INSTITUCIONES

DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL.

INSTITUCIONES

DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL.

INSTITUCIONES

DE CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL

CON SUS APLICACIONES PRINCIPALES

Á LAS MATEMÁTICAS PURAS Y MIXTAS.

POR DON JOSEF CHAIX,

Vice-Director del Real Cuerpo de Ingenieros Cosmógrafos de Estado.

TOMO I.

CONTIENE EL CÁLCULO DIFERENCIAL Y SUS APLICACIONES.

DE ÓRDEN SUPERIOR.

MADRID EN LA IMPRENTA REAL.

AÑO DE 1801.

PRÓLOGO.

Entre los grandes descubrimientos modernos que han contribuido poderosamente á la perfeccion de las ciencias naturales, y que hacen honor al entendimiento humano; merece un lugar distinguido el de los cálculos *Diferencial é Integral*. En efecto, si se comparan las obras de los Geómetras anteriores á este descubrimiento admirable, con las publicadas posteriormente; se advierte una diferencia tan notable, que admira á los inteligentes, y hasta á los menos apasionados á la novedad. Los problemas que aquellos Geómetras consideraban como sublimes y dificiles, y cuya resolucion exîgia el uso de varios métodos particulares, por lo comun largos y penosos; se reputan hoy fáciles y comunes; y se resuelven con suma generalidad, elegancia y sencillez por medio de los nuevos cálculos. Otros verdaderamente sublimes y delicados, que los referidos Geómetras ó no se atreviéron á resolver, ó que abandonáron despues de largos é inútiles esfuerzos; quedan ya resueltos completamente con el poderoso auxílio de los nuevos cálculos. Con estos se han vencido obstáculos reputados superiores á las fuerzas del espíritu humano, como hemos visto en el problema de los tres cuerpos; de la precesion de los equinoxîos; y de otros varios de la Mecánica y de la Astronomía-física: con estos han hecho progresos rápidos y admirables las ciencias físico-matemáticas: y con estos solamente se puede caminar con acierto en el estudio de estas ciencias. Por estas consideraciones, y por saber que apenas teniamos en nuestro idioma los principios de estos importantes cálculos por un método que seguramente no es el mejor; me determiné á reunir en un tratado lo mejor y mas importante que sobre dichos cálculos se ha escrito en varios idiomas, y á manifestar al mismo tiempo sus principales aplicaciones á la análisis y á las ciencias físico-matemáticas. Entibióme al principio lo dificil de la empresa, que miraba como superior á mis conocimientos y fuerzas; y por lo mismo diferí su execucion, hasta que familiarizado con este género de trabajo, y viendo la utilidad y ahorro de tiempo que debia resultar á los que se dedicasen al estudio de estas ciencias, me resolví á escribir las presentes Instituciones.

Los inventores del cálculo diferencial explicáron sus principios metafísicos por dos métodos muy diversos, de lo que naciéron largas disputas poco favorables al progreso de dicho cálculo, y agenas al parecer de las ciencias exâctas. *Newton*, el primero que le invento (1); le dió el nombre de *cálculo de las fluxîones*, y le explicó por los principios del movimiento, y por el método de las primeras y últimas razones de las cantidades que nacen y se desvanecen (2), demostrado despues largamente, é ilustrado con variedad de aplicaciones por el docto escoces *Maclaurin* (3): pero casi al mismo tiempo inventó tambien el cálculo diferencial en Alemania el célebre *Leibnitz* (4), y le fundó en la consideracion de las cantidades infinitamente pequeñas de varios órdenes ó método de los infinitamente pequeños, explicado é ilustrado con multitud de aplicaciones por el Marques del Hospital (5), y posteriormente por el ilustre *Leonardo Euler* (6), y otros Geómetras. En ambos métodos brilla el talento original de sus autores; en ambos hay cosas preciosas; pero tambien hay lunares muy notables. El principal que se descubre en el de las fluxîones, es el apoyarse en la extraña teoría del movimiento, siendo un ramo puramente de análisis; sus demostraciones son ademas largas y fastidiosas: y su aplicacion dificil y

(1) *Commercium epistolicum.*
(2) *Philosophiæ naturalis, principia mathematica.* Lib. 1.° seccion 1.ª
(3) *A treatise of fluxions in two books. By Colin Maclaurin, &c.* Edimburgo 1742.
(4) *Commercium epistolicum.*
(5) *Analyse des infiniment petits, &c. Par Mr. Le Marquis de l' Hospital, &c.* Paris 1699.
(6) *Institutiones calculi differentialis, &c. Auctore Leonardo Eulero.* Petersburgo 1755.

embarazosa: á pesar de esto, tiene ventajas conocidas, pues se funda sobre principios evidentes, como se puede ver en la citada obra de *Maclaurin*; y encierra la verdadera metafísica del cálculo diferencial, como presto verémos. Al contrario, las demostraciones del método de los infinitamente pequeños son muy sencillas y breves; y su aplicacion sumamente fácil; pero tiene el defecto capital de fundarse en las nociones vagas é imperfectas de las cantidades infinitamente pequeñas; nociones que carecen de la exâctitud y evidencia que caracterizan las ciencias matemáticas.

El método de las últimas razones de las cantidades que se desvanecen empleado sintéticamente por *Newton* para demostrar el de las fluxîones; es el que *D' Alembert* llamó *Método de los límites*, con el qual demostró los principios del cálculo diferencial y algunas de sus aplicaciones de un modo geométrico y muy sencillo, tratando analíticamente dicho método, y substituyendo el cálculo algebráico de las diferencias á los principios del movimiento (1). Fue inventado este excelente método por los Geómetras de la antigüedad; y lo empléo *Archîmedes* para demostrar varias proposiciones de la Geometría sublime, las quales le diéron en parte la reputacion que ha conservado en todos tiempos aquel gran Geómetra (2). Sus principios son evidentes y sencillos; y si en todas sus demostraciones y aplicaciones, no es tan breve como el de los infinitamente pequeños; le excede siempre en claridad, elegancia y evidencia: ademas tiene este método sobre los otros la ventaja de que todas sus aplicaciones se pueden hacer por medio de un solo principio muy general y elegante; esto es, por medio del admirable teorema de *Taylor* (3). Por esto pues he preferido el método de los límites para explicar el cálculo diferencial, y hacer sus aplicaciones; pareciéndome superior á quantos se conocen para este efecto,

(1) *Encyclopedie ou Dictionaire raisonné des sciencies, &c.* Tomo 4.°, pág. 985 y siguientes.
(2) *Archimedes opera, &c. Per Is. Barrow, exprofessorem, &c.* Londres 1675.
(3) *Methodus incrementorum directa & inversa. Auctore Brook Taylor, &c.* Londres 1715.

como lo juzgó *Mr. Cousin*, empleándolo continuamente en sus lecciones (1).

El sabio *Landen*, Geómetra ingles, publicó posteriormente una obra sobre el cálculo diferencial (2), en la que explicó sus principios por un método puramente analítico, empleando únicamente las cantidades finitas. Hízolo con el fin de que su método se substituyese al de las fluxîones seguido constantemente en su pais á pesar de tener varios inconvenientes. Pero aunque el método de *Landen* deba preferirse al de las fluxîones, por la mayor propiedad de sus principios; es por lo menos tan dificil y embarazoso en las aplicaciones como el que pretende desterrar, y muy inferior al de los límites.

Quando empecé á escribir estas Instituciones por el método de los límites, solamente conocia los expuestos principios del cálculo diferencial; pero concluida ya la parte primera de este y sus aplicaciones, llegó á mis manos una obra muy profunda y original del célebre *Mr. de Lagrange* (3), donde explica los principios del referido cálculo por un método analítico, prescindiendo de toda consideracion sobre las cantidades infinitamente pequeñas, fluxîones y límites, segun lo habia hecho antes en una memoria que presentó á la Academia Real de Berlin, y se imprimió en el tomo del año 1772. Expone brevemente este autor los diferentes aspectos con que los Geómetras han considerado al cálculo diferencial (4); y hace de paso algunas objeciones á los principales métodos empleados hasta entonces para explicar los principios de dicho cálculo. Pero aunque los asertos de este sabio Geómetra son muy respetables; debo sin embargo decir, que las razones alegadas contra el método de los límites, me parecen muy débiles, y se pueden destruir con facilidad. Creo tambien que la

(1) *Leçons de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral. Par Mr. Cousin, &c.* Paris 1777.
(2) *The residual analysis, a new branch of the algebric. art. By John Landen.* Londres 1764.
(3) *Théorie des fonctions analytiques, &c. Par J. L. Lagrange, de l'Institut national.* Paris 1797.
(4) Páginas 2...... 6.

teoría de las funciones analíticas es muy semejante al método de los límites, y que la principal diferencia consiste en que en aquella se demuestra el teorema de *Taylor* por medio de consideraciones puramente algebráicas, aunque por un camino mucho mas largo que el que se sigue en el referido método. Pero al mismo tiempo es preciso confesar que en toda esta excelente obra, brilla el genio fecundo de su autor, y se manifiestan sus profundos conocimientos en las ciencias matemáticas. He seguido en algunas aplicaciones del cálculo diferencial el método general y elegante con que aplica el teorema de *Taylor*; y recomiendo mucho la lectura de dicha obra á los que deseen adquirir grandes conocimientos en la analisis y en las ciencias físico-matemáticas.

Pocos meses antes que *Mr. de Lagrange* diese á luz su obra publicó *Lacroix* el primer tomo de su Cálculo Diferencial é Integral (1), el qual contiene el cálculo diferencial, y sus aplicaciones principales á la analisis y á la geometría. Funda este autor dicho cálculo sobre los principios establecidos por Mr. de Lagrange en la citada memoria, y lo trata con mucha extension y claridad: pero al mismo tiempo manifiesta que hace algun aprecio del método de los límites, y del de los infinitamente pequeños, exponiendo brevemente estos métodos y algunas de sus aplicaciones, y dando á conocer la analogía que exîste entre el de los límites y la teoría de las funciones analíticas (2). Dicho tomo primero, juntamente con el segundo publicado en 1798, forman un tratado muy completo de los cálculos diferencial é integral; y me ha sido muy útil la lectura del tomo primero para algunas aplicaciones del cálculo diferencial que he hecho en estas Instituciones.

He dividido la teoría del cálculo diferencial en dos partes; y despues de explicar la primera, que llamo *principios* de dicho cálculo, paso inmediatamente á manifestar sus apli-

(1) *Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral, par S. F. Lacroix.* Paris 1797.
(2) Pág. 189.... 195; y 419.... 427.

caciones principales á la análisis y á la geometría : por este medio evito el fastidio que causa á toda clase de lectores, y particularmente á los principiantes, el estudio de largas teorías sin aplicaciones; y les animo á continuar el de la parte mas sublime del referido cálculo, manifestándoles la facilidad con que se resuelven muchos problemas importantes, considerados en otro tiempo como muy sublimes y difíciles. He hecho todas las aplicaciones del cálculo diferencial por medio de un principio muy general y elegante, esto es, por medio del excelente teorema de *Taylor* : pero al mismo tiempo manifiesto otras sendas que conducen al mismo resultado, ya sea por medio de consideraciones particulares sobre los límites de las razones entre las diferencias de las cantidades; ó ya deduciendo dichos resultados por medio del referido teorema aplicado de diferentes modos.

Mi parcialidad al método de los límites para demostrar el cálculo diferencial, y manifestar sus aplicaciones, no me dispensaba de dar á conocer dicho cálculo fundado en la consideracion de las cantidades infinitamente pequeñas; porque la mayor parte de las obras que se han escrito sobre estos cálculos los tratan por el método de los infinitamente pequeños; los resultados que se obtienen por este método son idénticamente los mismos que se encuentran por el de los límites, ó por qualquiera otro; y finalmente, es preciso convenir en que el referido método lleva ventaja á todos los demas, en quanto á la brevedad con que demuestra la teoría de los cálculos diferencial é integral, y la facilidad que proporciona en todas las aplicaciones de estos cálculos. Por estas razones no solamente expongo los principios del cálculo diferencial segun el método de los infinitamente pequeños, y el modo con que se aplica á la teórica de las líneas curvas, sino que tambien manifiesto del modo mas evidente con algunos exemplos, que los supuestos que se hacen en las aplicaciones de dicho cálculo son conformes á los que se hacen en la teoría para diferenciar las cantidades, de cuya conformidad depende la exâctitud de los resultados; que las operaciones analíticas de este método, tanto en la parte

teórica como en las aplicaciones, son en el fondo las mismas que se practican en el de los límites; que la diferencia de estos dos métodos consiste únicamente en las expresiones y en la metafísica particular de cada uno de ellos; y por consiguiente que ámbos métodos deben necesariamente conducir á un mismo resultado. Esta comparacion práctica del método de los infinitamente pequeños con el de los límites me parece muy propia para dar una idea clara de ámbos métodos, y para manifestar que, segun dixe antes, su diferencia consiste únicamente en los principios metafísicos sobre los quales se funda cada uno de ellos.

En todas las aplicaciones del cálculo diferencial supongo tácitamente que se conocen los principios teóricos del ramo que se trata; y como no hay obra alguna en nuestro idioma que enseñe la teórica de las superficies curvas y de las curvas de doble curvatura, he juzgado á propósito dar los principios teóricos de dichas superficies y curvas, siguiendo las ideas de *Euler*, *Clairaut* y *Monge*.

Antes de aplicar el cálculo diferencial á la mecánica me ha parecido conveniente exponer brevemente los primeros principios de esta ciencia, y demostrar las proposiciones relativas al movimiento uniformemente acelerado por un método mas claro y geométrico que el que se sigue comunmente.

He tenido presentes para escribir estas Instituciones las principales obras de los cálculos diferencial é integral que se han publicado en las naciones cultas; y he tomado de cada una de ellas lo que me ha parecido mejor, segun el plan que me habia formado; pero he puesto particular cuidado en coordinarlo todo de modo que formase un tratado regular, siguiendo siempre el mismo método, órden y estilo. He procurado, y tal vez habré conseguido, simplificar ó mejorar las demostraciones de algunas proposiciones importantes, y conciliar la claridad con la concision, indicando solamente los principios, y dando por sentadas todas las proposiciones de la análisis algebráica, geometría y trigonometría que debe saber el que se dedica al estudio de los cálculos diferencial é integral. Si este primer fruto de mis estudios en las ciencias matemáticas y físico-matemáticas mereciese algun aprecio entre los sabios, será un estímulo poderoso para continuar mis tareas, y completar esta obra con la publicacion del cálculo integral.

TABLA

De las materias que contiene este tomo primero.

CAPITULO I.

DEL METODO DE LOS LIMITES.

CAPITULO II.

DEL CALCULO DE LAS DIFERENCIAS.

CAPITULO III.

DE LOS PRINCIPIOS DEL CALCULO DIFERENCIAL.

CAPITULO IV.

APLICACIONES DE LOS PRINCIPIOS DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA ANALISIS, Y A LA GEOMETRIA.

Del modo de transformar las funciones en series.

De las funciones que en ciertos casos particulares se presentan baxo las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, y $\infty-\infty$.

CAPITULO V.

APLICACION DE LOS PRINCIPIOS DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA TEORICA DE LAS LINEAS CURVAS.

De las tangentes, subtangentes, normales y subnormales de las líneas curvas.

De los puntos múltiplos de las líneas curvas.

De los puntos de inflexîon y de retroceso.

De la curvatura de las líneas en sus diferentes puntos; del radio de curvatura; y de las evolutas.

CAPITULO VI.

DEL CALCULO DIFERENCIAL EN GENERAL.

CAPITULO VII.

CONTINUACION DE LAS APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA ANALISIS Y A LA GEOMETRIA.

Continuacion de las aplicaciones del cálculo diferencial á la teórica de las líneas curvas.

CAPITULO VIII.

PRINCIPIOS DE LA TEORICA DE LAS SUPERFICIES CURVAS, Y DE LAS CURVAS DE DOBLE CURVATURA; Y APLICACION DEL CALCULO DIFERENCIAL A ESTA TEORICA.

Aplicacion del cálculo diferencial á la teórica de las superficies curvas, y de las curvas de doble curvatura.

CAPITULO IX.

APLICACION DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA MECANICA.

INSTITUCIONES

DEL CÁLCULO DIFERENCIAL É INTEGRAL.

CAPITULO I.

Del método de los límites.

1. En algunos ramos de las ciencias matemáticas, como son la Arismética, el Algebra &c., se supone que las cantidades tienen un valor fixo y determinado; unas como a, b, c &c. son *dadas* ó *conocidas*; y otras como x, y, z &c. se llaman *incógnitas*, y el objeto principal de dichas ciencias es determinar las relaciones que dichas cantidades tienen entre sí, suponiéndolas sujetas á ciertas condiciones; pero en los cálculos de que vamos á tratar se supone que ciertas cantidades como x, y, z &c. varian ó pueden variar continuamente, y que por esta razon se llaman *variables*; y otras como a, b, c &c. conservan siempre el mismo valor en el curso de las operaciones, y se llaman *constantes*. La naturaleza de la qüestion que se trata hará conocer las cantidades que se deben considerar como variables, y las que se deben mirar como constantes.

2. Toda expresion analítica, compuesta de un modo qualquiera de una ó muchas cantidades variables y de cantidades constantes, se llama *funcion* de dichas variables y de constantes, ó simplemente *funcion* de las variables que contiene.

Así las expresiones $ax-bx^2$, $ax^2-b\sqrt{(c-x^3)}$, $\frac{ax+b}{cx+d}$, &c. son funciones de la variable x; y $ax-xy$, $axy-b\sqrt{(y^2-ax)}$, $\frac{ax^2+by^2}{cx+dy}$ &c. lo son de x é y.

Si las expresiones $ax-bx^2$, $ax-xy$ las representásemos respectivamente por z y u, de manera que $z=ax-bx^2$, $u=ax-xy$, diriamos que z es funcion de x, y u de x é y.

Muchas veces sucede que no se conocen inmediatamente las funciones z ó u, y que para determinarlas es necesario practicar algunas operaciones; como, por exemplo, si z y u fuesen dadas por las equaciones $z^3+ax^3z^2+bxz+cx=0$, $u^3+ay^3+bxu+cxuy+dx^2y=0$. En este caso z es funcion de x, y u de x é y; pero estas funciones se llaman *implícitas* para distinguirlas de las antecedentes, que se llaman *explícitas*.

Las funciones se dividen tambien en *enteras* y *fraccionarias*; en aquellas los exponentes de las variables son positivos en todos sus términos, y no debe haber en ellas denominador alguno, á menos de componerse únicamente de cantidades constantes; y en las otras alguna de las variables está ó puede estar en alguno de los denominadores.

3. Quando todos los términos de una funcion entera de dos ó mas variables son de una misma dimension n; la funcion se llama *homogénea* y de dimension n; y si en una funcion fraccionaria, cuyos términos se han reducido á un denominador comun, es este una funcion homogénea de dimension m y el numerador de dimension n; dicha funcion fraccionaria se llama *homogénea* y de dimension $n-m$. Hemos de advertir que en las dimensiones de los varios términos no se cuentan las de las cantidades constantes. Por exemplo, si a, b, c &c. son cantidades constantes, $ax^3+by^3+cxy^2+fx^2\sqrt{(x^2+xy)}$ es una funcion homogénea de dimension 3; y la funcion $\frac{ax^3-x^2y+by^2\sqrt{(x^2-xy)}}{fx+\sqrt{(x^2+y^2)}}$ es tambien homogénea, y su dimension $=3-1=2$. Si m fuese $=n$, como en $\frac{ax^2-by^2}{(x\sqrt{x^2}-xy)}$, la funcion se llama *de dimension nula*; y si $m>n$, la dimension de la funcion será *negativa*; por exemplo, la dimension de la funcion $\frac{ax+y}{x^4+by^3x}$ es -3.

4. Para representar de un modo general una funcion qualquiera de una cantidad variable; la escribirémos dentro de un paréntesis, anteponiéndole la letra ó característica f. Así la expresion $f(x)$ representará una funcion qualquiera de x, sea la que fuere.

Del mismo modo representarémos por $f(x, y)$ una funcion qualquiera de las variables independientes x é y; por $f(x, y, z)$ una funcion qualquiera de las variables independientes x, y, z; y así de las demas funciones.

5. Una cantidad variable, que decrece indefinidamente, lo puede hacer de dos modos diferentes, que considerarémos sucesivamente.

1º Una cantidad variable, que disminuye continuamente de un modo arbitrario, ó segun una ley dada, puede llegar en muchos casos no solamente á ser cero, sino tambien negativa; pues aunque una cantidad luego que llega á ser cero cesa de exîstir, conviene muchas veces considerarla como nula ó cero para determinar el valor de otras cantidades que dependen de aquella, y que en este supuesto suelen tener un valor determinado; y para otros muchos fines que seria largo explicar. La doctrina de las líneas curvas es una prueba contínua de esta verdad, que manifestarémos con un exemplo.

Sea la curva representada en la fig. 35 la *conchoide de Nicomedes*; A el orígen de las abscisas AP, que llamarémos x; PM una ordenada qualquiera y; será su equacion $x^2y^2=(b+y)^2(a^2-y^2)$; la qual manifiesta evidentemente que la abscisa x no solamente puede decrecer y llegar á ser cero, sino tambien pasar al otro lado del punto A respecto del punto D, ó ser negativa, pues en ambos casos los valores de y serán reales. Si suponemos $x=0$ en dicha equacion, se reducirá á $(b+y)^2(a^2-y^2)=0$, que tiene quatro raices, á saber,

$a, -a, -b, -b$; la primera pertenece al punto F del ramo superior $C'FC$ de la curva; la segunda al punto f del ramo inferior; y las dos raices iguales $-b, -b$ indican el punto E, que aunque pertenece á la curva propuesta está separado de su curso. (*Véase el núm. 149.*) El cero se puede considerar en este caso como el orígen comun de las cantidades positivas y negativas. Pasemos ahora á considerar otro modo con que las cantidades pueden decrecer indefinidamente, del qual resultará otro respeto con que se puede considerar el cero.

2º Supongamos que a sea una cantidad constante, y x una variable que aumente continuamente segun el órden de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5 &c. al infinito; la fraccion $\frac{a}{x}$ decrecerá continuamente, y podra llegar á ser menor que qualquiera cantidad asignable ó dada; pero jamas llegará á ser nula ó cero. Lo mismo sucederia si en vez de suponer que x aumenta segun el órden natural de los números 1, 2, 3, 4, 5 &c., supusiésemos que creciere indefinidamente de otro modo qualquiera hasta que pudiese llegar á ser mayor que una cantidad dada. He aquí pues otro modo con que una cantidad decrece, acercándose mas y mas á cero, sin que jamas pueda llegar á ser nula, el qual pertenece particularmente al *método de los límites*; y por lo mismo considerarémos en adelante de este modo las cantidades variables que decrecen sin fin. Esto entendido:

6. *Si una cantidad varía acercándose continuamente á otra cantidad ó expresion, de manera que la diferencia entre esta y aquella pueda llegar á ser menor que qualquiera cantidad dada, por pequeña que sea, sin que jamas pueda llegar á serle igual; dicha cantidad ó expresion se llama el límite de la otra.* Si suponemos, por exemplo, que la cantidad ó razon $\frac{a}{x}$ decrece indefinidamente acercándose á cero del modo que acabamos de decir; será 0 el límite de la cantidad ó razon $\frac{a}{x}$. *Así, cero es el límite de las cantidades ó razones que decrecen indefinidamente, ó sin fin*; y este es el otro respeto con que se puede mirar el cero.

Al contrario: si suponemos que x disminuye continuamente hasta que llegue á ser menor que qualquiera cantidad dada; la cantidad ó razon $\frac{a}{x}$ crecerá continuamente, y podrá llegar á ser mayor que qualquiera cantidad por grande que sea; pero como x jamas puede llegar á ser igual á su límite cero, tampoco $\frac{a}{x}$ podrá llegar á ser igual á $\frac{a}{0}$. Por lo que la expresion $\frac{a}{0}$ ó (haciendo $a=1$) $\frac{1}{0}$ se puede considerar como una especie de límite de las cantidades que crecen indefinidamente, ó sin fin; y sirve para denotar *que la cantidad* *que representa, crece sin fin, y puede llegar á ser mayor que qualquiera cantidad dada por grande que sea.*

7. Hemos dicho que la expresion $\frac{1}{0}$ se puede considerar como una especie de límite de las cantidades que crecen sin fin; porque á la verdad no se puede considerar este límite qual le hemos definido (*núm.* 6.); esto es, que no se puede suponer que una cantidad que crece sin fin llegará á un valor tal, que la diferencia entre dicho valor y $\frac{1}{0}$ será menor que una cantidad dada por pequeña que sea; antes al contrario, por denotar $\frac{1}{0}$ una cantidad que crece sin fin, de modo que puede llegar á ser mayor que qualquiera cantidad dada, se sigue que una cantidad, por grande que sea, jamas se puede suponer que se acerca á $\frac{1}{0}$, de modo que su diferencia sea igual á una cantidad dada K, por grande que esta sea; porque si esto fuese posible, llamando a dicha cantidad, tendriamos $a+K=\frac{1}{0}$, cuya equacion manifiesta que la cantidad que $\frac{1}{0}$ representa, solo puede crecer hasta llegar á ser igual á $a+K$, lo qual es contra lo supuesto.

8. Algunos autores llaman á la expresion $\frac{1}{0}$ *cantidad infinita*, y al cero ó $\frac{1}{\frac{1}{0}}$ *cantidad infinitamente pequeña.* Pero esta definicion es sumamente imperfecta, y enteramente opuesta á la idea que tenemos de la cantidad. Esta por su naturaleza es siempre finita y capaz de aumento y de diminucion, y por consiguiente en el instante que se supone infinita ó cero cesa de exîstir. Cero ni es cantidad, ni puede tener valor alguno; y segun acabamos de ver, solo se puede considerar ó como el orígen de las cantidades positivas y negativas, ó como el límite de las cantidades ó razones que decrecen indefinidamente, ó sin fin. Del mismo modo la expresion $\frac{1}{0}$ no es una cantidad, sino un signo para denotar las cantidades ó razones que crecen sin fin; de manera que si en virtud de algun supuesto particular una cantidad variable ó una funcion qualquiera se transforma en $\frac{1}{0}$, no dirémos que dicha variable ó funcion es en este supuesto infinita, sino que crece indefinidamente, y puede llegar á ser mayor que qualquiera cantidad dada por grande que sea. Sin embargo se suele decir que dicha expresion es igual al infinito, y se representa tambien por ∞; de manera que $\frac{1}{0}=\infty=$ infinito; *pero por el infinito no hemos de entender una cantidad realmente infinita, sino una cantidad que crece indefinidamente, y que por lo mismo puede llegar á ser mayor que qualquiera cantidad dada por grande que sea; ó bien sea el límite de las cantidades que crecen indefinidamente, ó sin fin;* y en este sentido le considerarémos siempre en estas Instituciones.

9. Para ilustrar lo que acabamos de decir acerca del infinito, supondrémos que en el triángulo ABC (*fig. 1*), el ángulo B y el lado AB permanecen constantes, mientras que el ángulo BAC y el lado BC aumentan continuamente; y tírese AD paralela á BC. Tendrémos *sen.* C, ó su igual *sen.* $(B+BAC) : AB :: sen.\,BAC$, $:BC=\frac{AB.\,sen.\,BAC}{sen.\,(B+BAC)}$. Sentado esto, es evidente que quanto mayor sea el ángulo BAC, tanto mayor será el lado BC, el qual puede crecer indefinidamente; de manera que si en lugar del ángulo BAC substituimos *su límite* BAD, en la expresion antecedente de BC resultará el límite de esta cantidad. Pero como $B+BAD=180°$, será su seno $=0$, y por consiguiente $BC=\frac{AB\ sen.\,BAD}{0}$, ó haciendo $AB\ sen.\,BAD=1$, $BC=\frac{1}{0}$; cuyo resultado manifiesta, que quando el ángulo BAC crece acercándose á su límite BAD; el lado BC crece indefinidamente, y puede llegar á ser mayor que qualquiera cantidad dada por grande que sea.

Si reducimos la fraccion $\frac{a}{a-x}$ á una serie de monomios; será $\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+$ &c. continuada indefinidamente; y suponiendo $x=a$, tendrémos $\frac{a}{0}=1+1+1+1+$ &c., cuya equacion manifiesta que la expresion $\frac{a}{0}$ es igual á la suma de la serie $1+1+1+1+1+$ &c., la qual crece indefinidamente, y por consiguiente puede llegar á ser mayor que qualquiera cantidad dada por grande que sea.

10. Aunque las cantidades ó razones, consideradas en general, pueden aumentar ó disminuir indefinidamente ó sin fin, y tienen por límites $\frac{1}{0}$ y cero; las funciones de las cantidades suelen tener por límites cantidades finitas y determinadas; esto sucede quando una funcion en su forma actual, ó en otra que se le puede dar, se compone de una parte constante, y de otra variable que disminuye continuamente acercándose á su límite cero, en cuyo caso la parte constante es el límite de dicha funcion.

Si suponemos, por exemplo, que a es una cantidad constante, y x é y dos variables que decrecen continuamente acercándose al límite 0; a será evidentemente el límite de las funciones $a-x$, $a+y$.

La funcion $\frac{ax}{a+x}$, en la qual se supone que x aumenta indefinidamente, tiene tambien por límite a; el qual se descubre fácilmente dándole la forma $a-\frac{a^2}{a+x}$; pues es evidente que quanto mayor fuere x, tanto menor será $\frac{a^2}{a+x}$, sin que jamas pueda llegar á ser cero; por consiguiente o será el límite de la funcion $\frac{a^2}{a+x}$, y a el de $a-\frac{a^2}{a+x}$, ó de su igual $\frac{ax}{a+x}$.

Si tuviésemos la progresion geométrica decreciente $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ &c., y tomamos la suma de un número qualquiera x de sus términos; quanto mayor sea este número, tanto mas se acercará dicha suma á valer 2, *á cuya cantidad se podrá acercar quanto se quisiere sin que jamas pueda igualarla*; y por consiguiente será 2 el límite de la suma de dicha progresion.

Esto se puede tambien manifestar considerando la suma general $2-\frac{1}{2^{x-1}}$ de la referida progresion; pues es evidente, que quanto mayor sea x, tanto menor será la fraccion $\frac{1}{2^{x-1}}$, la qual puede llegar á ser menor que qualquiera cantidad por pequeña que sea, pero jamas será $=0$; será pues o el límite de $\frac{1}{2^{x-1}}$, y 2 el de la funcion $2-\frac{1}{2^{x-1}}$, ó el de la suma de la progresion $1\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ &c. que dicha funcion representa.

11. Si en el círculo *ABDEFG* (*fig.* 2.) inscribimos un polígono qualquiera *ABDEFG*, quanto mayor fuere el número de sus lados, tanto mas su circunferencia y su superficie se acercarán á confundirse respectivamente con la circunferencia y superficie del círculo; de manera que las diferencias respectivas podrán ser menores que qualesquiera cantidades dadas, pero jamas serán nulas. Lo mismo dirémos de la circunferencia y superficie del polígono circunscrito *HIKLMN*; de donde concluirémos *que la circunferencia del círculo es el límite de las circunferencias de los polígonos que se le pueden inscribir y circunscribir; y su superficie es tambien el límite de las superficies de los mismos polígonos.*

La funcion $\frac{a+bx}{c+fx}$ incluye dos límites distintos; uno para quando la variable x decrece continuamente acercándose á su límite o, y otro relativo al supuesto de que la misma variable aumenta acercándose continuamente al límite $\frac{1}{0}$. En el primer caso la funcion propuesta se acercará quanto se quisiere á $\frac{a}{c}$ sin que jamas llegue á serle igual, y por consiguiente $\frac{a}{c}$ *será su límite.* En el segundo caso transformarémos dicha funcion en $\frac{b+\frac{a}{x}}{f+\frac{c}{x}}$, la qual se acercará tanto mas á $\frac{b}{f}$ quanto mas se acercare x á su límite $\frac{1}{0}$; de manera que la diferencia entre $\frac{b+\frac{a}{x}}{f+\frac{c}{x}}$ y $\frac{b}{f}$ podrá ser menor que qualquiera cantidad dada; y por lo mismo $\frac{b}{f}$ *será el límite de la funcion propuesta.*

12. Si suponemos que α, β, γ &c. son cantidades constantes positivas, a, b, c &c. constantes positivas ó negativas, y que la variable x decrece indefinidamente, acercándose á su límite cero, en la serie $ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+$ &c., será o el límite de la suma de dicha serie; por consiguiente, si en el mismo supuesto tuviésemos la funcion $A+ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+$ &c., representando A una cantidad qualquiera que no incluye x, seria A su límite.

Tambien es evidente que si x aumenta sin fin en la serie $\frac{a}{x^{\alpha}}+\frac{b}{x^{\beta}}+\frac{c}{x^{\gamma}}+$ &c., será igualmente A el límite de $A+\frac{a}{x^{\alpha}}+\frac{b}{x^{\beta}}+\frac{c}{x^{\gamma}}+$ &c.

13. De estos principios se infiere, que si tuviésemos una serie ordenada relativamente á las potencias de x, comenzando por la menor como $ax^{\alpha}+bx^{\beta}+cx^{\gamma}+$ &c., en la qual es $\alpha<\beta<\gamma<$ &c., y supusiésemos que x decrece indefinidamente; el primer término ax^{α} llegará á ser mayor que la suma de todos los demas. En efecto, dando á la serie propuesta la forma $x^{\alpha}(a+bx^{\beta-\alpha}+cx^{\gamma-\alpha}+$ &c.), verémos claramente, que si x disminuye indefinidamente, la expresion $bx^{\beta-\alpha}+cx^{\gamma-\alpha}+$ &c., llegará á ser menor que la cantidad dada a; por consiguiente, llamando k el valor de x, en este caso tendrémos $a>bk^{\beta-\alpha}+ck^{\gamma-\alpha}+$ &c., y $ak^{\alpha}>bk^{\beta}+ck^{\gamma}+$ &c.

Del mismo modo probariamos que el término bx^{β} llegará tambien á ser mayor que la suma $cx^{\gamma}+dx^{\sigma}+$ &c. de todos los que le siguen; y en general que x *decreciendo indefinidamente; un término qualquiera de la serie* $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ &c. *llegará á ser mayor que la suma de todos los que le siguen.*

14. Si en vez de suponer que las varias potencias de x van aumentando en la serie $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ &c., y que x decrece indefinidamente; se supone que estas potencias disminuyen continuamente; de modo que $\alpha > \beta > \gamma >$ &c., y que x aumenta sin fin, demostrarémos con igual facilidad que el primer término ax^α llegará á ser mayor que la suma de todos los demas. Para ello le darémos esta forma $x^\alpha \left(a + \frac{b}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{c}{x^{\alpha-\gamma}} + \text{\&c.} \right)$, la qual manifiesta evidentemente que creciendo x indefinidamente, $\frac{b}{x^{\alpha-\beta}} + \frac{c}{x^{\alpha-\gamma}} +$ &c. llegará á ser menor que la cantidad dada a; y si llamamos k el valor de x que la hace tal, tendrémos $a > \frac{b}{k^{\alpha-\beta}} + \frac{c}{k^{\alpha-\gamma}} +$ &c., y $ak^\alpha > bk^\beta + ck^\gamma +$ &c.

Del mismo modo probariamos que en este mismo supuesto *un término qualquiera de la serie* $ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma +$ &c. *llegará á ser mayor que la suma de todos los que le siguen.*

15. De la definicion que hemos dado del límite de una cantidad (*núm. 6.*) se sigue que:

1º *Dos cantidades que son el límite de una misma cantidad ó funcion, son necesariamente iguales.* Pues si entre dichas cantidades hubiese alguna diferencia k, la cantidad ó funcion, de la qual son límite, no podria acercarse á una de ellas mas que de la misma diferencia k, lo qual es contra dicha definicion.

2º *Si dos cantidades ó funciones que varian, acercándose continuamente á sus límites respectivos, conservan siempre una razon constante como de* a *á* b; *esta razon será tambien la de los límites de dichas cantidades ó funciones*: cuya proposicion es evidente por sí misma.

16. *Si* a *es límite de dos cantidades variables* x, y, *y* b *el de otras dos variables* z, u; *y se supone que mientras estas variables se acercan á sus límites respectivos* a, b, *sea siempre* u $=$ *ó* $>$ y, *y* x $=$ *ó* $>$ z, *los límites* a, b *serán iguales.*

Pues siendo siempre en el primer caso $u = y$, y $z = x$, esta proposicion no es otra cosa en dicho caso que la del núm. 15 puesta en otros términos.

En el segundo caso supondrémos $\frac{u}{y} = 1 + \alpha$, $\frac{x}{z} = 1 + \beta$, siendo α, β cantidades variables positivas, cuyos valores respectivos

en el límite son α' β'; y para conocer la razon de los límites harémos x é y iguales á a; y z, u iguales á b, y tendrémos $\frac{b}{a} = 1 + \alpha'$, y $\frac{a}{b} = 1 + \beta'$, resultado imposible, á menos de ser $\alpha' = 0 = \beta'$; harémos pues este supuesto, y tendrémos del mismo modo que en el caso antecedente $a = b$.

Estas tres proposiciones forman la base del método de los límites empleado por los antiguos Matemáticos, entre los quales se distinguió *Archîmedes*: por su medio descubrió este célebre Geómetra varias verdades importantes de la Geometría elemental y práctica, y resolvió los problemas mas famosos de dicha ciencia, los quales le diéron una fama inmortal, y le han merecido en todos tiempos los mayores elogios. El camino que generalmente sigue para demostrar sus proposiciones consiste en comparar la cantidad cuyo valor quiere determinar, á otra cantidad cuyo valor es conocido, cuyas cantidades son á un mismo tiempo los límites de otras; y luego, por medio de las proposiciones antecedentes y del método de exâucion, concluye que dichos límites ó son iguales, ó tienen entre sí una razon dada. Los lectores que desearen conocer los descubrimientos que hizo *Archîmedes* por medio de estos principios pueden leer sus obras publicadas é ilustradas por el *Doctor Barrow* (1); y sobre todo el excelente tratado de la Esfera y del Cilindro: nosotros nos ceñirémos por ahora á manifestar su uso para demostrar dos teoremas de la Geometría elemental.

17. Supongamos que *HIKLMN* (*fig.* 2) sea un polígono regular circunscrito á un círculo *ABDEFG*, y *NOP* un triángulo rectángulo cuya base *NP* sea igual á la circunferencia de dicho círculo, y la altura *PO* igual al radio *CE*: esto supuesto, la superficie del polígono *HIKLMN* es igual á la de un triángulo cuya base sea igual á la circunferencia de dicho polígono, y la altura igual al radio *CE*; y como la circunferencia del círculo es el límite de la del polígono, la superficie de este será mayor que la del triángulo *NOP*; pero aumentando el número de los lados, la diferencia entre ambas superficies llegará á ser menor que qualquiera cantidad dada, por pequeña que sea, y por consiguiente el triángulo *NOP* será el límite del referido polígono; pero la superficie del círculo es tambien el límite de la del polígono: luego será tambien igual á la de dicho triángulo, y por consiguiente *igual al producto del radio* CE *multiplicado por la mitad de su circunferencia.*

Esto se puede demostrar mas breve y fácilmente representando las cantidades por medio de los signos algebráicos del modo siguiente. Llamemos a la circunferencia del círculo *ABDEFG*, cuyo ra-

(1) *Archimedis opera &c. per Is. Barrow, exprofessorem &c.* Londres 1675, un vol. en 4.º

dio $CE = r$; y siendo esta circunferencia el límite de la del polígono $HIKLMN$, podrémos representar la de este por $a + x$, siendo x una cantidad variable que decrece indefinidamente, acercándose á su límite cero; y su superficie será $= r \frac{a+x}{2}$, cuyo límite es $r \frac{a}{2}$; pero la superficie del círculo es tambien el límite de la de dicho polígono: luego (n. 15.) será dicha superficie $= r \frac{a}{2} =$ al producto del radio por la mitad de la circunferencia.

18. Sea ADF (*fig. 3*) un semicírculo cuyo diámetro $AF = a$; AHF una semielipse, cuyo exe mayor $= a$, y el menor $= b$; $ABDEF$ un polígono inscrito en el círculo; y baxando las perpendiculares BK, DC &c. al diámetro AF que encuentra la elipse en los puntos G, H &c.; inscríbase en ella el polígono correspondiente $AGHIF$. Sentado esto, tendrémos por las propiedades del círculo y de la elipse $KB : KG :: a : b :: CD : CH$, y por consiguiente $KB + CD : KG + CH :: a : b$; de donde inferirémos que el triángulo ABK es al triángulo AGK; el trapecio $KBDC$ al trapecio $KGHC$; y en general el polígono inscrito en el círculo al polígono correspondiente inscrito en la elipse, como a es á b; y como esta razon se conserva constantemente mientras que aumentando indefinidamente el número de los lados de dichos polígonos, se acercan estos á sus límites respectivos; concluirémos (núm. 15.) que será tambien $a : b$ la razon de dichos límites, esto es, la del círculo ADF á la elipse AHF.

19. *Si* a *es límite de dos cantidades variables* X *y* Z, *y* b *de la variable* Y; *y se supone que mientras estas tres cantidades se acercan á sus límites respectivos sea siempre* $Z > Y > X$, *los límites* a, b *serán iguales.* Porque si suponemos $\frac{z}{y} = 1 + \alpha$, $\frac{y}{x} = 1 = \beta$, y substituimos en lugar de las cantidades variables sus límites, inferirémos del mismo modo que en el n. 16. $\frac{a}{b} = 1 + \alpha'$, $\frac{b}{a} = 1 + \beta'$; y que estas equaciones no pueden verificarse á menos de ser $\alpha' = 0 = \beta'$, y por consiguiente $a = b$.

Si una de las cantidades X ó Z fuese constante é igual al límite de la otra, tendriamos $Z > Y > a$, ó $a > Y > X$, y por consiguiente $a = b$.

Esta proposicion es mas sencilla que la del núm. 16., por cuya razon la emplearémos en su lugar en las aplicaciones del cálculo Diferencial y del cálculo Integral.

20. *Si suponemos que* a *es el límite de la cantidad variable* X, *y* b *el de* $Y > X$; *y que mientras estas cantidades se acercan á sus límites respectivos, su diferencia* Y — X *decrece continuamente hasta llegar á ser menor que qualquiera cantidad dada por pequeña que sea, los límites* a, b *serán iguales.* Porque si hubiese entre ellos una diferencia δ; la diferencia Y — X, que decrece continuamente, jamas llegaria á ser menor que la cantidad dada δ, lo qual es contra el supuesto.

Sobre estas dos proposiciones fundarémos la mayor parte de las aplicaciones de los cálculos *Diferencial* é *Integral*: por lo comun se pueden emplear ambas en un mismo caso, y conducen al mismo resultado, por caminos igualmente directos y seguros, conforme lo manifestarémos en las aplicaciones de dichos cálculos.

21. Las dos proposiciones (núm. 15.), aunque sumamente sencillas, son la base de toda la Geometría transcendente. En ellas se fundan igualmente el método que *Newton* llama de las primeras y últimas razones (1); el de las fluxîones (2); y otros descubrimientos modernos. Y finalmente, combinándolas con el cálculo de las diferencias, manifestó *Mr. d'Alembert* (3) la verdadera metafísica de los cálculos diferencial é integral, fundándoles de este modo sobre principios simples é incontestables, y evitando las ideas vagas y obscuras de las cantidades infinitas é infinitamente pequeñas de que hacen uso *Leinitz* (4), *el Marques del Hospital* (5) y otros autores para demostrar dichos cálculos; como tambien la consideracion del movimiento empleada por *Newton*, *Maclaurin* (6) y otros, la qual es enteramente extraña á la Análisis y á la Geometría; lo que manifestarémos luego que hayamos establecido los principios *del cálculo de las Diferencias.*

CAPITULO II.

Del cálculo de las diferencias.

22 S*i una cantidad variable* x *aumenta ó disminuye, y llega á ser* x ± k; *la cantidad indeterminada* k, *de la qual ha aumentado ó disminuido, se llama* el incremento, la diferencia finita, *ó simplemente* la diferencia *de dicha variable.* Del mismo modo *si variando y llega á ser* y ± h, *la cantidad indeterminada* h *se llama* la diferencia de y, cuyas diferencias serán positivas ó negativas, segun x é y hubiesen aumentado ó disminuido. Pero como muchas veces se ofrece considerar en un mismo problema las diferencias de muchas variables y de sus funciones, á fin de expresarlas con mas sencillez y guardar uniformidad, se hace uso de un signo general Δ, anteponiéndole á la variable cuya diferencia se quiere expresar: así en lugar de $\pm k$ se suele escribir $\pm \Delta x$, y en lugar de $\pm h$, $\pm \Delta y$; cuyo signo tiene ademas la ventaja de manifestar inmediatamente el orígen x ó y de dichas diferencias.

(1) *Princ. mat. de la Fil. Nat. lib. 1, sec. 1.*
(2) *Id. lib. 2, sec. 2.*
(3) *Enciclopedia metód.*
(4) *Commercium Epistolicum.*
(5) *Analisis de los infinitamente pequeños.*
(6) *Tratado de las fluxîones.*

23. Puesto que las cantidades constantes no aumentan ni disminuyen, y que cero no es cantidad; *la diferencia de una cantidad constante ó de o es cero.*

Por consiguiente *la diferencia de una cantidad variable, y la diferencia de la suma de dicha variable y una constante qualquiera son iguales*: por exemplo $\Delta(x \pm a) = \Delta x$.

24. Las varias potencias $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^4$ &c. de la diferencia de una cantidad variable x, se expresan mas sencillamente por Δx^2, Δx^3 &c.; y para que estas expresiones no se tomen por las diferencias respectivas de x^2, x^3, x^4 &c., se denotan estas por $\Delta . x^2$, $\Delta . x^3$, $\Delta . x^4$ &c.

25 Problema 1.º *Suponiendo que en una funcion qualquiera* f(x) *de la variable* x, *que representarémos tambien por* y; x *varía y se transforma en* x $\pm$ Δx; *hallar la diferencia de la funcion.*

Resolucion. Es evidente que si x se transforma en $x \pm \Delta x$, la funcion y variará y se transformará en $f(x \pm \Delta x)$, representando esta expresion la misma funcion de $x \pm \Delta x$, que y ó $f(x)$ lo es de x: por consiguiente, haciendo para abreviar $f(x \pm \Delta x) = y'$, y restando y de esta nueva funcion, resultará Δy ó la diferencia de la funcion propuesta.

Exemplo 1.º Sea la funcion propuesta $x^2 + ax + b = y = f(x)$; será $f(x \pm \Delta x) = y' = (x \pm \Delta x)^2 + a(x \pm \Delta x) + b$, y $\Delta y = y' - y = x^2 \pm 2x\Delta x + \Delta x^2 + ax \pm a\Delta x + b - x^2 - ax - b = \pm(a + 2x)\Delta x + \Delta x^2$.

Exemplo 2.º Sea $y = ax^n$; será $y = f(x \pm \Delta x) = a(x \pm \Delta x)^n$; y desenvolviendo esta expresion por medio de la fórmula *del binomio de Newton*, tendrémos $y' = a\left(x^n \pm nx^{n-1}\Delta x + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 \pm n\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.\right)$, de donde inferirémos $\Delta y = a\left(\pm nx^{n-1}\Delta x + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 \pm n\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \&c.\right)$.

Exemplo 3.º Sea $y = \frac{ax}{b+x}$; tendrémos $y' = a\frac{x \pm \Delta x}{b + x \pm \Delta x} = a\left(\frac{x}{b+x} \pm \frac{b\Delta x}{(b+x)^2} - \frac{b\Delta x^2}{(b+x)^3} \mp \&c.\right)$, y $\Delta y = a\left(\pm\frac{b\Delta x}{(b+x)^2} - \frac{b\Delta x^2}{(b+x)^3} \mp \&c.\right)$.

Exemplo 4.º Si fuese $y = \sqrt{(ax - x^2)} = x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}$, sería y'

$= (x \pm \Delta x)^{\frac{1}{2}} . (a - x \mp \Delta x)^{\frac{1}{2}}$; pero si consideramos $a - x$ como un solo término, tendrémos por la fórmula del binomio de Newton $(a - x \mp \Delta x)^{\frac{1}{2}} = (a-x)^{\frac{1}{2}} \mp \frac{\Delta x}{2(a-x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x^2}{8(a-x)^{\frac{3}{2}}} \mp \frac{\Delta x^3}{16(a-x)^{\frac{5}{2}}} - \&c.$; y como $(x \pm \Delta x)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\Delta x}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x^2}{8x^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{\Delta x^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \&c.$, será $y' = \left[(a-x)^{\frac{1}{2}} \mp \frac{\Delta x}{2(a-x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x^2}{8(a-x)^{\frac{3}{2}}} \mp \&c.\right]\left(x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\Delta x}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{\Delta x^2}{8x^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{\Delta x^3}{16x^{\frac{5}{2}}} - \&c.\right)$

$$= x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} \left.\begin{aligned} &\mp \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2(a-x)^{\frac{1}{2}}} . \Delta x - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{8(a-x)^{\frac{3}{2}}} . \Delta x^2 \pm \&c. \\ &\mp \frac{(a-x)^{\frac{1}{2}}}{2x^{\frac{1}{2}}} \qquad - \frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}} \qquad - \&c. \\ &\qquad\qquad\qquad - \frac{(a-x)^{\frac{1}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}} \qquad \pm \&c. \end{aligned}\right\} =$$

(reduciendo á un comun denominador los coeficientes de Δx y sus potencias) $x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{(a-2x)\Delta x}{2x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2\Delta x^2}{8x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}} \pm \&c.$,

de donde inferirémos $\Delta y = \pm\frac{(a-2x)\Delta x}{2x^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2\Delta x^2}{8x^{\frac{3}{2}}(a-x)^{\frac{3}{2}}} \pm \&c.$

Exemplo 5.º Sea y el *log. natural* ó *Neperiano* de x; será $y' = log.(x \pm \Delta x) = log. x\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = log. x \pm log.\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right)$, y por consiguiente $\Delta y = log.\left(1 \pm \frac{\Delta x}{x}\right) = \pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \&c.$ (1)

En el sistema de los logaritmos de *Neper* el *módulo* es $= 1$; pero si se pidiese la diferencia Δy relativa á otro sistema qualquiera, cuyo *módulo* $= M$, seria $\Delta y = M\left(\pm\frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \&c.\right)$.

Exemplo 6.º Si fuese $y = a^x$, seria $y' = a^{x \pm \Delta x} = a^x . a^{\pm\Delta x}$; pero $a^{\pm\Delta x} = 1 \pm \Delta x . log. a + \frac{\Delta x^2}{2}(log. a)^2 \pm \frac{\Delta x^3}{2 . 3}(log. a)^3 + \&c.$: luego $y' = a^x\left(1 \pm \Delta x . log. a + \frac{\Delta x^2}{2}(log. a)^2 \pm \frac{\Delta x^3}{2 . 3}(log. a)^3 + \&c.\right)$,

(1) *Véase Euler Introd. in Anal. infinit. t. 1, pág. 89, 92; y Lagrange Théorie des fonctions analitiques, pág. 18, 19, 20.*

y $\Delta y = a^x \left(\pm \Delta x \,.\, log.\, a + \frac{\Delta x^2}{2} (log.\, a)^2 \pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} (log.\, a)^3 + \&c. \right)$

Exemplo 7º Sea $y = sen.\, x$, será $y' = sen.\, (x \pm \Delta x) = sen.\, x\; cos.\, \Delta x \pm cos.\, x\; sen.\, \Delta x$; pero suponiendo el radio $= 1$, es $cos.\, \Delta x = 1 - \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\Delta x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \&c.$; $sen.\, \Delta x = \Delta x - \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} + \frac{\Delta x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \&c.$: luego $y' = sen.\, x \pm \Delta x\; cos.\, x - \frac{\Delta x^2}{2} sen.\, x \mp \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} cos.\, x + \&c.$; y $\Delta y = \pm \Delta x\; cos.\, x - \frac{\Delta x^2}{2} sen.\, x \mp \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} cos.\, x. + \&c.$

Exemplo 8º Si fuese $y = cos.\, x$, seria $y' = cos.\, (x \pm \Delta x) = cos.\, x\; cos.\, \Delta x \mp sen.\, x\; sen.\, \Delta x = cos.\, x \mp \Delta x\; sen.\, x - \frac{\Delta x^2}{2} cos.\, x \pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} sen.\, x + \&c.$, de donde infeririamos $\Delta y = \mp \Delta x\; sen.\, x - \frac{\Delta x^2}{2} cos.\, x \pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} sen.\, x + \&c.$ (1)

26. Estos exemplos manifiestan que

1º *La diferencia de una funcion de una variable es igual al agregado de las diferencias de cada uno de sus términos.*

2º *La diferencia del producto de una cantidad constante multiplicada por una variable, es igual á la cantidad constante multiplicada por la diferencia de la variable*: por exemplo $\Delta \,.\, ay = a\Delta y$.

3º *Si* y *es una funcion qualquiera* f (x) *de una variable* x, *y substituimos en ella* x $\pm \Delta$x *en lugar de* x, *podrémos suponer* f (x $\pm \Delta$x) $=$ y' $=$ y $+ \mathrm{A}\Delta\mathrm{x} + \mathrm{B}\Delta\mathrm{x}^2 + \mathrm{C}\Delta\mathrm{x}^3 + \mathrm{D}\Delta\mathrm{x}^4 + \&c.$, *y por consiguiente* Δy $=$ y' $-$ y $= \mathrm{A}\Delta\mathrm{x} + \mathrm{B}\Delta\mathrm{x}^2 + \mathrm{C}\Delta\mathrm{x}^3 + \mathrm{D}\Delta\mathrm{x}^4 + \&c.$ *representando* A, B, C, D &c. *funciones indeterminadas de* x.

27. Las funciones y, A, B, C &c. tienen entre sí una dependencia recíproca; de manera que deduciendo A de la funcion primitiva y, B se deriva de A por una operacion semejante, y del mismo modo se deduce C de B &c.; pero como para manifestar como se derivan sucesivamente unas de otras estas funciones nos seria forzoso el empeñarnos en cálculos prolixos, lo reservarémos para quando tratemos del cálculo Diferencial, por medio del qual se demuestra esta proposicion con suma brevedad y sencillez.

28. Supongamos que z sea una funcion qualquiera $f(x, y)$ de dos cantidades variables independientes x é y: en este supuesto z puede variar por tres causas: 1ª por la variacion sola de x, que se transforma en $x \pm \Delta x$: 2ª porque y solamente varía, y se transforma en $y + \Delta y$: 3ª en conseqüencia de variar á un mismo tiempo ambas cantidades x é y. En el primero y segundo caso las diferencias de z que resultan se llaman *parciales*, y se expresan respectivamente por $\frac{\Delta z}{\Delta x} \Delta x$, $\frac{\Delta z}{\Delta y} \Delta y$; y en el tercer caso resultará la diferencia Δz.

(1) *Euler*, *pág.* 99: *Lagrange*, *pág.* 22, 23, 24.

Como en los dos primeros casos solamente varía en la funcion z una de las cantidades x ó y, su diferencia se hallará en virtud del problema antecedente; y por lo que toca al tercero, si llamamos z' la funcion $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ que resulta substituyendo en z, $x + \Delta x$ por x, y $y + \Delta y$ por y, la diferencia de z ó Δz será igual á $z' - z$.

Suponemos para mayor claridad y sencillez que las dos variables x é y aumentan á un mismo tiempo; pues en caso que alguna de ellas disminuya, bastará hacer preceder su diferencia del signo $-$.

Exemplo 1º Sea $z = ax + by + cxy$, será $z' = a(x + \Delta x) + b(y + \Delta y) + c(x + \Delta x)(y + \Delta y) = ax + by + cxy + (a + cy)\Delta x + (b + cx)\Delta y + c\Delta x\Delta y$, y $\Delta z = z' - z = (a + cy)\Delta x + (b + cx)\Delta y + c\Delta x\Delta y$.

Exemplo 2º Sea $z = a(y - b)^2 - x(x - a)^2$, será $z' = a(y + \Delta y - b)^2 - (x + \Delta x)(x + \Delta x - a)^2 = a(y - b)^2 - x(x - a)^2 - (3x^2 - 4ax + a^2)\Delta x + 2a(y - b)\Delta y + (2a - 3x)\Delta x^2 + a\Delta y^2 - \Delta x^3$; de donde inferirémos $\Delta z\,(= z' - z) = -(3x^2 - 4ax + a^2)\Delta x + 2a(y - b)\Delta y + (2a - 3x)\Delta x^2 + a\Delta y^2 - \Delta x^3$.

Exemplo 3º Si fuese $z = x^4 - ayx^2 + by^3$, seria $z' = (x + \Delta x)^4 - a(y + \Delta y)(x + \Delta x)^2 + b(y + \Delta y)^3 = x^4 - ayx^2 + by^3 + 2x(2x^2 - ay)\Delta x + (3by^2 - ax^2)\Delta y + (6x^2 - ay)\Delta x^2 - 2ax\Delta x\Delta y + 3by\Delta y^2 + 4x\Delta x^3 - a\Delta x^2\Delta y + b\Delta y^3 + \Delta x^4$, y por consiguiente $\Delta z = 2x(2x^2 - ay)\Delta x + (3by^2 - ax^2)\Delta y + (6x^2 - ay)\Delta x^2 - 2ax\Delta x\Delta y + 3by\Delta y^2 + 4x\Delta x^3 - a\Delta x^2\Delta y + b\Delta y^3 + \Delta x^4$.

29. De estos exemplos se infiere que

1º *La diferencia de una funcion de dos variables es igual á la diferencia de cada uno de sus términos.*

2º *Siendo* z *una funcion qualquiera* f (x, y) *de dos variables independientes* x *é* y, *y* A, B, C &c. *funciones indeterminadas de las mismas variables; se puede suponer* z' $=$ f (x $+ \Delta$x, y $+ \Delta$y) $=$ z $+ \mathrm{A}\Delta\mathrm{x} + \mathrm{B}\Delta\mathrm{y} + \mathrm{C}\Delta\mathrm{x}^2 + \mathrm{D}\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y} + \mathrm{E}\Delta\mathrm{y}^2 + \&c.$; *y* $\Delta\mathrm{z} = \mathrm{A}\Delta\mathrm{x} + \mathrm{B}\Delta\mathrm{y} + \mathrm{C}\Delta\mathrm{x}^2 + \mathrm{D}\Delta\mathrm{x}\Delta\mathrm{y} + \mathrm{E}\Delta\mathrm{y}^2 + \&c.$

3º *Si en la expresion antecedente de* Δz *hacemos* Δy $= 0$, *resultará la diferencia de* z *relativa á la variacion de* x; *y será* $\frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta \mathrm{x}} \Delta\mathrm{x} = \mathrm{A}\Delta\mathrm{x} + \mathrm{C}\Delta\mathrm{x}^2 + \mathrm{F}\Delta\mathrm{x}^3 + \&c.$; *y si en dicha expresion se supone* Δx $= 0$, *resultará* $\frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta \mathrm{y}} \Delta\mathrm{y} = \mathrm{B}\Delta\mathrm{y} + \mathrm{E}\Delta\mathrm{y}^2 + \&c.$

30. Los coeficientes A, B, C, D &c. de las varias potencias y productos de Δx y Δy en la diferencia de una funcion z de dos variables independientes, tienen del mismo modo que en la diferencia

de una funcion de una variable (núm. 27.) una dependencia recíproca: de manera, que conociendo la funcion z; A y B se derivan de z; C, D, E de A y B &c. por medio de operaciones semejantes, lo que manifestarémos en el cálculo Diferencial quando considerémos las funciones de dos cantidades variables.

31. Si entre las cantidades variables x é y hubiese una relacion expresada por la equacion $z = f(x, y) = 0$; x seria funcion de y, y recíprocamente y funcion de x; de donde se sigue, que si x, por exemplo, varía y se transforma en $x + \Delta x$, y variará necesariamente; de manera que llamando Δy el incremento ó diferencia que resulta en y en virtud de la diferencia Δx que x adquiere, los nuevos valores $x + \Delta x$, é $y + \Delta y$, de x é y deberán necesariamente satisfacer á la equacion $z = 0$, tendrémos pues $z' = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, ó $z + A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x\Delta y + D\Delta y^2 +$ &c. $= 0$; y como por el supuesto es $z = 0$, será tambien $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x\Delta y + D\Delta y^2 +$ &c $= 0$, ó $\Delta z = 0$, cuya equacion expresará la relacion entre Δx y Δy; de donde inferirémos, que esta relacion se hallará tomando la diferencia de z como si las variables x é y fuesen independientes, y haciendo luego $\Delta z = 0$.

Si, por exemplo, la relacion entre x é y fuese dada por la equacion $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$; la equacion (A)........ $-(3x^2 - 4ax + a^2)\Delta x + 2a(y-b)\Delta y + (2a - 3x)\Delta x^2 + a\Delta y^2 - \Delta x^3 = 0$ expresaria la razon ó relacion entre las diferencias Δx y Δy; de modo que seria (A')..

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2 + (3x - 2a)\Delta x - a\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y + \Delta x^2}{2a(y-b)}.$$

Y si la relacion entre las mismas variables fuese dada por la equacion $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$, la relacion entre sus diferencias seria expresada por (B)... $2x(2x^2 - ay)\Delta x + (3by^2 - ax^2)\Delta y + (6x^2 - ay)\Delta x^2 - 2ax\Delta x\Delta y + 3by\Delta y^2 + 4x\Delta x^3 - a\Delta x^2\Delta y + b\Delta y^3 + \Delta x^4 = 0$, de cuya equacion se puede inferir (B')..

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x(ay - 2x^2) - (6x^2 - ay)\Delta x + 2ax\Delta y - 3by\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y - 4x\Delta x^2 + a\Delta x\Delta y - b\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y^2 - \Delta x^3}{3by^2 - ax^2}.$$

En general dada la relacion entre x é y por una equacion qualquiera, y siendo A, B, C &c. funciones indeterminadas de x é y, la relacion entre las diferencias Δy, Δx se podrá expresar por (C).......... $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y +$ &c. $= 0$, y la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ por (C')...

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{A + C\Delta x + D\Delta y + E\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y + F\Delta x^2 + G\Delta x\Delta y + \&c.}{B}.$$

32. En estos tres exemplos hemos deducido la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre las diferencias de x y de y, de la equacion que expresa la relacion entre estas diferencias, prescindiendo de los valores particulares que se pueden dar á x ó á y. Quando se ofrece determinar dicha razon suponiendo que x ó y tienen ciertos valores determinados; suele suceder que la substitucion de estos valores hacen infinita la razon $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, la qual sin embargo debe ser finita. Supongamos por exemplo que siendo dada la relacion entre x é y por la equacion $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$ se pida la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre sus diferencias, en el supuesto de $x = a$. La equacion $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$ manifiesta que quando $x = a$, y es igual á b; por consiguiente substituyendo estos valores en la equacion (A'), la reducirán á $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$; pero es evidente que en el supuesto de $x = a$ é $y = b$, el coeficiente de Δx y el de Δy en la equacion (A) son cero: esta equacion se reduce á $a\Delta y^2 - a\Delta x^2 - \Delta x^3 = 0$, y la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será dada por la equacion del segundo grado $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \frac{\Delta x}{a}$. No es pues de extrañar que en el supuesto de $x = a$, la equacion (A') nos dé un valor falso de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, puesto que en dicha equacion el conseqüente de la razon $\Delta y : \Delta x$ es la cantidad $2a(y-b)$, que por el supuesto de ser $x = a$ no debe exîstir. Si dada la equacion $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$ entre x é y, y la equacion (B) entre sus diferencias, se pidiese la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ suponiendo $x = 0$; como en este caso seria tambien $y = 0$, la equacion (B) se reduciria á $b\Delta y^3 - a\Delta y\Delta x^2 + \Delta x^4 = 0$, ó á $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^3 - \frac{a}{b}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{b}$, equacion de tercer grado, cuya resolucion dará los valores de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. La equacion (B) nos hubiera dado $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ por la misma razon que en el exemplo antecedente.

33. El camino que hemos seguido para hallar la diferencia de una funcion de dos cantidades variables manifiesta el que se debe seguir para hallar la de una funcion de tres ó mas variables, por lo que sin detenernos mas en este asunto pasarémos á considerar las diferencias de un órden superior.

34. Para manifestar como se originan estas diferencias supondrémos que haciendo variar sucesivamente una funcion de una ó muchas variables, que llamarémos z, sean z', z'', z''', z^{IV} &c. los valores consecutivos de z quando aumenta, y ${}'z$, ${}''z$, ${}'''z$, ${}^{IV}z$ &c. quan-

do disminuye; de manera que &c. ${}^{IV}z$, $'''z$, $''z$, $'z$, z, z', z'', z''', z^{IV} &c. forme una serie de términos sucesivos. Es constante que (núm. 28.) $z' - z = \Delta z$, $z'' - z' = \Delta z'$, $z''' - z'' = \Delta z''$, $z^{IV} - z''' = \Delta z'''$ &c.; $z - {}'z = \Delta {}'z$, ${}'z - {}''z = \Delta {}''z$, ${}''z - {}'''z = \Delta {}'''z$ &c.; sabemos igualmente (núm. 29.) que $\Delta z' - \Delta z = \Delta(z' - z)$, será pues $\Delta z' - \Delta z = \Delta\Delta z$.

35. Esta diferencia de la diferencia de una funcion z de una ó muchas variables se llama *la diferencia segunda de* z, y se representa mas sencillamente por $\Delta^2 z$.

Por consiguiente $\Delta z' - \Delta z = \Delta^2 z$, $\Delta z'' - \Delta z' = \Delta^2 z'$, $\Delta z''' - \Delta z'' = \Delta^2 z''$, $\Delta z^{IV} - \Delta z''' = \Delta^2 z'''$ &c.; $\Delta z - \Delta {}'z = \Delta^{2\prime} z$, $\Delta {}'z - \Delta {}''z = \Delta^{2\prime\prime} z$, $\Delta {}''z - \Delta {}'''z = \Delta^{2\prime\prime\prime} z$, &c.

36. Si restamos la diferencia segunda de z, de la diferencia segunda de z', tendrémos $\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^2(z' - z) = \Delta^2\Delta z$.

La diferencia segunda de la diferencia de z se llama *la diferencia tercera de* z, y se denota por $\Delta^3 z$; y siguiendo el mismo órden, la diferencia quarta se denota por $\Delta^4 z$, la diferencia quinta por $\Delta^5 z$, y en general la diferencia *n* por $\overset{n}{\Delta} z$.

Luego $\Delta^2 z' - \Delta^2 z = \Delta^3 z$, $\Delta^2 z'' - \Delta^2 z' = \Delta^3 z'$, $\Delta^2 z''' - \Delta^2 z'' = \Delta^3 z''$ &c.; $\Delta^2 z - \Delta^{2\prime} z = \Delta^{3\prime} z$, $\Delta^{2\prime} z - \Delta^{2\prime\prime} z = \Delta^{3\prime\prime} z$ &c.; y del mismo modo $\Delta^3 z' - \Delta^3 z = \Delta^4 z$, $\Delta^3 z'' - \Delta^3 z' = \Delta^4 z'$ &c.; $\Delta^3 z - \Delta^{3\prime} z = \Delta^{4\prime} z$, $\Delta^{3\prime} z - \Delta^3 z = \Delta^{4\prime} z$ &c.; $\Delta^4 z' - \Delta^4 z$ $\Delta^5 z$ &c.

37. Es claro que si la diferencia Δz fuese $= 0$; seria $z' = z$.

38. Si z fuese funcion de una sola variable x, hallariamos z' substituyendo en lugar de x, $x' = x + \Delta x$; $\Delta z'$, substituyendo en Δz, $x' = x + \Delta x$ en lugar de x; y $\Delta x' = \Delta x + \Delta^2 x$ en lugar de Δx; $\Delta^2 z'$, substituyendo en $\Delta^2 z$ por x, $x' = x + \Delta x$, por Δx, $\Delta x' = \Delta x + \Delta^2 x$; y por $\Delta^2 x$, $\Delta^2 x' = \Delta^2 x + \Delta^3 x$ &c.

39. Si en una funcion z de dos variables independientes x é y substituimos en lugar de x, $x' = x + \Delta x$, y en lugar de y, $y' = y + \Delta y$, resultará z'; substituyendo en Δz, $x' = x + \Delta x$ por x, $y' = y + \Delta y$ por y, $\Delta x' = \Delta x + \Delta^2 x$ por Δx, y $\Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y$ por Δy, resultará $\Delta z'$; si substituimos en $\Delta^2 z$, $x' = x + \Delta x$ en lugar de x, $y' = y + \Delta y$ en lugar de y, $\Delta x' = \Delta x + \Delta^2 x$ en lugar de Δx, $\Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y$ en lugar de Δy, $\Delta^2 x' = \Delta^2 x + \Delta^3 x$ en lugar de $\Delta^2 x$; y $\Delta^2 y' = \Delta^2 y + \Delta^3 y$ en lugar de $\Delta^2 y$, resultará $\Delta^2 z'$; y así en adelante.

40. Con la mira de simplificar los cálculos se suele suponer que una de las cantidades variables varía uniformemente; ó lo que es lo mismo, que su diferencia primera es constante, y esta sirve de término de comparacion, al qual se refieren las diferencias de las demas cantidades. Nosotros supondrémos Δx constante en los cálculos siguientes.

41. Problema 3º *Dada una funcion qualquiera de* x; *hallar sus diferencias segunda, tercera &c.*

Resolucion. Una vez que suponemos Δx constante; si llamamos y la funcion propuesta, y substituimos en su diferencia Δy, $x + \Delta x$ en lugar de x; resultará (núm. 38.) $\Delta y'$, de la qual restando Δy, se tendrá (núm. 34.) $\Delta^2 y$. Substituyendo en $\Delta^2 y$ por x, $x + \Delta x$, tendrémos $\Delta^2 y'$, y restando $\Delta^2 y$, resultará (núm. 36.) $\Delta^3 y$; y así en adelante.

Sea por exemplo $y = ax^n$; será (núm. 25.) $\Delta y = a\left(nx^{n-1}\Delta x + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + n\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}x^{n-3}\Delta x^3 + \text{\&c.}\right)$; y restando esta cantidad de la que resulta substituyendo en ella $x + \Delta x$ en lugar de x, y reduciendo tendrémos $\Delta^2 y = a[n(n-1)x^{n-2}\Delta x^2 + n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3 + \text{\&c.}]$; haciendo la misma operacion con esta cantidad que con la antecedente, hallarémos $\Delta^3 y = a[n(n-1)(n-2)x^{n-3}\Delta x^3 + \frac{3}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4}\Delta x^4 + \text{\&c.}]$; y del mismo modo se hallarán las demas diferencias.

42. Problema 4º *Dada una funcion de dos variables independientes* x *é* y, *que llamarémos* z; *hallar las diferencias segunda, tercera &c.*

Resolucion. Si substituimos en Δz, $x + \Delta x$ en lugar de x; $y + \Delta y$, en lugar de y; y $\Delta y + \Delta^2 y$ en lugar de Δy; resultará (núm. 39.) $\Delta z'$; de la qual, restando Δz, tendrémos $\Delta^2 z$ (núm. 35.). Substituyendo en $\Delta^2 z$ por x, $x + \Delta x$; por y, $y + \Delta y$; por Δy, $\Delta y + \Delta^2 y$; y por $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y + \Delta^3 y$, resultará $\Delta^2 z'$; de la qual, si quitamos $\Delta^2 z$, la resta será $\Delta^3 z$; y así de las demas diferencias.

Exemplo. Sea $z = y(a + x)$, será $\Delta z = (a + x + \Delta x)\Delta y + y\Delta x$, $\Delta z' = (a + x + 2\Delta x)(\Delta y + \Delta^2 y) + (y + \Delta y)\Delta x = (a + x + 3\Delta x)\Delta y + (a + x + 2\Delta x)\Delta^2 y + y\Delta x$, y $\Delta^2 z$ $(= \Delta z' - \Delta z) = 2\Delta x\Delta y + (a + x + 2\Delta x)\Delta^2 y$; $\Delta^2 z' = 2\Delta x(\Delta y + \Delta^2 y) + (a + x + 3\Delta x)(\Delta^2 y + \Delta^3 y) = 2\Delta x\Delta y + (a + x + 5\Delta x)\Delta^2 y + (a + x + 3\Delta x)\Delta^3 y$, y $\Delta^3 z = 3\Delta x\Delta^2 y + (a + x + 3\Delta x)\Delta^3 y$ &c.

Los problemas que hemos resuelto, aunque sencillos, manifiestan como se deben resolver otros mas complicados, y que toda la dificultad de estos se reducirá á que los cálculos serán mas largos.

43. La serie de equaciones (núm. 34.) dan $z'' = \Delta z' + z'$, $z' = \Delta z + z$, $z = \Delta {}'z + {}'z$, ${}'z = \Delta {}''z + {}''z$, ${}''z = \Delta {}'''z$, $+ {}'''z$ ${}'''z = \Delta^{IV}z + {}^{IV}z$ &c.; de donde inferirémos haciendo las substituciones convenientes ${}''z = \Delta {}'''z + \Delta^{IV}z + \text{\&c.} = \Delta({}'''z + {}^{IV}z + \text{\&c.})$; ${}'z = \Delta {}''z + \Delta {}'''z + \Delta^{IV}z + \text{\&c.} = \Delta({}''z + {}'''z + {}^{IV}z + \text{\&c.})$;

$z = \Delta' z + \Delta'' z + \Delta''' z + \Delta^{IV} z +$ &c. $= \Delta\,('z + ''z + '''z + {}^{IV}z$ $+$ &c.), &c., esto es,

Un término qualquiera de la serie &c., ${}^{IV}z$, $'''z$, $''z$, $'z$, z, z', z'' &c. *es igual á la diferencia de la suma de todos los que le preceden.*

44. La misma serie de equaciones, y las del núm. 35. y siguientes, dan $z' = z + \Delta z$, $\Delta z = \Delta z + \Delta^2 z$, $\Delta^2 z' = \Delta^2 z + \Delta^3 z$, $\Delta^3 z' = \Delta^3 z + \Delta^4 z$ &c.; $z = z' + \Delta z'$, $\Delta z'' = \Delta z' + \Delta^2 z'$, $\Delta^2 z'' = \Delta^2 z' + \Delta^3 z'$ &c.; $z'' = z' + \Delta z'$, $\Delta z'' = \Delta z' + \Delta^2 z'$, $\Delta^2 z'' = \Delta^2 z + \Delta^3 z$ &c.; $z''' = z'' + \Delta z''$, $\Delta z''' = \Delta z'' + \Delta^2 z''$, &c.; $z^{IV} = z''' + \Delta z'''$ &c.; &c., y substituyendo por z', z'', z''' &c., y sus diferencias, los valores correspondientes en z y sus diferencias, tendrémos $z'' = z + 2\Delta z + \Delta^2 z$, $z''' = z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$, $z^{IV} = z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z$; del mismo modo hallariamos $z^{V} = z + 5\Delta z + 10\Delta^2 z + 10\Delta^3 z + 5\Delta^4 z + \Delta^5 z$ &c.; y observando que los coeficientes de las diferencias sucesivas de z son n, $n\dfrac{n-1}{2}$, $n\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-2}{3}$ &c., denotando n el número de términos que preceden un término qualquiera en la serie z, z', z'', z''', z^{IV} &c.; concluirémos que

Si llamamos Z *un término qualquiera de la serie* z, z', z'', z''', z^{IV} &c.; *y* n *el número de los términos que le preceden; será* $Z = z + n\,\Delta z + n\dfrac{n-1}{2}\,\Delta^2 z + n\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-2}{3}\,\Delta^3 z + n\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-2}{3}\cdot\dfrac{n-3}{4}\,\Delta^4 z +$ &c.

45. Si z fuese funcion de una sola variable x, y substituyésemos sucesivamente en ella $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$ &c. en lugar de x; resultaria z', z'', z''' &c. (n. 34. y 40.); de manera que llamando Z un término qualquiera de la serie z, z', z'', z''' &c., y n el número de los términos que le preceden, hallariamos Z substituyendo en z, $x + n\Delta x$ por x: de esto y del teorema precedente inferirémos que

Si en una funcion qualquiera $f(x)$ *de una variable* x, *que representarémos tambien por* y; *se substituye* $x + n\Delta x$ *en lugar de* x; *será* $f(x + n\Delta x) = y + n\Delta y + n\dfrac{n-1}{2}\,\Delta^2 y + n\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-2}{3}\,\Delta^3 y +$ &c.

46. Sea AMC (*fig. 4.*) una curva qualquiera referida á los exes AD, AH; AP, una abscisa, que llamarémos x; PM, la ordenada correspondiente $y = f(x)$; $PP^{n'}$ un intervalo constante $é = k$; $PP' = P'P'' = P''P''' =$ &c. $= \Delta x$, la diferencia arbitraria de x; y

$PP^{n'} = k = n\Delta x$, representando n un número entero ó fraccionario: si por los puntos P', P'', P'''.... $P^{n'}$ se retiran las ordenadas y', y'', y'''....... Y; será $y' = f(x + \Delta x)$, $y'' = f(x + 2\Delta x)$......... $Y = f(x + n\Delta x) = y + n\Delta y + n\dfrac{n-1}{2}\,\Delta^2 y + n\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-2}{3}\,\Delta^3 y +$ &c.; y transformando esta equacion en $f(x + k) = y + n\Delta x\dfrac{\Delta y}{\Delta x} + n\Delta x\dfrac{n\Delta x - \Delta x}{2}\cdot\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + n\Delta x\cdot\dfrac{n\Delta x - \Delta x}{2}\cdot\dfrac{n\Delta x - 2\Delta x}{3}\cdot\dfrac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} +$ &c. $= y + k\dfrac{\Delta y}{\Delta x} + k\dfrac{k - \Delta x}{2}\cdot\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + k\dfrac{k - \Delta x}{2}\cdot\dfrac{k - 2\Delta x}{3}\cdot\dfrac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} +$ &c., concluirémos que

Si en una funcion qualquiera $f(x) = y$ *de la variable* x, *que crece uniformemente, se substituye* $x + k$ *en lugar de* x; *será* $f(x + k) = y + k\dfrac{\Delta y}{\Delta x} + \dfrac{k(k - \Delta x)}{2}\cdot\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + \dfrac{k(k - \Delta x)}{2}\,\dfrac{(k - 2\Delta x)}{3}\cdot\dfrac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} +$ &c.

47. Hemos supuesto iguales los intervalos PP', $P'P''$ &c., ó lo que es lo mismo Δx constante; porque este supuesto simplifica los cálculos, y da á la fórmula antecedente la forma conveniente para el uso que de ella harémos en el cálculo diferencial; pero en otras ocasiones conviene suponer iguales los intervalos mM', mM' &c., ó lo que es lo mismo Δy constante: ambos supuestos conducirán al mismo resultado, y solo se debe dar la preferencia al que facilita mas las operaciones, ó es mas conveniente á las miras que se llevan. Pero no se pueden suponer constantes á un mismo tiempo Δx, y Δy; porque siendo en este caso iguales entre sí PP', $P'P''$ &c. igualmente que mM, mM &c., los triángulos MmM', $Mm'M''$ &c. serán iguales y semejantes; los ángulos M, M', M'' &c. serán tambien iguales; por consiguiente la línea AMC será recta, y $f(x) = y$ no seria una funcion qualquiera de x segun hemos supuesto, sino una funcion determinada de la forma $a + bx$.

48. De la serie de equaciones (núm. 44.) $z' = z + \Delta z$, $z'' = z + 2\Delta z + \Delta^2 z$, $z''' = z + 3\Delta z + 3\Delta^2 z + \Delta^3 z$, $z^{IV} = z + 4\Delta z + 6\Delta^2 z + 4\Delta^3 z + \Delta^4 z$ &c.; se infiere $z + z' = 2z + \Delta z$, $z + z' + z'' = 3z + 3\Delta z + \Delta^2 z$, $z + z' + z'' + z''' = 4z + 6\Delta z + 4\Delta^2 z + \Delta^3 z$, $z + z' + z'' + z''' + z^{IV} = 5z + 10\Delta z + 10\Delta^2 z + 5\Delta^3 z + \Delta^4 z$; y en general

Llamando S *la suma de un número* n *de términos de la serie* z, z', z'', z''', z^{IV} &c.; *será* $S = nz + n\dfrac{n-1}{2}\,\Delta z + n\dfrac{n-1}{2}\cdot\dfrac{n-2}{3}$

$\Delta^2 z + n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} \Delta^3 z + n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} . \frac{n-4}{5} \Delta^4 z +$ &c.

49. La misma serie de equaciones da $\Delta z = z' - z$, $\Delta^2 z = z'' - z - 2\Delta z = z'' - 2z' + z$, $\Delta^3 z = z''' - 3\Delta^2 z - 3\Delta z - z = z''' - 3z'' + 3z' - z$; del mismo modo hallariamos $\Delta^4 z = z^{IV} - 4z''' + 6z'' - 4z' + z$, $\Delta^5 z = z^{V} - 5z^{IV} + 10z''' - 10z'' + 5z' - z$, y en general $\Delta^n z = z^{n'} - n z^{(n-1)'} + n \frac{(n-1)}{2} z^{(n-2)'} - n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} z^{(n-3)'} +$ &c. (a).

50. Si alguna de las diferencias de la serie z, z', z'', z''', z^{IV} &c. fuese constante, las diferencias siguientes serian nulas (núm. 23.), y las expresiones de Z (núm. 44.) y de S se compondrian de un número limitado de términos; por consiguiente las equaciones $Z = z + n\Delta z + n \frac{n-1}{2} \Delta^2 z +$ &c., $S = nz + n \frac{n-1}{2} \Delta z + n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} \Delta^2 z +$ &c., pueden servir de fórmulas generales para hallar *el término general*, y *la suma general* de una serie *algebráica* qualquiera.

Exemplo 1º Supongamos que se nos pida el término general, y la suma general de la serie algebráica 3, 5, 10, 18, 29, 43, 60 &c.; comparándola á la serie z, z', z'', z''' &c., tendrémos $z = 3$, $z' = 5$, $z'' = 10$ &c., $\Delta z = (z' - z) = 2$, $\Delta^2 z = (z'' - 2z' + z) = 3$, $\Delta^3 z = 0$, $\Delta^4 z = 0$ &c.; y substituyendo estos valores en las fórmulas generales, resultará el término general $Z = 3 + 2n + 3n \frac{n-1}{2} = 3 + \frac{n + 3n^2}{2}$, y la suma general $S = 3n + 2n \frac{n-1}{2} + 3n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} = 3n - \frac{n^2 - n^3}{2}$.

Exemplo 2º Sea 1, 4, 9, 16, 25, 36 &c. la serie propuesta; será $z = 1$, $z' = 4$, $z'' = 9$ &c.; $\Delta z = 3$, $\Delta^2 z = 2$, $\Delta^3 z$ y las diferencias siguientes nulas; tendrémos pues el término general $Z = 1 + 3n + 2n \frac{n-1}{2} = 1 + 2n + n^2 = (1 + n)^2$, y la suma general $S = n + 3n \frac{n-1}{2} + 2n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6}$.

Exemplo 3º Si fuese 1, 2, 6, 17, 39, 76, 132 &c. la serie propuesta; seria $z = 1$, $z' = 2$, $z'' = 6$, $z''' = 17$; $\Delta z = 1$, $\Delta^2 z = 3$,

(a) *Las expresiones* n', (n − 1)', (n − 2)' &c. *denotan el número de acentos que lleva* Z.

$\Delta^3 z = 4$, $\Delta^4 z = 0$, $\Delta^5 z = 0$ &c.; por consiguiente, el término general Z seria $= 1 + n + 3n \frac{n-1}{2} + 4n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} = 1 + \frac{5n - 3n^2 + 4n^3}{6}$, y la suma general $S = n + n \frac{n-1}{2} + 3n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} + 4n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} = \frac{3n + 5n^2 - 3n^3 + n^4}{6}$.

