753. doi://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.08.008
89. Wakefield, D. S. (1980). *Dynamic relaxation analysis of pretensioned networks supported by compression arches* (Doctoral dissertation, City University London).
90. Wakefield, D. S. (1999). Engineering analysis of tension structures: Theory and practice. *Engineering Structures*, 21(8), 680-690. doi://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296(98)00023-6
91. Widrow, B., & Hoff, M. E. (1960). Adaptive switching circuits.
92. Xie, Y. M., & Steven, G. P. (1993). A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, 49(5), 885-896. doi://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(93)90035-C
93. Young, T., & Kelland, P. (1845). *A course of lectures on natural philosophy and the mechanical arts: Pt. I. mechanics. pt. II. hydrodynamics. pt. III. physics* Taylor and Walton.
94. Yuhui Shi, & Eberhart, R. (1998). A modified particle swarm optimizer. *Evolutionary Computation Proceedings, 1998. IEEE World Congress on Computational Intelligence., the 1998 IEEE International Conference On*, 69-73. doi:10.1109/ICEC.1998.699146



## ANEXO 1: ARTÍCULO Y COMUNICACIÓN GENERADA

Fruto de los desarrollos llevados a cabo en el presente trabajo, se presentó en el Segundo Congreso Internacional CMMoST (Mechanical Models in Structural Engineering), una comunicación titulada " Método de Aproximación Catenaria en el cálculo de estructuras antifuniculares". Dicho congreso celebrado, el 20 y 21 de junio de 2013 en la ETSI de Caminos Canales y Puertos, fue organizado por la Fundación General Universidad de Granada-Empresa y el Grupo de Investigación TEP-190 (Ingeniería e infraestructuras).

A continuación se acompaña artículo que fue publicado en diciembre de 2014 en base a la exposición realizada en dicho congreso.





# Método de Aproximación Catenaria en el diseño de estructuras antifuniculares

## *Catenary Approximation Method in the antifunicular structures design*

M. Cañete-Güeto<sup>(\*)</sup>, M. A. Fernández-Ruiz<sup>(\*\*)</sup>, E. Hernández-Montes<sup>(\*\*)</sup>

### RESUMEN

Este artículo describe una nueva metodología para resolver un problema típico del diseño de estructuras antifuniculares: cómo obtener una configuración de equilibrio partiendo de condicionantes geométricos iniciales.

En los años 70 se introdujo el Método de Densidad de Fuerzas –MDF– para la búsqueda de la configuración de equilibrio, método que hoy en día sigue utilizándose con éxito tanto en estructuras tensadas como en estructuras antifuniculares. Sin embargo, en las segundas, el problema de equilibrio se vuelve no-lineal y debe resolverse de una manera iterativa, mediante pruebas sucesivas.

A través del que hemos denominado *Método de Aproximación Catenaria –MAC–*, concebido como herramienta de ayuda en la aplicación del MDF a estructuras antifuniculares, es posible obtener de manera sencilla una forma de equilibrio con unas características geométricas previamente establecidas.

**Palabras clave:** Densidad Fuerza; estructuras antifuniculares; estructuras tensadas; aproximación catenaria; MAC.

### ABSTRACT

*This paper describes a new methodology for solving a typical problem in the design of antifunicular structures: how a equilibrium configuration can be obtained with initial geometrical constraints.*

*In the seventies the Force Density Method -FDM- was introduced for the research of an equilibrium position. This method is nowadays being used successfully for both tension structures and antifunicular structures. However, in the second ones, the problem of balance turns non-linear and must be solved in an iterative manner through successive tests.*

*By means of the so-called Catenary Approximation Method -CAM, conceived as an assistance tool in the application of the FDM to antifuniculars structures, it is possible to obtain in a simple way a equilibrium configuration with some geometric characteristics previously established.*

**Keywords:** Force Density; Antifunicular structures; Tension structures; Catenary approximation; CAM.

<sup>(\*)</sup> Ayuntamiento de Granada - Servicio de Infraestructura. Granada (España).

<sup>(\*\*)</sup> Universidad de Granada, (España).

Persona de contacto/Corresponding author: [cms@gmx.es](mailto:cms@gmx.es) (M. Cañete-Güeto)

---

**Cómo citar este artículo/Citation:** Cañete-Güeto, M., Fernández-Ruiz, M. A., Hernández-Montes, E. (2014). Método de Aproximación Catenaria en el diseño de estructuras antifuniculares. *Informes de la Construcción*, 66(EXTRA-1): m008, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.13.115>.

**Licencia / License:** Salvo indicación contraria, todos los contenidos de la edición electrónica de *Informes de la Construcción* se distribuyen bajo una licencia de uso y distribución Creative Commons Reconocimiento no Comercial 3.0. España (cc-by-nc).



**1. INTRODUCCIÓN**

A diferencia de las obras de ingeniería y arquitectura tradicionales, en las estructuras a compresión o antifuniculares (1) (2) (3), del mismo modo que en las estructuras tensadas, la forma geométrica no resulta conocida inicialmente sino que es otra incógnita más del problema. La solución geométrica o forma de equilibrio coincidirá con la que presente ausencia de flexiones en todos los puntos.

El Método de Densidad de Fuerzas –MDF– (4) (5) es uno de los más utilizados en el diseño de este tipo de estructuras. Permite obtener la forma de equilibrio de una tensoestructura o de una estructura antifunicular a través de la resolución de un sistema de ecuaciones. El procedimiento puede resumirse en cuatro sencillos pasos:

**1. Definición de la estructura de nodos-conexiones:**

Es posible representar la estructura como una malla de nodos conectados entre sí a través de un número determinado de ramas dispuestas a criterio del calculista. Esta estructura de nodos-conexiones podrá adoptar múltiples formas en función del valor que adquieran los VECTORES DE COORDENADAS, formados por las coordenadas  $x_i, y_i, z_i$  de todos los nodos.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad [1]$$

El método permite la imposición de unas condiciones de contorno en una serie de nodos (nodos fijos) mientras que el resto (nodos libres) serán incógnitas del sistema de ecuaciones.

Las conexiones entre los distintos nodos se representan a través de la MATRIZ DE CONECTIVIDAD «C», matriz fundamental dentro del MDF. Cada fila de esta matriz define una rama de la malla mientras que cada columna equivale a un nodo de la estructura. En cada fila «i» sólo existirán dos valores distintos de cero, con valor 1 o -1, que indicarán los nodos conectados por la rama i. Con el signo se define la dirección de la rama o conexión. De esta forma la matriz

C tendrá tantas filas como ramas posea la malla y tantas columnas como nodos existan (Figura 1).

**2. Obtención de las fuerzas externas:**

Las fuerzas externas se introducen como fuerzas puntuales aplicadas en cada nodo y se representan a través de los VECTORES DE FUERZA, formados por las componentes  $f_{xi}, f_{yi}, f_{zi}$  de las fuerza aplicadas a cada nodo:

$$f_x = \begin{pmatrix} f_{x1} \\ f_{x2} \\ \vdots \\ f_{xn} \end{pmatrix}; f_y = \begin{pmatrix} f_{y1} \\ f_{y2} \\ \vdots \\ f_{yn} \end{pmatrix}; f_z = \begin{pmatrix} f_{z1} \\ f_{z2} \\ \vdots \\ f_{zn} \end{pmatrix} \quad [2]$$

Uno de los mayores inconvenientes del método consiste en la necesidad de transformar a fuerzas nodales todas las fuerzas superficiales o de volumen que afectan a la estructura.