Exemplo 4º Sea dada la serie 1, 8, 27, 64, 125, 216 &c. de los números cúbicos; tendrémos $z = 1$, $z' = 8$, $z'' = 27$, $z''' = 64$ &c.; $\Delta z = 7$, $\Delta^2 z = 12$, $\Delta^3 z = 6$, $\Delta^4 z$ y las diferencias siguientes $= 0$; de donde inferirémos el término general $Z = 1 + 7n + 12n \frac{n-1}{2} + 6n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} = 1 + 3n + 3n^2 + n^3 = (1 + n)^3$, y la suma general $S = n + 7n \frac{n-1}{2} + 12n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} + 6n \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} . \frac{n-3}{4} = \frac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4}$.

51. El método inverso de las diferencias tiene por objeto el determinar las funciones de las cantidades variables por medio de las diferencias de las variables, y es uno de los ramos mas difíciles de las Matemáticas puras; por cuyo motivo dexarémos para otra ocasion el considerar dicho cálculo y algunas de sus aplicaciones; y ahora pasarémos á tratar *del cálculo diferencial.*

CAPITULO III.

De los principios del cálculo diferencial.

52. *Llámase cálculo diferencial el que enseña á hallar los límites de las razones entre las diferencias de las cantidades variables.* Así los que tuviesen presentes los principios que hemos dado del cálculo de las diferencias, y lo que hemos dicho sobre los límites de las cantidades; comprehenderán fácilmente la naturaleza del cálculo diferencial, cuyo objeto es resolver este problema general: *dada la razon de las cantidades variables, hallar el límite de la razon entre sus diferencias.* Problema que puede resolverse en todos los casos, sea la que fuere la naturaleza de las cantidades que se consideren; conforme vamos á manifestar, dividiéndole para mayor órden y facilidad en otros problemas particulares.

53. Problema I. *Dada una funcion qualquiera* f(x) *de la variable* x, *que llamarémos* y; *hallar el límite de la razon entre sus diferencias* Δy, Δx.

Resolucion. Sea la que fuere la funcion propuesta y; su diferencia Δy se puede representar (núm. 26.) por $A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 +$ &c.; y por consiguiente la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ por $A + B\Delta x$

$+ C\Delta x^2 + D\Delta x^3 +$ &c.; de manera, que haciendo $B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 +$ &c. $= \pm X$, tendrémos generalmente $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A \pm X$. Esto supuesto; como la diferencia Δx es factor comun de todos los términos de X; si suponemos que dicha diferencia disminuye continuamente acercándose á su límite cero; X disminuirá tambien, y se acercará continuamente á cero; por consiguiente, haciendo decrecer continuamente Δx, la razon $A \pm X$ podrá acercarse quanto se quisiere á A, sin que jamas llegue á igualarla: luego (núm. 6.) A es el límite de $A \pm X$, ó de la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$: de donde se deduce esta regla general. *Hállese la razon entre las diferencias de* y *y de* x, *y haciendo en ella* $\Delta x = 0$, *se tendrá el límite.*

En los exemplos siguientes supondrémos positiva la diferencia Δx.

Exemplo 1º Sea $y = x^2 + ax + b$: la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre las diferencias de y y de x será (núm. 25.) $a + 2x + \Delta x$, y haciendo $\Delta x = 0$, resultará $a + 2x$, límite de la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; por manera que *límite de* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a + 2x$.

54. Los límites de las razones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ &c. entre las diferencias de las cantidades, se representan respectivamente por $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ &c.; pero hemos de advertir que la expresion $\frac{dy}{dx}$ no representa la razon de una cantidad dy á otra cantidad dx como se podria creer; pues las expresiones dy, dx no las consideramos como cantidades, sino como signos que puestos baxo las formas $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$, denotan los límites de las razones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ entre las diferencias de x y de y: así en el exemplo antecedente escribirémos $\frac{dy}{dx}$ en lugar de *límite de* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y tendrémos $\frac{dy}{dx} = a + 2x$.

Exemplo 2º Si fuere $y = ax^n$; seria (n. 25.) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,(nx^{n-1} + n\,\frac{n-1}{2}\,x^{n-2}\,\Delta x + n\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\,x^{n-3}\,\Delta x^2 +$ &c. $)$; y por consiguiente $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$.

Exemplo 3º Sea $y = \frac{ax}{b+x}$: la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ será igual á $a\left(\frac{b}{(b+x)^2} - \frac{b\Delta x}{(b+x)^3} -\right.$ &c. $\left.\right)$; y el límite $\frac{dy}{dx} = \frac{ab}{(b+x)^2}$.

Exemplo 4º Sea $y = \sqrt{(ax - x^2)}$: tendrémos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a-2x}{2(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2\Delta x}{8(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}} +$ &c.; y $\frac{dy}{dx} = \frac{a-2x}{2(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Exemplo 5º Si fuese $y = \log. x$; seria $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} - \frac{\Delta x}{2x^2} + \frac{\Delta x^2}{3x^3} -$ &c.; y por consiguiente $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$.

Exemplo 6º Si y fuese igual á a^x, tendriamos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\,(\log. a + \frac{\Delta x}{2}\,(\log. a)^2 +$ &c. $)$, $y\frac{dy}{dx} = a^x \log. a$.

Exemplo 7º Sea $y = \text{sen. } x$; será la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de la diferencia del seno á la del arco igual á $\cos. x - \frac{\Delta x}{2}\,\text{sen. } x - \frac{\Delta x^2}{2\cdot 3}\cos. x +$ &c.; y por consiguiente su límite $\frac{dy}{dx} = \cos. x$.

Exemplo 8º Si fuese $y = \cos. x$; seria $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\,\text{sen. } x - \frac{\Delta x}{2}\cos. x + \frac{\Delta x^2}{2\cdot 3}\,\text{sen. } x +$ &c., y por consiguiente $\frac{dy}{dx} = -\,\text{sen. } x$.

55. Problema II. *Dada la relacion entre las cantidades variables* x *é* y, *por una equacion qualquiera; determinar el límite de la razon* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *entre sus diferencias.*

Resolucion. Sea la que fuere la equacion que expresa la relacion entre x é y, la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de sus diferencias (núm. 31.) se puede expresar por $-\frac{A + C\Delta x + D\Delta y + E\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y + F\Delta x^2 + \&c.}{B}$, ó haciendo $-\frac{C\Delta x + D\Delta y + E\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y + F\Delta x^2 = \&c.}{B} = \pm X$, por $\frac{-A}{B} \pm X$: esto supuesto, discurriendo del mismo modo que en el problema antecedente, echarémos de ver, que como todos los términos de X tienen por factores Δx ó Δy; si suponemos que estas diferencias decrecen continuamente acercándose á 0; X decrecerá igualmente, y llegará á ser menor que qualquiera cantidad dada por pequeña que sea; por consiguiente $\frac{-A}{B}$ será el límite de $\frac{-A}{B} \pm X$, ó de la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; de manera que será $\frac{dy}{dx} = \frac{-A}{B}$, de donde se deduce esta regla general. *Hállese la razon* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *de las diferencias, y despreciando los términos que tuvieren por factores* Δx *ó* Δy, *se tendrá el límite.*

Exemplo 1º Sea dada la relacion entre x é y por la equacion $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$: la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de las diferencias (n. 31.) será igual á $\frac{3x^2 - 4ax + a^2 + (3x^2 - 2a)\Delta x - a\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y + \Delta x^2}{2a(y-b)}$; y despreciando los términos multiplicados por Δx ó por Δy, tendrémos el límite de dicha razon, ó $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{2a(y-b)}$.

Exemplo 2º Si la equacion $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$ expresase la relacion entre x é y, tendriamos (núm. 31.)..

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x(ay - 2x^2) - (6x^2 - ay)\Delta x + 2ax\Delta y - \&c.}{3by^2 - ax^2}$, y $\frac{dy}{dx}$ .... $= \frac{2x(ay - 2x^2)}{3by^2 - ax^2}$.

56. De aquí podemos inferir:

1º *Que la razon* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *se transforma en su límite* $\frac{dy}{dx}$, *quando* Δx *y* Δy *son cero.* Por consiguiente, *si la razon* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *incluyese* y' *ó* x'; *en su límite* $\frac{dy}{dx}$ *seria* (núm. 37.) $y' = y$, $x' = x$.

2º *Que el cálculo diferencial enseña á determinar los valores de las razones de las diferencias de las cantidades variables, quando estas diferencias se suponen iguales á cero*: y esta definicion que del cálculo diferencial da el célebre *Leonardo Euler* (1) es muy exâcta.

57. Aquí hemos de hacer una observacion análoga á la que hicimos (n. 32.) relativamente á las razones de las diferencias quando x ó y tienen ciertos valores particulares; y es que puede suceder que la substitucion de dichos valores reduzca el límite $\frac{dy}{dx}$ á la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Por exemplo, si siendo $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{2a(y-b)}$, se pidiese el valor de $\frac{dy}{dx}$, en el supuesto de ser $x = a$; como en este caso es $y = b$, hallariamos $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, cuya equacion nada nos enseña, sino que la expresion general de la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dada por la equacion (A'), de la qual hemos hecho uso para deducir el límite $\frac{dy}{dx}$, no conviene de ningun modo al supuesto de $x = a$, segun hemos visto (n. 32.). Haciendo pues uso de la equacion $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \frac{\Delta x}{a}$, correspon-

---

(1) *Institutiones Calculi Differentialis.*

diente á este supuesto, tendrémos $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$: equacion de segundo grado que da $\frac{dy}{dx} = \pm 1$. Si fuese $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(ay - 2x^2)}{3by^2 - ax^2}$ como en el segundo exemplo; y quisiéramos hallar su valor quando $x = 0$; como en este supuesto y es tambien 0, tendriamos por la misma razon que en el exemplo antecedente $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; pero valiéndonos de la equacion de tercero grado $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^3 - \frac{a}{b}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{b}$ relativa al caso actual, inferirémos $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{a}{b}\frac{dy}{dx} = 0$, cuya equacion da tres valores del límite $\frac{dy}{dx}$; á saber, $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$. En general, suponiendo que la equacion (C) (n. 31.) expresa la relacion entre las diferencias Δx, Δy; si ciertos valores particulares de x y de y reducen á cero A y B; dicha equacion se reducirá á $C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 + F\Delta x^2 + G\Delta x^2\Delta y + \&c. = 0$, de la qual inferirémos $E\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + D\frac{\Delta y}{\Delta x} + C + F\Delta x + G\Delta y + \&c. = 0$, y (a)........ $E\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + D\frac{dy}{dx} + C = 0$. Si dichos valores de x y de y reduxesen á 0, no solamente A y B, sino tambien C, D, E; la equacion (C) se reduciria á $F\Delta x^3 + G\Delta x^2\Delta y + H\Delta x\Delta y^2 + I\Delta y^3 + K\Delta x^4 + \&c. = 0$, ó $I\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^3 + H\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + G\frac{\Delta y}{\Delta x} + F + K\Delta x + \&c. = 0$; y el límite de la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ seria dado por la equacion (b)............ $I\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + G\frac{dy}{dx} + F = 0$; &c.

58. Ya que (núm. 23, 25.) $\Delta . ay$ es igual á $a\Delta y$, y $\Delta(y \pm a) = \Delta y$; si y fuese funcion de la variable x, seria $\frac{\Delta . ay}{\Delta x} = a\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y $\frac{\Delta(y \pm a)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: por consiguiente $\frac{d . ay}{dx} = a\frac{dy}{dx}$, y $\frac{d(y \pm a)}{dx} = \frac{dy}{dx}$.

59. De la equacion (núm. 26.) $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$, se infiere $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c.}$, cuyo límite $\frac{dx}{dy}$ es igual á $\frac{1}{A}$: pero (núm. 53.) A es igual á $\frac{dy}{dx}$; luego $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$,

y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$; de donde concluirémos, que *el límite* $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$ *está en razon inversa del límite* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$.

60. Sea y una funcion qualquiera de x, y z una funcion qualquiera de y; si suponemos $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$, $\Delta z = A'\Delta y + B'\Delta y^2 + C'\Delta y^3 + \&c.$, siendo A, B, C &c. funciones indeterminadas de x, y A', B', C' &c. funciones indeterminadas de y; tendrémos (núm. 53.) $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{dz}{dy} = A'$, y por consiguiente $\frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = A \times A'$. Pero substituyendo por Δy su valor en la expresion de Δz, se tranformará esta en......

$$\begin{aligned} \Delta z = A'A\Delta x &+ A'B\Delta x^2 &+ A'C\Delta x^3 &+ \&c. \\ &+ B'A^2\Delta x^2 &+ 2B'AB\Delta x^3 &+ \&c. \\ &+ \&c. &+ \&c. &+ \&c. \end{aligned}$$

de donde se infiere $\frac{dz}{dx} = A'A$, y por consiguiente $\frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$; y como en virtud de la proposicion antecedente es $\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{dx}$, será tambien $\frac{dz}{dy} : \frac{dx}{dy} = \frac{dz}{dx}$.

61. Los resultados antecedentes manifiestan que *en los productos y divisiones de los límites* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}$, $\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dx}}$ *&c. se pueden hacer con las expresiones* dx, dy, dz *&c. las mismas operaciones que si representasen qualesquiera cantidades.*

Así si y es $= f(x)$, y $\frac{dy}{dx} = A$; no habrá inconveniente alguno en suponer $dy = Adx$, y $dx = \frac{dy}{A}$.

62. La expresion Adx ó su igual dy se llama comunmente *la diferencial primera*, ó simplemente *la diferencial* de la funcion y; y dx la diferencial de la variable x. (1) Nosotros admitirémos esta denominacion por ser generalmente recibida, y porque aunque las diferenciales consideradas en ellas mismas son de poca ó ninguna utilidad en el método que nos proponemos seguir en estas Instituciones, son útiles en quanto conducen inmediatamente al conocimiento de los límites de las razones de las diferencias de las cantidades variables, cuyo conocimiento es el objeto del cálculo diferencial y el fundamento de sus aplicaciones. Ademas, la consideracion de las diferenciales facilita las operaciones, y ahorra muchas palabras.

(1) *Los Ingleses las llaman fluxiones.*

63. La diferencial de un monomio qualquiera ax^n se expresa por $d.ax^n$; y la de un polinomio $ax^n + bx^m + \&c.$, por $d(ax^n + bx^m + \&c.)$

64. Al límite $\frac{dy}{dx}$, le llamarémos tambien para abreviar el coeficiente diferencial de la funcion y de la variable x: á $\frac{dx}{dy}$, el coeficiente diferencial de la funcion x de la variable y; &c.

Es evidente que el coeficiente diferencial de una funcion y de la variable x, es igual á la diferencial dy de la funcion dividida por la diferencial dx de dicha variable.

65. *Diferenciar* una funcion de una cantidad variable, es hallar *su diferencial* ó el límite de la razon entre sus diferencias: la operacion por medio de la qual se determina la diferencial ó dicho límite, se llama *diferenciacion*: y la equacion que resulta, *equacion diferencial.*

Diferenciando por exemplo la funcion $\sqrt{(ax - x^2)}$ que llamarémos y; resultará (núm. 54.) la equacion diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{a - 2x}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$, ó $dy = \frac{(a - 2x)\,dx}{2\sqrt{(ax - x^2)}}$.

66. Sea y una funcion qualquiera de x, compuesta de diferentes términos A, B, C &c.: será (núm. 26.) $\Delta y = \Delta A + \Delta B + \Delta C + \&c.$; y haciendo $\Delta A = A'\Delta x + A''\Delta x^2 + \&c.$; $\Delta B = B'\Delta x + B''\Delta x^2 + \&c.$; $\Delta C = C'\Delta x + C''\Delta x^2 + \&c.$, &c; inferirémos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A' + B' + C' + \&c. + (A'' + B'' + C'' + \&c.)\Delta x + \&c.$ y (núm. 53.) $\frac{dy}{dx} = A' + B' + C' + \&c.$: pero $A' = \frac{dA}{dx}$, $B' = \frac{dB}{dx}$, $C' = \frac{dC}{dx}$, &c., luego $\frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dx} + \frac{dC}{dx} + \&c.$, y $dy = dA + dB + dC + \&c.$; cuyo resultado manifiesta que *la diferencial de una funcion qualquiera de una cantidad variable, es igual á la suma de las diferenciales de cada uno de sus términos.*

Si fuese por exemplo $y = x^2 + ax + b$, seria $\frac{dy}{dx} = \frac{d.x^2}{dx} + \frac{d.ax}{dx}$; y como (núm. 54.) $\frac{d.x^2}{dx} = 2x$, $\frac{d.ax}{dx} = a$; substituyendo tendrémos $\frac{dy}{dx} = 2x + a$, y $dy = 2xdx + adx$.

67. Puesto que siendo $y = AB$, es $\Delta y = A\Delta B + B\Delta A + \Delta A\Delta B$; si A y B fuesen funciones de x, haciendo $\Delta A = A'\Delta x + A''\Delta x^2 + \&c.$, $\Delta B = B'\Delta x + B''\Delta x^2 + \&c.$; tendrémos

$$\begin{aligned} \Delta y = AB'\Delta x &+ AB''\Delta x^2 + \&c. \\ + BA'\Delta x &+ BA''\Delta x^2 + \&c. \\ &+ A'B'\Delta x^2 + \&c. \end{aligned}$$

de donde inferirémos $\frac{dy}{dx} = AB' + BA'$; y como $A' = \frac{dA}{dx}$, B'

$= \frac{dB}{dx}$, será $\frac{dy}{dx} = A\frac{dB}{dx} + B\frac{dA}{dx}$, y $dy = AdB + BdA$: de donde concluirémos que *la diferencial del producto de dos funciones de una cantidad variable; es igual á la suma de las dos expresiones que resultan multiplicando cada una de las funciones por la diferencial de la otra.*

68. Si y fuese $= ABC$, siendo A, B, C funciones de x, haciendo AB igual á una variable z, tendrémos $y = zC$, y $dy = zdC + Cdz$; pero siendo $z = AB$, será $dz = AdB + BdA$, y substituyendo estos valores en la equacion antecedente, se transformará en $dy = ABdC + ACdB + BCdA$. Del mismo modo probariamos, que siendo $y = A \,.\, B \,.\, C \,.\, D$. &c., seria $dy = B \,.\, C \,.\, D$. &c. $dA + A \,.\, C \,.\, D$. &c. $dB + A \,.\, B \,.\, D$. &c. $dC + A \,.\, B \,.\, C$. &c. dD + &c.; de donde inferirémos generalmente, que *la diferencial de una funcion de una cantidad variable compuesta de un número qualquiera de factores* A, B, C &c.; *es igual á la suma de los productos que resultan, multiplicando la diferencial de cada uno de los factores, por todos los demas.*

69. Sea $y = \frac{A}{B}$; será $yB = A$, y $ydB + Bdy = dA$; de donde inferirémos $dy = \frac{dA - \frac{A}{B}dB}{B} = \frac{BdA - AdB}{B^2}$; cuyo resultado nos enseña, que *para diferenciar una fraccion qualquiera, se debe multiplicar el denominador por la diferencial del numerador, y el numerador por la diferencial del denominador, y restando este producto del primero, se dividirá la resta por el quadrado del denominador.*

Tambien podriamos transformar la equacion propuesta en $y = AB^{-1}$, y tendriamos $dy = B^{-1}dA - AB^{-2}dB = \frac{BdA - AdB}{B^2}$, lo mismo que antes.

70. Sea y una funcion qualquiera de x, y z otra funcion de x é y: si suponemos (núm. 31.) $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 +$ &c., tendrémos $\frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\frac{\Delta y}{\Delta x} + C\Delta x + D\Delta y +$ &c., y (núm. 55, 56.) $\frac{dz}{dx} = A + B\frac{dy}{dx}$; por donde se ve, que en este supuesto el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ se puede representar por $A + B\frac{dy}{dx}$, siendo A y B funciones indeterminadas de x é y.

71. Aunque la regla núm. 55. es la mas general y directa que se puede dar para hallar los límites de las razones entre las diferencias de las cantidades variables, no es ni con mucho la mas sencilla. Quando las cantidades que se quieren diferenciar son complicadas, las razones de sus diferencias lo son mucho mas, y su determinacion empeña en cálculos prolixos; esto nos obliga á exponer algunas reglas particulares fundadas en los resultados de la regla general, y en lo

dicho en los números antecedentes; por medio de las quales se determinan fácilmente dichos límites, sin hallar de antemano las razones de las diferencias; cuya circunstancia las hace sumamente útiles.

72. Por decontado, á causa de que siendo (núm. 54.) $y = ax^n$, es $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$; podemos establecer, que *para hallar el coeficiente diferencial de una potencia qualquiera de una cantidad variable, se debe multiplicar la variable por su exponente, y disminuir este de una unidad.* Así si quisiéramos determinar el límite $\frac{dy}{dx}$ en el supuesto de ser $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, multiplicariamos x por su exponente $\frac{1}{2}$ y disminuyéndole de una unidad, tendriamos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si fuese $y = ax^3 - bx^{\frac{3}{2}} + cx^{-2} +$ &c., hallariamos $\frac{dy}{dx}$ considerando sucesivamente cada término; será pues $\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - \frac{3}{2} bx^{\frac{1}{2}} - 2cx^{-3} +$ &c.

Si se nos ofreciese diferenciar la funcion $(ax^2 - bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-3} + \&c.)^n = y$; hariamos $ax^2 - bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-3} + \&c. = z$, y tendriamos $y = z^n$, $dy = nz^{n-1}dz$; y como $dz = (2ax - \frac{1}{2} bx^{-\frac{1}{2}} - 3cx^{-4} + \&c.)\,dx$, será substituyendo $dy = n(ax^2 - bx^{\frac{1}{2}} + cx^{-3} + \&c.)^{n-1}(2ax - \frac{1}{2} bx^{-\frac{1}{2}} - 3cx^{-4} + \&c.)\,dx$: por donde se ve que *para hallar la diferencial de un polinomio elevado á una potencia qualquiera; se debe multiplicar el polinomio por su exponente, disminuir este de una unidad, y multiplicar el resultado por la diferencial del polinomio*: así si fuese $y = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$, seria $dy = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} d.(ax - x^2)$; y como $d.(ax - x^2)$ es igual á $(a - 2x)\,dx$, tendriamos $dy = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(a - 2x)\,dx$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(ax - x^2)^{-\frac{1}{2}}(a - 2x) = \frac{a - 2x}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, lo mismo que por la regla general (núm. 53.).

Si y fuese igual á $\frac{ax}{b+x}$: seria (núm. 69.) $dy = \ldots\ldots \frac{(b+x)\,d.ax - ax\,d.(b+x)}{(b+x)^2} = \frac{[(b+x)a - ax]\,dx}{(b+x)^2} = \frac{abdx}{(b+x)^2}$. Tambien se puede en este exemplo hallar la diferencial dy, multiplicando cada uno de los factores ax, $(b+x)^{-1}$ por la diferencial del otro, y juntando los dos resultados (núm. 67.): de este modo tendrémos

$dy = adx\,(b+x)^{-1} - ax\,(b+x)^{-2}\,dx = \frac{adx}{b+x} - \frac{axdx}{(b+x)^2}$ $=$ (reduciendo á un comun denominador) $\frac{abdx}{(b+x)^2}$; cuyos resultados son los mismos que hallamos (núm. 54.).

Sea $a\,(y-b)^2 - x\,(x-a)^2 = 0$. Como y es funcion de x, tendrémos $2a\,(y-b)\frac{dy}{dx} - (x-a)^2 - 2x\,(x-a) = 0$, ó $2a\,(y-b)\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 4ax - a^2 = 0$; de donde se infiere $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{2a\,(y-b)}$, lo mismo que en el núm. 55.

Si fuese $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$; tendriamos $4x^3 - 2ayx - ax^2\frac{dy}{dx} + 3by^2\frac{dy}{dx} = 0$; de donde se infiere $\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,(ay - 2x^2)}{3by^2 - ax^2}$, lo mismo que por la regla general (núm. 55.).

73. Sin multiplicar mas los exemplos, podemos afirmar que por medio de las reglas antecedentes, y de lo dicho (núm. 60. y sig.) se pueden diferenciar las funciones algebráicas explícitas ó implícitas de una cantidad variable por mas complicadas que sean: en otra ocasion las aplicarémos á algunos casos difíciles, y manifestarémos el uso de las substituciones y transformaciones para abreviar y simplificar los cálculos. La única dificultad que se encuentra en su aplicacion, es quando ciertos valores particulares de x reducen el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$ á $\frac{0}{0}$; pues como no se conoce la relacion entre las diferencias Δx, Δy, no se puede determinar su límite en virtud de lo dicho (núm. 57.); pero algunas observaciones que harémos sobre los límites de las razones de las diferencias segundas, terceras &c., de las cantidades, nos proporcionarán un método facilísimo para hallar el valor de $\frac{dy}{dx}$ sin recurrir á la equacion que expresa la relacion de las diferencias.

74. Los límites de las razones de las diferencias de las cantidades *transcendentes* se determinan del mismo modo que los de las cantidades algebráicas, observando algunas reglas particulares que vamos á declarar.

Sea $y = \log. x$, será (núm. 54.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, y $dy = \frac{dx}{x}$; cuyo resultado nos enseña, que *la diferencial del logaritmo de una cantidad variable es igual á la diferencial de dicha cantidad dividida por la misma cantidad.* Por exemplo, si quisiéramos diferenciar $\log. (ax - x^2)$, le hariamos $= y$, y tendriamos $dy = \frac{d.(ax - x^2)}{ax - x^2} = \frac{(a - 2x)\,dx}{ax - x^2}$.

La expresion $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, es relativa (núm. 25.) al sistema de *Neper*, en el qual el módulo es $= 1$. En otro sistema qualquiera cuyo módulo $= M$, será $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{x}$. Así siendo en las tablas ordinarias calculadas por el sistema de *Brigs* $M = 0,43429$ &c.; tendrémos relativamente á los logaritmos de dichas tablas $\frac{d.\log. x}{dx} = \frac{0,43429\ \&c.}{x}$.

75. La equacion $dy = \frac{dx}{x}$, da $dx = xdy = x\,d.\log. x$; esto es, *la diferencial de una cantidad variable es igual al producto de la cantidad multiplicada por la diferencial de su logaritmo.*

Aunque esta proposicion puede emplearse para diferenciar toda suerte de cantidades, solo se aplica con ventaja á las exponenciales; por cuya razon harémos únicamente uso de ella en la diferenciacion de estas cantidades. Si, por exemplo, se nos pidiese la diferencial de a^x; haciendo $a^x = y$, tendrémos $dy = a^x\,d.\log. a^x = a^x\,d.x\log. a = a^x\,dx\log. a$; de donde inferirémos $\frac{dy}{dx} = a^x\log. a$; lo mismo que hallamos en el núm. 54.

76. Hemos visto (núm. 54.) que si y representa el seno del arco x; es $\frac{dy}{dx} = \cos. x$; y que siendo $y = \cos. x$, $\frac{dy}{dx} = -\,\text{sen.}\,x$, y como sen. ver. $x = 1 - \cos. x$; si suponemos $y = $ sen. ver. x, será $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,(1 - \cos. x)}{dx} = \text{sen.}\,x$. Por consiguiente

1º *El coseno de un arco qualquiera, es el límite de la razon de la diferencia del seno á la del arco.*

2º *El seno tomado negativamente es el límite de la razon entre las diferencias del coseno y del arco.*

3º *El límite de la razon de la diferencia del seno verso á la del arco, es igual al seno.*

Si y fuese igual á $\frac{1}{\cos. x}$; haciendo $\cos. x = z$, tendriamos $y = z^{-1}$, $dy = -z^{-2}dz$, $dz = -\,\text{sen.}\,xdx$; por consiguiente, $dy = \frac{\text{sen.}\,xdx}{\cos.^2 x}$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{sen.}\,x}{\cos.^2 x}$.

Sea $y = \text{tang.}\,x$: á causa de $\text{tang.}\,x = \frac{\text{sen.}\,x}{\cos. x}$, será (núm. 69.) $dy = \frac{\cos. x\,d.\,\text{sen.}\,x - \text{sen.}\,x\,d.\cos. x}{\cos.^2 x} = \frac{(\cos.^2 x + \text{sen.}^2 x)\,dx}{\cos.^2 x} = \frac{dx}{\cos.^2 x}$; y $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos.^2 x}$. Por consiguiente, *la diferencial de la tangente de un arco, es igual á la diferencial del arco dividida por el quadrado del coseno*; ó bien, *la razon de la unidad al quadrado del coseno de un arco, es el límite de la razon de la diferencia de la tangente, á la diferencia del arco.*

Si fuese $y = \text{cotang.}\,x = \frac{\cos. x}{\text{sen.}\,x}$, seria $dy = $ ....

$\frac{\text{sen.}\,x\,d.\,\text{cos.}\,x - \text{cos.}\,x\,d.\,\text{sen.}\,x}{\text{sen.}^2\,x} = -\frac{(\text{sen.}^2\,x + \text{cos.}^2\,x)\,dx}{\text{sen.}^2\,x} = -\frac{dx}{\text{sen.}^2\,x}$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\text{sen.}^2\,x}$. De donde inferirémos, que *la diferencial de la cotangente de un arco, es igual á la diferencial del arco tomada negativamente y dividida por el quadrado del seno;* ó que *la razon de la unidad al quadrado del seno tomada negativamente, es el límite de la razon entre la diferencia de la cotangente y la diferencia del arco.*

Finalmente, si fuese $y = \text{sec.}\,x$; á causa de $\text{sec.}\,x = \frac{1}{\text{cos.}\,x}$, tendriamos $dy = \frac{\text{sen.}\,x\,dx}{\text{cos.}^2\,x} = \text{sec.}\,x\ \text{tang.}\,x\,dx$, y $\frac{dy}{dx} = \text{sec.}\,x\ \text{tang.}\,x$: y si fuese $y = \text{cosec.}\,x$; por ser $\text{cosec.}\,x = \frac{1}{\text{sen.}\,x}$, seria $dy = -\frac{\text{cos.}\,x\,dx}{\text{sen.}^2\,x} = -\text{cosec.}\,x\ \text{cot.}\,x\,dx$, y $\frac{dy}{dx} = -\text{cosec.}\,x\ \text{cot.}\,x$. De donde resulta, que *la diferencial de la secante es igual á la diferencial del arco multiplicada por el producto de la secante y de la tangente:* y que *la diferencial de la cosecante, es igual á la del arco tomada negativamente, y multiplicada por la cosecante y por la cotangente.*

77. Reuniendo los resultados que acabamos de hallar relativos á las líneas trigonométricas, tendrémos:

$$\left.\begin{array}{ll}
y = \text{sen.}\,x, & \frac{dy}{dx} = \text{cos.}\,x \\
y = \text{cos.}\,x, & \frac{dy}{dx} = -\text{sen.}\,x \\
y = \text{sen. ver.}\,x, & \frac{dy}{dx} = \text{sen.}\,x \\
y = \text{tang.}\,x, & \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{cos.}^2\,x} \\
y = \text{cot.}\,x, & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{sen.}^2\,x} \\
y = \text{sec.}\,x, & \frac{dy}{dx} = \text{sec.}\,x\ \text{tang.}\,x \\
y = \text{cosec.}\,x, & \frac{dy}{dx} = -\text{cosec.}\,x\ \text{cot.}\,x
\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{de donde}\\ \text{inferirémos}\end{array} \left\{\begin{array}{l}
\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{cos.}\,x} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}} \\
\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\text{sen.}\,x} = -\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}} \\
\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{sen.}\,x} = \frac{1}{\sqrt{(2y-y^2)}} \\
\frac{dx}{dy} = \text{cos.}^2\,x \left(= \frac{1}{\text{sec.}^2\,x}\right) = \frac{1}{1+y^2} \\
\frac{dx}{dy} = -\text{sen.}^2\,x \left(= \frac{-1}{\text{cosec.}^2\,x}\right) = \frac{-1}{1+y^2} \\
\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{sec.}\,x\ \text{tang.}\,x} = \frac{1}{y\sqrt{(y^2-1)}} \\
\frac{dx}{dy} = \frac{-1}{\text{cosec.}\,x\ \text{cot.}\,x} = \frac{-1}{y\sqrt{(y^2-1)}}
\end{array}\right.$$

78. Por medio de estas reglas bastante fáciles para saberlas de memoria; y de lo demostrado (núm. 60. y sig.) se pueden siempre hallar los límites de las razones de las diferencias de las cantidades de qualquiera naturaleza que sean; pero no las aplicamos por ahora á algunas funciones complicadas, por ser nuestro intento exponer solamente en este capítulo los principios del cálculo diferencial.

Las mismas reglas sirven para determinar las diferenciales ó los límites de las razones entre las diferencias segundas, terceras &c. de las cantidades variables, conforme verémos muy en breve.

79. Del mismo modo que el límite de la razon $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ entre las diferencias de y y de x, se representa por $\frac{dy}{dx}$; los límites de las razones $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$ &c. de la diferencia segunda, tercera &c. de la funcion y, al quadrado, cubo &c. de la diferencia de la variable x, se expresan respectivamente por $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$ &c.; y para abreviar llamarémos respectivamente dichos límites *el coeficiente de la diferencial segunda, tercera, quarta* &c. de la funcion que y representa.

80. Problema. *Suponiendo* $y = f(x)$, *y* Δx *constante; determinar los límites de las razones* $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ *&c.*

Resolucion. Hállense las razones $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ &c. por los métodos dados; y haciendo en ellas $\Delta x = 0$, se tendrán sus límites $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dy^3}{dx^3}$ &c.

Exemplo. Sea $y = ax^n$; será (núm. 41.) $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = a\,(n\,(n-1)\,x^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}\,\Delta x + \&c.)$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = a\,(n\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,x^{n-4}\,\Delta x + \&c.)$ &c., y haciendo $\Delta x = 0$ tendrémos $\frac{d^2 y}{dx^2} = an\,(n-1)\,x^{n-2}$, $\frac{d^3 y}{dx^3} = an\,(n-1)\,(n-2)\,x^{n-3}$ &c.

Pero este modo de resolver el problema tiene el inconveniente que hemos expuesto (núm. 71.); inconveniente que es tanto mayor, quanto mayor es el órden de las diferencias; por cuya razon, sin aplicarlo á otros exemplos, pasarémos á manifestar el teorema siguiente, el qual nos facilitará determinar los coeficientes de la diferencial segunda, tercera &c. de y, por los mismos métodos, y con la misma facilidad que se determina $\frac{dy}{dx}$.

81. Sea $y = f(x)$, y $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$; será $\Delta^2 y = \Delta\,.\,A\Delta x + \Delta\,.\,B\Delta x^2 + \&c.$, ó haciendo $\Delta A = A'\Delta x + A''\Delta x^2 + \&c.$, $\Delta B = B'\Delta x + B''\Delta x^2 + \&c.$, &c.; y teniendo presente que Δx es constante; tendrémos $\Delta^2 y = A'\Delta x^2 + A\,\Delta x^3 + \&c. + B'\Delta x^3 + \&c.$

de donde se infiere $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = A' + A''\Delta x + \&c. + B'\Delta x + \&c.$, y $\frac{d^2 y}{dx^2} = A'$ (núm. 53.).

Pero siendo $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + B\Delta x + \&c.$, y $\frac{\Delta A}{\Delta x} = A' + A''\Delta x + \&c.$; será $\frac{dy}{dx} = A$, y $\frac{dA}{dx} = A'$, ó substituyendo por A su igual $\frac{dy}{dx}$,

$\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx} = A'$, y por consiguiente $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}$; luego

El límite de la razon $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ *de la diferencia segunda de la funcion de una variable, al quadrado de la diferencia de la variable; es igual al límite de la razon* $\frac{\Delta.\frac{dy}{dx}}{\Delta x}$ *entre la diferencia de* $\frac{dy}{dx}$ *y la diferencia de* x; ó bien *el coeficiente de la diferencial segunda de la funcion de una variable* x *que llamarémos* y *es igual al coeficiente diferencial de* $\frac{dy}{dx}$.

82. Este teorema se puede generalizar muchísimo; pues si suponemos para simplificar $A' + B' = X$, y hacemos $\Delta A' = A1\Delta x + A2\Delta x^2 + \&c.$, y $\Delta X = X'\Delta x + X''\Delta x^2 + \&c.$; tendrémos $\Delta^3 y = \Delta A'\Delta x^2 + \Delta X\Delta x^3 + \&c. = A1\Delta x^3 + A2\Delta x^4 + \&c. + X'\Delta x^4 + \&c.$ y por consiguiente $\frac{d^3y}{dx^3} = A1$. Pero siendo $A' = \frac{d^2y}{dx^2}$, y $\frac{\Delta A'}{\Delta x} = A1 + A2\Delta x + \&c.$, será $\frac{dA'}{dx} = \frac{d.\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = A1$, luego $\frac{d^3y}{dx^3}$ .... $= \frac{d.\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}$. Del mismo modo hallariamos $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d.\frac{d^3y}{dx^3}}{dx}$, y en general $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{dx}$. Cuyo resultado nos indica que *el coeficiente de la diferencial del órden* n *de una funcion de una variable, es igual al coeficiente diferencial de la funcion que expresa el coeficiente de la diferencial del órden* n − 1 *de dicha funcion.*

La expresion $A'dx^2$, ó su igual d^2y, se llama *la diferencial segunda* de la funcion y; d^3y, la diferencial *tercera*; d^4y, la diferencial *quarta* &c.

83. Siendo $dy = Adx$, y $dA = A'dx$; si suponemos dx constante; tendrémos $ddy = dAdx = A'dx^2 = d^2y$. Por donde se ve que *la diferencial segunda de* y, *es igual á la diferencial de la diferencial de* y. Del mismo modo probariamos que d^3y es igual á dd^2y; esto es, que *la diferencial tercera de* y, *es igual á la diferencial de su diferencial segunda*; y en general, que $d^ny = dd^{n-1}y$.

Las expresiones dx^2, dx^3 &c. representan respectivamente la potencia segunda, tercera &c. de dx.

84. Con esto se hallarán facilmente los límites de las razones de las diferencias de un órden qualquiera, determinando sucesivamente

los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}\left(=\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}\right)$, $\frac{d^3y}{dx^3}\left(=\frac{d.\frac{d^2y}{dx^2}}{dx}\right)$ &c., ó las diferenciales dy, d^2y $(= ddy)$, d^3y $(= dd^2y)$ &c. por los métodos declarados (núm. 72. y sig.).

Exemplo 1º Supongamos que siendo $y = ax^n$, queramos hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$ límite de la razon $\frac{\Delta^3y}{\Delta x^3}$: tendrémos desde luego $\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$; por consiguiente $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d.nax^{n-1}}{dx} = n(n-1)ax^{n-2}$, y $\frac{d^3y}{dx^3}$ .... $= \frac{d.n(n-1)ax^{n-2}}{dx} = n(n-1)(n-2)ax^{n-3}$, lo mismo que hallamos por la regla general (núm. 80.).

Exemplo 2º Sea $y = e^x$, siendo e el número cuyo logaritmo *Neperiano* = 1: será (núm. 14.) $\frac{dy}{dx} = e^x$; $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$; $\frac{d^3y}{dx^3} = e^x$; &c.; por donde se ve que *la funcion* e^x *tiene la propiedad singular de reproducirse en todas sus diferenciales.* En adelante llamarémos siempre e el número cuyo logaritmo natural ó Neperiano es la unidad; y cuyo valor no pasando de siete decimales es 2,718 2818.

Exemplo 3º Sea dada la relacion entre x é y por la equacion $xy + ax + b = 0$: será $y + x\frac{dy}{dx} + a = 0$, y por consiguiente $\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + x\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ó $x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$; $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, ó $x\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$: &c.; de donde inferirémos, 1º $\frac{dy}{dx} = -\frac{a+y}{x}$, 2º $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = \frac{2(a+y)}{x^2}$, 3º $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6(a+y)}{x^3}$, &c.

85. Supongamos que siendo dada una equacion qualquiera entre x é y, se represente la relacion entre sus diferencias por la equacion (C) (núm. 31.): será (núm. 55.) $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$, ó $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, siendo A y B funciones indeterminadas de x y de y; por consiguiente, como y es funcion de x; si suponemos (núm. 70.) $\frac{dA}{dx} = A' + A''\frac{dy}{dx}$, y $\frac{dB}{dx} = B' + B''\frac{dy}{dx}$; diferenciando la equacion $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, resultará la equacion $B\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(B' + B''\frac{dy}{dx}\right) + A' + A''\frac{dy}{dx} = 0$, ó (a')........ $B\frac{d^2y}{dx^2} + B''\frac{dy^2}{dx^2} + (A'' + B')$

$\frac{dy}{dx} + A' = 0$. Sentado esto, si ciertos valores particulares de x reduxesen á cero A y B; el límite $\frac{dy}{dx}$ no sería dado por la equacion $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, sino por la equacion (núm. 57.) (a)................ $E\frac{dy^2}{dx^2} + D\frac{dy}{dx} + C = 0$: pero es evidente que la equacion $B''\frac{dy^2}{dx^2} + (A'' + B')\frac{dy}{dx} + A' = 0$ á la qual se reduce en este caso la equacion (a') debe ser idénticamente la misma que la equacion (a), pues ambas equaciones son de segundo grado, y expresan la relacion entre el límite $\frac{dy}{dx}$; x é y; y observando que el límite $\frac{dy}{dx}$ se puede considerar como constante en la diferenciacion á causa de que el término $B\frac{d^2y}{dx^2}$ desaparece por el supuesto de $B = 0$, concluirémos, que *si algunos valores particulares de* x, *reduxesen á cero* A *y* B, *y por consiguiente* $\frac{dy}{dx}$ *á* $\frac{0}{0}$: *diferenciando la equacion* $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, *considerando* $\frac{dy}{dx}$ *como constante, resultará una equacion de segundo grado, la qual dará los valores de* $\frac{dy}{dx}$ *correspondientes á los de* x.

Exemplo. Sea $a(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$ la equacion propuesta: será $2a(y - b)\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 4ax - a^2 = 0$; y como en el supuesto de $x = a$, es $A = -3x^2 + 4ax - a^2 = 0$, $B = 2a(y - b) = 0$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; diferenciarémos la equacion antecedente, tratando como constante $\frac{dy}{dx}$, y resultará la equacion de segundo grado $2a\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} - 6x + 4a = 0$, que en el supuesto de $x = a$ da $\frac{d^2y}{dx^2} = 1$, y $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, lo mismo que hallamos (núm. 57.) por el otro método.

86. Si los valores particulares de x reduxesen á cero, no solamente A, y B, sino tambien C, D, E; el límite $\frac{dy}{dx}$ no seria dado por la equacion $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, ni por la equacion (a), sino por la equacion (b).......... $I\frac{dy^3}{dx^3} + H\frac{dy^2}{dx^2} + G\frac{dy}{dx} + F = 0$, (núm. 57.); pero discurriendo del mismo modo que en el caso antecedente hallarémos, que diferenciando la equacion (a) considerando como constante $\frac{dy}{dx}$, resultará una equacion de tercero grado, la qual expresando como la equacion (b) la relacion entre $\frac{dy}{dx}$, x é y; será preci-

samente la misma que (b), y por consiguiente dará los valores de $\frac{dy}{dx}$ que corresponden á este caso particular.

Supongamos que la relacion entre x é y sea dada por la equacion $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$; tendrémos $(3by^2 - ax^2)\frac{dy}{dx} + 4x^3 - 2ayx = 0$, de cuya equacion no se puede inferir el valor de $\frac{dy}{dx}$ en el supuesto de $x = 0$; pues como en este caso es tambien $y = 0$, será $A = 4x^3 - 2ayx = 0$; y $B = 3by^2 - ax^2 = 0$; por esta razon la diferenciarémos tratando $\frac{dy}{dx}$ como constante; y resultará la equacion de segundo grado $\frac{dy}{dx}(6by\frac{dy}{dx} - 2ax) + 12x^2 - 2ay - 2ax\frac{dy}{dx} = 0$, ó (a)....... $6by\frac{dy^2}{dx^2} - 4ax\frac{dy}{dx} + 12x^2 - 2ay = 0$; la qual tampoco puede dar el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$, á causa de $C = 12x^2 - 2ay = 0$, $D = -4ax = 0$, y $E = 6by = 0$. Será pues necesario diferenciarla tratando siempre como constante $\frac{dy}{dx}$; y hallarémos $6b\frac{dy^3}{dx^3} - 4a\frac{dy}{dx} + 24x - 2a\frac{dy}{dx} = 0$, ó (b)...... $6b\frac{dy^3}{dx^3} - 6a\frac{dy}{dx} + 24x = 0$ que se reduce haciendo $x = 0$, y dividiendo por $6b$ á $\frac{dy^3}{dx^3} - \frac{a}{b}\frac{dy}{dx} = 0$; equacion idénticamente la misma que hallamos en el número 57., y que por consiguiente da los mismos valores $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$.

87. *En general: la equacion* $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, *se debe diferenciar sucesivamente considerando* $\frac{dy}{dx}$ *como constante, hasta encontrar una equacion tal, que alguna de las cantidades* C, D, E *&c. no se desvanezca; y resolviendo dicha equacion, se hallarán los valores de* $\frac{dy}{dx}$ *que corresponden á los de* x.

CAPITULO IV.

APLICACIONES DE LOS PRINCIPIOS DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA ANALISIS, Y A LA GEOMETRIA.

Del modo de transformar las funciones en series.

88. En el cálculo de las diferencias hemos observado (núm. 26.) que si en una funcion qualquiera $f(x) = y$ se substituye $x \pm \Delta x$ por x, la nueva funcion $f(x \pm \Delta x) = y'$ que resulta de esta subs-

titucion, se podrá representar por $y + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + D\Delta x^4 + \&c.$; cuya proposicion inferimos únicamente por analogía en virtud de los exemplos anteriores, suponiendo que la funcion y' de $x \pm \Delta x$ se desenvolviese en una serie ordenada respecto á las potencias sucesivas de Δx, conforme lo hicimos en dichos exemplos. Tambien insinuamos que las funciones y, A, B, C &c. tenian entre sí una mútua dependencia; de manera que A se deducia de y; B de A; C de B; &c.; por medio de operaciones semejantes; y prometimos manifestarlo quando tratásemos del cálculo diferencial. Ahora vamos á cumplir nuestra promesa por medio del teorema siguiente, el qual manifestará la verdad de ambas proposiciones.

89. Hemos demostrado en el núm. 46., que si en una funcion qualquiera $f(x) = y$ de la variable x que crece uniformemente, se substituye en su lugar $x + k$; será $f(x+k) = y + k\frac{\Delta y}{\Delta x} + k\frac{k-\Delta x}{2}\cdot\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + k\frac{(k-\Delta x)(k-2\Delta x)}{2\cdot 3}\cdot\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} + \&c.$; cuya equacion debe verificarse, sea el que fuere el valor del incremento arbitrario Δx; por lo que, si suponemos $\Delta x = 0$; las razones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ &c., se transformarán respectivamente (núm. 56.) en sus límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ &c; cada uno de los términos $k - \Delta x$, $k - 2\Delta x$ &c. será $= k$, y dicha equacion se transformará en $f(x+k) = y + \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{k^3}{2\cdot 3} + \&c.$

Si en vez de suponer en la substitucion $x + k$, hubiésemos supuesto $x - k$; todas las potencias impares de k serian negativas en la equacion antecedente; k^2 y las demas potencias pares serian positivas, y por consiguiente $f(x-k) = y - \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{2} - \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{k^3}{2\cdot 3} + \&c.$; de donde concluirémos que

Si en una funcion qualquiera $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ *de una variable* x, *que varía uniformemente; se substituye* $\mathrm{x} \pm \mathrm{k}$ *en lugar de* x; *será* $\mathrm{f}(\mathrm{x}\pm\mathrm{k}) = \mathrm{y} \pm \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\mathrm{k} + \frac{\mathrm{d^2y}}{\mathrm{dx^2}}\cdot\frac{\mathrm{k^2}}{2} \pm \frac{\mathrm{d^3y}}{\mathrm{dx^3}}\cdot\frac{\mathrm{k^3}}{2\cdot 3} + \&c.$

Este excelente teorema, conocido con el nombre de *Taylor* su inventor (1), es uno de los mas útiles de todas las Matemáticas; y tal vez no habrá otro del qual se hagan tantas y tan importantes aplicaciones.

Exemplo 1º Supongamos que siendo $f(x) = y = x^2 - x$, se nos pida la funcion que resulta substituyendo $x + 1$ en lugar de x.

(1) *Methodus Increment. theor. III. corol. II.*

Ya que $y = x^2 - x$, será $\frac{dy}{dx} = 2x - 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ &c.; $k = 1$; y substituyendo estos valores en la fórmula antecedente, se transformará en $f(x+1) = x^2 - x + 2x - 1 + 1 = x^2 + x$; y así $x^2 + x$ es la funcion que se pide.

Exemplo 2º Sea $y = x^n$; será $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ &c.; cuyos valores transforman la fórmula general en $f(x\pm k)$, ó $(x\pm k)^n = x^n \pm nx^{n-1}k + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}k^2 \pm n\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}k^3 + \&c.$; por donde se ve que de la fórmula que expresa el teorema de *Taylor* se deduce inmediatamente la del binomio de *Newton*.

Si n fuese un número entero positivo, la serie antecedente se terminará á causa de los coeficientes $n-1$, $n-2$, $n-3$ &c.; y la última diferencial $\frac{d^ny}{dx^n}$ será igual á la cantidad constante $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 2\times 1$. Substituyendo en lugar de k $\frac{bx}{x+b}$, tendrémos considerando solamente el signo inferior $f(x-k) = \left(x - \frac{bx}{x+b}\right)^n = x^n - nx^{n-1}\cdot\frac{bx}{x+b} + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}\cdot\frac{b^2x^2}{(x+b)^2} - n\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}x^{n-3}\cdot\frac{b^3x^3}{(x+b)^3} + \&c.$; y como $\left(x - \frac{bx}{x+b}\right)^n = \left(\frac{x^2}{x+b}\right)^n = \frac{x^{2n}}{(x+b)^n} = x^{2n}(x+b)^{-n}$, será $x^{2n}(x+b)^{-n} = x^n - \frac{nx^n b}{x+b} + n\frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^n b^2}{(x+b)^2} - \&c.$, ó dividiendo por x^{2n}, y haciendo $-n = m$, $(x+b)^m = x^m + \frac{mx^m b}{x+b} + \frac{m(m+1)x^m b^2}{2(x+b)^2} + \frac{m(m+1)(m+2)x^m b^3}{2\cdot 3(x+b)^3} + \&c.$; cuya serie se terminará si m fuere un número entero negativo.

Exemplo 3º Sea $y = \log. x$; será $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{x^3}$ &c., y por consiguiente $f(x\pm k) = \log.(x\pm k) = \log. x \pm \frac{k}{x} - \frac{k^2}{2x^2} \pm \frac{k^3}{3x^3} - \&c.$

Exemplo 4º Si fuese $y = a^x$; seria $\frac{dy}{dx} = a^x \log. a$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a^x(\log. a)^2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x(\log. a)^3$ &c.; de donde inferirémos $f(x\pm k)$

$= a^{x \pm k} = a^x \pm k a^x \log. a + \frac{k^2}{2} a^x (\log. a)^2 \pm \frac{k^3}{2 \cdot 3} a^x (\log. a)^3 + \&c. = a^x \left(1 \pm k \log. a + \frac{k^2}{2} (\log. a)^2 \pm \frac{k^3}{2 \cdot 3} (\log. a)^3 + \&c.\right)$.

Exemplo 5º Sea $y = \text{sen.}\, x$; será $\frac{dy}{dx} = \cos.\, x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = - \text{sen.}\, x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos.\, x$, &c.; y substituyendo estos valores en la fórmula, tendrémos $\text{sen.}\,(x \pm k) = \text{sen.}\, x \pm k \cos.\, x - \frac{k^2}{2} \text{sen.}\, x \mp \frac{k^3}{2 \cdot 3} \cos.\, x + \&c.$

Exemplo 6º Sea $y = \cos.\, x$; tendrémos $\frac{dy}{dx} = - \text{sen.}\, x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = - \cos.\, x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \text{sen.}\, x$, &c., y $(x \pm k) = \cos.\, x \mp k\, \text{sen.}\, x - \frac{k^2}{2} \cos.\, x \pm \frac{k^3}{2 \cdot 3} \text{sen.}\, x +$, &c.

90. Si la cantidad k fuese muy pequeña; á causa de los coeficientes k, k^2, k^3 &c., la serie $y \pm k \frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{k^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \&c.$ seria muy convergente, y por consiguiente sus primeros términos darian un valor muy aproxîmado de $f(x \pm k)$. Esto hace que el teorema de Taylor es de un uso contínuo y sumamente útil en los métodos de aproxîmacion.

91. Si substituimos en la fórmula general Δx en lugar de k; $f(x \pm k)$ se transformará en $f(x \pm \Delta x) = y'$ (núm. 25.), y tendrémos $y' = y \pm \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{2} \Delta x^2 \pm \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{2 \cdot 3} \Delta x^3 + \&c.$, y $y' - y = \Delta y = \pm \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{2} \Delta x^2 \pm \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{2 \cdot 3} \Delta x^3 + \&c.$: por lo que si suponemos Δx positiva, y hacemos como en el núm. 26. $y' = y + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$; $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&c.$; tendrémos $A = \frac{dy}{dx}$, $B = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{2} = \frac{\frac{dA}{dx}}{2}$, $C = \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{2 \cdot 3} = \frac{\frac{dB}{dx}}{3}$ &c., cuyas equaciones manifiestan la dependencia recíproca de las funciones y, A, B, C &c. que insinuamos (núm. 27.), y el modo de deducir sucesivamente unas de otras en virtud de operaciones análogas.

92. Por medio de la fórmula $\Delta y = \pm \frac{dy}{dx} \Delta x + \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{2} \Delta x^2 \pm \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{2 \cdot 3} \Delta x^3 + \&c.$; se hallará con mucha brevedad la diferencia de una funcion qualquiera de una variable.

Exemplo 1º Sea $y = \sqrt{(ax - x^2)} = (ax - x^2)^{\frac{1}{2}}$: será $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{a}{2} - x}{(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right)}{(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \ldots\ldots\ldots = \frac{-ax + {}^2 - \frac{a^2}{4} + ax - x^2}{(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-a^2}{4(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}}$, &c.; y substituyendo estos valores en la fórmula antecedente, tendrémos $\Delta y = \pm \frac{(a - 2x)\Delta x}{2(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2 \Delta x^2}{8(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} \mp \&c.$

Exemplo 2º Sea $y = \log.\, x$; será $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{x^2}$, $\frac{d^3y}{ax^3} = \frac{2}{x^3}$, &c., cuyos valores transforman la fórmula general en $\Delta y = \pm \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta x^2}{2x^2} \pm \frac{\Delta x^3}{3x^3} - \&c.$

Exemplo 3º Si quisiéramos hallar la diferencia de $y = a^x$, tendriamos $\frac{dy}{dx} = a^x \log.\, a$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\log.\, a)^2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x (\log.\, a)^3$, &c.; y substituyendo estos valores, hallarémos $\Delta y = a^x \left(\pm \Delta x \log.\, a + \frac{\Delta x^2}{2} (\log.\, a)^2 \pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} (\log.\, a)^3 + \&c.\right)$.

Exemplo 4º Sea $y = \text{sen.}\, x$; será $\frac{dy}{dx} = \cos.\, x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = - \text{sen.}\, x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = - \cos.\, x$ &c.; y por consiguiente $\Delta y = \pm \Delta x \cos.\, x - \frac{\Delta x^2}{2} \text{sen.}\, x \mp \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} \cos.\, x + \&c.$

Exemplo 5º Si fuese $y = \cos.\, x$, seria $\frac{dy}{dx} = - \text{sen.}\, x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = - \cos.\, x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \text{sen.}\, x$, &c.; de donde infeririamos $\Delta y = \mp \Delta x\, \text{sen.}\, x - \frac{\Delta x^2}{2} \cos.\, x \pm \frac{\Delta x^3}{2 \cdot 3} \text{sen.}\, x + \&c.$

93. Si suponemos $k = dx$ en la serie $y + \frac{dy}{dx} k + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \&c.$; se transformará en $y + dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2 \cdot 3} + \&c.$; de donde inferirémos que

Si en una funcion qualquiera f (x) = y, *de* x, *se substituye* x

$+ dx$ *en lugar de* x; *será* $f(x + dx) = y + dy + \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2\cdot 3} =$ &c.

Sea por exemplo $y = ax^2 + bx^3$; será $dy = (2ax + 3bx^2)\,dx$, $d^2y = (2a + 6bx)\,dx^2$, $d^3y = 6bdx^3$; y por consiguiente $f(x + dx) = ax^2 + bx^3 + (2ax + 3bx^2)\,dx + (a + 3bx)\,dx^2 + bdx^3 = a(x + dx)^2 + b(x + dx)^3$; como será fácil verificarlo elevando $x + dx$ á las potencias indicadas, y ordenando el resultado relativamente á las potencias sucesivas de dx.

94. De la fórmula $f(x \pm k) = y \pm \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{2} \pm \frac{d^3y}{dx^3}\cdot\frac{k^3}{2\cdot 3}$ + &c.; inferirémos que

Si en una funcion qualquiera y de x se substituye sucesivamente $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$ &c. en lugar de x; llamando y', y'', y''' &c. las funciones que resultan, será $y' = y + \Delta x\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c., $y'' = y + 2\Delta x\frac{dy}{dx} + \frac{4\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{8\Delta x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c., $y''' = y + 3\Delta x\frac{dy}{dx} + \frac{9\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{27\Delta x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c., &c.; y como en este supuesto (núm. 49.) $y' - y = \Delta y$, $y'' - 2y' + y = \Delta^2 y$, $y''' - 3y'' + 3y' - y = \Delta^3 y$, &c.; haciendo las substituciones correspondientes, y reduciendo, tendrémos $\Delta y = \Delta x\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c., $\Delta^2 y = \Delta x^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \Delta x^3\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{7\Delta x^4}{3\cdot 4}\cdot\frac{d^4y}{dx^4}$ + &c., $\Delta^3 y = \Delta x^3\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3\Delta x^4}{2}\cdot\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{5\Delta x^5}{4}\cdot\frac{d^5y}{dx^5}$ + &c.

Por medio de estas fórmulas generales se hallarán con suma facilidad las diferencias segunda, tercera &c. de una funcion de una variable.

Supongamos, por exemplo, que se nos pida la diferencia tercera de ax^n; haciendo esta funcion $= y$, tendrémos (núm. 80.) $\frac{d^3y}{dx^3} = an(n-1)(n-2)\,x^{n-3}$, $\frac{d^4y}{dx^4} = an(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}$, &c., y substituyendo, $\Delta^3 y = a(n(n-1)(n-2)\,x^{n-3}\,\Delta x^3 + \frac{3}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)\,x^{n-4}\,\Delta x^4 +$ &c.).

Las diferencias que en estos exemplos hemos hallado por medio de simples substituciones son las mismas que inferimos en los números 25. y 41., suponiendo tácitamente que se conocia la teoría de las series.

95. Si en la serie $y - k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{k^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c., hacemos $k = x$, se transformará en $y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c.; y como esta cantidad resulta substituyendo en y, $x - x = 0$ en lugar de x, concluirémos que

Si en una funcion y *de* x, *se supone* $x = 0$; *llamando* A *la cantidad que resulta, será* $A = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c. Sea por exemplo, $y = ax^2 + bx + c$; será $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, &c., cuyos valores transforman la equacion antecedente en $A = ax^2 + bx + c - 2ax^2 - bx + ax^2 = c$; de donde inferirémos, que haciendo $x = 0$ en la funcion $ax^2 + bx + c$, se reduce á c.

96. De la equacion $A = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ + &c., se infiere, que *si representamos por* y *una funcion qualquiera de* x*; será* $y = A + x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3y}{dx^3}$ − &c., *expresando* A *el valor de la funcion propuesta, quando* $x = 0$.

97. Si haciendo x igual á una cantidad constante, g en las expresiones y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c., se transforman respectivamente en las cantidades constantes finitas ó cero G, H, I, &c.; será $f(g \pm k) = G \pm kH + \frac{k^2}{2}I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3}K$ + &c.; por consiguiente, *el segundo miembro de esta equacion, será la cantidad que resulta substituyendo en* $f(x) = y$, $g \pm k$ *por* x.

Exemplo. Sea $y = ax^3 - bx^2$; será $\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - 2bx$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax - 2b$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6a$, $\frac{d^4y}{dx^4} = 0$, &c.; y haciendo $x = g$, $y = ag^3 - bg^2 = G$, $\frac{dy}{dx} = 3ag^2 - 2bg = H$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ag - 2b = I$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6a = K$, $\frac{d^4y}{dx^4} = 0 = L$, &c.; cuyos valores substituidos en la serie $G \pm kH$ + &c. la transforman en $ag^3 - bg^2 \pm (3ag^2 - 2bg)\,k + (3ag - b)\,k^2 \pm ak^3$, cantidad que es, como se ve, igual á la que resulta substituyendo $g \pm k$ por x, en $ax^3 - bx^2$.

98. Si alguna de las cantidades G, H, I &c. fuese infinita; seria señal de que la funcion propuesta no se podria desenvolver en una serie de la forma $G \pm kH + \frac{k^2}{2}I \pm$ &c.; esto es, segun las potencias sucesivas de k, en el supuesto de x igual á $g \pm k$; en cuyo caso

dicha funcion incluirá necesariamente cantidades irracionales, transcendentes ó fraccionarias. Sea, por exemplo, $y = a \pm \sqrt{(x - b)}$; será $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{2(x-b)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{1}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}}$, &c.; y como en el supuesto de $x = b$, es $\frac{dy}{dx} = \infty$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, &c.; inferirémos que si en la funcion propuesta se substituye $b + k$ en lugar de x, no podrá desenvolverse en una serie ordenada segun las potencias sucesivas de k; lo qual es evidente por sí mismo; pues en este supuesto dicha funcion es $= a \pm \sqrt{k}$.

Exemplo 2º Si siendo $y = \frac{b}{(a-x)^2}$, quisiéramos hallar la funcion que resulta substituyendo $a + k$ en lugar de x; tendriamos $\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{(a-x)^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6b}{(a-x)^4}$, &c., y haciendo $x = a$, seria $y = G = \infty$, $\frac{dy}{dx} = H = \infty$, &c.; de donde infeririamos que la funcion $\frac{b}{k^2}$ que resulta haciendo $x = a \pm k$ en la funcion $\frac{b}{(a-x)^2}$ no puede tener la forma $G \pm kH + $ &c.

99. En estos casos particulares en que el teorema de Taylor no puede dar la expresion de una funcion de x, quando x se transforma en $x + k$ en el supuesto de $x =$ á una cantidad constante g; se podrá hallar dicha expresion haciendo la substitucion de $g + k$ en la funcion propuesta, y las reducciones que ocasiona; y si la funcion de k, que resulta, incluyese algun polinomio irracional, se desenvolverá este respecto de k por los métodos conocidos.

Los dos exemplos antecedentes no tienen dificultad alguna; pero si fuese $y = (a - x)\sqrt{(x^2 - a^2)}$, las diferenciales $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c., serian infinitas en el supuesto de $x = a$; mas substituyendo $a + k$ en lugar de x, tendrémos $y = -k\sqrt{(2ak + k^2)} = -k^{\frac{3}{2}}(2a + k)^{\frac{1}{2}}$, y elevando $2a + k$ á la potencia $\frac{1}{2}$ y multiplicando por $-k^{\frac{3}{2}}$ resultará $y = -(2a)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(2a)^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{5}{2}} + $ &c.

Este método se puede emplear solamente quando la funcion de x es explícita; en otra ocasion darémos un método general para resolver esta dificultad; el qual se aplica igualmente á las funciones implícitas.

100. Supongamos que haciendo $x = 0$ en la fórmula $f(x + k) = y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{k^3}{2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + $ &c.; las expresiones y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. se transformen respectivamente en las cantidades finitas ó cero A, A', A'', A''', &c.; tendrémos $f(k) = A + A'k + \frac{A''}{2}k^2 + \frac{A'''}{2 \cdot 3}k^3 + $ &c.; y haciendo $k = x$, será $f(x) = y = A + A'x + \frac{A''}{2}x^2 + \frac{A'''}{2 \cdot 3}x^3 + $ &c., luego

Si haciendo x = o *en una funcion qualquiera* f (x) = y *de* x, *y en sus coeficientes diferenciales* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *&c., resultan las cantidades respectivas finitas ó cero* A, A′, A″, A‴ *&c.; será* $f(x) = y = A + A'x + \frac{A''}{2}x^2 + \frac{A'''}{2 \cdot 3}x^3 + $ *&c.*

Este teorema que se puede considerar como un corolario del de Taylor, es sumamente útil para desenvolver una funcion de x, en una serie de la forma $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 + $ &c., con tal que ninguna de las cantidades A, A', A'', A''' &c. sea infinita; cuya conversion es un recurso indispensable en muchas ocasiones, y particularmente en el cálculo integral, quando se trata de integrar por aproxîmacion.

Exemplo 1º Sea $f(x) = y = \sqrt{(a \pm x)}$; será $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 1}{2(a \pm x)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4(a \pm x)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\pm 3}{8(a \pm x)^{\frac{5}{2}}}$, &c.; y haciendo $x = 0$, tendrémos $y = \sqrt{a} = A$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 1}{2a^{\frac{1}{2}}} = A'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{4a^{\frac{3}{2}}} = A''$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\pm 3}{8a^{\frac{5}{2}}} = A'''$ &c.; y substituyendo estos valores en la fórmula antecedente, tendrémos $y = \sqrt{(a \pm x)} = a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2 \cdot 4a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^3}{2 \cdot 8a^{\frac{5}{2}}} - $ &c.

Exemplo 2º Sea $y = \sqrt{(a + bx + cx^2)}$; será $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}b + cx}{(a + bx + cx^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ac - \frac{1}{4}b^2}{(a + bx + cx^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(\frac{3}{4}b^2 - 3ac)(\frac{1}{2}b + cx)}{(a + bx + cx^2)^{\frac{5}{2}}}$, &c.; y haciendo $x = 0$, tendrémos $A = a^{\frac{1}{2}}$, $A' = \frac{b}{2a^{\frac{1}{2}}}$, $A'' = \frac{ac - \frac{1}{4}b^2}{a^{\frac{3}{2}}}$, $A''' = \frac{3b(b^2 - 4ac)}{8a^{\frac{5}{2}}}$, &c.; por consiguiente $y = \sqrt{(a + bx + cx^2)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{bx}{2a^{\frac{1}{2}}} + \frac{(4ac - b^2)x^2}{2 \cdot 4a^{\frac{3}{2}}} + \frac{b(b^2 - 4ac)x^3}{4 \cdot 4a^{\frac{5}{2}}} + $ &c.

Exemplo 3º Si quisiéramos convertir en serie el logaritmo de $a \pm x$, hariamos log. $(a \pm x) = y$, y tendriamos $\frac{dy}{dx} = \frac{\pm 1}{a \pm x}$, $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$\frac{-1}{(a\pm x)^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\pm 2}{(a\pm x)^3}$, &c.; de donde infeririamos $A = \log. a$, $A' = \frac{\pm 1}{a}$, $A'' = \frac{-1}{a^2}$, $A''' = \frac{\pm 2}{a^3}$, &c.; y substituyendo, log. $(a \pm x) = \log. a \pm \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} \pm \frac{x^3}{3a^3} +$ &c.

Exemplo. 4º Supongamos que se nos ofrezca convertir en serie la funcion a^x. Haciendo $y = a^x$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = a^x \log. a$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a^x (\log. a)^2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x (\log. a)^3$, &c.; por consiguiente $A = a^0 = 1$, $A' = \log. a$, $A'' = (\log. a)^2$, $A''' = (\log. a)^3$, &c., y $y = a^x = 1 + x \log. a + \frac{x^2}{2} (\log. a)^2 + \frac{x^3}{2\cdot 3} (\log. a)^3 +$ &c.

Exemplo 5º Sea $y = \text{sen. } x$; será $\frac{dy}{dx} = \cos. x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{sen. } x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos. x$, &c.; de donde inferirémos $A = 0$, $A' = 1$, $A'' = 0$, $A''' = -1$, $A^{IV} = 0$, $A^{V} = 1$, &c.; y substituyendo $y = \text{sen. } x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} -$ &c.

Esta equacion expresa el valor del seno en una serie ordenada segun las potencias del arco. Si quisiéramos al contrario el valor del arco expresado por una serie ordenada segun las potencias del seno; llamariamos y el arco, y su seno x, y tendriamos (núm. 77.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, $\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{3(3+24x^2+8x^4)}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$, &c.; y haciendo $x = 0$, hallariamos $A = 0$, $A' = 1$, $A'' = 0$, $A''' = 1$, $A^{IV} = 0$, $A^{V} = 3\cdot 3$, &c.; y por consiguiente $y = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 3\, x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} +$ &c. $= \text{sen. } y + \frac{\text{sen.}^3 y}{2\cdot 3} + \frac{3\, \text{sen.}^5 y}{2\cdot 4\cdot 5} +$ &c.

Si suponemos el arco $y = 30°$, su seno x será $= \frac{1}{2}$, y tendrémos arco de $30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3\,(2)^3} + \frac{3\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\,(2)^5} + \ldots\ \frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\,(2)^7} +$ &c.; ó llamando A el primer término $\frac{1}{2}$ de esta serie, B el segundo, D el tercero, &c.; será *arco de* $30° = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4} A}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 3\cdot \frac{1}{4} B}{4\cdot 5} + \frac{5\cdot 5\, \frac{1}{4} C}{6\cdot 7} +$ &c.; y finalmente *el arco de* 180°, ó la semicircunferencia del círculo, $= 6\left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4} A}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 3\cdot \frac{1}{4} B}{4\cdot 5} + \frac{5\cdot 5\cdot \frac{1}{4} C}{6\cdot 7} + \frac{7\cdot 7\cdot \frac{1}{4} D}{8\cdot 9} + \text{\&c.}\right) = 3,1415$ &c.

Exemplo 6º Si fuese $y = \cos. x$, seria $\frac{dy}{dx} = -\text{sen. } x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos. x$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \text{sen. } x$, $\frac{d^4y}{dx^4} = \cos. x$, &c.; y por consiguiente $A = 1$, $A' = 0$, $A'' = -1$, $A''' = 0$, $A^{IV} = 1$, &c., y cos. $x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4} -$ &c.

Exemplo 7º Sea y el arco cuya tangente $= x$; será (núm. 77.) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{2\cdot 3\cdot 4(x-x^3)}{(1+x^2)^4}$, $\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{2\cdot 3\cdot 4(1-10x^2+5x^3)}{(1+x^2)^5}$, &c.; de donde inferirémos $A = 0$, $A' = 1$, $A'' = 0$, $A''' = -2$, $A^{IV} = 0$, $A^{V} = 2\cdot 3\cdot 4$, &c., y $y = x - \frac{2x^3}{2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\, x^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} +$ &c. $= \text{tang. } y - \frac{\text{tang.}^3 y}{3} + \frac{\text{tang.}^5 y}{5} +$ &c. Si hacemos $y = 45°$, su tangente será $= 1$, y tendrémos *arco de* $45° = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ &c. El célebre *Leibnitz* fue el primero que halló esta serie.

101. Si alguna de las cantidades A, A', A'' &c. fuese infinita; seria señal de que la funcion propuesta no puede convertirse en una serie de la forma $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c.; y dicha funcion incluirá necesariamente cantidades fraccionarias, irracionales ó transcendentes.

En muchos de estos casos se podrá sin embargo transformar la funcion propuesta en una serie de monomios, dividiéndola en dos factores; el uno monomio, y que se separa; el otro polinomio que se supone $= y$, y se desenvuelve en una serie de la forma $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. por el método antecedente; la qual se multiplica por el factor monomio que se separó, y resulta una serie de monomios igual á la funcion propuesta. Esto se verá mas claramente en los dos exemplos siguientes.

Exemplo 1º Sea $\sqrt{(ax \pm x^2)}$ la funcion propuesta; llamándola y tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{a \pm 2x}{2(ax \pm x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-a^2}{4(ax \pm x^2)^{\frac{3}{2}}}$, &c.; y haciendo $x = 0$, será $A = 0$, $A' = \infty$, $A'' = \infty$, &c.; de donde inferirémos que la funcion $\sqrt{(ax \pm x^2)}$ no se puede convertir en una serie de la forma $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c.; pero dándole la forma $x^{\frac{1}{2}}(a \pm x)^{\frac{1}{2}}$, y haciendo $(a \pm x)^{\frac{1}{2}} = y$, tendrémos (número 100.) $(a \pm x)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2\cdot 4a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^3}{4\cdot 4a^{\frac{5}{2}}} -$ &c., y por consiguiente $x^{\frac{1}{2}}(a \pm x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(ax \pm x^2)} = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2\cdot 4a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^{\frac{7}{2}}}{4\cdot 4a^{\frac{5}{2}}} -$ &c.

Exemplo 2º La funcion $\frac{a+bx}{x^{\frac{3}{2}}+cx^{\frac{5}{2}}}$ no puede convertirse en una serie $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c.; pero si la transformamos en $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a+bx}{1+cx}$, y hacemos $y = \frac{a+bx}{1+cx}$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{b-ac}{(1+cx)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c(ac-b)}{(1+cx)^3}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2 \cdot 3\, c^2 (b-ac)}{(1+cx)^4}$, &c.; de donde inferirémos $A = a$, $A' = b - ac$, $A'' = 2c\,(ac - b)$, $A''' = 2 \cdot 3\, c^2\,(b - ac)$, &c., $\frac{a+bx}{1+cx} = a + (b - ac)\,x + c\,(ac - b)\,x^2 + c^2\,(b - ac)\,x^3 +$ &c., y por consiguiente $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a+bx}{1+cx} =$

$$\frac{a+bx}{x^{\frac{3}{2}}+cx^{\frac{5}{2}}} = \frac{a}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{b-ac}{x^{\frac{1}{2}}} - c\,(b-ac)\,x^{\frac{1}{2}} + c^2\,(b-ac)\,x^{\frac{3}{2}} - \&c.$$

102. Bastan por ahora estas aplicaciones: en otra ocasion las continuarémos y darémos un método analítico independiente del cálculo diferencial, el qual se aplica igualmente á las funciones implícitas sean los que fueren los exponentes de la variable en la serie. Ahora terminarémos este asunto demostrando el teorema antecedente independientemente del de Taylor.

Sea y una funcion de x que se puede convertir en una serie de la forma $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c.; siendo K, B, C &c. constantes indeterminadas; será $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 +$ &c., $\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 6Dx + 12Ex^2 +$ &c., $\frac{d^3y}{dx^3} = 6D + 24Ex +$ &c. &c.; y como estas equaciones deben verificarse, sea el que fuere el valor de x, harémos $x = 0$, y tendrémos $y = K$, $\frac{dy}{dx} = B$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6D$ &c.; pero hemos supuesto (núm. 100.) que quando $x = 0$, es $y = A$, $\frac{dy}{dx} = A'$, $\frac{d^2y}{dx^2} = A''$, $\frac{d^3y}{dx^3} = A'''$, &c.; luego $K = A$, $B = A'$, $C = \frac{A''}{2}$, $D = \frac{A'''}{2 \cdot 3}$, &c., y por consiguiente $y = A + A'x + \frac{A''}{2}x^2 + \frac{A'''}{2 \cdot 3}x^3 +$ &c.

De los máxîmos y mínimos de las funciones de una cantidad variable.

103. Quando una funcion $f(x) = y$ de la variable x es tal, que haciendo variar continuamente x; sea creciendo ó decreciendo, se halla entre los valores que resultan, alguno que sea mayor ó menor que los valores que le preceden, y que le siguen inmediatamente; dicho valor se llama *un máxîmo* ó *un mínimo*; un máxîmo si fuere mayor que los que le preceden y que le siguen inmediatamente; y un

mínimo, si fuese menor. Por exemplo: haciendo variar x en la funcion $1 + 8x - x^2 = y$, se halla el valor $y = 17$ correspondiente á $x = 4$, mayor que los valores que le preceden, y que le siguen inmediatamente; esto es, mayor que las cantidades que resultan substituyendo en lugar de x otras cantidades menores y mayores que 4; y por esta razon, el valor 17 se llama *un máxîmo* de la funcion $1 + 8x - x^2$; ó se dice que dicha funcion es *un máxîmo* quando $x = 4$, en cuyo caso es $y = 17$.

Del mismo modo, si la ordenada PM de la curva CMC (*fig.* 5. y 6.), es mayor ó menor que las ordenadas adyacentes $'P'M$, $P'M'$; dicha ordenada se llama un máxîmo en el primer caso (*fig.* 5.); y un mínimo en el segundo (*fig.* 6.).

104. A fin de aclarar esta difinicion, nos parece conveniente advertir, que para que una cantidad sea un máxîmo ó un mínimo; no es necesario que todos los valores que le preceden y le siguen sean menores ó mayores que ella; pues basta que lo sean los que la preceden y siguen inmediatamente. Por exemplo: aunque la ordenada pm de la curva CMC (*fig.* 7.) es mayor que PM, esta ordenada será sin embargo un máxîmo, si las ordenadas adyacentes $'p'm$, $p'm'$ son menores que PM; así la única condicion que se necesita para que el valor G de y correspondiente á $x = g$, sea un máxîmo ó un mínimo, es que substituyendo en lugar de x las cantidades $g + k$, $g - k$, siendo k una cantidad tan pequeña como se quisiere; los dos valores de y que resulten, sean ámbos menores ó mayores que G. De aquí inferirémos varias conseqüencias.

105. 1ª *Una funcion de* x *puede tener muchos máxîmos y mínimos.* Esto se ve evidentemente en la *fig.* 8., en la qual las ordenadas PM mayores que las que las preceden y siguen inmediatamente son máxîmos; y las ordenadas pm, menores que las adyacentes á uno y otro lado, son mínimos.

106. 2ª *Si mientras que* x *crece ó decrece continuamente; f(x) aumenta ó disminuye sin fin; esta funcion no tendrá máxîmo ni mínimo alguno:* tal es por exemplo la funcion $ax^3 + bx$.

107. 3ª *Si* y *es un máxîmo ó un mínimo quando* x = g; ay *lo será tambien en el mismo supuesto.*

108. 4ª *En el mismo supuesto de ser* y *un máxîmo ó un mínimo quando* x = g; — y *será al contrario un mínimo ó un máxîmo.* Por exemplo: siendo un máxîmo la funcion $1 + 8x - x^2 = y$ quando $x = 4$ (núm. 103.); será un mínimo la funcion $x^2 - 8x - 1 = -y$ en el mismo supuesto.

109. Supongamos que el valor G de la funcion y correspondiente á $x = g$, sea un máxîmo ó un mínimo: este valor será mayor que los dos que resultan substituyendo $g \pm k$ en lugar de x, siendo k una cantidad tan pequeña como se quisiere; ó menor que dichos valores segun sea G un máxîmo ó un mínimo; y como las cantidades que re-

sultan (número 97.) de esta substitucion, son $G \pm kH + \frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \&c.$, tendrémos necesariamente quando G fuese un máxîmo, la condicion $G > G \pm kH + \frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \&c.$; y quando G sea un mínimo, $G < G \pm kH + \frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \&c$; ó bien en el caso del máxîmo $\pm kH + \frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \&c. < 0$ (1), y en el del mínimo $\pm kH + \frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \&c. > 0$. Pero (número 13.) la cantidad arbitraria k se puede tomar tan pequeña, que el primer término kH de la serie antecedente sea mayor que la suma de todos los demas; luego á causa del doble signo $\pm$ que tiene dicho término; las condiciones antecedentes del máxîmo y del mínimo no podrán verificarse, á menos de ser $H \left(= \frac{dy}{dx}\right) = 0$; luego

Quando la funcion y *es un máxîmo ó un mínimo; su coeficiente diferencial* $\frac{dy}{dx}$ *es necesariamente igual á cero.*

110. Por consiguiente, *si una funcion* y *de la variable* x *es susceptible de un valor máxîmo ó mínimo* = G; *el valor* g *de* x *que le corresponde, será una raiz de la equacion* $\frac{dy}{dx} = 0$.

111. Puesto que en el máxîmo y en el mínimo es $H = 0$; será necesariamente $\frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \&c. < 0$ en el máxîmo, y > 0 en el mínimo. Por lo que, como el término $\frac{k^2}{2} I$ se puede suponer mayor que la suma de todos los demas (núm. 13.), inferirémos que *si el valor de* I *ó de su igual* $\frac{d^2y}{dx^2}$, *no es cero; será negativo en el máxîmo, y positivo en el mínimo.*

Si fuese $I = 0$, la condicion del máxîmo seria $\pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \frac{k^4}{2\cdot 3\cdot 4} L \pm \&c. < 0$, y la del mínimo $\pm \frac{k^3}{2\cdot 3} K + \frac{k^4}{2\cdot 3\cdot 4} L \pm \&c. > 0$; las quales no pueden verificarse á menos de ser $K = \frac{d^3y}{dx^3} = 0$, de donde inferirémos, que *si en el máxîmo ó en el mínimo, es* $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; $\frac{d^3y}{dx^3}$ *lo será igualmente.*

112. Del mismo modo probariamos, que si $L = \frac{d^4y}{dx^4}$, no desaparece, será esta cantidad negativa en el máxîmo y positiva en el mínimo: que si L desaparece; $M = \frac{d^5y}{dx^5}$, desaparecerá tambien &c. De donde concluirémos generalmente

1º *Que el valor* g *de* x *correspondiente al máxîmo ó al mínimo, reduce á cero un número impar de coeficientes diferenciales* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ *&c.; y el primero de estos coeficientes que no desaparece, es una cantidad negativa en el máxîmo, y positiva en el mínimo.* Y recíprocamente, *que si uno de los valores* g *de* x *sacado de la equacion* $\frac{dy}{dx} = 0$, *reduce á cero un número impar de coeficientes diferenciales* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, *&c.; el valor correspondiente* G *de* y *será un máxîmo ó un mínimo, segun fuese negativo ó positivo el primero de los coeficientes que no desaparece.*

2º *Si una de las raices* $x = g$ *de la equacion* $\frac{dy}{dx} = 0$ *reduce á cero un número par de coeficientes diferenciales* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, *&c.; el valor correspondiente de la funcion* y *no será un máxîmo ni un mínimo.*

Esto hace ver que la proposicion inversa de la del núm. 109 no es verdadera: es decir, que no se puede afirmar que quando es $\frac{dy}{dx} = 0$, la funcion y es un máxîmo ó un mínimo; pues para ello es necesario ademas que se verifiquen las condiciones que acabamos de expresar.

Maclaurin, célebre matemático Escocés, fue el primero que hizo estas observaciones importantes (1).

113. Si y es un máxîmo ó un mínimo quando $x = g$; sus potencias sucesivas y^2, y^3, y^4 &c. serán igualmente máxîmos ó mínimos en el mismo supuesto. Pero si y fuese negativa; y^2, y^4, y las demas potencias pares serán mínimos ó máxîmos: esto es, mínimos si $-y$ fuese un máxîmo; y máxîmos si $-y$ fuese un mínimo; pues siendo, por exemplo, $-y$ un mínimo quando $x = g$, será (núm. 108.) y un máxîmo en el mismo supuesto, y por consiguiente lo serán tambien $y^2 = (-y)^2$, $y^4 = (-y)^4$, &c.

114. En el supuesto de ser y un máxîmo ó un mínimo, será $\frac{1}{y}$ un mínimo ó un máxîmo, y recíprocamente.

115. Si el el valor g de x sacado de la equacion $\frac{dy}{dx} = 0$, hiciese infinito alguno de los coeficientes diferenciales $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c.;

1 *Las expresiones* $A > 0$, $A < 0$, *significan que la cantidad* A *es positiva en el primer caso, y negativa en el segundo.*

1 *A Treatise of fluxions &c. núm.* 246 *y siguientes;* 858 *y* 859.

la funcion propuesta no se podria desenvolver en una serie de la forma $G \pm kH + \frac{k^2}{2} I \pm \frac{k^3}{2 \cdot 3} K +$ &c. en el supuesto de $x = g \pm k$ (núm. 98.), y por consiguiente no podria aplicarse á una funcion semejante lo que hemos demostrado en los números 109. y siguientes.

Para averiguar en este caso si al valor g de x corresponde efectivamente un máxîmo ó un mínimo; se substituirán sucesivamente en lugar de x, $g - k$, $g + k$; y suponiendo que las cantidades que resultan son $'G$, G, G'; si siendo k tan pequeña como se quisiere, las cantidades $'G$, y G' son ambas reales y menores que G, será (n. 104.) esta cantidad un máxîmo; y un mínimo si $'G$ y G' fuesen ambas reales y mayores que G; pero si estas condiciones no se verifican, G no será ni un máxîmo ni un mínimo.

Pero hemos de advertir que rará vez se ofrecerá valerse de este recurso; pues por lo comun sucede que quando alguno de los coeficientes diferenciales $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. es infinito; la funcion á la qual pertenecen se puede transformar en otra racional y entera por medio de lo dicho (núm. 113.); y luego se aplicará á la funcion transformada lo demostrado respeto de estas funciones, conforme verémos muy en breve.

116. Lo dicho en los números antecedentes manifiesta lo que se debe practicar para averiguar si una funcion qualquiera $f(x) = y$ de una variable x, tiene algun máxîmo ó mínimo; y los valores de x que les corresponden. Desde luego se formará la equacion $\frac{dy}{dx} = 0$ (núm. 110.), y suponiendo que $x = g$ es una de sus raices reales, si el número de los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c., que se reducen á cero substituyendo g por x, es impar, siendo al mismo tiempo real y finito el primero que no desaparece; el valor de y correspondiente á $x = g$, será un máxîmo ó un mínimo (núm. 112.) segun fuere negativo ó positivo el valor de dicho coeficiente diferencial. Pero si el número de los coeficientes que se desvanecen por el supuesto de $x = g$ es par; ó si siendo impar dicho número, el primero de los coeficientes que no se desvanece es una cantidad imaginaria; el valor correspondiente de y no será ni un máxîmo ni un mínimo.

Practicando pues lo mismo con las demas raices de la equacion $\frac{dy}{dx} = 0$; se conocerán todos los máxîmos y mínimos de la funcion propuesta, y los valores de x que les corresponden.

117. Si la funcion propuesta incluyese cantidades irracionales ó fraccionarias, puede suceder que la primera de las diferenciales que no desaparece por el supuesto de $x = g$ sea infinita: en este caso se le dará á la funcion propuesta la forma racional entera; pero si esto

no se pudiese conseguir (lo que sucederá rara vez), se practicará lo dicho (núm. 115.).

Exemplo 1º Sea $1 + 8x - x^2$ la funcion propuesta. Haciéndola $= y$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = 8 - 2x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$, y haciendo $\frac{dy}{dx} = 8 - 2x = 0$, $x = 4$; de donde inferirémos (á causa de ser negativo el valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$), que la funcion propuesta es un máxîmo quando $x = 4$; y como este valor hace $y = 17$, será 17 un máxîmo valor de la funcion $1 + 8x - x^2$.

Exemplo 2º Sea la funcion propuesta $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x + b = y$: será $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6ax + 3a^2$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6a$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$; la equacion $3x^2 - 6ax + 3a^2 = 0$, ó $(x - a)^2 = 0$, tiene dos raices iguales $x = a$, $x = a$, y como este valor de x reduce á cero un número par de límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, concluirémos que la funcion propuesta no tiene máxîmo ni mínimo alguno.

Exemplo 3º Si la funcion propuesta fuese $\frac{x}{1 + x^2}$; haciéndola $= y$ tendriamos $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6x - 2x^3}{(1 + x^2)^3}$, &c.; y haciendo $\frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \left(= \frac{dy}{dx}\right) = 0$, los dos valores $x = 1$, $x = -1$; el primero transforma $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$, y el segundo en $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; de donde inferirémos (núm. 111.) que la funcion $\frac{x}{1 + x^2}$ es un máxîmo quando $x = 1$, y un mínimo quando $x = -1$.

Exemplo 4º Sea $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$; será $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}$, &c.: si hicieramos $\frac{dy}{dx} = 0$, hallariamos $x = \infty$, cuyo valor nada significa por reducir á cero todas las diferenciales $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ &c.; pero haciendo uso de la observacion núm. 113, verémos, que si $x^{\frac{2}{3}}$ es un máxîmo ó un mínimo $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^2$ lo será igualmente; harémos pues $y = x^2$ y tendrémos $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, &c.: la equacion $\frac{dy}{dx} = 2x = 0$ da $x = 0$, y como $\frac{d^2y}{dx^2}$ es una cantidad positiva, inferirémos que la funcion $\sqrt[3]{x^2}$ es un mínimo quando $x = 0$.

Exemplo 5º Si fuese $\sqrt[3]{(x - a)^5} = (x - a)^{\frac{5}{3}}$ la funcion propuesta; haciéndola $= y$ tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}(x - a)^{\frac{2}{3}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{10}{9(x-a)^{\frac{1}{3}}}$, &c., y haciendo $\frac{5}{3}(x-a)^{\frac{2}{3}}=0$; $x=a$; pero como en este supuesto es infinito el límite $\frac{d^2y}{dx^2}$, no se puede asegurar que á $x=a$ corresponde un máxîmo ó un mínimo. Si para saberlo con certeza practicásemos lo dicho (núm. 115.), hallariamos que quando $x=a$, y no es un máxîmo ni un mínimo. Pero en este exemplo, como en el antecedente, se puede dar á la funcion propuesta la forma racional; pues si $(x-a)^{\frac{5}{3}}$ es un máxîmo ó un mínimo, lo será tambien $(x-a)^5$; y como esta cantidad no tiene ningun máxîmo ni mínimo, tampoco le tendrá la funcion propuesta.

118. Apliquemos los principios antecedentes á la resolucion de algunos problemas.

Problema 1º *Dividir la línea* AB (fig. 9.) *en un punto* C, *de manera que el rectángulo* AC × CB *sea el mayor posible.*

Resolucion. Llamemos a la línea AB, y x la distancia AC; BC será $=a-x$, y el rectángulo $AC\times CB=ax-x^2$; y como este rectángulo debe ser el mayor posible ó un máxîmo, haciéndole igual á y tendrémos $\frac{dy}{dx}=a-2x=0$, equacion que da $x=\frac{a}{2}=\frac{AB}{2}$; á cuyo valor corresponde en efecto un máxîmo á causa de que $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$ es una cantidad negativa; por consiguiente, *el rectángulo* AC × CB *será el mayor posible quando el punto* C *esté en medio de* AB.

Problema 2º *Dados dos números qualesquiera* a, b, *hallar otro número tal que restado de* a *y de* b, *el producto de las restas sea el menor posible.*

Resolucion. Si llamamos x el número que buscamos, las restas serán $a-x$, $b-x$, y su producto $ab-(a+b)x+x^2$. Haciendo pues $y=ab-(a+b)x+x^2$, tendrémos $\frac{dy}{dx}=-a-b+2x=0$, de donde inferirémos $x=\frac{a+b}{2}$, y como $\frac{d^2y}{dx^2}=2$ es una cantidad positiva, podemos asegurar que el número que se pide es $\frac{a+b}{2}$, y que el producto $\frac{a-b}{2}\cdot\frac{b-a}{2}=-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ de las restas es con efecto el menor posible. Sea, por exemplo, $a=10$, y $b=6$, será $\frac{a+b}{2}=8$, y el producto $-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ de las restas, igual á -4; así qualquiera otro número que se reste de 10 y de 8 el producto de las restas será mayor que -4.

Problema 3º *Determinar en que puntos tiene la elipse* ADBEA *su mayor, y su menor ordenada* (fig. 10.) *y su mayor y menor abscisa.*

Resolucion. Llamando el exe mayor AB, a; el menor DE, b; la abscisa AP, x; y la ordenada correspondiente PM, y; será y

$=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(ax-x^2)}$, $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{b}{a}\cdot\frac{a-2x}{2(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\mp\ldots\ldots\frac{ba}{4(ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$: y haciendo $\frac{dy}{dx}=0$, tendrémos $x=\frac{a}{2}$; cuyo valor transforma $\frac{d^2y}{dx^2}$ en $\mp\frac{2b}{a^2}$; de donde concluirémos (núm. 116.), *que quando* $x=\frac{a}{2}=AC$, *la ordenada es un máxîmo y un mínimo.*

Para hallar el valor de la ordenada en el máxîmo y en el mínimo, substituirémos por x su valor en $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(ax-x^2)}$, y resultará $y=\pm\frac{b}{2}$; esto es, $y=\frac{b}{2}=CD=$ máxîmo, $y=-\frac{b}{2}=CE=$ mínimo; ó bien como el signo inferior pertenece á las ordenadas de la semielipse inferior AEB, $-\frac{b}{2}=CE$ se puede considerar como un máxîmo de dicha semielipse. Para determinar la mayor y la menor abscisa, harémos $\frac{dx}{dy}=\pm\frac{a}{b}\cdot\frac{2(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}{a-2x}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{2y}{a-2x}=0$, y tendrémos $y=0$, cuyo valor substituido en la equacion de la curva, da $x=0$, $x=a$: la abscisa $x=0$ es un mínimo ó la menor; y la abscisa $x=a=AB$ es un máxîmo ó la mayor.

La mayor y la menor ordenadas se pueden hallar mas fácilmente en virtud de lo dicho (núm. 113.); pues si $\frac{b}{a}\sqrt{(ax-x^2)}$ es un máxîmo ó un mínimo; lo será igualmente su quadrado $\frac{b^2}{a^2}(ax-x^2)$, y tambien (núm. 107.) $ax-x^2$; haciendo pues esta funcion igual á una nueva variable z (para distinguirla de la ordenada y), tendrémos $\frac{dz}{dx}=a-2x$, y $\frac{d^2z}{dx^2}=-2$; la equacion $\frac{dz}{dx}=a-2x=0$ da $x=\frac{a}{2}$, á cuyo valor corresponde un máxîmo, por ser negativo el de $\frac{d^2z}{dx^2}$; será pues $\frac{b}{a}\sqrt{(ax-x^2)}$ un máxîmo quando $x=\frac{a}{2}$, y por consiguiente (núm. 108.) $-\frac{b}{a}\sqrt{(ax-x^2)}$ un mínimo en el mismo supuesto. Substituyendo el valor $\frac{a}{2}$ de x; hallariamos los mismos valores que antes $y=\frac{b}{2}$, $y=-\frac{b}{2}$.

Problema 4º *Hallar un número que dividido por su logaritmo, el quociente sea menor que el de otro número qualquiera dividido por el logaritmo que le corresponde.*

Resolucion. Llamando x el número que se busca, será $\frac{x}{\log. x}$ el quociente que debe ser un mínimo; y haciéndole $= y$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{\log. x - 1}{(\log. x)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 - \log. x}{x(\log. x)^3}$: la equacion $\frac{\log. x - 1}{(\log. x)^2} = 0$, da $\log. x = 1$, ó (núm. 84.) $x = e$; y como en este supuesto es $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{e}$, inferirémos que quando $x = e$, la funcion $\frac{x}{\log. x}$ es un mínimo, y por consiguiente que $e =$ (no pasando de siete decimales) 2,7182818 es el número pedido.

Aunque el número 2,7182818 lo hemos determinado en el supuesto de los logaritmos naturales, ó Neperianos, es sin embargo el mismo que se hallaria suponiendo otro sistema qualquiera de logaritmos: pues como el logaritmo de un número qualquiera x en otro sistema, cuyo módulo es a, es igual á $a \log. x$, entendiendo por $\log. x$ el logaritmo *Neperiano* de x; será en dicho sistema $\frac{x}{a \log. x}$ la cantidad que debe ser un mínimo; y como esta cantidad es un mínimo (núm. 107.) quando lo es $\frac{x}{\log. x}$, el resultado será el mismo en ambos sistemas. Siendo, por exemplo, 0,4342945 el logaritmo de 2,7182818 en las tablas ordinarias, ó en el sistema de *Brigs*; la cantidad $\frac{2,7182818}{0,4342945} = \frac{27182818}{4342945}$ será menor que el quociente de otro número qualquiera dividido por el logaritmo que le corresponde en dichas tablas.

Lo dicho en este exemplo debe entenderse solamente de los números cuyos logaritmos son positivos; pues entre los números cuyos logaritmos son negativos no hay mínimo alguno, y por consiguiente ningun quociente menor que todos los demas.

Problema 5º *Determinar el rectángulo mayor que se puede inscribir en un círculo dado* FABED (fig. 11.).

Resolucion. Sea $ABED$ el rectángulo que se pide; su diagonal AE será un diámetro del círculo FBE; llamándola a y x uno de los lados AB del rectángulo, el otro lado BE será $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$, y la superficie del rectángulo $AB \times BE = x\sqrt{(a^2 - x^2)}$, cuya cantidad, ó (núm. 113.) su quadrado $x^2(a^2 - x^2)$ debe ser un mínimo; harémos pues $y = x^2(a^2 - x^2)$, y tendrémos $\frac{dy}{dx} = 2a^2x - 4x^3$, y $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2 - 12x^2$: la equacion $\frac{dy}{dx} = 2a^2x - 4x^3 = 0$ da $x = 0$, $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, y como $\frac{d^2y}{dx^2}$ es una cantidad negativa en el supuesto de $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = AB$; y ó el rectángulo $ABED$ será un máxîmo en este supuesto. Substituyendo este valor de x en la equacion $BE = \sqrt{(a^2 - x^2)}$, la transformará en $BE = \frac{a}{\sqrt{2}}$, de donde inferirémos $AB = BE$, y por consiguiente, que *el rectángulo mayor que se puede inscribir en un círculo dado es un quadrado.*

El valor $x = 0$ da un mínimo á causa de $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a^2$.

Problema 6º *¿Quál es el arco cuyo seno es un máxîmo ó un mínimo?*

Resolucion. Sea x este arco, é y su seno; tendrémos $y = \text{sen.}\, x$, $\frac{dy}{dx} = \cos. x$, y $\frac{d^2y}{dx^2} = - \text{sen.}\, x$. Si llamamos π la semicircunferencia; la equacion $\cos. x \left(= \frac{dy}{dx}\right) = 0$ da los valores siguientes de x, $\pm \frac{\pi}{2}$, $\pm \frac{3\pi}{2}$, $\pm \frac{5\pi}{2}$, &c.; los arcos $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, &c. tienen el seno máxîmo é $= 1$ á causa de $\frac{d^2y}{dx^2} = -1$; y á los arcos $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, corresponde el seno mínimo, é $= -1$.

Problema 7º *Dado un punto* B *en el exe de la parábola* AC (*fig.* 12.); *determinar el punto* M *tal, que la línea* BM *sea la mas corta de todas las que se pueden tirar del punto* B *á la parábola.*

Resolucion. Báxese desde el punto M la perpendicular MP al exe AB; y llamando AB, a; PB, x; y p el parámetro del exe principal AD; será $AP = a - x$, $PM = \sqrt{(pa - px)}$, y $BM = \sqrt{(PB)^2 + (PM)^2} = \sqrt{(x^2 + pa - px)}$, cuya cantidad, ó su quadrado, debe ser un mínimo. Haciendo pues $y = x^2 - px + pa$, tendrémos la equacion $\frac{dy}{dx} = 2x - p = 0$, que da $x = \frac{1}{2}p$; y como $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$, inferirémos que á $x = \frac{1}{2}p$ corresponde en efecto un mínimo; tomando pues BP igual á la mitad del parámetro, y tirando la ordenada PM, el punto M será el que se pide. Pero si la línea BP es igual á $\frac{1}{2}p$, la BM es normal en el punto M (véase el núm. 135.): luego *entre todas las líneas que se pueden tirar á la parábola desde un punto dado* B *en el exe, la normal es la menor.*

Problema 8º *Dividir la cantidad* a *en dos partes tales, que el producto de la potencia* m *de la primera, multiplicada por la potencia* n *de la segunda, sea el mayor de todos los productos semejantes que se puedan formar.*

Resolucion. Sea x una parte de a, la otra será $a - x$; y el producto, cuyo máxîmo se busca, $x^m(a - x)^n$. Haciéndole $= y$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}(a - x)^n - nx^m(a - x)^{n-1} = (ma$

$-mx-nx)\,x^{m-1}(a-x)^{n-1}=0$, cuya equacion da $ma-mx-nx=0$, $x^{m-1}=0$, $(a-x)^{n-1}=0$; ó $x=\frac{ma}{m+n}$, $x=0$, $x=a$; al valor $\frac{ma}{m+n}$ de x, corresponde un máxîmo á causa de que substituido en $\frac{d^2y}{dx^2}$, resulta una cantidad negativa; y á cada uno de los otros dos valores, corresponde un mínimo $=0$ en el supuesto de ser pares los exponentes m, n, de las potencias.

De las funciones que en ciertos casos particulares se presentan baxo las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, y $\infty-\infty$.

119. Quando una funcion de una variable x es fraccionaria, suele suceder que substituyendo en lugar de x ciertos valores particulares, el numerador y el denominador se reducen á cero, y por consiguiente dicha funcion á la expresion indeterminada $\frac{0}{0}$: tal es, por exemplo, la funcion $\frac{a^2-x^2}{a-x}$ en el supuesto de $x=a$. Estas funciones tienen sin embargo un valor determinado, el qual puede ser *cero*, *finito* ó *infinito*; pues es evidente que no habiendo en ellas mas cantidad variable que x, si esta se supone igual á una cantidad determinada, su funcion lo será igualmente: por exemplo; dividiendo el numerador y el denominador de la funcion $\frac{a^2-x^2}{a-x}$ por el denominador $a-x$, se reduce á $a+x$, cuya cantidad es igual á $2a$ en el supuesto de $x=a$; por consiguiente, aunque la funcion $\frac{a^2-x^2}{a-x}$ se reduce á $\frac{0}{0}$ quando $x=a$ tiene en este caso un valor determinado é igual á $2a$.

120. Si se observa con cuidado una funcion qualquiera que se reduce á $\frac{0}{0}$ en el supuesto de $x=a$; se verá que su numerador y denominador desaparecen á un mismo tiempo, á causa de que en su forma actual ó en otra que se les puede dar, tienen un factor comun $(x-a)^n$, que reduciéndose á cero quando $x=a$, reduce igualmente á cero dicho numerador y denominador. Por lo que, quando una funcion se reduce á $\frac{0}{0}$ en el supuesto de $x=a$; se podrá hallar su valor, buscando el factor $(x-a)^n$ comun al numerador y denominador, y suprimiéndole en ambos.

Si se nos pidiese, por exemplo, el valor de la funcion............

$\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{b(x^2-2ax+a^2)}$, que se reduce á $\frac{0}{0}$ quando $x=a$; la transformariamos en $\frac{(a+x)(x-a)^2}{b(x-a)^2}$; y suprimiendo el factor comun $(x-a)^2$, se reduciria á $\frac{a+x}{b}=\frac{2a}{b}$ en el supuesto de $x=a$.

Pero ademas de ser muy embarazoso este método aun en los casos comunes, seria impracticable en algunos complicados, particularmente quando la funcion propuesta incluyese cantidades irracionales ó transcendentes; como, por exemplo, la funcion $\frac{x^x-x}{1-x+\log.x}$ que se reduce á $\frac{0}{0}$ en el supuesto de $x=1$; por cuya razon, abandonando enteramente dicho método, vamos á dar otro general y sencillo fundado en el cálculo diferencial, el qual se aplica con la misma facilidad á toda suerte de funciones.

121. Hemos visto (núm. 85.) que quando ciertos valores particulares de x y de y reducen el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}=-\frac{A}{B}$ á $\frac{0}{0}$; se puede determinar su valor diferenciando sucesivamente las equaciones $B\frac{dy}{dx}+A=0$, (a), (b), &c. hasta llegar á una equacion en la qual alguno de los coeficientes C, D, E &c. no se reduzca á cero.

Podemos pues suponer que una funcion qualquiera $\frac{A}{B}$ de una variable x que en el supuesto de $x=a$ se reduce á $\frac{0}{0}$, representa el límite $\frac{dy}{dx}$ de la razon entre las diferencias de dos cantidades variables x é y; por consiguiente, haciendo $\frac{dy}{dx}=\frac{A}{B}$, ó $B\frac{dy}{dx}=A$, y considerando que A y B son solamente funciones de x, se determinará el valor de $\frac{dy}{dx}$, ó de la funcion propuesta, diferenciando sucesivamente A y B; ó lo que es lo mismo, el numerador y el denominador de dicha funcion, hasta encontrar con alguno de los coeficientes diferenciales $\frac{d^nA}{dx^n}$, $\frac{d^nB}{dx^n}$, que no desaparezca por el supuesto de $x=a$, en cuyo caso $\frac{d^nA}{dx^n}:\frac{d^nB}{dx^n}$ será el valor que se busca.

Esta es la regla que por lo comun se da para determinar el valor de una funcion qualquiera de una variable x, que en ciertos casos particulares se reduce á $\frac{0}{0}$. Pero como dicha regla se suele deducir indirectamente de algunas consideraciones particulares, y principalmente suponiendo la funcion propuesta $\frac{A}{B}$ igual al coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$ conforme acabamos de hacer; nos parece mejor tomar un rumbo que nos conducirá directamente á la referida regla; y luego añadir algunas observaciones indispensables para hacer mas fácil su aplicacion, y darle toda la generalidad que se le supone.

122. Sean $y = f(x)$, $z = F(x)$ dos funciones de x, que se reducen á cero quando $x = a$; y llamemos $\mathcal{C}$ el valor de $\frac{y}{z}$ en este supuesto: si substituimos en y y en z, $x + k$ en lugar de x, tendrémos (núm. 89.) $f(x+k) = y + \frac{dy}{dx} k + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \&c.$, y $F(x+k) = z + \frac{dz}{dx} k + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{k^3}{2 \cdot 3} + \&c.$; y considerando que y y z desaparecen quando $x = a$; será en este caso

$$\frac{f(x+k)}{F(x+k)} = \frac{\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k}{2} + \&c.}{\frac{dz}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{k}{2} + \&c.};$$

y haciendo $k = 0$, tendrémos $\frac{f(x)}{F(x)}$ ó $\mathcal{C} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}}$; de manera que si ambos coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ no se reduxesen á cero por el supuesto de $x = a$, se conoceria el valor $\mathcal{C}$ de $\frac{y}{z}$; pero si los dos coeficientes diferenciales desapareciesen, seria

$$\frac{f(x+k)}{F(x+k)} = \ldots\ldots \frac{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \cdot \frac{k}{3} + \&c.}{\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^3} \cdot \frac{k}{3} + \&c.};$$

y haciendo $k = 0$, $\mathcal{C} = \frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2}$. Del mismo modo infeririamos, que si los coeficientes diferenciales $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ desapareciesen por el supuesto de $x = a$; $\mathcal{C}$ seria igual á $\frac{d^3y}{dx^3} : \frac{d^3z}{dx^3}$; y en general, que *para hallar el valor $\mathcal{C}$ de una funcion $\frac{y}{z}$, que se reduce á $\frac{0}{0}$ quando $x = a$, se diferenciarán sucesivamente el numerador y el denominador, hasta encontrar con alguno de los coeficientes diferenciales $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^nz}{dx^n}$ que no desaparezca por el supuesto de $x = a$: entonces será $\mathcal{C} = \frac{d^ny}{dx^n} : \frac{d^nz}{dx^n}$; y este valor será cero, si fuese $\frac{d^nz}{dx^n}$ el coeficiente diferencial que no desaparece; infinito, si fuese $\frac{d^ny}{dx^n}$ dicho coeficiente; y finito, si ambas diferenciales subsistiesen en el mismo supuesto.*

123. Tal vez se podria temer que todos los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c., $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, &c. al infinito, desapareciesen por el supuesto de $x = a$, en cuyo caso seria siempre $\mathcal{C} = \frac{0}{0}$. Pero esto no puede suceder: pues siendo $f(x+k) = y + \frac{dy}{dx} k + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{k^2}{2} + \&c.$; si todos los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c., fuesen cero quando $x = a$; seria $f(a+k) = 0$, sea el que fuere el valor de k, lo qual es evidentemente imposible.

124. Antes de aplicar la regla antecedente á algunos exemplos, observarémos

1º Que la funcion propuesta $\frac{y}{z}$ y sus expresiones sucesivas $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2}$, &c. se deben simplificar quanto sea posible, practicando para ello las operaciones necesarias; con lo que se facilitarán las diferenciaciones siguientes en algunos casos complicados, y particularmente quando $\frac{y}{z}$ incluyese cantidades transcendentes.

2º Que si el exponente n de la potencia $(x - a)^n$ del factor comun de y y de z, que se reduce á cero quando $x = a$, fuese un número fraccionario; las diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$; $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$; &c. tomadas de dos en dos, serian, ó cero, ó infinitas; en cuyo caso, si y ó z no tuviesen otro factor de la forma $x - a$ que el comun $(x - a)^n$; las expresiones $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2}$, &c., ó se reducirian todas á la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$; ó empezando por reducirse á $\frac{0}{0}$, llegarian á ser $\frac{\infty}{\infty}$ al cabo de m diferenciaciones, representando m el número entero inmediatamente mayor que n, y por consiguiente no se podria determinar $\mathcal{C}$ por medio de dicha regla. Pero (núm. 98.) como en este caso particular las funciones $f(a+k)$, $F(a+k)$, no pueden desenvolverse en series ordenadas segun las potencias enteras de k; tampoco se puede suponer

$$\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{\frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{2} + \&c.}{\frac{dz}{dx}k + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{k^2}{2} + \&c.}$$, y por consiguiente no conviene al caso actual la referida regla deducida de esta hipótesis. Por lo que, para determinar el valor $\mathcal{C}$ de $\frac{y}{z}$ en este caso particular, será necesario hacer desaparecer los radicales de los factores que se reducen á cero quando $x = a$; ya sea elevando la equacion $\mathcal{C} = \frac{y}{z}$ á la potencia que el radical indica, ó por medio de alguna otra operacion; y luego se aplicará la referida regla á la funcion libre de los radicales.

Pero si no se quisiere practicar con la funcion propuesta la operacion necesaria para hacer desaparecer los radicales, ya sea por su dificultad, ó porque la funcion en su nueva forma parezca demasiado complicada; se podrá determinar $\mathcal{C}$ por el método siguiente, el qual se funda en los mismos principios que el antecedente; pero presentados con mayor generalidad, y que por lo mismo no admite excepcion alguna.

125. Sea como antes $\mathcal{C}$ el valor de la funcion $\frac{y}{z} = \frac{f(x)}{F(x)}$ quando $x = a$, en cuyo supuesto se transforma dicha funcion en $\frac{o}{o}$: substituyendo $a + k$ en lugar de x; las funciones $f(a+k)$, $F(a+k)$ se podrán desenvolver en series ascendientes de la forma $Ak^r + Bk^s$ + &c., $A'k^{r'} + B'k^{s'}$ + &c., representando r, s, &c., r', s', &c. qualesquiera números cuyo valor aumenta progresivamente; y será $\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{Ak^r + Bk^s + \&c.}{A'k^{r'} + B'k^{s'} + \&c.}$. Sentado esto, si en esta equacion hacemos $k = o$; su primer miembro se transformará en $\frac{f(a)}{F(a)}$ igual á $\mathcal{C}$; y aunque el segundo, en su forma actual, se reduce igualmente que $\frac{y}{z}$ á $\frac{o}{o}$; se le puede dar otra que no tenga este inconveniente, suprimiendo el factor comun $k^{r'}$ quando fuere $r' =$ ó $< r$; y k^r si fuese $r' > r$. En el primer caso, tendrémos $\frac{f(a+k)}{F(a+k)} = \frac{Ak^{r-r'} + Bk^{s-r'} + \&c.}{A' + B'k^{s'-r'} + \&c.}$, y haciendo $k = o$, resultará quando $r' < r$, $\mathcal{C} = o$; y $\mathcal{C} = \frac{A}{A'}$ quando $r' = r$; y en el segundo, esto es, quan-

do $r' > r$, será $\frac{y}{z} = \frac{A + Bk^{s-r} + \&c.}{A'k^{r'-r} + B'k^{s'-r} + \&c.}$, y haciendo $k = o$, tendrémos $\mathcal{C} = \infty$; de donde inferirémos esta regla general. *Substitúyase en* $\frac{y}{z}$, a + k *en lugar de* x, *y fórmense los primeros términos* Ak^r $Ak^{r'}$ *de las series antecedentes que resultan; suprímase luego en* $\frac{Ak^r}{A'k^{r'}}$ *el factor comun* $k^{r'}$ ó k^r, *y haciendo* $k = o$, *resultará* $\mathcal{C}$, *ó el valor de la funcion propuesta* $\frac{y}{z}$ *quando* x = a.

Es de advertir que quando $r' = r$, bastará para hallar $\mathcal{C}$, suprimir el factor comun k^r.

126. La práctica de la regla núm. 122., es por lo comun mas fácil que la de la que acabamos de manifestar; pero esta tiene la ventaja de ser general; y que en algunos casos complicados, se juzgará tal vez mas fácil su uso que el de aquella. Vamos á ilustrar toda esta doctrina con algunos exemplos.

Exemplo 1º ¿Quál es el valor de la fraccion $\frac{a^2 - x^2}{a - x}$ quando $x = a$? Haciendo $a^2 - x^2 = y$, y $a - x = z$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = -2x$, $\frac{dz}{dx} = -1$, y suponiendo $x = a$, será $\mathcal{C} = \frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = 2a$; por consiguiente en el supuesto de $x = a$, es $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = 2a$.

Exemplo 2º Si se nos pidiese el valor de la fraccion $\frac{a^2 - ax}{a - \sqrt{ax}}$ en el supuesto de $x = a$, hariamos $a^2 - ax = y$, $a - \sqrt{ax} = z$; y tendriamos $\frac{dy}{dx} = -a$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{x}}$, y haciendo $x = a$, $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = 2a$; así $2a$ es el valor que se pide.

Exemplo 3º La funcion propuesta es $\frac{a - \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x^2}$, y se pide su valor $\mathcal{C}$ quando $x = o$. Tendrémos $y = a - \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $z = x^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, $\frac{dz}{dx} = 2x$, y $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ $=$ (quando $x = o$) $\frac{1}{2a}$; cuya cantidad es el valor que se pide.

Exemplo 4º Sea $\frac{\log. x}{\sqrt{(1 - x)}}$ la funcion cuyo valor se quiere determinar, en el supuesto de $x = 1$. Haciendo $y = \log. x$, y $z = (1 - x)^{\frac{1}{2}}$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{-1}{2(1 - x)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} =$

$-\frac{2(1-x)^{\frac{1}{2}}}{x}$, y $\mathcal{C} = 0$; de donde inferirémos que quando $x = 1$ la funcion $\frac{\log. x}{\sqrt{(1-x)}}$ es cero.

Exemplo 5º La funcion propuesta es $\frac{90^\circ - x}{\cot. x}$, y se pide su valor quando el arco $x = 90^\circ$. Tendrémos $y = 90^\circ - x$, $z = \cot. x$, $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\text{sen.}^2 x}$, $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \text{sen.}^2 x$; y haciendo $x = 90^\circ$, $\mathcal{C} = 1 =$ *al radio* $= 57^\circ,295$ &c.; y este es el valor que se pide.

Exemplo 6º La suma general de la serie x, $2x^2$, $3x^3$, $4x^4$, &c. es $\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$: ¿quál es su valor quando $x = 1$? Ya que $y = x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}$, y $z = (1-x)^2$, será $\frac{dy}{dx} = 1-(n+1)^2 x^n + n(n+2)x^{n+1}$, $\frac{dz}{dx} = -2(1-x)$, y $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \frac{1-(n+1)^2 x^n + n(n+2)x^{n+1}}{-2(1-x)}$; y como esta cantidad se reduce á $\frac{0}{0}$ substituyendo 1 en lugar de x; volverémos á diferenciar, y tendrémos $\frac{d^2y}{dx^2} = -n(n+1)^2 x^{n-1} + n(n+1)(n+2)x^n$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 2$, y $\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{-n(n+1)^2 x^{n-1} + n(n+1)(n+2)x^n}{2}$, cuya cantidad se reduce á $\frac{n^2+n}{2}$ por el supuesto de $x = 1$; de donde inferirémos, que la suma general de la progresion aritmética 1, 2, 3, 4, ... n es $\frac{n^2+n}{2}$.

Exemplo 7º Pídese el valor de $\frac{1-\text{sen.} x+\cos. x}{\text{sen.} x+\cos. x-1}$ suponiendo el arco x de 90 grados. Si hacemos $1-\text{sen.} x+\cos. x = y$, $\text{sen.} x+\cos. x-1 = z$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = -\cos. x-\text{sen.} x$, $\frac{dz}{dx} = \cos. x-\text{sen.} x$, y $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \frac{\cos. x+\text{sen.} x}{\text{sen.} x-\cos. x}$; y como en el supuesto de $x = 90^\circ$ es sen. $x = 1$, y cos. $x = 0$, la cantidad antecedente será en este supuesto igual á 1: así quando $x = 90^\circ$ la funcion propuesta es igual á la unidad.

El factor comun del numerador y denominador, que en este caso se reduce á cero, por el supuesto de $x = 90^\circ$, es $\sqrt{(1-\text{sen.} x)}$, el qual aunque no se descubre en la forma actual de la funcion pro-

puesta, se manifestará dándole la forma conveniente; pues siendo cos. $x = \sqrt{(1-\text{sen.}^2 x)} = \sqrt{[(1+\text{sen.} x)(1-\text{sen.} x)]}$ dicha funcion se puede transformar en $\frac{1-\text{sen.} x+\sqrt{[(1+\text{sen.} x)(1-\text{sen.} x)]}}{\sqrt{[(1+\text{sen.} x)(1-\text{sen.} x)]}-(1-\text{sen.} x)}$ $= \frac{[\sqrt{(1-\text{sen.} x)}+\sqrt{(1+\text{sen.} x)}]\sqrt{(1-\text{sen.} x)}}{[\sqrt{(1+\text{sen.} x)}-\sqrt{(1-\text{sen.} x)}]\sqrt{(1-\text{sen.} x)}}$, la qual, suprimiendo dicho factor comun, se reduce á $\frac{\sqrt{(1-\text{sen.} x)}+\sqrt{(1+\text{sen.} x)}}{\sqrt{(1+\text{sen.} x)}-\sqrt{(1-\text{sen.} x)}}$, cuyo valor es igual á la unidad suponiendo $x = 90^\circ$, ó sen. $x = 1$.

Exemplo 8º Sea $\frac{x^x - x}{1-x+\log. x}$ la funcion cuyo valor se quiere determinar en el supuesto de $x = 1$. Tendrémos $y = x^x - x$, $z = 1-x+\log. x$, $\frac{dy}{dx} = x^x(\log. x+1)-1$, $\frac{dz}{dx} = -1+\frac{1}{x}$; y como las dos últimas expresiones desaparecen en el supuesto de $x = 1$, las diferenciarémos de nuevo, y será $\frac{d^2y}{dx^2} = x^x\left(\frac{1}{x}\right) + x^x(\log. x+1)^2$, $\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$; y haciendo $x = 1$, tendrémos $\mathcal{C} = \frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2}{-1} = -2$; y este es el valor de la funcion propuesta quando $x = 1$.

Exemplo 9º Si fuese $\frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$ la funcion propuesta, y se pidiese su valor quando $x = a$; hariamos $y = (x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$, $z = (x-a)^{\frac{3}{2}}$; y tendriamos $\frac{dy}{dx} = 3x(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}(x-a)^{\frac{1}{2}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 3(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3x^2}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3}{4(x-a)^{\frac{1}{2}}}$, &c.; y haciendo $x = a$, las dos primeras diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ desaparecen, y todas las demas son infinitas; y por consiguiente no se puede determinar $\mathcal{C}$ por este medio. Será pues necesario recurrir á alguno de los dos expedientes propuestos (núm. 124, 125). En virtud del primero, harémos $\mathcal{C} = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$, y será $\mathcal{C}^2 = \frac{(x^2-a^2)^3}{(x-a)^3}$, y $\mathcal{C}^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = \frac{a^2-x^2}{a-x} =$ (*por el primer exemplo*) $2a$; y finalmente $\mathcal{C} = (2a)^{\frac{3}{2}}$; y este es el valor que se pide.

Para aplicar la regla general núm. 125. á la funcion propuesta, substituirémos en su numerador, y en su denominador $a+k$ en lugar de x, y se transformará en $\frac{(2ak+k^2)^{\frac{3}{2}}}{k^{\frac{3}{2}}}$, y suprimiendo el factor comun $k^{\frac{3}{2}}$; en $(2a+k)^{\frac{3}{2}}$, y haciendo $k=0$, resultará $\mathcal{C}=(2a)^{\frac{3}{2}}$, lo mismo que por el método antecedente.

Exemplo 10.º Si la funcion propuesta fuese .... $\dfrac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{(2ax-a^2)}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{(2ax-x^2)}}$, y quisiéramos determinar su valor por la regla núm. 122. en el supuesto de $x=a$; seria necesario para obtenerle diferenciar quatro veces su numerador y su denominador, y hallariamos $\mathcal{C}=-5a$: pero si hacemos uso de la regla general núm. 125., substituirémos $a+k$ por x en la funcion propuesta, y reduciendo se transformará en .... $\dfrac{2a^3+2a^2k-ak^2+k^3-2a^2\sqrt{(a^2+2ak)}}{-2a^2+k^2+2a\sqrt{(a^2-k^2)}}$; pero $2a^2\sqrt{(a^2+2ak)}=2a^{\frac{5}{2}}(a+2k)^{\frac{1}{2}}=2a^{\frac{5}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+\dfrac{k}{a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{k^2}{2a^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{k^3}{2a^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{5k^4}{8a^{\frac{7}{2}}}+\&c.\right)=2a^3+2a^2k-ak^2+k^3-\dfrac{5k^4}{4a}+\&c.$; y $2a\sqrt{(a^2-k^2)}=2a\left(a-\dfrac{k^2}{2a}-\dfrac{k^4}{8a^3}-\&c.\right)=2a^2-k^2-\dfrac{k^4}{4a^2}-\&c.$; y por consiguiente, substituyendo estos valores en la expresion antecedente se reducirá á $\dfrac{5ak^4}{-k^4}=-5a$: valor de la funcion propuesta, quando $x=a$.

Si para transformar en series los radicales $\sqrt{(a+2x)}$, $\sqrt{(a^2-x^2)}$, se tiene presente la fórmula $(a\pm x)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\pm\dfrac{x}{2a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{x^2}{8a^{\frac{3}{2}}}\pm\dfrac{x^3}{16a^{\frac{5}{2}}}-\dfrac{5x^4}{128a^{\frac{7}{2}}}\pm\&c.$; la aplicacion de la regla general parecerá tal vez en este exemplo mas fácil que la del núm. 122.

127. El valor $\mathcal{C}$ de una funcion $\dfrac{y}{z}$, cuyo numerador y denominador son infinitos, en el supuesto de $x=a$, se determina del mismo modo que si ambos fuesen cero en el mismo supuesto: pues si transformamos $\dfrac{y}{z}$ en $\dfrac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{y}}$; tendrémos, quando $x=a$, $\dfrac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{y}}=\dfrac{0}{0}$; y por consiguiente se determinará $\mathcal{C}$ aplicando á esta funcion, ó á su igual $\dfrac{y}{z}$, los métodos declarados núm. 122. y siguientes.

Si se pidiese por exemplo, el valor de $\dfrac{x^n}{\text{log. } x}$ en el supuesto de $x=\infty$; hariamos $y=x^n$, $z=\text{log. } x$, y tendriamos $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{dy}{dx}:\dfrac{dz}{dx}=nx^n$, y $\mathcal{C}=\infty$; de donde concluiriamos, que el valor de la funcion propuesta es infinito, quando lo es el de x.

128. La funcion propuesta puede componerse del producto de dos factores A, B tales, que quando $x=a$, sea $A=0$, $B=\infty$, y por consiguiente $A\times B=0\times\infty$: pero si transformamos $A\times B$ en $\dfrac{A}{\frac{1}{B}}$, á causa de $\dfrac{1}{B}=\dfrac{1}{\infty}=0$, será $\dfrac{A}{\frac{1}{B}}=\dfrac{0}{0}$, y por consiguiente se podrá determinar el valor de esta funcion por los métodos antecedentes.

Supongamos, por exemplo, que representando π la semicircunferencia del círculo cuyo radio $=1$, se pida el valor de la funcion $(1-x)\times\text{tang. }\dfrac{\pi x}{2}$, quando $x=1$. Como en este supuesto, $\text{tang. }\dfrac{\pi x}{2}=\text{tang. }\dfrac{\pi}{2}=\infty$, la funcion propuesta se reduce á $0\times\infty$; pero á causa de $\dfrac{1}{\text{tang. }\frac{\pi x}{2}}=\text{cot. }\dfrac{\pi x}{2}$; la podemos transformar en $\dfrac{1-x}{\text{cotang. }\frac{\pi x}{2}}$, cuyo numerador y denominador desaparecen quando $x=1$: harémos pues $1-x=y$, $\text{cotang. }\dfrac{\pi x}{2}=z$, y tendrémos $\dfrac{dy}{dx}=-1$, $\dfrac{dz}{dx}=(\text{número } 77.)-\dfrac{\pi}{2\text{ sen.}^2\frac{\pi x}{2}}$ y $\dfrac{dy}{dx}:\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2\text{ sen.}^2\frac{\pi x}{2}}{\pi}=(\text{haciendo } x=1)\dfrac{2\text{ sen.}^2\frac{\pi}{2}}{\pi}=\dfrac{2}{\pi}$; cuya cantidad es el valor que se pide.

129. Finalmente, si siendo A, B, C, D, funciones de x; B y D desapareciesen en el supuesto de $x=a$; la funcion $\dfrac{A}{B}-\dfrac{C}{D}$ tendria la forma $\infty-\infty$; pero reduciéndola á un comun denominador, se transformará en $\dfrac{AD-BC}{BD}$, la qual se reducirá á $\dfrac{0}{0}$ en el mismo supuesto. En este caso, se puede determinar $\mathcal{C}$ aplicando el método núm. 122. á la funcion transformada $\dfrac{AD-CB}{BD}$, ó la regla general núm. 125. á la funcion propuesta $\dfrac{A}{B}-\dfrac{C}{D}$: pero como esta forma es mas sencilla que aquella, el segundo método es por lo comun mas fácil y breve que el primero, conforme se verá en los dos exemplos siguientes.

Exemplo 1º ¿Quál es el valor de $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log. x}$, quando $x = 1$?

1º Es evidente, que en este supuesto la funcion propuesta se reduce á $\infty - \infty$; pero si la transformamos en $\frac{x \log. x - x + 1}{(x-1)\log. x}$, será $= \frac{0}{0}$ en el mismo supuesto: harémos pues $x \log. x - x + 1 = y$, $(x-1)\log. x = z$, y tendrémos $\frac{dy}{dx} = 1 + \log. x - 1 = \log. x$, $\frac{dz}{dx} = \frac{x-1}{x} + \log. x$, y $\frac{dy}{dx} : \frac{dz}{dx} = \frac{\log. x}{1 - \frac{1}{x} + \log. x}$, cuya cantidad se reduce á $\frac{0}{0}$ quando $x = 1$; será pues necesario continuar la diferenciacion, y hallarémos $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$, y $\frac{d^2y}{dx^2} : \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x}{1+x} =$ (en el supuesto de $x = 1$) $\frac{1}{2}$; de donde inferirémos, que quando $x = 1$, es $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log. x} = \frac{1}{2}$.

2º Si substituimos $1 + k$ por x en la funcion propuesta, y consideramos que $\log. (1+k) = k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \&c.$; se transformará en $\frac{1+k}{k} - \frac{1}{k - \frac{k^2}{2} + \frac{k^3}{3} - \&c.} = \frac{\frac{k^2}{2} - \&c.}{k^2 - \&c.}$, y suprimiendo el factor comun k^2, resultará (núm. 125.) $\mathfrak{C} = \frac{1}{2}$, lo mismo que por el otro método.

Exemplo 2º Sea $\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x \,\text{tang.}\, \pi x}$ la funcion cuyo valor se quiere determinar quando $x = 0$. Como en este supuesto los dos términos de dicha funcion son infinitos; los reducirémos á un comun denominador, y tendrémos $\frac{\text{tang.}\, \pi x - \pi x}{2x^2 \,\text{tang.}\, \pi x}$, cuyo numerador y denominador desaparecen quando $x = 0$. Si quisiéramos determinar el valor de esta funcion por medio de la regla núm. 122., seria necesario diferenciar tres veces su numerador y su denominador, lo qual nos empeñaria en cálculos prolixos: pero empleando el método general núm. 125., substituirémos k en lugar de x en la funcion $\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x \,\text{tang.}\, \pi x}$; y teniendo presente que tang. $\pi k = \pi k + \frac{\pi^3 k^3}{3}$

$+ \&c.$; se tranformará en $\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2k^2 + \frac{2\pi^2 k^4}{3} + \&c.} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{2k^2 + \frac{2\pi^2 k^4}{3} + \&c. - 2k^2}{4k^4 + \frac{4\pi^2 k^6}{3} + \&c.} = \frac{\frac{2\pi^2 k^4}{3} + \&c.}{4k^4 + \&c.}$; y suprimiendo el factor comun k^4, tendrémos $\mathfrak{C} = \frac{\pi^2}{6}$; y este es el valor de la funcion propuesta quando $x = 0$.

CAPITULO V.

APLICACION DE LOS PRINCIPIOS DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA TEORICA DE LAS LINEAS CURVAS.

De las tangentes, subtangentes, normales y subnormales de las líneas curvas.

130. Sea AMC (*fig.* 13. *y* 14.) una curva qualquiera referida á los exes AD, AH perpendiculares entre sí; A, el orígen de las coordenadas; $AP = x$, $AP' = x'$, dos abscisas, á las quales corresponden las ordenadas $PM = y$, $P'M' = y'$; MT, una tangente en el punto M; MB, una paralela á AD; y tírese por los puntos M, M' la cuerda MM', prolongándola hasta que encuentre el exe AD en un punto S: será $MB = PP' = \Delta x$, (núm. 25.), y $BM' = y' - y = \Delta y$. Esto supuesto; segun la curva AC fuese cóncava ó convexâ hácia el exe AD; la línea PS será mayor ó menor que la subtangente PT, y por consiguiente la razon de PS á PM, mayor ó menor que la de PT á PM: pero si suponemos que el punto M' se acerque continuamente al punto M, el punto S se acercará tambien continuamente al punto T, y la razon $PS : PM$, á la razon $PT : PM$; por manera, que la primera de estas razones, será siempre mayor ó menor que la segunda, pero su diferencia podrá llegar á ser menor que qualquiera cantidad dada por pequeña que sea; luego (núm. 6.) la razon $PT : PM$, es el límite de la razon $PS : PM = MB : BM' = \frac{\Delta x}{\Delta y}$; y por lo mismo tendrémos $PT : y =$ *límite de* $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{dx}{dy}$; luego

La razon de la subtangente de un punto qualquiera M *de una línea curva, á la ordenada correspondiente; es el límite de la razon* $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ *de la diferencia de la abscisa á la diferencia de la ordenada.* De donde inferirémos.

1º Que la subtangente PT correspondiente á un punto qualquiera M de una curva, es $= y\,\frac{dx}{dy}$.

2º Si tiramos la normal MN, resultarán los triángulos semejantes TPM, MPN, que dan $PT : PM :: PM : PN = \frac{(PM)^2}{PT} = \frac{y^2}{y\frac{dx}{dy}} = y\,\frac{dy}{dx}$ (núm 59.).

3º La distancia AT del orígen A de las coordenadas al punto T donde la tangente encuentra el exe AD, es $= y\,\frac{dx}{dy} - x$; y la distancia AN comprehendida entre el orígen A y la normal, es $= x + y\,\frac{dy}{dx}$.

4º Si desde un punto qualquiera M de una curva, se tira la ordenada PM; y se toman las líneas PT, PN respectivamente iguales á $y\,\frac{dx}{dy}$, $y\,\frac{dy}{dx}$; la recta TM será tangente, y NM normal en el punto M.

5º Los triángulos rectángulos TPM, NPM, dan $MT = \sqrt{(PM)^2 + (PT)^2} = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$; y $MN = \sqrt{y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

6º Si por dos puntos E, G de la tangente y de la normal correspondientes á un punto qualquiera M de una curva (*fig. 27*), se baxan las perpendiculares EB, GF al exe AD; tendrémos $TB : BE :: TP : PM :: \frac{dx}{dy} : 1$; y $NF : FG :: NP : PM :: \frac{dy}{dx} : 1$; de donde inferirémos $TB = BE\,\frac{dx}{dy}$, y $NF = FG\,\frac{dy}{dx}$. Sentado esto, si tomamos en A el orígen de las coordenadas de la tangente y de la normal, y llamamos las abscisas respectivas AB, AF, z; y las ordenadas correspondientes BE, FG, u; será $TB = AT + AB = y\,\frac{dx}{dy} - x + z$, $NF = AN - AF = y\,\frac{dy}{dx} + x - z$; y por consiguiente, la equacion de la tangente TM será $y\,\frac{dx}{dy} - x + z = u\,\frac{dx}{dy}$, ó $(z - x)\frac{dy}{dx} = u - y$; y la de la normal MN, $y\,\frac{dy}{dx} + x - z = u\,\frac{dy}{dx}$, ó $(u - y)\frac{dy}{dx} = x - z$.

7º Si en la equacion $(z - x)\frac{dy}{dx} = u - y$ de la tangente MT, hacemos $z = 0$; tendrémos la distancia AI comprehendida entre el orígen A y el punto I donde la tangente encuentra el exe de las ordenadas $= u = y - x\,\frac{dy}{dx}$.

8º El triángulo rectángulo TPM (*fig. 13. y 14.*), da $PT : PM :: 1 : \text{tang.}\ PTM$; y $PM : PT :: 1 : \text{tang.}\ PMT$; de donde inferirémos, $\text{tang.}\ PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{dy}{dx}$, y $\text{tang.}\ PMT = \frac{PT}{PM} = \frac{dx}{dy}$: por consiguiente, la tangente del ángulo PTM que la curva ó su tangente forma con el exe de las abscisas, es igual al coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$; y la tangente del ángulo PMT que la curva ó su tangente hace con la ordenada, es igual á $\frac{dx}{dy}$.

9º Luego si una curva tuviese algunos puntos, cuyas tangentes fuesen paralelas al exe de las abscisas; seria en ellos $\frac{dy}{dx} = 0$: y si la tangente fuese paralela á las ordenadas en ciertos puntos de una línea curva; $\frac{dx}{dy}$ será cero en dichos puntos, y recíprocamente.

10º Luego si la ordenada y es un máxîmo ó un mínimo en ciertos puntos de una línea curva (núm. 109.); será en ellos la tangente paralela al exe de las abscisas: y si la abscisa x es un máxîmo ó un mínimo; la tangente en los puntos correspondientes de la curva será paralela al exe de las ordenadas.

11º Si al paso que la abscisa x crece (*fig. 15. y 16.*), la ordenada y disminuye; la diferencia Δy será negativa; las razones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$; sus límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$, y las expresiones $y\frac{dx}{dy}$, $y\frac{dy}{dx}$ de la subtangente y de la subnormal, serán tambien negativas; y por consiguiente, estas líneas, y la tangente y normal correspondientes, caerán á un lado opuesto al que supusimos en la construccion antecedente respecto del punto P.

Los valores respectivos de la subtangente, subnormal, tangente, &c. correspondientes á un punto qualquiera M de una línea curva (*fig. 13. y 14*); se pueden tambien determinar con mucha sencillez, por medio del admirable teorema de Taylor.

En efecto; siendo por los triángulos semejantes $M'BM$, MPS, $PS = \frac{y\Delta x}{\Delta y}$, y (núm. 91.) $\Delta y = \Delta x\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\,\Delta x^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$; será $PS = \frac{y}{\frac{dy}{dx} + \frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.}$. Pero es evidente, que á medida que la recta $P'P = \Delta x$ decrece; el punto M' se acerca continuamente al punto M, y el punto S al punto T; de manera que el pri-

K

mero de estos dos puntos se confundirá con el segundo, quando el punto P' se confunda con el punto P; esto es, quando Δx sea cero. Haciendo pues $\Delta x = o$ en la expresion de PS, se transformará en $PT = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} =$ (núm. 59.) $y\frac{dx}{dy}$; de donde será fácil deducir los valores respectivos de la subnormal PN, de la tangente MT, &c.

131. En todo lo dicho hasta aquí hemos supuesto que las coordenadas x, é y fuesen perpendiculares entre sí. Quando dichas coordenadas hiciesen un ángulo dado HAD (*fig.* 17.), la expresion de la subtangente PT, la de la distancia AT, y la equacion de la tangente TM serian las mismas que acabamos de hallar.

Por lo que toca al valor de la tangente TM, y al de los ángulos MTD, PMT, que esta línea hace respectivamente con el exe de las abscisas, y con el de las ordenadas; se determinarán por medio del triángulo MPT, en el qual se conocen los lados PM, PT, y el ángulo comprehendido MPT suplemento del ángulo dado HAD; y una vez conocido el ángulo PMT, se conocerán en el triángulo PMN, el lado PM y los ángulos adyacentes MPN, y PMN complemento de PMT; será pues fácil calcular la normal MN, la subnormal PN, la distancia $AN = x + PN$, y la equacion de la normal.

132. Si despues de tiradas las tangentes TMm, TM' (*fig.* 18. *y* 19.), suponemos que la abscisa AP crece; los puntos M, m se acercarán continuamente á M', y el punto T al punto T': por consiguiente, segun la curva AC fuese cóncava ó convexâ hácia el exe AD; la razon $P'm : P'T$, ó su igual $PM : PT = \frac{dy}{dx}$ disminuirá ó aumentará: y recíprocamente, en el supuesto de que la abscisa x de una curva crece; será esta cóncava ó convexâ hácia el exe de las abscisas, segun disminuya ó aumente el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$.

Por consiguiente, quando la abscisa x crece (*fig.* 13. *y* 14.), los ángulos iguales PMT, PNM cuya tangente es $= \frac{dy}{dx}$, aumentan ó disminuyen segun fuere la curva cóncava ó convexâ hácia el exe AD.

133. Si suponemos que el límite $\frac{dy}{dx}$ crece con la abscisa x; la razon $\frac{\Delta \,.\, \frac{dy}{dx}}{\Delta x}$, ó su límite $\frac{d^2y}{dx^2}$ será una cantidad positiva: pero si $\frac{dy}{dx}$ disminuye mientras que x crece; $\frac{d^2y}{dx^2}$ será una cantidad negativa: de donde inferirémos, que segun el valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$ correspondiente á un punto M de una curva (*fig.* 18. *y* 19.), fuese negativo ó positivo; será esta cóncava ó convexâ hácia el exe AD inmediatamente antes y despues del punto M. Esta proposicion se puede demostrar fácilmente por medio del teorema de Taylor (núm. 89.): pues siendo $BM' = \Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}\Delta x^3$ + &c., y á causa de los triángulos semejantes TPM, MBm, $Bm = \frac{dy}{dx}\Delta x$; será $BM' - Bm = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}\Delta x^3 +$ &c.; por donde se vé que si se supone Δx tan pequeña como sea menester (núm 13.) para que el término $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2$ sea mayor que la suma de todos los que le siguen; $BM' - Bm$ será una cantidad positiva, si lo fuere $\frac{d^2v}{dx^2}$, ya sea Δx positiva ó negativa; por consiguiente, inmediatamente antes y despues del punto M (*fig.* 19.), la curva estará al otro lado de la tangente TMm respecto del exe AD, y presentará á este su convexîdad: pero si el valor del coeficiente diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}$ correspondiente al punto M fuese negativo, lo seria igualmente el de $BM' - Bm$ al uno y otro lado del punto M (*fig.* 18.); por consiguiente, la curva estará en este caso entre la tangente TMm y el exe AD inmediatamente antes y despues del punto M, y por lo mismo será cóncava respecto de dicho exe.

134. Siendo el arco MEM' (*fig.* 13. *y* 14.), mayor que su cuerda MM', la razon $\frac{MEM'}{MB}$ de la diferencia del arco AM á la diferencia de la abscisa correspondiente AP; será mayor que la razon $\frac{MM'}{MB}$ de la cuerda MM' á MB, ó que su igual $\frac{MS}{PS}$; pero quanto mas el punto M' se acercare al punto M, tanto mas la cuerda MM' se acercará á confundirse con el arco MEM', y por consiguiente tanto mas la primera $\frac{MEM'}{MB}$ de estas razones, se acercará á la segunda $\frac{MS}{PS}$: de manera que su diferencia llegará á ser menor que una cantidad dada por pequeña que sea; de donde concluirémos (núm. 20.) que el límite $\frac{MT}{PT}$ de la segunda de estas razones, será igual al límite de la primera; luego

La razon $\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{PT}}$ *de la tangente á la subtangente de un punto qualquiera* M *de una curva, es el límite de la razon* $\frac{\mathrm{MEM'}}{\mathrm{MB}}$ *de la diferencia del arco* AM, *á la diferencia de la abscisa correspondiente* AP.

De donde se infiere

1º Que si llamamos A el arco AM de una curva qualquiera AC será $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}=\frac{MN}{PM}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$.

2º Dividiendo la equacion $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}$, por la equacion $\frac{dy}{dx}=\frac{PM}{PT}$, tendrémos $\frac{dA}{dx}:\frac{dy}{dx}$ ó (núm. 60.) $\frac{dA}{dy}=\frac{MT}{PM}=\frac{MN}{PN}$; esto es, *la razon de la tangente á la ordenada, ó de la normal, á la subnormal de una línea curva, es el límite de la razon de la diferencia del arco, á la diferencia de la ordenada.*

3º El triángulo rectángulo PMN da 1 : sen. PNM : cos. PNM :: $MN : PM : PN$; de donde se infiere $\frac{1}{\text{sen. } PNM}=\frac{MN}{PM}=\frac{dA}{dx}$, y $\frac{1}{\text{cos. } PNM}=\frac{MN}{PN}=\frac{dA}{dy}$; por consiguiente, (núm. 59.) sen. PNM $=$ sen. $PMT=\frac{dx}{dA}$, y cos. $PNM=$ cos. $PMT=\frac{dy}{dA}$.

4º Si la curva ABE fuese un círculo (*fig.* 20.) cuyo radio $CM=r$; la normal MN seria $=r$, $PM=$ sen. A, $AP=$ sen. v. A, y $PN=$ cos. $A=r-x$; por consiguiente $\frac{dA}{dx}=\frac{MN}{PM}=\frac{r}{\text{sen. } A}$, $\frac{dA}{d(r-x)}=-\frac{dA}{dx}=-\frac{r}{\text{sen. } A}$, y $\frac{dA}{dy}=\frac{MN}{PN}=\frac{r}{\text{cos. } A}$; cuyas equaciones manifiestan, 1º *que la razon del radio al seno de un arco, es el límite de la razon de la diferencia del arco á la diferencia del seno verso; 2º que la misma razon del radio al seno tomada negativamente, es el límite de la razon entre las diferencias del arco y del coseno; 3º y que la razon del radio al coseno de un arco, es el límite de la razon de la diferencia del arco á la diferencia del seno.*

5º Suponiendo el radio $r=1$ en las expresiones antecedentes; tendrémos $\frac{dy}{dA}=$ cos. A, $\frac{d(1-x)}{dA}=-$ sen. A, y $\frac{dx}{dA}=$ sen. A: cuyas equaciones manifiestan lo mismo que hallamos en otro lugar (núm. 76.)

6º Si las coordenadas x, y, fuesen funciones de otra variable t (como suele suceder en la Mecánica); seria (núm. 60.) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$, $\frac{dA}{dx}=\frac{dA}{dt}:\frac{dx}{dt}$; y substituyendo estos valores en la equacion $\frac{dA}{dx}=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$, se transformará en $\frac{dA}{dt}=$ ....
$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$.

135. Para tirar una tangente, ó una normal á un punto qualquiera M de una curva (*fig.* 13. *y* 14.), basta conocer el valor de la

subtangente PT, y el de la subnormal PN que le corresponden; por cuya razon nos propondrémos desde luego este

Problema. *Dada la relacion entre las coordenadas* x *é* y *de una curva; determinar el valor de la subtangente, y el de la subnormal, correspondientes á uno qualquiera* M *de sus puntos.*

Resolucion. Hállense por los métodos declarados (núm. 71. y sig.) los límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$; y subtituyéndoles en las expresiones $y\frac{dx}{dy}$, $y\frac{dy}{dx}$ (núm. 130.), resultarán respectivamente los valores de la subtangente, y de la subnormal.

Exemplo 1º Sea $y^2=ax$ la equacion que expresa la relacion de las coordenadas, como en la parábola vulgar (*fig.* 13.); será $2y\frac{dy}{dx}=a$, de donde inferirémos $y\frac{dy}{dx}=PN=\frac{a}{2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}$, $\frac{dx}{dy}=\frac{2y}{a}$, y $PT=\frac{2y^2}{a}=2x$; *así en la parábola ordinaria, la subtangente es igual al duplo de la abscisa, y la subnormal constante é igual á la mitad del parámetro.*

La equacion de la tangente TM será (núm. 130.) $\frac{a(z-x)}{2y}=u-y$, ó substituyendo por y^2 su valor ax y reduciendo, $a(z+x)=2yu$; y la de la normal MN, $\frac{a(u-y)}{2y}=x-z$, ó $a(u-y)=2y(x-z)$.

Si quisiéramos averiguar hácia qué lado está la concavidad de la curva, diferenciariamos la equacion $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}=\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}}{2}$, y hallariamos $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4x}\sqrt{\frac{a}{x}}$; de donde infeririamos (núm. 133.) que la parábola AC es cóncava en todos sus puntos hácia el exe principal AD.

Si contásemos las abscisas x en la línea AD perpendicular al exe principal AH (*fig.* 14.), la equacion de la parábola AMC seria $y=\frac{x^2}{a}$: de donde infeririamos $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{a}$, $PN=y\frac{dy}{dx}=\frac{2x^3}{a^2}$, $\frac{dx}{dy}=\frac{a}{2x}$, y $PT=\frac{x}{2}$.

Exemplo 2º Sea ABF (*fig.* 20.) un círculo cuyo radio $AC=a$, y A el orígen de las coordenadas. Será su equacion $y^2=2ax-x^2$, y tendrémos $2y\frac{dy}{dx}=2a-2x$, $\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y}$, $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{a-x}$, $PT=\frac{y^2}{a-x}=\frac{2ax-x^2}{a-x}$, y $PN=a-x=PC$; de donde inferirémos, que en el círculo todas las normales parten del centro, y son por consiguiente iguales al radio. Esto resulta igualmente de la equacion (núm. 130.) $MN = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; pues substituyendo por $\frac{dy^2}{dx^2}$ su valor $\frac{(a-x)^2}{y^2}$, se transforma en $MN = \sqrt{(y^2 + a^2 - 2ax + x^2)}$ = (substituyendo por y^2 su valor) $\sqrt{a^2} = \pm a$. El valor positivo pertenece á las normales que estan encima del diámetro AE segun hemos supuesto (núm. 130.); y el valor negativo, á las normales que estan debaxo de AE.

Si x fuese mayor que a; los valores antecedentes de PN, y PT serian negativos, y por consiguiente tendrian estas líneas una situacion opuesta á la que supusimos (núm. 130.).

Quando x es igual á $AC = a$; la subnormal PN es cero, lo qual es evidente de suyo; y la subtangente $PT = \frac{2a^2 - a^2}{a - a} = \frac{a^2}{0} = \infty$, y así debe ser; pues siendo en este caso la tangente paralela á la línea de las abscisas AE, no la encontrará nunca, ó lo que es lo mismo (núm. 9.) solo la encontrará á una distancia infinita del punto N.

Finalmente substituyendo por $\frac{dy}{dx}$ su valor; la equacion de la tangente TM será $(z - x)(a - x) = uy - y^2$, y substituyendo el valor de y^2, y reduciendo, $z(a - x) = uy - ax$; y la equacion de la normal NM, $(u - y)(a - x) = xy - yz$, ó haciendo las reducciones correspondientes $u(a - x) = y(a - z)$.

Exemplo 3.º La equacion general de las curvas de segundo órden es $y^2 = ax^2 + bx$; diferenciándola tendrémos $y\frac{dy}{dx} = ax + \frac{b}{2}$ = á la subnormal; $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{ax + \frac{b}{2}}$, y la subtangente $y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2}{ax + \frac{b}{2}} = \frac{ax^2 + bx}{ax + \frac{b}{2}}$.

Exemplo 4.º Sea AMC (*fig. 21.*) la curva llamada *logarítmica*, cuya equacion, suponiendo el módulo $= a$, es $x = a$ log. y: será (núm. 74.) $\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$, $PT = \frac{ay}{y} = a$, y $PN = \frac{y^2}{a}$: así, *la subtangente de la logarítmica es constante é igual al módulo*; y como este es igual á la unidad en el sistema *Neperiano*, será $= 1$ la subtangente de la logarítmica construida en virtud de este sistema.

La equacion $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}$, da $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\,\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a^2}$: de donde inferirémos (núm. 133.) que la logarítmica BC es en toda su extension convexâ hácia el exe AD.

Exemplo 5.º La equacion $y^n = x$ representa las parábolas de todos los grados, expresando n un número positivo entero ó fraccionario, y el parámetro $= 1$; y las hypérbolas de todos los grados referidas á sus asimptotas; si dicho número es negativo, y la potencia igual á la unidad: diferenciándola tendrémos $\frac{dx}{dy} = ny^{n-1}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}}$; será pues la subtangente $y\frac{dx}{dy} = ny^n = nx$, y la subnormal $y\frac{dy}{dx} = \frac{y^{2-n}}{n} = \frac{x^{\frac{n-2}{n}}}{n}$. Si n fuese $= -1$, la curva de que tratamos seria la hypérbola seccion cónica, y la subtangente PT (*fig. 22.*) $= -x = -AP$, esto es (núm. 130.) igual á la abscisa AP tomada al otro lado de P respecto de A. Quando $n = 2$ la curva es la parábola vulgar, y los valores de la subtangente y de la subnormal, los mismos que en el exemplo 1.º

Exemplo 6.º Si la relacion de las coordenadas fuese dada por la equacion $a(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$; seria (núm. 55.) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{2a(y - b)}$, y $\frac{dx}{dy} = \frac{2a(y - b)}{3x^2 - 4ax + a^2}$; por consiguiente, la subtangente $= \frac{2ay(y - b)}{3x^2 - 4ax + a^2}$, y la subnormal $= \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{y(3x^2 - 4ax + a^2)}{2a(y - b)}$.

136. Si en los valores de la subtangente, subnormal, &c. pertenecientes á un punto qualquiera de una línea curva, se substituye en lugar de x el valor que corresponde á un punto determinado de la curva; resultarán los correspondientes de la subtangente, subnormal, &c. relativos á dicho punto. Por exemplo, si quisiéramos determinar la subtangente PT (*fig. 20.*) perteneciente al punto M del círculo ABE, cuya abscisa $AP = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$; substituiriamos este valor en la expresion general (núm. 135.) $\frac{2ax - x^2}{a - x}$ de la subtangente, y tendriamos $PT = \frac{3a}{2}$, y $AT = \frac{3a}{2} - \frac{1}{2}a = a = AC$. Pero si alguno de estos valores particulares reduxese á $\frac{0}{0}$ los de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$; PT, y PN serian indeterminadas, y seria necesario emplear, para determinarlas, alguno de los métodos declarados números 122. y siguientes.

Por exemplo; si en la curva cuya equacion es $a(y - b)^2 - x(x - a)^2 = 0$ (*fig. 23.*), quisiéramos hallar la subtangente del punto determinado M, al qual corresponde la abscisa $AP = a$; como en este caso es $y = b$; la expresion de PT se reducirá á $\frac{0}{0}$: pero en este supuesto (núm. 57.) $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, luego $\frac{dx}{dy} = \pm 1$, y $PT = \pm b$; cuyo resultado manifiesta, que al punto M corresponden dos subtangentes iguales á la ordenada $PM = b$, las quales caen á lados opuestos respecto del punto P.

137. Hemos dicho (núm. 135.) que para determinar la posicion de la tangente y de la normal en un punto qualquiera M de una curva, basta determinar la subtangente y la subnormal que le corresponden. Hay sin embargo un caso particular, en el qual la posicion de aquellas líneas no se puede determinar por medio del valor de estas; y es quando el exe de las abscisas corta la curva en el punto M, y el límite $\frac{dy}{dx}$ tiene un valor finito; pues siendo en este caso $PM = 0$, igualmente que PT y PN (*fig.* 24.); los puntos P, T, N se confunden con el punto M, y por consiguiente no pueden estos puntos fixar la situacion de la tangente, ni la de la normal. Pero si substituimos en las equaciones (núm. 130., 6º) $(z - x)\frac{dy}{dx} = u - y$, $(u - y)\frac{dy}{dx} = x - z$ los valores de x, y $\frac{dy}{dx}$ correspondientes al punto M, resultará la equacion de la tangente ME, y la de la normal MG, y por su medio será fácil construir estas líneas.

Sea por exemplo, $y = ax - x^2$ la equacion de la curva CMH: tendrémos en el punto M, donde $y = 0$; $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = a - 2x = a$; y substituyendo estos valores en las equaciones antecedentes, la primera correspondiente á ME se transformará en $az = u$, y la segunda (que pertenece á MG), en $u = -\frac{z}{a}$: tomarémos pues las líneas $MB = 1$, $MF = a$; y las perpendiculares $BE = a$, $FG = -1$, y tirando ME, MG, será la primera de estas líneas tangente, y la segunda normal, en el punto M.

138. Si en las expresiones $y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$, $y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ (número 130., 5º) de MT, MN, substituimos por y, $\frac{dy}{dx}$, y $\frac{dx}{dy}$ sus valores sacados de la equacion de una curva AC (*fig.* 13. y 14.); resultarán los de MT, y MN pertenecientes á un punto qualquiera M de AC.

Siendo, por exemplo, en la parábola $y^2 = ax$; será $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$, $MT = y\sqrt{1 + \frac{4y^2}{a^2}} = \sqrt{a\,x + 4x^2}$, y $MN = y\sqrt{1 + \frac{a^2}{4y^2}} = \sqrt{ax + \frac{a^2}{4}}$.

139. Si quisiéramos determinar los puntos de una línea curva, donde la tangente es paralela al exe de las abscisas; y los puntos en que su tangente es paralela al exe de las ordenadas; diferenciariamos su equacion, y suponiendo igual á cero el valor de $\frac{dy}{dx}$, y el de $\frac{dx}{dy}$, resultarán dos equaciones, que combinadas con la de la curva, dará la primera los valores de x y de y correspondientes á los puntos en los quales la tangente es paralela á la línea de las abscisas (núm. 130., 9º); y la segunda los que corresponden á los puntos donde la tangente es paralela á las ordenadas.

Exemplo. Sea dada la equacion $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(ax \mp x^2)$ perteneciente á la elipse, y á la hypérbola. Tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{a}{2} \mp x}{y}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\frac{b^2}{a^2}(\mp x)} = \frac{\sqrt{(ax \mp x^2)}}{\frac{b}{a}\left(\frac{a}{2} \mp x\right)}$, é igualando á cero estos valores; las dos equaciones $\frac{a}{2} \mp x = 0$, $ax \mp x^2 = 0$; la primera da para la elipse $x = \frac{a}{2}$, y substituyendo este valor en la equacion de la curva, resultará $y = \pm\frac{b}{2}$; por consiguiente, en la elipse la tangente es paralela al exe de las abscisas en los puntos M, M' (*fig.* 25.) extremos del exe menor.

Respecto de la hypérbola (*fig.* 26.) la misma equacion da $x = -\frac{a}{2}$; y como á este valor de x corresponden los valores imaginarios $y = \pm b\sqrt{-\frac{1}{4}}$: inferirémos que la hypérbola no tiene en ninguno de sus puntos la tangente paralela al exe de las abscisas.

La segunda equacion da, respecto de la elipse $x = 0$, $x = a$; y para la hypérbola $x = 0$, $x = -a$, á cuyos valores corresponde en ambas curvas $y = 0$; de donde inferirémos que en la elipse y en la hypérbola, la tangente es paralela á las ordenadas en los puntos A, C extremos del exe mayor.

140. Problema 2º *Dado un punto* E *en el plano de una curva* AMC (fig. 27.) *; determinar los puntos* M *de la curva, en los quales la recta* EM *es tangente.*

Resolucion. Llamemos g la abscisa AB, y h la ordenada BE correspondientes al punto E de la tangente EM, y substituyéndolas por z y u en la equacion general (núm. 130., 6.º) de la tangente, se transformará en $(g-x)\frac{dy}{dx}=h-y$; cuya equacion combinada con la de la curva AMC, dará los valores de las coordenadas x é y correspondientes á los puntos M.

Si el punto B cayese á la izquierda del punto A (*fig.* 28.), g seria negativa; y si el punto E estuviese debaxo de AD, substituiriamos $-h$ por u.

Exemplo 1.º Sea la curva CAC una parábola. Su equacion es $y^2=ax$; de donde inferirémos $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}$, y observando que g es negativa, tendrémos $y-h=\frac{a(g+x)}{2y}$, ó substituyendo y^2 por ax; $y^2-2hy=ag$, cuya equacion da $y=h\pm\sqrt{(h^2+ag)}$: tomando pues en el exe de las ordenadas las distancias $AF=h+\sqrt{h^2+ag}$, $AF'=h-\sqrt{(h^2+ag)}$, las paralelas FM, $F'M$ al exe de las abscisas determinarán los puntos de contacto M.

Tambien podemos substituir en la equacion $2y(y-h)=a(g+x)$, ax en lugar de y^2, y se transformará en $2hy=a(x-g)$, y construyendo la línea MGH' representada por esta equacion, los puntos M, M donde encuentra la parábola CAC satisfarán á un mismo tiempo á dicha equacion y á $y^2=ax$, y serán por consiguiente los que se buscan.

La línea MGH' se construye fácilmente determinando las distancias $AG=g$ y $AH'=-\frac{ag}{2h}$, donde corta el exe de las abscisas, y el de las ordenadas.

Exemplo 2.º Sea AMD un círculo cuyo radio $CA=a$ (*fig.* 29.). La equacion (núm. 135.) de su tangente será $z(a-x)=uy-ax$, ó substituyendo h por u, y $-g$ por z; $hy+ga=x(g+a)$: la recta MGM representada por esta equacion cortará el círculo en los puntos de contacto M, M.

141. Problema 3.º *Dado un punto* E *en el plano de una curva* CAC (fig. 30.), *determinar los puntos* M *donde las normales* EM *la cortan.*

Resolucion. Sean como antes g y h las coordenadas AF, FE del punto dado E; y substitúyanse por z y u en la equacion de la normal, la qual se transformará en $(h-y)\frac{dy}{dx}=x-g$; y combinándola con la de la curva CAC, será fácil determinar los puntos M; ya sea por medio de los valores de x ó de y que resultaren; ó por la construccion de alguna línea recta ó curva.

Supongamos, por exemplo, que la curva CAC sea una parábola: tendrémos substituyendo por $\frac{dy}{dx}$ su valor $\frac{a}{2y}$; $a(h-y)=2y(x-g)$, ó substituyendo $\frac{y^2}{a}$ por x, y haciendo las reducciones correspondientes, resultará la equacion de tercer grado $y^3-a\left(g-\frac{a}{2}\right)y=\frac{a^2h}{2}$, cuyas raices reales serán las ordenadas correspondientes á los puntos M.

Tambien se puede construir la curva representada por la equacion $a(h-y)=2y(x-g)$, ó $xy-\left(g-\frac{a}{2}\right)y=\frac{ah}{2}$, y sus intersecciones con la parábola CAC serán los puntos M que se buscan.

Si el punto E estuviese en el exe AD (fig, 31.), seria $h=0$, y la equacion de tercer grado se reduciria á $y^3-a\left(g-\frac{a}{2}\right)y=0$, cuya raiz $y=0$ manifiesta que el exe de las abscisas es perpendicular á la curva en el orígen A de las coordenadas. Y finalmente, si ademas fuese $g=\frac{a}{2}$, todas tres raices serian $=0$, y por consiguiente los puntos M, M se confundirian con el punto A.

142. Problema 4.º *Dada la equacion de una curva; determinar los puntos en los quales las tangentes son paralelas á una línea dada de posicion, ó que forma un ángulo con el exe de las abscisas cuya tangente es* $=t$.

Resolucion. Ya que las tangentes de la curva deben ser paralelas á la línea dada de posicion, tendrémos (núm. 130., 8.º) $\frac{dy}{dx}=t$; cuya equacion, juntamente con la de la curva, dará los valores de las coórdenadas que corresponden á los puntos que se buscan.

Sea, por exemplo, la curva propuesta una parábola (*fig.* 32.): será $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{2y}=t$, de donde inferirémos $y=\frac{a}{2t}$, y $x=AP=\frac{a}{4t^2}$.

El punto M que está debaxo de AD corresponde al caso en que t fuese negativa.

Si la curva propuesta fuese un círculo (*fig.* 33.): tendriamos $\frac{dy}{dx}=\frac{a-x}{y}=t$, ó $ty=a-x$; y trazando la línea MCM, que esta equacion representa, encontrará el círculo en los puntos de contacto M, M que se buscan.

143. Las asimptotas rectilíneas de las líneas curvas, paralelas á

las abscisas ó á las ordenadas, se determinan fácilmente sin el auxîlio del cálculo diferencial.

Supongamos que la línea BE (*fig. 34.*), paralela al exe AD de las abscisas, sea una asimptota de la curva AMC: quanto mas creciere la abscisa AP, tanto mas la ordenada PM se acercará á su límite $PE = AB$; de manera que quando x fuese *infinita*, será $y = AB$. Por consiguiente, si haciendo x *infinita*, en la equacion de la curva AC, resulta la ordenada y igual á una cantidad *finita* AB; la recta BE, tirada por el punto B paralelamente á AD, será una asimptota de dicha curva.

Es evidente, que si AB fuese $= 0$, el mismo exe AD (*fig. 35.*) seria una asimptota de la curva propuesta.

Del mismo modo demostrariamos, que si suponiendo y infinita en la equacion de una curva AMC (*fig. 36.*), resulta la abscisa x igual á una cantidad finita AB; la recta BE paralela al exe de las ordenadas AH, será una asimptota de la curva AC, la qual se confundirá con el exe AH (*fig. 37.*) quando AB fuese $= 0$.

Exemplo 1º Sea $C'FC$ (*fig. 35.*) la curva llamada *conchoide superior*, y cfc' la *conchoide inferior*. Haciendo $\pm x$ infinita en su equacion $x^2 = \frac{(b+y)^2(a^2-y^2)}{y^2}$, será $y^2 = 0$, ó $\pm y = 0$; de donde inferirémos que el exe de las abscisas $D'AD$ es asimptota de los dos ramos FC, FC' de la conchoide superior; y de los dos ramos fc, fc' de la conchoide inferior.

Exemplo 2º Sea $y^2 = \frac{b^2x}{x+a} = \frac{b^2}{1+\frac{a}{x}}$ la equacion de la curva $C'AC$ (*fig. 34.*): haciendo x infinita, resulta $y^2 = b^2$, é $y = \pm b$; de donde inferirémos que la curva propuesta tiene por asimptotas las rectas BE, $B'E'$ paralelas á la línea de las abscisas, situadas la una encima, y la otra debaxo de dicha línea á una distancia $AB = AB' = b$. Las mismas rectas Be, $B'e'$ continuadas al otro lado del exe BB' son igualmente asimptotas de los ramos FG, $F'G'$ de la curva que caen del lado de las abscisas negativas.

Exemplo 3º Si en la equacion $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$ de la cisoide AMC (*fig. 36.*); hacemos $y = \infty$, tendrémos $x = a$; y por consiguiente, la paralela EBE' al exe AH de las ordenadas, es asimptota de los dos ramos AC, AC' de la cisoide.

144. Por lo que toca á las asimptotas obliquas á los exes de las coordenadas, el cálculo diferencial las determina con la mayor facilidad. En efecto, es evidente que si la curva AC (*fig. 38. y 39.*) tiene una asimptota BF obliqua al exe AD; á medida que las coordenadas x, é y aumentan, los puntos T, I donde la tangente MT encuentra sus exes, se acercan continuamente á sus límites respectivos, B, E sin que puedan jamas alcanzarles: por consiguiente, para

conocer si una curva AC, cuya equacion es dada, tiene alguna asimptota BF, y en caso que la tenga, determinar su posicion, se determinarán los valores $AT = y\frac{dx}{dy} - x$ (núm. 130., 3º), y $AI = y - x\frac{dy}{dx}$ en x ó en y por medio de la equacion dada de la curva, y si haciendo x ó $y = \infty$ resultan los límites finitos AB, BE, la recta BE será una asimptota de la curva AC.

Si en el supuesto de x ó $y = \infty$, solamente una de las líneas AT, ó AI tuviese un límite finito AB ó AE, siendo la otra infinita; la asimptota BE seria paralela al exe de las ordenadas, ó al de las abscisas; pero si ambas líneas fuesen infinitas, la curva AC no tendrá asimptota alguna.

Finalmente: si sucediese que los dos límites AB, AE fuesen cero (*fig. 40.*); la asimptota pasaria por el orígen A de las coordenadas; pero como en este caso solo se conoce el punto A de su direccion; para fixarla, harémos x ó $y = \infty$ en la expresion de $\frac{dy}{dx}$ igual á la tangente del ángulo MTD, y resultará la tangente del ángulo FAD que la asimptota forma con el exe de las abscisas.

Exemplo 1º Sea la curva CAC una hybérbola ordinaria (*fig. 38.*). Suponiendo en A el orígen de las coordenadas, y llamando a el primer semiexe, b el segundo, tendrémos $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2(a+x)}{a^2y}$, $y\frac{dx}{dy} = \frac{a^2y^2}{b^2(a+x)} = \frac{2ax+x^2}{a+x}$, $x\frac{dy}{dx} = \ldots \frac{b^2(ax+x^2)}{a^2y}$, $AT = y\frac{dx}{dy} - x = \frac{ax}{a+x} = \frac{a}{\frac{a}{x}+1}$, $AI = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{ay} = \pm\frac{b}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}+1\right)}}$; y haciendo x infinita, resultan los límites $AB = a$, y $AE = \pm b$; de donde inferirémos, que la hypérbola CAC tiene dos asimptotas BF, BF' que parten del centro B, y encuentran el exe de las ordenadas en los puntos E, E, el uno encima, y el otro debaxo del exe de las abscisas, á una distancia del punto $A = b =$ al segundo semiexe.

Si el orígen A de las coordenadas estuviese en el centro (*fig. 40.*); seria $y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - b^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$, $x\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x^2}{a^2y}$, $y\frac{dy}{dx} = \frac{a^2y^2}{b^2x}$, $y\frac{dx}{dy} - x = AT = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{b^2x} = -\frac{a^2}{x}$, $AI = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = \mp\frac{ab}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$; y haciendo x infinita, resultará $AB = 0$, $AI = \mp 0$: por consiguiente, la curva propuesta tiene dos asimptotas que pasan por el orígen A; la una encima, y la otra debaxo del exe AD.

Para determinar sus posiciones respectivas, harémos x infinita en $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} = \pm \frac{b}{a\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)}}$, y resultará la tangente del ángulo $FAD = \pm \frac{b}{a}$; tomando pues las líneas GE', iguales al segundo semiexe b, las rectas AE', AE serán las asimptotas de la hypérbola CAC.