**3. Determinación de las densidades de fuerza:**

Estas se definen como la relación entre la fuerza de tracción o compresión «s» y la longitud «l» de cada conexión o rama.

Es decir, para cada rama i:

$$q_i = \frac{s_i}{l_i} \quad [3]$$

Así es posible definir la MATRIZ DE DENSIDAD DE FUERZAS Q como la matriz diagonal, de dimensión  $\mathbf{r} \times \mathbf{r}$ , formada por las densidades de fuerzas de todas las ramas:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q_r \end{pmatrix} \quad [4]$$

**4. Resolución del sistema de ecuaciones del MDF**

Finalmente, planteando el equilibrio de fuerzas en los nodos, se obtienen las ecuaciones del Método de Densidad de Fuerzas:

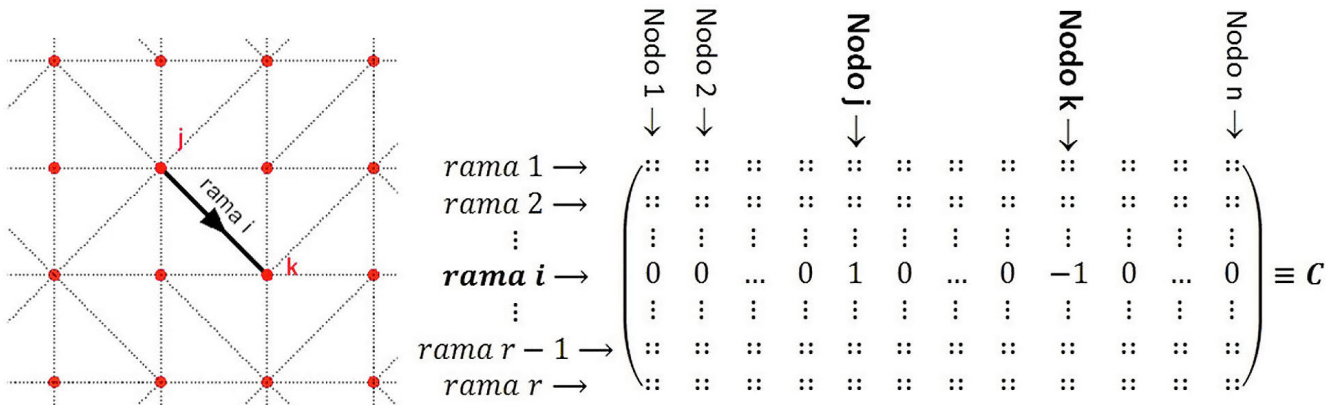


Figura 1. Obtención de la Matriz de Conectividad «C». Siendo n el número total de nodos y r el número total de ramas.



Figura 2. Esquema de INPUTS - OUTPUTS en el MDF.

$$\begin{cases} (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot x + f_x = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot y + f_y = 0 \\ (C^T \cdot Q \cdot C) \cdot z + f_z = 0 \end{cases} \quad [5]$$

Para que la ecuación [5] se convierta en un sistema de ecuaciones lineales es preciso determinar previamente las coordenadas de los nodos fijos, las fuerzas que afectan a cada nodo y las densidades de fuerza de cada rama (*inputs*). Resolviendo este sistema de «3n» ecuaciones se obtienen las «3n» incógnitas (*outputs*) que corresponden a las coordenadas de los nodos libres y a las reacciones en los apoyos (Figura 2).

El mayor inconveniente de este método consiste en que uno de sus *INPUTS*, las densidades de fuerza, no tienen un valor claro conocido por el proyectista a priori. Es decir, el sistema de ecuaciones que plantea el MDF tiene múltiples soluciones, obteniéndose una configuración de equilibrio diferente por cada matriz de densidades de fuerza elegida. Esto obliga a realizar tanteos sucesivos, adoptando valores de densidades de fuerza diferentes hasta conseguir la forma geométrica deseada.

La generación de la estructura de nodos-conexiones puede realizarse de forma automática utilizando técnicas de automallado como el Mallado Topológico -MT- (6) (7) (8) (9). Las topologías de las mallas generadas a través de esta técnica, empleada con éxito en el diseño de estructuras tensadas, resultan también muy útiles en el diseño de cúpulas y bóvedas a compresión. En este artículo se utilizarán diversos términos relacionados con el MT como redes abiertas, redes cerradas, pasos o anillos y conexiones anillo y radiales.

Llegado a este punto es importante advertir que para cada hipótesis de carga, con la aplicación de MDF-MT, se obtendría

una forma de equilibrio diferente. Por eso se suelen considerar únicamente las cargas permanentes, distinguiendo así dos etapas en el cálculo: una primera fase de diseño o búsqueda de la configuración de equilibrio a través del MDF-MT y una fase posterior de análisis estructural, donde son tenidas en consideración todas las hipótesis de carga.

En las estructuras tensadas, debido a la ligereza de los materiales empleados, el peso propio tiene una influencia muy reducida en el resultado. Por este motivo se suele prescindir de su valor y de esta forma la utilización del MDF-MT resulta muy sencilla.

En cambio, en las estructuras antifuniculares la consideración del peso propio resulta indispensable. Al tratarse de una fuerza superficial, su valor depende de la geometría de la estructura. De esta forma, el sistema de ecuaciones que plantea el MDF pierde su linealidad, por lo que para ciertos valores de las densidades de fuerza no existirá una solución.

Analizando el problema bi-nodal se puede comprender de manera sencilla por qué no es siempre posible obtener una solución. Se tiene una estructura compuesta por una única barra vertical con un extremo fijo, sometida a una fuerza constante  $f_z$  en sentido longitudinal (Figura 3). La forma de equilibrio se determinará simplemente calculando la longitud  $z$  que debe tener la barra para que la densidad de fuerza tenga un valor  $q$  determinado. Los sistemas de ecuaciones del MDF quedan reducidos a una única ecuación lineal que establece el equilibrio de fuerzas [6].

$$q \cdot z - f_z = 0 \rightarrow z = \frac{f_z}{q} \quad [6]$$

El problema siempre tendría solución para cualquier valor de densidad de fuerza  $q$  adoptado.

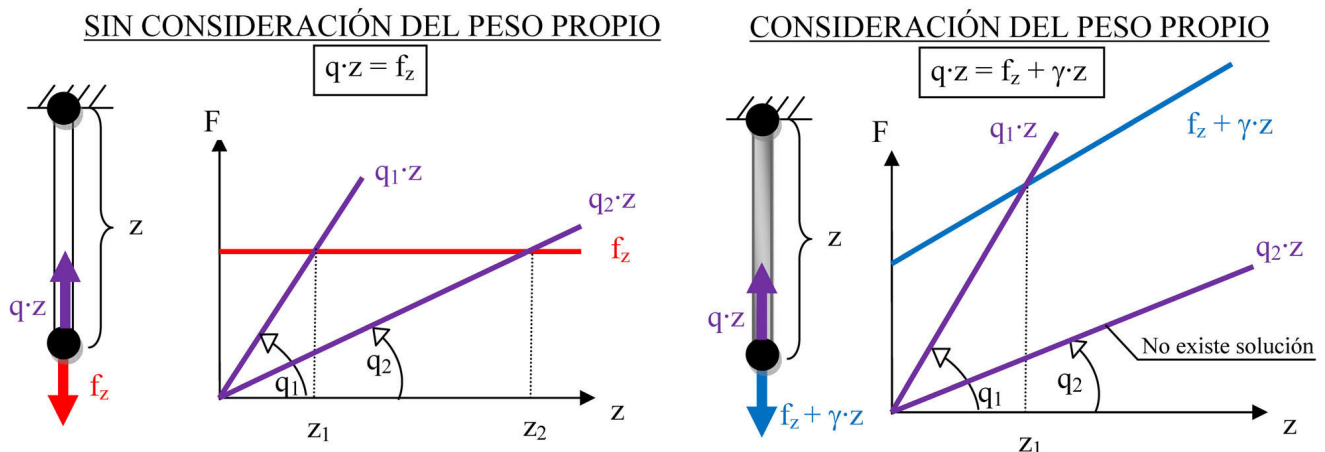


Figura 3. Análisis de la solucionabilidad del problema bi-nodal y unidimensional sin y con la consideración del peso propio.