Exemplo 2º Sea $y^n = x$, la equacion propuesta, la qual suponiendo n positiva, representa las parábolas de todos los grados: será

$$\frac{dx}{dy} = ny^{n-1},\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}},\ y\frac{dx}{dy} = nx,\ x\frac{dy}{dx} = \frac{y}{n} = \frac{x^{\frac{1}{n}}}{n},$$

$$y\frac{dx}{dy} - x = (n-1)\,x,\ y - x\frac{dy}{dx} = x\left(1 - \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}\right);$$ y

como estas cantidades son infinitas en el supuesto de serlo x, inferirémos que las parábolas de qualesquiera grado que sean no tienen asimptota alguna.

Exemplo 3º Si la equacion de la curva propuesta fuese $y^3 = x^2(a+x)$ (*fig.* 41.): seria $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax+3x^2}{3y^2}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{3y^2}{2ax+3x^2}$, $x\frac{dy}{dx} = \frac{2ax^2+3x^3}{3y^2}$, $y\frac{dx}{dy} = \frac{3y^3}{2ax+3x^2}$, $y\frac{dx}{dy} - x = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{ax^2}{2ax+3x^2} = \frac{a}{\frac{2a}{x}+3}$ (cuyo límite es $\frac{a}{3} = AB$); y $y - x\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 2ax^2 + 3x^3}{3y^2} = \frac{ax^2}{3y^2}$; substituyendo en esta expresion por y^2 su valor en x, y haciendo x infinita, resultará el límite AE. Pero este se puede hallar mas fácilmente observando, que si se supone x infinita en la equacion propuesta; será $y^3 = x^3$, y $y = x$; y por consiguiente $\frac{ax^2}{3y^2} = \frac{a}{3} = AE$. Tirando, pues, por los puntos B, E la recta FF', será asimptota del ramo AC de la curva que está del lado de las coordenadas positivas, y del ramo AC' correspondiente á las coordenadas negativas.

145. Las máxîmas y mínimas ordenadas ó abscisas de una curva cuya equacion se conoce; se determinan por el método de máxîmos y mínimos, conforme hicimos en el núm. 118. respecto de la elipse $ADBE$ (*fig.* 10.).

Si quisiéramos aplicarle ahora á la curva cuya equacion es $x^2y - 2ay^2 - a^2x = 0$ (*fig.* 42.); tendriamos $x^2\frac{dy}{dx} + 2xy - 4ay\frac{dy}{dx} - a^2 = 0$, y $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2-2xy}{x^2-4ay}$. Para hallar los máxîmos y mínimos de la ordenada, harémos esta expresion $= 0$ (núm. 116.), y tendrémos $x = \frac{a^2}{2y}$, cuyo valor substituido en la equacion de la curva, la transforma en $8y^3 = -a^3$, que da $y = -\frac{a}{2} = FG$, y por consiguiente $x = -a = AF$. La ordenada $FG = -\frac{a}{2}$ es un máxîmo del ramo AC' de la curva que está del lado de las coordenadas negativas: pues si diferenciamos la equacion que contiene $\frac{dy}{dx}$, hallarémos despues de hechas las substituciones correspondientes, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a}$; cuya expresion manifiesta que $y = -\frac{a}{2}$ es un mínimo, y por consiguiente (núm. 108.) un máxîmo de la parte AC' de la curva cuyas ordenadas son negativas.

Para determinar los máxîmos y mínimos de la abscisa, harémos $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-4ay}{a^2-2xy} = 0$, y tendrémos $y = \frac{x^2}{4a}$ cuyo valor transforma la equacion de la curva en $x^4 - 8a^3x = 0$, la qual tiene dos raices reales, $x = 0$, $x = 2a = AB$, y les corresponden las ordenadas respectivas $y = 0$, $y = a = BE$: la abscisa $x = 0$ es un máxîmo relativamente al ramo $C'AC'$ de la curva que cae del lado de las abscisas negativas; y la abscisa $AB = 2a$ un mínimo respecto del ramo CEC que pertenece á las abscisas positivas; como lo manifiestan los valores correspondientes $-\frac{4}{a}$, y $\frac{4}{3a}$ de $\frac{d^2x}{dy^2}$.

146. Los puntos D, E de una curva donde la ordenada es un máxîmo ó un mínimo (*fig.* 10.), se llaman *los límites de las ordenadas*, ó de la curva en la direccion de la ordenada; y los puntos A, B pertenecientes al máxîmo ó mínimo de la abscisa, son *los límites de las abscisas*, ó de la curva en la direccion de la abscisa.

En la *fig.* 42. los puntos A, y B son límites de la curva en la direccion de la abscisa; y el punto G, un límite en la direccion de la ordenada.

De los puntos múltiplos de las líneas curvas.

147. Todo punto de una línea curva es *sencillo* ó *múltiplo*: el punto M de una curva (*fig.* 40.) es sencillo, quando pertenece á uno solo de sus ramos; y el punto M (*fig.* 23. y 43), comun á muchos ramos de una curva, se llama *punto múltiplo*. El punto múltiplo M

(*fig.* 23.), comun á dos ramos de una curva, se llama punto *duplo*; *triplo* (*fig.* 43.) si pertenece á tres ramos de la curva, &c. De donde se infiere

1.º Toda recta (exceptuamos las tangentes) que pasa por un punto múltiplo de una línea curva; la encuentra en dicho punto un número de veces igual al que expresa el grado de multiplicidad del punto. La recta HAF, por exemplo (*fig.* 43.), encuentra tres veces, ó en tres puntos, la curva en el punto triplo M; uno correspondiente al ramo BC, otro al ramo $B'C'$, y otro al ramo BAB'.

2.º Al punto múltiplo M de una curva (*fig.* 23. y 43.), corresponde un número de tangentes y de subtangentes igual al número que expresa su multiplicidad: por exemplo, la curva CBC' (*fig.* 23.) tiene en el punto duplo M dos tangentes MT, MT', y las dos subtangentes correspondientes PT, PT'; la primera, perteneciente á uno de los ramos MC, y la segunda, al otro ramo MC'.

3.º Por consiguiente, el límite $\frac{dy}{dx}$ tendrá necesariamente dos valores en el punto duplo M; uno (núm. 130.) correspondiente al ángulo MTD que la tangente en el punto M del ramo MC forma con el exe AD de las abscisas; y el otro correspondiente al ángulo $MT'A$ que la tangente MT' hace con el mismo exe. En el punto triplo tendrá $\frac{dy}{dx}$ tres valores, correspondientes á los tres ángulos que las tangentes respectivas de los tres ramos que pasan por dicho punto forman con el exe AD: &c.

4.º Luego en el punto duplo, el límite $\frac{dy}{dx}$, será dado por una equacion de segundo grado; en el punto triplo, por una equacion de tercer grado; y en general, representando n el grado de la multiplicidad de un punto; la equacion que expresa el valor del límite $\frac{dy}{dx}$ relativo á dicho punto, será del grado n.

De donde se sigue; que si la equacion (núm. 31.) (C) .... $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 +$ &c. $= 0$ expresa la relacion entre las diferencias de las coordenadas de una curva, y $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$ el límite de la razon de dichas diferencias; los valores de x y de y correspondientes al punto duplo, harán $A = 0$, $B = 0$, y el límite $\frac{dy}{dx}$ será dado por la equacion (núm. 57.) (a) .... $E\frac{dy^2}{dx^2} + D\frac{dy}{dx} + C = 0$: los que corresponden al punto triplo, reducirán á cero A, B, C, D, E, y $\frac{dy}{dx}$ será dado por la equacion (b) .... $I\frac{dy^3}{dx^3} + H\frac{dy^2}{dx^2} + G\frac{dy}{dx} + F = 0$; &c. Y recíprocamente; si cierto valor de la abscisa x, y el correspondiente de la ordenada y, hacen desaparecer A, y B, en cuyo caso será $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$; el punto indicado por estos valores de las coordenadas será múltiplo: á saber, duplo si solamente desaparecen A, y B; triplo si se reducen á cero A, B, C, D, E; y en general, el grado de multiplicidad de dicho punto será el mismo que el grado de la equacion que expresa el valor del límite $\frac{dy}{dx}$.

5.º Una línea curva tiene tantos puntos múltiplos, como valores diferentes de x que con los correspondientes de y reducen el límite $\frac{dy}{dx}$ á $\frac{0}{0}$. Por valores diferentes de x entendemos, 1.º los valores desiguales; 2.º los valores iguales y de signos diferentes; 3.º y los valores iguales y de mismo signo, pertenecientes á diferentes ordenadas.

148. En virtud de estos principios, será fácil conocer, si una curva dada tiene puntos múltiplos; y en caso que los tenga, qual es el grado de multiplicidad de cada uno de ellos, y los valores de x y de y que les corresponden. Para conseguirlo, representando por $f(x, y) = 0$ la equacion de la curva, y por $B\frac{dy}{dx} + A = 0$ su diferencial; harémos $A = 0$, $B = 0$, y substituirémos en la equacion $f(x, y) = 0$ los valores de x y los correspondientes de y que dan estas equaciones: la curva propuesta tendrá un número de puntos múltiplos igual al de los valores de x que con los correspondientes de y satisfacen á la equacion $f(x, y) = 0$.

Para conocer el grado de multiplicidad de uno qualquiera de dichos puntos; diferenciarémos la equacion $B\frac{dy}{dx} + A = 0$, considerando $\frac{dy}{dx}$ como constante, y substituirémos en la equacion (a) que resultare el valor de x y el de y: si alguno de los coeficientes C, D, E, no desaparece; el punto será duplo; pero si todos tres se reducen á cero; el límite $\frac{dy}{dx}$ será dado por una equacion de un grado superior al segundo; y por consiguiente, el punto de que se trata será mas que duplo. En este caso diferenciarémos la equacion (a), y resultará la equacion (b); y si los valores de x y de y no satisfacen á esta equacion, el punto será triplo; pero mas que triplo si todas las cantidades F, G, H, I desaparecen.

En general; las equaciones (a), (b), &c., se deben diferenciar sucesivamente, considerando como constante el límite $\frac{dy}{dx}$, hasta encontrar con una que no se desvanezca enteramente, substituyendo en ella el valor de x, y el correspondiente de y; y el grado de multiplicidad del punto, será igual al grado de dicha equacion.

Exemplo 1º Sea $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$ la equacion de la curva propuesta (*fig.* 23.). Será $2a(y-b)\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 4ax - a^2 = 0$, y por consiguiente $A = -3x^2 + 4ax - a^2 = -(3x-a)(x-a) = 0$, $B = 2a(y-b) = 0$: la segunda de estas equaciones da $y = b$, y la primera $x = a$, $x = \frac{a}{3}$; y como de estos valores solo $x = a$, é $y = b$ satisfacen á la equacion de la curva; inferirémos que esta solo tiene un punto múltiplo M correspondiente á $x = a$, é $y = b$.

Diferenciando la equacion $2a(y-b)\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 4ax - a^2 = 0$, tratando como constante $\frac{dy}{dx}$; resulta la equacion de segundo grado $2a\frac{dy^2}{dx^2} - 6x + 4a = 0$, la qual, por el supuesto de $x = a$, se reduce á $\frac{dy^2}{dx^2} = 1$: de donde concluirémos que el punto M es duplo.

Exemplo 2º Si la equacion de la curva fuese $y^2x + x^2y - a^3 = 0$; tendriamos $2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy + x^2\frac{dy}{dx} = 0$, ó $x(2y+x)\frac{dy}{dx} + y^2 + 2xy = 0$; y por consiguiente las tres equaciones $A = y^2 + 2xy = 0$, $B = x(2y+x) = 0$, $y^2x + x^2y - a^3 = 0$. La primera da los dos valores $y = 0$, $y = -2x$, de los quales $y = 0$ no satisface á la equacion propuesta. Substituyendo $-2x$ por y en la segunda equacion, se transforma en $-3x^2 = 0$, que da $x = 0$; y como este valor tampoco satisface á la equacion $y^2x + x^2y - a^3 = 0$, inferirémos que la curva representada por esta equacion (*fig.* 44.) no tiene punto alguno múltiplo.

Exemplo 3º Sea la equacion de la curva propuesta $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$ (*fig.* 43.): será $(3by^2 - ax^2)\frac{dy}{dx} + 4x^3 - 2axy = 0$; y tendrémos las tres equaciones $4x^3 - 2axy = 0$, $3by^2 - ax^2 = 0$, $x^4 - ayx^2 + by^3 = 0$. La primera da $x = 0$, y $x = \pm\sqrt{\left(\frac{ay}{2}\right)}$; cuyos valores, substituidos en la segunda la transforman respectivamente en $y = 0$, $3by^2 - \frac{a^2y}{2} = 0$; y como los valores $x = 0$, $y = 0$ satisfacen á la equacion tercera, podemos afirmar que la curva propuesta tiene un punto múltiplo M, correspondiente á $x = 0$ é $y = 0$; esto es en el orígen. La equacion $3by^2 - \frac{a^2y}{2} = 0$, da $y = 0$ é $y = \frac{a^2}{6b}$; pero como el segundo de estos valores, juntamente con el de $x = \pm\sqrt{\frac{a^3}{12b}}$, no satisface á la equacion de la curva propuesta; inferirémos que esta no tiene mas punto múltiplo que el del orígen. Para conocer el grado de multiplicidad, diferenciarémos la equacion $(3by^2 - ax^2)\frac{dy}{dx} + 4x^3 - 2axy = 0$ considerando $\frac{dy}{dx}$ como constante, y resultará la equacion $6by\frac{d^2y}{dx^2} - 4ax\frac{dy}{dx} + 12x^2 - 2ay = 0$, la qual se desvanece por el supuesto de $x = 0$, é $y = 0$: será pues necesario volverla á diferenciar, y tendrémos $6b\frac{dy^3}{dx^3} - 6a\frac{dy}{dx} + 24x = 0$; cuya equacion, á causa de $x = 0$, se reduce á $6b\frac{dy^3}{dx^3} - 6a\frac{dy}{dx} = 0$; y por consiguiente el punto M será triplo.

Exemplo 4º Si la equacion de la curva fuese $y^4 - 2a^2y^2 - 4ax^3 + a^4 = 0$ (*fig.* 45.); tendriamos $4y^3\frac{dy}{dx} - 4a^2y\frac{dy}{dx} - 12ax^2 = 0$, y por consiguiente las tres equaciones $-12ax^2 = 0$, $4y^3 - 4a^2y = 0$, $y^4 - 2a^2y^2 - 4ax^3 + a^4 = 0$. De la primera se infiere $x = 0$; y de la segunda $y = 0$, $y = a$, $y = -a$; y como los dos últimos valores de y, satisfacen con el de x á la tercera equacion; inferirémos que la curva propuesta tiene dos puntos múltiplos M, M' por los quales pasa el exe de las ordenadas; el uno encima de la línea de las abscisas AD, á una distancia $AM = a$; y el otro debaxo de dicha línea y á la misma distancia.

Estos dos puntos son duplos; pues si diferenciamos la equacion que encierra $\frac{dy}{dx}$; resultará la equacion de segundo grado $(12y^2 - 4a^2)\frac{dy^2}{dx^2} - 24ax = 0$, que en el supuesto de $x = 0$, é $y = \pm a$ se reduce á $\frac{dy^2}{dx^2} = \pm 0$, y manifiesta que cada una de las líneas MT, $M'T'$ paralelas al exe de las abscisas, es tangente comun de los dos ramos correspondientes MC, MB, $M'C'$, $M'B$ en los puntos M, M'.

149. Los puntos múltiplos de las líneas curvas, ofrecen una multitud prodigiosa de variedades, que los estrechos límites de este tratado no nos permiten describir. Nos contentarémos únicamente con observar, que si la equacion que da el límite $\frac{dy}{dx}$ correspondiente al punto múltiplo, tuviese raices imaginarias; cada una de estas raices indicaria un ramo *invisible* de la curva, ó que el ramo de la curva que le corresponde se reduce á un solo punto: por lo que, si todas las raices de la equacion que da el límite $\frac{dy}{dx}$ fuesen imaginarias; todos los ramos de la curva que indica el punto múltiplo serian invisibles; cada uno de ellos se reduciria á un solo punto; y la reunion ó coincidencia de todos estos puntos formaria el punto múl-

tiplo. El punto formado de este modo se llama *conjugado*, ó aislado; y aunque es invisible y está apartado del curso de la curva, le pertenece sin embargo, puesto que las coordenadas que determinan su posicion tienen entre sí la relacion expresada por la equacion de la curva.

El polo E de la conchoyde (*fig.* 35.), es un punto conjugado, suponiendo $AE\ (=b) > Af\ (=a)$. A la verdad, el que exâmine la curva independientemente de su equacion, tendrá alguna dificultad en persuadirse que el punto E solo y fuera del curso de la curva le pertenezca: pero esta dificultad se desvanece enteramente quando se considera la equacion $x^2y^2 = (b+y)^2\ (a^2 - y^2)$ de dicha curva; pues si para conocer en que puntos la encuentra el exe de las ordenadas, hacemos $x = 0$, tendrémos la equacion $(b+y)^2\ (a^2 - y^2) = 0$ que tiene quatro raices $y = a$, $y = -a$, $y = -b$, $y = -b$; la primera indica el punto F, la segunda el punto f; y las dos raices iguales $y = -b$, $y = -b$, el punto E, que por consiguiente es uno de los puntos de la curva.

150. Para aclarar lo que acabamos de decir sobre los puntos conjugados, nos propondrémos indagar, si la curva cuya equacion es $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$, tiene algun punto múltiplo (*fig.* 46.). Para ello, diferenciando su equacion, tendrémos $2ay\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 2bx = 0$, y por consiguiente las tres equaciones $2ay = 0$, $-3x^2 + 2bx = 0$, $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$. La primera da $y = 0$; y la segunda $x = 0$, $x = \frac{2b}{3}$; y como los valores $x = 0$, $y = 0$, satisfacen á la tercera equacion; inferirémos que el orígen A de las coordenadas es un punto múltiplo de la curva propuesta.

Para conocer el grado de su multiplicidad, diferenciarémos la equacion $2ay\frac{dy}{dx} - 3x^2 + 2bx = 0$, y resultará $2a\frac{dy^2}{dx^2} - 6x + 2b = 0$; ó ya que $x = 0$, $2a\frac{dy^2}{dx^2} + 2b = 0$; así el punto A será duplo: pero como las dos raices $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{a}{b}}$ de la equacion antecedente son imaginarias; los dos ramos que forman el punto múltiplo serán invisibles, y por consiguiente dicho punto conjugado ó aislado.

La equacion de la curva CBC' manifiesta igualmente que el punto A, aunque invisible y apartado del resto de la curva, no dexa por esto de pertenecerle; pues si hacemos $y = 0$, dicha equacion se reduce á $-x^3 + bx^2 = 0$, cuyas tres raices $x = 0$, $x = 0$, $x = b$ manifiestan que el exe de las abscisas AD, encuentra dos veces la curva en el orígen A, y una en B.

151. Las curvas que tienen puntos conjugados resultan comunmente de otras curvas cuyas equaciones son mas generales, haciendo

algun supuesto con las cantidades constantes que dichas equaciones incluyen: así, la curva cuya equacion es $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$, es un caso particular de la curva representada por la equacion $ay^2 - x^3 + (b-c)\ x^2 + bcx = 0$ (*fig.* 47.); la qual se compone de una oval situada al lado de las abscisas negativas, cuyo diámetro $AE = c$; y de dos ramos BC, BC' que se extienden al infinito del lado de las abscisas positivas, y parten de un punto B á la distancia $AB = b$ del orígen A. Pues si suponemos $c = 0$ en la equacion de esta curva; se transforma en $ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$; y la figura oval AE se reduce á un solo punto conjugado A (*fig.* 46.).

De los puntos de inflexîon y de retroceso.

152. Los puntos *de inflexîon* de las líneas curvas se determinan por los mismos principios que las mayores y menores abscisas y ordenadas; esto es, por el método de máxîmos y mínimos: y diferentes autores que han escrito sobre este método, empleando únicamente la teórica de las líneas curvas; han hablado al mismo tiempo de los puntos de inflexîon. Pero como nosotros hemos tratado analíticamente el método de máxîmos y mínimos; nos parece mas conforme al buen órden y á la claridad, hablar separadamente de los referidos puntos.

Sea I un punto de inflexîon de la curva CIC (*fig.* 48. y 49.), y IM, IM' dos arcos tomados á uno y otro lado del punto I: si el uno IM de estos arcos es cóncavo hácia el exe AD (*fig.* 48.), el otro arco IM' será convexô; y si IM fuere convexô hácia AD (*fig.* 49.); IM' será cóncavo: por consiguiente, suponiendo que la abscisa $AP = x$ crece; el límite $\frac{dy}{dx}$ disminuirá (núm. 132.) en el primer caso, y aumentará en el segundo hasta que el punto M se confunda con el punto de inflexîon I, pasado el qual $\frac{dy}{dx}$ aumentará en el primer caso, y disminuirá en el segundo.

Y recíprocamente; si creciendo la abscisa AP de una curva CIC, el límite $\frac{dy}{dx}$ disminuye hasta cierto punto I, pasado el qual aumenta; ó crece hasta el punto I, y decrece pasado este punto; el arco IM será cóncavo hácia el exe AD en el primer caso (*fig.* 48.) y el arco IM' convexô; y en el segundo caso (*fig.* 49.) el arco IM será convexô hácia el exe AD, y el arco IM' cóncavo; y por consiguiente I, un punto de inflexîon; luego

El límite $\frac{dy}{dx}$ *es un máxîmo ó un mínimo, en el punto de inflexîon* I *de una curva.* Y recíprocamente; *si* $\frac{dy}{dx}$ *es un máxîmo, ó un míni-*

mo en un punto I *de una curva habrá necesariamente inflexîon en dicho punto*. De donde inferirémos

1º Que en el punto de inflexîon será (núm. 109.) $\dfrac{d \cdot \frac{dy}{dx}}{dx} =$ (núm. 81.) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$. Pero no se puede inferir recíprocamente, que si en un punto de una línea curva es $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$, hay inflexîon en dicho punto: pues esta equacion puede verificarse (núm. 112.) sin que $\dfrac{dy}{dx}$ sea un máxîmo ó un mínimo; y por consiguiente, sin que el punto correspondiente de la curva sea un punto de inflexîon.

Así la regla que se halla en diferentes tratados de Matemáticas para hallar los puntos de inflexîon de una línea curva; esto es, que para determinar dichos puntos, se debe diferenciar dos veces la equacion de la curva, y hacer $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$; supone que la curva á la qual se aplica tiene efectivamente uno ó muchos puntos de inflexîon; y aun en este supuesto es insuficiente dicha regla en muchos casos.

Si por exemplo, la curva propuesta tuviese un solo punto de inflexîon, y la equacion $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$, dos ó mas raices; habrá seguramente, entre estas, una correspondiente al punto de inflexîon, pero no se sabrá qual es.

2º Si el valor g de x, correspondiente á un punto de una curva; reduce á cero un número impar de límites $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, &c., y á una cantidad real y finita el primer límite que no desaparece; $\dfrac{dy}{dx}$ será (núm. 112.) un máxîmo ó un mínimo en dicho punto, y por consiguiente habrá en él inflexîon. Pero si el número de coeficientes diferenciales que desaparecen (comenzando por $\dfrac{d^2y}{dx^2}$) fuese par, ó si siendo impar este número, el primer límite que no desaparece fuese una cantidad imaginaria; $\dfrac{dy}{dx}$ no será un máxîmo ni un mínimo, y por consiguiente no habrá inflexîon en el punto de que se trata.

153. Problema. *Dada la equacion de una curva; determinar si esta tiene puntos de inflexîon, y en que lugares de su curso se hallan.*

Resolucion. Hállese el límite $\dfrac{dy}{dx}$, y exâmínese por el método de máxîmos y mínimos si tiene algun máxîmo ó mínimo: la curva propuesta tendrá tantos puntos de inflexîon, como máxîmos ó mínimos el límite $\dfrac{dy}{dx}$; los valores de x y de y, correspondientes á los máxîmos y mínimos, serán igualmente los que corresponden á los puntos de inflexîon; y por consiguiente se conocerá la posicion de dichos puntos.

Exemplo 1º Sea la curva propuesta una parábola cúbica, cuya equacion es $y^3 = a^2x$ (*fig. 50.*): será $y = a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}$; si esta cantidad es un máxîmo ó un mínimo, lo será tambien x^2 en el mismo caso (núm. 113. y 114.); y como x^2 es un mínimo quando $x = 0$, $\dfrac{dy}{dx}$ será un máxîmo ó un mínimo en el mismo supuesto, y por consiguiente el orígen de las coordenadas será un punto de inflexîon de la curva *CAC*.

Exemplo 2º Si fuese $y = a + (x - a)^{\frac{3}{5}}$ la equacion de la curva (*fig. 51.*); seria $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{5(x-a)^{\frac{2}{5}}}$, cuya cantidad será un máxîmo ó un mínimo, si lo fuese $(x - a)^2$. Substituyendo pues esta funcion á la primera, y suponiéndola $= z$, tendrémos $\dfrac{dz}{dx} = 2(x - a)$, y $\dfrac{d^2z}{dx^2} = 2$: la equacion $\dfrac{dz}{dx} = 2(x - a) = 0$, da $x = a$; y como $\dfrac{d^2z}{dx^2}$ es una cantidad finita, la funcion $(x - a)^2$, ó la funcion $\dfrac{3}{5(x-a)^{\frac{2}{5}}} = \dfrac{dy}{dx}$, será un máxîmo ó un mínimo, en el supuesto de $x = a = y$; de donde inferirémos que el punto I, correspondiente á las coordenadas iguales $AP = PI = a$ es un punto de inflexîon. Observarémos de paso que la ordenada PI, correspondiente al punto de inflexîon I se confunde con la tangente de la curva en el mismo punto; pues quando $x = a$, la tangente (núm. 130., 8º) $\dfrac{dx}{dy}$ $\left(= \dfrac{5(x-a)^{\frac{2}{5}}}{3}\right)$ del ángulo que la tangente de la curva forma con la ordenada, es cero.

Exemplo 3º Si la equacion de la curva *CAC* (*fig. 52.*), cuyos puntos de inflexîon se quieren determinar, fuese $y = 1 - x^4$; seria $\dfrac{dy}{dx} = -4x^3$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -12x^2$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = -24x$, $\dfrac{d^4y}{dx^4} = -24$; y haciendo $-12x^2$ $\left(= \dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$, tendrémos $x = 0$, cuyo valor reduce á cero $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, siendo $\dfrac{d^4y}{dx^4}$ una cantidad finita: por consiguiente $-4x^3 = \dfrac{dy}{dx}$ no es un máxîmo ni un mínimo, y la curva propuesta no tiene ningun punto de inflexîon.

La ordenada AM correspondiente á la abscisa $x = 0$, es un máxîmo; pues en este supuesto los límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ desaparecen, y $\frac{d^4y}{dx^4}$ es una cantidad negativa (núm. 112.).

Exemplo 4.º Sea $y = ax^3 - x^4$ la equacion de la curva propuesta (*fig.* 53.); será $\frac{dy}{dx} = 3ax^2 - 4x^3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax - 12x^2$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 6a - 24x$, &c. La equacion $6ax - 12x^2 \left(= \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$ da $x = 0$, y $x = \frac{a}{2}$; y como, en ambos supuestos, $\frac{d^3y}{dx^3}$ es una cantidad real y finita; $\frac{dy}{dx}$ será un máxîmo ó un mínimo quando $x = 0$, y quando $x = \frac{a}{2}$: de donde inferirémos que la curva CAC tiene dos inflexîones, una en el orígen A, y otra en el punto I correspondiente á la abscisa $AP = \frac{a}{2}$.

154. Quando dos arcos RA, RC de una línea curva que se tocan en el punto R, y tienen por consiguiente una tangente comun RB, se terminan en el punto de contacto R; se llama este *punto de retroceso* (*fig.* 54. *y* 55.), y se distingue en dos especies. El punto R es de la primera especie (*fig.* 54.), quando los arcos RM, RM' que se terminan en él, se vuelven recíprocamente sus convexîdades; pero quando las convexîdades de ambos arcos caen hácia un mismo lado (*fig.* 55.); el punto de retroceso R, es de la segunda especie. De esta definicion se sigue

1.º Que un punto de retroceso R de una línea curva, es un punto duplo (núm. 147.), y por consiguiente el límite $\frac{dy}{dx}$ será dado por una equacion de segundo grado: pero como el ángulo RBD que la tangente en el punto R hace con el exe de las abscisas, es comun á los ramos RM, RC, las dos raices de dicha equacion serán iguales.

2.º Y recíprocamente, si las dos raices de la equacion que da el valor del límite $\frac{dy}{dx}$ perteneciente á un punto duplo R, son iguales; y que ademas los dos ramos de la curva se terminan en R, será este un punto de retroceso.

Para distinguir si este punto, es de la primera ó de la segunda especie; se determinará $\frac{d^2y}{dx^2}$; y si los dos valores de esta expresion, en las inmediaciones del punto R, fuesen de signo contrario (núm. 133.); el retroceso será de la primera especie (*fig.* 54.); pero si ambos valores tuviesen el mismo signo, el punto de retroceso R, pertenecerá á la segunda especie (*fig.* 55.).

Exemplo 1.º Sea la curva CAC' la segunda parábola cúbica, cuya

equacion, suponiendo el parámetro $= 1$, es $y^2 = x^3$ (*fig.* 56.): tendrémos $2y\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$, y $2\frac{dy^2}{dx^2} - 6x = 0$. Esta equacion en el supuesto de $x = 0$, tiene dos raices iguales $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$; y como los dos ramos AC, AC' de la curva, estan del lado de las abscisas positivas, y quando $x = 0$ es tambien $y = 0$; inferirémos que el orígen A de las coordenadas es un punto de retroceso, cuya tangente comun es el exe AD de las abscisas.

La equacion $y = \pm \sqrt{x^3}$ de la curva, manifiesta que el retroceso es de la primera especie; y lo mismo indica la expresion de $\frac{d^2y}{dx^2}$: pues siendo $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y} = \pm \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$, será $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4x^{\frac{1}{2}}}$, y por consiguiente, á causa de ser de signo diferente los dos valores de $\frac{d^2y}{dx^2}$, el punto de retroceso A será de la primera especie.

Exemplo 2.º Hemos visto (núm. 148. ex. 4.º) que la curva, cuya equacion es $(y^2 - a^2)^2 = 4ax^3$ (*fig.* 45.), tiene dos puntos múltiplos M, M' correspondientes á $x = 0$, é $y = \pm a$; y que en cada uno de ellos, en M por exemplo, la línea MT paralela al exe AD, es tangente comun de los dos ramos MC, MB de la curva. Por lo que; si observamos ademas, que estos ramos, y los análogos $M'C'$, $M'B$ del punto M' se terminan respectivamente en los puntos M, y M' (conforme lo manifiesta la equacion de la curva); inferirémos que en ambos puntos hay retroceso.

Para averiguar á que especie pertenece el punto M; observarémos que la equacion propuesta da $y^2 - a^2 = \pm 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, y $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, y $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \pm \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{1}{2}}}$, y despreciando $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ por ser su valor sumamente pequeño en las inmediaciones del punto M, será $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3a^{\frac{1}{2}}}{4yx^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x(a^2 \pm 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})}}$. El valor $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x(a^2 + 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})}}$ correspondiente al ramo MC es siempre positivo, y por consiguiente convexô este ramo hácia el exe AD: el otro valor $-\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x(a^2 - 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}})}}$ pertenece al ramo MB, y manifiesta que es cóncavo hácia el mismo exe; de donde concluirémos que el retroceso en el punto M es de la primera especie.

Lo mismo hallariamos relativamente al punto inferior M'.

Exemplo 3.º Si la equacion de la curva propuesta fuese $(y - x^2)^2$

$= x^5$ (*fig.* 57.): tendriamos $y - x^2 = \pm x^{\frac{5}{2}}$, $\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$, cuyas dos raices son cero, en el supuesto de serlo x; y como los dos ramos de la curva no pasan al lado de las abscisas negativas, y que ademas quando $x = 0$, es tambien $y = 0$; inferirémos del mismo modo que en el exemplo primero, que el orígen A de las coordenadas es un punto de retroceso, y que el exe AD de las abscisas es tangente comun de los dos ramos de la curva que le forman.

Diferenciando la equacion $\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}$, tendrémos $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}$; cuya equacion manifiesta que el ramo AC, al qual corresponde el valor $2 + \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}$ de $\frac{d^2y}{dx^2}$, tiene su convexîdad vuelta hácia el exe AD; y el ramo AIC', en el qual es $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}$, es tambien convexô hácia el mismo exe, desde el orígen A hasta el punto de inflexîon I correspondiente á la abscisa $AP = \left(\frac{8}{15}\right)^2$ dada por la equacion $2 - \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}} = 0$; y por consiguiente el punto de retroceso A, es de la segunda especie.

De la curvatura de las líneas en sus diferentes puntos: del radio de la curvatura; y de las evolutas.

155. Si suponemos que un punto A (*fig.* 58.) se mueve constantemente hácia otro punto B; la línea B, que el punto A describe en su movimiento, será recta: pero si el punto A mudase á cada instante la direccion de su movimiento (*fig.* 59.), de manera que en el punto A, fuese Aa; en el punto inmediato B, Bb; en el punto siguiente C, Cc; &c; la línea $ABCDE$ será curva, y las líneas Aa, Bb, Cc, &c., serán respectivamente tangentes en los puntos A, B, C, &c. De donde se sigue; que quanto mas se apartare el pequeño arco AB de la tangente Aa, tanto mayor será su curvatura; y como una curva se aparta mas ó menos de la tangente, en sus diferentes puntos A, B, C, &c., la curvatura de una línea varía tambien continuamente. El círculo es la sola línea curva que se aparta igualmente de la tangente en todos sus puntos, y que por lo mismo tiene en todos ellos la misma curvatura; pero los diferentes círculos; esto es, los círculos trazados con diferentes radios se apartan mas ó menos de la tangente comun, y tienen por lo mismo distintas curvaturas.

156. Sean Ac, Ac', Ac'', &c. (*fig.* 60.) diferentes arcos de círculo trazados respectivamente con los radios AC, AC', AC'', &c., los quales estan en una misma recta AD perpendicular á AB: el arco Ac', trazado con el radio AC', se apartará mas de la tangente comun AB que el arco Ac cuyo radio es AC, y menos que el arco Ac'' que tiene por radio AC''; por consiguiente, *la curvatura de un círculo es tanto mayor, quanto menor fuere su radio; ó está en razon inversa del radio.*

157. Como la curvatura es uniforme en un mismo círculo, y se puede variar á arbitrio haciendo el radio mayor ó menor; la curvatura de las líneas se refiere á la de los círculos.

158. Si dos arcos de círculo Bb, Bc (*fig.* 61. *y* 62.) tocan la curva ABD en un punto B; la curvatura del círculo Bc que está entre la curva y el círculo Bb, se acercará mas á la curvatura de la curva en el punto B, que la curvatura del otro círculo Bb: y como la curvatura de los círculos se puede variar al infinito; si suponemos que el círculo Bc esté tan íntimamente unido á la curva en el punto B, que ningun otro círculo pueda pasar entre él y la curva BD; la curvatura del círculo Bc será la misma que la de la curva á ABD en el punto B.

159. El círculo Bc que tiene en el punto B la misma curvatura que la curva ABD se llama *círculo de curvatura*, *ó círculo osculador*; su radio BC, *radio de curvatura*; y el centro C, *centro de curvatura* de la línea ABD en el punto B.

Es evidente 1º que el radio de curvatura en un punto B, es perpendicular á la curva, ó á su tangente, en B; y por consiguiente se confunde con su normal.

2º La curvatura en un punto B de una curva es mayor ó menor que la curvatura en un otro punto D, segun el radio de curvatura del punto B fuere menor ó mayor que el radio de curvatura del punto D.

160. Si suponemos que una curva qualquiera GCE (*fig.* 63.) cóncava hácia un mismo lado, esté envuelta con un hilo $AGCE$, estando uno de los extremos fixo en E, y el otro extremo A en la línea GI tangente en el extremo G de la curva, sobre la qual tiene tirante la parte GA del hilo; y que el punto A se mueva de A hácia M desenvolviendo continuamente la curva GCE, y teniendo siempre tirante el hilo; el punto A trazará con su movimiento una curva AMF. La curva GCE se llama *la evoluta* de la curva AMF; y las porciones desenvueltas AG, MC, $M'C'$, &c. del hilo, *los radios de la evoluta.* De donde resulta

1º Que el arco CC' de la evoluta comprehendido entre dos radios CM, $C'M'$, es igual á la diferencia de estos radios.

2º La curvatura de la línea AMF disminuye continuamente desde A hácia F (núm. 156.).

3º Si desde el punto C, como centro, y con el radio CM de la evoluta, trazamos un arco de círculo MK; y desde un punto qualquiera M' de la curva tiramos el radio correspondiente $M'C'$ que lo encuentre en un punto c; el radio $M'C' = MC + CC' = Cc + CC'$

será mayor que la línea $C'c$; por consiguiente, la curva MF estará entre el círculo MK y la tangente MT.

4º Un arco de círculo ML, trazado con el radio $MS > MC$, y que toca la curva MF en el punto M, está entre la curva y su tangente. Pues si tiramos por el punto S el radio $M'C'$ de la evoluta que encuentre el círculo ML en b; á causa de $C'S + SC > C'C$, será $C'S + SM (= C'b) > C'C + CM (= C'M)$, y por consiguiente el círculo ML está entre MT y MF.

Esto se debe entender en las inmediaciones del punto M; pues el arco ML despues de pasar entre la curva y su tangente hasta cierta distancia del punto M puede cortar aquella en un punto L.

Es tambien cierto (núm. 156.), que un círculo trazado con un radio menor que MC, y que toca la tangente MT en el punto M, no puede pasar entre esta y el círculo MK.

5º Luego ningun círculo de los que tocan la curva AMF, en el punto M, puede pasar entre la curva MF y el círculo MK trazado del punto C con el radio CM de la evoluta; y por consiguiente (núm. 158.) el círculo MK es el círculo de curvatura; el radio MC de la evoluta, el radio de curvatura; y el punto C, el centro de curvatura de la curva AMF en el punto M.

6º Si continuamos el círculo de curvatura MK al otro lado del punto M; será fácil probar, por los principios antecedentes, que el arco MN' está entre la curva y la tangente; y por consiguiente, el círculo de curvatura NMK, toca y corta la curva en el punto M.

7º La curvatura de una curva AF en sus diferentes puntos, está en razon inversa del radio de curvatura.

161. Sea AMF (*fig.* 63.) una curva qualquiera; AD el exe de las abscisas; MC, $M'C'$ dos radios de curvatura que se encuentran en S; MeK, el círculo de curvatura del punto M; Mb, OQ, dos arcos de círculo trazados del punto S con los radios SM, y $SO = 1$; y llamemos z el ángulo ANM; y A, el arco AM: el ángulo OSQ será igual á $DBS - DNS = ABM' - ANM = \Delta . ANM = \Delta z$, y como el radio SO es $= 1$, será tambien el arco $CQ = \Delta z$. Esto supuesto; es constante que quanto mas cerca esté el punto M' del punto M, tanto mas cerca estará el punto S del centro de curvatura C, y tanto mas se acercará el arco MM' $(= \Delta A)$ de la curva, á confundirse con el arco Mb: por consiguiente, á medida que el punto M' se aproxîme al punto M, la razon $\frac{OQ}{MM'} = \frac{\Delta z}{\Delta A}$; se acercará continuamente á la razon $\frac{OQ}{Mb}$ ó á su igual $\frac{1}{SM}$ de manera que la diferencia de estas dos razones llegará á ser menor que qualquiera cantidad dada; luego (núm. 20.) el límite $\frac{1}{CM}$ de la segunda de estas dos razones será igual al límite $\frac{dz}{dA}$ de la primera. Luego

La razon de la unidad al radio de curvatura; es el límite de la razon $\frac{\Delta z}{\Delta A}$ *entre la diferencia del ángulo* ANM *que la normal hace con el exe de las abscisas, y la diferencia del arco* AM *de la curva.* Por consiguiente

1º Si llamamos R el radio de curvatura de un punto qualquiera de una línea curva, será $\frac{1}{R} = \frac{dz}{dA}$, y $R = \frac{dA}{dz}$.

2º Si consideramos el arco A, y el ángulo z, como funciones de la abscisa x; será $\frac{dA}{dz} = \frac{dA}{dx} : \frac{dz}{dx}$. Pero (núm. 130, 8º) siendo tang. $z = \frac{dx}{dy}$, será $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{tang. } z} = \text{cot. } z$; de donde inferirémos (núm. 77.) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\text{sen.}^2 z}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2} \text{ sen.}^2 z =$ (núm. 134, 3º) $-\frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{dx^2}{dA^2}$, y $R = \frac{dA}{dx} : -\frac{d^2y}{dx^2} \times \frac{dx^2}{dA^2} = -\frac{dA^3}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2}$; ó substituyendo por $\frac{dA}{dx}$ su valor $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ (número 134.), tendrémos finalmente $R = -\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

3º Si prolongamos la ordenada PM (*fig.* 64.) hasta que encuentre en I la CI paralela al exe AD; tendrémos $MN : MP : PN :: MC : MI : IC$, ó (núm. 130.) $y\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} : y : y\frac{dy}{dx} ::$ $\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} : MI : IC$; de donde inferirémos $MI = -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, y $IC = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

4º Si la curva AF fuese convexâ hácia el exe AD (*fig.* 65.); el ángulo $ANM =$ z disminuiria mientras x crece (núm. 132.); Δz seria negativa, y las expresiones antecedentes del radio de curvatura serian de signo diferente: de donde inferirémos que el radio de curvatura en vez de caer al mismo lado que el exe AD de las abscisas respecto del punto M como en la *fig.* 64., caeria hácia el lado opuesto. Así la expresion general del radio de curvatura es $R = \mp \frac{dA^3}{dx^3} : \frac{d^2y}{dx^2} = \mp \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$, sirviendo el signo superior quando la curva fuese cóncava (*fig.* 64.) respecto del exe de las abscisas; y el inferior quando fuere convexâ (*fig.* 65.).

162. El radio de curvatura MC (*fig.* 66.), y las líneas MI, CI, se pueden determinar con mucha elegancia y sencillez por medio del teorema de *Taylor*.

Para ello supondrémos que desde el punto C', y con el radio $MC' > MC$ se describa el arco $MM'K'$ que corta la curva AMF en un punto M' (núm. 160., 4º); y que se tiren la $M'P'I$ paralela á MP, que prolongada encuentra en m la tangente TMm; y la $C'I'$ paralela á AD. Esto supuesto, es evidente que quanto mas se acercare el punto M' al punto M, tanto mas se acercará el punto C' al centro de curvatura C, y la línea $M'I'$ á MI: de manera, que las líneas MC', MI', llegarán á ser respectivamente iguales á MC, MI, quando el punto M' se confunda con el punto M, ó el punto P' con el punto P; esto es, quando sea $\Delta x \ (= PP') = 0$. Pero (núm. 133.) siendo $Bm = \frac{dy}{dx}\Delta x$, $mM' = -\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y}{dx^3}\Delta x^3 + \&c.\right)$, $(Mm)^2 = \Delta x^2 + \frac{dy^2}{dx^2}\Delta x^2$, y por la propiedad del círculo $(Mm)^2 = mM' \times 2M'I'$; será $M'I' = -$ ....

$$\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{3}\frac{d^3y}{dx^3}\Delta x + \&c.}$$

; por consiguiente, haciendo $\Delta x = 0$, resultará $MI = -\dfrac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; y á causa de los triángulos semejantes MPN, MIC que dan $MP : PN : MN$, ó $y : y\frac{dy}{dx} : y\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} :: MI : CI : MC$, tendrémos finalmente $CI = -$ ....

$$\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ y } MC = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

163. Si la curva AMF fuese convexâ hácia el exe AD; la distancia mM' seria positiva, y por lo mismo lo serian tambien las expresiones de MC, MI, y CI.

164. Conociendo pues la curva AMF, ó su equacion; será fácil hallar el radio de curvatura correspondiente á uno qualquiera M de sus puntos, determinando los límites $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, y substituyéndolos en la fórmula $\mp\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2}$, que aplicarémos á algunos exemplos á fin de hacer su uso familiar.

Exemplo 1º Sea la curva propuesta un círculo cuyo radio $AC =$

a (*fig.* 67.). Será su equacion $y^2 = 2ax - x^2$, de la qual inferirémos $2y\frac{dy}{dx} = 2a - 2x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{y} = \frac{a-x}{(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots$ $\frac{-a^2}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1+\frac{a^2-2ax+x^2}{2ax-x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \ldots$ $\left(\frac{a^2}{2ax-x^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^3}{(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, y por consiguiente $R = -\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2y}{dx^2} = a$; cuyo resultado manifiesta, que el radio de curvatura en el círculo, es constantemente igual al radio del círculo, lo qual reduce la evoluta á un punto único C, centro de dicho círculo. Esto es evidente de suyo.

Exemplo 2º Si la curva AMF (*fig.* 64.) fuese una parábola vulgar; su equacion seria $y^2 = ax$, de la qual se infiere $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{2y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2}{4y^3}$, $1+\frac{dy^2}{dx^2} = 1+\frac{a^2}{4y^2}$, y $R = \ldots$

$$\frac{4y^3\left(1+\frac{a^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{a^2} = \frac{(4y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2} = \frac{(4ax+a^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2}.$$

Para hallar el punto G, donde el extremo G de la evoluta GE toca la línea de las abscisas AD; harémos $x = 0$, y resultará $R = \frac{a}{2} = AG$.

Si quisiéramos comparar la curvatura en el orígen A, á la curvatura en el punto M, suponiendo que la abscisa correspondiente AP es igual á $\frac{3}{4}a$; substituiriamos esta cantidad por x en la expresion del radio de curvatura, y resultaria este $= 4a = MC$; y como en el orígen A es $AG = \frac{a}{2}$, concluirémos (núm. 156.) que la curvatura en A, es á la curvatura en M, como $4a$ es á $\frac{a}{2} :: 8 : 1$.

Exemplo 3º Sea AMF una elipse, ó una hypérbola cuyo semiexe mayor $AB = a$, y el semiexe menor $BF = b$ (*fig.* 68. y 69.). Su equacion comun, suponiendo en A el orígen de las coordenadas, es $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax \mp x^2)$; por consiguiente $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a \mp x)}{y} = \frac{\frac{b}{a}(a \mp x)}{(2ax \mp x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mp\frac{b}{a}}{(2ax \mp x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{b}{a}(a \mp x)^2}{(2ax \mp x)^{\frac{3}{2}}} = - \ldots$

$\frac{ba}{(2ax \mp x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a \mp x)^2}{2ax \mp x^2}$, $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\left(\frac{2ax \mp x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)^2}{2ax \mp x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, y finalmente $R = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{\left(2ax \mp x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a \mp x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{ba}.$$

Si suponemos $x = 0$, tendrémos $R = AG = \frac{b^2}{a}$: de donde inferirémos que la distancia AG del orígen de la elipse, ó de la hypérbola, al orígen de sus evolutas es igual á la tercera proporcional al semiexe mayor y semiexe menor; ó lo que es lo mismo, igual á la mitad del parámetro del exe mayor.

Tambien manifiesta la expresion antecedente del radio de curvatura, que en la elipse AFD el radio de curvatura MC crece continuamente desde $x = 0$ hasta $x = a$, ó desde el punto A hasta el punto F, en el qual $R = FE = \frac{a^2}{b}$; y decrece desde F hasta D; en cuyo punto, siendo $x = 2a$, R es como en A igual á $\frac{b^2}{a}$; por consiguiente, la evoluta GEG' se compone de dos ramos iguales y semejantes GE, $G'E$ situados de un mismo modo respecto de los exes, y que se encuentran en el punto E del exe menor prolongado, á una distancia FE del punto F, igual á la mitad del parámetro de dicho exe.

Exemplo 4º Si la curva propuesta AMF (*fig.* 70.) fuese la *cicloyde*; llamando FP, x; PM, y; el radio FB del círculo generador a; y el arco FH, z; será su equacion $y = z + \sqrt{(2ax - x^2)}$; de la qual se infiere $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{a - x}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, ó substituyendo por $\frac{dz}{dx}$ su valor (núm. 134., 4º) $\frac{a}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{2a - x}{(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ $= \left(\frac{2a - x}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = (2ax^{-1} - 1)^{\frac{1}{2}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}(2ax^{-1} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ $\times - 2ax^{-2} = -\frac{a}{x^{\frac{3}{2}}(2a - x)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2a - x}{x}$, $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} =$ $\left(\frac{2a}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$, y $MC = R = \left(\frac{2a}{x}\right)^{\frac{3}{2}} : \frac{a}{x^{\frac{3}{2}}(2a - x)^{\frac{1}{2}}} = 2(2a)^{\frac{1}{2}}(2a$ $- x)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{(4a^2 - 2ax)} =$ *al duplo de la cuerda* HL.

Quando el punto M se confunde con el punto A; la cuerda HL es cero; y quando el punto M cae en F, HL es igual al diámetro

FL, y $R = 2FL$; de donde inferirémos, que el orígen A de la cicloyde lo es igualmente de su evoluta, y que esta encuentra el exe FL en un punto E, cuya distancia EL á la base AD, es igual al diámetro del círculo generador.

165. Para hallar la equacion de la evoluta GCE (*fig.* 64.) de una curva qualquiera AF; llamarémos z la abscisa AK; u, la ordenada KC; y tendrémos $z = AP + PK = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; $u, = MI - MP = -\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} - y$; y eliminando las variables x é y por medio de estas dos equaciones y la de la curva AF, resultará una equacion entre z y u la qual será por consiguiente la de la evoluta GCE.

Si se toma el orígen de las coordenadas en el punto G; y se supone $= c$ la distancia conocida AG; la abscisa $GK = z$, será $x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} - c$; y así lo supondrémos en los exemplos siguientes.

Exemplo 1º Sea la curva AMF una parábola: será $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$, $1 + \frac{dy^2}{dx^2} = 1 + \frac{a^2}{4y^2}$, $\frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{4y^3}{a^2} - y$, y $\frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{2y^2}{a^2} - \frac{a}{2} = -2x - \frac{a}{2}$: de donde inferirémos $z = x + 2x + \frac{a}{2} - c = 3x$ (núm. 164.), u $= \frac{4y^3}{a^2} = \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$, ó $u^2 = \frac{16x^3}{a}$, y substituyendo $\frac{z}{3}$ en lugar de x tendrémos finalmente $u^2 = \frac{16}{27a}z^3$; cuya equacion manifiesta, que *la evoluta de la parábola ordinaria, es una segunda parábola cúbica, la qual se compone de dos ramos iguales* GE, GE' *que parten del orígen* G *de las coordenadas, en cuyo punto forman un retroceso de la primera especie* (núm. 154. *exemp.* 1º).

Exemplo 2º Si la curva AMF fuese la *cicloyde* (*fig.* 70.); las expresiones de $AK = z$, y $KC = u$, serian diferentes, á causa de

O

que en esta curva se toma ordinariamente por exe de las abscisas el diámetro FL del círculo generador.

Para hallar en este caso la equacion de la evoluta ACE, trazarémos sobre la línea AQ, igual y paralela á $LE = LF$, el semicírculo ANQ, y tirarémos CO paralela á AL; y observando (n. 164. *exemp.* 4º.) que c es cero; $Ap = AL - MP = LnH - HP$;

$$pK = MI = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}};\ u = KC = CI - IK = CI -$$

$$LP = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}} - LP = 2\,(2a - x) - LP =$$

$$2LP - LP = LP = AO;\ z = AK = Ap + pK = LnH - HP$$

$$-\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = LnH - HP + 2\,(2ax - x^2)^{\frac{1}{2}} = LnH + HP,$$

ó á causa de $LP = AO$, $z = An'N + NO = CO$; cuyo resultado manifiesta, que *la evoluta* ACE *es una semicicloyde de todo punto igual á* AMF, *cuyo vértice está en el punto* A, *y la base* QE *es paralela á* AL.

Como el radio de curvatura en el punto A, es cero; un arco qualquiera AC de la cicloyde ACH será igual al radio correspondiente MC, ó al duplo de la cuerda $AN = LH$; y por consiguiente la semicicloyde ACE, será igual á EF, ó *igual al duplo del diámetro* FL *del círculo generador.*

166. La teoría de los círculos osculadores ó de curvatura, y de las evolutas; se puede exponer de un modo distinto del antecedente, y que seguramente agradará á los Lectores apasionados al método analítico.

Sea AMF (*fig. 71.*) una curva qualquiera referida á los exes AD, AH perpendiculares entre sí; BMG, una curva conocida referida á los mismos exes; la abscisa AP relativa á la curva AMF, x; la ordenada correspondiente PM, y; la abscisa Ap de la curva conocida z; y la ordenada correspondiente pm, u. Sentado esto, si se supone que estas dos curvas tienen un punto comun M; haciendo $z = AP = x$, resultará $u = PM = y$; por lo que, si substituimos en la equacion de la curva AMF, $x + k$ en lugar de x; y en la equacion de la curva BMG, $z + k$ en lugar de z, tendrémos relativamente al punto comun M, $P'M' = y + \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{k^2}{2}$

$+ \frac{d^3y}{dx^3}\frac{k^3}{6} +$ &c. (núm. 89.), $P'm' = u + \frac{du}{dz}k + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{k^2}{2}$ $+ \frac{d^3u}{dz^3}\frac{k^3}{6} +$ &c.; y $M'm' = P'M' - P'm' = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{du}{dz}\right)k$ $+ \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{k^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dz^3}\right)\frac{k^3}{6} +$ &c.; en cuya serie, la cantidad arbitraria $k = PP'$, puede ser tan pequeña como se quisiere. De donde se infiere

1º Que la curva BMG, se acercará tanto mas á la curva propuesta en las inmediaciones del punto M; quantos mas términos sucesivos de la serie antecedente desaparecieren. Así, si fuese $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$; la distancia $M'm'$ entre las dos curvas seria menor que si no se verificase esta igualdad; y por consiguiente la curva BMG estará mas cerca de la curva propuesta en las inmediaciones del punto M.

2º Que en el supuesto de ser $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$; ninguna otra curva trazada por el punto M, podrá pasar entre las curvas MF, MG, á menos que llamando α, β sus coordenadas, se verifique relativamente al punto M la condicion $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$.

En efecto; si llamamos D la distancia del punto M' al punto en que la nueva curva corta la línea $P'M$; será $D = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{d\alpha}\right)k + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)\frac{k^2}{2} +$ &c.; y la distancia $M'm'$ se reducirá en el supuesto actual á $\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{k^2}{2} +$ &c.: por lo que, siempre que la expresion $\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{d\alpha}$ no sea nula; haciendo decrecer la cantidad arbitraria $k = PP'$, la distancia D llegará á ser mayor (número 13.) que la distancia $M'm'$; y quando esto se verifique relativamente á cierto valor determinado de k; se verificará con mayor razon para todos los valores de k menores que aquel. Luego la nueva curva no podrá pasar entre MF, y MG, á menos de que la expresion $\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{d\alpha}$ sea $= 0$, ó que $\frac{d\beta}{d\alpha}$ sea $= \frac{dy}{dx}$.

3º Si fuese al mismo tiempo $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$, y $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; seria $M'm' = \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dz^3}\right)\frac{k^3}{6} +$ &c.; y comparando este valor al de $D = \left(\frac{dy}{dx} - \frac{d\beta}{d\alpha}\right)k + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)\frac{k^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3\beta}{d\alpha^3}\right)\frac{k^3}{6}$ $+$ &c., echarémos de ver; que si los coeficientes de k, y de k^2 no desaparecen á un mismo tiempo, se podrá tomar k bastante pequeña para que la distancia D sea mayor que Mm'. Luego en el supuesto actual, la nueva curva no podrá pasar entre MF, y MG, á no ser que relativamente al punto comun M, se verifiquen las equaciones $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

Del mismo modo probariamos, que si fuese $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, y $\frac{d^3u}{dz^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$; la nueva curva no podrá pasar entre MF y MG; á menos de que sea tambien $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, y $\frac{d^3\beta}{d\alpha^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$; y así en adelante.

167. Como la curva conocida BMG, se acerca tanto mas á la propuesta AMF en las inmediaciones del punto comun M, quantos mas términos sucesivos de la serie $\left(\frac{dy}{dx} - \frac{du}{dz}\right)k + \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{k^2}{2} + \&c. = M'm'$ desaparecen; el contacto de dichas curvas en el punto M se divide en varios órdenes.

El contacto es *de primer órden*, quando relativamente al punto M se verifica la equacion $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$.

Si siendo iguales los coeficientes diferenciales de primer órden $\frac{du}{dz}$, $\frac{dy}{dx}$; lo son tambien los de segundo órden $\frac{d^2u}{dz^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, el contacto se llama *de segundo órden, ú osculacion;* y en general el órden del contacto es igual al órden de los coeficientes diferenciales del último término que desaparece en la expresada serie.

168. Si en la expresion $M'm' = \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{k^2}{2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dz^3}\right)\frac{k^3}{6} + \&c.$ relativa al contacto de primer órden; suponemos k tan pequeña como sea necesario para que el primer término $\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2u}{dz^2}\right)\frac{k^2}{2}$ sea mayor que la suma de todos los demas (núm. 13.); la distancia $M'm'$ conservará el mismo signo, ya sea k positiva ó negativa, y por consiguiente la curva BMG caerá hácia un mismo lado respecto de la curva AMF inmediatamente antes y despues del punto de contacto M.

Pero si el contacto en el punto M fuese de segundo órden; la distancia $M'm'$ seria $= \left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dz^3}\right)\frac{k^3}{2\cdot 3} + \left(\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^4u}{dz^4}\right)\frac{k^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \&c.$, la qual muda de signo al mismo tiempo que k: de donde inferirémos que la curva BMG pasará en el punto M, del uno al otro lado respecto de la curva AMF; y por consiguiente que tocará y cortará esta curva en el punto M, del mismo modo que la tangente toca y corta una curva en el punto de inflexîon.

En general, en los contactos de un órden impar, la curva BMG caerá hácia un mismo lado respecto de la curva AMF inmediatamente antes y despues del punto M; pero en los contactos de un órden par, tocará y cortará la curva AMF en dicho punto.

Hablando rigorosamente, las curvas AMF, BMG, solo coinciden en el punto comun M, en el qual las ordenadas y, u, correspondientes á la misma abscisa AP son iguales; y la igualdad respectiva de los coeficientes diferenciales de primero, segundo, &c. órden de estas ordenadas, no las hace coincidir en otros puntos aunque se supongan tan inmediatos á M como se quiera: pero si hace que se acerquen continuamente inmediatamente antes y despues del punto M; de modo que otra curva qualquiera trazada por dicho punto, en la qual no se verifique la misma igualdad, no podrá pasar entre las referidas curvas.

Esta es la idea exâcta que se debe formar de los diferentes grados de contacto ú osculacion de las curvas, que en el método de los infinitamente pequeños se consideran como coincidencias mas ó menos rigorosas, ó de mayor ó menor extension.

169. Supongamos desde luego que la línea conocida BMG sea una recta que corta en B el exe de las abscisas (*fig.* 72.), y en E el de las ordenadas. Llamando a la distancia AE; y b la tangente del ángulo GBD que forma con el exe de las abscisas; será su equacion $u = a + bz$; de donde se infiere $\frac{du}{dz} = b$. Sentado esto; como en el punto comun M, es $z = x$, y $u = y$; será en dicho punto $a + bx = y$; por lo que, si suponemos que sea tambien $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$, tendrémos $b = \frac{dy}{dx}$, $a = y - x\frac{dy}{dx}$, y la equacion de la recta BMG se transformará en $u = y + (z - x)\frac{dy}{dx}$, representando x é y las coordenadas determinadas AP, PM del punto comun M.

La recta BMG representada por la equacion antecedente tiene la propiedad, que ninguna otra recta tirada por el punto M podrá pasar entre ella y la curva AMF, y por consiguiente será tangente en el punto M de dicha curva. Pues si suponemos que sea $\beta = g + h\alpha$ la equacion de otra recta trazada por el punto M; será en dicho punto $\alpha = x$, $\beta = y$, y por lo mismo $g + hx = y$; y para que esta recta pueda pasar entre MF, y MG, es preciso (núm. 166., 2º) que sea $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$: tendrémos pues, $h = \frac{dy}{dx}$, y $g = y - x\frac{dy}{dx}$; y como estos valores son idénticamente los mismos que los de b, y a, dicha recta coincidirá necesariamente con BMG.

Luego la recta BMG representada por la equacion $u = y + (z - x)\frac{dy}{dx}$ será tangente en el punto M de la curva AMF, determinado por las coordenadas $AP = x$, y $PM = y$: cuya conclusion concuerda perfectamente con lo demostrado en el núm. 130., por un camino muy distinto del antecedente.

Por consiguiente, la cantidad b, esto es la tangente del ángulo MBD que la tangente en el punto M de la curva AMF hace con el exe de las abscisas es igual á $\frac{dy}{dx}$; lo mismo que en el n. 130., 8º

Si hacemos $u = 0$, en la equacion de la tangente BMG; tendrémos $z = AB = -\left(\frac{y}{\frac{dy}{dx}} - x\right)$, en cuya expresion el signo negativo antepuesto al paréntesis indica solamente que el punto B cae del lado opuesto al de las abscisas positivas; por consiguiente la distancia BA tomada de B hácia D será $= \frac{y}{\frac{dy}{dx}} - x$; y la subtangente $BP = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = y\frac{dx}{dy}$, lo mismo que antes (núm. 130., 1º): de donde será fácil inferir las conclusiones del núm. 130.

170. Supongamos ahora que la curva conocida BMG (*fig.* 73.) sea un círculo cuyo centro esté en C. Llamando a la distancia AK del orígen A de las coordenadas, al punto K donde la perpendicular CK al exe AD encuentra dicho exe: la distancia ó perpendicular CK, b; y r el radio CM; será su equacion $(a - z)^2 + (u + b)^2 = r^2$, de donde se infiere $u\ (= pm) = -b + \sqrt{(r^2 - (a - z)^2)}$, y $\frac{du}{dz} = \frac{a - z}{\sqrt{[r^2 - (a - z)^2]}}$. Sentado esto; como en el punto M comun á la curva AMF y al círculo BMG, es $z = x$, y $u = y$; si suponemos que el valor de $\frac{du}{dz}$ correspondiente á dicho punto, sea igual al de $\frac{dy}{dx}$; tendrémos para determinar las cantidades a y b que fixan la posicion del centro C, las dos equaciones $-b + \sqrt{[r^2 - (a - x)^2]} = y$, $\frac{a - x}{\sqrt{[r^2 - (a - x)^2]}} = \frac{dy}{dx}$.

La segunda de estas equaciones da $\sqrt{[r^2 - (a - x)^2]} = \frac{a - x}{\frac{dy}{dx}}$; de donde inferirémos elevando al quadrado, y haciendo las operaciones correspondientes $a - x = \frac{r\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$: y como de la primera se infiere $\sqrt{[r^2 - (a - x)^2]} = y + b$; será $y + b = \ldots$

$\frac{a - x}{\frac{dy}{dx}} = \frac{r}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$; y por consiguiente $a = x + \ldots\ldots\ldots$
$\frac{r\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$, y $b = -y + \frac{r}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$.

Si suponemos que la recta EMT sea tangente de la curva AMF en el punto M, comun á dicha curva y al círculo BMG; á causa de ser en este punto $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$, dicha recta será tambien tangente del círculo BMG en el mismo punto; por consiguiente su radio MC será perpendicular á la curva AMF ó á su tangente ET en el punto M: y como esto se verifica independientemente del valor del radio $MC = r$, concluirémos, que la normal ML en el punto M de una curva qualquiera AMF, es el lugar de los centros de todos los círculos que pasando por el punto M, tienen por tangente comun la tangente EMT de la curva AMT en el expresado punto.

Si por el punto M trazamos otro círculo igual en magnitud al círculo BMG; dicho círculo no podrá pasar entre BMG y la curva AMF.

Pues para que esto pudiese verificarse; seria preciso que llamando α, y β las coordenadas del nuevo círculo (núm. 166; 2º); se verificase tambien respecto del punto comun M la condicion $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$. De donde resulta que la tangente EMT de la curva AMF, lo seria igualmente de dicho círculo; su centro estaria en la normal ML; y como por el supuesto, su radio es igual al del círculo BMG; dicho centro se confundiria con el punto C, y por consiguiente el referido círculo, con el círculo BMG.

171. Como en todos los círculos que pasan por el punto M y tienen su centro en la normal ML se verifica la equacion $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$; habrá entre dichos círculos uno BMG de un radio determinado MC tal, que relativamente al punto M cumplirá con la condicion $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$.

En efecto, diferenciando la equacion $\frac{du}{dz} = \frac{a - z}{\sqrt{[r^2 - (a - z)^2]}}$ hallada arriba, tendrémos $\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{1}{\sqrt{[r^2 - (a - z)^2]}} - \ldots\ldots\ldots$
$\frac{(a - z)^2}{[r^2 - (a - z)^2]^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^2}{[r^2 - (a - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$; y como en el punto comun

M es $z = x$, será en virtud de dicha condicion $-\frac{r^2}{[r^2-(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2y}{dx^2}$, y substituyendo en lugar de $[r^2-(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}$ su valor $\frac{r^3}{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ que se infiere de las equaciones $\sqrt{[r^2-(a-x)^2]} = \frac{a-x}{\frac{dy}{dx}}$, $a = x + \frac{r\frac{dy}{dx}}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}}$, halladas antes, resultará.....

$$-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r} = \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ y } r = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Substituyendo este valor de r en las expresiones de a y de b, tendrémos $a = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, y $b = -y - \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

El círculo BMG determinado en magnitud y posicion por los valores de r, a, y b que acabamos de hallar; tiene la propiedad, que ningun otro círculo trazado por el punto M, puede pasar entre él y la curva AMF inmediatamente antes y despues del punto M.

Pues si llamamos α, β, las coordenadas de otro círculo trazado por el punto M; r', su radio; y g, h las cantidades análogas á a, b; será su equacion $\beta = -h + \sqrt{[r'^2 - (g-\alpha)^2]}$, de donde inferirémos $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{g-\alpha}{\sqrt{[r'^2-(g-\alpha)^2]}}$, y $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{r'^2}{[r'^2-(g-\alpha)^2]^{\frac{3}{2}}}$. Sentado esto; para que este círculo pueda pasar entre BMG, y la curva AMF; es necesario (núm. 166., 3.º) que relativamente al punto M se verifique las dos equaciones $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; y como en dicho punto es $\alpha = x$, y $\beta = y$; tendrémos para determinar g, h, r', las tres equaciones $-h + \sqrt{[r'^2-(g-x)^2]} = y$, $\frac{g-x}{\sqrt{[r'^2-(g-x)^2]}} = \frac{dy}{dx}$, $-\frac{r'^2}{[r'^2-(g-x)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{d^2y}{dx^2}$; las quales siendo idénticamente las mismas que las que encontramos para determinar a, b, r: los valores de g, h, r' que den, serán precisamente los mismos que los de a, b, r; y por consiguiente el nuevo círculo se confundirá con BMG.

Luego el círculo BMG será (núm. 158.) el círculo de curvatura, ú osculador de la curva AMF en el punto M; y por consiguiente el radio de curvatura MC correspondiente á dicho punto será $-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$; precisamente el mismo que hallamos antes (n. 161.).

Siendo $IC = PK = AK - AP = a - x$; y $MI = MP + PI = y + b$; substituyendo por a, y b, sus valores respectivos tendrémos $IC = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, y $MI = -\frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, lo mismo que en el número citado.

172. Como las tres constantes arbitrarias a, b, r que contiene la equacion general del círculo, estan determinadas por las tres condiciones expresadas; á saber que pase por el punto M de la curva AMF; y que sea $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$, y $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; inferirémos que *en general* el círculo no puede tener con una curva qualquiera AMF un contacto de un órden superior al segundo: y que el círculo osculador BMG toca y corta (núm. 168.) en el punto M la curva AMF.

Hemos dicho *en general*; pues puede suceder que los valores particulares de x é y correspondientes á un punto determinado M reduzcan á cero la expresion $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^3u}{dz^3}$, en cuyo caso el contacto será (núm. 167.) de tercer órden; de quarto órden, si en virtud de dichos valores particulares fuese $\frac{d^4u}{dz^4} = \frac{d^4y}{dx^4}$; y así en adelante.

173. Es evidente que las líneas AK, KC que determinan la posicion del centro de curvatura C correspondiente al punto M de la curva AMF; varian con la abscisa AP de dicho punto; y por consiguiente serán las coordenadas de la curva que es el lugar de todos los centros de curvatura de la curva AMF; esto es (núm. 160.) las coordenadas de la evoluta ECL (*fig.* 74.); y tendrémos $AK = a = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, y $KC = b = -y - \frac{1+\frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$, lo mismo que en el núm. 165.

174. Si la curva conocida á la qual se quiere comparar la propuesta, fuese una parábola BMG (*fig.* 75.) cuyo exe principal es la línea BK paralela á AH; seria su equacion $u = a + bz + cz^2$; en la qual las constantes arbitrarias a, y b que determinan la posicion del vértice B pueden ser positivas ó negativas, y c representa la razon de la unidad al parámetro.

Diferenciándola tendrémos $\frac{du}{dz} = b + 2cz$, $\frac{d^2u}{dz^2} = 2c$, $\frac{d^3u}{dz^3} = 0$, &c.; y como en el punto comun M, es $z = x$, y $u = y$; si suponemos que sea tambien el valor de $\frac{du}{dz}$ igual al de $\frac{dy}{dx}$; tendrémos para determinar las constantes a, y b, las dos equaciones $a + bx + cx^2 = y$, $b + 2cx = \frac{dy}{dx}$; que dan $b = \frac{dy}{dx} - 2cx$, y $a = y - x\frac{dy}{dx} + cx^2$.

En este caso la tangente de la curva EMF en el punto M, lo será igualmente de la parábola BMG; y como las expresiones de a, y de b incluyen la constante indeterminada c igual á la unidad dividida por el parámetro; inferirémos que se podrán trazar por el punto M una infinidad de parábolas como BMG que toquen en dicho punto la curva EMF ó su tangente.

Pero si ademas se verificase relativamente al punto M la condicion $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; seria $c = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$, $b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}$, y $a = y - x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$.

Por consiguiente como en este supuesto, las tres constantes arbitrarias a, b, c, que contiene la equacion general de la parábola BMG, y fixan su posicion y la magnitud de su parámetro; estan determinadas por los valores particulares de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, correspondientes al punto M; inferirémos; 1º que solamente en la parábola BMG determinada en magnitud y posicion por los valores de a, b, c, que acabamos de hallar se verificarán relativamente al punto M las equaciones $\frac{du}{dz} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; y por lo mismo (número 166.) que será imposible trazar por el referido punto otra parábola que pase entre BMG, y la curva propuesta EMF.

2º Que la parábola vulgar del mismo modo que el círculo; no puede tener en general con una curva qualquiera EMF un contacto superior al de segundo órden.

Si se prolonga el exe principal BK hasta que encuentre en el punto C el exe AD de las abscisas; será $AC = -\frac{b}{2c}$, $BC = a - \frac{b^2}{4c}$: y substituyendo por a, b, c sus valores respectivos, tendrémos

$$AC = x - \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ y } BC = y - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

175. Si supusiéramos que la curva conocida fuese una parábola cúbica; como su equacion general incluye una constante mas, que la de la parábola vulgar, se podria cumplir con una condicion mas; esto es con la condicion $\frac{d^3u}{dz^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$: de donde infeririamos, que la parábola cúbica puede tener en general un contacto de tercer órden con una curva qualquiera.

En general *el órden del contacto que una parábola puede tener con una curva qualquiera; es igual al órden de la parábola.*

De los coeficientes diferenciales de las superficies curvilíneas; de las superficies de los sólidos de revolucion; y de las solideces de estos.

176. Hemos probado en el núm. 134., que si el arco AM de una curva (*fig.* 76.), se representa por A, y se considera como funcion de la abscisa $AP = x$, será $\frac{dA}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Veamos ahora qual es la expresion del coeficiente diferencial de la superficie APM que llamarémos s, considerada igualmente como funcion de x.

Para efectuarlo, tirarémos la ordenada $P'M'$, la cuerda MM', y la Mn paralela á $PP' = \Delta x$; el espacio $PMnM'P'$ terminado por la curva MM' será la diferencia Δs de la superficie APM; y el trapecio $PP'MM'$, terminado por la cuerda MM' será igual á $\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$. Sentado esto, á medida que la diferencia Δx decrece; la superficie del trapecio $PMM'P'$ se acerca continuamente á la superficie Δs; ó la razon $y + \frac{\Delta y}{2}$, á la razon $\frac{\Delta s}{\Delta x}$; de manera que la diferencia de estas dos razones llegará por último á ser menor que qualquiera cantidad por pequeña que sea: por consiguiente (núm. 20.) sus límites respectivos y, y $\frac{ds}{dx}$ serán iguales, y tendrémos $\frac{ds}{dx} = y$: cuyo resultado nos enseña, que *el coeficiente diferencial de la superficie* APM, *considerada como funcion de la abscisa* AP; *es igual á la ordenada correspondiente* PM.

Así; aunque en ciertas curvas, como por exemplo en el círculo, no se puede determinar la expresion algebráica y finita de la longitud de un arco AM, ó de la superficie APM, correspondientes á la abscisa AP; se pueden conocer, sin embargo los coeficientes diferenciales de dichas expresiones.

El coeficiente diferencial $\frac{dA}{dx}$ de un arco A de círculo cuyo radio es r, le hallamos ya igual á $\frac{r}{\text{sen. } A}$ (núm. 134.); ó substituyendo en lugar de sen. A su valor $\sqrt{(2rx - x^2)}$, tendrémos $\frac{dA}{dx}$ igual á $\frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$: y si llamamos s la funcion de x que expresa la superficie APM, y r el radio; será en virtud de lo que acabamos de demostrar, $\frac{ds}{dx} = y = \sqrt{(2rx - x^2)}$.

177. Imaginemos que la curva AMF (*fig.* 76.) dé una vuelta al rededor del exe AD de las abscisas; y llamemos S la superficie que describe el arco $AM = A$: la superficie descrita por el arco MM' será la diferencia de S; y la cuerda MM' describirá un cono truncado, cuya superficie, llamando π la razon del radio á la circunferencia, es $\pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) \times MM' = \pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$. Esto supuesto; si consideramos la superficie S como funcion de la abscisa x; echarémos de ver, que quanto mas se acerquen Δx, y Δy á su límite comun cero, tanto mas se acercará la superficie descrita por la cuerda MM', á la superficie ΔS descrita por el arco MaM'; ó la expresion $\pi\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$, á la expresion $\frac{\Delta S}{\Delta x}$; y que la diferencia de estas dos expresiones, puede llegar á ser menor que una cantidad dada por pequeña que sea; de donde concluirémos (núm. 20.) que *el límite* $\pi y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ *de la primera, será igual al límite* $\frac{dS}{dx}$ *de la segunda.*

Como $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ es igual á $\frac{dA}{dx}$; será tambien $\frac{dS}{dx} = \pi y \frac{dA}{dx}$.

178. Llamemos σ la funcion de x que expresa la solidez del cuerpo engendrado por el espacio APM en su revolucion al rededor del exe AD: la solidez del cuerpo engendrado por el espacio $PMM'P'$, terminado por el arco MaM', será $= \Delta\sigma$; y la del cono truncado, engendrado por el trapecio $PMM'P'$, igual á $\frac{\pi}{2}\left(\overline{PM}^2 + PM \times P'M' + \overline{P'M'}^2\right) \times \frac{PP'}{3} = \frac{\pi}{2}\left(y^2 + y\Delta y + \frac{\Delta y^2}{3}\right)\Delta x$. Pero esta solidez se acercará tanto mas á $\Delta\sigma$, ó la expresion $\frac{\pi}{2}\left(y^2 + y\Delta y + \frac{\Delta y^2}{3}\right)$, á $\frac{\Delta\sigma}{\Delta x}$; quanto mas se acercaren Δx, y Δy á su límite cero; de modo que su diferencia puede llegar á ser menor que qualquiera cantidad dada por pequeña que sea: luego sus límites serán iguales, y por consiguiente $\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\pi}{2} y^2$, igual á la superficie del círculo que describe la ordenada PM en su movimiento de revolucion.

179. Todos estos límites de razones, ó coeficientes diferenciales,

se pueden tambien determinar de un modo muy directo y elegante por medio de la proposicion núm. 19., segun allí insinuamos; y ahora vamos á manifestar, empleándola para hallar el del arco A, y el de la superficie s; considerando siempre A, y s, como funciones de la abscisa x.

Sea el arco $AM = A$, y la recta TMm tangente en el punto M: tendrémos (núm. 133.) $nm = \frac{dy}{dx}\Delta x$; $mM' = \mp\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x^2 + \&c.\right)$ (segun fuere el arco MaM' cóncavo ó convexô hácia AD); $Mm = \Delta x\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; y la cuerda $MM' = \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$. Esto supuesto, es constante, que mientras Δx, y Δy decrecen acercándose á su límite comun cero; el arco $MaM' = \Delta A$, es siempre mayor que su cuerda MM', y menor que la suma de las rectas Mm, y mM'; por consiguiente, dividiendo por Δx, tendrémos siempre $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \mp \left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\Delta x + \&c.\right) > \frac{\Delta A}{\Delta x} > \sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)}$; y como la primera y tercera de estas expresiones tienen por límite comun la cantidad $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ concluirémos (núm. 19.), que este límite será igual al de la expresion intermedia $\frac{\Delta A}{\Delta x}$; esto es, á $\frac{dA}{dx}$; tendrémos pues lo mismo que en el núm. 134., $\frac{dA}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

180. Si llamamos s la superficie APM (*fig.* 77.); el espacio $PMM'P'$ será $= \Delta s$; el rectángulo $PmM'P' = (y + \Delta y)\Delta x$; y el rectángulo $PMnP' = y\Delta x$. Sentado esto, es evidente que mientras Δx, y Δy decrecen, acercándose á su límite comun cero; el rectángulo $PmM'P'$ es siempre mayor que el espacio $PMM'P'$; y este, que el rectángulo $PMnP$: por consiguiente, dividiendo por Δx tendrémos siempre $y + \Delta y > \frac{\Delta s}{\Delta x} > y$; de donde concluirémos (núm. 19.), que los límites y, y $\frac{ds}{dx}$ son iguales; y tendrémos lo mismo que antes (núm. 176.) $\frac{ds}{dx} = y$.

181. He aquí las principales aplicaciones de los principios del cálculo diferencial á la Análisis y á la Geometría: hemos evitado de intento en ellas, el empeñarnos en algunos casos complicados; porque nos ha parecido mejor reservarlos para quando hayamos tratado mas á fondo el cálculo diferencial; y tambien reservamos para entonces algunas aplicaciones que nos proponemos hacer de este cálculo á la teórica de las superficies curvas, y á la Mecánica.

CAPITULO VI.

Del cálculo diferencial en general.

182. La doctrina que expondrémos en este capítulo, se debe considerar como la continuacion de la que contiene el capítulo III.: y para no tener que recurrir continuamente á dicho capítulo, supondrémos que el Lector tiene presente quanto en él hemos expuesto.

Esto entendido, comencemos por manifestar, con varios exemplos, el uso de las substituciones y transformaciones que facilitan la diferenciacion de las cantidades, y que empleamos ya de paso en otro lugar (núm. 72. y 76.).

Exemplo 1.º Sea $y = \sqrt[3]{[ax - \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{(2cx - x^2)}]^2}$. Si suponemos $\frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} = z$, $\sqrt{(2cx - x^2)} = u$; la funcion propuesta se transformará en $y = (ax - z + u)^{\frac{2}{3}}$, y tendrémos $dy = \ldots\ldots \frac{2}{3}\frac{adx - dz + du}{(ax - z + u)^{\frac{1}{3}}}$, $dz = -\frac{2bdx}{3x^{\frac{5}{3}}}$, $du = \frac{(c - x)dx}{\sqrt{(2cx - x^2)}}$; y substituyendo por z, u, y sus diferenciales, sus valores en x, y dx, resultará

$$dy = \frac{2adx + \frac{4bdx}{3x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2(c - x)dx}{\sqrt{(2cx - x^2)}}}{3\sqrt[3]{ax - \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt{(2cx - x^2)}}}.$$

Exemplo 2.º Sea $y = \frac{x}{x + \sqrt{(1 + x^2)}}$. Haciendo $\sqrt{(1 + x^2)} = z$, tendrémos $y = \frac{x}{x + z}$, $(x + z)y = x$, $(x + z)dy + y(dx + dz) = dx$, y $dy = \frac{dx - y(dx + dz)}{x + z}$: pero como $dz = \ldots \frac{xdx}{\sqrt{(1 + x^2)}} = \frac{xdx}{z}$, será $dx + dz = \frac{(x + z)dx}{z}$, $y(dx + dz) = \frac{xdx}{z}$; y substituyendo, $dy = \frac{\frac{(z - x)dx}{z}}{z + x}$, multiplicando el numerador y el denominador por $z - x$, y observando que $z^2 - x^2 = 1$, tendrémos finalmente $dy = \frac{(z - x)^2 dx}{z} = \frac{(1 + 2x^2)dx}{(\sqrt{(1 + x^2)})} - 2xdx$.

Exemplo 3.º Si fuese $y = \log.(x + \sqrt{a^2 + x^2})$; hariamos $x + \sqrt{a^2 + x^2} = z$, y tendriamos $y = \log. z$, $dy = \frac{dz}{z}$, $dz = dx + \frac{xdx}{(\sqrt{a^2 + x^2})} = \frac{\sqrt{(a^2 + x^2)}dx + xdx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} = \frac{zdx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$; y por consiguiente $dy = \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$.

Exemplo 4.º Sea $y = \frac{\log.(x\sqrt{-1} + \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{-1}}$. Harémos $x\sqrt{-1} + \sqrt{(1 - x^2)} = z$, y tendrémos $y = \frac{\log. z}{\sqrt{-1}}$, $dy = \frac{dz}{z\sqrt{-1}}$, $dz = dx\sqrt{-1} - \frac{xdx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{dx\sqrt{(1 - x^2)}\sqrt{-1} - xdx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{dxz\sqrt{-1}}{\sqrt{(1 - x^2)}}$; y substituyendo este valor de dz, $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Exemplo 5.º Sea $y = \log. \log. x$. Harémos $\log. x = z$, y tendrémos $y = \log. z$, $dy = \frac{dz}{z}$, $dz = \frac{dx}{x}$, y por consiguiente $dy = \ldots\ldots \frac{dx}{x \log. x}$.

Exemplo 6.º Si fuese $y = (\log. x)^n$; hariamos $\log. x = z$, y tendriamos $y = z^n$, $dy = nz^{n-1}dz$; y como $dz = \frac{dx}{x}$, seria substituyendo $dy = \frac{n(\log. x)^{1-n}dx}{x}$.

Exemplo 7.º Sea $y = \log. \sqrt{\left(\frac{\sqrt{(1 + x^2)} + x}{\sqrt{(1 + x^2)} - x}\right)}$. Haciendo $\sqrt{(1 + x^2)} + x = z$, $\sqrt{(1 + x^2)} - x = u$, será $y = \frac{1}{2}\log.\left(\frac{z}{u}\right) = \frac{1}{2}(\log. z - \log. u)$, y $dy = \frac{dz}{2z} - \frac{du}{2u}$. Pero $dz = \frac{xdx}{\sqrt{(1 + x^2)}} + dx = \frac{zdx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$, $du = \frac{xdx}{\sqrt{(1 + x^2)}} - dx = -\frac{udx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$; por consiguiente, substituyendo, resultará $dy = \frac{dx}{2\sqrt{(1 + x^2)}} + \ldots\ldots \frac{dx}{2\sqrt{(1 + x^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)}}$.