En cambio, si se tiene en consideración el peso propio de la barra y su peso específico  $\gamma$  fuese conocido, el equilibrio de fuerzas quedaría representado a través de la expresión [7].

$$q \cdot z - f_z - \gamma \cdot z = 0 \rightarrow z = \frac{f_z}{q - \gamma} \quad [7]$$

De esta forma el problema no alcanzaría solución para valores  $q < \gamma$ .

En definitiva, la aplicación del método adaptado a las estructuras antifuniculares, considerando el peso propio (MDF-MT-PP) (10), se convierte en un procedimiento complejo que hay que resolver de forma iterativa y con el inconveniente añadido de no tener solución en determinados casos. El esquema de *INPUTS-OUTPUTS* se representa en la Figura 4.

El concepto de Densidad de Fuerza, adquiere así un papel fundamental en la forma de equilibrio obtenida. Partiendo de unas condiciones de contorno definidas y conocidas por el proyectista, este parámetro se convierte en la única variable del sistema para modificar la forma geométrica. El resto de variables o bien resultan conocidas, como las coordenadas de los puntos de apoyo o el peso específico del material, o bien tienen una menor influencia en la forma de equilibrio obtenida, como la densidad de nodos empleada o la tipología de malla escogida. Para cada matriz de densidades de fuerza podrá existir una solución al problema y, en el caso de que esta exista, la forma de equilibrio alcanzada diferirá considerablemente de otra obtenida con una matriz de densidades de fuerza diferente. Ello obliga de nuevo a realizar un cálculo iterativo en el que una vez obtenida la primera solución o forma de equilibrio, es necesario modificar el valor de las densidades de fuerza empleadas hasta conseguir la geometría deseada. Este proceso no es sencillo, ya que no resulta fácil relacionar el valor de las densidades de fuerza con la forma geométrica que se persigue. Para el diseñador se convierte en un procedimiento largo y complejo al tener que modificar multitud de valores hasta obtener una forma de equilibrio que se aproxime al modelo inicial diseñado.

En este artículo se propone un método para obtener las densidades de fuerza en las estructuras clásicas de compresión, bóvedas y cúpulas, a partir de parámetros geométricos del diseño original. Previamente se ayudará a adquirir una mejor comprensión práctica de estos parámetros y su relación con la forma de equilibrio alcanzada.

## 2. LA DENSIDAD DE FUERZA EN ESTRUCTURAS ANTIFUNICULARES

Para comprender el significado práctico de la densidad de fuerza y su relación con la geometría alcanzada, resulta útil



Figura 4. Esquema de *inputs - outputs* en el MDF-MT-PP.

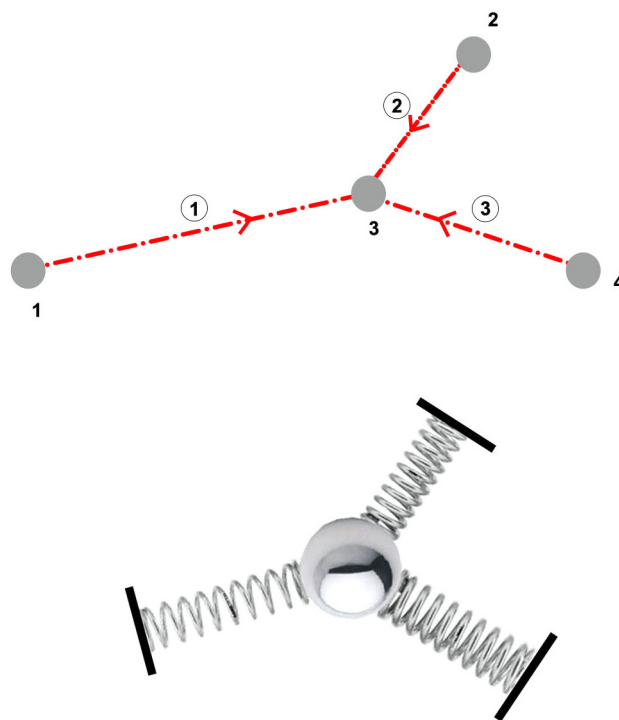


Figura 5. Símil de una estructura simple de cuatro nodos, un nodo central libre y tres fijos, con un sistema de muelles y bolas.

establecer un símil entre dicho parámetro y la constante elástica de un muelle (Figura 5).

Al aumentar la densidad de fuerza de una barra en una estructura en equilibrio, se conseguirá acortar la longitud de dicha barra, pero al mismo tiempo se modificará la posición del resto de nodos de la estructura y cambiará sustancialmente la forma de equilibrio.

Una técnica para obtener estructuras simétricas con la forma deseada consiste en agrupar estas densidades de fuerza según pertenezcan a un anillo o a una conexión radial o de unión (7).

En las estructuras antifuniculares abiertas, tipo bóveda, el paralelismo de los anillos se consigue utilizando las mismas densidades de fuerza en todas las ramas radiales y adoptando un valor cercano a cero para minimizar las tensiones en las mismas. Por otra parte, alterando las densidades de fuerza de las ramas que componen los anillos se puede modificar la altura de la bóveda (Figura 6).

Intuitivamente estos cambios pueden predecirse mediante el símil de bolas-muelles. No obstante, en este caso hay que tener presente que las modificaciones en la geometría no son proporcionales a las variaciones de estos parámetros. Además pueden observarse otras pequeñas diferencias, más