Exemplo 8.º Sea $y = \log. \frac{\sqrt{(1 + x)} + \sqrt{(1 - x)}}{\sqrt{(1 + x)} - \sqrt{(1 - x)}}$. Harémos $\sqrt{(1 + x)} + \sqrt{(1 - x)} = z$, $\sqrt{(1 + x)} - \sqrt{(1 - x)} = u$, y tendrémos $y = \log. \frac{z}{u} = \log. z - \log. u$, $dy = \frac{dz}{z} - \frac{du}{u} = \frac{udz - zdu}{zu}$, $dz = \frac{dx}{2\sqrt{(1 + x)}} - \frac{dx}{2\sqrt{(1 - x)}} = \frac{dx\sqrt{(1 - x)} - dx\sqrt{(1 + x)}}{2\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{-udx}{2\sqrt{(1 - x^2)}}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{(1 + x)}} + \frac{dx}{2\sqrt{(1 - x)}} = \frac{zdx}{2\sqrt{(1 - x^2)}}$; y haciendo las substituciones correspondientes $dy = \frac{-(u^2 + z^2)\,dx}{2zu\sqrt{(1 - x^2)}}$; y observando que $u^2 + z^2 = 4$, y $zu = 2x$, tendrémos finalmente $dy = -\frac{dx}{x\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Exemplo 9.° Sea $y = \log.\,[\,(a + x)^n\,(b + x)^m\,(c + x)^p\,]$. Transformando esta equacion en $y = n\log.\,(a + x) + m\log.\,(b + x) + p\log.\,c + x)$, tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{a + x} + \frac{m}{b + x} + \frac{p}{c + x}$; y reduciendo estas fracciones á un comun denominador.....
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(n + m + p)\,x^2 + [\,n(b + c) + m(a + c + p(a + b)\,]\,x + nbc + mac + pal,}{x^3 + (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x + abc}.$$

Es evidente que esta expresion de $\frac{dy}{dx}$ es de la forma.............. $\frac{A'x^2 + B'x + C'}{x^3 + Ax^2 + Bx + C}$; y que los términos constantes a, b, c de los factores que componen la funcion propuesta, son las raices de la equacion $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$; y se echa de ver que si el número de factores fuese mayor, la expresion de $\frac{dy}{dx}$ que resultaria, seria análoga á la antecedente, pero de un órden mas elevado: de manera, que toda funcion de la forma de la propuesta, tendrá por coeficiente diferencial una fraccion racional; é igualando á cero su denominador, resultará una equacion cuyas raices serán los términos constantes de los factores que componen dicha funcion.

Exemplo 10.° Sea $y = z^x$, representando z una funcion qualquiera de x. Si tomamos el logaritmo de ambos miembros de esta equacion, tendrémos $\log.\,y = \log.\,z^x = x\log.\,z$, $\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{z} + dx\log.\,z$, y $dy = y\left(\frac{xdz}{z} + dx\log.\,z\right) = z^x\left(\frac{xdz}{z} + dx\log.\,z\right)$.

Tambien será en virtud de lo demostrado (núm. 75.), $dy = z^x d.\log.\,z^x = z^x d.\,x\log.\,z = z^x\left(\frac{xdz}{z} + dx\log.\,z.\right)$.

Exemplo 11.° Si fuese $y = a^{z^x}$: hariamos $z^x = u$, y tendriamos $y = a^u$, $dy = a^u du\log.\,a$, $du = z^x\left(\frac{xdz}{z} + dx\log.\,z\right)$, y por consiguiente $dy = a^{z^x}\left(\frac{xdz}{z} + dx\log.\,z\right)\log.\,a$.

Exemplo 12.° Sea y el arco cuyo seno es $2x\sqrt{(1 - x^2)}$, y que expresarémos de este modo $y = A\,.\,\text{sen.}\,2x\sqrt{(1 - x^2)}$. Harémos $2x\sqrt{(1 - x^2)} = z$, y tendrémos $y = A.\,\text{sen.}\,z$, $dy = \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$

(núm. 77.): pero como $dz = 2dx\sqrt{(1 - x^2)} - \frac{2x^2dx}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \ldots\ldots \frac{2(1 - 2x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, y $\sqrt{(1 - z^2)} = 1 - 2x^2$; haciendo estas substituciones, resultará $dy = \frac{2dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Exemplo 13.° Finalmente sea y el arco cuya tangente es $\frac{\sqrt{(1 + x)}}{\sqrt{(1 - x)}}$, y que expresarémos por $y = A\,.\,\text{tang.}\,\frac{\sqrt{(1 + x)}}{\sqrt{(1 - x)}}$. Haciendo $\sqrt{(1 + x)} = z$, y $\sqrt{(1 - x)} = u$, tendrémos $y = A\,.\,\text{tang.}\,\frac{z}{u}$, $dy = \frac{d\,.\,\frac{z}{u}}{1 + \frac{z^2}{u^2}} = \frac{udz - zdu}{u^2 + z^2}$, $dz = \frac{dx}{2\sqrt{(1 + x)}} = \frac{dx}{2z}$, $du = -\frac{dx}{2u}$, $udz - zdu = \frac{udx}{2z} + \frac{zdx}{2u} = \frac{(u^2 + z^2)\,dx}{2uz}$; y por consiguiente $dy = \frac{dx}{2uz} = \frac{dx}{2\sqrt{(1 - x^2)}}$.

Basten estos exemplos para manifestar lo que se debe practicar para hallar la diferencial de una funcion qualquiera de una cantidad variable.

Hemos determinado solamente la diferencial primera de la funcion y: porque como las diferenciales segunda, tercera, &c. se determinan por las mismas reglas, y absolutamente del mismo modo que la diferencial primera; quando se sepa hallar esta; no puede haber dificultad alguna en determinar aquellas. Pasemos ahora á considerar las funciones de dos cantidades variables.

183. Para diferenciar estas funciones recordarémos que (núm. 29.) si z representa una funcion qualquiera $f(x, y)$ de dos variables independientes x é y; su diferencia Δz se puede suponer $= A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 +$ &c.; la diferencia parcial $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, esto es, la diferencia de z, en el supuesto de que solamente x varía, se puede expresar por $A\Delta x + C\Delta x^2 +$ &c.; y la otra diferencia parcial $\frac{\Delta z}{\Delta y}\Delta y$, por $B\Delta y + E\Delta y^2 +$ &c.; siendo A, B, C, &c. funciones indeterminadas de x é y. Esto entendido; si comparamos la diferencia $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, á la diferencia Δx que la produce; la razon $\frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x}{\Delta x}$ (que expresarémos mas sencillamente por $\frac{\Delta z}{\Delta x}$), será igual á $A + C\Delta x +$ &c., y su límite $\frac{dz}{dx} = A$. Del mismo modo hallariamos $\frac{\Delta z}{\Delta y} = B + E\Delta y +$ &c., y $\frac{dz}{dy} = B$; y multipli-

cando respectivamente por dx, y dy, $\frac{dz}{dx}dx = Adx$, y $\frac{dz}{dy}dy = Bdy$. Estas expresiones se llaman las diferenciales parciales de z; la primera $\frac{dz}{dx}dx$, ó su igual Adx, es relativa al supuesto de x sola variable; y la segunda $\frac{dz}{dy}dy$, ó Bdy, relativa al supuesto de que solamente varía y.

184. La expresion $\frac{dz}{dx}$, ó su igual A, representa el límite de la razon $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ de la diferencia parcial de z á la diferencia Δx que la produce; y es el coeficiente diferencial de z relativo á x: y el límite $\frac{dz}{dy}$, ó B, es el coeficiente diferencial de z relativo á y. De donde se se sigue

1º Que la diferencial de una funcion z de dos variables x é y, se compone de dos términos ó diferenciales parciales $\frac{dz}{dx}dx$, $\frac{dz}{dy}dy$; la primera relativa al supuesto de x sola variable; y la segunda, considerando solamente y como variable: de manera, que si representamos por dz la diferencial de z, será $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, ó $dz = Adx + Bdy$.

2º Que si en la expresion $Adx + Bdy$ de la diferencial de z, se supone $dy = 0$; resultará la diferencial Adx relativa á x; y si en dicha expresion se hace $dx = 0$; resultará la diferencial Bdy relativa á y.

3º Que para hallar la diferencial de z; se diferenciará esta funcion por las reglas dadas (núm. 72. y sig.); primero relativamente á una de las variables x por exemplo; y luego relativamente á la otra variable y: la suma de los dos resultados será la diferencial que se busca.

Exemplo 1º Sea $z = \frac{x}{y}$: será $\frac{dz}{dx}dx = \frac{dx}{y}$, $\frac{dz}{dy}dy = -\frac{xdy}{y^2}$; y por consiguiente $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Exemplo 2º Sea $z = x^n y^m$: será $\frac{dz}{dx}dx = ny^m x^{n-1}dx$, $\frac{dz}{dy}dy = mx^n y^{m-1}dy$, y $dz = ny^m x^{n-1}dx + mx^n y^{m-1}dy$.

Exemplo 3º Si fuese $z = \sqrt[n]{(xy + y^2)}$; seria $z^n = xy + y^2$, $nz^{n-1}dz = ydx + xdy + 2ydy$, y $dz = \frac{ydx + (x + 2y)\,dy}{nz^{n-1}} = \frac{ydx + (x + 2y)\,dy}{n\sqrt[n]{(xy + y^2)^{n-1}}}$.

Exemplo 4º Sea z un arco cuya tangente es $\frac{x}{y}$, y que se expresa por $z = A.\,\text{tang.}\,\frac{x}{y}$. Harémos $\frac{x}{y} = u$, y tendrémos $z = A.\,\text{tang.}\,u$, $dz = \frac{du}{1 + u^2}$; pero como por el exemplo 1º, es $du = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, será substituyendo este valor y el de u, $dz = \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}$.

No creemos necesario continuar estos exemplos; pues se echa de ver que la diferenciacion de las funciones de dos cantidades variables, se reduce enteramente á la de las que solo contienen una.

185. Del mismo modo que $\frac{dz}{dx}dx$ expresa la diferencial de z relativa á x; y $\frac{dz}{dy}dy$ la relativa á y; $\frac{d^2z}{dx^2}dx$ representa la diferencial de $\frac{dz}{dx}$ relativa á x; $\frac{d^2z}{dxdy}dy$, la diferencial de $\frac{dz}{dx}$ relativa á y; $\frac{d^2z}{dydx}dx$, la de $\frac{dz}{dy}$ relativa á x; &c.

Las expresiones $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dydx}$, &c. son los coeficientes diferenciales de segundo órden; y representan respectivamente lo mismo que $\frac{d\,.\frac{dz}{dx}}{dx}$, $\frac{d\,.\frac{dz}{dx}}{dy}$, $\frac{d\,.\frac{dz}{dy}}{dx}$, &c.

186. Es evidente que la diferencial de una funcion qualquiera $f(x)$ de una cantidad variable x, es otra funcion de x multiplicada por dx. Esta nueva funcion se expresa por $f'(x)$; de manera que $d\,.f(x) = dxf'(x)$. Del mismo modo; la diferencial de $f'(x)$, se expresa por $dxf''(x)$; la de $f''(x)$, por $dxf'''(x)$; &c.

187. Supongamos que en una funcion qualquiera $f(x, y)$ de x é y, que llamarémos z, se considere solamente x como variable, y se substituya $x + k$ en lugar de x; $f(x, y)$ se transformará en $f(x + k, y)$; y en virtud de lo demostrado (núm. 89.) será $f(x + k, y) = z + k\frac{dz}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{k^3}{2\,.\,3}\frac{d^3z}{dx^3} + \&c.$ Al contrario, si en dicha funcion considerásemos y sola como variable, y substituyésemos en su lugar $y + h$; seria $f(x, y + h) = z + h\frac{dz}{dy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{h^3}{2\,.\,3}\frac{d^3z}{dy^3} + \&c.$ Sentado esto; si en la equacion $f(x + k, y) = z + k\frac{dz}{dx} + \&c.$, se substituye $y + h$ en lugar de y; el primer miembro se transformará en $f(x + k, y + h)$; esto es en la nueva funcion que resulta substituyendo $x + k$ en lugar de x, é $y + h$ en lugar de y, en la funcion $f(x, y)$. Para substituir $y + h$ en lugar de y en el segundo miembro de dicha equacion, ob-

servarémos que el primer término z se transforma en $z + h\frac{dz}{dy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{h^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dy^3} + \&c.$; $\frac{dz}{dx}$, en $\frac{dz}{dx} + h\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^3z}{dxdy^2} + \&c.$; $\frac{d^2z}{dx^2}$, en $\frac{d^2z}{dx^2} + h\frac{d^3z}{dx^2dy} + \&c.$; $\frac{d^3z}{dx^3}$, en $\frac{d^3z}{dx^3} + \&c.$; &c.; y substituyendo estos valores resultará (a) ...... $f(x + k, y + h) = z + k\frac{dz}{dx} + h\frac{dz}{dy} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + kh\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{k^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{k^2h}{2}\frac{d^3z}{dx^2dy} + \frac{kh^2}{2}\frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{h^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dy^3} + \&c.$, de donde se concluye que

Si en una funcion qualquiera f (x, y) *de las cantidades variables* x *é* y, *que llamarémos* z; *se substituye* x + k *en lugar de* x, *y* y + h *en lugar de* y; *la funcion* f (x + k, y + h) *que resultare será* $= z + k\frac{dz}{dx} + h\frac{dz}{dy} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + kh\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \&c.$

Este es el teorema de Taylor relativamente á las funciones de dos cantidades variables.

188. Tambien se puede hallar la serie que expresa el valor de $f(x + k, y + h)$, substituyendo $x + k$ por x en la equacion $f(x, y + h) = z + h\frac{dz}{dy} + \&c.$; y para hacer esta substitucion en el segundo miembro observarémos que z se transforma en $z + k\frac{dz}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{k^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dx^3} + \&c.$; $\frac{dz}{dy}$, en $\frac{dz}{dy} + k\frac{d^2z}{dydx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^3z}{dydx^2} + \&c.$; $\frac{d^2z}{dy^2}$, en $\frac{d^2z}{dy^2} + k\frac{d^3z}{dy^2dx} + \&c.$; $\frac{d^3z}{dy^3}$, en $\frac{d^3z}{dy^3} + \&c.$; &c.; y haciendo estas substituciones hallarémos (b) ... $f(x + k, y + h) = z + h\frac{dz}{dy} + k\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + hk\frac{d^2z}{dydx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dy^3} + \frac{h^2k}{2}\frac{d^3z}{dy^2dx} + \frac{hk^2}{2}\frac{d^3z}{dydx^2} + \frac{k^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dx^3} + \&c.$

189. Es evidente que el segundo miembro de esta equacion, y el de la equacion (a) deben ser idénticos; pues ambos expresan la misma funcion $f(x + k, y + h)$ desenvuelta en una serie ascendiente, ordenada relativamente á las potencias y productos de las cantidades k, h. Comparando pues en ellos los términos afectos de un

mismo producto de las potencias de k, y de h, resultará esta serie de equaciones

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2z}{dxdy} &= \frac{d^2z}{dydx} \\ \frac{d^3z}{dx^2dy} &= \frac{d^3z}{dydx^2} \\ \frac{d^3z}{dxdy^2} &= \frac{d^3z}{dy^2dx} \\ \&c.\ \&c. & \end{aligned}\right\} \text{y en general } \frac{d^{n+m}z}{dx^n dy^m} = \frac{d^{n+m}z}{dy^m dx^n}.$$

La primera $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$ de estas equaciones manifiesta

Que si una funcion z *de dos variables independientes* x *é* y, *se diferencia dos veces, primero relativamente á* x, *y luego relativamente á* y; *la funcion que resulte será idénticamente la misma que resultaria empezando por diferenciar relativamente á* y, *y luego respecto á* x.

Por exemplo: si fuese $z = \sqrt{(xy + y^2)}$; seria $\frac{dz}{dx} = \frac{y}{2\sqrt{(xy + y^2)}}$, y $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{1}{2\sqrt{(xy + y^2)}} - \frac{y(x + 2y)}{4(xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{xy}{4(xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Invirtiendo ahora el órden de las diferenciaciones, tendrémos $\frac{dz}{dy} = \frac{x + 2y}{2\sqrt{(xy + y^2)}}$, y $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{1}{2\sqrt{(xy + y^2)}} - \frac{(x + 2y)y}{4(xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \ldots\ldots\ldots \frac{xy}{4(xy + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, resultando idéntico con el antecedente.

190. Si suponemos como antes $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = Adx + Bdy$; será $\frac{dz}{dx} = A$, $\frac{dz}{dy} = B$, $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{dB}{dx}$: y como $\frac{d^2z}{dxdy}$ es igual á $\frac{d^2z}{dydx}$; será tambien $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; de donde concluirémos

Que si Adx + Bdy *representa la diferencial de una funcion* z *de dos variables independientes* x, *é* y; *el coeficiente diferencial de* A *relativo á* y, *será igual al coeficiente diferencial de* B *relativo á* x.

Sea por exemplo $z = \sqrt{(xy + y^2)}$. Será $dz = \frac{ydx + (x + 2y)dy}{2\sqrt{(xy + y^2)}}$, $A = \frac{y}{2\sqrt{(xy + y^2)}}$, $B = \frac{x + 2y}{2\sqrt{(xy + y^2)}}$; y segun acabamos de ver $\frac{dA}{dy} = \frac{xy}{4(xy + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dB}{dx}$.

La diferencial de *arco* tang. $\frac{x}{y}$ es $\frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2}$: será pues $A = ..\ \frac{y}{y^2 + x^2}$, $B = \frac{-x}{y^2 + x^2}$, $\frac{dA}{dy} = \frac{1}{y^2 + x^2} - \frac{2y^2}{(y^2 + x^2)^2} = \ldots\ldots\ldots$

$\frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}$; $\frac{dB}{dx} = \frac{-1}{y^2 + x^2} + \frac{2x^2}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(y^2 + x^2)^2}$; y por consiguiente $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$.

191. Las otras equaciones de la serie antecedente, son una conseqüencia necesaria de la primera. Pues siendo en virtud de la notacion (núm. 185.) $\frac{d^2 . \frac{dz}{dx}}{dxdy}$, lo mismo que $\frac{d^3z}{dx^2dy}$; y $\frac{d^2 . \frac{dz}{dx}}{dydx}$, lo mismo que $\frac{d^3z}{dxdydx}$; tendrémos $\frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^3z}{dxdydx}$. Pero diferenciando la equacion $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}$ relativamente á x, será tambien $\frac{d^3z}{dydx^2} = \frac{d^3z}{dxdydx}$; luego $\frac{d^3z}{dx^2dy} = \frac{d^3z}{dxdydx} = \frac{d^3z}{dydx^2}$.

Es tambien cierto que $\frac{d^3z}{dy^2dx} \left(= \frac{d^2 . \frac{dz}{dy}}{dydx} = \frac{d^2 . \frac{dz}{dy}}{dxdy}\right) = \frac{d^3z}{dydxdy}$: y como diferenciando la equacion $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$ relativamente á y, resulta $\frac{d^3z}{dxdy^2} = \frac{d^3z}{dydxdy}$; será $\frac{d^3z}{dy^2dx} = \frac{d^3z}{dydxdy} = \ldots. \frac{d^3z}{dxdy^2}$.

Procediendo del mismo modo se hallarán las expresiones equivalentes de los coeficientes diferenciales de los órdenes superiores: y se comprehenderá sin dificultad que los que contiene cada una de las columnas verticales de la tabla siguiente, son idénticas.

$\frac{d^2z}{dxdy}$	$\frac{d^3z}{dx^2dy}$	$\frac{d^3z}{dy^2dx}$	$\frac{d^4z}{dx^3dy}$	$\frac{d^4z}{dx^2dy^2}$	$\frac{d^4z}{dxdy^3}$	&c.
$\frac{d^2z}{dydx}$	$\frac{d^3z}{dxdydx}$	$\frac{d^3z}{dydxdy}$	$\frac{d^4z}{dx^2dydx}$	$\frac{d^4z}{dxdydxdy}$	$\frac{d^4z}{dydxdy^2}$	
	$\frac{d^3z}{dydx^2}$	$\frac{d^3z}{dxdy^2}$	$\frac{d^4z}{dxdydx^2}$	$\frac{d^4z}{dxdy^2dx}$	$\frac{d^4z}{dy^2dxdy}$	
			$\frac{d^4z}{dydx^3}$	$\frac{d^4z}{dydx^2dy}$	$\frac{d^4z}{dy^3dx}$	
				$\frac{d^4z}{dydxdydx}$		
				$\frac{d^4z}{dy^2dx^2}$		

En general, *dos coeficientes diferenciales de un mismo órden son idénticos, quando sus denominadores contienen un mismo número de factores* dx, *y* dy; *de qualquier modo que estos factores esten combinados.*

192. Si en la equacion (a) (núm. 187.) suponemos $k = \triangle x$, y $h = \triangle y$; se transformará en $f(x + \triangle x, y + \triangle y) = z + \triangle x \frac{dz}{dx} + \triangle y \frac{dz}{dy} + \frac{\triangle x^2}{2} \frac{d^2z}{dx^2} + \triangle x \triangle y \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{\triangle y^2}{2} \frac{d^2z}{dy^2} +$ &c.; y cómo $f(x + \triangle x, y + \triangle y)$ es $= z'$ (núm. 28.), inferirémos $\triangle z = \triangle x \frac{dz}{dx} + \triangle y \frac{dz}{dy} + \frac{\triangle x^2}{2} \frac{d^2z}{dx^2} + \triangle x \triangle y \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{\triangle y^2}{2} \frac{d^2z}{dy^2} +$ &c.

Comparando esta expresion de $\triangle z$, con la supuesta $A\triangle x + B\triangle y + C\triangle x^2 + D\triangle x \triangle y + E\triangle y^2 +$ &c. (núm. 29.); tendrémos $A = \frac{dz}{dx}$, $B = \frac{dz}{dy}$, $C = \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dx^2}$, $D = \frac{d^2z}{dxdy}$, $E = \frac{1}{2} \frac{d^2z}{dy^2}$, &c.; por donde se ve la dependencia recíproca que exîste entre los coeficientes A, B, C, &c., y que indicamos en el núm. 30.: de manera, que A y B se deducen de z; C, D, y E de A y B; &c. por medio de operaciones semejantes; esto es, por medio de las diferenciaciones sucesivas.

Sea, por exemplo, $z = ax + by + cxy$. Será $\frac{dz}{dx} = a + cy$, $\frac{dz}{dy} = b + cx$, $\frac{d^2z}{dxdy} = c$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2z}{dy^2} = 0$, &c.; y por consiguiente $\triangle z = (a + cy) \triangle x + (b + cx) \triangle y + c\triangle x \triangle y$.

Exemplo 2º Si fuese $z = a(y - b)^2 - x(x - a)^2$: seria $\frac{dz}{dx} = -(x - a)^2 - 2x(x - a) = -3x^2 - 4ax - a^2$, $\frac{dz}{dy} = 2a(y - b)$, $\frac{d^2z}{dx^2} = -6x + 4a$, $\frac{d^3z}{dx^3} = -6$, $\frac{d^2z}{dy^2} = 2a$, $\frac{d^2z}{dxdy} = 0$, $\frac{d^3z}{dy^3} = 0$, &c.; de donde infeririamos $\triangle z = -(3x^2 - 4ax + a^2) \triangle x + 2a(y - b) \triangle y + (2a - 3x) \triangle x^2 + a\triangle y^2 - \triangle x^3$.

Exemplo 3º Finalmente; sea $z = x^4 - ayx^2 + by^3$. Será $\frac{dz}{dx} = 4x^3 - 2ayx$, $\frac{d^2z}{dx^2} = 12x^2 - 2ay$, $\frac{d^3z}{dx^3} = 24x$, $\frac{d^4z}{dx^4} = 24$, $\frac{d^2z}{dxdy} = -2ax$, $\frac{d^3z}{dx^2dy} = -2a$, $\frac{dz}{dy} = 3by^2 - ax^2$, $\frac{d^2z}{dy^2} = 6by$, $\frac{d^3z}{dy^3} = 6b$, $\frac{d^4z}{dy^4} = 0$, $\frac{d^3z}{dxdy^2} = 0$, &c.; y por consiguiente $\triangle z = 2x(x^2 - ay) \triangle x + (3by^2 - ax^2) \triangle y + (6x^2 - ay) \triangle x^2 - 2ax\triangle x \triangle y + 3by\triangle y^2 + 4x\triangle x^3 - a\triangle x^2 \triangle y + b\triangle y^3 + \triangle x^4$; cuyos resultados son los mismos que hallamos en el núm. 28., por un método mucho mas largo y penoso.

193. Sea z una funcion de x é y; y $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$.

Como los coeficientes diferenciales $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ son funciones de las mismas variables, será $d\,.\frac{dz}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2}dx + \frac{d^2z}{dxdy}dy$, $d\,.\frac{dz}{dy} = \frac{d^2z}{dydx}dx + \frac{d^2z}{dy^2}dy$; y por consiguiente, considerando dx, y dy como constantes, y que $\frac{d^2z}{dydx} = \frac{d^2z}{dxdy}$, tendrémos $d^2z = \frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2$.

Diferenciando los coeficientes diferenciales de la equacion antecedente, hallarémos $d\,.\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^3z}{dx^3}dx + \frac{d^3z}{dx^2dy}dy$, $d\,.\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^3z}{dxdydx}dx + \frac{d^3z}{dxdy^2}dy$, $d\,.\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^3z}{dy^2dx}dx + \frac{d^3z}{dy^3}dy$: y juntando estos resultados inferirémos $d^3z = \frac{d^3z}{dx^3}dx^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}dx^2dy + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}dxdy^2 + \frac{d^3z}{dy^3}dy^3$.

Continuando las diferenciaciones hallarémos que en general $d^nz = \frac{d^nz}{dx^n}dx^n + n\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}dx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^nz}{dx^{n-2}dy^2}dx^{n-2}dy^2 + \&c. \ldots\ldots + \frac{d^nz}{dy^n}dy^n$.

La analogía que exîste entre esta expresion de d^nz, y la potencia n del binomio $dx + dy$, salta á la vista: pues es evidente que siendo esta $dx^n + ndx^{n-1}dy + \frac{n(n-1)}{2}dx^{n-2}dy^2 + \&c.$; si multiplicamos su primer término dx^n, por el coeficiente diferencial análogo $\frac{d^nz}{dx^n}$; el segundo término $ndx^{n-1}dy$, por el coeficiente análogo $\frac{d^nz}{dx^{n-1}dy}$; &c., resultarán respectivamente los términos sucesivos de dicha diferencial.

De la expresion antecedente de d^nz, se infiere; que *todos los términos de la diferencial de un órden qualquiera de* z, *son homogeneos relativamente á* dx, *y* dy; *y de una dimension igual al número que expresa el órden de dicha diferencial.*

194. Si en la expresion de $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, se reducen

á un comun denominador los términos homogéneos relativamente á Δx, y Δy; se transformará en

$$\begin{aligned} &z \\ &+ \left(\frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{dz}{dy}\Delta y\right) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\Delta x^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}\Delta x\Delta y + \frac{d^2z}{dy^2}\Delta y^2\right) \\ &+ \frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}\Delta x^3 + 3\frac{d^3z}{dx^2dy}\Delta x^2\Delta y + 3\frac{d^3z}{dxdy^2}\Delta x\Delta y^2 + \frac{d^3z}{dy^3}\Delta y^3\right) \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

y substituyendo en esta expresion dx por Δx, y dy por Δy; las cantidades contenidas en los paréntesis, se transformarán en las diferenciales sucesivas de z.

De donde concluirémos, que *si en una funcion qualquiera* f (x, y) = z, *se substituye en lugar de* x, x + dx; *y en lugar de* y, y + dy; *tendrémos* $f(x + dx, y + dy) = z + dz + \frac{d^2z}{2} + \frac{d^3z}{2\,.\,3} + \&c.$

Por donde se vé, que el teorema núm. 93, relativo á las funciones de una cantidad variable; se verifica igualmente en las funciones de dos variables.

195. Las funciones que contienen tres, ó un número mayor de cantidades variables, se diferencian por los mismos principios que las funciones de dos variables: pero á medida que el número de las variables es mayor; los cálculos son mas complicados; por cuyo motivo nos detendrémos muy poco en esta materia.

Sea ζ una funcion qualquiera $f(x, y, z, \&c.)$ de las variables independientes x, y, z, &c.; y sean A, B, C, D, &c. funciones indeterminadas de las mismas variables. Podrémos suponer $\Delta\zeta = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + \&c.\ D\Delta x^2 + E\Delta x\Delta y + F\Delta y^2 + G\Delta x\Delta z + H\Delta z^2 + I\Delta y\Delta z + \&c. + \&c.$; y las diferencias parciales $\frac{\Delta\zeta}{\Delta x}\Delta x = A\Delta x + D\Delta x^2 + \&c.$, $\frac{\Delta\zeta}{\Delta y}\Delta y = B\Delta y + F\Delta y^2 + \&c.$ $\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}\Delta z = C\Delta z + H\Delta z^2 + \&c.$, &c. Esto supuesto; si comparamos la diferencia parcial $\frac{\Delta\zeta}{\Delta x}\Delta x$ de ζ, á la diferencia Δx que la produce; tendrémos $\frac{\Delta\zeta}{\Delta x} = A + D\Delta x + \&c.$, $\frac{d\zeta}{dx} = A$, y $\frac{d\zeta}{dx}dx = Adx$.

Del mismo modo hallarémos $\frac{d\zeta}{dy}dy = Bdy$, $\frac{d\zeta}{dz}dz = Cdz$, &c.

Estas expresiones son las diferenciales parciales de ζ; y su suma compone la diferencial total; de manera que $d\zeta = \frac{d\zeta}{dx}dx + \frac{d\zeta}{dy}dy + \frac{d\zeta}{dz}dz + \&c. = Adx + Bdy + Cdz + \&c.$

Con esto será fácil hallar la diferencial de ζ, diferenciando sucesivamente esta funcion relativamente á cada una de las variables que contiene, y tomando la suma de los resultados.

Sea, por exemplo, $\beta = x^n y^m z^b$: será $\frac{d\beta}{dx}dx = ny^m z^b x^{n-1}dx$, $\frac{d\beta}{dy}dy = mx^n z^b y^{m-1}dy$, $\frac{d\beta}{dz}dz = bx^n y^m z^{b-1}dz$; y por consiguiente $d\beta = ny^m z^b x^{n-1}dx + mx^n z^b y^{m-1}dy + bx^n y^m z^{b-1}dz$.

Si fuese $\beta = \frac{ye^z}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$: hariamos $x^2+y^2=u$, y tendriamos $\beta = ye^z u^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{d\beta}{dy}dy = e^z u^{-\frac{1}{2}}dy$, $\frac{d\beta}{dz}dz = yu^{-\frac{1}{2}}e^z dz$, $\frac{d\beta}{du}du = -\frac{1}{2}ye^z u^{-\frac{3}{2}}du$, $du = 2xdx + 2ydy$; de donde infeririamos substituyendo por u, y du sus valores, $d\beta = \frac{ye^z dz}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \ldots\ldots$

$$\frac{(x^2+y^2)e^z dy - e^z(yxdx + y^2dy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ye^z dz}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{e^z(x^2dy - yxdx)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

196. Supongamos que β sea funcion de las tres variables x, y, z; y que $d\beta$ sea $= Adx + Bdy + Cdz$. $Adx + Bdy$ será la diferencial de β, considerando solamente como variables x é y; y en virtud del teorema núm. 190., $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$: tambien será $Adx + Cdz$ la diferencial de β considerando solamente como variables x, y z; y por consiguiente $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$: y finalmente, á causa de ser $Bdy + Cdz$ la diferencial de β relativamente á y, y z; tendrémos $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$; de donde concluirémos que

Si Adx + Bdy + Cdz *es la diferencial de una funcion qualquiera de tres cantidades variables* x, y, z; *será necesariamente* $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, *y* $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$.

Así; siendo en el primero de los dos exemplos antecedentes.... $ny^m z^b x^{n-1}dx + mx^n z^b y^{m-1}dy + bx^n y^m z^{b-1}dz$, la diferencial de $x^n y^m z^b$; será $A = ny^m z^b x^{n-1}$, $B = mx^n z^b y^{m-1}$, $C = bx^n y^m z^{b-1}$; de donde inferirémos $\frac{dA}{dy} = mnz^b x^{n-1} y^{m-1}$, $\frac{dA}{dz} = \ldots\ldots\ldots$ $bny^m x^{n-1} z^{b-1}$, $\frac{dB}{dx} = nmz^b y^{m-1} x^{n-1}$, $\frac{dB}{dz} = bmx^n y^{m-1} z^{b-1}$, $\frac{dC}{dx} = nby^m z^{b-1} x^{n-1}$, y $\frac{dC}{dy} = mbx^n z^{b-1} y^{m-1}$; por donde se

ve, que $mnz^b x^{n-1} y^{m-1} \left(= \frac{dA}{dy}\right)$, es idénticamente la misma cantidad que $nmz^b y^{m-1} x^{n-1} \left(= \frac{dB}{dx}\right)$; y del mismo modo se manifiesta la identidad de las otras dos equaciones.

Estas equaciones idénticas se llaman tambien *equaciones de condicion.*

Si en vez de tres cantidades variables, la funcion β tuviese quatro; hallariamos seis equaciones de condicion: y en general, *el número de estas equaciones será igual al número de veces que los términos* Adx + Bdy + Cdz + &c. *de la diferencial, se pueden combinar de dos en dos.*

197. Por lo que toca á las diferenciales segunda, tercera, &c., de β; se deducirán sucesivamente unas de otras, del mismo modo que en las funciones de dos variables; y se hallará entre la expresion de $d^n\beta$, y la potencia n del polinomio $dx + dy + dz +$ &c. la misma analogía que observamos entre la diferencial del órden n de una funcion de x é y (núm. 193.), y la potencia n del binomio $dx + dy$. La expresion de $d^n\beta$ manifestará que todos sus términos son homogéneos relativamente á dx, dy, dz, &c., y de dimension n: y finalmente, si en la expresion de β', se supone $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, $\Delta z = dz$, &c., se transformará en $\beta + d\beta + \frac{d^2\beta}{2} +$ &c.; de donde inferirémos en general, que *si en una funcion qualquiera* f(x, y, z, &c.) *de las variables independientes* x, y, z, &c. *que llamarémos* β; *se substituye* x + dx *en lugar de* x; y + dy *en lugar de* y; z + dz *en lugar de* z; *&c. será* f(x + dx, y + dy, z + dz, *&c.*) $= \beta + d\beta + \frac{d^2\beta}{2} + \frac{d^3\beta}{2 \cdot 3} +$ &c.

De la diferenciacion de las equaciones.

198. Supongamos que representando z una funcion de dos cantidades variables x é y, la relacion entre estas cantidades sea dada por la equacion $z = 0$; y será funcion de x; y recíprocamente x funcion de y; y si ademas suponemos que $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 +$ &c. sea la diferencia de z considerando x é y como independientes, la equacion $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta x^2 + D\Delta x\Delta y + E\Delta y^2 +$ &c. $= 0$, expresará la relacion entre las diferencias Δx, y Δy. Sentado esto; si consideramos y como funcion de x, tendrémos $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{A + C\Delta x + D\Delta y + E\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y + \&c.}{B}$, $\frac{dy}{dx} = -$

$\frac{A}{B}$, $A+B\frac{dy}{dx}=0$, y $Adx+Bdy=0$; pero (núm. 183.) como $A=\frac{dz}{dx}$, y $B=\frac{dz}{dy}$, inferirémos, que *si y fuese una funcion implícita de* x *dada por una equacion qualquiera* z $=0$; *el límite* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ *se hallará diferenciando* z *como si las variables* x *é* y *fuesen independientes, é igualando á cero el resultado.*

Sea por exemplo, la funcion y dada por la equacion $a(y-b)^2-x(x-a)^2=0$: será, en virtud de esta regla, $2a(y-b)dy-dx(x-a)^2-2x(x-a)dx=0$; de donde inferirémos, haciendo las reducciones necesarias, $2a(y-b)\frac{dy}{dx}-3x^2+4ax-a^2=0$, ó $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4ax+a^2}{2a(y-b)}$.

Como la funcion y es dada por una equacion de segundo grado, tendrá necesariamente dos valores; y substituyéndoles en la equacion diferencial, resultarán los correspondientes de $\frac{dy}{dx}$. Los dos valores de y son $b\pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}$; y substituyéndoles, tendrémos $\frac{dy}{dx}$

$$=\pm\frac{3x^2-4ax+a^2}{2a(x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}}=\pm\frac{3x-a}{2\sqrt{ax}}.$$

Es evidente que estos valores de $\frac{dy}{dx}$ son los mismos que resultarian diferenciando la equacion $y=b\pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}$.

Finalmente, eliminando y por medio de la equacion propuesta y de $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-4ax+a^2}{2a(y-b)}$, resultará una equacion de segundo grado relativamente al límite $\frac{dy}{dx}$, la qual dará los dos valores de dicho límite que hallamos antes.

Si la funcion y fuese dada por la equacion $y^3-3axy+x^3=0$; seria $3y^2dy-3axdy-3aydx+3x^2dx=0$; de donde infeririamos $(y^2-ax)\frac{dy}{dx}-ay+x^2=0$, ó $\frac{dy}{dx}=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

La funcion y tendrá en este caso tres valores; y substituyéndoles en la expresion de $\frac{dy}{dx}$, resultarán otros tantos de este coeficiente diferencial. Tambien se pueden determinar estos valores eliminando y por medio de la equacion propuesta, y de la equacion $(y^2-ax)\frac{dy}{dx}-ay+x^2=0$, y resolviendo la equacion de tercer grado que resulta relativamente á $\frac{dy}{dx}$.

En general; *el coeficiente diferencial* $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$, *tendrá tantos valores, quantos tuviere la funcion* y *en la equacion que la expresa.*

199. La equacion $z=0$, de la qual se deduce la equacion diferencial $Adx+Bdy=0$, ó $A+B\frac{dy}{dx}=0$, se llama *la equacion primitiva.*

200. Si se diferencia la equacion $A+B\frac{dy}{dx}=0$, considerando $\frac{dy}{dx}$ como una nueva variable; ó la equacion $Adx+Bdy=0$, tratando como una nueva variable dy; resultará una equacion de la qual se inferirá la expresion de d^2y, ó la del límite $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Siendo, por exemplo, $y^3-3axy+x^3=0$; y $y^2dy-axdy-aydx+x^2dx=0$; tendrémos (diferenciando esta equacion relativamente á las tres variables x, y, dy,), $y^2d^2y+2ydy^2-axd^2y-adydx-adydx+2xdx^2=0$, ó $(y^2-ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\frac{dy^2}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+2x=0$.

Substituyendo en esta equacion por $\frac{dy}{dx}$, su valor $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$, se transformará en $(y^2+ax)\frac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)^2-2a\left(\frac{ay-x^2}{y^2-ax}\right)+2x=0$, y reduciendo á un comun denominador $(y^2-ax)^3\frac{d^2y}{dx^2}+2xy^4-6ax^2y^2+2x^4y+2a^3xy=0$; pero siendo la funcion $2xy^4-6ax^2y^2+2x^4y=(y^3-3axy+x^3)2xy$, será esta cantidad nula en virtud de la equacion propuesta; por consiguiente, tendrémos $(y^2-ax)^3\frac{d^2y}{dx^2}+2a^3xy=0$, y $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

Del mismo modo se hallarán los coeficientes diferenciales $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c.

201. Sea siempre $z=0$ la equacion que expresa la relacion de las variables x é y; y (dz)...... $Adx+Bdy=0$, su diferencial. Como A, y B se deben considerar como funciones de x é y; si diferenciamos esta equacion considerando y como funcion de x, tendrémos $\frac{dA}{dx}dx^2+\frac{dA}{dy}dxdy+\frac{dB}{dx}dydx+\frac{dB}{dy}dy^2+Bd^2y=0$, ó haciendo $\frac{dA}{dx}=C$, $\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dx}=D$, y $\frac{dB}{dy}=E$; (d^2z)..............

$Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Bd^2y = 0$. Diferenciando de nuevo esta equacion, hallarémos $\frac{dC}{dx}dx^3 + \frac{dC}{dy}dx^2dy + \frac{dD}{dx}dx^2dy + \frac{dD}{dy}dxd^2y + Ddxd^2y + \frac{dE}{dx}dxdy^2 + \frac{dE}{dy}dy^3 + 2Edyd^2y + \frac{dB}{dx}dxd^2y + \frac{dB}{dy}dyd^2y + Bd^3y = 0$; por donde se manifiesta que la diferencial tercera de la equacion $z = 0$, será de la forma (d^3z).......... $Fdx^3 + Gdx^2dy + Hdxdy^2 + Idy^3 + (Kdx + Ldy)\,d^2y + Bd^3y = 0$: y del mismo modo se hallarán las formas respectivas de las equaciones diferenciales de un órden superior.

Como todas estas equaciones son homogéneas relativamente á las potencias de dx, y á las diferenciales sucesivas de y y sus potencias; y que ademas consideramos y como funcion de x: dividiendo la primera por dx, la segunda por dx^2, la tercera por dx^3 &c. tendrémos $A + B\frac{dy}{dx} = 0$, $C + D\frac{dy}{dx} + E\frac{dy^2}{dx^2} + B\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $F + G\frac{dy}{dx} + H\frac{dy^2}{dx^2} + I\frac{dy^3}{dx^3} + \left(K + L\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + B\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, &c.

La primera de estas equaciones da inmediatamente el valor del coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$ en x é y; y substituyéndole en la segunda, dará esta el valor de $\frac{d^2y}{dx^2}$; y así de las demas equaciones. Finalmente; combinando estos valores con la equacion primitiva $z = 0$; se podrá eliminar una de las variables x ó y; y quedarán expresados dichos valores en funciones de la otra variable.

202. Si en vez de considerar y como funcion de x en la equacion $z = 0$; mirásemos x como funcion de y; tendriamos (dz) .... $Bdy + Adx = 0$. Para hallar la diferencial segunda, diferenciarémos está equacion, considerando dy como constante, y dx como variable; y haciendo los mismos supuestos que en el número antecedente, será (d^2z) .... $Edy^2 + Ddydx + Cdx^2 + Ad^2x = 0$. Comparando esta equacion con su correspondiente en dicho número; verémos que los tres primeros términos son los mismos en ambas equaciones, y que solo los últimos términos Bd^2y, Ad^2x, son diferentes. Pero siendo en ambos casos $Adx + Bdy = 0$, ó $A = -B\frac{dy}{dx}$; si substituimos en aquella equacion $-\frac{dy}{dx}d^2x$, en lugar de d^2y, resultará la que acabamos de hallar relativa al supuesto de x funcion de y, ó de dy constante: de donde inferirémos

Que si en una equacion diferencial de segundo órden, hallada en el supuesto de ser y *funcion de* x; *ó lo que es lo mismo, en el de ser* dx *constante; se substituye la expresion* $-\frac{dy}{dx}d^2x$ *en lugar de* d^2y; *la*

equacion que resultare, será la que pertenece al supuesto de ser x *funcion de* y, *ó* dy *constante.*

203. Para determinar con mas generalidad las relaciones que exîsten entre los coeficientes diferenciales de y, y de x relativos á ámbos supuestos; volvamos á considerar las diferencias $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + $ &c., $\Delta A = A'\Delta x + A''\Delta x^2 + $ &c., $\Delta B = B'\Delta x + B''\Delta x^2 + $ &c.; y tomando la diferencia segunda de y considerando tambien Δx como variable, hallarémos $\Delta^2 y = A\Delta^2 x + \Delta A\Delta x + \Delta A\Delta^2 x + 2B\Delta x\Delta^2 x + \Delta B\Delta x^2 + $ &c. $= A\Delta^2 x + A'\Delta x^2 + A''\Delta x^3 + $ &c. $+ A'\Delta x\Delta^2 x + $ &c. $+ 2B\Delta x\Delta^2 x + B'\Delta x^3 + $ &c. $+$ &c.; $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = A\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} + A' + (A'' + B')\,\Delta x + (A' + 2B)\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}\Delta x + $ &c. $+$ &c.; y tomando los límites, $\frac{d^2y}{dx^2} = A\frac{d^2x}{dx^2} + A'$, ó $A' = \frac{d^2y}{dx^2} - A\frac{d^2x}{dx^2}$: pero $A = \frac{dy}{dx}$, y $A' = \frac{dA}{dx} = \frac{d\,.\frac{dy}{dx}}{dx}$, luego $\frac{d\,.\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$; luego *suponiendo variables ámbas diferencias* Δy, Δx; *la expresion* $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ *denota el límite* .. $\frac{d\,.\frac{dy}{dx}}{dx}$ *de la razon de la diferencia de* $\frac{dy}{dx}$ *á la diferencia de* x. De donde se sigue

1º Si se supone Δx constante; la razon $\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2}$, y su límite $\frac{d^2x}{dx^2}$ será cero; y por consiguiente $\frac{d\,.\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$; lo mismo que en el núm. 81.

2º Si en vez de suponer Δx constante, se supone esta diferencia variable, y Δy constante; la razon $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, y su límite $\frac{d^2y}{dx^2}$ serán cero; de donde resulta $\frac{d\,.\frac{dy}{dx}}{dx} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$: esto es, que la expresion $-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ denota el límite de la razon de la diferencia de $\frac{dy}{dx}$, á la de x en el supuesto de ser Δy constante. Luego si en una equacion diferencial de segundo órden, hallada en el supuesto de ser Δx, ó lo que es lo mismo dx constante; se substituye la expresion $-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$; ó $\frac{dy}{dx}d^2x$ en lugar de d^2y; resultará la equacion correspondiente al supuesto de Δy, ó dy constante y Δx, ó dx variable: cuya conclusion es la misma que la del número antecedente.

3º Si en una equacion diferencial de segundo órden, relativa al supuesto de dx constante; se substituye la expresion $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$; ó $d^2y - \frac{dy}{dx}d^2x$, en lugar d^2y; resultará la equacion correspondiente al supuesto de considerarse como variables ámbas diferenciales dy, dx.

Por exemplo; haciendo esta substitucion en la equacion $Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Bd^2y = 0$ (núm. 201.), se transformará en $Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Bd^2y - B\frac{dy}{dx}d^2x = 0$; ó substituyendo por $-B\frac{dy}{dx}$, su valor A, dado por la equacion $Adx + Bdy = 0$, tendrémos $Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + Bd^2y + Ad^2x = 0$; cuya equacion resulta evidentemente diferenciando $Adx + Bdy = 0$, tratando como variables ámbas diferenciales dx, dy.

Esta equacion tiene la ventaja de dar igualmente la que corresponde al supuesto de dx constante; y la que pertenece al supuesto de dy constante: en el primer caso, basta hacer $d^2x = 0$, y en el segundo $d^2y = 0$.

204. Si suponemos $\Delta A' = A1\Delta x + A2\Delta x^2 + \&c.$; la equacion $\Delta^2 y = A\Delta^2 x + A'\Delta x^2 + A\,\Delta x^3 + \&c. + \&c.$, dará considerando como variables ámbas diferencias Δy, Δx; $\Delta^3 y = A\Delta^3 x + A'\Delta x\Delta^2 x + \&c. + 2A'\Delta x\Delta^2 x + A1\Delta x^3 + \&c. + \&c.$, $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = A\frac{\Delta^3 x}{\Delta x^3} + 3A'\frac{\Delta^2 x}{\Delta x^2} + A1 + \&c. + \&c. + \&c.$, $\frac{d^3y}{dx^3} = A\frac{d^3x}{dx^3} + 3A'\frac{d^2x}{dx^2} + A1$, y $A1 = \frac{d^3y}{dx^3} - A\frac{d^3x}{dx^3} - 3A'\frac{d^2x}{dx^2}$; ó substituyendo por A, y A' sus valores respectivos, tendrémos finalmente $A1 = \frac{dA'}{dx} = \frac{d\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$: y por consiguiente, la última expresion denota el límite de la razon de la diferencia de $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, á la diferencia de x. De donde inferirémos

1º Si suponemos Δx, ó dx constante; será $\frac{d\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$, lo mismo que en otro lugar (núm. 82.): pero si se supone dy constante, tendrémos $\frac{d\left(-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)}{dx} = -\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$;

por donde se manifiesta, que el segundo miembro de esta equacion denota el límite de la razon entre las diferencias de $\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, y de x.

2º Si en una equacion diferencial de tercer órden, hallada en el supuesto de ser dx constante; se substituye $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$; y $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$ en lugar de $\frac{d^3y}{dx^3}$; resultará la equacion perteneciente al supuesto de considerar ambas diferenciales dx, dy como variables.

Sea, por exemplo, $xy + ay + bx + c = 0$ la equacion que expresa la relacion de las cantidades variables x é y. Diferenciándola, considerando dx como constante, tendrémos $(x+a)\frac{dy}{dx} + y + b = 0$, $(x+a)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$, y $(x+a)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; de donde inferirémos (haciendo en esta equacion las substituciones correspondientes), que la equacion $(x+a)\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\right) + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right) = 0$, es la que pertenece al supuesto de ser dx y dy variables. En efecto; diferenciando la equacion $(x+a)\frac{dy}{dx} + y + b = 0$ en este supuesto, hallarémos $(x+a)\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right) + 2\frac{dy}{dx} = 0$, y volviendo á diferenciar, y haciendo las reducciones correspondientes, $(x+a)\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2\right) + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right) = 0$.

Tambien se puede eliminar a por medio de las dos equaciones $(x+a)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$, $(x+a)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; y se hallará $2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$; y haciendo las substituciones correspondientes al supuesto de dy, y dx variables, y reduciendo, resultará la equacion $2\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}\right) - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - 3\left(\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2 = 0$; la misma que resultaria si eliminásemos a por medio de las dos equaciones que acabamos de hallar, diferenciando la equacion $(x+a)\frac{dy}{dx} + y + b = 0$, tratando como variables dy y dx.

3º Si en una equacion diferencial de tercer órden relativa al supuesto de dx constante; se substituye $-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$, $-y\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$ en lugar de $\frac{d^3y}{dx^3}$; la equacion que resultare será la que corresponde al supuesto de ser dy constante.

Haciendo, por exemplo, estas substituciones en la equacion $2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$, dividiendo por $\frac{dy}{dx}$, y reduciendo; tendrémos $2\frac{d^3x}{dx^3}-3\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2=0$; cuya equacion es la que corresponde al supuesto de que y varía uniformemente, ó de que dy es constante. En efecto; diferenciando la equacion $(y+b)\frac{dx}{dy}+x+a=0$ en este supuesto; hallarémos $(y+b)\frac{d^2x}{dy^2}+2\frac{dx}{dy}=0$, $(y+b)\frac{d^3x}{dy^3}+3\frac{d^2x}{dy^2}=0$; y eliminando b, y multiplicando por $\frac{dy^4}{dx^4}$, $2\frac{d^3x}{dx^3}-3\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2=0$.

205. Para facilitar las diferenciaciones sucesivas supondrémos los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=\frac{d.\left(\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}\right)}{dx}=r$, &c.; y en virtud de lo demostrado en los números antecedentes, será

1º Quando ambas diferenciales dx y dy se consideran como variables, $q=\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, $r=\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^2x}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$, &c.

2º Si solamente se considera dx como variable; $q=-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, $r=-\frac{dy}{dx}\frac{d^3x}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)^2$, &c.

3º Y finalmente, quando se trate dx como constante; $q=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{d^3y}{dx^3}$, &c.

206. En vez de suponer que una de las cantidades variables x, ó y varía uniformemente, ó lo que es lo mismo, que una de las diferenciales dx ó dy es constante: podemos imaginar que una función z de estas variables crece uniformemente, ó que dz es constante; en cuyo caso las dos diferenciales dx y dy dependerán de dz.

Si suponemos, por exemplo, que la curva AMF (*fig.* 77.) expresa la relacion entre $x\,(=AP)$ é $y\,(=PM)$, y que el espacio $APM=s$ crece uniformemente; su diferencia Δs, ó su diferencial $ds=ydx$ (núm. 176.), se deberá considerar como constante, y las diferencias, ó diferenciales de x é y, dependerán de la diferencia arbitraria Δs, ó de la diferencial ds.

Para hallar en este caso los coeficientes diferenciales q, r, &c., diferenciarémos sucesivamente la equacion $ydx=ds$, y será $yd^2x+dxdy=0$, $yd^3x+2dyd^2x+dxd^2y=0$, &c.; de donde inferirémos $\frac{d^2x}{dx^2}=-\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^3x}{dx^3}=-\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{y}\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}=-\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{y^2}\frac{dy^2}{dx^2}$, &c.; y substituyendo estos valores en las expresiones antecedentes de q, y de r correspondientes al supuesto de dx, y dy variables, se transformarán en $q=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y}\frac{dy^2}{dx^2}$, $r=\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{4}{y}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{y^2}\frac{dy^3}{dx^3}$, &c. cuyos valores son relativos al supuesto de ydx constante.

207. Supongamos ahora que el arco $AM=z$ de la misma curva crece uniformemente: su diferencia Δz, ó su diferencial $dz=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ será constante; y por consiguiente $\frac{dxd^2x+dy\,d^2y}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=0$, ó $\frac{d^2x}{dx^2}=-\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}$; y substituyendo este valor en la expresion de q relativa al supuesto de dx y dy variables; tendrémos en el supuesto actual de $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ constante, $q=\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$; y del mismo modo se hallarán r, &c.

208. Como una equacion diferencial de segundo órden $C+D\frac{dy}{dx}+E\frac{dy^2}{dx^2}+B\frac{d^2y}{dx^2}+A\frac{d^2x}{dx^2}=0$ hallada en el supuesto de ser variables dx, y dy; solo puede expresar la relacion que exîste entre las variables x é y, y sus coeficientes diferenciales de primero y segundo órden p, q: se sigue, que dicha equacion se podrá reducir á que solo incluya las cantidades variables x, y, p, q.

Si substituimos, por exemplo, en la equacion antecedente, p en lugar de $\frac{dy}{dx}$; y en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$ su valor $q+p\frac{d^2x}{dx^2}$, se transformará en $C+Dp+Ep^2+B\left(q+p\frac{d^2x}{dx^2}\right)+A\frac{d^2x}{dx^2}=0$. Pero siendo $Adx+Bdy=0$, ó $A+Bp=0$; será tambien $(A+Bp)\frac{d^2x}{dx^2}$

$= 0$; y por consiguiente la equacion transformada se reduce á $C + Dp + Ep^2 + Bq = 0$, que como se ve solo incluye las cantidades variables x, y, p, q.

Por lo que; *quando una equacion diferencial de segundo órden, en la qual se supone que ambas diferenciales* dx, *y* dy *son variables; no se puede reducir á que solo incluya las variables* x, y, p, q; *inferirémos que no puede resultar de la diferenciacion de una equacion entre las dos cantidades variables* x *é* y.

209. Supongamos ahora que se nos proponga la equacion $A\frac{d^2x}{dx^2} + B\frac{d^2y}{dx^2} + M = 0$, en la qual A, B, y M contienen solamente x, y, y p. Substituyendo en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$ su valor $q + p\frac{d^2x}{dx^2}$ relativo al supuesto de ser dx, y dy variables, se transformará en $(A + Bp)\frac{d^2x}{dx^2} + Bq + M = 0$; de donde resulta, que *para que la equacion propuesta incluya solamente las variables* x, y, p, q; *ó para que dicha equacion provenga de una equacion primitiva entre* x *é* y; *es necesario que* $(A + Bp)\frac{d^2x}{dx^2}$ *sea* $= 0$, *ó que sea* $Adx + Bdy = 0$; cuya condicion puede verificarse por tres causas.

1.ª Porque la equacion propuesta es la diferencial de la equacion $Adx + Bdy = 0$, como lo era en el exemplo antecedente.

2.ª Quando A es igual á $-B\frac{dy}{dx}$, en cuyo caso la equacion $Adx + Bdy = 0$, es efectivamente idéntica. Esto se verifica en la equacion $xy\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2} - xy\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy^2}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = 0$: pues siendo $A = xy\frac{dy}{dx}$, y $B = -xy$; es tambien $Adx + Bdy = xydy - xydy = 0$.

3.ª Quando la diferencial de la equacion $Adx + Bdy = 0$, es al parecer distinta de la equacion propuesta; pero sin embargo concuerda con ella.

Sea, por exemplo, la equacion propuesta $x^3\frac{d^2x}{dx^2} + x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + x^2\frac{dy^2}{dx^2} - y^2 + a^2 = 0$. Será $A = x^3$, $B = x^2y$, y $Adx + Bdy = x^3dx + x^2ydy = 0$, ó $xdx + ydy = 0$; cuya diferencial $x\frac{d^2x}{dx^2} + y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} + 1 = 0$ es al parecer diferente de la equacion propuesta. Pero si suponemos que $xdx + ydy = 0$, es la diferencial de la equacion $a^2 - x^2 - y^2 = 0$; añadiendo esta equacion á su diferencial segunda (que acabamos de hallar) multiplicada por x^2, resulta-

rá la equacion $x^3\frac{d^2x}{dx^2} + x^2y\frac{dy^2}{dx^2} + a^2 - y^2 = 0$, que como se ve es la propuesta.

210. Los tres casos que acabamos de considerar en los quales se verifica la condicion $Adx + Bdy = 0$, y que en cada uno de ellos exîste una equacion primitiva entre x é y, que satisface á la propuesta; se distinguen en que la equacion primitiva es mas general en unos que en otros, como lo manifestarémos en el cálculo integral.

211. La condicion $Adx + Bdy$ no se verifica en la equacion $x^3\frac{d^2x}{dx^2} + y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 6xy\frac{dy}{dx} = 0$: pues siendo $A = x^3$, y $B = y^3$, seria $x^3dx + y^3dy = 0$; cuya diferencial $x^3\frac{d^2x}{dx^2} + y^3\frac{d^2y}{dx^2} + 3y^2\frac{dy^2}{dx^2} + 3x^2 = 0$ restada de la propuesta, dará $6xy\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy^2}{dx^2} - 3x^2 = 0$, ó $y^2\frac{dy^2}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} + x^2 = 0$, y sacando la raiz quadrada $y\frac{dy}{dx} - x = 0$. Pero esta equacion no puede verificarse juntamente con $y^3\frac{dy}{dx} + x^3 = 0$; pues si eliminamos $\frac{dy}{dx}$, tendrémos $\frac{y^3x}{y} + x^3 = 0$, ó $y^2 + x^2 = 0$: diferenciando esta nueva equacion, resulta $y\frac{dy}{dx} + x = 0$, y substituyendo por $\frac{dy}{dx}$ su valor $\frac{x}{y}$, $\frac{yx}{y} + x = 0$, ó $x = 0$, y por consiguiente $y = 0$; cuyo resultado manifiesta que la equacion propuesta no puede provenir de la diferenciacion de una equacion primitiva entre las variables x é y.

212. Una equacion diferencial de tercer órden expresa únicamente la relacion que exîste entre las variables x é y, y los coeficientes diferenciales p, q, r: por consiguiente, haciendo en una qualquiera de estas equaciones las substituciones convenientes, relativas al supuesto que se hace respecto á la variabilidad de dx y dy (número 204.); se debe transformar en otra que solo incluya dichas variables y, p, q, r. Quando esta transformacion no se pueda hacer, inferirémos que la equacion propuesta no puede resultar de la diferenciacion de una equacion primitiva entre x é y.

Tomando una equacion de tercer órden de una forma general, y haciendo en ella las substituciones convenientes; se hallarán las condiciones análogas á las del número antecedente, que deben verificarse para que dicha equacion pueda resultar de la diferenciacion de una relacion primitiva entre x é y.

213. En general: *para que una equacion que incluye las diferenciales, ó coeficientes diferenciales de un órden qualquiera de dos variables* x *é* y, *pueda derivar de una equacion primitiva entre estas va-*

riables; es necesario, que haciendo las substituciones convenientes relativas al supuesto hecho respecto á la variabilidad de dx *y* dy *; se transforme en otra que incluya únicamente* x, y, p, q, r, &c.

214. Como en los números antecedentes hemos supuesto siempre que exîstia una relacion entre las variables x é y, y por consiguiente que y era funcion de x, ó x funcion de y; podemos aplicar las conclusiones de dichos números á las funciones diferenciales, en las quales se supone tácitamente que y es funcion de x, ó x funcion de y. Así, para que una funcion diferencial de un órden qualquiera, y de dimension nula (la dimension debe entenderse relativamente á dx, dy, d^2x, d^2y, &c) pueda referirse á una relacion entre x é y; es necesario que haciendo las substituciones relativas al supuesto hecho sobre la variabilidad de dx, y dy; se transforme en otra que incluya únicamente x, y, p, q, r, &c.

Tal es la funcion diferencial $\frac{x^2dy^2+y^2dx^2}{xydydx-yd^2y}$, en la qual se supone dx constante. Pues substituyendo pdx por dy; y en lugar de d^2y, su valor qdx^2 relativo á este supuesto; se transforma en .... $\frac{x^2p^2+y^2}{xyp-yq}$.

Lo mismo sucede en la funcion $\frac{x^2dydx^2+ydy^3}{dxd^2y-dyd^2x}$ en el supuesto de ser variables ambas diferenciales dx, dy. Pues substituyendo pdx en lugar de dy; y en lugar de d^2y su valor qdx^2+pd^2x correspondiente á este supuesto se transforma en $\frac{x^2p+yp^3}{q}$.

215. Haciendo las mismas substituciones en la funcion $\frac{yd^2x+xd^2y}{dxdy}$; se transforma en $\frac{(y+xp)\frac{d^2x}{dx^2}+xq}{p}$, la qual, ademas de x, p, q, contiene la expresion $(y+xp)\frac{d^2x}{dx^2}$, que solo puede desaparecer en el caso particular de $y+xp=0$, ó $ydx+xdy=0$. De donde se sigue que no se puede considerar en general y como funcion de x; ó x como funcion de y, en la funcion diferencial propuesta.

216. Una funcion diferencial, en la qual se consideran como variables ambas diferenciales dx, y dy; y que por medio de las substituciones relativas á este supuesto se transforma en otra que solo incluye x, y, p, q, r, &c.; tiene la propiedad de conservar siempre el mismo valor; ya sea suponiendo dx constante, ó dy, ú otra diferencial qualquiera.

Por exemplo: suponiendo dx constante en la funcion.............. $\frac{x^2dydx^2+ydy^3}{dxd^2y-dyd^2x}$; se reduce á $\frac{x^2dydx^2+ydy^3}{dxd^2y}=\frac{x^2p+yp^3}{q}$; y suponiendo dy constante, se reduce á $\frac{x^2dx^2+ydy^2}{-d^2x}$; ó substituyendo pdx por dy, y por $-d^2x$ su valor $\frac{qdx^2}{p}$ relativo á este supuesto, tendrémos el mismo valor que antes $\frac{x^2p+yp^3}{q}$. Finalmente, si suponemos ydx constante; substituirémos en la funcion propuesta por d^2x, y d^2y sus valores respectivos (núm. 206.) $-\frac{dxdy}{y}$, $qdx^2-\frac{dy^2}{y}$ correspondientes á este supuesto, y se transformará en .... $\frac{x^2dydx^2+ydy^3}{qdx^3}$; ó en $\frac{x^2p+yp^3}{q}$ substituyendo pdx por dy.

No sucede así con las fórmulas diferenciales que no admiten dicha transformacion; pues estas dan distintos valores relativos á los diferentes supuestos que se pueden hacer respecto á la variabilidad de dx y dy.

Si suponemos, por exemplo, dx constante en la fórmula diferencial $\frac{yd^2x+xd^2y}{dxdy}$, se reduce á $\frac{xd^2y}{dxdy}=\frac{xq}{p}$; y á $\frac{yd^2x}{dxdy}=-\frac{yq}{p^2}$ quando se supone dy constante; cuyos valores solamente pueden ser iguales en el caso particular de $x=-\frac{y}{p}$, ó de $xdy+ydx=0$.

217. Para manifestar con mayor evidencia esta diferencia de valores, supondrémos que entre x é y exîste la relacion $y=x^n$, cuya diferencial es $dy=nx^{n-1}dx$. Sentado esto; si suponemos dx constante, tendrémos $d^2y=n(n-1)x^{n-2}dx^2$; y substituyendo estos valores en la expresion $\frac{xd^2y}{dxdy}$ relativa á este supuesto, se transforma en $n-1$. Supongamos ahora dy constante en la diferencial de $dy=nx^{n-1}dx$, y tendrémos $nx^{n-1}d^2x+n(n-1)x^{n-2}dx^2=0$, ó $d^2x=\frac{(1-n)dx^2}{x}$; y substituyendo por y, dy, d^2x sus valores respectivos en la expresion $\frac{yd^2x}{dxdy}$ correspondiente á este supuesto, se transforma en $\frac{1-n}{n}$. Finalmente: si suponemos ydx constante; multiplicando por x la equacion $dy=nx^{n-1}dx$, tendrémos $xdy=nx^ndx=nydx$: por consiguiente, $xd^2y+dxdy=0$, $d^2y=-\frac{dxdy}{x}$, y substituyendo en la fórmula propuesta este valor de d^2y; y por d^2x, su valor correspondiente $-\frac{dxdy}{y}$, se transformará en -2. Por donde se ve, que la fórmula propuesta, nos

ha dado los tres valores distintos $n - 1$, $\frac{1-n}{n}$, -2, correspondientes á los supuestos dx constante, dy constante, ydx constante.

218. Los medios indicados (núm. 203. y siguientes.) para transformar una equacion en la qual una de las diferenciales dx, ó dy se considera como constante, en la que resultaria considerando otra diferencial como constante, ó ambas diferenciales como variables; se aplica naturalmente á las funciones diferenciales; pues en ambos casos se supone que y es funcion de x; ó x funcion de y.

Supongamos, por exemplo, que siendo ydx constante en la funcion $\frac{yd^2y + dy^2}{xdxdy}$; se quiera transformar en la que corresponde al supuesto de $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constante. Como en el primer supuesto es $d^2y = qdx^2 - \frac{dy^2}{y}$; transformarémos la funcion propuesta en ..... $\frac{yqdx^2}{xdxdy}$; y substituyendo por q su valor $\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)\frac{d^2y}{dx^2}$ relativo al supuesto de $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constante, tendrémos la funcion que se pide $\frac{y(dx^2 + dy^2)d^2y}{xdx^3dy}$.

Si quisiéramos transformar la funcion propuesta, en la que pertenece al supuesto de dx constante; substituiriamos $\frac{d^2y}{dx^2}$ en lugar de q, y tendriamos $\frac{yd^2y}{xdydx}$.

En general, para transformar una funcion ó equacion diferencial qualquiera en la qual se considera como constante cierta diferencial, en la que corresponde al supuesto de ser constante otra diferencial qualquiera: se debe transformar la funcion propuesta por medio de las substituciones convenientes en una funcion de x, y, dx, dy, q, r, &c.; y substituyendo por q, r, &c. los valores relativos al supuesto actual, resultará la funcion transformada que se busca.

219. Las cantidades constantes que contienen las equaciones; desaparecen sucesivamente por medio de las diferenciaciones, del mismo modo que las de las funciones.

Quando una de dichas constantes se halla sola en un término, ó multiplicada por otra constante; la diferenciacion la hace desaparecer inmediatamente: pero quando se halla afecta de algun factor variable, desaparece por medio de la eliminacion: de manera, que en uno y otro caso se puede hacer desaparecer una constante en cada diferenciacion.

Diferenciando, por exemplo, la equacion $xy + ay + bx + c = 0$ (núm. 204.); desaparece la constante c que se halla sola, y resulta $(x + a)\frac{dy}{dx} + y + b = 0$: volviendo á diferenciar tratando dx como constante, desaparecerá b, y tendrémos $(x + a)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}$

$= 0$, cuya diferencial es $(x + a)\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. La constante a, no desaparece en la última diferenciacion por hallarse multiplicada por la cantidad variable $\frac{d^2y}{dx^2}$: pero es evidente que se puede eliminar por medio de las dos últimas equaciones; y efectuándolo resultará la equacion $2\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} - 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0$ libre de toda constante.

En general, *si la equacion primitiva incluyese un número* n *de constantes; se podrán hacer desaparecer todas ellas diferenciando* n *veces, y eliminando quando fuere necesario.*

220. Del mismo modo se pueden hacer desaparecer las funciones irracionales, y transcendentes que una equacion incluye: ya sean funciones de x é y, ó de los coeficientes diferenciales p, q, r, &c.

Sea por exemplo la equacion $xy + A.\,\text{tang.}\,z + a = 0$, representado z una funcion qualquiera de x é y. Diferenciándola, tendrémos $xdy + ydx + \frac{dz}{1 + z^2} = 0$; cuya equacion no incluye la cantidad transcendente A tang. z.

Exemplo 2º Si la equacion propuesta fuese $y^2 + y(ax - x^2)^{\frac{3}{2}} - b = 0$; seria $2ydy + dy(ax - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}y(ax - x^2)^{\frac{1}{2}}(adx - 2xdx) = 0$, ó $2ydy + \left(dy + \frac{\frac{3}{2}y(adx - 2xdx)}{ax - x^2}\right)(ax - x^2)^{\frac{3}{2}} = 0$; y substituyendo por $(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$ su valor $\frac{b - y^2}{y}$, tendrémos la equacion $2y^2dy + \left(dy + \frac{\frac{3}{2}y(adx - 2xdx)}{ax - x^2}\right)(b - y^2) = 0$ que no incluye la cantidad irracional $(ax - x^2)^{\frac{3}{2}}$.

Exemplo 3º Sea $u^{\frac{1}{n}} - \log.\,z = 0$ la equacion propuesta, representando z, y u funciones racionales de x é y. Diferenciándola tendrémos $\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du - \frac{dz}{z} = 0$, ó $\frac{u^{\frac{1}{n}}}{nu} - \frac{dz}{zdu} = 0$, y eliminando $u^{\frac{1}{n}}$, $\log.\,z - \frac{nudz}{zdu} = 0$. Diferenciando esta equacion, considerando como variables dz, y du, desaparecerá la cantidad transcendente log. z, y resultará una equacion diferencial de segundo órden, libre de esta cantidad, y de la irracional $u^{\frac{1}{n}}$.

Tambien se puede diferenciar la equacion $\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}du - \frac{dz}{z} = 0$, y se hallará $\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}d^2u + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)u^{\frac{1}{n}-2}du^2 - d\left(\frac{dz}{z}\right)$ $= 0$; y substituyendo por $u^{\frac{1}{n}-1}$ su igual $\frac{ndz}{z}$, resultará la misma equacion que por el otro camino.

Exemplo 4.º Sea $z \log. \frac{dy}{dx} + u\frac{dy}{dx} = 0$ (z, y u representan lo mismo que antes). Haciendo $\frac{dy}{dx} = p$, y dividiendo por z, tendrémos $\log. p + \frac{u}{z}p = 0$, $\frac{dp}{p} + \frac{u}{z}dp + pd\left(\frac{u}{z}\right) = 0$; cuya equacion no incluye la cantidad transcendente $\log. p$.

Exemplo 5.º Finalmente, sea $A.\,\text{tang.}\frac{dy}{dx} + z \log. \frac{dy}{dx} + u\frac{dy}{dx}$ $= 0$, ó $A.\,\text{tang.}\,p + z\log. p + up = 0$. La primera diferenciacion hará desaparecer $A.\,\text{tang.}\,p$, y tendrémos $\frac{dp}{1+p^2} + z\frac{dp}{p} +$ $dz \log. p + d\,(up) = 0$, ó dividiendo por dz, $\frac{dp}{dz\,(1+p^2)} + \ldots$ $\frac{zdp}{pdz} + \log. p + \frac{d.\,up}{dz} = 0$; y finalmente, diferenciando esta equacion, desaparecerá $\log. p$, y resultará una equacion de tercer órden libre de las cantidades transcendentes.

En general, *cada diferenciacion hará desaparecer una cantidad irracional, ó transcendente; ya sea inmediatamente, ó por medio de la eliminacion.*

221. Quando dos equaciones $U = 0$, $V = 0$, expresan la relacion de las tres cantidades variables x, y, z; se puede considerar una qualquiera de ellas como independiente, y las otras dos como funciones implícitas de esta.

Supongamos que la variable independiente sea x; y que se transforme en $x + \Delta x$: las otras dos variables y, z, adquirirán los incrementos respectivos Δy, Δz, dependientes del incremento arbitrario Δx; y substituyendo en las equaciones propuestas $x + \Delta x$ por x, $y + \Delta y$ por y, y $z + \Delta z$ por z, resultarán dos nuevas equaciones, por medio de las quales será fácil determinar las diferencias Δy, y Δz. Tendrémos pues (núm. 195.) $\frac{dU}{dx}\Delta x + \frac{dU}{dy}\Delta y + \frac{dU}{dz}$ $\Delta z + \&c. + \&c. = 0$, y $\frac{dV}{dx}\Delta x + \frac{dV}{dy}\Delta y + \frac{dV}{dz}\Delta z +$ $\&c. + \&c. = 0$: pero como y, y z son funciones implícitas de x, para comparar las diferencias de y, y de z á la diferencia Δx que las produce, dividirémos por esta las equaciones antecedentes, y tendrémos $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{dU}{dz} \times \frac{\Delta z}{\Delta x} + \&c. + \&c. = 0$, $\frac{dV}{dx} +$

$\frac{dV}{dy}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{dV}{dz}\frac{\Delta z}{\Delta x} + \&c. + \&c. = 0$; y tomando los límites, $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dx}$ $= 0$; cuyas equaciones darán los valores de los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ en funciones de x, y, z; y combinando estos valores con las equaciones propuestas, se podrán eliminar y, y z, y quedarán $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ funciones de x sola.

Sean por exemplo las equaciones propuestas $z^3 + 3ayx - bc^2$ $= 0$, $y^3 + 3czx - a^2b = 0$. Diferenciándolas, tendrémos $z^2\frac{dz}{dx}$ $+ ax\frac{dy}{dx} + ay = 0$, $y^2\frac{dy}{dx} + cx\frac{dz}{dx} + cz = 0$; de la primera se infiere $\frac{dz}{dx} = \frac{-ax\frac{dy}{dx} - ay}{z^2}$, y de la segunda $\frac{dz}{dx} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{-y^2\frac{dy}{dx} - cz}{cx}$; y comparando estos valores, resultará la equacion $cax^2\frac{dy}{dx} + cayx = z^2y^2\frac{dy}{dx} + cz^3$, la qual dará el valor de $\frac{dy}{dx}$ en x, y, z; y substituyéndole en qualquiera de las dos equaciones antecedentes, resultará el de $\frac{dz}{dx}$. Finalmente, combinando estos valores con las equaciones propuestas, se podrán eliminar z é y, y quedarán estos valores funciones de x.

222. Como las variables z é y son funciones implícitas de x; U, lo será igualmente; y su coeficiente diferencial relativo á x, no se podrá representar en este caso por $\frac{dU}{dx}$; pues esta expresion denota el coeficiente diferencial de U relativo á las x que contiene explícitamente (núm. 184.); ó el coeficiente diferencial de U relativo á x, en el supuesto de que las variables x, y, z sean independientes. Para distinguir pues el coeficiente diferencial de U, en el supuesto actual, del otro; le escribirémos así $\frac{d(U)}{dx}$, indicando los paréntesis, que se suponen variar en U, no solamente las x que contiene explícitamente, sino tambien las demas variables que se consideran como funciones de x; esto es, z é y; y lo mismo debe entenderse quando U contenga un número mayor de funciones implícitas de x.

Por exemplo: siendo $U = z^3 + 3ayx - bc^2$; será $\frac{dU}{dx} = 3ay$, y $\frac{d(U)}{dx} = 3z^2\frac{dz}{dx} + 3ax\frac{dy}{dx} + 3ay$.

223. Los coeficientes diferenciales de segundo órden $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, se determinarán diferenciando las equaciones que contienen los de primer órden, considerando estos como nuevas funciones implícitas de x; y dx como constante.

Así; siendo en el exemplo antecedente $z^2\frac{dz}{dx} + ax\frac{dy}{dx} + ay = 0$, y $y^2\frac{dy}{dx} + cx\frac{dz}{dx} + cz = 0$; tendrémos $z^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2z\frac{dz^2}{dx^2} + ax\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} = 0$, y $y^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2y\frac{dy^2}{dx^2} + cx\frac{d^2z}{dx^2} + 2c\frac{dz}{dx} = 0$; y substituyendo por $\frac{dy}{dx}$, y $\frac{dz}{dx}$ sus valores, será fácil determinar los de $\frac{d^2y}{dx^2}$, y $\frac{d^2z}{dx^2}$ en funciones de x, y, z: y del mismo modo se hallarán los coeficientes diferenciales de tercero, quarto, &c., órden.

Si en vez de suponer que x es la variable independiente, se supone que lo es y ó z; se podrá hacer dy, ó dz constante; y para transformar las equaciones halladas en el primer supuesto, en las que corresponden á los otros, se substituirán por $\frac{d^2y}{dx^2}$, y $\frac{d^2z}{dx^2}$ los valores que corresponden á dichos supuestos (núm. 203.).

Para transformar, por exemplo, las equaciones antecedentes, en las que pertenecen al supuesto de ser y la variable independiente, ó dy constante; se substituirá $-\frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ por $\frac{d^2y}{dx^2}$, y $\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dy}{dx} \times \frac{d^2x}{dx^2}$ por $\frac{d^2z}{dx^2}$; y haciendo las reducciones correspondientes, resultarán las equaciones que se buscan.

Finalmente: si se consideran como variables las tres diferenciales dx, dy, dz; y z, é y como funciones de x; tendrémos $\frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$, y $\frac{d\,.\,\frac{dz}{dx}}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} - \frac{dz}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$; y del mismo modo se hallarán los coeficientes diferenciales relativos al supuesto de ser x, y z funciones de y; ó x é y funciones de z.

224. Aquí debemos observar, del mismo modo que en el número 208., que si en una equacion diferencial de segundo órden que contiene tres cantidades variables; de las quales dos se consideran como funciones de la tercera; se supone $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d\,.\,\frac{dy}{dx}}{dx} = q$, &c., $\frac{dz}{dx} = p'$, $\frac{d\,.\,\frac{dz}{dx}}{dx} = q'$, &c.; debe transformarse en una equacion que solo contenga las cantidades variables x, y, z, p, p', q, q'; tomando los coeficientes diferenciales q, y q' conforme al supuesto hecho relativamente á la variabilidad de dx, dy, dz (núm. 203.).

Substituyendo, por exemplo, en la equacion $z^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2z\frac{dz^2}{dx^2} + ax\frac{d^2y}{dx^2} + 2a\frac{dy}{dx} = 0$, hallada en el supuesto de dx constante, p en lugar de $\frac{dy}{dx}$, q en el de $\frac{d^2y}{dx^2}$, p' por $\frac{dz}{dx}$, y q' por $\frac{d^2z}{dx^2}$ se transformará en $z^2q' + 2zp'^2 + axq + 2ap = 0$; la qual solo contiene las referidas cantidades.

Esta observacion se puede generalizar y extender á las equaciones de un órden mas elevado, y que contienen un número qualquiera de variables dependientes; y tambien á las fórmulas diferenciales.

225. Supongamos que u, y v representen dos funciones de z é y; y que la relacion entre las variables x, y, z sea dada por las equaciones $a + bx + u = 0$, $a' + b'x + v = 0$. Diferenciándolas dos veces, considerando dx como constante, tendrémos $d^2u = 0$, $d^2v = 0$; cuyas equaciones solo contendrán z, é y, y sus diferenciales de primero y segundo órden. De donde se sigue: *que las equaciones diferenciales que solo contienen dos cantidades variables, y cuyas diferenciales son ámbas variables, pueden resultar de equaciones primitivas que contienen tres variables.*

Si por medio de las dos equaciones $d^2u = 0$, $d^2v = 0$, se eliminase una constante, ú otra cantidad qualquiera; resultaria una sola equacion entre z, y, dz, dy, d^2z, d^2y, la qual seria evidentemente derivada de las dos equaciones propuestas.

226. La equacion $A\frac{d^2y}{dy^2} + B\frac{d^2z}{dy^2} + C\frac{dz^2}{dy^2} + D\frac{dz}{dy} + E = 0$ (A, B, &c. son funciones de z é y), en la qual no se verifica la condicion $Ady + Bdz = 0$, y que por lo mismo (núm. 209.) no puede provenir de una equacion primitiva entre z é y; puede siempre referirse al caso en que z é y sean funciones implícitas de la variable independiente x; y dz, dy, d^2z, d^2y se consideren como las diferenciales de las mismas variables relativamente á x: pues si suponemos dx constante, y hacemos como antes $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dz}{dx} = p'$; tendrémos $q = \frac{d^2y}{dx^2}$, $q' = \frac{d^2z}{dx^2}$; por consiguiente, multiplicando la equacion propuesta por dy^2, y haciendo estas substituciones, se transforma en $Aq + Bq' + Cp'^2 + Dpp' + Ep^2 = 0$, cuya equacion solo contiene las cantidades variables y, z; y los coeficientes diferenciales de primero y segundo órden p, p'; q, q'.

Sea, por exemplo, la equacion $y^3\frac{d^2y}{dy^2} + z^3\frac{d^2z}{dy^2} + 6yz\frac{dz}{dy} = 0$, que segun vimos (núm. 211.) no cumple con la condicion $Ady + Bdz = 0$. Si suponemos que z é y son funciones implícitas de la variable independiente x, dicha equacion puede derivar de las dos equaciones $z^4 + y^4 + 4bx = 0$, $z^2 - y^2 = a$: pues si diferenciamos dos veces la primera, considerando dx como constante, tendrémos $z^3d^2z + y^3d^2y + 3z^2dz^2 + 3y^2dy^2 = 0$; y diferenciando la segunda, $zdz - ydy = 0$; ó elevándola á la segunda potencia $z^2dz^2 - 2zydzdy + y^2dy^2 = 0$; finalmente, eliminando $z^2dz^2 + y^2dy^2$, y dividiendo por dy^2, resultará la equacion propuesta.

De donde inferirémos, *que aunque una equacion diferencial de segundo órden entre dos variables* z, *é* y, *no cumpla con la condicion* Ady + Bdz = o; *no se puede por esto concluir que dicha equacion es absurda, ó que nada significa: solamente se puede asegurar, que la referida equacion no puede derivar de una relacion primitiva entre* z *é* y; *y que para satisfacerla es necesario suponer que estas variables son funciones implícitas de otra variable independiente.*

227. Quando una sola equacion $U = 0$, expresa la relacion de las tres cantidades variables x, y, z; dos qualesquiera de ellas se pueden considerar como independientes, y la tercera será una funcion implícita de aquellas. Sean x é y las variables independientes: z será funcion de ámbas variables; y quando una qualquiera de ellas, x por exemplo, varie y adquiera un incremento ó diferencia Δx; z variará y adquirirá la diferencia correspondiente $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$.

En este supuesto la equacion $U = 0$ expresará la relacion de las dos cantidades variables x, y z, de las quales la segunda es una funcion implícita de la primera, y por consiguiente tendrémos $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$ (núm. 198.), cuya equacion dará el coeficiente diferencial de z relativo á x.

Del mismo modo; diferenciando la equacion $U = 0$, en el supuesto de y sola variable y z funcion de y, resultará la equacion $\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$; de donde se inferirá el valor del coeficiente diferencial $\frac{dz}{dy}$.

Si se multiplica por dx la primera de las equaciones antecedentes, y la segunda por dy, y se toma la suma; tendrémos $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}\left(\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy\right) = 0$; pero $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = dz$; luego $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0$: de donde se infiere, que la

equacion $U = 0$ se puede diferenciar considerando U como funcion de tres variables independientes x, y, z. Pero es necesario tener presente, que la última equacion diferencial equivale á las dos equaciones $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$: pues si se substituye por dz su valor $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$; á causa de la independencia de las variables x é y, ó de sus diferenciales dx, dy, será necesario igualar á cero las cantidades que estas diferenciales multiplican; de donde resultarán dichas dos equaciones.