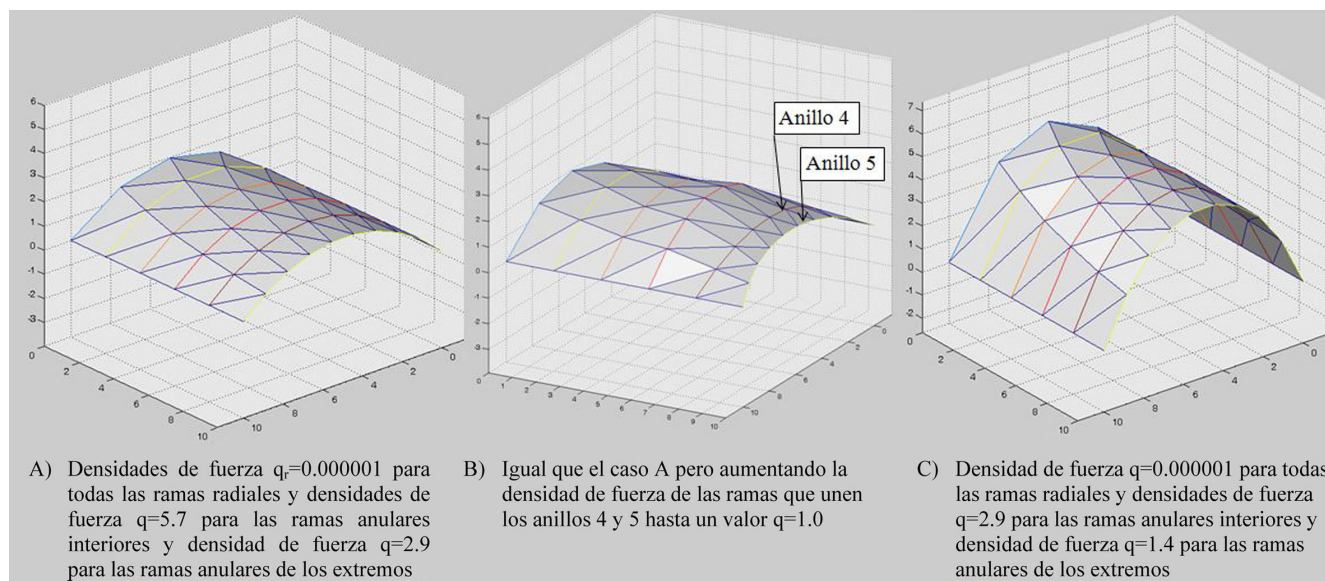


Figura 6. Pérdida del paralelismo y variación de altura de los arcos con la modificación de las densidades de fuerza.

difíciles de comprender, que están relacionadas con la morfología del mallado utilizado.

Análogamente para las mallas cerradas, tipo cúpula, las ramas radiales son las que modifican la altura de la bóveda mientras que las ramas anilladas controlan la forma más o menos abierta de la cúpula sin afectar en gran medida su altura (Figura 7).

### 3. MÉTODO DE APROXIMACIÓN CATENARIA

Si se analizan diferentes estructuras de compresión tridimensionales, se pueden distinguir formas antifuniculares como partes integrantes de todas ellas. Incluso en muchos casos es posible generar las figuras espaciales con la simple traslación o giro de estas formas poligonales (Figura 8).

El Método de Aproximación Catenaria –MAC– permite obtener las densidades de fuerza de estas formas antifuniculares mediante su aproximación a una curva catenaria de igual altura o longitud (Figura 9).

La ventaja de esta aproximación radica en que la ecuación matemática de la curva catenaria es conocida y puede obtenerse directamente a partir de valores geométricos como la flecha en su punto medio. Estas ecuaciones, obtenidas en base al equilibrio de fuerzas horizontales y verticales, son las siguientes:

$$y(x) = \frac{1}{2g} \cdot \{ \cosh[g \cdot (2 \cdot x - a)] - \cosh[g \cdot a] \} \quad [8]$$

$$h = \frac{1}{2g} \cosh[g \cdot a] - \frac{1}{2g} \quad [9]$$

$$g = \frac{\lambda}{2T_0} \quad [10]$$

siendo:

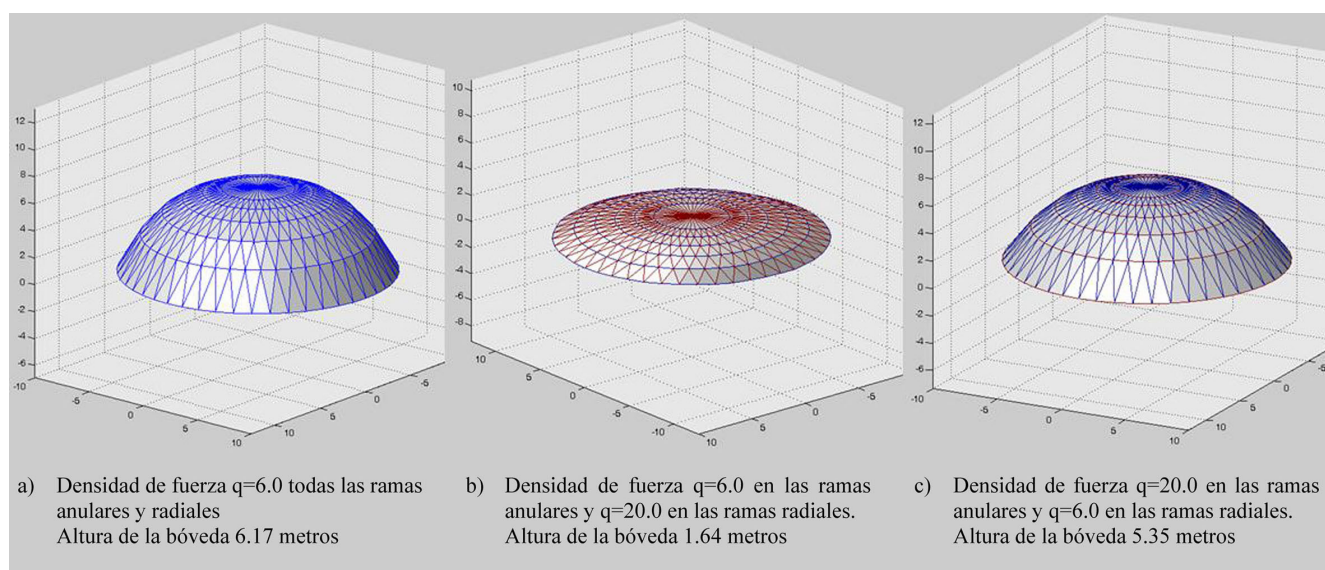


Figura 7. Cambio de altura de la cúpula con la modificación de las densidades de fuerza.

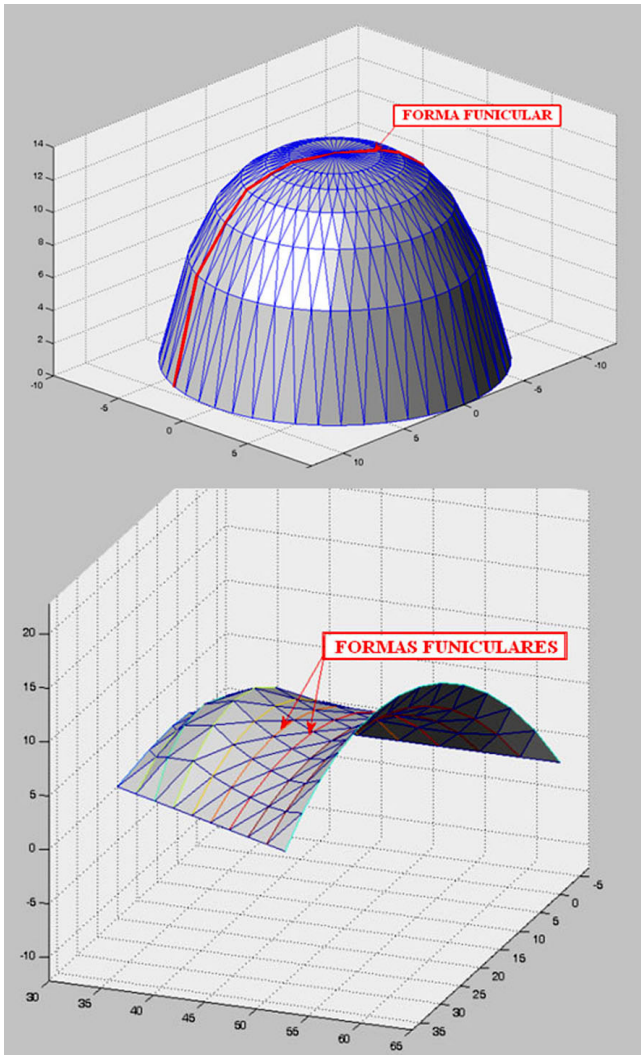


Figura 8. Identificación de curvas funiculares en cúpulas y bóvedas (mallas cerradas y abiertas).