228. Los coeficientes diferenciales de segundo órden $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, y los de los órdenes superiores, se determinarán diferenciando las equaciones $\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dU}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dy} = 0$: y si en virtud de la notacion núm. 222., representamos la primera de estas equaciones por $\frac{d(U)}{dx} = 0$, y la segunda por $\frac{d(U)}{dy} = 0$; estas equaciones contendrán, del mismo modo que la propuesta, las tres variables x, y, z, y se podrán diferenciar del mismo modo que aquella.

Diferenciando primero $\frac{d(U)}{dx} = 0$, relativamente á x; U se podrá considerar como funcion de x y z, siendo z funcion de x sola, y tendrémos $\frac{d^2(U)}{dx^2}$, ó $\frac{d^2U}{dx^2} + 2\frac{d^2U}{dxdz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2U}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dU}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} = 0$. Diferenciando luego la misma equacion relativamente á y, ó la equacion $\frac{d(U)}{dy} = 0$ relativamente á x, y teniendo presente (núm. 189.) que $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$, tendrémos el mismo resultado $\frac{d^2(U)}{dydx}$, ó $\frac{d^2U}{dydx} + \frac{d^2U}{dydz}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2U}{dzdx}\frac{dz}{dy} + \frac{dU}{dz}\frac{d^2z}{dydx} = 0$. Finalmente; la equacion $\frac{d(U)}{dy}$, diferenciada relativamente á y, da $\frac{d^2(U)}{dy^2}$, ó $\frac{d^2U}{dy^2} + 2\frac{d^2U}{dydz}\frac{dz}{dy} + \frac{d^2U}{dz^2}\frac{dz^2}{dy^2} + \frac{dU}{dz}\frac{d^2z}{dy^2} = 0$: Pero como z es una funcion implícita de x é y, en la equacion $U = 0$; U lo será igualmente, y por consiguiente tendrémos (núm. 193.) $d^2(U) = \frac{d^2(U)}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2(U)}{dxdy} + \frac{d^2(U)}{dy^2}dy^2 = 0$; y en efecto, si se substituyen por $\frac{d^2(U)}{dx^2}$, $\frac{d^2(U)}{dxdy}$, $\frac{d^2(U)}{dy^2}$ los resultados que acabamos de hallar; dz en lugar de $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$; y d^2z

en lugar de $\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2$, se hallará la misma equacion que resultaria diferenciando la equacion $\frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = 0$, considerando z como funcion de las variables independientes de x, é y; y por lo mismo dx, y dy como constantes.

229. Como la equacion $U = 0$ tiene dos diferenciales primeras $\frac{d(U)}{dx} = 0$, y $\frac{d(U)}{dy} = 0$; se podrán eliminar dos cantidades constantes por medio de estas tres equaciones, y la equacion que resultare expresará la relacion de las variables x, y, z, y de los coeficientes diferenciales $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, independientemente de las constantes eliminadas.

Si á las tres equaciones antecedentes se añaden las de segundo órden $\frac{d^2(U)}{dx^2} = 0$, $\frac{d^2(U)}{dxdy} = 0$, $\frac{d^2(U)}{dy^2} = 0$, resultarán seis equaciones, por medio de las quales se podrán eliminar cinco constantes; y lo mismo dirémos de un mayor número de equaciones.

230. Por medio de la equacion $U = 0$ entre las tres variables x, y, z; y de sus diferenciales, no solamente se pueden eliminar cantidades constantes, sino tambien funciones de las variables independientes cuya forma no se conoce.

Sea por exemplo la equacion $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$, expresando $f\left(\frac{x}{y}\right)$ una funcion indeterminada de $\frac{x}{y}$ de qualquiera naturaleza que sea. Si hacemos $\frac{x}{y} = u$, tendrémos $z = f(u)$, $dz = duf'(u)$ (n. 186.), $du = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{y}$, $\frac{du}{dy} = -\frac{x}{y^2}$: pero siendo $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = \left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right)f'(u)$, será $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y}f'(u)$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{x}{y^2}f'(u)$, y eliminando $f'(u)$ resultará $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = 0$, cuya equacion conviene igualmente á $z = \frac{x}{y}$, $z =$ sen. $\frac{x}{y}$, $z =$ log. $\frac{x}{y}$, y en general á quantas funciones se pueden imaginar de $\frac{x}{y}$.

Pasando de las diferenciales de primer órden á las del segundo, resulta un número mayor de equaciones, por medio de las quales se podrán eliminar en muchos casos dos funciones indeterminadas. Pero este y otros asuntos los reservamos para *el cálculo integral* con el qual tienen una relacion inmediata.

De las equaciones de condicion que deben verificarse para que una funcion sea la diferencial de otra funcion.

231. En el núm. 190. hemos demostrado, que si $Adx + Bdy$ es la diferencial de una funcion z de dos variables independientes x, é y; el coeficiente diferencial $\frac{dA}{dy}$ es idénticamente el mismo que $\frac{dB}{dx}$. De donde inferirémos, *que si en una funcion diferencial* Adx + Bdy, *no se verifica la equacion* $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; *dicha funcion no será la diferencial de una funcion de dos variables independientes* x, *é* y.

Sea por exemplo la funcion diferencial $xydx + x^2dy$. Será $A = xy$, $B = x^2$, $\frac{dA}{dy} = x$, y $\frac{dB}{dx} = 2x$; por consiguiente la funcion propuesta no puede ser la diferencial de una funcion de x é y.

Tambien inferirémos de lo demostrado; (núm. 196.); que si en una funcion diferencial $Adx + Bdy + Cdz$, no se verifican las tres equaciones idénticas $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, y $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$; la funcion propuesta no podrá ser la diferencial de una funcion primitiva de las tres variables independientes x, y, z.

En general: *si la funcion diferencial* Adx + Bdy + Cdz + &c. *tuviese* n *variables; resultarian* $\frac{n(n-1)}{2}$ *de estas equaciones de condicion que deberian verificarse para que dicha funcion fuese la diferencial de una funcion primitiva de* n *variables independientes* x, y, z, &c.

232. Sea $Gdx + Hdy$ una funcion diferencial de primer órden que contiene dos variables independientes x é y, y que llamarémos z. Diferenciándola suponiendo constantes dx, y dy, hallarémos $dz = \frac{dG}{dx}dx^2 + \frac{dG}{dy}dxdy + \frac{dH}{dx}dydx + \frac{dH}{dy}dy^2 = \frac{dG}{dx}dx^2 + \left(\frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dx}\right)dxdy + \frac{dH}{dy}dy^2$. Sentado esto; supongamos que se quiera averiguar si una funcion propuesta de segundo órden $Idx^2 + Kdxdy + Ldy^2$ es la diferencial de una funcion de primer órden considerando como constantes dx y dy. Comparándola con dz, tendrémos las tres equaciones $I = \frac{dG}{dx}$, $K = \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dx}$, y $L = \frac{dH}{dy}$. Diferenciando la primera relativamente á y, y la segunda relativamente á x; á causa de $\frac{d^2G}{dxdy} = \frac{d^2G}{dydx}$, podrémos eliminar G, y tendrémos $\frac{dK}{dx} = \frac{dI}{dy} + \frac{d^2H}{dx^2}$. Para eliminar H, diferenciarémos esta equacion relativa-

mente á y; y substituyendo por $\frac{d^3H}{dx^2dy}$ su valor $\frac{d^2L}{dx^2}$ que se encuentra diferenciando dos veces la equacion $L=\frac{dH}{dy}$ relativamente á x; resultará la equacion de condicion $\frac{d^2K}{dxdy}=\frac{d^2I}{dy^2}+\frac{d^2L}{dx^2}$ que debe verificarse para que la funcion $Idx^2+Kdxdy+Ldy^2$ sea la diferencial de una funcion de primer órden.

Sea por exemplo $3x^2dx^2+2y^2xdxdy+2x^2ydy^2$ la funcion propuesta. Comparándola con la antecedente, será $I=3x^2$, $K=2y^2x$, $L=2x^2y$, $\frac{d^2I}{dy^2}=0$, $\frac{d^2K}{dxdy}=4y$, $\frac{d^2L}{dx^2}=4y$; de donde resulta la equacion idéntica $4y=4y$, y por consiguiente que la funcion propuesta es la diferencial de una funcion de primer órden. En efecto, dicha funcion es la diferencial de $x^3dx+x^2y^2dy$.

La funcion $x^3dx^2+x^2ydxdy+y^3dy^2$, no puede ser la diferencial de una funcion de primer órden, por no ser idéntica la equacion $2x=6y+6x$ que de ella resulta.

Del mismo modo podriamos hallar las equaciones de condicion relativas á las funciones de los órdenes superiores en el supuesto de considerar como constantes dx, y dy; y tambien las que pertenecen al supuesto de tratar como variables estas diferenciales: pero no seguirémos estos métodos particulares, porque nos parece mejor emplear el método general siguiente, el qual se aplica á las funciones de todos los órdenes, y que contienen un número qualquiera de variables.

233. Supongamos que estas variables sean x, y, z, &c. de las quales x varía uniformemente; y $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$ &c.; $\frac{dx}{dz}=p'$, $\frac{dp'}{dx}=q'$, $\frac{dq'}{dx}=r'$, &c.; &c. Esto supuesto, sea $'\beta$ una funcion diferencial que contiene las variables x, y, z, &c., y los coeficientes diferenciales p, q, r, &c. p', q', r', &c.; si la diferenciamos y dividimos por la diferencial constante dx; á causa de $\frac{dr}{dx}=s$, $\frac{dr'}{dx}=s'$, la expresion $\frac{1}{dx}d'\beta$ contendrá las nuevas variables s, s', y será

$$\frac{1}{dx}d'\beta=\left\{\begin{array}{l} \frac{d'\beta}{dx}+\frac{d'\beta}{dy}p+\frac{d'\beta}{dp}q+\frac{d'\beta}{dq}r+\frac{d'\beta}{dr}s+\&c.\\ \qquad+\frac{d'\beta}{dz}p'+\frac{d'\beta}{dp'}q'+\frac{d'\beta}{dq'}r'+\frac{d'\beta}{dr'}s'+\&c.\\ \qquad+\&c.\end{array}\right.$$

Hagamos para simplificar $\frac{1}{dx}d'\beta=\beta$, y $d\beta=\left\{\begin{array}{l} Adx+Bdy+Cdp+Ddq+Edr+Fds+\&c.\\ \qquad+B'dz+C'dp'+D'dq'+E'dr'+F'ds'+\&c.\\ \qquad+\&c.\end{array}\right.$

será

$$B=\frac{d\beta}{dy}\ldots\ldots=\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2{}'\beta}{dxdy}+\frac{d^2{}'\beta}{dy^2}p+\frac{d^2{}'\beta}{dpdy}q+\frac{d^2{}'\beta}{dqdy}r+\frac{d^2{}'\beta}{drdy}s+\&c.\\ \qquad+\frac{d^2{}'\beta}{dzdy}p'+\frac{d^2{}'\beta}{dp'dy}q'+\frac{d^2{}'\beta}{dq'dy}r'+\frac{d'\beta}{dr'dy}s+\&c.\\ \qquad+\&c.\end{array}\right\}=\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dy};\quad C=\frac{d\beta}{dp}\ldots\ldots$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2{}'\beta}{dxdp}+\frac{d'\beta}{dy}+\frac{d^2{}'\beta}{dydp}p+\frac{d^2{}'\beta}{dp^2}q+\frac{d^2{}'\beta}{dqdp}r+\frac{d^2{}'\beta}{drdp}s+\&c.\\ \qquad+\frac{d^2{}'\beta}{dzdp}p'+\frac{d^2{}'\beta}{dp'dp}q'+\frac{d^2{}'\beta}{dq'dp}r'+\frac{d^2{}'\beta}{dr'dp}s'+\&c.\\ \qquad+\&c.\end{array}\right\}=\ldots\ldots$$

$$\frac{d'\beta}{dy}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dp};\quad D=\frac{d\beta}{dq}\ldots\ldots$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \frac{d^2{}'\beta}{dxdq}+\frac{d^2{}'\beta}{dydq}p+\frac{d'\beta}{dp}+\frac{d^2{}'\beta}{dpdq}q+\frac{d^2{}'\beta}{dq^2}r+\frac{d^2{}'\beta}{drdq}s+\&c.\\ \qquad+\frac{d^2{}'\beta}{dzdq}p'+\frac{d^2{}'\beta}{dp'dq}q'+\frac{d^2{}'\beta}{dq'dq}r'+\frac{d^2{}'\beta}{dr'dq}s'+\&c.\\ \qquad+\&c.\end{array}\right\}=\ldots\ldots$$

$$\frac{d'\beta}{dp}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dq}.$$

Del mismo se hallaria $E=\frac{d\beta}{dr}=\frac{d'\beta}{dq}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dr}$: pero quando se llegue al coeficiente F de la última diferencial parcial Fds; como $'\beta$ no incluye s, será $F=\frac{d'\beta}{dr}$.

Reuniendo estos resultados; y observando que los que pertenecen á los coeficientes B', C', &c. son semejantes; formarémos estas series de equaciones

$$\begin{array}{lll} B=\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dy} & B'=\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dz} & \&c.\\ C=\frac{d'\beta}{dy}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dp} & C'=\frac{d'\beta}{dz}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dp'} & \&c.\\ D=\frac{d'\beta}{dp}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dq} & D'=\frac{d'\beta}{dp'}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dq'} & \\ E=\frac{d'\beta}{dq}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dr} & E'=\frac{d'\beta}{dq'}+\frac{1}{dx}d.\frac{d'\beta}{dr'} & \\ F=\frac{d'\beta}{dr} & F'=\frac{d'\beta}{dr'} & \end{array}$$

La funcion $'\beta$ se puede eliminar en cada una de estas series de equaciones. Considerémos desde luego las que contiene la primera relativa á la variable y. Diferenciando y dividiendo por dx la segunda equacion de esta serie, y restándola de la primera, resultará $B - \frac{1}{dx}dC = -\frac{1}{dx^2}d^2.\frac{d'\mathcal{C}}{dp}$: añadiendo á este resultado la diferencial segunda de la tercera equacion dividida por dx^2, tendrémos $B - \frac{1}{dx}dC + \frac{1}{dx^2}d^2D = \frac{1}{dx^3}d^3.\frac{d'\mathcal{C}}{dq}$: &c.

Si la funcion $\mathcal{C}$ solo fuese de segundo órden; $'\mathcal{C}$ lo seria del primero, y por consiguiente solo incluiria el coeficiente diferencial p; $\frac{d'\mathcal{C}}{dq}$, seria $= 0$ en este supuesto; y por lo mismo tendriamos relativamente á la variable y la equacion de condicion $B - \frac{1}{dx}dC + \frac{1}{dx^2}d^2D = 0$.

Si $\mathcal{C}$ fuese de tercer órden; $'\mathcal{C}$ lo seria del segundo, é incluiria solamente los coeficientes diferenciales p, q: y por consiguiente la equacion de condicion seria $B - \frac{1}{dx}dC + \frac{1}{dx^2}d^2D - \frac{1}{dx^3}d^3E = 0$.

En general; relativamente á la variable y tendrémos la equacion de condicion $B - \frac{1}{dx}dC + \frac{1}{dx^2}d^2D - \frac{1}{dx^3}d^3E + \frac{1}{dx^4}d^4F - \&c. = 0$.

Como la serie de equaciones perteneciente á la variable z, es semejante á la de la variable y; es evidente que relativamente á dicha variable tendrémos la equacion $B' - \frac{1}{dx}dC' + \frac{1}{dx^2}d^2D' - \ldots\ldots \frac{1}{dx^3}d^3E' + \frac{1}{dx^4}d^4F' - \&c. = 0$: y en general se echa de ver, *que para cada una de las variables que contiene la funcion $\mathcal{C}$, habrá una de estas equaciones de condicion; excepto para la variable cuya diferencial primera se supone constante con la mira de simplificar los cálculos, y que en nuestro caso es* x.

Las equaciones antecedentes significan lo mismo que $\frac{d\mathcal{C}}{dy} - \ldots \frac{1}{dx}d.\frac{d\mathcal{C}}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2.\frac{d\mathcal{C}}{dq} - \frac{1}{dx^3}d^3.\frac{d\mathcal{C}}{dr} + \frac{1}{dx^4}d^4.\frac{d\mathcal{C}}{ds} - \&c. = 0$.
$\frac{d\mathcal{C}}{dz} - \frac{1}{dx}d.\frac{d\mathcal{C}}{dp'} + \frac{1}{dx^2}d^2.\frac{d\mathcal{C}}{dq'} - \&c. = 0$, &c.

234. Tales son las equaciones de condicion que deben verificarse para que una funcion $\mathcal{C}dx$ de un órden qualquiera, y que contiene un número qualquiera de variables x, y, z, &c., sea la diferencial de una funcion $'\mathcal{C}$ del órden inmediatamente inferior, en el supuesto de que x varíe uniformemente. Por lo que; *quando se quiera averiguar si una funcion propuesta* $\mathcal{C}$dx *es la diferencial de una funcion del*

órden inmediatamente inferior; despues de haber hecho $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, *&c., &c., se formarán los coeficientes diferenciales parciales* B $\left(= \frac{d\mathcal{C}}{dy}\right)$, C $\left(= \frac{d\mathcal{C}}{dp}\right)$, &c. B$'$ $\left(= \frac{d\mathcal{C}}{dz}\right)$, C$'$ $\left(= \frac{d\mathcal{C}}{dp'}\right)$, *&c., &c.; y si substituidos en las equaciones de condicion antecedentes, las reducen á cero, la funcion propuesta será efectivamente la diferencial de una funcion del órden inmediatamente inferior: pero si todos los términos de estas equaciones no se destruyen en virtud de dicha substitucion; la funcion propuesta no será la diferencial de una funcion del órden inmediatamente inferior.*

Sea por exemplo $6y^2dxdy + 6xydy^2 + 3xy^2d^2y$ la funcion propuesta. Transformándola en $3dx^2\,(2y^2p + 2xyp^2 + xy^2q)$, y omitiendo el factor constante $3dx^2$, harémos $2y^2p + 2xyp^2 + xy^2q = \mathcal{C}$, y tendrémos $B = 4yp + 2xp^2 + 2xyq$, $C = 2y^2 + 4xyp$, $D = xy^2$, $\frac{1}{dx}dC = 8yp + 4xp^2 + 4xyq$, $\frac{1}{dx^2}d^2D = 4yp + 2xp^2 + 2xyq$; cuyos valores cumplen con la condicion $B - \frac{1}{dx}dC + \frac{1}{dx^2}d^2D = 0$, y por consiguiente la funcion propuesta será la diferencial de una funcion de primer órden. Dicha funcion es en efecto la diferencial de $(y^3 + 3xy^2p)\,dx$.

Sirva de segundo exemplo la funcion $Idx^2 + Kdxdy + Ldy^2 + Md^2y = (I + Kp + Lp^2 + Mq)\,dx^2$. Haciendo $I + Kp + Lp^2 + Mq = \mathcal{C}$, tendrémos $\frac{d\mathcal{C}}{dy} = \frac{dI}{dy} + \frac{dK}{dy}p + \frac{dL}{dy}p^2 + \frac{dM}{dy}q$, $\frac{d\mathcal{C}}{dp} = K + 2Lp$, $\frac{d\mathcal{C}}{dq} = M$; y substituyendo estas cantidades en la equacion $\frac{d\mathcal{C}}{dy} - \frac{1}{dx}d.\frac{d\mathcal{C}}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2.\frac{d\mathcal{C}}{dq} = 0$, se transformará en $\frac{dI}{dy} + \frac{dK}{dy}p + \frac{dL}{dy}p^2 + \frac{dM}{dy}q - \frac{1}{dx}d\,(K + 2Lp) + \frac{1}{dx^2}d^2.M = 0$. Como esta equacion debe ser idéntica; despues de efectuadas las diferenciaciones indicadas se igualarán á cero las cantidades que no incluyen p, y las que multiplican p, p^2, q, y resultarán las quatro equaciones $\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{dI}{dy} - \frac{dK}{dx} = 0$, $\frac{dL}{dx} - \frac{d^2M}{dxdy} = 0$, $\frac{dL}{dy} - \frac{d^2M}{dy^2} = 0$, y $L - \frac{dM}{dy} = 0$, que á causa de que la segunda y la tercera, son una conseqüencia inmediata de la quarta, se reducen solamente á dos esencialmente distintas $\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{dI}{dy} - \frac{dK}{dx} = 0$, $L - \frac{dM}{dy} = 0$.

235. Sea $'\mathcal{C}dx$ la diferencial de $''\mathcal{C}$; á causa de $\mathcal{C}dx = d'\mathcal{C}$, será $\mathcal{C}dx^2$ la diferencial segunda de la funcion $''\mathcal{C}$, y tendrémos relativamente á la variable y las dos equaciones (a) .... $B - \frac{1}{dx}dC + \frac{1}{dx^2}$

$d^2D - \frac{1}{dx^3} d^3E + \frac{1}{dx^4} d^4F -$ &c. $= 0$, $\frac{d'\mathcal{C}}{dy} - \frac{1}{dx} d . \frac{d'\mathcal{C}}{dp} + \frac{1}{dx^2}$ $d^2 . \frac{d'\mathcal{C}}{dq} - \frac{1}{dx^3} d^3 . \frac{d'\mathcal{C}}{dr} +$ &c. $= 0$: pero de la serie de equaciones del núm. 233. se infiere $\frac{d'\mathcal{C}}{dy} = C - \frac{1}{dx} dD + \frac{1}{dx^2} d^2E - \frac{1}{dx^3} d^3F$ $+$ &c., $\frac{d'\mathcal{C}}{dp} = D - \frac{1}{dx} dE + \frac{1}{dx^2} d^2F -$ &c., $\frac{d'\mathcal{C}}{dq} = E - \frac{1}{dx} dF$ $+$ &c., $\frac{d'\mathcal{C}}{dr} = F -$ &c.; y substituyendo estos valores en la equacion antecedente se transforma en

(b) ...... $C - \frac{2}{dx} dD + \frac{3}{dx^2} d^2E - \frac{4}{dx^3} d^3F +$ &c. $= 0$.

Las equaciones (a), y (b) serán idénticas siempre que la funcion $\mathcal{C}dx^2$ sea la diferencial segunda de una funcion qualquiera.

Siendo por exemplo $C = 2y^2 + 4xyp$, y $D = xy^2$ en la funcion diferencial $6y^2dxdy + 6xydy^2 + 3xy^2d^2y$; será $dD = y^2dx + 2xydy$; y por consiguiente la equacion $C - \frac{2}{dx} dD = 0$ será idéntica igualmente que la equacion $B - \frac{1}{dx} dC + \frac{1}{dx^2} d^2D = 0$; y la funcion propuesta la diferencial segunda de una funcion primitiva. Esta funcion es xy^3.

236. Si $\mathcal{C}dx^3$ es la diferencial tercera de una funcion qualquiera, $'\mathcal{C}dx^2$ será su diferencial segunda; por consiguiente tendrémos la equacion $\frac{d'\mathcal{C}}{dp} - \frac{2}{dx} d . \frac{d'\mathcal{C}}{dq} + \frac{3}{dx^2} d^2 . \frac{d'\mathcal{C}}{dr} - \frac{4}{dx^3} d^3 . \frac{d'\mathcal{C}}{ds} +$ &c. $= 0$, y substituyendo por $\frac{d'\mathcal{C}}{dp}$, $\frac{d'\mathcal{C}}{dq}$, &c. sus valores respectivos resultará la equacion (c) .... $D - \frac{3}{dx} dE + \frac{6}{dx^2} d^2F -$ &c. $= 0$, que será idéntica del mismo modo que las equaciones (a), (b), en el supuesto de ser $\mathcal{C}dx^3$ la diferencial tercera de una funcion qualquiera.

Del mismo modo se hallarán las demas equaciones que deben ser idénticas quando la funcion propuesta sea la diferencial quarta, quinta, &c. de otra funcion.

Las equaciones (a), (b), (c), se refieren únicamente á la variable y: pero se echa de ver, que á cada una de las otras variables (excepto la que crece uniformemente) corresponde un número igual de equaciones semejantes á las antecedentes.

237. Si V representa una funcion homogénea de dimension n de las variables x, y, &c.; y se substituye ax en lugar de x; ay en lugar de y; &c.; V se transformará en a^nV, ó haciendo $a = 1 + k$, en $(1 + k)^nV = V(1 + nk + \frac{n(n-1)}{2}k^2 +$ &c.$)$. Pero como en este supuesto, x se transforma en $x + kx$; y, en $y + ky$; &c.; V se

transformará tambien (núm. 187.) en $V + \frac{dV}{dx}kx + \frac{dV}{dy}ky +$ &c. $+ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}k^2x^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}k^2xy + \frac{d^2V}{dy^2}k^2y^2 + \text{\&c.}\right) +$ &c.: por consiguiente, igualando estos dos resultados, y comparando las cantidades afectas de una misma potencia de la indeterminada k, resultará

$$\frac{dV}{dx}x + \frac{dV}{dy}y + \text{\&c.} = nV$$
$$\frac{d^2V}{dx^2}x^2 + 2\frac{d^2V}{dxdy}xy + \frac{d^2V}{dy^2}y^2 + \text{\&c.} = n(n-1)V$$
&c.

La primera de estas equaciones manifiesta una propiedad notable de las funciones homogéneas, la qual nos será muy útil en el cálculo integral; y las demas son conseqüencias de aquella.

Sea por exemplo $V = (x^3 + xy^2)^{\frac{3}{2}}$: será $n = \frac{9}{2}$, $\frac{dV}{dx} = \frac{3}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{1}{2}}(3x^2 + y^2)$, $\frac{dV}{dy} = \frac{3}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{1}{2}} \times 2xy$; y en virtud de dicha propiedad deberá ser $\frac{3}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{1}{2}}(3x^2 + y^2)x + \frac{3}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{1}{2}} \times 2xy^2 = \frac{9}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{3}{2}}$. En efecto el primer miembro de la equacion antecedente se puede transformar en $\frac{3}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{1}{2}}$ $(3x^3 + xy^2 + 2xy^2) = \frac{9}{2}(x^3 + xy^2)^{\frac{3}{2}}$.

Si V fuese $= \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^3y^3}$; tendriamos $n = -\frac{11}{2}$, $\frac{dV}{dx} = -$ $3x^{-4}y^{-3}(x+y)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-3}y^{-3}(x+y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-5x-6y}{2x^4y^3(x+y)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{dV}{dy} = \frac{-5y-6x}{2x^3y^4(x+y)^{\frac{1}{2}}}$; y por consiguiente $\frac{-5x-6y}{2x^3y^3(x+y)^{\frac{1}{2}}} +$ .... $\frac{-5y-6x}{2x^3y^3(x+y)^{\frac{1}{2}}}$ deberá ser $= -\frac{11}{2} \times \frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^3y^3}$. La identidad de estas dos cantidades se reconocerá inmediatamente haciendo en la primera las reducciones correspondientes.

Si n fuese $= 0$, tendriamos $\frac{dV}{dx}x + \frac{dV}{dy}y +$ &c. $= 0$; y suponiendo V funcion solamente de x é y, $\frac{dV}{dx} : \frac{dV}{dy} = -\frac{y}{x}$.

Sea $V = \frac{ax^2 + xy}{y^2 + bxy}$: tendrémos $\frac{dV}{dx} = \frac{2axy^2 + abx^2y + y^3}{(y^2 + bxy)^2}$, $\frac{dV}{dy} =$ $-\frac{2ax^2y + abx^3 + xy^2}{(y^2 + byx)^2}$: por consiguiente ....

$\frac{(2axy^2 + abx^2y + y^3)x - (2ax^2y + abx^3 + xy^2)y}{(y^2 + bxy)^2}$ es igual á cero; y el valor de $\frac{dV}{dx}$ dividido por el de $\frac{dV}{dy}$, igual á $-\frac{y}{x}$.

238. Supongamos V funcion de x é y de dimension n, y $dV = Adx + Bdy$. A causa de $Ax + By = nV$, será $d(Ax + By) = n(Adx + Bdy)$; de donde se infiere efectuando la diferenciacion indicada $\frac{dA}{dx}x + \frac{dB}{dx}y = (n-1)A$, $\frac{dB}{dy}y + \frac{dA}{dy}x = (n-1)B$. Pero $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; luego $\frac{dA}{dx}x + \frac{dA}{dy}y = (n-1)A$, y $\frac{dB}{dy}x + \frac{dB}{dx}y = (n-1)B$; luego A, B, y en general todas las diferenciales parciales de una funcion homogénea de la dimension qualquiera n; son funciones homogéneas de la dimension $n-1$.

239. Sean A, B funciones homogéneas de dimension $n-1$; y $Adx + Bdy$ la diferencial de una funcion V. Será $\frac{dA}{dx}x + \frac{dA}{dy}y = (n-1)A$, $\frac{dB}{dx}x + \frac{dB}{dy}y = (n-1)B$, ó (á causa de $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$) $\frac{dA}{dx}x + \frac{dB}{dx}y = (n-1)A$, $\frac{dA}{dy}x + \frac{dB}{dy}y = (n-1)B$; de donde se infiere multiplicando la primera equacion por dx, la segunda por dy, y juntándolas $n(Adx + Bdy) = x\left(\frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy\right) + Adx + y\left(\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy\right) + Bdy = xdA + Adx + ydB + Bdy = d(Ax + By)$: luego *si* A, *y* B *son funciones homogéneas de dimension* n − 1, *y* Adx + Bdy *una diferencial exácta; será* n(Adx + Bdy) = d(Ax + By).

240. He aquí todo quanto nos hemos propuesto exponer del cálculo diferencial en estas Instituciones: le hemos fundado constantemente en las consideraciones de los límites de las cantidades ó de sus razones, pareciéndonos este método el mas elegante, riguroso y sencillo que se puede emplear en la parte metafísica del cálculo diferencial, y de sus aplicaciones. Los Matemáticos antiguos, y particularmente *Archîmedes*, cuya exâctitud y rigor geométrico han sido tan justamente admirados, le empleáron continuamente; y al método de los límites debe seguramente aquel Geómetra la mayor parte de los descubrimientos que hizo en la Geometría, y que hiciéron su nombre inmortal (1).

Sin embargo; casi todos los tratados del cálculo diferencial que se han escrito desde que *Newton* y *Lebnitz* le inventáron; se fundan sobre principios diferentes. Los Matemáticos Ingleses, siguiendo á *Newton*, le llaman Método de las fluxîones; y establecen sus principios sobre las consideraciones del movimiento; en igual que los Geómetras del continente, siguiendo las ideas de *Leibnitz*, le llaman método de los infinitamente pequeños, y le fundan en la consideracion de las cantidades infinitas é infinitamente pequeñas. Del método de las fluxîones, solo dirémos que los lectores que desearen conocerle, le hallarán explicado muy por menor en el excelente tratado de *Maclaurin*: y por lo que toca al de los infinitamente pequeños, vamos á dar una idea sucinta de él; y luego manifestarémos con algunas aplicaciones á la teórica de las líneas curvas, la causa de ser sus resultados los mismos que se hallan por el método que hemos seguido constantemente en estas Instituciones.

(1) *Véanse sus obras, y principalmente su excelente tratado de la Esfera y del Cilindro.*

241. La primera hypótesis que se hace en el cálculo diferencial considerado como el método de los infinitamente pequeños, es que las cantidades variables x, y, &c., crecen por incrementos ó diferencias infinitamente pequeñas dx, dy, &c., á las quales llaman *diferenciales*, y se deben considerar como nulas respecto de las cantidades finitas: de manera que estas diferenciales solo se pueden comparar entre sí. De aquí resulta que las cantidades $(dx)^2$, $dxdy$, $(dy)^2$, son infinitamente menores que dx, ó dy: pues siendo $1 : dx :: dx : (dx)^2$; la cantidad $(dx)^2$ será infinitamente pequeña respecto de dx. Por esta razon se llaman estas cantidades *infinitamente pequeñas de segundo órden*; y deben considerarse como nulas respecto de las de primer órden dx, dy. Por la misma razon, las cantidades $(dx)^3$, ó simplemente dx^3, dy^3, dx^2dy, &c. se llaman *infinitamente pequeñas de tercer órden*, y se deben despreciar relativamente á las de segundo órden.

En general; *una cantidad infinitamente pequeña de un órden qualquiera, es infinitamente pequeña respecto de otra cantidad infinitamente pequeña de un órden menos elevado; y por lo mismo la primera de estas cantidades se debe considerar como nula, relativamente á la segunda.*

Estos supuestos dan una facilidad suma para hallar las diferenciales de qualesquiera funciones: pues es evidente, que despues de haber substituido $x + dx$, á x; $y + dy$ á y; &c. en una funcion qualquiera; al tiempo de transformar en serie la funcion que resulta, solo se deben conservar los términos afectos de dx, dy, &c., despreciando los demas como infinitamente pequeños respecto de aquellos. Por exemplo si la funcion propuesta fuese xy; haciéndola igual á z tendrémos $z + dz = (x + dx)(y + dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$, ó $dz = ydx + xdy + dxdy$; y despreciando la cantidad $dxdy$ por ser infinitamente pequeña relativamente á las demas, resulta dz ó $d.xy = ydx + xdy$.

Por medio de esta fórmula se puede hallar la diferencial de una funcion algebráica qualquiera. Si por exemplo hacemos $y = x$; será $dy = dx$, y por consiguiente $d.x^2 = 2xdx$; del mismo modo se hallaria haciendo $y = x^2$, $d . x^3 = 3x^2dx$; y en general siendo n un número entero positivo, $d . x^n = nx^{n-1}dx$.

La diferencial de x^n en el supuesto de ser n un número qualquiera, se puede hallar directamente por medio de la fórmula del binomio de *Newton*: pues si hacemos $y = x^n$, tendrémos $y + dy = (x + dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}dx^2 + \&c.$, de donde se infiere $dy = nx^{n-1}dx + n\frac{n-1}{2}x^{n-2}dx^2 + \&c.$; y despreciando los términos multiplicados por dx^2, dx^3; &c. como infinitamente pequeños respecto del primero, resulta $dy = d . x^n = nx^{n-1}dx$.

En general; *si* y *es una funcion qualquiera de* x; *y suponemos que* x *adquiere el incremento infinitamente pequeño* dx; *el incremento correspondiente* dy *será en virtud de lo dicho (núm. 91.) igual á* $Adx + Bdx^2 + Cdx^3 + \&c.$, (*representando* A, B, C, &c. *las mismas funciones que en aquel número*), *y suprimiendo los términos afectos de las cantidades infinitamente pequeñas de segundo, tercero, &c. órden; quedará* $dy = Adx$, *y* $\frac{dy}{dx} = A$.

242. Supongamos que siendo dada una relacion qualquiera entre x é y; adquieran estas cantidades los incrementos infinitamente pequeños respectivos dx, dy; es constante que la relacion de estos incrementos se podrá expresar por la equacion $Adx + Bdy + Cdx^2 + Ddxdy + Edy^2 + \&c. = 0$, siendo A, B, C, &c. funciones indeterminadas de x é y, del mismo modo que en el núm. 31.; por consiguiente despreciando las cantidades infinitamente pequeñas de segundo órden, y las de los órdenes superiores, será $Adx + Bdy = 0$, y $\frac{dy}{dx} = -\frac{A}{B}$. Estos resultados son idénticamente los mismos que hallamos por el método de los límites, y debe necesariamente ser así; pues como las operaciones que se hacen en ámbos métodos para hallar $\frac{dy}{dx}$, son en el fondo las mismas; deben forzosamente conducir á un mismo resultado.

243. El método de los infinitamente pequeños facilita igualmente la diferenciacion de las funciones transcendentes. En las funciones circulares por exemplo, se considera el arco infinitamente pequeño, como igual á su seno ó á su tangente; y el coseno, como igual al radio; de donde resulta, que si fuese $y =$ sen. x, seria $y + dy =$ sen. $(x + dx) =$ sen. x cos. $dx +$ cos. x sen. $dx =$ sen. $x + dx$ cos. x; por consiguiente, $dy = dx$ cos. x, y $\frac{dy}{dx} =$ cos. x; lo mismo que por el método de los límites. Del mismo modo hallariamos la diferencial de cos. x, y en general la de una funcion qualquiera.

244. Otro supuesto del método de los infinitamente pequeños es, que las cantidades infinitamente pequeñas ó diferenciales dx, dy, &c. tienen sus diferenciales respectivas d^2x, d^2y, &c. las quales se consideran como infinitamente pequeñas respecto de las primeras, y se llaman *las diferenciales segundas de* x, y, *&c.*: por consiguiente, estas diferenciales son infinitamente pequeñas de segundo órden; y por lo mismo homogéneas con dx^2, dy^2, $dxdy$, &c.

Las diferenciales segundas d^2x, d^2y, &c. tienen por diferenciales d^3x, d^3y, &c. las quales son las diferenciales terceras de x, y, &c. é infinitamente pequeñas de tercer órden; y así continuando al infinito.

De aquí se infiere; que las diferenciales segundas se hallarán considerando las diferenciales primeras como nuevas variables, y diferenciándolas del mismo modo que se diferencian las variables x, y, &c. para determinar las diferenciales primeras. Por exemplo, si fuese $y = x^n$: seria $dy = nx^{n-1}dx$; y diferenciando esta equacion considerando dx, dy, como nuevas variables, hallarémos $d^2y = n(n-1)x^{n-2}dx^2 + nx^{n-1}d^2x$. Si se supone constante la diferencial primera dx; la diferencial segunda d^2x será $= 0$, y por consiguiente $d^2y = n(n-1)x^{n-2}dx^2$; y si en vez de suponer dx constante, se supone que lo es dy; será $n(n-1)x^{n-2}dx^2 + nx^{n-1}d^2x = 0$, lo mismo que en el núm. 217.

245. Basta lo dicho para manifestar los principios en que se funda el cálculo diferencial considerado como el método de los infinitamente pequeños; y las operaciones que en él se practican para diferenciar las funciones de las cantidades variables. Por poco que se reflexîone sobre estas operaciones, se verá que (segun observamos antes) en el fondo son las mismas que las que prescribe el método de los límites, y por consiguiente deben ser los mismos los resultados en ámbos métodos. Pero en la metafisica de dichos métodos, hay una diferencia muy notable: el que seguimos en estas Instituciones, se funda sobre principios simples é incontestables, quales son la consideracion de las diferencias de las cantidades variables, y los límites de sus razones; en igual que el otro se funda en las nociones vagas é imperfectas de las cantidades infinitamente pequeñas de las quales es imposible formar idea exâcta; y por lo mismo las demostraciones de dicho método carecen de la exâctitud y rigor que caracterizan las Ciencias matemáticas.

Los lectores qué desearen conocer por menor el cálculo diferencial y sus aplicaciones segun el método de los infinitamente pequeños, lo lograrán en el estudio del análisis de los infinitamente pequeños *del Marques del Hospital*.

246. En las aplicaciones del cálculo diferencial por el método de los infinitamente pequeños; se hacen algunos supuestos análogos á los de dicho cálculo: así para aplicarle á las líneas curvas, se supone que una qualquiera AMd (*fig.* 78.) de estas líneas, es un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños Aa, ab, bM, &c.; los quales son *los elementos ó diferenciales de la curva*; y que la prolongacion de uno qualquiera de ellos Mc forma la tangente MT en el punto M: ó que un arco infinitamente pequeño MM' de una curva qualquiera AMF (*fig.* 76.) se confunde con la cuerda correspondiente MM': que la superficie $AP'M'$ comprehendida entre la abscisa AP', la ordenada correspondiente $P'M'$, y la porcion AMM' de la curva; se compone de una infinidad de trapecios infinitamente pequeños como $MPP'M'$, los quales son las diferenciales de dicha superficie: &c. Estos supuestos facilitan mucho las aplicaciones del cálculo diferencial, y simplifican los cálculos: pues si suponemos por exemplo, que desde los extremos M, c del lado infinitamente pequeño Mc de la curva AMd (*fig.* 78.) se baxan las perpendiculares MP, cp, al exe AB de las abscisas, y se tira la Mm paralela á dicho exe; llamando AP, x; PM, y; será Pp el incremento infinitamente pequeño ó diferencial dx de la abscisa; mc la diferencial dy de la ordenada, y los triángulos semejantes cmM, MPT dan $dy : dx :: y :$ á la subtangente $PT = y\frac{dx}{dy}$. Pero como por mas pequeño que se suponga el arco MaM' (*fig.* 76.) de una curva, jamas se confundirá exâctamente con la cuerda correspondiente MM'; la parte PS del exe de las abscisas comprehendida entre el punto P y el punto S de la cuerda MM' prolongada, jamas llegará á ser exâctamente igual á la subtangente PT: así, á primera vista este modo de determinar la subtangente, mas parece una aproxîmacion, que un método rigoroso. Mas el supuesto que se hace en el cálculo para determinar la diferencial dy; esto es, que se deben despreciar los términos que multiplican las cantidades infinitamente pequeñas de segundo órden, y de los órdenes superiores dx^2, dx^3, &c.; reduciendo á cero la diferencia TS entre la línea PS, y la subtangente PT; corrige el error que resulta de suponer la curva AMF un polígono de una infinidad de lados infinitamente pequeños como MM'; y por consiguiente justifica dicho supuesto. En efecto: si suponemos $AP = x$, $PM = y$, $PP' = \Delta x$, $nM' = \Delta y$; y $\frac{dy}{dx} = A$, $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = B$, &c., tendrémos $\Delta y = A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 +$ &c., y en virtud de los triángulos semejantes $M'nM$, MPS, $PS = \dots\dots$ $\frac{y}{A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c.}$. Pero si al mismo tiempo se supone que PP' ($= \Delta x$), es una cantidad infinitamente pequeña; ó lo que es lo mismo (núm. 241.), que Δx, Δx^2, &c. se consideren como nulas relativamente á la cantidad finita A; la expresion de PS se reducirá á $\frac{y}{A} = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = y\frac{dx}{dy}$; MS se confundirá con MT, y por consiguiente PT será igual á $y\frac{dx}{dy}$.

Lo mismo se puede demostrar de este otro modo. En el método de los infinitamente pequeños, se supone que $M'n : nM :: MP : PT$; pero en la realidad el primer término de esta proporcion debe ser la línea nm; por consiguiente se desprecia la parte $M'm =$ (núm. 133.) $B\Delta x^2 + C\Delta x^3 +$ &c.: pero si al mismo tiempo se supone que la diferencia PP' de la abscisa es una cantidad infinitamente pequeña dx; la cantidad $M'm = Bdx^2 + Cdx^3 +$ &c. será infinitamente pequeña de segundo órden, y por lo mismo se debe considerar como nula relativamente á la de primer órden $dy = nM'$: por consiguiente el supuesto de ser PP' una cantidad infinitamente pequeña, permite el de poder despreciar $M'm$, ó tomar $M'n$ por mn en la proporcion expresada arriba.

247. La observacion que hicimos antes (núm. 245.) relativamente á las operaciones analíticas del método de los infinitamente pequeños, y de los límites, se verifica igualmente en sus aplicaciones: es decir, que las operaciones que se practican en las aplicaciones de ambos métodos, son en el fondo las mismas, y solo se diferencian en las expresiones, y en la metafísica particular de cada uno de ellos. Por exemplo; en la aplicacion del método de los límites, diriamos, que quanto menor fuese Δx en la expresion $\frac{y}{A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c.}$ de PS (*fig.* 76.), tanto mas se acercará el punto M' al punto M, y el punto S al punto T; de manera, que la línea PS será igual á su límite PT quando fuese $\Delta x = 0$: pero en este supuesto, la expresion antecedente se reduce á $\frac{y}{A}$ ó $y\frac{dx}{dy}$; luego $PT = y\frac{dx}{dy}$.

Comparando este método para determinar la subtangente PT, con el de los infinitamente pequeños; se verá evidentemente que la operacion se reduce en ambos métodos á hallar la expresion de PS, y suponer en ella $B\Delta x + C\Delta x^2 +$ &c. $= 0$: en el método de los límites porque la cantidad $B\Delta x + C\Delta x^2 +$ &c. debe efectivamente ser igual á cero para determinar el límite PT de PS; y en el de los infinitamente pequeños, porque dicha cantidad se debe considerar como nula relativamente á la cantidad finita A.

Por consiguiente: siendo una misma la operacion que se practica para determinar la subtangente PT en el método de los límites, y en el de los infinitamente pequeños; el resultado debe necesariamente ser el mismo, y así vemos que ambos métodos conducen á la equacion $PT = y\frac{dx}{dy}$.

248. Para determinar la diferencial de la superficie APM por el

método de los infinitamente pequeños (*fig.* 76.); se supone que dicha superficie se compone de una infinidad de trapecios infinitamente pequeños como $PMM'P'$; cada uno de los quales es la diferencial de la superficie que le precede; de modo que dicho trapecio es la diferencial de la superficie APM; y despreciando luego el triángulo MnM', queda el rectángulo $PMnP'$ por la diferencial de APM: por consiguiente, llamando s esta superficie, será $ds = PMnP' = ydx$ ó $\frac{ds}{dx} = y$. Es evidente que en este caso, se desprecia la superficie $MaM'n$; pero como al mismo tiempo se supone que la línea $Mn = dx$ es infinitamente pequeña; á causa de ser $nM' = dy = Adx + Bdx^2 + Cdx^3 +$ &c., el rectángulo $MmM'n$ (*fig.* 77.) será igual á la cantidad infinitamente pequeña de segundo órden $Adx^2 + Bdx^3 +$ &c. y por consiguiente la superficie $MM'n$ será tambien infinitamente pequeña de segundo órden; pero en el cálculo diferencial se desprecian estas cantidades respecto de las de primer órden como ydx; luego el supuesto de ser $Mn = dx$ una cantidad infinitamente pequeña, justifica el de considerar como nula la superficie $MM'n$; y por lo mismo será exâcto el resultado hallado en virtud de estos dos supuestos.

En este exemplo, será fácil manifestar del mismo modo que en el antecedente; que la operacion que en él se practica para determinar la diferencial de la superficie APM, ó la expresion $\frac{ds}{dx}$, es en el fondo la misma que la del método de los límites (núm. 176.), y se reduce á suponer $= 0$ la superficie $MM'n$: cuyo supuesto se hace en dicho método para hallar el límite $\frac{ds}{dx}$ de la razon $\frac{\Delta s}{\Delta x}$; y en el de los infinitamente pequeños, porque dicha superficie es una cantidad infinitamente pequeña de segundo órden; y por lo mismo nula, relativamente á la de primer órden ydx: así vemos que ambos métodos conducen á un mismo resultado $\frac{ds}{dx} = y$.

249. Estos exemplos manifiestan suficientemente, que los supuestos que se hacen en las aplicaciones del método de los infinitamente pequeños á las líneas curvas, son conformes á los de las operaciones analíticas que se practican para hallar las diferenciales; de cuya conformidad nace la de las operaciones en la aplicacion de dicho método, con las del método de los límites, y por consiguiente la exâctitud de sus resultados.

La misma identidad de operaciones se verifica en las demas aplicaciones del método de los infinitamente pequeños; y como estas aplicaciones, particularmente las de las ciencias fisico-matemáticas, suelen ser mas sencillas empleando dicho método, que qualquiera otro conocido; no vemos inconveniente alguno en que se emplee con las precauciones necesarias; haciendo en las aplicaciones los supuestos correspondientes á los de las operaciones analíticas, en cuyo caso sus operaciones serán las mismas que se practicarian en el método de los límites; y por consiguiente, sus resultados serán tambien los mismos que se hallarian empleando dicho método ó qualquiera otro.

CAPITULO VII.

Continuacion de las aplicaciones del cálculo diferencial á la Analisis y á la Geometría.

En los capítulos IV. y V. de estas Instituciones omitimos de intento varias aplicaciones del cálculo diferencial, porque exîgian mayores conocimientos de dicho cálculo, que los que se podian adquirir en los principios que contiene el capítulo III.: ahora que hemos tratado el referido cálculo con la extension suficiente, cumplirémos nuestra promesa (núm. 181.) de continuar sus aplicaciones; y seguirémos en ellas el órden establecido en aquellos capítulos.

Continuacion de las aplicaciones del cálculo diferencial á la doctrina de las series.

250. En el núm. 100. enseñamos á transformar una funcion qualquiera y de x en una serie de la forma $K + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c.; en el supuesto de que la funcion propuesta pueda adquirir esta forma: pero luego advertimos (núm. 101. y 102.) que quando alguna de las cantidades A, A', A'', &c. fuese infinita en el supuesto de $x = 0$, como sucede en la funcion $\sqrt{(ax \pm x^2)}$; seria esto una señal segura de que dicha forma no conviene á la funcion propuesta; y ofrecimos dar un método analítico para convertir en serie una funcion qualquiera implícita ó explícita de una variable.

251. Quando el supuesto de $x = 0$ hace infinito alguno de los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ &c. en la funcion propuesta; suele ser muy dificil hallar la forma de la serie que expresa dicha funcion. Esto sucede principalmente en las funciones implícitas; como, por exemplo, si se quisiesen transformar en series las funciones de x que expresan las raices de la equacion $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$; veamos pues cómo se puede resolver esta dificultad.

252. Sea la que fuere la forma que se busca de una serie en que se desenvuelve una funcion de x; si dicha serie se compone únicamente de términos monomios relativamente á x, se podrá expresar por $Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma +$ &c., representando los exponentes α,

β, γ, &c. qualesquiera números : pero como quando se desenvuelve una funcion en serie, la mira principal suele ser el hallar un valor aproxîmado de dicha funcion ; es necesario que la serie que la expresa sea convergente, y por consiguiente que el valor de x sea ó muy pequeño, ó muy grande. En el primer caso es evidente que los exponentes α, β, γ &c. deben ir aumentando sucesivamente desde el primero y menor α, de modo que todos ellos sean positivos, ó que empezando por ser negativos lleguen á ser positivos en virtud del aumento progresivo; y al contrario en segundo caso, dichos exponentes deben ir disminuyendo desde el primero y mayor α, de manera que ó todos ellos sean negativos, ó que lleguen á serlo en virtud de su diminucion. La serie será ascendiente en el primer caso; y descendiente en el segundo.

253. Los Geómetras han imaginado varios métodos para determinar la forma de la serie convergente $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \&c.$ *Newton*, el primero que resolvió este problema, inventó para ello el paralelógramo analítico que el Abate *de Gua* simplificó reduciéndole á un triángulo (1) : *Taylor* dió una construccion geométrica semejante al paralelógramo analítico (2) ; y finalmente, Mr. de Lagrange ha inventado un método analítico muy elegante y sencillo, que se puede exponer del modo siguiente.

Sea $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$ la equacion cuyas raices se quieren determinar por medio de series convergentes ; y $Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + Dx^{\alpha+3\beta} + \&c. = y$ una de sus raices. Substituyéndola en la equacion propuesta, se transformará en......($\mathfrak{G}$)..........................

$$aA^3x^{3\alpha} + 3aA^2Bx^{3\alpha+\beta} \left.\begin{matrix}+3aA^2C\\+3aAB^2\end{matrix}\right| x^{3\alpha+2\beta} + \&c. - Ax^{\alpha+3} -$$

$Bx^{\alpha+\beta+3} - Cx^{\alpha+2\beta+3} - \&c. - ax^3 = 0$; y como esta equacion debe ser idéntica, es necesario disponer sus términos de modo, que los que esten afectos de una misma potencia de x, se hallen en una misma columna. Supongamos primero que x sea una cantidad muy pequeña ; la serie $Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + \&c.$ será ascendiente, y por consiguiente la equacion ($\mathfrak{G}$) se deberá ordenar de modo que el exponente β sea una cantidad positiva. Si la ordenamos como sigue

$$\begin{array}{llll} aA^3x^{3\alpha} & + 3aA^2Bx^{3\alpha+\beta} & \left.\begin{matrix}+3aA^2C\\+3aAB^2\\ \end{matrix}\right| x^{3\alpha+2\beta} & \left.\begin{matrix}+3aA^2D\\+6aABC\\+\ aB^3\end{matrix}\right| x^{3\alpha+3\beta} + \&c. = 0 \\ - ax^3 & - Ax^{\alpha+3} & - Bx^{\alpha+\beta+3} & - Cx^{\alpha+2\beta+3} - \&c. \end{array}$$

(1) *Memorias de la Academia de las Ciencias de París.*
(2) *Methodus Incrementorum Prop. IX.*

y comparamos los exponentes de x en las dos primeras columnas, tendrémos para determinar α y β las dos equaciones $3\alpha = 3$, $3\alpha + \beta = \alpha + 3$, que dan $\alpha = 1$, y $\beta = 1$; y como estos valores hacen necesariamente iguales los exponentes de x en las columnas que siguen, inferirémos que se puede suponer efectivamente $\alpha = 1 = \beta$ en dicha serie. Para determinar los coeficientes A, B, C, &c., formarémos las equaciones $aA^3 - a = 0$, $3aA^2B - A = 0$, $3aA^2C + 3aAB^2 - B = 0$, &c. : de la primera inferirémos $A = 1$, y substituyendo este valor en la segunda, dará $B = \frac{1}{3a}$; cuyos valores substituidos en la tercera dará $C = 0$; y del mismo modo se hallará $D = -\frac{1}{81a^3}$, $E = \frac{1}{243a^4}$, &c. ; y finalmente substituyendo todos estos valores en la serie $Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + \&c. = y$, inferirémos que $y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} + \&c.$ es una de las raices de la equacion propuesta.

En la equacion $aA^3 + a = 0$, ó $A^3 - 1 = 0$, hemos tomado solamente la raiz $A = 1$, porque las otras dos raices son imaginarias.

Supongamos ahora que x es una cantidad muy grande ; la serie $Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + \&c.$, será en este caso descendiente, y por consiguiente β negativa; y para que esta condicion se verifique ordenarémos la equacion ($\mathfrak{G}$) de este modo.

$$\begin{array}{lllll} Ax^{\alpha+3} & + Bx^{\alpha+\beta+3} & + Cx^{\alpha+2\beta+3} & + Dx^{\alpha+3\beta+3} & + \&c. = 0; \\ + ax^3 & - aA^3x^{3\alpha} & - 3aA^2Bx^{3\alpha+\beta} & \left.\begin{matrix}-3aA^2C\\-3aAB^2\end{matrix}\right| x^{3\alpha+2\beta} & - \&c. \end{array}$$

de donde inferirémos $\alpha + 3 = 3$, $\alpha + \beta + 3 = 3a$, ó $\alpha = 0$, y $\beta = -3$; y comparando los coeficientes ; $A = -\alpha$, $B = -a^4$, $C = -3a^7$, $D = -12a^{10}$, &c. ; por consiguiente $y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \&c.$, será otra raiz de la equacion propuesta.

La condicion de que β sea una cantidad negativa se verifica igualmente ordenando la equacion ($\mathfrak{G}$) de este otro modo.

$$\begin{array}{lllll} aA^3x^{3\alpha} & + 3aA^2Bx^{3\alpha+\beta} & \left.\begin{matrix}+3aA^2C\\+3aAB^2\\ \end{matrix}\right| x^{3\alpha+2\beta} & \left.\begin{matrix}+3aA^2D\\+6aABC\\+\ aB^3\end{matrix}\right| x^{3\alpha+3\beta} & + \&c. = 0; \\ - Ax^{\alpha+3} & \begin{matrix}- Bx^{\alpha+\beta+3}\\ - ax^3\end{matrix} & - Cx^{\alpha+2\beta+3} & - Dx^{\alpha+3\beta+3} & - \&c. \end{array}$$

que da $3\alpha = \alpha + 3$, ó $\alpha = \frac{3}{2}$; $\beta + \frac{9}{2} = 3$, ó $\beta = -\frac{3}{2}$; $aA^2 - 1 = 0$, ó $A = \frac{\pm 1}{a^{\frac{1}{2}}}$; $3B - B - a = 0$, ó $B = \frac{a}{2}$, $C = \mp \frac{3}{8} a^{\frac{5}{2}}$, $D = \frac{a^4}{2}$, &c.; y substituyendo estos valores, á causa del doble signo resultarán estas dos series descendientes.

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{2} - \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^4}{2x^3} - \&c.$$

$$y = -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{2} + \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^4}{2x^3} + \&c.;$$

las quales solo se diferencian en los signos de algunos de sus términos.

Reuniendo todos estos resultados concluirémos que la equacion propuesta $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$, tiene las quatro raices:

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} + \&c.$$

$$y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \&c.$$

$$y = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{2} - \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^4}{2x^3} - \&c.$$

$$y = -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{a}{2} + \frac{3a^{\frac{5}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^4}{2x^3} + \&c.;$$

de las quales la primera es relativa al supuesto de ser x una cantidad muy pequeña; y las otras tres, al de que x sea una cantidad muy grande.

254. Sirva de segundo exemplo la equacion $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$. Suponiendo como antes $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + Dx^{\alpha+3\beta} + \&c.$, y substituyendo este valor de y, tendrémos la equacion... (ζ)...

$$\begin{aligned} A^3x^{3\alpha} + 3A^2Bx^{3\alpha+\beta} &+ 3A^2Cx^{3\alpha+2\beta} + \&c. - \dots\dots\dots \\ &+ 3AB^2x^{3\alpha+2\beta} + \&c. \end{aligned}$$

$$a^2Ax^{\alpha} - A^2Bx^{\alpha+\beta} - a^2Cx^{\alpha+2\beta} - \&c. + aAx^{\alpha+1} + aBx^{\alpha+\beta+1}$$

$+ aCx^{\alpha+2\beta+1} + \&c. - x^3 = 0$; la qual suponiendo x muy pequeña se puede ordenar de este modo.

$$\left.\begin{array}{llllll} a^2Ax^{\alpha} & + a^2Bx^{\alpha+\beta} & + a^2Cx^{\alpha+2\beta} & + \dots\dots Gx^{\alpha+6\beta} & & + \&c. \\ + x^3 & - aAx^{\alpha+1} & - aBx^{\alpha+\beta+1} & - \dots\dots Fx^{\alpha+5\beta+1} & & + \&c. \\ & & & - A^3x^{3\alpha} & & - \&c. \end{array}\right\} = 0;$$

comparando los exponentes respectivos de x en las dos primeras columnas, resultará $\alpha = 3$, $\beta = 1$; y como estos valores hacen iguales los exponentes de x en las columnas siguientes, inferirémos que dichos valores convienen efectivamente á la serie supuesta. Para determinar los coeficientes A, B, C, &c., formarémos las equaciones $a^2A + 1 = 0$, $a^2B - aA = 0$, $a^2C - aB = 0$, &c., que dan $A = -\frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{a^3}$, $C = -\frac{1}{a^4}$, &c., $G = -\frac{2}{a^8}$, &c.; y por consiguiente tendrémos la serie ascendiente $-\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \dots - \frac{2x^9}{a^8} - \frac{5x^{10}}{a^9} - \&c. = y$.

Disponiendo los términos de la equacion (ζ) de este modo

$$\left.\begin{array}{llll} A^3x^{3\alpha} & + 3A^2Bx^{3\alpha+\beta} & \left.\begin{array}{l} + 3A^2C \\ + 3AB^2 \end{array}\right| x^{3\alpha+2\beta} & + \&c. \\ - a^2Ax^{\alpha} & - a^2Bx^{\alpha+\beta} & - a^2Cx^{\alpha+2\beta} & - \&c. \\ & + aAx^{\alpha+1} & + aBx^{\alpha+\beta+1} & + \&c. \end{array}\right\} = 0;$$

y comparando los exponentes de x en las dos primeras columnas, tendrémos $\alpha = 0$, $\beta = 1$; y como estos valores satisfacen á la condicion de ser iguales los exponentes respectivos de x en cada una de las columnas siguientes; el órden de la equacion antecedente es exâcto. Haciendo pues igual á cero la suma de los coeficientes de cada una de las potencias de x, tendrémos $A^3 - a^2A = 0$, ó $A = \pm a$, $B = \mp \frac{1}{2}$, $C = \mp \frac{1}{8a}$, $D = \frac{8 \mp 1}{16a^2}$, $E = \frac{64 \mp 5}{128a^3}$, &c.; y por consiguiente á causa del doble signo las dos series ascendientes.

$$a - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8a} + \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3} + \&c.$$

$$-a + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8a} + \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3} + \&c.$$

No hemos hecho uso de la raiz $A = 0$ en la equacion $A^3 - a^2A = 0$; porque esta raiz daria la serie $-\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3} - \&c.$ que hallamos antes.

Estas tres series son las raices de la equacion propuesta en el supuesto de que x es una cantidad muy pequeña: para hallar las que corresponden al supuesto de ser x una cantidad muy grande, dispondrémos la equacion (ζ) de este modo:

$$\left.\begin{array}{lllll} A^3x^{3\alpha} & + 3A^2Bx^{3\alpha+\beta} & \left.\begin{array}{l} + 3A^2C \\ + 3AB^2 \end{array}\right| x^{3\alpha+2\beta} & \left.\begin{array}{l} + 3A^2D \\ + 6ABC \\ + B^3 \end{array}\right| x^{3\alpha+3\beta} & + \&c. \\ - x^3 & + aAx^{\alpha+1} & + aBx^{\alpha+\beta+1} & + aCx^{\alpha+2\beta+1} & + \&c. \\ & & - a^2Ax^{\alpha} & - a^2Bx^{\alpha+\beta} & + \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Los exponentes de x en las dos primeras columnas dan $\alpha = 1$, $\beta = -1$; y como en virtud de estos valores es $3\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + 1 = \alpha$, $3\alpha + 3\beta = \alpha + 2\beta + 1 = \alpha + \beta$, &c.; la disposicion ú órden antecedente puede verificarse, y tendrémos $A^3 - 1 = 0$, $3A^2B + aA = 0$, &c., ó $A = 1$, $B = -\frac{a}{3}$, $C = \frac{a^2}{3}$, $D = \frac{a^3}{81}$, &c., y por consiguiente

$$y = x - \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \text{\&c.}$$

La serie antecedente es la única raiz de la equacion propuesta en el supuesto de ser x una cantidad muy grande, á causa de que á la equacion $(\mathfrak{C})$ no se le puede dar una disposicion distinta de las antecedentes, de modo que dicha equacion sea al mismo tiempo idéntica. Si por exemplo quisiéramos probar de disponerla de este modo

$$\left.\begin{array}{llll} aAx^{\alpha+1} & + aBx^{\alpha+\beta+1} & + aCx^{\alpha+2\beta+1} & + \text{\&c.} \\ -x^3 & - a^2Ax^{\alpha} & - a^2Bx^{\alpha+\beta} & - \text{\&c.} \end{array}\right\} = 0; \text{ veriamos}$$

que esta disposicion no puede verificarse á causa de que el exponente 3α de x en el término $A^3x^{3\alpha}$, no puede igualarse con alguno en las columnas antecedentes, y por consiguiente no hay lugar alguno donde se pueda colocar dicho término; y lo mismo dirémos de las demas combinaciones que se podrian probar.

Así la funcion y tiene solamente estos quatro valores en la equacion propuesta.

$$y = -\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \ldots\ldots - \frac{2x^9}{a^8} - \frac{5x^{10}}{a^9} - \text{\&c.}$$

$$y = a - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8a} + \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3} + \text{\&c.}$$

$$y = -a + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8a} + \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3} + \text{\&c.}$$

$$y = x - \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \text{\&c.};$$

los tres primeros, relativos al supuesto de ser x una cantidad muy pequeña; y el quarto, al de que x es una cantidad muy grande.

255. Para determinar los coeficientes A, B, C, &c. suele ser necesario resolver una equacion de un grado superior al primero; así en los exemplos antecedentes hemos encontrado, para determinar el coeficiente A, las equaciones $A^3 - 1 = 0$, $aA^2 - 1 = 0$, &c.; cuya resolucion no ofrece dificultad alguna por ser de dos términos. Quando se encuentran equaciones mas complicadas que las antecedentes ó de un órden superior, se procurarán resolver exâctamente ó por aproxîmacion, y se debe tener particular cuidado en tomar solamente las raices reales (como lo hicimos en la equacion $A^3 - 1 = 0$), desechando las imaginarias, á causa de que las series que resultarian de estas raices serian tambien imaginarias.

256. Si la funcion y fuese explícita, y no se pudiese convertir en serie por medio del teorema de *Taylor*, á causa de ser infinita alguna de las cantidades (núm. 101.) A, A', A'', &c.; se podrá conseguir el objeto por el método antecedente (en el supuesto de que la serie se componga únicamente de términos monomios), formando una equacion entre x é y, y haciendo desaparecer las cantidades irracionales ó fraccionarias.

Por exemplo; si la funcion propuesta fuese $\sqrt{(ax \pm x^2)}$; haciéndola $= y$ será $y^2 = ax \pm x^2$, ó $y^2 - ax \mp x^2 = 0$; y suponiendo $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha+\beta} + Cx^{\alpha+2\beta} + \text{\&c.}$, tendrémos la equacion $(\mathfrak{C})$ .... $A^2x^{2\alpha} + 2ABx^{2\alpha+\beta} + 2ACx^{2\alpha+2\beta} + 2ADx^{2\alpha+3\beta} + \text{\&c.} + B^2x^{2\alpha+2\beta} + 2BCx^{2\alpha+3\beta} + \text{\&c.} - ax \mp x^2 = 0$, la qual se debe ordenar de modo que cada uno de sus términos se destruya por sí mismo. Disponiéndola de este modo

$$\left.\begin{array}{lllll} A^2x^{2\alpha} & + 2ABx^{2\alpha+\beta} & + 2AC \,\Big|\, x^{2\alpha+2\beta} & + 2AD \,\Big|\, x^{2\alpha+3\beta} & + \text{\&c.} \\ -ax & \mp x^2 & + B^2 \,\Big| & + 2BC \,\Big| & + \text{\&c.} \end{array}\right\} = 0,$$

tendrémos $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$, $A^2 - a = 0$, ó (tomando solamente el signo positivo) $A = a^{\frac{1}{2}}$, $B = \pm \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$, $C = -\frac{1}{8a^{\frac{3}{2}}}$, $D = \pm \frac{1}{16a^{\frac{5}{2}}}$, &c.; y por consiguiente $\sqrt{(ax \pm x^2)} = y = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8a^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16a^{\frac{5}{2}}} - \text{\&c.}$; lo mismo que en el número citado.

La serie antecedente pertenece al supuesto de ser x una cantidad muy pequeña, ó á lo menos menor que a. Para hallar la que corresponde al supuesto de $x > a$, ordenarémos la equacion $(\mathfrak{C})$ del modo siguiente

$$\left.\begin{array}{lllll} A^2x^{2\alpha} & + 2ABx^{2\alpha+\beta} & + 2AC \,\Big|\, x^{2\alpha+2\beta} & + 2AD \,\Big|\, x^{2\alpha+3\beta} & + \text{\&c.} \\ \mp x^2 & - ax & + B^2 \,\Big| & + 2BC \,\Big| & + \text{\&c.} \end{array}\right\} = 0;$$

y será $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $A^2 = \pm 1$, $2AB - a = 0$, $2AC + B^2 = 0$, &c. En la equacion $A^2 = \pm 1$ desecharémos el signo negativo á causa de que los valores de A que de él resultarian serian imaginarios: y tomando como antes solamente el valor positivo de A, tendrémos $A = 1$, $B = \frac{a}{2}$, $C = -\frac{a^2}{8}$, $D = \frac{a^3}{16}$, &c.; y por consiguiente $\sqrt{(ax + x^2)} = y = x + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8x} + \frac{a^3}{16x^2} - $ &c.

Tomamos solamente el signo $+$ en la funcion propuesta, por la misma razon que en la equacion $A^2 = \pm 1$; esto es, para evitar las cantidades imaginarias: pues es evidente que lo seria la funcion $\sqrt{(ax - x^2)}$, en el supuesto actual de $x > a$.

Exemplo 2º Sea $\frac{a + bx}{x^{\frac{3}{2}} + cx^{\frac{5}{2}}}$ la funcion propuesta. Haciéndola $= y$, será $yx^{\frac{3}{2}} + cyx^{\frac{5}{2}} - a - bx = 0$; y substituyendo $Ax^{\alpha} + Bx^{\alpha + \beta} + Cx^{\alpha + 2\beta} + Dx^{\alpha + 3\beta} +$ &c. en lugar de y tendrémos la equacion ($\mathfrak{C}$) .... $Ax^{\alpha + \frac{3}{2}} + Bx^{\alpha + \beta + \frac{3}{2}} + Cx^{\alpha + 2\beta + \frac{3}{2}} +$ &c. $+ cAx^{\alpha + \frac{5}{2}} + cBx^{\alpha + \beta + \frac{5}{2}} + cCx^{\alpha + 2\beta + \frac{5}{2}} +$ &c. $- a - bx = 0$.

Ordenándola de este modo

$$\left.\begin{array}{llll} Ax^{\alpha + \frac{3}{2}} & + Bx^{\alpha + \beta + \frac{3}{2}} & + Cx^{\alpha + 2\beta + \frac{3}{2}} & + \text{\&c.} \\ - a & - bx & + cBx^{\alpha + \beta + \frac{5}{2}} & + \text{\&c.} \\ & + cAx^{\alpha + \frac{5}{2}} & & \end{array}\right\} = 0; \text{ resulta}$$

$\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = 1$, $A = a$, $B = b - ac$, $C = -c\,(b - ac)$, $D = c^2\,(b - ac)$, &c.; y $\frac{a + bx}{x^{\frac{3}{2}} + cx^{\frac{5}{2}}} = \frac{a}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{b - ac}{x^{\frac{1}{2}}} - c\,(b - ac)\,x^{\frac{1}{2}} + c^2\,(b - ac)\,x^{\frac{3}{2}} -$ &c.; lo mismo que en otro lugar (n. 101.).

Para hallar la serie descendiente correspondiente al supuesto de ser x una cantidad muy grande en la funcion propuesta; dispondrémos la equacion ($\mathfrak{C}$) como sigue

$$\left.\begin{array}{llll} cAx^{\alpha + \frac{5}{2}} & + cBx^{\alpha + \beta + \frac{5}{2}} & + cCx^{\alpha + 2\beta + \frac{5}{2}} & + \text{\&c.} \\ - bx & - a & & \\ & + Ax^{\alpha + \frac{3}{2}} & + Bx^{\alpha + \beta + \frac{3}{2}} & + \text{\&c.} \end{array}\right\} = 0, \text{ y ten-}$$

drémos $\alpha = -\frac{3}{2}$, $\beta = -1$, $A = \frac{b}{c}$, $B = \frac{ac - b}{c^2}$, $C = -\frac{ac - b}{c^3}$, $D = \frac{ac - b}{c^4}$, &c.; y por consiguiente $\frac{a + bx}{x^{\frac{3}{2}} + cx^{\frac{5}{2}}} = y = \frac{b}{cx^{\frac{3}{2}}} + \frac{ac - b}{c^2x^{\frac{5}{2}}} - \frac{ac - b}{c^3x^{\frac{7}{2}}} + \frac{ac - b}{c^4x^{\frac{9}{2}}} -$ &c.

257. Hemos supuesto que la serie en que se transforma la funcion propuesta se compone únicamente de términos monomios re-

lativamente á x; ó lo que es lo mismo, pueda tener la forma $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} +$ &c., siendo α, β, γ, &c. qualesquiera números: á causa de que hay algunas funciones que no se pueden desenvolver en una serie semejante. Tal es por exemplo la funcion log. x; en la qual saldrian vanos quantos medios se empleasen para desenvolverla en una serie de la referida forma.

258. Quando en una funcion de la variable x se substituye $x + k$ por x, y el teorema de *Taylor* no puede desenvolver la nueva funcion en una serie ascendiente respecto de k, en el supuesto de $x =$ á una cantidad constante g (núm. 99.); se podrá conseguir este objeto por el método antecedente; ó por el del núm. 101. quando la funcion fuese explícita. En efecto; la substitucion de $g + k$ en lugar de x transformará la funcion propuesta en una cantidad que se podrá considerar como funcion de k; y por consiguiente se podrá transformar en una serie ascendiente de términos monomios respecto de k, por el método antecedente; ó por el expuesto en el número citado.

Supongamos por exemplo que $(a - x)\,\sqrt{(x^2 - a^2)} = y$, sea la funcion propuesta (núm. 99.). Los coeficientes diferenciales $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, &c., serán infinitos en el supuesto de $x = a$; y por lo mismo, el teorema de *Taylor* no puede aplicarse á este caso particular. Pero substituyendo $a + k$ en lugar de x, se tranformará en $-k^{\frac{3}{2}}\,(2a + k)^{\frac{1}{2}} = y$; y separando (núm. 101.) el factor $-k^{\frac{3}{2}}$, será por el teorema de *Taylor* $(2a + k)^{\frac{1}{2}} = (2a)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} -$ &c.; y finalmente multiplicando esta serie por $-k^{\frac{3}{2}}$, tendrémos $y = -(2a)^{\frac{1}{2}}\,k^{\frac{3}{2}} - \frac{k^{\frac{5}{2}}}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} +$ &c.

Si quisiéramos aplicar á la funcion propuesta el método general expuesto en los números antecedentes; transformariamos la equacion $-k^{\frac{3}{2}}\,(2a + k)^{\frac{1}{2}} = y$, en $y^2 - 2ak^3 - k^4 = 0$; y suponiendo $y = Ak^{\alpha} + Bk^{\alpha + \beta} + Ck^{\alpha + 2\beta} +$ &c., hallariamos siguiendo dicho método en el caso de ser la serie ascendiente $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 1$, $A^2 = 2a$, $2AB = 1$, &c.; y tomando solamente el signo negativo á causa de tenerle la funcion de k, tendriamos $A = -(2a)^{\frac{1}{2}}$ $B = -\frac{1}{2(2a)^{\frac{1}{2}}}$, &c.; y por consiguiente $y = -(2a)^{\frac{1}{2}}\,k^{\frac{3}{2}} - \frac{k^{\frac{5}{2}}}{2(2a)^{\frac{1}{2}}} +$ &c. lo mismo que por el otro método.

259. Si la funcion propuesta fuese implícita, y no se le pudiese aplicar el teorema de *Taylor*; se substituirá $g + k$ por x, y considerando y como funcion de k, se podrá resolver en una serie ascendiente respecto de k por el referido método general.

Sea por exemplo la funcion propuesta de x dada por la equacion $y^4 - 2x^2y^2 + a^3x = 0$; diferenciándola tendrémos $\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2x - a^3}{4y^3 - 4x^2y}$; y como en el supuesto de $x = a$, es $y = \pm a$, el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$ será infinito en dicho supuesto, y por consiguiente el teorema de *Taylor* no puede desenvolver la funcion propuesta en una serie ascendiente respecto de k quando $x = a$. Substituirémos pues $a + k$ por x en la equacion propuesta, y se transformará en $y^4 - 2(a^2 + 2ak + k^2)y^2 + a^4 + a^3k = 0$; y como quando k es $= 0$; y es $= \pm a$; supondrémos $y = a + Ak^{\alpha} + Bk^{\alpha+\beta} + Ck^{\alpha+2\beta} +$ &c., (prescindiendo por ahora del doble signo $\pm$ que podremos reponer despues); y substituyendo tendrémos

$$\left.\begin{array}{l} a^4 + 4a^3Ak^{\alpha} + 4a^3Bk^{\alpha+\beta} + 4a^3Ck^{\alpha+2\beta} + \text{\&c.} + 6a^2A^2k^{2\alpha} + 6a^2B^2k^{2\alpha+2\beta} + \text{\&c.} \ldots \\ -2a^4 - 4a^3Ak^{\alpha} - 4a^3Bk^{\alpha+\beta} - 4a^3Ck^{\alpha+2\beta} - \text{\&c.} - 2a^2Ak^{2\alpha} - 4a^2ABk^{2\alpha+2\beta} - \text{\&c.} \ldots \\ + a^4 \\ \ldots + 4aA^3k^{3\alpha} + \text{\&c.} + \text{\&c.} \\ \ldots - 4a^3k - 8a^2Ak^{\alpha+1} - \text{\&c.} - 2a^2k^2 - \text{\&c.} - \text{\&c.} \\ + a^3k \end{array}\right\} = 0;$$

y haciendo las reducciones correspondientes $4a^2A^2k^{2\alpha} + 6a^2B^2k^{2\alpha+2\beta} +$ &c. $+ 4aA^3k^{3\alpha} +$ &c. $- 4a^2ABk^{2\alpha+\beta} - 3a^3k - 8a^2Ak^{\alpha+1} -$ &c. $- 2a^2k^2 -$ &c. $-$ &c. $= 0$, cuya equacion en el supuesto de ser k una cantidad muy pequeña, se puede ordenar de este modo:

$$\left.\begin{array}{lll} 4a^2A^2k^{2\alpha} & + 4aA^3k^{3\alpha} & + \text{\&c.} \\ -3a^3k & - 4a^2ABk^{2\alpha+\beta} & - \text{\&c.} \\ & - 8a^2Ak^{\alpha+1} & - \text{\&c.} \end{array}\right\} = 0;$$ de donde se infiere $\alpha = \frac{1}{2}$,

$\beta = \frac{1}{2}$, $A = \pm \frac{\sqrt{3a}}{2}$, $B = -\frac{5}{4}$, &c.; y restituyendo á a el doble signo, tendrémos las dos series ascendientes $y = \pm a \pm \frac{\sqrt{3ak}}{2} - \frac{5k}{4} \pm$ &c.

260. Supongamos que u represente una funcion de las cantidades

variables x, y, z, &c. que se quiere desenvolver en una serie ordenada relativamente á las potencias sucesivas de una de estas variables, de x por exemplo. Es evidente, que si en la funcion u hacemos variar solamente x; y llamamos A, A', A'', A''', &c. los valores respectivos de u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, &c. quando $x = 0$; será (n. 100.) $u = A + A'x + A''\frac{x^2}{2} + A'''\frac{x^3}{2 \cdot 3} +$ &c.

Esto entendido; supongamos que siendo dada la equacion $y = z + xY$, representando Y una funcion qualquiera de y; se quiera determinar el valor de esta variable, en z y x, por medio de una serie ordenada relativamente á las potencias sucesivas de x.

Es evidente que quando $x = 0$, es $y = z$; y por consiguiente tendrémos desde luego $A = z$. Diferenciando la equacion propuesta relativamente á x, hallarémos $\frac{dy}{dx} = Y + x\frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, y haciendo $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = Y$; pero en este supuesto es $y = z$; luego $\frac{dy}{dx} = Z = A'$, representando Z la misma funcion de z, que Y lo es de y.

Si diferenciamos la equacion $\frac{dy}{dx} = Y + x \cdot \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, tendrémos $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} + x\left(\frac{d^2Y}{dy^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dY}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}\right)$; y haciendo $x = 0$, y substituyendo por $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dY}{dy}$, sus valores respectivos Z, $\frac{dZ}{dz}$, relativos á este supuesto, resultará $\frac{d^2y}{dx^2} = 2Z\frac{dZ}{dz} = \frac{d \cdot Z^2}{dz}$, y por consiguiente $A'' = \frac{d \cdot Z^2}{dz}$.

Continuando en diferenciar será $\frac{d^3y}{dx^3} = 3\frac{d^2Y}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dY}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + x$ (&c.); y haciendo $x = 0$, y las substituciones que corresponden á este supuesto, resultará $A''' = 3Z^2\frac{d^2Z}{dz^2} + 6Z\left(\frac{dZ}{dz}\right)^2 = \frac{d^2 \cdot Z^3}{dz^2}$.

Del mismo modo hallariamos $A'''' = \frac{d^3 \cdot Z^4}{dz^3}$, &c.; y substituyendo estos valores en la fórmula general, tendrémos finalmente $y = z + xZ + \frac{x^2}{2}\frac{d \cdot Z^2}{dz} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\frac{d^2 \cdot Z^3}{dz^2} +$ &c.

261. Los valores respectivos de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, &c. en el supuesto de $x = 0$, se pueden tambien hallar del modo siguiente.

Diferenciando la equacion propuesta relativamente á x, hallamos $\frac{dy}{dx} = Y + x\frac{dY}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$, y si se diferencia relativamente á z se hallará $\frac{dy}{dz} = 1 + x\frac{dY}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}$; de donde resultará eliminando $\frac{dY}{dy}$, y reduciendo, $\frac{dy}{dx} = Y\frac{dy}{dz}$: pero quando $x = 0$, es $y = z$, y $\frac{dy}{dz} = 1$; luego $A' = Z$.

Si diferenciamos la equacion $\frac{dy}{dx} = Y\frac{dy}{dz}$ relativamente á x, tendrémos $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dz} + Y\frac{d^2y}{dzdx}$; y substituyendo por $\frac{dy}{dx}$ su igual $Y\frac{dy}{dz}$, y por $\frac{d^2y}{dzdx}$, su valor $Y^2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dY}{dy}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$ que se halla diferenciando la misma equacion relativamente á z, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2Y\frac{dY}{dy}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + Y^3\frac{d^2y}{dz^2}$; cuyo segundo miembro en el supuesto de $x = 0$ se transforma en $2Z\frac{dZ}{dz}$, y por consiguiente será $A'' = \frac{d\,.\,Z^2}{dz}$.

Del mismo modo hallariamos A''', A'''', &c.

Sea por exemplo $Y = -\,\text{sen.}\,y$. La equacion propuesta; será $y = z - x\,.\,\text{sen.}\,y$, y tendrémos $Z = -\,\text{sen.}\,z$, $Z^2 = \text{sen.}\,z^2 = \frac{1 - \cos.\,2z}{2}$, $Z^3 = -\,\text{sen.}\,z^3 = \frac{-\,3\,\text{sen.}\,z + \text{sen.}\,3z}{4}$, &c.; $\frac{d\,.\,Z^2}{dz} = \text{sen.}\,2z$, $\frac{d^2.\,Z^3}{dz^2} = \frac{3}{4}(\text{sen.}\,z - 3\,\text{sen.}\,3z)$, &c.; y por consiguiente $y = z - x\,\text{sen.}\,z + \frac{x^2}{2}\,\text{sen.}\,2z + \frac{x^3}{2\,.\,3}(\text{sen.}\,z - 3\,\text{sen.}\,3z) - \&c.$

Si se supone que z representa *la anomalia media* de un Planeta; y, *la anomalia excéntrica*; y x, *la excentricidad* de su orbita; la equacion propuesta $z = y + x\,\text{sen.}\,y$ expresará la relacion entre ámbas anomalias: por consiguiente, conociendo la anomalia media, y la excentricidad, se hallará fácilmente la anomalia excéntrica por medio de la serie antecedente.

262. Supongamos ahora que siendo siempre $y = z + xY$ la equacion propuesta, se nos pida el valor de una funcion qualquiera de y, que llamarémos u, por medio de una serie que proceda segun las potencias sucesivas de x.

Haciendo $x = 0$, tendrémos desde luego $y = z$: por consiguiente; si representamos por β la misma funcion de z que u lo es de y, será en este supuesto $u = \beta = A$.

Como u es funcion de y, será (núm. 60.) $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$. Pero quando $x = 0$, es $y = z$, $u = \beta$, y (núm. 260.) $\frac{dy}{dx} = Z$; tendrémos pues en este supuesto $\frac{du}{dx} = Z\frac{d\beta}{dz} = A'$.

Tambien será $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{du}{dy}\,\frac{d^2y}{dx^2}$; y como en el supuesto de $x = 0$ es $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,.\,Z^2}{dz}$, tendrémos substituyendo este

valor y los demas correspondientes al mismo supuesto $\frac{d^2u}{dx^2} = Z^2\frac{d^2\beta}{dz^2} + \frac{d\beta}{dz}\cdot\frac{d\,.\,Z^2}{dz} = \frac{d\,.\,Z^2\frac{d\beta}{dz}}{dz} = A''$.