- $y(x)$  flecha de la catenaria en el punto  $x$
- $h$  altura máxima de la catenaria (flecha en el punto medio).
- $g$  constante de la catenaria que se define según la ecuación [10]
- $T_0$  tensión horizontal de la catenaria (igual en todos sus puntos)
- $\lambda$  peso específico
- $a$  distancia entre los dos extremos fijos de la catenaria.

La parte esencial del método consiste en calcular lo que se denomina densidad de fuerza equivalente de la catenaria « $q_e$ » [11], que es el valor a adoptar para todas las barras incluidas en la sección funicular de la bóveda o cúpula. Posteriormente, utilizando el MDF y aplicando estas densidades de fuerza equivalentes, se obtendrá una forma de equilibrio con la altura o perímetro deseado.

Si se divide la proyección horizontal de la catenaria en  $N$  partes iguales (Figura 10), siendo  $N$  el número de tramos de la forma funicular, se puede calcular el valor de la densidad de fuerza equivalente de la catenaria mediante la siguiente expresión:

$$q_e = \frac{T}{L_1} = \frac{T_0}{L_1 \cdot \cos \theta} = \frac{T_0 \cdot L_1}{L_1 \cdot x_1} = \frac{T_0}{x_1} \quad [11]$$

$$x_1 = \frac{a}{N} \quad [12]$$

Por otra parte, el valor de  $T_0$  se puede calcular conociendo el peso por unidad de longitud de la catenaria  $\lambda$  a través de las siguientes expresiones:

$$T_0 = \left[ \frac{\lambda \cdot L}{2 \cdot \tan \theta} \right] \quad [13]$$

$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} \quad [14]$$

$$L = \frac{1}{g} \sinh[g \cdot a] \quad [15]$$

El valor  $y_1$  se obtiene aplicando la ecuación de la catenaria [8].

El método se estructura en los siguientes pasos:

**1. Definición de los parámetros iniciales y obtención de una primera forma de equilibrio:**

Es el paso 1 del método y consiste en obtener una primera forma de equilibrio a partir de unos parámetros iniciales compatibles con una primera configuración de equilibrio.

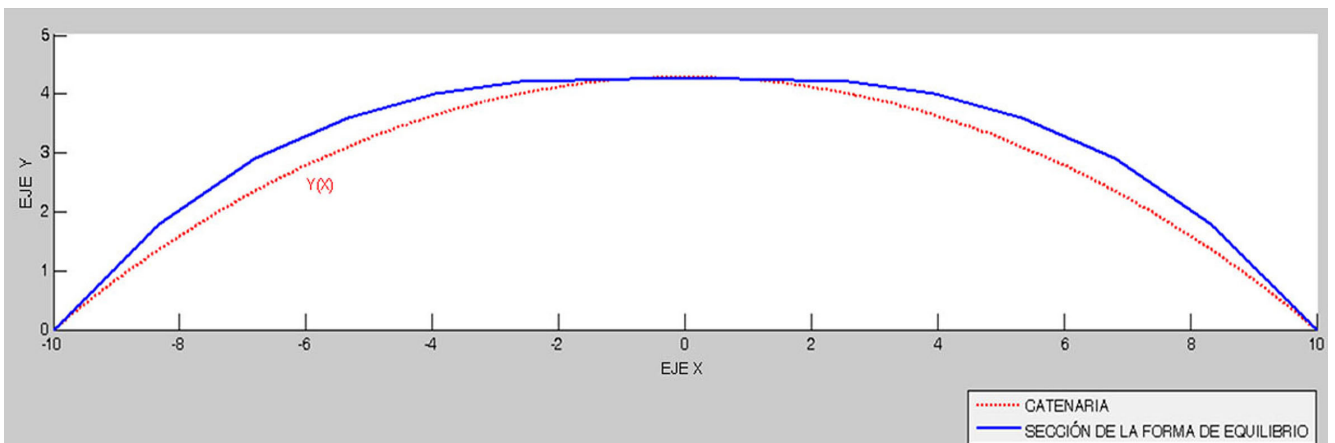


Figura 9. Comparación de la sección radial de una cúpula antifunicular con la curva catenaria de igual altura.



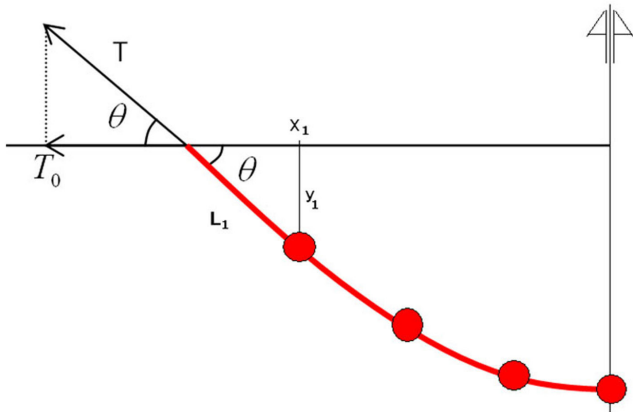


Figura 10. Representación de las tensiones en el extremo de la catenaria.

Se analizará el diseño y se adoptarán todos los parámetros necesarios para establecer una primera forma de equilibrio. Para ello será necesario:

1. Determinar las coordenadas de los nodos fijos.
2. Establecer un mallado topológico apropiado.
3. Analizar los materiales utilizados determinando su peso específico.
4. Aplicar el MDF-MT-PP con unas densidades de fuerza iniciales compatibles con una configuración de equilibrio. Es decir, se adoptarán densidades de fuerza tales que el problema tenga solución aunque la forma de equilibrio difiera notablemente del diseño inicial.

## 2. Calibración del método:

En este paso se identificarán las formas funiculares contenidas en la configuración de equilibrio para calcular los parámetros de las catenarias que la aproximan y que se denominarán catenarias iniciales. En algunos casos (cúpula de base circular) bastará con aproximar una única sección funicular, mientras que en otros (cúpula de base poligonal o bóvedas de altura variable) será necesario aproximar varias secciones (Figura 8).

De cada forma funicular inicial se tomarán los siguientes valores que se utilizarán para definir su correspondiente catenaria inicial:

- Altura de la forma funicular inicial  $h_i$
- Distancia entre los apoyos  $a$

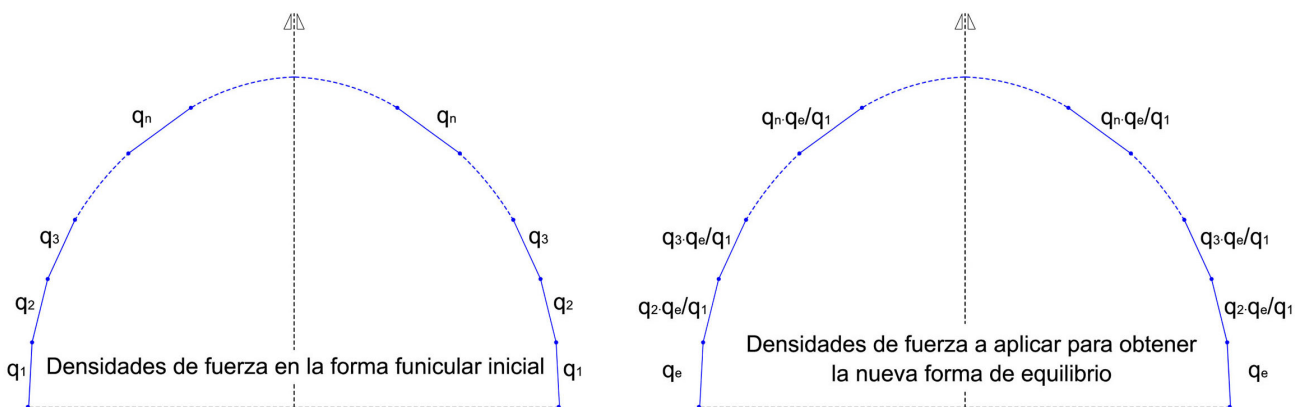


Figura 11. Adopción de densidades de fuerza para la obtención de la nueva forma de equilibrio.