Continuando en diferenciar, tendrémos $\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^3u}{dy^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \ldots\; 3\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{du}{dy}\,\frac{d^3y}{dx^3}$. Pero en el supuesto de $x = 0$, es $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,.\,Z^2}{dz}$, y $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2.\,Z^3}{dz^2}$; haciendo estas substituciones y las demas relativas al mismo supuesto resultará $\frac{d^3u}{dx^3} = Z^3\frac{d^3\beta}{dz^3} + 3Z\frac{d^2\beta}{dz^2}\,\frac{d\,.\,Z^2}{dz} + \frac{d\beta}{dz}\,\frac{d^2.\,Z^3}{dz^2} = \frac{d^2\,.\,Z^3\frac{d\beta}{dz}}{dz^2} = A'''$.

Del mismo modo hallariamos $A'''' = \frac{d^3\,.\,Z^4\frac{d\beta}{dz}}{dz^3}$, &c.; y substituyendo estos valores de A, A', &c. en la fórmula general (número 260.) se transformará en $u = \beta + xZ\frac{d\beta}{dz} + \frac{x^2}{2}\,\frac{d\,.\,Z^2\frac{d\beta}{dz}}{dz} + \frac{x^3}{2\,.\,3}\,\frac{d^2\,.\,Z^3\frac{d\beta}{dz}}{dz^2} + \&c.$

263. Tambien podriamos hallar la serie antecedente por el método de los coeficientes indeterminados, del modo siguiente.

La diferencial de la funcion u relativamente á x, ó $\frac{du}{dx}$ es $= \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$, y relativamente á z, ó $\frac{du}{dz} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dz}$; de donde se infiere eliminando $\frac{du}{dy}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}\cdot\frac{dy}{dz}}{\frac{du}{dz}}$. Substituyendo este valor de $\frac{dy}{dx}$ en la equacion $\frac{dy}{dx} = Y\frac{dy}{dz}$ que hallamos antes; y por Y su igual $\frac{y - z}{x}$, resultará la equacion (1) .... $(y - z)\frac{du}{dz} - x\frac{du}{dx} = 0$.

Sentado esto supondrémos la funcion $u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$; representando A, B, C, &c. funciones indeterminadas de z; ó ya que quando $x = 0$, es $y = z$, y por consiguiente $u = \beta$, supondrémos $u = \beta + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c$, (teniendo presente que β es la misma funcion de z, que u lo es de y) y tendrémos

$\frac{du}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c.$, $\frac{du}{dz} = \frac{d\zeta}{dz} + x\frac{dB}{dz} + x^2\frac{dC}{dz} + x^3\frac{dD}{dz} + \&c.$

Substituyendo estos valores en la equacion (1), y por y su igual $z + xZ + \frac{x^2}{2}\frac{d.Z^2}{dz} + \&c.$ que hallamos arriba, resultará la equacion idéntica $(xZ + \frac{x^2}{2}\frac{d.Z^2}{dz} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2.Z^3}{dz^2} + \&c.)\left(\frac{d\zeta}{dz} + x\frac{dB}{dz} + x^2\frac{dC}{dz} + \&c.\right) - Bx - 2Cx^2 - 3Dx^3 - \&c. = 0$,

$$\text{ó } \left.\begin{matrix} Z\frac{d\zeta}{dz} \\ -B \end{matrix}\right| x + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2}\frac{d.Z^2}{dz}.\frac{d\zeta}{dz} \\ +Z\frac{dB}{dz} \\ -2C \end{matrix}\right| x^2 + \left.\begin{matrix} \frac{1}{2.3}\frac{d^2.Z^3}{dz^2}.\frac{d\zeta}{dz} \\ +\frac{1}{2}\frac{d.Z^2}{dz}.\frac{dB}{dz} \\ +Z\frac{dC}{dz} \\ -3D \end{matrix}\right| x^3 + \&c. = 0.$$

De donde se infiere $B = Z\frac{d\zeta}{dz}$, $C = \frac{1}{2}\left(Z\frac{dB}{dz} + \frac{1}{2}\frac{d\zeta}{dz}\frac{d.Z^2}{dz}\right)$, $D = \frac{1}{3}\left(Z\frac{dC}{dz} + \frac{1}{2}\frac{d.Z^2}{dz}\frac{dB}{dz} + \frac{1}{2.3}\frac{d^2.Z^3}{dz^2}\frac{d\zeta}{dz}\right)$, &c.; y substituyendo sucesivamente por $\frac{dB}{dz}$, $\frac{dC}{dz}$, &c. sus valores tendrémos finalmente $C = \frac{1}{2}\left(Z^2\frac{d^2\zeta}{dz^2} + \frac{d\zeta}{dz}\frac{d.Z^2}{dz}\right) = \frac{1}{2}\frac{d.Z^2\frac{d\zeta}{dz}}{dz}$, $D = \frac{1}{2.3}\frac{d^2.Z^3\frac{d\zeta}{dz}}{dz^2}$, &c.; y por consiguiente

$$u = \zeta + xZ\frac{d\zeta}{dz} + \frac{x^2}{2}\frac{d.Z^2\frac{d\zeta}{dz}}{dz} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2.Z^3\frac{d\zeta}{dz}}{dz^2} + \&c.$$

Supongamos por exemplo que siendo como antes $Y = -$ sen. y, se nos pida el valor de cos. y.

La equacion propuesta será $y = z - x$ sen. y, y $u =$ cos. y: por consiguiente tendrémos $Z = -$ sen. z, $\zeta =$ cos. z, $\frac{d\zeta}{dz} = -$ sen. z, $Z^2 =$ sen. z^2, &c., $Z\frac{d\zeta}{dz} =$ sen. $z^2 = \frac{1 - \text{cos. } 2z}{2}$, $Z^2\frac{d\zeta}{dz} = -$ sen. $z^3 = \frac{-3 \text{ sen. } z + \text{sen. } 3z}{4}$, $Z^3\frac{d\zeta}{dz} =$ sen. $z^4 = \frac{3 - 4 \text{ cos. } 2z + \text{cos. } 4z}{8}$, &c.; y haciendo las diferenciaciones indicadas y substituyendo resultará cos. $y =$ cos. $z + \frac{x}{2}(1 - \text{cos. } 2z) - \frac{3x^2}{2.4}(\text{cos. } z - \text{cos. } 3z) + \frac{x^3}{3}(\text{cos. } 2z - \text{cos. } 4z) - \&c.$

Esta serie sirve para determinar *la anomalia verdadera* por medio de *la anomalia media.*

Exemplo 2º Sea $y = z + xy^m$ la equacion propuesta; y supongamos que se quiera determinar el valor de y^n.

En este caso tendrémos $Y = y^m$, $u = y^n$; y por consiguiente $Z = z^m$, $\zeta = z^n$, $\frac{d\zeta}{dz} = nz^{n-1}$, $Z\frac{d\zeta}{dz} = nz^{m+n-1}$, $Z^2\frac{d\zeta}{dz} = \ldots\ldots nz^{2m+n-1}$, $Z^3\frac{d\zeta}{dz} = nz^{3m+n-1}$, &c. Substituyendo estos valores en la fórmula general, y efectuando las diferenciaciones indicadas tendrémos

u, ó $y^n = z^n + xnz^{m+n-1} + \frac{x^2}{2}n(2m+n-1)z^{2m+n-2} + \frac{x^3}{2.3}n(3m+n-1)(3m+n-2)z^{3m+n-3} + \&c.$

264. Las fórmulas generales $y = z + xZ + \frac{x^2}{2}\frac{d.Z^2}{dz} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2.Z^3}{dz^2} + \&c.$; $u = \zeta + xZ\frac{d\zeta}{dz} + \frac{x^2}{2}\frac{d.Z^2\frac{d\zeta}{dz}}{dz} + \&c.$, son sumamente útiles para resolver los problemas relativos al método inverso de las series; la primera quando se busca simplemente el valor de la incognita; y la segunda quando se quiere determinar el valor de una funcion qualquiera de dicha incognita. Pero antes de manifestar su uso en la resolucion de estos problemas, nos parece útil exponer los principios de dicho método, siguiendo las ideas de *Newton*, quien fue el primer Geómetra que los resolvió procediendo de un modo muy natural y elegante (1).

265. Supongamos que y represente el seno de un arco x: será (núm. 100.) $y = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} - \&c.$; y por consiguiente si se considera como conocido el valor del arco x, se conocerá inmediatamente el de su seno y por medio de la serie que forma el segundo miembro de la equacion antecedente. Esto entendido, el método inverso de las series consiste en invertir la naturaleza de las cantidades; esto es en considerar el seno y como conocido, y determinar el valor del arco incognito x por medio del de y en dicha equacion. Lo que se logrará eliminando sucesivamente las potencias x^3, x^5, &c. de x del modo siguiente.

Si elevamos la equacion propuesta á la tercera potencia tendrémos $y^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} - \&c.$, ó dividiendo por 6, $\frac{y^3}{6} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12}$

(1) *Commercium Epistolicum.*

$+ \frac{13x^7}{720} -$ &c. Sumando esta equacion con la propuesta resultará $y + \frac{y^3}{6} = x - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{120}\right)x^5 + \left(\frac{13}{720} - \frac{1}{5040}\right)x^7 -$ &c. y haciendo las reducciones correspondientes $y + \frac{y^3}{6} = x - \frac{3x^5}{40} + \frac{x^7}{56}$ $-$ &c.

Para hacer que x^5 desaparezca de esta equacion, elevarémos la propuesta á la quinta potencia, y hallarémos $y^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} +$ &c.; de donde inferirémos $\frac{3y^5}{40} = \frac{3x^5}{40} - \frac{x^7}{16} +$ &c., y por consiguiente $y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{56}\right)x^7 +$ &c. $= x - \frac{5x^7}{112}$ $+$ &c.

Del mismo modo hallariamos $\frac{5y^7}{112} = \frac{5x^7}{112} -$ &c., $y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} = x -$ &c.; &c., y por consiguiente $x = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} +$ &c. $= y + \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \frac{3y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5 y^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} +$ &c. La ley que siguen los diferentes términos de esta serie se manifiesta suficientemente para poderla continuar quanto se tenga por conveniente; y es la misma que hallamos en el núm. 100.

266. Si la potencia de la incógnita en el primer término de la serie fuese superior á la primera; seria fácil determinar las potencias sucesivas á las quales se deberia elevar la equacion propuesta para eliminar sucesivamente los otros términos.

Si por exemplo la equacion propuesta fuese $y = ax^2 + bx^3 + cx^4$ $+$ &c.; tendriamos que elevarla á la potencia $\frac{3}{2}$ para eliminar el término bx^3; á la segunda potencia para eliminar el término cx^4; &c.

267. Finalmente si el primer término de la serie fuese constante como en la equacion $y = k + ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ &c.; hariamos $y - k = z$, y tendriamos $z = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ &c.: por consiguiente $z^2 = a^2x^2 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac)\,x^4 +$ &c., $z^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^4 +$ &c., $z^4 = a^4x^4 +$ &c.; y haciendo las substituciones y reducciones correspondientes hallarémos sucesivamente $\frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 = \left(\frac{ac - 2b^2}{a^2}\right)x^3 + \left(\frac{a^2e - 2abc - b^3}{a^3}\right)x^4 +$ &c., $\frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)z^3 = \left(\frac{5b^3 - abc + a^2e}{a^3}\right)x^4 +$ &c.; y finalmente

$$x = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)z^3 - \left(\frac{5b^3 - 5abc + a^2e}{a^7}\right)z^4 + \text{\&c.}$$

268. Este resultado se puede tambien hallar por el método de los

coeficientes indeterminados suponiendo $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ &c. Para ello se elevará esta equacion á la segunda, tercera, quarta, &c. potencia; y substituyendo los valores respectivos de x^2, x^3, x^4, &c. en la equacion $z = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ &c., se transformará en una equacion idéntica, la qual dará los valores de los coeficientes A, B, C, D, &c.

Pero este método tiene el grande inconveniente de exîgir de antemano el conocimiento de la forma de la serie que se busca. En el exemplo antecedente se puede suponer $x = Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c.; pero hay una infinidad de casos en que no se puede hacer este supuesto: si por exemplo la equacion propuesta fuese $y = ax^2 + bx^3$ $+ cx^4 +$ &c. no se podria suponer $x = Ay + By^2 + Cy^3 +$ &c., á causa de que segun verémos mas adelante, la serie que expresa el valor de x no tiene la forma antecedente, sino esta $Ay^{\frac{1}{2}} + By +$ $Cy^{\frac{3}{2}} +$ &c. Por esta razon, y por la de ser muy conocido este método, no nos detendrémos en explicarle.

269. Para manifestar el uso de las fórmulas generales (núm. 264.) en los problemas relativos al método inverso de las series, supondrémos como antes, que siendo $z = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ &c., se quiera determinar el valor de z en x.

Para comparar esta equacion con $y = z + xY$, la darémos esta forma $x = \frac{z}{a} - \frac{1}{a}(bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ &c.$)$, y será $y = x$, $z = \frac{z}{a}$, $x = -\frac{1}{a}$, $Y = bx^2 + cx^3 + ex^4 +$ &c., $Z = bz^2 + cz^3$ $+ ez^4 +$ &c., $Z^2 = b^2z^4 + 2bcz^5 +$ &c., $Z^3 = b^3z^6 +$ &c., $\frac{d.Z^2}{dz}$ $= 4b^2z^3 + 10bcz^4 +$ &c., $\frac{d.^2Z^3}{dz^2} = 30b^3z^4 +$ &c., &c.; y substituyendo estos valores en la fórmula general $y = z + xZ +$ &c., escribiendo $\frac{z}{a}$ en lugar de z, se transformará en $x = \frac{z}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a^2}z^2 + \frac{c}{a^3}z^3 + \frac{e}{a^4}z^4 + \text{\&c.}\right) + \frac{1}{a^2}\left(\frac{2b^2}{a^3}z^3 + \frac{5bc}{a^4}z^4 + \text{\&c.}\right) - \frac{1}{a^3}$ $\frac{5b^3}{a^4}z^4 +$ &c.; ó $x = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)z^3 -$ .... $\left(\frac{5b^3 - 5abc + a^2e}{a^7}\right)z^4 +$ &c.; lo mismo cabalmente que hallamos antes.

Exemplo 2º Sea $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + ex^5 +$ &c. la equacion propuesta: y supongamos que se pida el valor de x.

Para compararla á la equacion $y = z + xY$, harémos $x^2 = \sigma$, y se transformará en $y = a\sigma + b\sigma^{\frac{3}{2}} + c\sigma^2 + e\sigma^{\frac{5}{2}} +$ &c. ó en $\sigma = \frac{y}{a} -$ $\frac{1}{a}(b\sigma^{\frac{3}{2}} + c\sigma^2 + e\sigma^{\frac{5}{2}} +$ &c.$)$, y por consiguiente será $y = \sigma$, $z =$

$\frac{y}{a}$, $x = -\frac{1}{a}$, $Z = bz^{\frac{3}{2}} + cz^2 + ez^{\frac{5}{2}} + \&c.$, $u = \sigma^{\frac{1}{2}}$, $\mathfrak{G} = z^{\frac{1}{2}}$, $Z^2 = b^2z^3 + 2bcz^{\frac{7}{2}} + \&c.$, $Z^3 = b^3z^{\frac{9}{2}} + \&c.$, $\frac{d\mathfrak{G}}{dz} = \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{2}$, $Z\frac{d\mathfrak{G}}{dz} = \frac{1}{2}(bz + cz^{\frac{3}{2}} + ez^2 + \&c.)$, $\frac{d.Z^2\frac{d\mathfrak{G}}{dz}}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}b^2z^{\frac{3}{2}} + 6bcz^2 + \&c.\right)$, $\frac{d^2.Z^3\frac{d\mathfrak{G}}{dz}}{dz^2} = 6b^3z^2 + \&c., \&c.$; y substituyendo estos valores en la fórmula general $u = \mathfrak{G} + xZ\frac{d\mathfrak{G}}{dz} + \&c.$, y $\frac{y}{a}$ en lugar de z, tendrémos $\sigma^{\frac{1}{2}} = x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a}\left(b\frac{y}{a} + c\frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} + e\frac{y^2}{a^2} + \&c.\right) + \frac{1}{4a^2}\left(\frac{5}{2}b^2\frac{y^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}} + bc\frac{y^2}{a^2} + \&c.\right) - \frac{b^3y^3}{a^6} - \&c.$, ó $x = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{b}{2a^2}y + \left(\frac{5b^2 - 4ac}{8a^{\frac{7}{2}}}\right)y^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2b^3 - 3abc + a^2e}{2a^5}\right)y^2 + \&c.$

270. Este exemplo manifiesta evidentemente la superioridad del método actual sobre el de las eliminaciones sucesivas, y sobre el de los coeficientes indeterminados. Este, segun observamos tiene el inconveniente de que para emplearle es necesario conocer la forma de la serie: y aunque el método de las eliminaciones sucesivas da á conocer dicha forma; como en el exemplo presente la incognita x está elevada á la segunda potencia en el primer término de la serie $ax^2 + bx^3 + cx^4 + \&c.$ que forma el segundo miembro de la equacion propuesta; despues de eliminadas x^3, x^4, &c. seria necesario para hallar x sacar la raiz quadrada de la serie que resultare en virtud de estas eliminaciones: cuya operacion es bastante embarazosa. El método actual reune todas las ventajas; pues no solamente da á conocer la forma de la serie, sino tambien el valor de una funcion qualquiera de la incognita: es mucho mas breve que los antecedentes, y se aplica con igual facilidad á muchos casos en que los demas métodos serian impracticables, conforme se verá en el exemplo siguiente.

Exemplo 3.º Sea $z = y - \lambda(a\ \text{sen.}\ my + b\ \text{sen.}\ ny + \&c.)$ la equacion propuesta, por medio de la qual se quiere determinar el valor de y en z.

Si la damos esta forma $y = z + \lambda(a\ \text{sen.}\ my + b\ \text{sen.}\ ny + \&c.)$, y la comparamos con $y = z + xY$; será $x = \lambda$, $Y = a\ \text{sen.}\ my + b\ \text{sen.}\ ny + \&c.$, $Z = a\ \text{sen.}\ mz + b\ \text{sen.}\ nz + \&c.$, $Z^2 = a^2\ \text{sen.}^2\ mz + 2ab\ \text{sen.}\ mz\ \text{sen.}\ nz + b^2\ \text{sen.}^2\ nz + \&c.$ $\frac{d.Z^2}{dz} = 2(ma^2\ \text{sen.}\ mz\ \text{cos.}\ mz + abm\ \text{sen.}\ nz\ \text{cos.}\ mz + abn\ \text{sen.}\ mz\ \text{cos.}\ nz + nb^2\ \text{sen.}\ nz\ \text{cos.}\ nz + \&c.)$; pero $2\ \text{sen.}\ mz\ \text{cos.}\ mz = \text{sen.}\ 2mz$, $2\ \text{sen.}\ nz\ \text{cos.}\ nz = \text{sen.}\ 2nz$, $2\ \text{cos.}\ mz\ \text{sen.}\ nz = \text{sen.}\ (m+n)z - \text{sen.}\ (m-n)z$, $2\ \text{sen.}\ mz\ \text{cos.}\ nz = \text{sen.}\ (m+n)z + \text{sen.}\ (m-n)z$, luego $\frac{d.Z^2}{dz} = ma^2\ \text{sen.}\ 2mz + (m+n)ab\ \text{sen.}\ (m+n)z - (m-n)ab\ \text{sen.}\ (m-n)z + nb^2\ \text{sen.}\ 2nz + \&c.$; y por consiguiente $y = z + \lambda(a\ \text{sen.}\ mz + b\ \text{sen.}\ nz + \&c.) + \frac{\lambda^2}{2}(ma^2\ \text{sen.}\ 2mz + (m+n)ab\ \text{sen.}\ (m+n)z - (m-n)ab\ \text{sen.}\ (m-n)z + nb^2\ \text{sen.}\ 2nz + \&c.) + \&c.$

271 Para desenvolver en series las funciones de dos cantidades variables, harémos con la fórmula general (a) (núm. 187.) un raciocinio semejante al que hicimos con la fórmula $f(x+k) = y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.$ (núm. 100.) para desenvolver las funciones de una sola variable.

En efecto; si suponemos que haciendo $x = 0$ é $y = 0$ en dicha fórmula general, las funciones z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, &c. se transforman respectivamente en las cantidades finitas ó cero A, B, C, D, E, F, &c; será $f(k,h) = A + kB + hC + \frac{k^2}{2}D + khE + \frac{h^2}{2}F + \&c.$; y como las cantidades k, h son indeterminadas, haciendo $k = x$, y $h = y$, tendrémos

$$z = f(x,y) = A + xB + yC + \frac{x^2}{2}D + xyE + \frac{y^2}{2}F + \&c.$$

Sea por exemplo $z = (a+x+y)^n$: será $\frac{dz}{dx} = n(a+x+y)^{n-1} = \frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = n(n-1)(a+x+y)^{n-2} = \frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dy^2}$, &c.; y haciendo $x = 0$ é $y = 0$, tendrémos $A = a^n$, $B = na^{n-1} = C$, $D = n(n-1)a^{n-2} = E = F$, &c.; y por consiguiente $z = (a+x+y)^n = a^n + na^{n-1}x + na^{n-1}y + n(n-1)a^{n-2}\frac{x^2}{2} + n(n-1)a^{n-2}xy + n(n-1)a^{n-2}\frac{y^2}{2} + \&c.$

272 Si alguna de las cantidades A, B, C, &c. fuese infinita; seria una señal segura de que la funcion propuesta no se podria desenvolver en una serie de la forma $A + Bx + Cy + \&c.$; y lo mismo dirémos del caso en que todas las cantidades A, B, C, &c. fuesen nulas.

273. Tambien puede suceder que z sea una funcion implícita de las variables x é y dada por una ó mas equaciones.

Estos diferentes casos exîgen consideraciones particulares que los límites en que nos hemos propuesto circunscribir esta obra no nos permiten hacer. Ademas, sucede por lo comun, que las funciones de dos ó mas cantidades variables, se desenvuelven solamente respecto á una de las variables que contienen, suponiendo constantes todas las demas: por consiguiente, en este supuesto se deben considerar como funciones de una sola variable, y se podrán desenvolver en series por los métodos declarados (núm. 100. y sig.) relativamente á estas funciones.

De los máxîmos y mínimos de las funciones de dos cantidades variables.

274. Los máxîmos y mínimos valores de una funcion de dos cantidades variables, se pueden determinar por dos métodos distintos: 1º Considerando sucesivamente una de las cantidades como variable y la otra como constante. 2º Haciendo variar á un mismo tiempo ámbas cantidades y empleando la fórmula general (a) núm. 187. Nosotros expondrémos únicamente el segundo método, por ser mas natural, elegante y fácil que el primero.

Sea z una funcion de dos cantidades variables x é y, la qual es un máxîmo ó un mínimo quando $x = a$, é $y = b$. Si substituimos $x + k$ en lugar de x, y $y + h$ en lugar de y; se transformará en $z + k\frac{dz}{dx} + h\frac{dz}{dy} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + kh\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} +$ &c. Sentado esto: supongamos que los valores a, b de x é y relativos al máxîmo ó al mínimo transformen las funciones z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, &c. respectivamente en A, B, C, D, E, F, &c.; es evidente que por la naturaleza del máxîmo y del mínimo (núm. 103.), la cantidad A, será mayor que $A + kB + hC + \frac{1}{2}(k^2D + 2khE + h^2F) +$ &c. en el máxîmo, y menor en el mínimo; y por consiguiente $kB + hC + \frac{1}{2}(k^2D + 2khE + h^2F) +$ &c. será una cantidad negativa en el máxîmo, y positiva en el mínimo; ya sean positivas ó negativas las cantidades arbitrarias k, h, y tan pequeñas como se quisiere. De donde inferirémos por un razonamiento análogo al del núm. 109., que esta condicion no puede verificarse á ménos de ser $B = 0$, y $C = 0$; así quando la funcion z es un máxîmo ó un mínimo, será necesariamente $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$; y por consiguiente estas equaciones darán los valores respectivos a, b, de x é y correspondientes al máxîmo ó al mínimo.

En este caso la expresion $Bk + Ch + \frac{1}{2}(Dk^2 +$ &c.$) +$ &c.,

se reduce á $\frac{1}{2}(Dk^2 + 2Ekh + Fh^2) +$ &c.; y para que el valor A de z correspondiente á $x = a$ é $y = b$, sea un máxîmo ó un mínimo, será necesario que la cantidad $Dk^2 + 2Ekh + Fh^2$ sea siempre negativa en el máxîmo, y positiva en el mínimo, independientemente de los signos y valores que se pueden dar á k, y h.

Pero si transformamos dicha cantidad en $D\left(k + \frac{Eh}{D}\right)^2 + h^2\left(F - \frac{E^2}{D}\right)$; (que para abreviar llamarémos γ), echarémos de ver; que como las cantidades $\left(k + \frac{Eh}{D}\right)^2$, h^2, son siempre positivas, γ no podrá serlo igualmente á menos de ser $D > 0$, $F - \frac{E^2}{D} > 0$; ó lo que es lo mismo $D > 0$, $DF - E^2 > 0$.

Por la misma razon, la cantidad γ no podrá ser siempre negativa, sin que lo sean tambien D, y $F - \frac{E^2}{D}$, de donde resultan las condiciones $D < 0$, $DF - E^2 > 0$. Por consiguiente

1º Para que la cantidad A sea un máxîmo ó un mínimo; es necesario que se verifique la condicion $DF - E^2 > 0$, en cuyo caso A será un máxîmo ó un mínimo segun fuere $D < 0 > 0$.

2º En el máxîmo y en el mínimo, las cantidades D, F tienen siempre un mismo signo; esto es negativo en el máxîmo, y positivo en el mínimo.

3º Si una de las cantidades D, F, ó todas dos fuesen $= 0$, sin que lo fuese al mismo tiempo E; A no seria ni un máxîmo ni un mínimo.

El célebre *Leonardo Euler* en su cálculo diferencial (1) dice que si las cantidades D, F son ambas positivas ó negativas, habrá seguramente un máxîmo ó un mínimo: un mínimo en el primer caso; y un máxîmo en el segundo. Pero *Mr. de Lagrange* hizo ver en las Memorias de Turin (2) que esta condicion no bastaba para asegurar la exîstencia del máxîmo ó del mínimo; y que en ambos casos era necesario ademas que (segun acabamos de demostrar) se verificase la condicion $DF - E^2 > 0$.

275. Si los valores a, b de x é y, dados por las equaciones $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$, reduxesen á cero los coeficientes diferenciales de segundo órden $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dxdy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, sin que desapareciesen al mismo tiempo los de tercer órden; la cantidad A no seria un máxîmo ni un mínimo. Pero si los coeficientes diferenciales de tercer órden desapareciesen al mismo tiempo que los del segundo; la cantidad A, seria un

(1) *Parte segunda cap. IX.*
(2) *Tomo 1. pág. 18.*

máxîmo ó un mínimo con tal que la suma de los términos de quarto órden en la cantidad γ, sea siempre positiva ó negativa, independientemente de los signos de k y h; y sean estas cantidades tan pequeñas como se quisiere. Si representamos por L, M, N, O, P, los valores respectivos de $\frac{d^4z}{dx^4}$, $\frac{d^4z}{dx^3dy}$, $\frac{d^4z}{dx^2dy^2}$, $\frac{d^4z}{dxdy^3}$, $\frac{d^4z}{dy^4}$: la suma de los términos de quarto órden suprimiendo el denominador comun 24, será $Lk^4 + 4Mk^3h + 6Nk^2h^2 + 4Okh^3 + Ph^4$; y transformándola en $L\left(k^2 + \frac{2Mkh}{L}\right)^2 + P\left(h^2 + \frac{2Okh}{P}\right)^2 + 2k^2h^2\left(3N - \frac{2M^2}{L} - \frac{2O^2}{P}\right)$, inferirémos que dicha suma será siempre una cantidad positiva, si lo son las cantidades L, P, $3N - \frac{2M^2}{L} - \frac{2O^2}{P}$; y una cantidad negativa, siempre que lo sean estas cantidades. Por consiguiente multiplicando por L la tercera, concluirémos

Que para que en el supuesto actual, A sea un máxîmo ó un mínimo, debe necesariamente verificarse en ambos casos la condicion $3LN - 2M^2 - \frac{2LO^2}{P} > 0$; y ademas debe ser en el máxîmo $L < 0$, $P < 0$; y en el mínimo $L > 0$, $P > 0$.

Por donde se ve; que á las condiciones $L < 0$, $P < 0$, dadas por *Mr. Euler* para el máxîmo; y $L > 0$, $P > 0$, para el mínimo; se debe añadir en ambos casos la condicion $3LN - 2M^2 - \frac{2LO^2}{P} > 0$.

276. Por los mismos principios se hallarán las condiciones relativas á los máxîmos y mínimos de las funciones que contienen tres ó mas variables. Pero á fin de no extendernos demasiado omitirémos la consideracion de estas funciones; y terminarémos este asunto aplicando dichos principios á la resolucion de los dos problemas siguientes.

Problema 1º *Dividir la cantidad dada* a *en tres partes tales que su producto sea el mayor posible ó un máxîmo.*

Si llamamos x una de dichas partes, é y otra; la tercera será $a - x - y$; y su producto $xy\,(a - x - y)$: por consiguiente será $z = xy\,(a - x - y)$, $\frac{dz}{dx} = y\,(a - 2x - y)$, $\frac{dz}{dy} = x\,(a - 2y - x)$, $\frac{d^2z}{dx^2} = -2y$, $\frac{d^2z}{dxdy} = a - 2x - 2y$, $\frac{d^2z}{dy^2} = -2x$; y haciendo $\frac{dz}{dx} = y\,(a - 2x - y) = 0$, $\frac{dz}{dy} = x\,(a - 2y - x) = 0$, los factores $a - 2x - y$, $a - 2y - x$, dan $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$; de donde inferirémos $D = -\frac{2a}{3}$, $E = -\frac{a}{3}$, $F = -\frac{2a}{3}$.

Es evidente que estos valores cumplen con la condicion $DF - E^2 > 0$; y como por otra parte es $D < 0$, concluirémos que el producto $xy\,(a - x - y)$ es un máxîmo quando $x = y = \frac{a}{3}$: esto es quando las tres partes en que se divide la cantidad dada a son iguales; y que el producto máxîmo A es $= \frac{a^3}{27}$.

Problema 2º *Hallar las máxîmas y mínimas ordenadas de una esfera, suponiendo en el centro el orígen de las coordenadas.*

Si llamamos r el radio de la esfera, su equacion será en este supuesto $z^2 = r^2 - x^2 - y^2$; de donde se infiere $z\frac{dz}{dx} = -x$, $z\frac{dz}{dy} = -y$, $z\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = -1$, $z\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{dz}{dy}\frac{dz}{dx} = 0$, $z\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = -1$.

Las equaciones $\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z} = 0$, $\frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z} = 0$, dan $x = 0$, é $y = 0$; y substituyendo estos valores en las demas equaciones tendrémos $z = \pm r = A$, $D = \mp\frac{1}{r}$, $E = 0$, $F = \mp\frac{1}{r}$; cuyos valores cumplen con la condicion $DF - E^2 > 0$. Por consiguiente á causa del doble signo de D, concluirémos que la ordenada z es un máxîmo y un mínimo en el orígen ó centro: un máxîmo $= r$, y un mínimo $= -r$.

De las funciones de dos cantidades variables, que en ciertos casos particulares se reducen á las expresiones indeterminadas $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, y $\infty - \infty$.

277. Quando una funcion fraccionaria contiene dos cantidades variables; puede reducirse á la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ de dos modos:

1º Suponiendo un valor determinado á una sola de las variables;
2º Dando á ambas variables ciertos valores conocidos. En el primer caso se podrá determinar el valor de la funcion propuesta relativamente á la variable que se supone igual á una cantidad dada, por los métodos declarados (núm. 119. y sig.) relativamente á las funciones de una sola variable; y entonces el valor de dicha funcion dependerá únicamente del que se dé á la otra variable. Tal es por exemplo la funcion $\frac{a^2 - x^2}{y\,(a - x)} = z$, la qual se reduce á $\frac{0}{0}$ en el supuesto de $x = a$. Pero como en este caso (núm. 126.) es $\frac{a^2 - x^2}{a - x} = 2a$, será tam-

bien $z = \frac{2a}{y}$, y por consiguiente conociendo el valor de y, se conocerá inmediatamente el correspondiente de z.

278. En el segundo caso, el valor de la funcion propuesta podrá ser determinado ó indeterminado segun fuere la naturaleza de dicha funcion.

Para conocer en este caso si la funcion propuesta es efectivamente indeterminada; ó si tiene un valor determinado; supondrémos que los valores respectivos de x é y, que la reducen á $\frac{0}{0}$ son a, b: y substituyendo $a + k$ en lugar de x, y $b + h$ en lugar de y, ordenarémos el numerador y el denominador segun las potencias y productos de las cantidades indeterminadas k, h. Hecho esto; si haciendo las reducciones correspondientes resulta en el numerador ó en el denominador algun término independiente de k y de h; la funcion propuesta tendrá un valor determinado que se conocerá inmediatamente haciendo $k = 0$, $h = 0$; pero si todos los términos del numerador y del denominador estuviesen afectos de k ó de h; la funcion propuesta seria indeterminada; y en este caso se procederá conforme manifestarémos en los exemplos siguientes.

Exemplo 1º Sea $\frac{a^2y^2 - x^2y^2}{(a-x)(b-\sqrt{(b^2-y^2)})}$, la funcion cuyo valor se quiere determinar en el supuesto de $x = a$, é $y = 0$.

Es evidente que en este supuesto la funcion propuesta se reduce á $\frac{0}{0}$: pero si substituimos $a + k$ en lugar de x, y h en lugar de y, se transformará en $\frac{a^2h^2 - h^2(a^2 + 2ak + k^2)}{-k(b - \sqrt{b^2 - h^2})} = \frac{h^2(2a+k)}{b - (b^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}}$, ó desenvolviendo el binomio que incluye el radical, y reduciendo, en $\frac{2a+k}{\frac{1}{2b} + \frac{h^2}{8b^3} + \&c.}$ cuya cantidad haciendo $k = 0$, $h = 0$, se reduce á $4ab$; y por consiguiente este es el valor de la funcion propuesta en el supuesto de $x = a$, é $y = 0$.

Exemplo 2º Se pide el valor de la funcion $\frac{c(a-x)(b-y)}{(a-x)^2 + (b-y)^2}$ en el supuesto de $x = a$ é $y = b$.

Como estos valores reducen la funcion propuesta á $\frac{0}{0}$, substituirémos $a + k$ en lugar de x, y $b + h$ en lugar de y, con lo que se transformará en $\frac{ckh}{k^2 + h^2}$.

A causa de ser arbitrarias las cantidades k, h; si suponemos $h = \beta k$ la expresion antecedente se reducirá á $\frac{c}{\frac{1}{\beta} + \beta}$, la qual siendo independiente de k, h, expresará el valor de la funcion propuesta en el supuesto de $x = a$, é $y = b$. Pero como la cantidad β es indeterminada; será tambien indeterminado el valor de la funcion propuesta en dicho supuesto. Finalmente; si observamos que el mayor valor de que es susceptible la expresion $\frac{c}{\frac{1}{\beta} + \beta}$ es $\frac{c}{2}$, correspondiente á $\beta = 1$; y el menor es $-\frac{c}{2}$ el qual corresponde á $\beta = -1$; concluirémos que en el referido supuesto la funcion $\frac{c(a-x)(b-y)}{(a-x)^2 + (b-y)^2}$ tiene una infinidad de valores comprehendidos entre los límites $\frac{c}{2}$, y $-\frac{c}{2}$.

Exemplo 3º La funcion propuesta es $\frac{c(b-y)}{a^2 - x^2}$; y se pide su valor quando $x = a$, é $y = b$, en cuyo caso se reduce á $\frac{0}{0}$.

Substituyendo $a + k$ por x, y $b + h$ por y, se transformará en $\frac{ch}{2ak + k^2}$: y haciendo $h = \beta k$, en $\frac{c\beta}{2a + k}$. Haciendo $k = 0$ en esta expresion se reduce á $\frac{c\beta}{2a}$, que á causa de la cantidad arbitraria β, es susceptible de todos los valores imaginables; y por consiguiente lo será tambien la funcion propuesta en el supuesto de $x = a$, é $y = b$.

Exemplo 4º Sirva de último exemplo la funcion........................ $\frac{(a-x)y^n - (a-y)x^n + (x-y)a^n}{(a-x)(a-y)(x-y)} = z$ cuyo valor se quiere determinar en el supuesto de $x = a$, é $y = a$.

Substituyendo $a + k$ en lugar de x, y $a + h$ en lugar de y; z se transforma en $\frac{-k(a+h)^n + h(a+k)^n + (k-h)a^n}{kh(k-h)}$; y desenvolviendo los binomios del numerador; haciendo las reducciones correspondientes, y dividiendo por $kh(k-h)$, se reducirá á $z = n\frac{n-1}{2}a^{n-2} + n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}a^{n-3}(k+h) + \&c.$; y finalmente haciendo k y h nulas tendrémos $z = n\frac{n-1}{2}a^{n-2}$: por donde se manifiesta, que el valor de la funcion propuesta quando $x = a = y$, es $n\frac{n-1}{2}a^{n-2}$.

Uso del cálculo diferencial para hallar por aproxîmacion las raices de las equaciones.

279. El teorema de *Taylor* que nos ha sido tan útil en todas las

aplicaciones del cálculo diferencial; nos servirá igualmente para determinar por aproxîmacion las raices de las equaciones.

Sea $f(x)=0$ una equacion qualquiera entre la incógnita x y cantidades conocidas; y a una cantidad que se acerca al verdadero valor de x; de manera que la diferencia entre a, y x sea una cantidad muy pequeña k; será $f(x)=f(a+k)=0$.

Sentado esto si suponemos que los valores respectivos de $f(x)$, $\frac{d.f(x)}{dx}$, $\frac{d^2.f(x)}{dx^2}$, &c. quando $x=a$, sean A, B, C, &c., y se substituye $a+k$ en lugar de x; $f(x)$ se transformará (núm. 97.) en $f(a+k)=A+kB+\frac{k^2}{2}C+$&c.; y como por el supuesto, es $f(a+k)=0$ será tambien $A+kB+\frac{k^2}{2}C+$&c. $=0$; ó despreciando los términos $\frac{k^2}{2}C+$&c. á causa de ser k una cantidad muy pequeña, tendrémos con corta diferencia $A+kB=0$, $k=-\frac{A}{B}$ y $x=a-\frac{A}{B}$.

Para continuar la aproxîmacion, supondrémos $a-\frac{A}{B}=a'$, $x=a'+k'$; y representando por A', B', las cantidades análogas á A, B; esto es los valores respectivos de $f(x)$, $\frac{d.f(x)}{dx}$ en el supuesto de $x=a'$; tendrémos del mismo modo que antes $A'+k'B'=0$, $k'=-\frac{A'}{B'}$, y $x=a'-\frac{A'}{B'}$, $=a-\frac{A}{B}-\frac{A'}{B'}$; y continuando del mismo modo, se hallará un valor de x tan aproxîmado al verdadero como se quisiere.

280. Las cantidades A', B', se suelen hallar mas fácilmente de este otro modo. Llamemos K la funcion $A+kB+\frac{k^2}{2}C+$&c.; y hagamos $-\frac{A}{B}=b$, $k=b+k'$. Es evidente que si se substituye en K, $b+k'$ en lugar de k, resultará la misma cantidad $f(a+b+k')$ que resultaria substituyendo en $f(x)$, $a'+k=a+b+k'$ en lugar de x: pero en este supuesto $f(x)$ se transforma en $A'+B'k'+$&c., y K en $K+\frac{dK}{dk}k'+\frac{d^2K}{dk^2}\frac{k'^2}{2}+$&c. suponiendo que en estas cantidades se haya substituido b en lugar de k; por consiguiente á causa de que los dos primeros términos de K se desvanecen por el supuesto de $k=b$; tendrémos $A'=\frac{b^2}{2}C+\frac{b^3}{2.3}D+$&c., y $B'=B+bC+$&c.

Exemplo 1.º Sea $x^3-2x-5=0$ la equacion propuesta: haciendo el primer miembro $=f(x)$, será $\frac{d.f(x)}{dx}=3x^2-2$; y como el valor 2 satisface con corta diferencia á dicha equacion; harémos $a=2$, y tendrémos $A=-1$, $B=10$: por consiguiente $k=\frac{1}{10}=0,1$; y $x=2,1$ con corta diferencia.

Para hallar un valor de x mas próxîmo al verdadero, harémos $a'=2,1$; y substituyendo hallarémos $A'=9,261-4,2-5=0,061$; $B'=13,23-2=11,23$; $k'=-\frac{61}{1123}=-0,0054$; y $x=2,0946$.

Si se quisiese continuar aun mas la aproxîmacion, se haria $a''=2,0946$, y se operaria como antes.

Para hallar las cantidades A', B' por el otro método, continuarémos en diferenciar la equacion propuesta, y hallarémos $C=12$, $D=6$, $E=0=F=G$, &c., y haciendo $b=0,01$, tendrémos $A'(=\frac{b^2}{2}C+\frac{b^3}{2.3}D)=0,06+0,001=0,061$; y $B'=10+1,2+0,03=11,23$, cuyos valores son precisamente los mismos que hallamos antes.

Exemplo 2.º Si la equacion propuesta fuese $x^x-100=0$, la transformariamos en x log. $x-$ log. $100=0$, ó ya que en las tablas ordinarias log. $100=2$, en x log. $x-2=0$. La simple inspeccion de la equacion propuesta manifiesta que el valor de x es mayor que 3, y menor que 4; por lo que le supondrémos $=3,5=a$; y teniendo presente (núm. 74.) que en dichas tablas es $\frac{d.\log. x}{dx}=\frac{0,43429\,\&c.}{x}$, tendrémos $f(x)=x$ log. $x-2$, $\frac{d.f(x)}{dx}=$ log. $x+0,43429$ &c.; y haciendo $x=a=3,5$; será $A=1,90424-2=-0,09576$; $B=0,54407+0,43429=0,97836$; $k=\frac{9576}{97836}=0,09788$; y $x=3,59788$.

Si quisiéramos continuar la aproxîmacion, hariamos $a'=3,5979$; ó $b=0,0979$, y procederiamos como en el exemplo antecedente.

Exemplo 3.º La equacion propuesta es x sen. $x=1,25$; y se pide el valor del arco x en el supuesto del radio $=1$.

Como el arco de 10° en partes del radio es $=0,174533$; dos ó tres tentativas bastarán para asegurarse que el arco x está entre 70 y 80°. Si le suponemos $=75°$, será $a=7,5\times0,174533=1,309$; á causa de $f(x)=x$ sen. $x-1,25$; tendrémos $\frac{d.f(x)}{dx}=$ sen. $x+x$ cos. x; $A=1,309\times$ sen. $75°-1,25=0,0144$; $B=$ sen. $75°+1,309\times$ cos. $75°=1,3047$; y $k=-\frac{144}{13047}=-0,01103$.

Este valor de k es en partes del radio; reduciéndole en grados á razon de $0,017453$ cada grado, será $k=-37'.51''$., y por consiguiente $x=74°.22'.9''$. con cortísima diferencia.

281. Si en vez de una sola equacion, tuviésemos las dos equaciones $z=0$, $u=0$, entre las incógnitas x, é y; y supusiésemos que las cantidades a, b, se acercan á los valores respectivos de x é y: hariamos $x=a+k$, $y=b+h$; y suponiendo que quando $x=a$, é $y=b$, las expresiones z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, &c.; u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, &c., se transformen respectivamente en A, B, C; &c.; A', B', C', &c.; despreciando los términos afectos de dos ó mas dimensiones en k, y h por ser estas cantidades muy pequeñas tendriamos para determinar k y h las dos equaciones de primer grado $A+Bk+Ch=0$, $A'+B'k+C'h=0$: y en el caso de que esta aproxîmacion no se juzgase suficiente, se supondria $a+k=a'$, $b+h=b'$, $x=a'+k'$, é $y=b'+h'$; y substituyendo estos valores de x é y en las equaciones $z=0$, $u=0$, resultarán dos equaciones de primer grado análogas á las antecedentes, las quales darán los valores respectivos de las nuevas correcciones k', h'.

Sean por exemplo $x^y-120=0$, $y^x-248=0$ las equaciones propuestas, y supongamos que habiendo hecho algunas tentativas, resulte que el valor de x se acerca mucho á 5; y el de y á 3.

Transformando para mayor facilidad dichas equaciones en y log. $x=$ log. $120=2,0792$, x log. $y=$ log. $248=2,3945$; harémos $z=y$ log. $x-2,0792$; $u=x$ log. $y-2,3945$; $a=5$; $b=3$; y observando que en estos cálculos nos servimos de las tablas ordinarias; tendrémos $\frac{dz}{dx}=0,4343\frac{y}{x}$; $\frac{dz}{dy}=$ log. x; $\frac{du}{dx}=$ log. y; $\frac{du}{dy}=0,4343\frac{x}{y}$; $A=0,0177$; $B=0,2606$; $C=0,699$; $A'=-0,0089$; $B'=0,4771$; $C'=0,7238$; y las dos equaciones $0,0177+0,2606k+0,699h=0$; $-0,0089+0,4771k+0,7238h=0$, de las quales se infiere $k=0,13$; $h=0,074$; y por consiguiente $x=5,13$; é $y=2,926$.

Continuacion de las aplicaciones del cálculo diferencial á la teórica de las líneas curvas.

282. En las aplicaciones que en el capítulo V. hemos hecho del cálculo diferencial á la teórica de las líneas curvas, hemos considerado estas líneas relativamente á sus coordenadas perpendiculares, á causa de que hablando generalmente la equacion de una curva referida á dos exes perpendiculares entre sí, es mas sencilla que la que resulta expresando la naturaleza de dicha curva de un otro modo qualquiera. Sin embargo; hay algunas curvas transcendentes las quales se refieren naturalmente á sus coordenadas polares; y por otra parte conviene muchas veces considerar las curvas algebráicas relativamente á estas coordenadas: así en la Mecánica y en la Astronomía se refieren comunmente las secciones cónicas á las coordenadas polares, tomando el orígen de las coordenadas en el foco; cuyo orígen se llama *el polo*. Por estas razones nos ha parecido conveniente considerar algunas curvas que se refieren á las coordenadas polares; y aplicar al mismo tiempo el cálculo diferencial á estas curvas.

Si suponemos que mientras que la línea AB' prolongada indefinidamente (*fig.* 79.), se mueve uniformemente al rededor del centro A del círculo $BNCB$; el punto móvil M se mueva en dicha línea con una velocidad uniforme y tal que ande el radio AB en el mismo tiempo que este radio describe el círculo $BNCD$; el punto M describirá con su movimiento la curva *espiral* $AMDB$ que inventó *Conon de Siracusa* (1), la qual se llama comunmente *la espiral de Archîmedes*, á causa de que este célebre Geómetra descubrió sus principales propiedades.

283. Si por un punto qualquiera M de la espiral, se tira el radio AN; á causa de la uniformidad de los dos movimientos que describen esta curva, la razon del arco BN á la circunferencia $BNCB$, será igual á la de AM al radio AN ó AB. Por consiguiente, llamando el arco BN, z; AM, u; π, la razon del radio á la circunferencia; y suponiendo $AB=1$; tendrémos $z:\pi::u:1$; de donde se infiere $u=\frac{z}{\pi}$.

284. El punto móvil M, que en la primera revolucion de la línea AB, describe la porcion $AMEB$ de la espiral; describirá en la segunda revolucion, la continuacion $BM'B'$ de dicha curva; y como los movimientos se pueden continuar indefinidamente; la espiral $AMDB$ &c. dará un número indefinito de vueltas al rededor del punto A, alejándose continuamente de este punto; de manera, que la distancia de dicho punto á un punto qualquiera de la curva será al radio $AB=1$, como el arco z andado por el punto B desde el principio del movimiento, á la circunferencia $BNCB=\pi$: por consiguiente la equacion de la espiral $AMDB$ &c. continuada indefinidamente es $u=\frac{z}{\pi}$.

285. Las variables z, u de esta equacion se llaman *las coordenadas polares*: el centro A del círculo $BNCB$, es *el polo*; AM, *el radio vector*, y se considera como la ordenada de la curva; y el arco BN, como la abscisa.

286. La espiral de *Archîmedes*, es un caso particular de las curvas representadas por la equacion $u=az^n$ dando á n todos los valores posibles. Si se supone $n=\frac{1}{2}$; y se toma por ordenada la distancia

(1) *Archîmedes per Barrow*; *pag.* 42 *y sig.*

MN (*fig.* 80.) del punto M de la curva, al círculo $BNCB$; la equacion $u^2 = a^2 z$, ó (haciendo $a^2 = p$) $u^2 = pz$, será la de *la espiral parabólica* $BMAE$.

287. Haciendo $n = -1$, resultará la equacion $uz = a$, la qual pertenece á la *espiral hyperbólica* AME (*fig.* 81.).

288. Si n es un número positivo; las espirales representadas por la equacion $u = az^n$ tienen su orígen en el punto A (*fig.* 79. *y* 80.); pero quando n es negativa, el orígen de las espirales (*fig.* 81.) está una distancia infinita del punto A; y á medida que el arco $BN = z$ crece, el radio vector $AM = u$ disminuye continuamente; de modo que á cada revolucion del punto B, el punto M se va acercando al centro A sin que jamas llegue á confundirse con dicho centro.

289. Si la relacion entre las coordenadas z, y u fuese expresada por la equacion $z = \log. u$; la curva AME (*fig.* 82.) sería *la espiral logarítmica.*

290. Conociendo la equacion de una curva relativamente á las coordenadas rectangulares; se puede transformar en la que pertenece á las coordenadas polares: y recíprocamente, conociendo la equacion de una curva referida á sus coordenadas polares; se puede hallar la relacion de sus coordenadas rectangulares x, é y, ó una equacion diferencial de primer órden entre estas coordenadas, y sus diferenciales dx, y dy.

Supongamos que el punto A (*fig.* 79.) sea el orígen de las coordenadas rectangulares $AP = x$, $PM = y$, y llamemos m el arco BD comprehendido entre el orígen B del arco z, y el punto D donde el exe AD de las abscisas corta el círculo $BND'B$: será prescindiendo de los signos $u = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $DN = z - m$, $x = AM \cos. ND' = u \cos. (z - m)$, é $y = AM \text{ sen. } ND' = u \text{ sen. } (z - m)$; y substituyendo los dos últimos valores en la equacion que expresa la relacion de las coordenadas x é y, se transformará en otra que contendrá solamente las variables z, y u; y por consiguiente expresará la relacion de las coordenadas polares.

291. Si se supone que el exe AD de las abscisas pasa por el orígen B del arco z (*fig.* 83.); será $m = 0$, y por consiguiente $x = u \cos. z$, é $y = u \text{ sen. } z$.

Supongamos por exemplo que la curva, DMD' sea una elipse cuyo semiexe mayor $ED = a$; el menor $EF = b$; la excentricidad $AE = e$; la abscisa $AP = x$; y la ordenada $PM = y$. Será su equacion $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(b^2 - x^2 + 2ex)$; y substituyendo los valores antecedentes de x é y, se transformará en $u^2 \text{ sen.}^2 z = \frac{b^2}{a^2}(b^2 - u^2 \cos.^2 z + 2eu \cos. z)$, la qual expresa la relacion de las coordenadas polares $BN = z$, y $AM = u$.

Esta equacion se puede reducir á una forma mucho mas sencilla; pues si en lugar de a^2 se substituye su igual $b^2 + e^2$, y se tiene presente que $\text{sen.}^2 z + \cos.^2 z = 1$; se transformará en $b^2 u + e^2 u^2 \text{ sen.}^2 z = b^4 + 2b^2 eu \cos. z$, y substituyendo $1 - \cos.^2 z$ en lugar de $\text{sen.}^2 z$, en $(b^2 + e^2) u^2$ ó $a^2 u^2 = b^4 + 2b^2 eu \cos. z + e^2 u^2 \cos.^2 z$; y finalmente sacando la raiz quadrada tendrémos $au = b^2 + eu \times \cos. z$, ó $u = \frac{b^2}{a - e \cos. z}$.

292. De las equaciones $x = u \cos. z$, $y = u \text{ sen. } z$, se infiere $\cos. z = \frac{x}{u}$, $\text{sen. } z = \frac{y}{u}$; y substituyendo estos valores en una equacion qualquiera que contenga solamente u, y los senos y cosenos del arco z; se transformará en otra entre las variables u, x, é y; y eliminando u por medio de la equacion $u = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, resultará la relacion de las coordenadas rectangulares x, é y.

293. Pero si la equacion de la curva relativamente á las coordenadas polares incluyese el arco z; no se podria hallar una equacion algebráica entre x, é y; pues no exîste relacion alguna algebráica entre un arco z, y su seno ó su coseno: pero se puede hallar una equacion diferencial que incluya solamente las coordenadas x é y, y sus diferenciales dx y dy.

En efecto; si diferenciamos las equaciones $u = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $x = u \cos. (z - m)$, $y = u \text{ sen. } (z - m)$; tendrémos $du = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, $dx = du \cos. (z - m) - udz \text{ sen. } (z - m)$, $dy = du \text{ sen. } (z - m) + udz \cos. (z - m)$; y eliminando du por medio de las dos últimas equaciones, resulta $dz = \frac{dy \cos. (z - m) - dx \text{ sen. } (z - m)}{u}$, y substituyendo por u, $\cos. (z - m)$ y $\text{sen. } (z - m)$ sus valores respectivos, $dz = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$.

294. Por medio de esta equacion, y de las que expresan los valores respectivos de du, u, x, é y; será fácil eliminar de la equacion de la curva y de su diferencial, las cantidades u, $\text{sen. } (z - m)$, $\cos. (z - m)$, du, y dz; y luego despues la variable z por medio de las dos equaciones que resultan.

Sea por exemplo la curva propuesta *la espiral de Archîmedes* (*figura* 79.). Tendrémos $\pi u = z$, y $\pi du = dz$; y substituyendo en esta equacion por dz, y du, sus valores respectivos, se transformará en $\pi(xdx + ydy) = \frac{xdy - ydx}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, la qual solo contiene las coordenadas rectangulares x é y, y sus diferenciales dx, dy.

Si la última equacion hubiese incluido el arco z; le hubiéramos eliminado por medio de dicha equacion, y de la propuesta $\pi u = z$.

295. Para determinar los valores respectivos de la tangente, subtangente, normal, y subnormal en las curvas referidas á las coordenadas polares; transformarémos las fórmulas del núm. 130. relativas

á las coordenadas rectangulares, en las que corresponden á las coordenadas polares, substituyendo en dichas fórmulas los valores de x, y, dx, y dy que hallamos antes. Haciendo estas substituciones en la fórmula $y\frac{dx}{dy}$ de la subtangente, tendrémos $PT = u$ sen. $(z-m)$ $\frac{du \cos.(z-m) - udz \operatorname{sen.}(z-m)}{du \operatorname{sen.}(z-m) + udz \cos.(z-m)}$.

296. Como la posicion del exe AD de las abscisas es arbitraria; podemos simplificar muchísimo esta expresion de PT suponiendo dicho exe perpendicular al radio vector AM (*fig.* 84.), el qual en este caso se confunde con la ordenada PM; y será sen. $(z-m) = 1$, cos. $(z-m) = 0$, y por consiguiente PT ó $AT = -u^2\frac{dz}{du}$.

En este mismo supuesto será la tangente $TM = \sqrt{(AM)^2 + (AT)^2} = u\sqrt{\left(1 + u^2\left(\frac{dz}{du}\right)^2\right)}$; y la tangente del ángulo AMT que la tangente en el punto M forma con el radio vector $= -u\frac{dz}{du}$.

Con la misma facilidad hallariamos las expresiones de la subnormal, y de la normal.

Sea por exemplo AMB la espiral de *Archîmedes* cuya equacion es $u = \frac{z}{\pi}$. Será $\frac{dz}{du} = \pi$, y $AT = -u^2\frac{dz}{du} = -uz$ igual á la longitud del arco MEF trazado con el radio vector AM.

La tangente MT será $= u(1 + u^2\pi^2) = \frac{z}{\pi}\sqrt{(1 + z^2)}$; y la tangente del ángulo AMT, igual á $-z =$ al arco NDB.

En la espiral parabólica, cuya equacion es $u^2 = pz$ (*fig.* 80.) tendrémos $\frac{dz}{du} = \frac{2u}{p}$; $AT = -u^2\frac{2u}{p} = -2uz =$ al duplo del arco FG trazado con el radio $AF = MN$; y la tangente del ángulo AMT, igual á $-2z =$ al duplo del arco BN.

Si la curva AME (*fig.* 81.) fuese la espiral hyperbólica seria $uz = a$, $\frac{dz}{du} = -\frac{a}{u^2}$, y $AT = a = BC$: por donde se ve, *que la subtangente de la espiral hyperbólica es constante é igual al arco* BC.

La tangente del ángulo AMT, se hallará del mismo modo que en la espiral de *Archîmedes*, igual al arco BN.

Finalmente, siendo $z =$ log. u la equacion de la espiral logarítmica $ABME$ (*fig.* 82.); tendrémos suponiendo el módulo $= a$, $\frac{dz}{du} = \frac{a}{u}$; $AT = -au$; y la tangente del ángulo AMT, igual á $-a$: cuyo resultado manifiesta que en todos los puntos de esta curva, la

tangente forma un mismo ángulo con el radio vector; y que la tangente de dicho ángulo es igual al módulo.

297. Para hallar la expresion del radio de curvatura relativamente á las coordenadas polares, diferenciarémos las equaciones $dy = du$ sen. $(z-m) + udz$ cos. $(z-m)$, $dx = du$ cos. $(z-m) - udz$ sen. $(z-m)$ considerando dz como constante, y tendrémos

$$d^2y = d^2u \operatorname{sen.}(z-m) + 2dudz \cos.(z-m) - udz^2 \operatorname{sen.}(z-m)$$

$$d^2x = d^2u \cos.(z-m) - 2dudz \operatorname{sen.}(z-m) - udz^2 \cos.(z-m)$$

y observando que sen. $(z-m)^2 +$ cos. $(z-m)^2 = 1$, será $dx^2 + dy^2 = du^2 + u^2dt^2$, y $dxd^2y - dyd^2x = 2du^2dz - udzd^2u + u^2dz^3$.

Sentado esto; como en esta transformacion consideramos ambas diferenciales dx, dy como variables; substituirémos en la expresion (núm. 161.) $-\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ del radio de curvatura, $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\frac{d^2x}{dx^2}$ (núm. 203.) en lugar de $\frac{d^2y}{dx^2}$; y multiplicando el numerador y el denominador por dx^3, tendrémos la fórmula $-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x}$ correspondiente al supuesto de dx, y dy variables; y substituyendo los valores que acabamos de hallar, se transformará en $\frac{(du^2+u^2dz^2)^{\frac{3}{2}}}{udzd^2u - 2du^2dz - u^2dz^3}$ $= \frac{\left(\frac{du^2}{dz^2}+u^2\right)^{\frac{3}{2}}}{u\frac{d^2.u}{dz^2} - 2\frac{du^2}{dz^2} - u^2}$; expresion del radio de curvatura relativamente á las coordenadas polares, en el supuesto de que la variable z varíe uniformemente.

Esta expresion no incluye el arco $BD' = m$, lo qual se podia desde luego prever; pues es evidente que el valor del radio de curvatura es independiente de la posicion arbitraria del exe DAD'.

298. Si llamamos s la superficie del sector $ADMA$ (*fig.* 85.), y desde el polo A como centro, y con los radios $AM = u$, $AM' = u - \Delta u$, describimos los arcos Mm, $M'm'$; será $AMM'A = \Delta s$, $Nn = \Delta z$, $Mm = u\Delta z$, y $M'm' = (u - \Delta u)\Delta z$. Sentado esto, es evidente que mientras Δz, y Δu decrecen continuamente acercándose á su límite comun cero; el sector $AMm = \frac{u^2\Delta z}{2}$, es siempre mayor que la superficie Δs, y esta, mayor que la del sector $AM'm' = \frac{(u-\Delta u)^2\Delta z}{2}$; de manera que dividiendo por Δz, tendrémos siem-

pre $\frac{u^2}{2} > \frac{\Delta s}{\Delta z} > \frac{(u-\Delta u)^2}{2}$, y por consiguiente (núm. 19.) será $\frac{ds}{dz} = \frac{u^2}{2}$.

Con igual facilidad se hallaria el coeficiente diferencial del arco DM considerado como funcion de z.

CAPITULO VIII.

Principios de la teórica de las superficies curvas, y de las curvas de doble curvatura; y aplicacion del cálculo diferencial á esta teórica.

Antes de empezar la teórica de las superficies curvas que nos proponemos exponer en este capítulo, debemos prevenir á nuestros lectores, que para su inteligencia, es necesario el conocimiento de los principios de la teórica de las líneas curvas y de las varias propiedades de los planos, y que les será muy útil la lectura del ensayo de Geometría sobre los planos y sobre las superficies curvas de *Lacroix* (1).

299. Del mismo modo que un punto qualquiera M de una línea curva plana (*fig. 13.*), se determina comunmente por medio de dos coordenadas perpendiculares AP, PM cuyo orígen se supone en un punto fixo A: la posicion de un punto qualquiera de una curva de doble curvatura, ó de una superficie curva, ó en general de un punto qualquiera Z del espacio (*fig. 86.*) se determina por medio de tres coordenadas perpendiculares AP, PM, y MZ.

Para ello, en el plano CAB que supondrémos ser el de la lámina, se toma un punto fixo A para el orígen de las coordenadas; y tirando las líneas bAB, CAc perpendiculares entre sí; se proyecta desde luego el punto Z sobre el plano CAB, y despues se refiere la proyeccion M al orígen A, por medio de las coordenadas perpendiculares AP, y PM. Esto viene á ser lo mismo que referir el punto Z á los tres planos CAB, DAB, CAD perpendiculares entre sí; y que pasan por el orígen A; pues es claro que las coordenadas PM, AP, aunque estan situadas en el plano CAB, representan las distancias respectivas ZZ', ZZ'' del punto Z á los planos DAB, CAD; de manera que si suponemos que Z' y Z'' sean las proyecciones respectivas del punto Z sobre los planos DAB, CAD, será evidentemente $PM = ZZ'$, y $AP = ZZ''$.

Los planos CAB, DAB, CAD; se llaman *los planos de las coordenadas.*

(1) *Essais de Geometrie sur les plans et les surfaces courbes.*

Las intersecciones comunes AB, AC, AD de los tres planos CAB, DAB, CAD, se llaman los exes de las coordenadas respectivas que les son paralelas: así, llamando AP, x; PM, y; y MZ, z; AB, será el exe de las x; AC, el de las y; y AD, el de las z.

Del mismo modo, los planos CAB, DAB, CAD de las coordenadas toman sus denominaciones respectivas de las mismas coordenadas: el plano CAB que contiene x é y, se llama el plano de las x é y; el plano DAB donde estan las coordenadas $AP = x$, y $PZ' = ZM = z$, se denomina el plano de las x, y z; finalmente, refiriendo la proyeccion Z'' del punto Z sobre el plano CAD, á los exes AC, AD por medio de las coordenadas $AF = MZ = z$, y $FZ'' = PM = y$, le llamarémos el plano de los y, y z.

300. Es evidente, 1º Que en todos los puntos del exe AB de las x, es $y = 0$, y $z = 0$; que las coordenadas x, y z son nulas en todos los puntos del exe AC de las y; como lo son igualmente x é y relativamente al exe AD de las z.

2º Que la coordenada z es nula en todos los puntos del plano CAB de las x é y, y tiene un valor determinado relativamente á los de un plano qualquiera paralelo al primero; de manera, que la equacion $z = c$; suponiéndola sola, y sin que haya determinacion alguna relativamente á las otras dos coordenadas x é y; representa un plano trazado paralelamente á CAB á una distancia de este $= 0$.

3º Que en todos los puntos del plano DAB de las x, y z, es $y = 0$; y que la equacion $y = b$ pertenece á un plano paralelo el primero, del qual está á una distancia $= b$.

4º Y finalmente, que relativamente al plano CAD, es $x = 0$; y que $x = a$ es la equacion de un plano paralelo á CAD, trazado á una distancia $= a$.

301. Si se supone que las equaciones $z = 0$, $y = b$ se verifican á un mismo tiempo; representarán una recta trazada paralelamente al exe AB de las x, por el punto del plano CAD cuyas coordenadas son c, y b; y como dichas equaciones representan igualmente todos los puntos comunes á los dos planos respectivamente paralelos á CAB, y DAB, representados por las equaciones $z = c$, $y = b$; dicha recta será la interseccion comun de todos estos planos.

Las tres equaciones $z = c$, $y = b$, $x = a$, reunidas; esto es en el supuesto de que se verifiquen á un mismo tiempo; pertenecen al punto único donde se cortan los tres planos respectivamente paralelos á CAB, DAB, CAD, representados por dichas equaciones.

302. Propongámonos ahora una equacion entre dos de las tres cantidades variables x, y, y z, por exemplo $y = ax$. Desde luego verémos que esta equacion pertenece á una recta AN trazada por el punto A en el plano CAB, la qual forma con el exe AB de las x un ángulo NAB cuya tangente es $= a$. Pero dicha equacion pertenece igualmente al plano DAN descrito por la recta AN movién-

dose paralelamente á sí misma en la direccion AD del exe de las z: pues es claro, que si desde un punto qualquiera Z de dicho plano se tiran las perpendiculares ZM, ZZ' á los planos CAB, DAB, y desde el punto M, la MP perpendicular al exe AB; será $ZZ' = MP = y = ax$. Es evidente que el ángulo NAB mide la inclinacion del plano DAN respecto del plano DAB.

Las equaciones $z = bx$, $z = cy$; nos darian resultados análogos á los antecedentes relativamente á los planos DAB, CAD.

303. Supongamos que se quiera indagar que superficie representa la equacion $z = ax + by$. Haciendo $x = o$, tendrémos $z = by$; de donde inferirémos que la recta AN' (*fig.* 87.) trazada por el orígen A en el plano CAD (en el qual es siempre $x = o$) y representada por esta equacion, contiene todos los puntos comunes á la superficie expresada por la equacion $z = ax + by$, y al plano CAD; ó lo que es lo mismo, que la recta AN' es la interseccion de la superficie representada por la equacion propuesta, y del plano CAD.

Haciendo $z = o$, resulta $ax + by = o$, ó $y = -\frac{a}{b}x$, cuya equacion pertenece á una recta AN trazada por el orígen A en el plano CAB debaxo del exe AB, la qual será la interseccion de dicho plano y de la superficie representada por la equacion $z = ax + by$.

Ahora pues, si suponemos que el ángulo CAN' se mueva paralelamente al plano CAD, de manera que el vértice A esté siempre en la recta AN, y el lado AC en el plano CAB; la recta AN' describirá un plano $N'AN$; y quando el vértice A llegue á un punto qualquiera M', y el punto M' al punto Z, será ZM ó $z = M''Q - b \times AQ = b\,(PM + PM') = b\,(y + \frac{a}{b}x) = ax + by$; y por consiguiente $z = ax + by$ será la equacion de dicho plano.

304. Finalmente, si la equacion propuesta fuese $z = ax + by + d$; perteneceria á un plano $O'EO$ paralelo al plano $N'AN$ representado por la equacion $z = ax + by$, el qual corta el exe de las z en un punto E cuya distancia al orígen A es $= d$. Pues si prolongamos la ordenada MZ del plano $N'AN$, hasta que encuentre su paralelo en Z', será $ZZ' = d$, y $z = Z'M = ZM + d = ax + by + d$.

He aquí la equacion de un plano situado de un modo qualquiera relativamente á tres exes perpendiculares entre sí, y representa la equacion general de primer grado entre tres cantidades variables x, y, y z: pues siendo esta equacion de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z + \sigma = o$; dividiéndola por γ, y haciendo $-\frac{\alpha}{\gamma} = a$, $-\frac{\beta}{\gamma} = b$, y $-\frac{\sigma}{\gamma} = d$, se transformará en $z = ax + by + d$. Por donde se ve que el coeficiente de la variable z no hace mas general dicha equacion (y lo mismo se debe entender de uno qualquiera de los coeficientes de x é y en el supuesto de que se conserven los otros dos); sin embargo le conservarémos á fin de que las fórmulas que de ella se deduzcan sean mas simétricas, y representarémos por $ax + by + cz + d = o$ la equacion de un plano qualquiera; pero tendrémos presente, que en todos los resultados se podrá suponer una de las quatro constantes a, b, c, d, igual á la unidad, ó determinarla por medio de condiciones particulares.

305. Conociendo pues la equacion $ax + by + cz + d = o$ de un plano qualquiera, será fácil determinar su posicion relativamente á tres exes perpendiculares entre sí. En efecto, haciendo desde luego $z = o$, la equacion $ax + by + d = o$ que resulta pertenece á la interseccion del plano propuesto con el plano CAB (*fig.* 88.), la qual es una recta EF que corta el exe de las x en un punto E, y el de las y en un punto F, de manera que $AE = -\frac{d}{a}$, y $AF = -\frac{d}{b}$.

Haciendo despues $x = o$ en la equacion propuesta, se reduce á $by + cz + d = o$, y representa la interseccion FG del plano determinado por la equacion propuesta, y del plano CAD de las z é y, la qual encuentra el exe AD de las z prolongado debaxo del plano CAB, en un punto G cuya distancia al punto A es $= \frac{d}{c}$. Por consiguiente, el plano EFG cuya posicion fixan los puntos E, F, G de modo que AE es $= -\frac{d}{a}$, $AF = -\frac{d}{b}$, y $AG = -\frac{d}{c}$, es el que la equacion propuesta representa.

306. Para determinar la inclinacion del plano propuesto respecto del plano CAB, supondrémos que desde uno qualquiera Z de sus puntos se tiren las coordenadas ZM, MP prolongando esta hasta que encuentre la interseccion EF en I, y desde el punto M la MH perpendicular á EI; la recta ZH será tambien perpendicular á EI, y por consiguiente el ángulo ZHM mide la inclinacion que se quiere determinar. Sentado esto, siendo $AE = -\frac{d}{a}$, y $AF = -\frac{d}{b}$; será tang. $AEF = \frac{a}{b}$, sen. $AEF = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, cos. $AEF = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, $EP = x + \frac{d}{a}$, $PI = EP \times$ tang. $PEI = \frac{ax + d}{b}$, y $MI = \ldots\ldots \frac{ax + by + d}{b} = -\frac{cz}{b}$; de donde se infiere á causa de ser $IMH = AEF$, $MH = IM$ cos. $IMH = \frac{-cz}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, y tang. $ZHM = \frac{ZM}{MH} = -\frac{\sqrt{(a^2 + b^2)}}{c}$. De aquí será fácil inferir cos. $ZHM =$

$\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$.

Del mismo modo hallariamos que el ángulo de inclinacion del plano propuesto relativamente al plano DAB, tiene por tangente $-\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{b}$, y por coseno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$; y relativamente al plano CAD, $-\frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{a}$ por tangente, y $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$ por coseno.

307. Si suponemos $c=0$ en la equacion tang. $ZHM=-\ldots \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{c}$, se transformará en tang. $ZHM=\infty$, y la equacion propuesta se reducirá á $ax+by+d=0$: de donde inferirémos que esta equacion representa un plano qualquiera perpendicular al plano CAB.

Con igual facilidad demostrariamos que la equacion $ax+cz+d=0$, representa un plano qualquiera perpendicular á DAB; y la equacion $by+cz+d=0$, un plano perpendicular á CAD.

308. Si se pidiese la equacion de un plano qualquiera que pasa por un punto dado; llamando α, β, y γ las coordenadas que determinan la posicion de dicho punto, deberán satisfacer estas cantidades á la equacion general del plano $ax+by+cz+d=0$: tendrémos pues la equacion de condicion $a\alpha+b\beta+c\gamma+d=0$; y restándola de la antecedente, resultará la equacion que se pide $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$; en la qual se puede suponer igual á la unidad, una de las constantes a, b, c, (núm. 304.).

309. Los planos perpendiculares CAB, DAB, CAD prolongados indefinidamente (*fig.* 89.) dividen el espacio total en ocho espacios parciales, los quales forman otros tantos ángulos sólidos al rededor del punto A; y se distinguen entre sí por medio de los signos de las coordenadas x, y, y z que contienen. Así, suponiendo siempre que estas coordenadas son positivas en el espacio parcial ó ángulo sólido formado por los planos CAB, DAB, CAD; será

$$\left.\begin{array}{l} +x,\ +y,\ -z \\ +x,\ -y,\ +z \\ -x,\ +y,\ +z \\ +x,\ -y,\ -z \\ -x,\ +y,\ -z \\ -x,\ -y,\ +z \\ -x,\ -y,\ -z \end{array}\right\}\text{ en el ángulo sólido }\left\{\begin{array}{l} BAC,\ BAd,\ CAd \\ BAc,\ BAD,\ cAD \\ bAC,\ bAD,\ BAD \\ BAc,\ BAd,\ cAd \\ bAC,\ bAd,\ CAd \\ bAc,\ bAd,\ cAD \\ bAc,\ bAd,\ cAd \end{array}\right.$$

310. Quando se conocen las equaciones de dos planos que pasan por una recta EF, de los quales es por consiguiente la interseccion; se conoce tambien la posicion de dicha recta; pues es claro que sus coordenadas son comunes á las dos equaciones de los referidos planos.

Entre la infinidad de planos que pueden pasar por la recta EF; se eligen comunmente los que son perpendiculares á los tres planos CAB, DAB, CAD, á causa de que sus equaciones (n. 307.) contienen solamente dos de las tres variables x, y, z. Suponiendo pues que $ax+by+d=0$ sea la equacion del plano perpendicular á CAB que pasa por la recta EF; $a'x+cz+d'=0$ la del plano perpendicular á DAB; y $b'y+c'z+d''=0$, la del plano perpendicular á CAD; estas equaciones pertenecerán igualmente á las intersecciones respectivas de los referidos planos, con los planos CAB, DAC, CAD, las quales son las proyecciones de la recta EF sobre estos planos. Por consiguiente la posicion de la recta EF será conocida, siempre que sean dadas las equaciones pertenecientes á dos qualesquiera de sus tres proyecciones mencionadas, esto es sobre los planos de las coordenadas.

Suponiendo una de las constantes (núm. 304.) igual á la unidad: las equaciones antecedentes de los planos perpendiculares y proyecciones de una recta qualquiera EF, se pueden transformar en $y+ax+d=0$, $z+a'x+d'=0$, $z+by+d''=0$.

311. Propongámonos determinar las equaciones de las proyecciones de una recta EF sobre los planos CAB, DAB, la qual pasa por dos puntos dados E, F. Si llamamos α, β, γ las coordenadas del punto E; esto es las distancias conocidas de este punto á los planos CAD, DAB, CAB; y α', β', γ' las coordenadas del punto F; deberán satisfacer estos valores á las equaciones generales $y+ax+d=0$, $z+a'x+d'=0$ de las proyecciones de una recta qualquiera sobre los planos CAB, DAB: tendrémos pues para determinar las constantes indeterminadas a, a', d, d', las quatro equaciones $\beta+a\alpha+d=0$, $\gamma+a'\alpha+d'=0$, $\beta'+a\alpha'+d=0$, $\gamma'+a'\alpha'+d'=0$, que dan $a=\frac{\beta-\beta'}{\alpha'-\alpha}$, $a'=\frac{\gamma-\gamma'}{\alpha'-\alpha}$, $d=\frac{\alpha\beta'-\alpha'\beta}{\alpha'-\alpha}$, $d'=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha'-\alpha}$; y substituyendo estos valores en las equaciones generales de las proyecciones, se transformarán en las que pertenecen á la recta EF que pasa por los puntos dados E, F. Pero estas equaciones resultarán mas sencillas restando la equacion $\beta+a\alpha+d=0$, de $y+ax+d=0$; y la equacion $\gamma+a'\alpha+d'=0$, de $z+a'x+d'=0$: con esto tendrémos $y-\beta+a(x-\alpha)=0$, $z-\gamma+a'(x-\alpha)=0$; y substituyendo por a y a' sus valores respectivos, $y-\beta+\frac{\beta-\beta'}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)=0$, $z-\gamma+\frac{\gamma-\gamma'}{\alpha'-\alpha}(x-\alpha)=0$.

312. Las tres constantes necesarias (núm. 304.) que contiene la equacion general del plano se pueden determinar por medio de diferentes condiciones. Una de las mas comunes es la de sujetar el

plano á que pase por tres puntos dados. Sean pues α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', las coordenadas de los tres puntos dados: substituyéndolas sucesivamente por x, y, z, en la equacion general $ax + by + cz + d = 0$, resultarán las tres equaciones $a\alpha + b\beta + c\gamma + d = 0$, $a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + d = 0$, $a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + d = 0$; por medio de las quales se podrán determinar tres de las quatro constantes a, b, c, d. Suponiendo por exemplo que d quede indeterminada, hallarémos

$$a = d\,\frac{\gamma(\beta' - \beta'') - \gamma'(\beta - \beta'') + \gamma''(\beta - \beta')}{\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)}$$

$$b = d\,\frac{\alpha(\gamma' - \gamma'') - \alpha'(\gamma - \gamma'') + \alpha''(\gamma - \gamma')}{\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)}$$

$$c = d\,\frac{\beta(\alpha' - \alpha'') - \beta'(\alpha - \alpha'') + \beta''(\alpha - \alpha')}{\alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') - \alpha'(\beta\gamma'' - \beta''\gamma) + \alpha''(\beta\gamma' - \beta'\gamma)}.$$

313. Supongamos que $y + ax + d = 0$, $z + bx + d' = 0$, sean las equaciones de las proyecciones de una recta qualquiera sobre los planos de las x é y, y de las x, y z; y $y + a'x + \delta = 0$, $z + b'x + \delta' = 0$ las de otra recta qualquiera sobre los mismos planos: es evidente que si estas rectas se cortan, estarán en un mismo plano; y que en el punto de interseccion las coordenadas x, y, y z serán comunes á ambas rectas: por consiguiente tendrémos eliminando y, y z las dos equaciones $(a - a')x + d - \delta = 0$, $(b - b')x + d' - \delta' = 0$; y eliminando x resultará la equacion de condicion, $(a - a')(d' - \delta') - (b - b')(d - \delta) = 0$, que debe verificarse para que las dos rectas propuestas tengan un punto comun, y por consiguiente esten en un mismo plano.

Si representamos por α, β, γ las coordenadas del punto de interseccion de dichas rectas; tendrémos las quatro equaciones $\beta + a\alpha + d = 0$, $\gamma + b\alpha + d' = 0$; $\beta + a'\alpha + \delta = 0$, $\gamma + b'\alpha + \delta' = 0$; y restándolas respectivamente de las equaciones $y + ax + d = 0$, $z + bx + d' = 0$; $y + a'x + \delta = 0$, $z + b'x + \delta' = 0$ de las proyecciones, se transformarán en $y - \beta + a(x + \alpha) = 0$, $z - \gamma + b(x - \alpha) = 0$; $y - \beta + a'(x - \alpha) = 0$, $z - \gamma + b'(x - \alpha) = 0$.

314. Supongamos que siendo dadas las equaciones $y + ax + d = 0$, $z + bx + d' = 0$ de las proyecciones de una recta; se pida la equacion de un plano perpendicular á dicha recta.

Si suponemos que $Ax + By + Cz + D = 0$ sea la equacion que se pide; será $Ax + By + D = 0$, ó $y + \frac{A}{B}x + \frac{D}{B} = 0$ la equacion de su interseccion con el plano de las x é y; y $Ax + Cz + D = 0$, ó $z + \frac{A}{C}x + \frac{D}{C} = 0$, la de su interseccion con el plano de las x, y z. Pero estas intersecciones son respectivamente perpen-

diculares á las proyecciones de la recta dada; tendrémos pues (1) $a = -\frac{B}{A}$, $b = -\frac{C}{A}$; ó $B = -aA$, $C = -bA$; y substituyendo estos valores en la equacion del plano, se transformará en $A(x - ay - bz) + D = 0$; y esta será la equacion que se pide.

Si se quisiese ademas que este plano pasase por un punto de la recta dada, determinado por las coordenadas α, β, y γ; substituiriamos estas cantidades en la equacion antecedente, y restando el resultado de la misma equacion, se transformará en $x - \alpha - a(y - \beta) - b(z - \gamma) = 0$.

Finalmente; si el punto determinado de la recta dada fuese el orígen de las coordenadas; α, β, y γ serian nulas; y por consiguiente la equacion del plano seria en este caso $x - ay - bz = 0$.

315. Si en vez de ser dada la recta, lo fuese el plano, y se pidiesen las equaciones de las proyecciones de una recta perpendicular á dicho plano; substituiriamos los valores respectivos $-\frac{B}{A}$, $-\frac{C}{A}$ de a, y b en las equaciones $y + ax + d = 0$, $z + bx + d' = 0$, y se transformarán en las equaciones pedidas $y - \frac{B}{A}x + d = 0$, $z - \frac{C}{A}x + d' = 0$; y si la recta pedida debe pasar por un punto del plano, determinado por las coordenadas α, β, y γ, sus equaciones serán en este caso $A(y - \beta) - B(x - \alpha) = 0$, $A(z - \gamma) - C(x - \alpha) = 0$; y la proyeccion sobre el plano BAD, $B(z - \gamma) - C(y - \beta) = 0$.

Finalmente; si el punto determinado en el plano fuese el orígen de las coordenadas; α, β, y γ serian nulas, y las equaciones antecedentes se reducirian á $Ay - Bx = 0$, $Az - Cx = 0$, $Bz - Cy = 0$.

316. Sea Z un punto qualquiera de una superficie (*fig. 90.*) cuyas coordenadas son x, y, y z; la distancia AM de su proyeccion M, al orígen A, será $= \sqrt{(x^2 + y^2)}$; y la distancia $AZ =$ .... $\sqrt{(AM)^2 + (MZ)^2} = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Si llamamos x', y', y z' las coordenadas de otro punto qual-

(1) Para comprehender esto es necesario tener presente que en la equacion $y + ax + d = 0$ de una recta qualquiera DE (*fig. 96.*), el coeficiente a de x representa la tang. del ángulo BDE que dicha recta forma con el exe de las abscisas; y $\frac{1}{a}$, la tang. del ángulo CED que forma con el exe de las ordenadas. Esto entendido, si $y + bx + d' = 0$ representa la equacion de otra recta $E'D'$ perpendicular á la primera; el ángulo $D'E'B$ que forma con el exe AB cuya tang. es b, será igual al ángulo CED, con sola la diferencia de que si este ángulo es positivo, el otro será negativo y recíprocamente; por consiguiente tendrémos $b = -\frac{1}{a}$, y $a = -\frac{1}{b}$.

quiera Z', y suponemos que por el punto Z pasan tres planos respectivamente paralelos á CAB, DAB, CAD; las coordenadas del punto Z', relativamente á dichos planos serán $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$, y por consiguiente la distancia ZZ' entre estos dos puntos, será $=\sqrt{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2]}$.

317. De aquí se deduce naturalmente la equacion de la superficie de la esfera: pues estando todos sus puntos igualmente distantes del centro; si suponemos dicho centro en el orígen A de las coordenadas, la expresion $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ será constante é igual al radio de la esfera. Llamando pues r dicho radio, será $x^2+y^2+z^2=r^2$.

Si el centro de la esfera no estuviese en el orígen A de las coordenadas, sino en otro punto determinado por las coordenadas a, b, c; la distancia de este punto á un punto qualquiera de la esfera cuyas coordenadas son x, y, y z, seria segun acabamos de ver $\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}$; y como esta distancia es igual al radio, seria en este caso $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ la equacion de la esfera.