- Número de nodos  $N$
- Densidad de fuerza de la primera rama  $q_1$  (véase la Figura 11)

A través de la ecuación [9] se puede calcular el parámetro  $g$  de la catenaria inicial.

Por otra parte adoptando  $T_0 = q_1 \cdot x_1$  se puede obtener el peso unitario  $\lambda$  de la catenaria inicial a través de las ecuaciones [13], [14] y [15]. El valor de  $x_1$  puede obtenerse directamente de la configuración de equilibrio obtenida o de forma aproximada mediante la ecuación [12].

## 3. Obtención de las densidades de fuerza:

Es ahora cuando se obtiene la densidad de fuerza equivalente  $q_e$  de la catenaria con la altura de diseño  $h_d$  y con el peso unitario  $\lambda$  calculado en el apartado anterior. A esta catenaria se le denominará en lo sucesivo catenaria final.

Se adoptarán los siguientes parámetros ya conocidos:

- Altura de la catenaria final o altura de diseño  $h_d$
- Distancia entre los apoyos  $a$
- Número de nodos  $N$
- Peso unitario de la catenaria inicial obtenido en el paso anterior  $\lambda$ .

A través de la ecuación [9] se puede obtener el valor  $g$  de la catenaria final.

Utilizando este valor y empleando de nuevo las ecuaciones [11], [13], [14] y [15] se calculará el valor de la densidad de fuerza equivalente de la catenaria final.

## 4. Obtención de la forma de equilibrio con los condicionantes geométricos iniciales:

El último paso del MAC consiste en calcular una nueva forma de equilibrio utilizando de nuevo el MDF-MT-PP pero empleando ahora la densidad de fuerza equivalente obtenida.

En el caso de que la forma funicular inicial tuviese la misma densidad de fuerza en todas sus ramas se adoptaría la densidad de fuerza equivalente en todas estas conexiones para obtener la nueva forma de equilibrio. En cambio si estas densidades de fuerza no coinciden, para mejorar la convergencia del método, se podrán aplicar valores ponderados de acuerdo con el esquema de la Figura 11.

ALTURA DE LA CÚPULA DISEÑADA	DENSIDAD DE FUERZAS ( $q'$ ) OBTENIDA CON EL MAC PARA ESTA ALTURA	ALTURA DE LA CÚPULA OBTENIDA CON EL PROGRAMA GAUDÍ PARA $q=q'$
2	16.31	1.95
4	8.53	3.97
6	6.06	6.09
8	4.88	8.32
10	4.20	10.67
15	3.34	16.81
20	2.91	23.57
30	2.50	37.24
40	2.28	52.14

A través del MAC generalmente se consiguen buenas aproximaciones, si bien pueden darse diferencias considerables para valores de densidad de fuerza muy alejados al de la calibración realizada. El éxito de la aproximación también depende de la influencia del resto de densidades de fuerza no alteradas por el método, es decir, del efecto de las conexiones que no están incluidas en la forma funicular a la que se aplica el MAC y que mantienen su densidad de fuerza inicial. En estos casos, se puede aplicar nuevamente el método hasta obtener resultados óptimos. La ventaja del procedimiento iterativo del MAC frente al procedimiento de tanteo tradicional, radica en que se converge rápidamente hacia la solución buscada y además es posible su programación en un mismo algoritmo informático junto con el MDF-MT-PP (10).

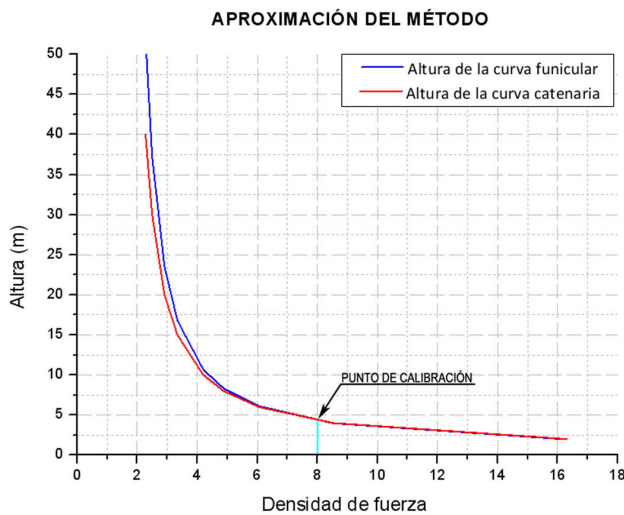
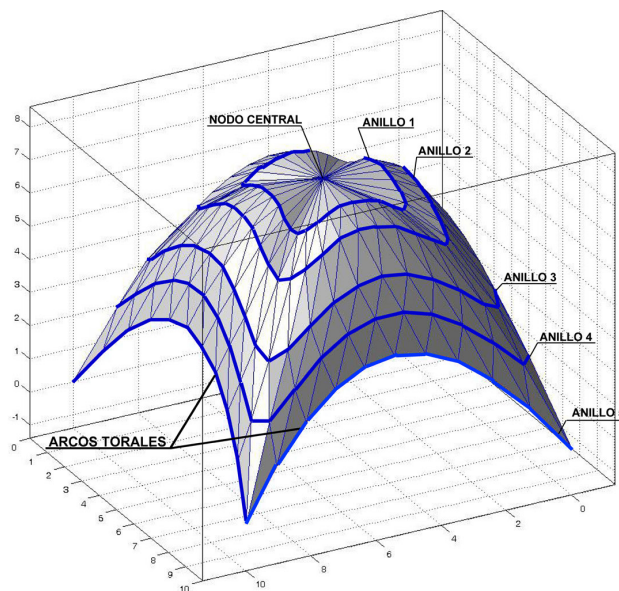


Figura 12. Aproximación del método en la primera iteración para una cúpula de 20 metros de diámetro.

La aplicación del MAC a cúpulas de base circular resulta muy sencilla, obteniéndose muy buenas aproximaciones. En este caso se emplea el método en una única forma funicular (véase la cúpula de la Figura 8), aplicando la densidad de fuerza equivalente obtenida a todas las ramas radiales de la cúpula.

La Figura 12 muestra la aproximación conseguida con el MAC aplicado a una cúpula de 20 metros de diámetro de base para diferentes alturas de diseño. La calibración se ha realizado en este ejemplo a partir de una primera configuración de equilibrio de  $q = 8$  y  $h = 4,29$  metros.

Resulta también muy interesante la aplicación del MAC a cúpulas de base poligonal. Se tiene como ejemplo una cúpula



**VALORES DE LAS DENSIDADES DE FUERZA INICIALES**

<b>q anulares</b>	Anillo 1: 1	<b>q radiales</b>	Entre Nodo central y Anillo 1: 2
	Anillo 2: 1		Entre Anillos 1 y 2: 2
	Anillo 3: 1		Entre Anillos 2 y 3: 2
	Anillo 4: 1		Entre Anillos 3 y 4: 4
	Anillo 5: 50		Entre Anillos 4 y 5: 5

**VALORES GEOMÉTRICOS DE LA CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO INICIAL**

Altura de la bóveda (h):	7,14 metros
Altura de los arcos torales ( $h_t$ ):	3,56 metros

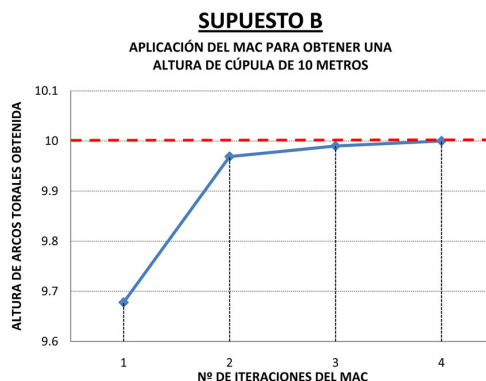
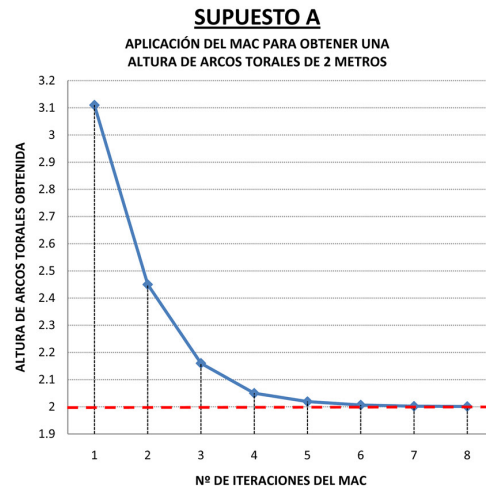
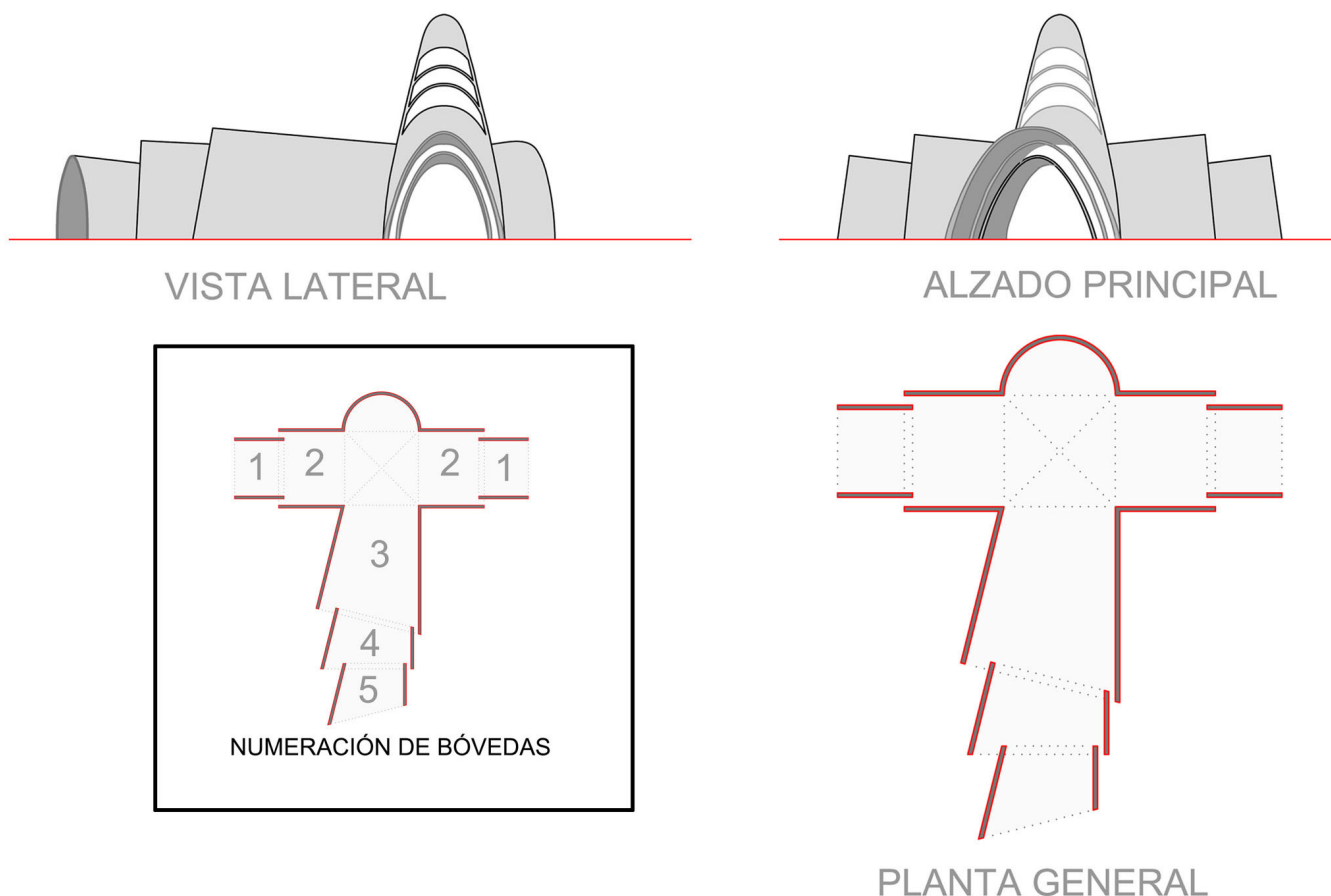


Figura 13. Aplicación del MAC a una cúpula de base cuadrada.



BÓVEDA	DISEÑO		1ª CONF. DE EQUILIBRIO		MAC 1ª ITERACIÓN		ERROR COMETIDO	
	ALTURA DE ARCO INICIAL	ALTURA DE ARCO FINAL	ALTURA DEL ARCO INICIAL	ALTURA DEL ARCO FINAL	ALTURA DE ARCO INICIAL	ALTURA DE ARCO FINAL	ALTURA DE ARCO INICIAL	ALTURA DE ARCO FINAL
<b>1</b>	13.95	14.66	18.34	18.44	13.95	14.60	0.00%	-0.41%
<b>2</b>	17.08	19.00	36.23	36.95	17.84	19.32	4.45%	1.68%
<b>3</b>	17.08	19.77	29.92	29.48	17.43	18.73	2.05%	-5.26%
<b>4</b>	17.03	17.33	7.46	7.59	16.61	17.29	-2.47%	-0.23%
<b>5</b>	13.43	14.66	11.33	11.19	13.68	14.27	1.86%	-2.66%

Figura 14. Aplicación del MAC a un Proyecto de Gran Estructura. Resultados obtenidos en la primera iteración.

de base cuadrada de 10 metros de lado, representada en la Figura 13. En este caso se puede utilizar el MAC tanto para variar la altura de los arcos torales como para modificar la altura total de la cúpula.

Las formas funiculares inscritas en los arcos torales están formadas por las conexiones del anillo 5 por lo que todas sus ramas tendrán una densidad de fuerza inicial de valor  $q_i = 50$ . Aplicando el MAC se obtienen densidades de fuerza equivalente que habrá que aplicar a todas las ramas del anillo 5. Debido a que la altura de estos arcos se encuentra muy condicionada por las densidades de fuerza del resto de anillos así como por las densidades de fuerza radiales, pueden ser necesarias varias iteraciones para conseguir una buena aproximación. En cualquier caso el método converge rápidamente y como muestran los resultados correspondientes al SUPUESTO A que muestra la Figura 13.

Por otra parte, para modificar la altura de la cúpula habría que aplicar el MAC considerando formas funiculares compuestas por conexiones radiales, como en el caso de las cúpulas de base circular. En el ejemplo representado en la Figura 13, SUPUESTO B, las densidades de fuerza tendrán valores diferentes para cada rama y en cada iteración habrá que aplicar una distribución de densidades de fuerza de acuerdo con la Figura 11. Se puede observar en el gráfico que acompaña a la Figura 13 SUPUESTO B que son precisas muy pocas iteraciones para alcanzar la altura deseada puesto que la densidad de fuerza de las conexiones anulares tienen una mínima influencia en la altura total de la cúpula.

Con las bóvedas se procede de forma similar, aunque, como se ha comentado en el apartado II, las densidades de fuerza obtenidas se aplicarán únicamente a las ramas anulares. Las densidades de fuerza de las conexiones radiales deben de in-

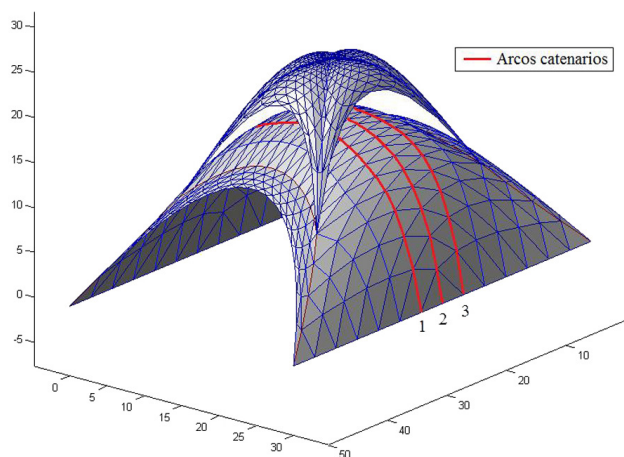


Figura 15. Aplicación del MAC a una estructura a compresión de 2 plantas con una serie de arcos catenarios de control.

troducirse con valores próximos a cero, a menos que no se desee mantener el paralelismo de los arcos.

La Figura 14 muestra la aplicación del MAC al diseño de una Gran Estructura compuesta por múltiples bóvedas de altura variable. Se han escogido los arcos extremos de cada bóveda, arco inicial y arco final, como secciones funiculares representativas. Partiendo de una primera configuración de equilibrio, a través del MAC se han modificado las densidades de fuerza de las ramas anulares que los componen. En la tabla de la Figura 14 se muestran los valores de la altura de diseño de los arcos de cada bóveda y se comparan con las alturas obtenidas tras la aplicación del método. El error máximo cometido tras la primera iteración, es inferior al 5,5%, demostrando una vez más la efectividad del MAC.

Cuando se tiene una estructura más irregular que las mostradas hasta ahora (con arcos pronunciados, contrabóvedas, densidades de fuerza desiguales, etc.) es posible conseguir ciertas dimensiones determinadas a priori (altura máxima y apertura general por ejemplo) controlando la geometría de un conjunto de arcos denominados de control. En estos casos la aplicación del MAC resulta fundamental, ya que es el que permite la obtención de esos parámetros geométricos objetivo en los arcos de control escogidos cuidadosamente dentro de la malla.

## REFERENCIAS

- (1) Rabasco, P. (2011). El sistema Ctesiphonte. Evolución de la estructura catenaria. *Informes de la Construcción*, 63(522): 43-52, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.10.009>.
- (2) Bassegoda-Nonell, J. (1990). La construcción tradicional en la arquitectura de Gaudí. *Informes de la Construcción*, 42(408): 9-14, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.1990.v42.i408.1424>.
- (3) Escrig, F., Sánchez, J. (2005). La bóveda de hormigón del Club Táchira en Caracas. *Informes de la Construcción*, 57(499-500): 133-145 doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.2005.v57.i499-500.488>.
- (4) Maurin, B., Motro, R. (1998). The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes. *Engineering Structures*, 20(8): 712-719, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296\(97\)00108-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0141-0296(97)00108-9).
- (5) Schek, H. J. (1974). The force density method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3(1): 115-134, doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90045-0](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0).
- (6) Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R., Bayo, E. (2006). Topological mapping for tension structures. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 132(6): 970-977, doi: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2006\)132:6\(970\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:6(970)).
- (7) Jurado-Piña, R., Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E. (2009). Topological mesh for shell structures. *Applied Mathematical Modelling*, 33(2): 948-958, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2007.12.018>.

En la Figura 15 se puede observar una estructura de 2 plantas totalmente a compresión a la que ya se le ha aplicado el MAC a los 3 anillos centrales de la malla inferior, que son los que se han identificado como de control. De esta forma en el ejemplo de la figura 15 la altura deseada era de 18 m, en el diseño inicial era de 16,43 m y en el diseño final tras varias iteraciones se ha obtenido una altura final de 17,97 m.

## 4. CONCLUSIONES

La aplicación del MDF en el diseño de estructuras antifuniculares permite obtener configuraciones de equilibrio a través de la resolución de un sistema de ecuaciones no lineal. El concepto de densidad de fuerza adquiere un papel fundamental permitiendo modificar la forma de equilibrio hasta conseguir la geometría deseada. Sin embargo, no resulta sencillo relacionar el valor de las densidades de fuerzas con la forma geométrica para satisfacer los condicionantes geométricos del diseño. El problema se resuelve de forma iterativa, mediante variaciones de densidades de fuerza sucesivas con un cierto grado de discrecionalidad, lo que lleva a un procedimiento lento y complejo.

En este artículo se expone un método innovador que facilita la obtención directa de una configuración de equilibrio que cumpla unos condicionantes de diseño preestablecidos. Se enumeran a continuación las ventajas más significativas del método:

Es un procedimiento de formulación sencilla, lo que conlleva un bajo coste computacional.

Se elimina la discrecionalidad del procedimiento permitiendo su implementación en el mismo programa informático que desarrolle el MDF-MT-PP para estructuras a compresión.

Aunque se trata de un método aproximado, admite una aplicación iterativa y cada ciclo mejora el resultado anterior. Esto permite con pocas iteraciones obtener la configuración de equilibrio deseada, cumpliendo los condicionantes de diseño.

Finalmente el método propuesto ha sido testado en diferentes proyectos, obteniendo resultados muy satisfactorios en cada uno de ellos. Se trata de una herramienta que puede resultar muy atractiva en el diseño de estructuras a compresión y en algunas tensoestructuras tales como las cubiertas colgantes pesadas (11).



- (8) Carbonell-Marquez, J.F., Gil-Martín, L.M., Jurado-Piña, R, Hernández-Montes, E. (2013). Symmetry preserving in topological mapping for tension structures. *Engineering Structures*, 52: 64-68, doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.02.011>.
- (9) Liu, W., Li, D., Jiang, J. (2013). A General Mesh Configuration Design Approach for Large Cable-Network Antenna Reflectors. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, 140(2), doi: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000816](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000816).
- (10) Carbonell-Márquez, J.F., Gil-Martín, L.M., Hernández-Montes, E., Jurado-Piña, R. (2012). GAUDI 1.0. - Manual de Usuario. <http://www.ugr.es/~tep190/investigacion/gaudi.html>. Granada.
- (11) Santos-Guerras, J. (1990). El desarrollo de las cubiertas colgantes pesadas. *Informes de la Construcción*, 41(405): 5-18, doi: <http://dx.doi.org/10.3989/ic.1990.v41.i405.1465>.

\* \* \*