318. Llamemos δ la distancia de un punto de una recta perpendicular á un plano dado, determinado por las coordenadas α, β, y γ, al punto donde dicha perpendicular encuentra el plano cuyas coordenadas son x, y, y z: será $\delta=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$, ó substituyendo por $y-\beta$, y $z-\gamma$ (núm. 315.) sus valores respectivos $\frac{B}{A}(x-\alpha)$, $\frac{C}{A}(x-\alpha)$, $\delta=\frac{x-\alpha}{A}\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}$. Pero dando á la equacion $Ax+By+Cz+D=0$ del plano esta forma $A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)+A\alpha+B\beta+C\gamma+D=0$; y substituyendo por $y-\beta$, y $z-\gamma$ sus valores respectivos, tendrémos $\frac{x-\alpha}{A}=-\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma+D}{A^2+B^2+C^2}$; por consiguiente será $\delta=-\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma+D}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$.

Si el plano dado pasase por el orígen de las coordenadas; seria $D=0$, y por lo mismo $\delta=-\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$.

319. Supongamos que representando $y-\beta+a(x-\alpha)=0$, $z-\gamma+b(x-\alpha)=0$; $y-\beta+a(x-\alpha)=0$, $z-\gamma+b(x-\alpha)=0$ (núm. 313.) las equaciones de las proyecciones de dos rectas dadas que se cortan en un punto cuyas coordenadas son α, β, y γ, en el qual forman un ángulo v; se nos proponga hallar la expresion del coseno de este ángulo.

Si imaginamos que el plano que determinan estas rectas se mueva paralelamente á sí mismo hasta que el punto de interseccion se confunda con el orígen A de las coordenadas; α, β, y γ serán nulas, y las equaciones de las proyecciones se reducirán á $y+ax=0$, $z+bx=0$; $y+a'x=0$, $z+b'x=0$. Sentado esto; imaginemos una esfera cuyo centro esté en el orígen de las coordenadas, y el radio sea $=1$; la primera de dichas rectas encontrará la esfera en un punto, que siendo comun á la recta y á la esfera, determinarán sus coordenadas las tres equaciones $y+ax=0$, $z+bx=0$, $x^2+y^2+z^2=1$, las quales dan $x=\frac{1}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$, $y=\frac{-a}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$, $z=\frac{-b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)}}$. Del mismo modo, llamando x', y', z' las coordenadas del punto donde la segunda recta encuentra la esfera; tendrémos $x'=\frac{1}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}$, $y'=\frac{-a'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}$, $z'=\frac{-b'}{\sqrt{(1+a'^2+b'^2)}}$; y substituyendo estos valores en la expresion $(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$ del quadrado de la distancia entre estos dos puntos (núm. 316.), y haciendo las reducciones convenientes, resultará el quadrado de dicha distancia, ó lo que es lo mismo, el quadrado de la cuerda del ángulo v, igual á $2-\frac{2(1+aa'+bb')}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}$.

Pero por las fórmulas trigonométricas sabemos, que el quadrado de la cuerda de un ángulo qualquiera v es $=2$ sen. ver. $v=2(1-\cos. v)=2-2\cos. v$; por consiguiente tendrémos $2-2\cos. v=2-\frac{2(1+aa'+bb')}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}$; de donde se infiere $\cos. v=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}}$.

Si el ángulo v fuese recto, seria $\cos. v=0$; y por consiguiente $1+aa'+bb'=0$; y recíprocamente.

320. Por medio de la fórmula antecedente se determina fácilmente el coseno del ángulo que forman dos planos dados.

Sean $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ las equaciones de estos planos: si imaginamos que se muevan paralelamente á sí mismos hasta que su interseccion pase por el orígen de las coordenadas; el ángulo que forman no variará, y sus equaciones se reducirán (n.303.) á (1).... $Ax+By+Cz=0$, (2).... $A'x+B'y+C'z=0$. Sentado esto; si por el orígen de las coordenadas tiramos dos rectas respectivamente perpendiculares á dichos planos; las equaciones de las proyecciones de la primera serán (núm. 315.) $y-\frac{B}{A}x=0$, $z-\frac{C}{A}x=0$; y las de la segunda $y - \frac{B'}{A'}x = o$, $z - \frac{C'}{A'}x = o$. Pero es evidente que el ángulo que forman estas rectas, es igual al de los planos dados; por consiguiente llamándole v, y substituyendo en la fórmula antecedente por a, a', b, y b' sus valores respectivos $-\frac{B}{A}$, $-\frac{B'}{A'}$ $-\frac{C}{A}$, y $-\frac{C'}{A'}$, tendrémos $\cos. v = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}}$.

Si los planos dados fuesen perpendiculares entre sí; seria $\cos. v = o$, y por consiguiente $AA' + BB' + CC' = o$.

Si uno de los planos dados, el segundo por exemplo, fuese el de las x é y; como en este plano es siempre $z = o$, A', y B' serian nulas, y la expresion antecedente se reduciria á $\cos. v = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$, lo mismo que hallamos en otro lugar (n. 306.).

321. Las superficies se dividen del mismo modo que las líneas en varios órdenes, los quales dependen del grado de las equaciones respectivas que las expresan: el plano es la superficie de primer órden á causa de que su equacion es del primer grado.

Todas las superficies de segundo órden se hallan comprehendidas en esta equacion $(a)\ldots\ldots Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = o$, la qual es la mas general que se puede formar en el segundo grado, con las tres cantidades variables x, y, y z; y las diferentes superficies pertenecientes á este órden; dependen de los diferentes valores que pueden tener los coeficientes indeterminados A, B, C, &c.

Resolviendo esta equacion relativamente á una qualquiera de las variables, z por exemplo, hallarémos

$$z = -\frac{Ex + Fy + I}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{\left[(E^2 - 4AC)x^2 + (F^2 - 4BC)y^2 + 2(EF - 2CD)xy + 2(EI - 2CG)x + 2(FI - 2CH)y + I^2 - 4CK\right]}$$

; cuya expresion manifiesta que á qualesquiera punto del plano de las x é y corresponden dos ordenadas z ó dos puntos de la superficie propuesta: por consiguiente, si en cada uno de los valores de z se substituyen todos los valores imaginables x é y, resultarán otras tantas superficies parciales, las quales son relativamente á la superficie total, lo que los diferentes ramos de una curva relativamente á toda la curva.

322. Para formar una idea clara de la forma que tiene una superficie curva cuya equacion se conoce; se supone dicha superficie cortada por una infinidad de planos paralelos á los de las coordenadas; y determinando luego las curvas que forman las intersecciones de dichos planos con la superficie propuesta, su continuidad hará sensible la forma de dicha superficie.

La misma naturaleza de las equaciones que contienen tres cantidades variables, indica este procedimiento: pues considerando por exemplo z, como funcion de x é y; para hallar con órden sus diferentes valores, es necesario imaginar, que á cada valor arbitrario dado á la variable independiente x, se le hagan corresponder todos los que se le pueden dar á la otra variable independiente y; de donde resultará para cada valor de x, una serie infinita de valores de z; y como se pueden dar á x una infinidad de valores; habrá una infinidad de estas series, cada una de las quales representará evidentemente la seccion correspondiente hecha por un plano paralelo al de las y, y z.

Supongamos, por exemplo, que la equacion dada sea $z^2 + y^2 - px = o$.

Haciendo desde luego $x = o$, se reducirá á $z^2 + y^2 = o$, de donde se infiere, $y = o$, $z = o$. Dando despues á x un valor qualquiera a, tendrémos $z^2 + y^2 = pa$; cuya equacion manifiesta que todas las secciones hechas por planos paralelos al plano CAD, son círculos (*fig. 91.*).

Finalmente, suponiendo $z = o$ en la equacion propuesta, se reduce á $y^2 - px = o$; de donde resulta que la interseccion del plano CAB con la superficie propuesta, es una parábola FAF' cuyo parámetro es $= p$; y por consiguiente, que la superficie representada por la equacion $z^2 + y^2 - px$, es la de un *paraboloide* formado por la rotacion de una parábola FAF' cuyo parámetro es $= p$, y el orígen está en el punto A; al rededor del exe AB de las x.

Haciendo $x = o$ en la equacion (a), se reduce á $By^2 + Cz^2 + Fyz + Hy + Iz + K = o$; la qual representa la curva de segundo órden que resulta de la seccion de la superficie propuesta por el plano de las z é y.

Dando luego á x diferentes valores determinados en la equacion (a); las equaciones que resulten representarán respectivamente las intersecciones de la superficie propuesta y diferentes planos paralelos al de las z é y, del qual estan á las distancias respectivas que representan los valores de x.

Del supuesto de $y = o$ en la equacion (a) resulta la de la curva de segundo órden que forma la seccion de la superficie propuesta por el plano de las x, y z: dando despues á y diferentes valores determinados, resultarán sucesivamente las de las curvas que forman las secciones de los planos paralelos al primero.

Finalmente, haciendo $z = o$ en la equacion (a), resultará la de la curva que la superficie propuesta traza en el plano de las x é y, en virtud de la seccion de este plano; y dando á z diferentes valores determinados; resultarán sucesivamente las de las respectivas secciones de los planos paralelos al primero. Los límites de estas diferentes secciones darán á conocer los de la superficie propuesta.

323. Las secciones hechas por los planos de las coordenadas, se distinguen de todas las demas con el nombre de *secciones principales*.

324. Una superficie curva, del mismo modo que una línea curva, puede tener una infinidad de equaciones diferentes, relativas á las diferentes situaciones que se pueden dar á los exes de las coordenadas, y al orígen de estas. Veamos pues como se pueden transformar las coordenadas; limitándonos solamente á las perpendiculares.

Supongamos primero que solo se quiera mudar la posicion del orígen A de las coordenadas (*fig.* 92.), sin alterar la direccion de dichas coordenadas. Llamemos a, b, c las coordenadas del nuevo orígen A'; y x', y', z', las nuevas coordenadas; esto es las de la superficie propuesta relativamente al nuevo orígen A': tendrémos evidentemente $x = x' + a$, $y = y' + b$, y $z = z' + c$; por consiguiente substituyendo estos valores en la equacion propuesta, resultará la que corresponde á las nuevas coordenadas x', y', y z', cuyo orígen es A'.

325. Supongamos ahora que permaneciendo en la misma situacion el orígen de las coordenadas, se quiera mudar la direccion de los exes: conservándoles sin embargo siempre perpendiculares entre sí.

Sean AB, AC, AD, los exes de las coordenadas primitivas x, y, z de una superficie qualquiera (*fig.* 93.); AE, AF, AG los de las nuevas coordenadas t, u, v de la misma superficie tambien perpendiculares entre sí; y para expresar la situacion respectiva de los planos primitivos de las coordenadas, y los de las nuevas; supondrémos que se conozcan las equaciones de unos relativamente á los otros.

Sea pues $a\delta + b\eta + c\varphi = 0$ la equacion del plano CAD relativamente á los nuevos exes AE, AF, AG; $a'\delta + b'\eta + c'\varphi = 0$ la del plano BAD; y $a''\delta + b''\eta + c''\varphi = 0$, la del plano CAB; si consideramos un punto qualquiera de dicha superficie cuyas coordenadas relativamente á los exes AE, AF, AG, son t, u, y v; las perpendiculares baxadas desde este punto á los planos primitivos CAB, BAD, CAD, serán respectivamente iguales á z, y, y x; y por consiguiente, por lo demostrado (núm. 318.) tendrémos

$$x = -\frac{at + bu + cv}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}.$$

$$y = -\frac{a't + b'u + c'v}{\sqrt{(a'^2 + b'^2 + c'^2)}}.$$

$$z = -\frac{a''t + b''u + c''v}{\sqrt{(a''^2 + b''^2 + c''^2)}}.$$

Estos valores en virtud de lo observado en el núm. 304, contienen tres constantes inútiles; de manera que de las nueve constantes indeterminadas a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', podriamos suponer tres iguales á la unidad: pero es mejor suponer estas tres equaciones

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

y á causa de que los planos CAB, BAD, CAD, son perpendiculares entre sí, tendrémos tambien (núm. 320.).

$$\left.\begin{aligned} aa' + bb' + cc' &= 0 \\ aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(b)};$$

por donde se ve, que de dichas nueve constantes, seis estarán determinadas por las equaciones antecedentes, y solo quedarán tres para determinar la situacion de las nuevas coordenadas relativamente á las primitivas.

Los valores de x, y, y z hallados antes, se reducen en virtud de las equaciones (a) á

$$x = -at - bu - cv$$
$$y = -a't - b'u - c'v$$
$$z = -a''t - b''u - c''v;$$

y substituyendo estos valores en la equacion de la superficie propuesta relativamente á los exes primitivos AB, AC, AD; resultará la que corresponde á los nuevos AE, AF, AG.

326. Los valores de las coordenadas x, y, y z relativamente á los nuevos exes AE, AF, AG; se pueden determinar tambien de este otro modo.

Sean los que fueren dichos valores; el modo mas general de expresarles, es suponiendo

$$x = \alpha t + \beta u + \gamma v$$
$$y = \alpha' t + \beta' u + \gamma' v$$
$$z = \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v;$$

pues es claro que á un valor determinado de las variables t, u, y v, solo debe corresponder un valor de las coordenadas x, y, y z; y recíprocamente. Sentado esto; el quadrado de la distancia de un punto qualquiera al orígen comun A de los dos sistemas de coordenadas, es en el primer sistema igual á $x^2 + y^2 + z^2$; y en el segundo, $= t^2 + u^2 + v^2$; por lo que, substituyendo por x, y, y z sus valores respectivos, resultará esta equacion idéntica

$$(\alpha t + \beta u + \gamma v)^2 + (\alpha' t + \beta' u + \gamma' v)^2 + (\alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v)^2 - t^2 - u^2 - v^2 = 0.$$

Efectuando los quadrados indicados, y suponiendo $= 0$ los coeficientes de las potencias y productos de t, u, y v; tendrémos estas seis equaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1\\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1\end{array}\right\}(c)\qquad \left.\begin{array}{l}\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0\\ \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0\\ \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0\end{array}\right\}(d);$$

de donde se infiere de que las nueve constantes que contienen las expresiones generales de x, y, y z; seis estan determinadas por las equaciones antecedentes, y las tres restantes son independientes.

327. Comparando los valores de x, y, y z supuestos en este artículo, con los que hallamos al principio del antecedente, tendrémos

$$\alpha=-\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ \beta=-\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ \gamma=-\frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$\alpha'=-\frac{a'}{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)}},\ \beta'=-\frac{b'}{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)}},\ \gamma'=-\frac{c'}{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)}}$$

$$\alpha''=-\frac{a''}{\sqrt{(a''^2+b''^2+c''^2)}},\ \beta''=-\frac{b''}{\sqrt{(a''^2+b''^2+c''^2)}},\ \gamma''=-\frac{c''}{\sqrt{(a''^2+b''^2+c''^2)}};$$

por donde se ve, que α, β, y γ tomadas negativamente, son los cosenos de los ángulos que el plano *CAD* (*fig. 95.*) forma respectivamente con los nuevos planos de las coordenadas *FAD*, *FAE*, *EAG*, (núm. 386.); que $-\alpha'$, $-\beta'$, y $-\gamma'$, son los cosenos de los ángulos que el plano *BAD* hace con los mismos planos; y lo mismo dirémos de $-\alpha''$, $-\beta''$, y $-\gamma''$ relativamente al plano *CAB*.

328. Substituyendo los valores antecedentes de α, α', &c. en las seis equaciones de condicion (c), (d); hallariamos otras relaciones entre las cantidades a, b, &c., las quales se podrian tambien deducir aunque de un modo menos sencillo, combinando las equaciones (b).

En el supuesto de que las equaciones (a) se verifiquen; dichos valores de α, α' &c., se reducen á

$$\begin{array}{lll}\alpha=-a & \alpha'=-a' & \alpha''=-a''\\ \beta=-b & \beta'=-b' & \beta''=-b''\\ \gamma=-c & \gamma'=-c' & \gamma''=-c''\end{array}$$

y substituyéndoles en las equaciones (c) y (d) se transformarán en

$$\left.\begin{array}{l}a^2+a'^2+a''^2=1\\ b^2+b'^2+b''^2=1\\ c^2+c'^2+c''^2=1\end{array}\right\}(e)\qquad \left.\begin{array}{l}ab+a'b'+a''b''=0\\ ac+a'c'+a''c''=0\\ bc+b'c'+b''c''=0\end{array}\right\}(f)$$

329. De las expresiones generales de x, y, y z, se pueden inferir las de t, u, y v, por dos métodos distintos; y comparando am-

bos resultados se inferirán nuevas relaciones entre las cantidades α, β, γ, &c.

En efecto, multiplicando respectivamente dichas expresiones por α, α' α''; y sumando los tres productos, tendrémos $\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z=(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)t+(\alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta'')u+(\alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma'')v$; de donde inferirémos teniendo presentes las equaciones (c), y (d), $t=\alpha x+\alpha' y+\alpha'' z$.

Multiplicando respectivamente las mismas expresiones de x, y, y z, por β, β', β''; y por γ, γ', γ''; y juntando los productos respectivos; hallariamos del mismo modo $u=\beta x+\beta' y+\beta'' z$, y $v=\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z$.

Si se substituyen estos valores en la expresion de $t^2+u^2+v^2$, y se compara el resultado á su igual $x^2+y^2+z^2$; resultará la equacion idéntica $(\alpha x-\alpha' y+\alpha'' z)^2+(\beta x+\beta' y+\beta'' z)^2+(\gamma x+\gamma' y+\gamma'' z)^2=x^2+y^2+z^2$, de la qual se inferirán desenvolviendo los trinomios, las seis equaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\\ \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1\\ \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1\end{array}\right\}(g)\qquad \left.\begin{array}{l}\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0\\ \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0\\ \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0\end{array}\right\}(h)$$

con las quales coinciden las equaciones (a), (b).

330. Los valores de t, u, y v, se pueden calcular directamente resolviendo las equaciones de primer grado.

$$x=\alpha t+\beta u+\gamma v,\ y=\alpha' t+\beta' u+\gamma' v,\ z=\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v:$$

efectuándolo, y haciendo para abreviar $\alpha\beta'\gamma''-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha''\beta'\gamma=\delta$, se hallará

$$t=\frac{(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')x+(\beta''\gamma-\gamma''\beta)y+(\beta\gamma'-\gamma\beta')z}{\delta}$$

$$u=\frac{(\alpha''\gamma'-\gamma''\alpha')x+(\alpha\gamma''-\gamma\alpha'')y+(\alpha'\gamma-\gamma'\alpha)z}{\delta}$$

$$v=\frac{(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')x+(\alpha''\beta-\beta''\alpha)y+(\alpha\beta'-\beta\alpha')z}{\delta};$$

comparando los coeficientes de x, y, y z, en estas expresiones, con sus correspondientes que hallamos por el otro método, resultarán estas nueve equaciones.

$$\begin{array}{lll}\beta'\gamma''-\gamma'\beta''=\delta\alpha & \beta''\gamma-\gamma''\beta=\delta\alpha' & \beta\gamma'-\gamma\beta'=\delta\alpha''\\ \alpha''\gamma'-\gamma''\alpha'=\delta\beta & \alpha\gamma''-\gamma\alpha''=\delta\beta' & \alpha'\gamma-\gamma'\alpha=\delta\beta''\\ \alpha'\beta''-\beta'\alpha''=\delta\gamma & \alpha''\beta-\beta''\alpha=\delta\gamma' & \alpha\beta'-\beta\alpha'=\delta\gamma''.\end{array}$$

Si se suman los quadrados de las tres equaciones que forman la primera línea, resultará la equacion

$$(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2+(\beta''\gamma-\gamma''\beta)^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2=\delta^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2),$$

la qual dándole la forma

$$(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)-(\beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma'')^2=\delta^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2),$$

se reduce en virtud de las equaciones (c), y (d) á $\delta^2=1$.

De los dos valores $\delta=\pm 1$ que da esta equacion solo se puede adoptar el positivo; pues si suponemos que las nuevas coordenadas coinciden con las primitivas esto es $t=x$, $u=y$, y $v=z$; tendrémos $\alpha=1$, $\beta'=1$, $\gamma''=1$, y todos los demas coeficientes nulos; de donde se sigue que la expresion que hemos representado por δ, se reduce á 1.

331. De los nueve coeficientes α, β, γ, &c., hay tres arbitrarios que sirven para determinar los seis restantes. Esta determinacion se efectua combinando las varias relaciones que hemos hallado entre dichos coeficientes; y la elegancia del resultado dependerá de la buena eleccion de las cantidades arbitrarias, y de la destreza en las reducciones.

Mr. *Monge* elige α, β', y γ'' por las cantidades arbitrarias; y suponiendo

$$1+\alpha+\beta'+\gamma''=M,\ 1+\alpha-\beta'-\gamma''=N,\ 1-\alpha+\beta'-\gamma''=P,$$
$$1-\alpha-\beta'+\gamma''=Q;$$

encuentra

$$2\beta=\sqrt{NP}+\sqrt{MQ},\ 2\alpha''=\sqrt{NQ}+\sqrt{MP},\ 2\gamma'=\sqrt{PQ}+\sqrt{MN}$$
$$2\alpha'=\sqrt{NP}-\sqrt{MQ},\ 2\gamma=\sqrt{NQ}-\sqrt{MP},\ 2\beta''=\sqrt{PQ}-\sqrt{MN}.$$

Es claro que siendo dadas tres de las quatro cantidades M, N, P, y Q; la quarta lo es igualmente; pues sumando las quatro equaciones supuestas, resulta $M+N+P+Q=4$.

332. Quando solamente se quiere mudar la direccion de dos de los tres exes; es preciso para que sean siempre perpendiculares entre sí, que dichos dos exes permanezcan en el plano de las coordenadas que les es comun; de donde resulta que la coordenada perpendicular á este plano, es la misma en ambos sistemas.

Supongamos por exemplo que permaneciendo inmóvil el exe de las z, se mude la direccion de los otros dos: será en este caso $v=z$, y por lo mismo $\alpha''=0$, $\beta''=0$, y $\gamma''=1$; y como los valores de x, é y deben ser independientes de v, tendrémos $\gamma=0$, y $\gamma'=0$.

Los valores de x é y se reducirán á, $x=\alpha t+\beta u$, $y=\alpha' t+\beta' u$; las equaciones (c) y (d), á estas tres.

$$\alpha^2+\alpha'^2=1,\ \beta^2+\beta'^2=1,\ \alpha\beta+\alpha'\beta'=0.$$

y la primera de las equaciones (g); á $\alpha^2+\beta^2=1$. Comparando esta equacion con $\alpha^2+\alpha'^2=1$, tendrémos $\alpha'=\beta$, de donde inferirémos $\beta'=-\alpha$; y por consiguiente $x=\alpha t+\beta u$, é $y=\beta t-\alpha u$.

333. Volvamos á considerar la equacion general de las superficies de segundo órden

$$(a)\ldots\ Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0;$$

y para mudar el orígen de las coordenadas sin alterar la direccion de los exes, substituyamos respectivamente $x'+a$, $y'+b$, y $z'+c$, en lugar de x, y, y z; con esto se transformará en

$$\left.\begin{array}{l} Ax'^2+By'^2+Cz'^2+Dx'y'+Ex'z'+Fy'z'\ldots\ldots \\ +x'(2Aa+Db+Ec+G)+y'(2Bb+Da+Fc \\ \quad +H)+z(2Cc+Ea+Fb+I) \\ +Aa^2+Bb^2+Cc^2+Dab+Eac+Fbc+Ga+Hb \\ \quad +Ic+K \end{array}\right\}=0\ldots\ldots(a')$$

Si determinamos las tres constantes arbitrarias a, b, c, por medio de las tres equaciones

$$2Aa+Db+Ec+G=0$$
$$2Bb+Da+Fc+H=0$$
$$2Cc+Ea+Fb+I=0$$

los términos que forman la segunda línea de la equacion (a'), desaparecerán; y si ademas, multiplicamos la primera de estas equaciones por $\frac{a}{2}$, la segunda por $\frac{b}{2}$, y la tercera por $\frac{c}{2}$, y restamos la suma de la misma equacion (a'); se reducirá á

$$(b)\ldots\ Ax'^2+By'^2+Cz'^2+Dx'y'+Ex'z'+Fy'z'+\frac{1}{2}Ga+\frac{1}{2}Hb+\frac{1}{2}Ic+K=0.$$

Esta es la equacion en que se transforma la equacion (a) mudando solamente el orígen de las coordenadas; demos ahora á los tres exes otra direccion qualquiera, substituyendo respectivamente en la equacion (b) $\alpha t+\beta u+\gamma v$, $\alpha' t+\beta' u+\gamma' v$, $\alpha'' t+\beta'' u+\gamma'' v$, en lugar de x', y', y z', (núm. 326.), y tendrémos una equacion de la forma $A't^2+B'u^2+C'v^2+D'tu+E'tv+F'uv+K'=0$; y como en esta transformacion, hemos introducido tres constantes arbitrarias; determinándolas del modo conveniente podrémos hacer desaparecer otros tantos términos de esta equacion: si las determinamos haciendo $D'=0$, $E'=0$, y $F'=0$, dicha equacion se reducirá á

$$(c)\ldots\ A't^2+B'u^2+C'v^2+K'=0.$$

334. Puede suceder que los valores de las constantes arbitrarias, que dan las equaciones $D'=0$, $E'=0$, $F'=0$, sean imaginarios: en este caso se harán desaparecer solamente dos términos por exemplo $E'tv$, $F'uv$, haciendo $E'=0$, $F'=0$, y se empleará una de las

constantes arbitrarias para hacer reales los valores de las otras dos. La equacion transformada será en este caso

$$A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + D'tu + K' = 0.$$

335. Resolviendo la equacion (c) relativamente á una qualquiera de las coordenadas t, u, v, resultarán dos valores iguales y de signo contrario; de donde inferirémos que cada uno de los planos de las coordenadas, divide la superficie propuesta en dos partes iguales y semejantes, del mismo modo que los diámetros de una línea curva, dividen dicha curva; y por esta razon dichos planos; esto es los planos cuyas ordenadas á uno y otro lado son iguales, se llaman *diámetros*, ó *planos diametrales*.

Los exes de las coordenadas t, u, y v que forman las intersecciones de los planos diametrales, se llaman *exes principales*.

336. Para conocer las diferentes superficies que la equacion (c) puede expresar; seguirémos el camino que indicamos en el núm. 322.; dando antes á dicha equacion esta forma

$$(\mathrm{d}) \ldots\ldots A't^2 + B'u^2 + C'v^2 = L'^2.$$

Supongamos desde luego que los coeficientes A', B', C', son positivos; y AB, AC, AD (*fig.* 94.) los exes de las coordenadas t, u, y v.

Haciendo primero $z = 0$, la equacion $A't^2 + B'u^2 = L'^2$ que resulta expresa la naturaleza de la seccion principal $CBcb$ del plano de las t, y u, la qual es por consiguiente una *elipse* cuyos semiexes son $AB = Ab = \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, y $AC = Ac = \frac{L'}{\sqrt{B'}}$.

Supongamos ahora $u = 0$, y tendrémos la equacion $A't^2 + C'v^2 = L'^2$ de la seccion principal BDb del plano de las t, y v, la qual es igualmente una *elipse* cuyos semiexes son $AB = \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, y $AD = \frac{L'}{\sqrt{C'}}$.

Finalmente haciendo $t = 0$, resulta la equacion $B'u^2 + C'v^2 = L'^2$ de la seccion principal CDc, la qual es tambien una *elipse* que tiene por semiexes $AC = \frac{L'}{\sqrt{B'}}$, y $AD = \frac{L'}{\sqrt{C'}}$. Conocemos pues la naturaleza de las tres secciones principales; y los tres semiexes $AB = \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, $AC = \frac{L'}{\sqrt{B'}}$, $AD = \frac{L'}{\sqrt{C'}}$.

337. Las superficies cuyas tres secciones principales son elipses, se llaman *elipsoides*, y se distinguen en tres especies:

1.ª Quando los tres exes principales Bb, Cc, Dd son iguales; en cuyo caso las tres secciones principales son otros tantos círculos, y la superficie propuesta, la de una esfera cuyo radio es $= L'$.

2.ª Quando solamente dos exes principales, por exemplo AC, y AD, son iguales. En este caso será $C' = B'$, y la equacion de la superficie propuesta $A't^2 + B'(u^2 + v^2) = L'^2$, la qual manifiesta que la seccion principal CDc, y todas sus paralelas (en cada una de las quales (núm. 300.) es t constante) son círculos; y por consiguiente, la superficie propuesta será la del *esferoide* engendrado por la rotacion de la elipse BCb al rededor del exe Bb.

3.ª Quando los tres exes, ó los tres coeficientes A', B', C' son desiguales; en cuyo caso no solamente las tres secciones principales, sino tambien sus respectivas paralelas, son *elipses*. En efecto, si en la equacion (d) se supone t igual á una constante qualquiera m, y $L'^2 - A'm^2 = M'^2$, se transformará en $B'u^2 + C'v^2 = M'^2$; y manifiesta, que la seccion hecha por un plano paralelo á CAB á una distancia $= m$; es una *elipse* cuyos semiexes son $\frac{M'}{\sqrt{B'}}$, y $\frac{M'}{\sqrt{C'}}$.

Lo mismo demostraríamos relativamente á las secciones paralelas á los otros dos planos CAB, BAD.

338. Veamos ahora, las superficies que la equacion (d) representa, quando uno ó dos de los coeficientes A', B', C', son negativos; y sea desde luego $A't^2 + Bu^2 - Cv^2 = L'^2$ la equacion propuesta.

Haciendo sucesivamente v, u, y t nulas; tendrémos las equaciones de las tres secciones principales $At^2 + B'u^2 = L'^2$, $A't^2 - Cv^2 = L'^2$, $B'u^2 - C'v^2 = L'^2$; de donde inferirémos, que la primera $CBcb$ (*fig.* 95.) es una *elipse* cuyos semiexes son $AB = \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, y $AC = \frac{L'}{\sqrt{B'}}$; y las otras dos EBe, FCf, son *hypérbolas* cuyo centro comun es el punto A, y los vértices respectivos estan en B, y C; y el semiexe conjugado comun á AB, y AC es igual á $\frac{L'}{\sqrt{C'}}$.

Todas las secciones del cuerpo propuesto, paralelas á la principal $CBcb$ serán *elipses*; y las paralelas á qualquiera de las otras dos secciones principales, *hypérbolas*.

Si fuese $A' = B'$, la seccion principal $CBcb$ y todas sus paralelas serian círculos; y la superficie propuesta se podria considerar como engendrada por la rotacion de la *hypérbola* EBe al rededor del exe Dd.

339. Quando dos de los tres coeficientes de t^2, u^2, v^2, son negativos, la equacion (d) será $At^2 - Bu^2 - C'v^2 = L'^2$; y las equaciones de las secciones principales $At^2 - Bu^2 = L'^2$, $At^2 - C'v^2 = L'^2$, $B'u^2 + C'v^2 = -L'^2$. Las dos primeras representan respectivamente las *hypérbolas* $EBeGbg$, $FBfHbh$ (*fig.* 97.), cuyo semiexe comun AB es $= \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, y su conjugado respecto á la primera hypérbola es $= \frac{L'}{\sqrt{B'}}$, y $\frac{L'}{\sqrt{C'}}$ relativamente á la segunda. Por lo que toca á la tercera equacion, y la seccion correspondiente son evidentemente imaginarias.

Todas las secciones paralelas á los planos CAB, DAB, son *hypérbolas*; y las paralelas al plano CAD, son imaginarias desde el punto A, al punto B; esto es, siempre que t sea menor que $\frac{L'}{\sqrt{A'}}$; pero quando es $t > \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, ó $A't^2 > L'^2$; haciendo $A't^2 - L'^2 = M'^2$, tendrémos la equacion $B'u^2 + C'v^2 = M'^2$; y manifiesta que en este caso las secciones son *elipses*.

Finalmente; si suponemos ademas que sea $C' = B'$, dichas secciones serán círculos, y la superficie propuesta la de un *hyperboloide* engendrado por la revolucion de la hypérbola $EBeGbg$ al rededor del exe AB.

340. Exâminemos el caso en que á la equacion (d) le faltan algunos términos; y sea desde luego $L' = 0$. Dicha equacion se reducirá en este supuesto á $A't^2 + B'u^2 + C'v^2 = 0$; y si los tres coeficientes A', B', C' son positivos, será necesariamente $t = 0$, $u = 0$, y $v = 0$; pues como el quadrado de una cantidad, es siempre positivo, la suma de un número qualquiera de quadrados no puede ser nula, á menos que cada uno de dichos quadrados sea cero. Por consiguiente la superficie propuesta se reducirá á un punto A orígen de las coordenadas (*fig.* 95.).

Quando uno de los coeficientes A', B', C' es negativo; la equacion propuesta (suponiendo que sea C' dicho coeficiente) será $A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = 0$; y las de las tres secciones principales

$$A't^2 + B'u^2 = 0,\quad A't^2 - C'v^2 = 0,\quad B'u^2 - C'v^2 = 0.$$

La primera da $t = 0$, y $u = 0$; y por lo mismo representa solamente el punto A orígen de las coordenadas. De la segunda se infiere $v = \pm t\sqrt{\frac{A'}{C'}}$, y representa las rectas AG, Ag, las quales pasan por el orígen A, donde forman con el exe AB los ángulos BAG, BAg cuya tangente es $= \sqrt{\frac{A'}{C'}}$; y por consiguiente (núm. 144. y 338.) son las *asímptotas* de la hypérbola EBe.

Finalmente la tercera representa las asímptotas de la hypérbola FCf, las quales hacen con el exe AC dos ángulos iguales, cuya tangente es $= \sqrt{\frac{B'}{C'}}$.

Si suponemos v igual á una cantidad constante m positiva ó negativa; la equacion propuesta se transformará en $A't^2 + B'u^2 = C'm^2$, la qual pertenece á una elipse cuyos semiexes son $m\sqrt{\frac{C'}{A'}}$, y $m\sqrt{\frac{C'}{B'}}$. De donde se sigue que todas las secciones paralelas al plano CAB son elipses cuyos exes son proporcionales á sus distancias respectivas m á dicho plano, y por consiguiente pertenecen á una superficie compuesta de dos *conos* iguales cuyo vértice comun es el punto A, y el exe comun, Dd.

Estos *conos* son rectos en el supuesto de $A' = B'$; y se pueden considerar como engendrados por la rotacion de las asímptotas AG, Ag al rededor del exe Dd.

Si hicieramos t ó u constantes; hallaríamos que las secciones paralelas á los planos BAD, CAD son hypérbolas cuyos exes son proporcionales á las distancias respectivas de dichas secciones á las principales.

341. Si fuesen negativos los dos coeficientes B', C'; la equacion propuesta seria $A't^2 - B'u^2 - C'v^2 = 0$, y representa la superficie de dos conos iguales cuyo vértice comun es el punto A (*fig.* 97.); y el exe comun, Bb.

La seccion principal de este cono, hecha por el plano CAB son las rectas Ii, Kk asímptotas de la hypérbola $EBeGbg$, representadas por la equacion $A't^2 = B'u^2$; y la seccion del plano BAD, las asímptotas de la hypérbola $FBfHbh$, representadas por la equacion $A't^2 = C'v^2$. La otra seccion principal es solamente el punto A.

Estos conos serán *escalenos* si B', y C' fuesen desiguales; y *rectos* si fuese $B' = C'$. En este último caso, se pueden considerar como engendrados por la revolucion de las asímptotas Ii, Kk al rededor del exe Bb.

342. Quando uno de los coeficientes A', B', C'; C' por exemplo, es cero en la equacion (d); se reduce esta á $A't^2 + B'u^2 = L'^2$, la qual en el supuesto de que ambos coeficientes A', B', son positivos, representa una elipse $CBcb$ (*fig.* 94.) trazada en el plano CAB, cuyos semiexes son $AB = \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, y $AC = \frac{L'}{\sqrt{B'}}$.

Pero como la variable v es indeterminada; le podrémos dar un valor qualquiera, y por consiguiente, si imaginamos que la recta indefinida bE perpendicular al plano CAB corra la periferia de dicha elipse; la equacion $A't^2 + B'u^2 = L'^2$ se verificará relativamente á todos los puntos de la superficie del cuerpo que dicha recta engendra, el qual es evidentemente un cilindro escaleno cuya base es la elipse $CBcb$, y el exe AD. Por consiguiente la equacion $A't^2 + B'u^2 = L'^2$ considerada en toda su generalidad, y en el supuesto de A', y B' positivas, representa la superficie del expresado cilindro.

Si hacemos sucesivamente $u = 0$, $t = 0$, tendrémos las equaciones $A't^2 = L'^2$, $B'u^2 = L'^2$; de las otras dos secciones principales. La primera da $t = \pm \frac{L'}{\sqrt{A'}}$, y representa dos rectas indefinitas paralelas al exe AD, que pasan por los extremos B, b del exe Bb de la elipse; y la segunda $u = \pm \frac{L'}{\sqrt{B'}}$, la qual representa dos rectas trazadas paralelamente al exe AD por los extremos C, c del otro exe de la elipse.

Es evidente que el expresado cilindro será recto en el supuesto de $A' = B'$.

343. Quando uno de los coeficientes A', B' es negativo; la equacion propuesta representa una superficie cilíndrica, en la qual la seccion principal hecha por el plano CAB y todas sus paralelas son otras tantas hypérbolas iguales, cuyos semiexes son tambien AB y AC.

En general, *toda equacion que solo incluye dos de las tres cantidades variables* t, u, *y* v, *de qualquiera grado que sea; representa una superficie cilíndrica, la qual se puede considerar como engendrada por el movimiento de una recta perpendicular al plano que contiene dichas dos variables.* De donde se sigue; que si mudando del modo conveniente la direccion de los exes de las coordenadas en una equacion propuesta; se consigue hacer desaparecer una de las tres variables que contiene; inferirémos que dicha equacion representa una superficie cilíndrica, cuya base ó seccion principal tiene por equacion la transformada.

344. Finalmente; si dos de los tres coeficientes A', B', C' fuesen nulos en la equacion (d), y que tuviesemos por exemplo $C'v^2 = L'^2$; infeririamos $v = \pm \frac{L'}{\sqrt{C'}}$, cuya equacion representa (número 300.) dos planos trazados paralelamente á CAB el uno encima y el otro debaxo, á una distancia de este plano $= \frac{L'}{\sqrt{C'}}$.

345. Consideremos ahora el caso particular en que una equacion propuesta no puede reducirse á la forma de la equacion (d); y para ello supondrémos que en la equacion general (a) (núm. 333.) se mude desde luego la direccion de los exes, conservando el orígen. Llamando t, u, y v las nuevas coordenadas, y suponiendo nulos los coeficientes de tu, tv, y uv, tendrémos la equacion

$$(e) \ldots\ldots A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + G't + H'u + I'v + K' = 0,$$

la qual mudando el orígen de las coordenadas no se podrá reducir á la forma de la equacion (d) quando uno de los coeficientes A', B', C', sea cero.

En efecto; suponiendo $C' = 0$, la equacion antecedente se reduce á

$$A't^2 + B'u^2 + G't + H'u + I'v + K' = 0;$$

y es evidente, que si se substituye respectivamente $t + a$, $u + b$, y $v + c$, en lugar de t, u, y v; no se podrá hacer nulo el término $I'v$ que resulta en la equacion transformada.

346. Para transformar la equacion (e) en otra sumamente sencilla, que comprehenda este caso particular, y en general todas las superficies de segundo órden; substituirémos $t + a$, $u + b$, y $v + c$ en lugar de t, u, y v; y haciendo $I' + 2cC' = L'$, y suponiendo igual á cero el coeficiente de t, el de u, y la suma de los términos constantes, se reducirá á

$$(f) \ldots\ldots A't^2 + B'u^2 + C'v^2 + L'v = 0;$$

cuya equacion es la mas sencilla de las que representan á un mismo tiempo todas las superficies de segundo órden.

347. En el supuesto de $C' = 0$, se reduce esta equacion á

$$A't^2 + B'u^2 + L'v = 0,$$

y las equaciones de las tres secciones principales serán suponiendo L negativa

$$A't^2 + B'u^2 = 0,\ A't^2 = L'v,\ B'u^2 = L'v.$$

Quando A', y B' son ambas positivas, la primera seccion principal se reduce únicamente al punto A, orígen de las coordenadas (*fig. 98.*); y las otras dos son las parábolas EAF, GAH cuyos vértices estan en el punto A; la primera situada en el plano BAD, tiene su parámetro $= \frac{L'}{A'}$; y la segunda en el plano CAD, y su parámetro es $= \frac{L'}{B'}$.

La equacion $A't^2 + B'u^2 = L'm$ que resulta del supuesto de v igual á una constante m, manifiesta que las secciones paralelas al plano CAB son elipses las quales se reducirán á círculos quando $A' = B'$. En este último caso la superficie propuesta será la de un *paraboloide* engendrado por la rotacion de la parábola EAF, ó GAH, al rededor del exe AD.

Hemos supuesto L' negativa en la equacion propuesta; pero si fuese positiva, tomariamos v negativa, y hallariamos los mismos resultados, con solo la diferencia que las superficies estarian del lado de las v negativas, y por consiguiente tendrian por exe Ad.

348. Si suponemos que uno de los coeficientes A', B'; B' por exemplo, es negativo; la equacion propuesta será $A't^2 - B'u^2 + L'v = 0$, y las equaciones de las tres secciones principales

$$A't^2 - B'u^2 = 0,\ A't^2 + L'v = 0,\ B'u^2 - L'v = 0.$$

La primera representa dos rectas Ee Ff (*fig. 99.*) que se cortan en el orígen A; y la segunda y tercera, dos parábolas cuyos exes respectivos son Ad, AD; y al contrario si L fuese negativa.

Todas las secciones paralelas al plano BAC son hypérbolas, y las paralelas á los otros dos planos, parábolas.

Finalmente; si uno de los coeficientes A', B', es nulo en la equacion $A't^2 + B'u^2 + L'v = 0$; esta equacion incluirá solamente dos variables; y por consiguiente representará una superficie cilíndrica, cuyas secciones hechas por el plano de dichas variables y todos sus paralelos, son otras tantas parábolas iguales.

349. El caso particular de $L' = o$ en la equacion $A't^2 + B'u^2 + L'v = o$, ó $C' = o$, y $L' = o$ en la equacion general (f) es digno de notarse á causa de que al mismo tiempo que destruye en esta equacion los términos $C'v^2$, y $L'v$, introduce uno nuevo.

En efecto; como en este supuesto es tambien $I' = o$, la equacion (e) se reduce á $A't^2 + B'u^2 + G't + H'u + K' = o$; y por consiguiente la mudanza del orígen de las coordenadas introducirá solamente las dos constantes arbitrarias a, y b, por medio de las quales solamente se podrán hacer nulas en la transformada dos de estas tres cantidades, á saber, el coeficiente de t, el de u, y la suma de los términos constantes: suponiendo pues que se hagan desaparecer dichos coeficientes; y llamando $-L'^2$ la referida suma, tendrémos la equacion $A't^2 + B'u^2 = L'^2$, la qual en el supuesto de A', y B' positivas representa (núm. 343.) un cilindro recto ó escaleno segun fuesen estas cantidades iguales ó desiguales; y un cilindro *hyperbólico*, quando A', y B' tuviesen signos diferentes.

350. Las superficies curvas tienen por asímptotas otras superficies: así, los conos representados por la equacion $A't^2 + B'u^2 - C'v^2 = o$ (núm. 340.) son las asímptotas de la superficie representada por la equacion $A't^2 + B'u^2 - C'v = L'^2$ (núm. 338.), á causa de que la superficie del cono se acerca continuamente á la otra, y solo se confunde con ella quando se consideran sus puntos á una distancia infinita del orígen de las coordenadas ó vértice. En efecto; si cortamos ambas superficies por un plano paralelo á ABC (*fig.* 95.) y á una distancia de este $= m$; las equaciones de las secciones del cono y de la otra superficie serán respectivamente $A't^2 + B'u^2 = C'm^2$, $A't^2 + B'u^2 = C'm^2 + L'^2$; las quales manifiestan que ambas secciones son elipses cuyos semiexes son en la del cono $m\sqrt{\frac{C'}{A'}}$, y ..... $m\sqrt{\frac{C'}{B'}}$; y en la otra $\sqrt{\left(\frac{C'm^2 + L'^2}{A'}\right)}$; y $\sqrt{\left(\frac{C'm^2 + L'^2}{B'}\right)}$; por consiguiente la primera elipse, esto es la del cono será siempre menor que la segunda, pero su diferencia será tanto menor, quanto mayor fuese m, y por último llegará á ser nula quando fuese m infinita, en cuyo caso coincidirán ambas superficies.

Los dos conos iguales representados por la equacion $A't^2 - B'u^2 - C'v^2 = o$ (núm. 341.), son igualmente las asímptotas de la superficie representada por la equacion $A't^2 - B'u^2 - C'v^2 = L'^2$ (número 339.). Entre este caso y el antecedente hay sin embargo la diferencia, de que en aquel los conos estan inscritos en la superficie cuyas asímptotas son; y en este estan circunscritos, conforme lo manifiestan los valores $t\sqrt{\frac{A'}{B'}}$, $t\sqrt{\frac{A'}{C'}}$ de los semiexes de la elipse que resulta cortando uno de estos conos por un plano MPZ (*figura* 97.) paralelo á CAD, los quales son respectivamente mayores que los semiexes $PM = \sqrt{\left(\frac{A't^2 - L'^2}{B'}\right)}$, $PZ = \sqrt{\left(\frac{A't^2 - L'^2}{C'}\right)}$, de la elipse, interseccion del mismo plano con dicha superficie; y solo llegan á ser iguales quando t es infinita.

351. Si se corta una superficie qualquiera de segundo órden con un plano, la interseccion será una línea, cuyo órden no puede ser superior al segundo: pues, si se transforma la equacion de la superficie propuesta en otra, de manera que el plano secante sea uno de los planos de las coordenadas, y se supone luego nula la coordenada que le es perpendicular resultará la equacion de dicha interseccion, la qual no puede ser de un grado superior al segundo, á causa de que la transformacion de las coordenadas en una equacion propuesta, no altera el grado de dicha equacion.

Esta observacion se extiende á las superficies curvas de qualesquiera órdenes.

352. Las coordenadas rectangulares de un punto qualquiera Z (*figura* 86.) de una superficie curva, se pueden transformar en coordenadas polares del modo siguiente:

Llamemos r el radio vector AZ, ó distancia del punto Z al orígen A; η el ángulo ZAM que forma con su proyeccion AM sobre el plano CAB; y φ el ángulo MAB, que esta proyeccion hace con el exe AB: será $r = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$, $AM = r \cos. \eta$, $z = MZ = r \text{ sen. } \eta$, $y = r \cos. \eta \text{ sen. } \varphi$, y $x = r \cos. \eta \cos. \varphi$.

Tambien podemos llamar α, β, γ los ángulos que el radio vector $AZ = r$ hace respectivamente con los exes AB, AC, AD; y baxando del punto Z las perpendiculares ZM, ZZ', ZZ'' á los planos CAB, BAD, CAD; á causa de ser $AZZ'' = ZAB = \alpha$, $AZZ' = ZAC = \beta$, y $AZM = ZAD = \gamma$, tendrémos $x = AP = ZZ'' = r \cos. \alpha$, $y = PM = ZZ' = r \cos. \beta$, y $z = ZM = r \cos. \gamma$; y substituyendo estos valores en la equacion $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, resultará para eliminar una de las variables α, β, γ, la equacion $\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma = 1$.

353. Quando una superficie curva se corta con un plano; todos los puntos de su interseccion estan en dicho plano; pero si la seccion se hace con otra superficie curva; sucede por lo comun que todos los puntos de su interseccion no pueden estar en un solo plano; y en este caso la línea que forma dicha interseccion se llama *de doble curvatura.*

Como las coordenadas de todos los puntos de la interseccion de dos superficies curvas, son comunes á ambas superficies; se sigue que *la naturaleza de una curva de doble curvatura está representada por las dos equaciones de las superficies curvas cuya interseccion es.*

Sean x, y, y z las coordenadas rectangulares de dos superficies curvas cuya interseccion es la curva de doble curvatura XZ (*fi-*

gura 100.); y $U=0$, $V=0$, las equaciones de dichas superficies: si eliminamos sucesivamente cada una de las variables z, y, y x; resultarán tres equaciones; la primera entre x, é y, la segunda entre x, y z, y la tercera entre y, y z; las quales pertenecerán respectivamente á las proyecciones $X'Z'$, $X''Z''$, $X'''Z'''$ de la curva propuesta sobre los planos BAC, BAD, CAD.

Estas equaciones representarán igualmente (núm. 343.) las superficies cilíndricas elevadas sobre dichas proyecciones perpendicularmente á los planos respectivos que las contienen; y se echa de ver, que la curva propuesta XM, será la interseccion de dos qualesquiera de estas tres superficies: de donde se sigue que conociendo dos de estas tres equaciones, se conocerá igualmente la curva propuesta. Suponiendo pues que sean $y=F(x)$, $z=f(x)$, las equaciones de las proyecciones $X'Z'$, $X''Z''$; estas equaciones expresarán la naturaleza de la curva propuesta XZ.

Aplicacion del cálculo diferencial á la teórica de las superficies curvas, y de las curvas de doble curvatura.

354. Sea Z un punto qualquiera de una superficie curva (*fig. 101.*), cuyas coordenadas rectangulares son $AP=x$, $PM=y$, y $MZ=z$; si consideramos z como funcion de las dos variables independientes x, é y, y suponemos que variando solamente x adquiera el incremento arbitrario $PP'=k$; la ordenada correspondiente mQ, pertenecerá á la seccion EZX de la superficie propuesta hecha por un plano paralelo á BAD en la qual es y constante, y será (núm. 89.) $mQ = z + k\frac{dz}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{k^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dx^3} + \&c.$

Si se supone al contrario, que permaneciendo x constante, $PM=y$ adquiera el incremento arbitrario $Mm'=h$; la ordenada $m'R$ que resulte, pertenecerá á la seccion FZY, hecha con un plano paralelo á CAD, y será

$$m'R = z + h\frac{dz}{dy} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{h^3}{2\cdot 3}\frac{d^3z}{dy^3} + \&c.$$

Pero si ambas coordenadas x, é y, varian al mismo tiempo, y adquieren respectivamente los incrementos independientes k, h; resultará la ordenada $M'Z'$ de otro punto qualquiera Z' de dicha superficie, y será (núm. 187.) $M'Z' = z + k\frac{dz}{dx} + h\frac{dz}{dy} + \frac{1}{2}\left(k^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2kh\frac{d^2z}{dxdy} + h^2\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \&c.$; ó haciendo para abreviar $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, $\frac{d^2z}{dx^2}=r$, $\frac{d^2z}{dxdy}=s$, $\frac{d^2z}{dy^2}=t$, &c.

$$M'Z' = z + kp + hq + \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) + \&c.$$

355. Si representamos por $z=f(x,y)$ la equacion de una superficie curva, (núm. 184.) y por $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = pdx + qdy$ su diferencial; la expresion $\frac{dz}{dx}=p$, será el límite de la razon $\frac{mQ-MZ}{Mm}$ entre la diferencia de la ordenada de la seccion EZX paralela al plano BAD en la qual es y constante, y la diferencia PP' de la abscisa x; y $\frac{dz}{dy}=q$, representará el límite de la razon .... $\frac{m'R-MZ}{Mm'}$ de la diferencia de la ordenada de la seccion FZY paralela al plano CAD en la qual es x constante, y la diferencia de y.

356. Si en vez de considerar como independientes los incrementos respectivos k, h de x, é y; se supone que exîste entre ellos una razon dada, de manera que sea $\frac{h}{k}=\frac{Mm'}{PP'}$ igual á una cantidad constante m; serán tambien (núm. 15.) $\frac{dy}{dx}=m$; y la ordenada MZ', no pertenecerá en este caso á un punto qualquiera de la superficie propuesta, sino á un punto Z' de la seccion $Z'ZU$ hecha por un plano perpendicular á BAC, que pasa por los puntos M, y M'.

Es de advertir que entre los dos coeficientes diferenciales parciales $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$; subsiste la equacion de condicion (núm. 189.) $\frac{d^2z}{dxdy}=\frac{d^2z}{dydx}$, ó $\frac{dp}{dy}=\frac{dq}{dx}$.

357. Supongamos que las rectas ZT, Zt sean las tangentes respectivas de las secciones EZX, FZY en el punto comun Z; si consideramos x, y z como la abscisa y ordenada de la seccion EZX, la subtangente MT será $=z\frac{dx}{dz}$, y considerando y, y z como la abscisa y ordenada de la seccion FZY, será $Mt=z\frac{dy}{dz}$. Sentado esto, es claro que el plano TZt determinado por las dos tangentes ZT, Zt, es tangente en el punto Z de la superficie propuesta; y como se conocen los tres puntos Z, T, y t, por donde debe pasar, se conocerá igualmente la posicion de dicho plano.

En efecto si suponemos que sean α, β, y γ sus coordenadas relativamente al punto A; y $\gamma = A\alpha + B\beta + C$ su equacion; tendrémos en el punto comun Z, $\gamma=z$, $\beta=y$, y $\alpha=x$; en el punto T $\gamma=0$, $\beta=y$, y $-\alpha = z\frac{dx}{dz} - x$, ó $\alpha = x - z\frac{dx}{dz}$; y en el punto t, $\gamma=0$, $\beta = y - z\frac{dy}{dz}$, y $\alpha=x$; y substituyendo sucesivamente estos valores en la equacion del plano, tendrémos para determinar las cantidades A, B, C, las tres equaciones

$$z = Ax + By + C,\ Az\frac{dx}{dz} = Ax + By + C,\ Bz\frac{dy}{dz} = Ax + By + C$$ que dan $A = \frac{dz}{dx}$, $B = \frac{dz}{dy}$, $C = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}$; y por consiguiente la equacion del plano tangente TZt será $\gamma - z = \frac{dz}{dx}(\alpha - x) + \frac{dz}{dy}(\beta - y)$.

Del mismo modo hallaríamos las subnormales de las secciones EZX, FZY, y la posicion de la normal en el punto Z de una superficie curva qualquiera; pero como este método exîge varias consideraciones particulares á cada caso diferente; no nos detendrémos en su aplicacion, y pasarémos á exponer otro general y sumamente elegante, el qual se aplica con igual facilidad á la determinacion de los radios de curvatura de las diferentes secciones de una superficie curva, y en general á la solucion de los problemas principales que se pueden proponer sobre las superficies curvas. Este método es análogo al del núm. 166. y siguientes; ó por mejor decir, es aquel mismo método extendido á las funciones de dos cantidades variables independientes.

358. Sea pues $z = f(x, y)$ la equacion de una superficie qualquiera referida á los exes AB, AC, AD perpendiculares entre sí (*fig. 101.*); y $\gamma = A\alpha + B\beta + C$ la equacion de un plano referido á los mismos exes: si el plano y la superficie propuesta tienen un punto comun Z, será en él $\alpha = x$, $\beta = y$, y $\gamma = z$, y por consiguiente tendrémos relativamente á dicho punto la equacion $z = Ax + By + C$.

Consideremos ahora otro punto Z' de la superficie propuesta correspondiente á las coordenadas $x + k$, $y + h$; la ordenada $Z'M'$ será $= z + kp + hq + \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) + \&c.$; y llamando γ' la ordenada del plano correspondiente á las mismas coordenadas $x + k$, $y + h$, será $\gamma' = A(x + k) + B(y + h) + C$; por consiguiente á causa de $Ax + By + C = z$, la diferencia de estas dos ordenadas, que llamarémos D, ó la distancia del punto Z' al punto donde la ordenada $M'Z'$ encuentra el plano, será expresada por

$$D = k(p - A) + h(q - B) + \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) + \&c.$$

Sentado esto; un plano es tangente en un punto Z de una superficie curva, quando su situacion es tal, que ningun otro plano que tiene el mismo punto Z comun con dicha superficie puede pasar entre esta y dicho plano.

Es claro que permaneciendo indeterminadas las cantidades k, y h; la distancia D será tanto menor, quanto menores sean los co-

eficientes de dichas cantidades. Supongamos que sea $p - A = 0$, y $q - B = 0$, tendrémos $D = \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) + \&c.$, $A = p$, $B = q$, y á causa de $z = Ax + By + C$, será $C = z - px - qy$; y la posicion del plano será en este supuesto determinada por la equacion $\gamma - z = p(\alpha - x) + q(\beta - y)$.

359. El plano determinado por la equacion antecedente tiene la propiedad, que ningun otro plano trazado por el punto Z puede pasar entre aquel, y la superficie propuesta. En efecto; si suponemos que la equacion $\gamma = A'\alpha + B'\beta + C'$ represente otro plano qualquiera trazado por el punto Z, y Δ la distancia del punto Z' al punto donde la ordenada $M'Z'$ encuentra dicho plano; será

$$\Delta = k(p - A') + h(q - B') + \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) + \&c.,$$

la qual (haciendo abstraccion de los signos de D, y de Δ) es evidentemente mayor que $D = \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) + \&c.$ Luego el segundo plano no puede pasar entre el primero y la superficie propuesta; y por consiguiente el plano representado por la equacion $\gamma - z = p(\alpha - x) + q(\beta - y) = \frac{dz}{dx}(\alpha - x) + \frac{dz}{dy}(\beta - y)$ será tangente en el punto Z de la superficie propuesta; lo mismo que demostramos en el núm. 357.

Es evidente, que si fuese $p - A' = 0$, y $q + B' = 0$; el plano representado por la equacion $\gamma = A'\alpha + B'\beta + C'$, se confundiria con el plano tangente.

Supongamos, por exemplo, que la superficie propuesta sea una esfera cuyo radio $= r$, y el centro esté en el orígen A. Será su equacion $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; de donde inferirémos $\frac{dz}{dx} = p = -\frac{x}{z}$, $\frac{dz}{dy} = q = -\frac{y}{z}$, y la equacion del plano tangente será $\gamma = \frac{z^2 - x(\alpha - x) - y(\beta - y)}{z}$; ó substituyendo por $z^2 + y^2 + x^2$ su igual r^2, $x\alpha + y\beta + z\gamma = r^2$.

Si la equacion propuesta fuese $A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = L'^2$ (n. 336.); seria $p = \frac{dz}{dx} = -\frac{A'x}{C'z}$, $q = \frac{dz}{dy} = -\frac{B'y}{C'z}$, cuyos valores transforman la equacion del plano en $\gamma - z = \frac{-A'x(\alpha - x) - B'y(\beta - y)}{C'z}$, la qual multiplicando $\gamma - z$ por $C'z$, y substituyendo L'^2 en lugar de $A'x^2 + B'y^2 + C'z^2$ se reduce á $A'x\alpha + B'y\beta + C'z\gamma = L'^2$.

360. Si llamamos u la inclinacion del plano representado por la equacion $\gamma = A\alpha + B\beta + C$, relativamente al plano BAC de las

α, y β; y v el ángulo que forma la interseccion de estos dos planos con el exe AB; será (núm. 306.) tang. $u = -\sqrt{(A^2 + B^2)}$, y tang. $v = \frac{A}{B}$: de donde inferirémos que en el plano tangente es tang. $u = -\sqrt{(p^2 + q^2)}$, y tang. $v =$ tang. $BGt = \frac{p}{q}$.

Si quisiéramos determinar los puntos de una superficie curva, en los quales el plano tangente es paralelo á uno de los planos de las coordenadas, á BAC por exemplo; hariamos $u = 0$, y tendriamos $p^2 + q^2 = 0$, de donde se infiere (núm. 340.) $p = 0$, $q = 0$; cuyas equaciones combinadas con la de la superficie propuesta determinarán los puntos que se buscan.

En la esfera cuya equacion es $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$; tenemos $p = \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$, $q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}$, y como z es una cantidad finita; haciendo p, y q nulas, lo serán igualmente x, é y, y por consiguiente $z = \pm r$: de donde inferirémos que el plano tangente es paralelo al plano BAC, en los dos puntos donde el exe AD de las z encuentra su superficie.

Si la superficie propuesta fuese la que representa la equacion $A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = L'^2$, en el supuesto de A', B', y C' positivas (*fig.* 94.); tendriamos $p = -\frac{A'x}{C'z} = 0$, $q = -\frac{B'y}{C'z} = 0$; de donde infeririamos á causa de ser z finita (núm. 336.) $x = 0$, $y = 0$, y por lo mismo $z = \pm \frac{L'}{\sqrt{C'}}$; así, en este exemplo, como en el antecedente, el plano tangente es paralelo al de las x é y, en los puntos D, d donde el exe de las z encuentra la superficie propuesta.

361. La normal en un punto Z de una superficie curva (*fig.* 102.) es la recta ZG perpendicular al plano tangente en el mismo punto; y en virtud de lo expuesto en el número antecedente, y de lo demostrado en el núm. 315., las equaciones de sus proyecciones sobre los planos BAD, CAD serán llamando α, β, y γ sus coordenadas, $\alpha - x + p(\gamma - z) = 0$, $\beta - y + q(\gamma - z) = 0$.

La distancia del punto Z á otro punto qualquiera de dicha normal (núm. 318.) será $= \sqrt{(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2} = (\gamma - z)\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$; y haciendo $\gamma = 0$, el resultado $-z\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ expresará la distancia del punto Z al punto G donde encuentra el plano BAC.

Si, por exemplo, la equacion de la superficie propuesta es $A'x^2$

$+ B'y^2 + C'z^2 = L'^2$; será $p = -\frac{A'x}{C'z}$, $q = -\frac{B'y}{C'z}$; y por consiguiente $ZG = \frac{\sqrt{(A'^2x^2 + B'^2y^2 + C'^2z^2)}}{C'}$.

En el supuesto de $A' = B' = C' = 1$; será $ZG = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)} = L'$; y la superficie propuesta será en este caso una esfera cuyo centro está en el orígen A, y el radio es $= L'$.

362. Sea siempre $z = f(x, y)$ la equacion de una superficie qualquiera, y $z' = F(x', y')$, la de otra superficie conocida, referida á los mismos exes AB, AC, AD que la primera (*fig.* 102.): si estas dos superficies tienen un punto comun Z, será en él $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, y por consiguiente $z = F(x, y)$. Considerando luego las ordenadas $M'Z$, $M'H$ de ambas superficies, correspondientes á las coordenadas $x + k$, $y + h$; $x' + k$, $y' + h$; será

$M'Z' = z + kp + hq + \frac{1}{2}(k^2r + 2khs + h^2t) +$ &c., y $M'H = z' + k\frac{dz'}{dx'} + h\frac{dz'}{dy'} + \frac{1}{2}\left(k^2\frac{d^2z'}{dx'^2} + 2kh\frac{d^2z'}{dx'dy'} + h^2\frac{d^2z'}{dy'^2}\right)$ + &c., ó haciendo $\frac{dz'}{dx'} = p'$, $\frac{dz'}{dy'} = q'$, $\frac{d^2z'}{dx'^2} = r'$, &c.; $M'H = z' + kp' + hq' + \frac{1}{2}(k^2r' + 2khs' + h^2t') +$ &c. por consiguiente, como en el punto comun Z, es $z = z'$; la diferencia $HZ' = D$ de estas dos coordenadas, estará expresada por

$D = k(p - p') + h(q - q') + \frac{k^2}{2}(r - r') + kh(s - s') + \frac{h^2}{2}(t - t') +$ &c.

Sentado esto; si la superficie conocida fuese tal, que relativamente al punto comun Z, se verificasen las dos equaciones $p' = p$, $q' = q$; la distancia D se reduciria á $\frac{k^2}{2}(r - r') + kh(s - s') + \frac{h^2}{2}(t - t') +$ &c.; y en este caso será imposible que otra superficie, pasando por el punto Z, en la qual no se verifican las dos equaciones análogas á las antecedentes, pueda pasar entre la superficie conocida, y la propuesta.

En efecto; si llamamos x'', y'', z'' las coordenadas de otra superficie qualquiera que pasa por el punto Z, y Δ la distancia del punto Z al punto donde la ordenada $M'Z'$ encuentra la nueva superficie; será

$\Delta = k(p - p'') + h(q - q'') + \frac{k^2}{2}(r - r'') + kh(s - s'') + \frac{h^2}{2}(t - t'') +$ &c.; y como las cantidades k, h, son arbitrarias, será fácil demostrar que decreciendo estas cantidades indefinidamente, la expresion $\frac{k^2}{2}(r-r')+kh(s-s')+\frac{h^2}{2}(t-t')+$ &c. de D, llegará á ser menor que la de Δ; y por consiguiente la nueva superficie no podrá pasar entre las otras dos.

363. Supongamos que la superficie conocida representada por la equacion $z'=F(x', y')$ sea tal, que relativamente al punto comun Z, se verifiquen (ademas de las dos equaciones $p'=p$, $q'=q$) tambien las tres equaciones $r'=r$, $s'=s$, y $t'=t$: la distancia D se reducirá á $\frac{k^3}{2\cdot 3}(u-u')+\frac{kh}{2}(v-v')+\frac{kh^2}{2}(\sigma-\sigma')+\frac{h^3}{2\cdot 3}(\delta-\delta')+$ &c., representando u, u', v, v', &c. las expresiones $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z'}{dx'^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, $\frac{d^3z'}{dx'^2dy'}$, &c.; y en este caso, será fácil probar, que tomando las cantidades arbitrarias k y h tan pequeñas como sea menester; la distancia D será menor que la distancia Δ relativa á otra superficie dada en la qual no se verifican semejantes equaciones; de donde se sigue que esta superficie no podrá pasar entre las otras dos; y así en adelante.

364. El contacto de la superficie dada con la propuesta en el punto comun Z se llama de primer órden, quando en dicho punto se verifican las dos equaciones $p'=p$, $q'=q$; de segundo órden ú *osculacion*, quando se verifican ademas las tres equaciones $r'=r$, $s'=s$, $t'=t$, &c.

El plano representado por la equacion $\gamma-z=p(\alpha-x)+q(\beta-y)$ (núm. 359.), tiene con la superficie propuesta un contacto de primer órden.

365. Supongamos ahora que la superficie dada sea una esfera (*fig.* 102.): será su equacion $(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=a^2$, representando α, β, γ las coordenadas que fixan la posicion de su centro respecto al orígen comun A, y a el radio; y como en el punto comun Z es $x'=x$, $y'=y$, y $z'=z$; tendrémos desde luego la equacion

$$(1) \ldots\ldots\ldots (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=a^2.$$

Diferenciando la equacion propuesta; hallerémos $p'=-\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}$ $=$ (en el punto Z) $-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, y $q'=-\frac{y'-\beta}{z'-\gamma}=-\frac{y-\beta}{z-\gamma}$; por lo que, si suponemos que en el mismo punto sea $p'=p$, y $q'=q$, será tambien $p=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, $q=-\frac{y-\beta}{z-\gamma}$, ó bien

$$(2) \ldots \alpha-x+p(\gamma-z)=0, \quad (3) \ldots \beta-y+q(\gamma-z)=0.$$

Estas equaciones, considerando α, β, y γ como variables; pertenecen á la normal ZG de la superficie propuesta en el punto Z (núm. 361.): de donde inferirémos, que *los centros de todas las esferas que tienen un contacto de primer órden con la superficie propuesta; estan en la normal* ZG *del punto de contacto* Z.

De las dos equaciones antecedentes, y de la equacion (1) se infiere $\alpha=x+\frac{ap}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, $\beta=y+\frac{aq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$, $\gamma=z-\frac{a}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}$; y el radio a queda indeterminado.

366. Para que la esfera tuviese un contacto de segundo órden con la superficie propuesta; sería necesario que relativamente al punto de contacto se verificasen las tres equaciones $r'=r$, $s'=s$, $t'=t$; pero como solo queda una cantidad arbitraria a, no se podrá satisfacer á dichas equaciones; de donde inferirémos, que *la esfera no puede tener en general un contacto de segundo órden ú osculacion con una superficie.*

Pero si en lugar de la esfera, fuese dada una superficie cuya equacion $z'=F(x', y')$ incluyese seis constantes arbitrarias; determinándolas por medio de las seis equaciones de condicion relativas al contacto de segundo órden $z=F(x, y)$, $p'=p$, $q'=q$, $r'=r$, $s'=s$, y $t'=t$; se verificarán todas estas equaciones, y por consiguiente dicha superficie podrá tener en general un contacto de segundo órden con la superficie propuesta. Tal es, por exemplo, la superficie engendrada por la rotacion de un arco de círculo al rededor de su cuerda,

367. Aunque entre todas las esferas que tocan la superficie propuesta en el punto Z, no hay ninguna que sea propiamente *osculatriz* de dicha superficie; se puede determinar sin embargo la que lo sea de una seccion qualquiera hecha por un plano perpendicular en el punto Z, y que por consiguiente pasa por la normal ZG.

Para ello supondrémos nula la suma de los términos de segundo órden en la expresion de D, y dividiendo por k^2 tendrémos la equacion $(4) \ldots\ldots r-r'+2(s-s')\frac{h}{k}+(t-t')\frac{h^2}{k^2}=0$, la qual servirá para determinar el radio a de la esfera.

En efecto, de la equacion de esta se infiere $\frac{d^2z'}{dx'^2}=r'=-\frac{1+p'^2}{z'-\gamma}$, $s'=-\frac{p'q'}{z'-\gamma}$, $t'=-\frac{1+q'^2}{z'-\gamma}$; y substituyendo estos valores en la equacion antecedente, y teniendo presente que $z'=z$, $p'=p$, y $q'=q$, se transformará en $\ldots\ldots\ldots \frac{1+p^2}{z-\gamma}+r+2\left(\frac{pq}{z-\gamma}+s\right)\frac{h}{k}+\left(\frac{1+q^2}{z-\gamma}+t\right)\frac{h^2}{k^2}=0$, la qual haciendo $\frac{h}{k}=m$ da $z-\gamma=-\frac{1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2}{r+2sm+tm^2}$. Si para abreviar representamos por M el segundo miembro de esta equacion, tendrémos $\gamma=z-M$, y comparando este valor de γ con el que hallamos en el núm. 365., resultará

$$a = M\sqrt{(1 + p^2 + q^2)};$$

por consiguiente $\alpha = x + pM$, y $\beta = y + qM$, y la esfera estará determinada en magnitud y posicion.

Es claro, que en la esfera determinada de este modo; la distancia $HZ' = D$, contendrá solamente los términos de un órden superior al segundo relativamente á k, y h; de donde inferirémos que ninguna otra esfera que toca la superficie propuesta en el punto Z podrá pasar entre los puntos H, Z' de la esfera antecedente y de la superficie propuesta, correspondientes á las coordenadas $x + k$, $y + h$; y por consiguiente la referida esfera será osculatriz de la superficie propuesta en la direccion ZZ' ó MM', en la qual es $\frac{mM'}{mM} = \frac{h}{k} = m$.

368. Si se corta la superficie propuesta con un plano que pasa por la normal ZG; el círculo máxîmo que resulta en la esfera osculatriz, será el círculo osculador de la seccion correspondiente ZZ' de la superficie propuesta; por consiguiente el valor de a que hemos determinado, representa el radio de curvatura de una seccion qualquiera ZZ' hecha por un plano que pasa por la normal ZG, y cuya posicion depende de la relacion arbitraria $\frac{h}{k} = m$.

Es de advertir, que como las cantidades k, y h, se pueden suponer menores que qualesquiera cantidades dadas; m representará el límite de la razon $\frac{h}{k} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, por consiguiente será $m = \frac{dy}{dx}$, ó igual á la tangente del ángulo que la tangente en el punto M de la proyeccion de la seccion ZZ' sobre el plano BAC, hace con el exe AB de las x.

369. Supongamos que entre la infinidad de valores que puede tener el radio de curvatura a correspondientes á los de m, se quieran determinar el máxîmo y el mínimo. Tendrémos desde luego la equacion $\frac{da}{dm} = 0$, ó á causa de que $\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$ no incluye m, $\frac{dM}{dm} = 0$: pero siendo $M = -\frac{1 + p^2 + 2pqm + (1 + q^2)m^2}{r + 2sm + tm^2}$, será $(r + 2sm + tm^2)M + 1 + p^2 + 2pqm + (1 + q^2)m^2 = 0$; diferenciando esta equacion, y suponiendo $\frac{dM}{dm} = 0$, tendrémos

$$(5) \ldots\ldots (s + tm)M + pq + (1 + q^2)m = 0,$$

cuya equacion combinada con la antecedente servirá para determinar m, y M.

Multiplicando por m esta equacion y restándola de la antecedente, resultará

$$(6) \ldots\ldots (r + sm)M + 1 + p^2 + pqm = 0.$$

Si eliminamos M por medio de estas dos equaciones, y hacemos para abreviar $A = (1 + q^2)s - pqt$, $B = (1 + p^2)t - (1 + q^2)r$, $C = (1 + p^2)s - pqr$, tendrémos la equacion de segundo grado $Am^2 - Bm - C = 0$, que da

$$m = \frac{B \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2A}.$$

Restando la equacion (6) multiplicada por t de la equacion (5) multiplicada por s, hallarémos $M = \frac{(1 + p^2)t - pqs - Am}{s^2 - rt}$, y substituyendo por m su valor y haciendo $E = (1 + p^2)t + (1 + q^2)r - 2pqs$, será

$$M = \frac{E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}}{2(s^2 - rt)}; \text{ y por consiguiente}$$

$$a = \frac{[E \pm \sqrt{(B^2 + 4AC)}]\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}{2(s^2 - rt)}.$$

370. De los dos valores del radio a, el uno es el máxîmo y el otro el mínimo. Hay pues en el punto Z (*fig.* 102.) dos secciones perpendiculares á la superficie propuesta, de las quales la una tiene la máxîma curvatura, y la otra la mínima; y el ángulo que forman, depende de la cantidad m, igual á la tangente del ángulo que la tangente en el punto M de la proyeccion sobre el plano de las x é y, hace con el exe AB de las x. Pero como la posicion de los planos de las coordenadas es arbitraria; si imaginamos que el plano de las x é y, se confunda con el plano tangente en el punto Z, y tomamos en este punto el orígen de las coórdenadas (*fig.* 103.); el exe de las z se confundirá con la normal ZG, y la proyeccion de la seccion ZZ', con la tangente ZT de dicha seccion en el punto Z; los dos valores de m, representarán las tangentes respectivas de los ángulos BZT, BZt, que las tangentes de las secciones ZZ', ZZ de la máxîma y mínima curvatura hacen con el exe AB; y la diferencia TZt de estos ángulos será el que forman dichas secciones: llamando pues α, y β los referidos ángulos, tendrémos por las fórmulas trigonométricas tang. TZt = tang. $(\beta - \alpha) = \frac{\text{tang.}\,\beta - \text{tang.}\,\alpha}{1 + \text{tang.}\,\beta\,\text{tang.}\,\alpha} = \ldots\ldots \frac{\sqrt{(B^2 + 4AC)}}{A - C}$. Pero en el supuesto actual (núm. 360.) es $p = 0$, $q = 0$, y por lo mismo $A = s$, $B = t - r$, $C = s$; será pues $A - C = 0$, tang. $TZt = \infty$, y $TZt = 90.°$. De donde concluirémos que *las dos secciones de la mayor y menor curvatura en un punto qualquiera Z de una superficie curva, son perpendiculares entre sí.*

Si en las expresiones generales de a y de M (núm. 367.), hacemos $p = 0$, $q = 0$; tendrémos $a = M = -\frac{1 + m^2}{r + 2sm + tm^2}$, representando m la tangente del ángulo que el plano secante hace con el plano BAD (*fig.* 103.) de las x, y z; de donde se sigue que el radio de curvatura de la seccion de este plano es $= -\frac{1}{r}$.

371. En la transformacion que hemos hecho de las coordenadas, fixamos solamente la posicion del plano BAC de las x é y, haciéndole coincidir con el plano tangente en el punto Z de la superficie propuesta; podemos ademas suponer que el plano de las x y z, coincide con el plano TZG de una de las secciones de la máxîma y mínima curvatura, en cuyo caso el plano de las y, y z se confundirá con el plano GZt de la otra seccion, y el coeficiente diferencial s será nulo. Pues si en la equacion $Am^2 - Bm - C = 0$ relativa al máxîmo y mínimo radio de curvatura, substituimos por A, B, C sus valores respectivos s, $t - r$, s, se transformará en $sm^2 - (t - r)m - s = 0$; y como los dos valores de m son en este supuesto 0 é ∞; tendrémos en ambos casos $s = 0$.

Por consiguiente quando el plano de las x y z coincide con uno de los planos de las secciones de la máxîma y mínima curvatura; el radio a de una seccion que pasa por el exe AD de las z, y hace con dicho plano un ángulo qualquiera cuya tangente es m, estará expresado por $a = -\frac{1 + m^2}{r + tm^2}$.

Es evidente que en el mismo supuesto los radios de la máxîma y mínima curvatura en el punto Z son $-\frac{1}{r}$, y $-\frac{1}{t}$; de donde inferirémos que estas curvaturas son como r es á t.

372. Las máxîmas y mínimas ordenadas de una superficie curva; se determinan naturalmente por el método de máxîmos y mínimos de las funciones de dos cantidades variables expuesto en el núm. 274. y siguientes.

Desde luego, para que la ordenada z sea un máxîmo ó un mínimo es necesario que se verifiquen las dos equaciones $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$.

Es de advertir, que quando estas equaciones se verifican (número 360.), el plano tangente es paralelo al de las x é y; de donde inferirémos que la ordenada z solo puede ser un máxîmo ó un mínimo en los puntos donde el plano tangente es paralelo al de las x é y.

Ademas tendrémos las condiciones expuestas en el núm. 274., que seria ocioso repetir aquí.

Supongamos por exemplo que se nos pidan las máxîmas y mínimas ordenadas z de la superficie representada por la equacion $ax^2 + by^2 + cz^2 = l^2$. Diferenciándola, hallarémos $z\frac{dz}{dx} = -$

$\frac{ax}{c}$, $z\frac{dz}{dy} = -\frac{by}{c}$, $z\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = -\frac{a}{c}$, $z\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{dz}{dx}\frac{dz}{dy} = 0$, $z\frac{d^2z}{dy^2} + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = -\frac{b}{c}$; y haciendo $\frac{dz}{dx} = 0$, $\frac{dz}{dy} = 0$, tendrémos $x = 0$, $y = 0$; de donde se infiere $z = \pm\frac{l}{\sqrt{c}}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \mp\frac{a}{l\sqrt{c}}$, $\frac{d^2z}{dxdy} = 0$, $\frac{d^2z}{dy^2} = \mp\frac{b}{l\sqrt{c}}$, y la condicion $DF - E^2 > 0$ (núm. 274.) del máxîmo y del mínimo será en este caso $\frac{d^2z}{dx^2} \times \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{ab}{l^2c} > 0$.

Es claro que quando los tres coeficientes a, b, c, son positivos (*fig.* 94.), se verifica dicha condicion; y como $\frac{d^2z}{dx^2}$ tiene dos valores, uno negativo, y otro positivo, la ordenada z será un máxîmo y un mínimo en el orígen; un máxîmo $= \frac{l}{\sqrt{c}} = AD$, y un mínimo $= -\frac{l}{\sqrt{c}} = Ad$.

Si uno de los coeficientes a, b, c, fuese negativo; no se verificaria la condicion expresada; y por consiguiente la superficie propuesta (*fig.* 95.) no tendrá ningun máxîmo ni mínimo de la ordenada z.

Quando dos de los tres coeficientes a, b, c, son negativos, se verifica la referida condicion; sin embargo, en este supuesto es necesario excluir el caso en que c fuese uno de los coeficientes negativos á causa de que la ordenada $z = \pm\frac{l}{\sqrt{-c}}$ es imaginaria. Pero en el otro caso; esto es, quando a, b, son negativas, y c, positiva; la ordenada z es un máxîmo y un mínimo en el orígen; un máxîmo $= \frac{l}{\sqrt{c}}$, y un mínimo $= -\frac{l}{\sqrt{c}}$. En este último caso, la superficie propuesta es la que representa la *fig.* 97., en el supuesto de que Dd sea el exe de las x; y Bb el de las z.

373. Las curvas de doble curvatura se representan segun hemos visto (núm. 353.) por dos equaciones entre las tres coordenadas perpendiculares x, y, y z, de las quales una sola es independiente, y las otras dos son funciones de ella.

Sea pues XZ (*fig.* 104.) una curva de doble curvatura qualquiera representada por las dos equaciones $y = F(x)$, $z = f(x)$ de sus proyecciones respectivas $X'Z'$, $X''Z''$ sobre los planos BAC, BAD; y $y' = \Phi(x')$, $z' = \varphi(x')$ las equaciones de otra curva conocida de doble curvatura, referida á los mismos exes AB, AC, AD. Para que estas dos curvas tengan un punto comun Z, es necesario que haciendo $x' = x$, sea $y' = y$, y $z' = z$; y por consiguiente $y = \Phi(x)$, y $z = \varphi(x)$.

Si consideramos ahora las ordenadas de ambas curvas correspondientes á la abscisa $x + k$; las de la curva propuesta serán

$$y + k\frac{dy}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + \&c.,\ z + k\frac{dz}{dx} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} + \&c.,$$

y las de la curva conocida

$$y' + k\frac{dy'}{dx'} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2y'}{dx'^2} + \&c.,\ z' + k\frac{dz'}{dx'} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2z'}{dx'^2} + \&c.$$

Sentado esto, como en el punto comun Z, es $y' = y$, y $z' = z$, la diferencia de las nuevas ordenadas de las proyecciones sobre el plano BAC, que llamarémos δ, será $k\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx'}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx'^2}\right) + \&c.$, y la diferencia Δ de las nuevas ordenadas de las proyecciones sobre el plano BAD, $k\left(\frac{dz}{dx} - \frac{dz'}{dx'}\right) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2z'}{dx'^2}\right) + \&c.$; y como la distancia entre el punto de la curva propuesta, y el de la curva dada, correspondientes á la abscisa $x + k$, es igual á $\sqrt{(\delta^2 + \Delta^2)}$; será fácil demostrar discurriendo del mismo modo que en el núm. 362.; que si fuese $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, y $\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx}$; será imposible que otra curva qualquiera trazada por el punto Z, en la qual no se verifiquen semejantes equaciones, pueda pasar entre dichas dos curvas.

Si ademas de las dos equaciones antecedentes se verificasen tambien estas dos $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$; se echaria de ver que toda otra curva trazada por el punto Z en la qual no se verificasen todas estas equaciones, no podria pasar entre la curva propuesta y la conocida; y así en adelante.

374. Así, aplicando á las curvas de doble curvatura, las nociones de los contactos de diferentes órdenes que explicamos relativamente á las curvas planas en el núm. 166. y sig.; dirémos, que las dos equaciones de condicion $\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx}$, entre una curva qualquiera y una curva dada ó conocida, determinan un contacto de primer órden; que las otras dos equaciones de condicion $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$, representan un contacto de segundo órden; y así en adelante.

En general; representando siempre por $y' = \Phi(x')$, $z' = \varphi(x')$ las equaciones de la curva dada, y suponiendo que se pidan las condiciones necesarias para que esta curva tenga con la propuesta un contacto de un órden dado; tendrémos relativamente al contacto de primer órden las quatro equaciones

$$y = \Phi(x),\ z = \varphi(x),\ \frac{dy'}{dx'} = \frac{dy}{dx},\ \frac{dz'}{dx'} = \frac{dz}{dx};$$ para un contacto de segundo órden, tendrémos ademas las dos equaciones $\frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z'}{dx'^2} = \frac{d^2z}{dx^2}$; y así en adelante.

A estas equaciones se satisface por medio de las constantes arbitrarias que contienen las funciones $\Phi(x')$, $\varphi(x')$, y cuyo número debe ser por lo menos igual al de las equaciones de condicion que el contacto exîge.

375. Supongamos por exemplo que la línea dada sea una recta TZ, representada por las dos equaciones $y' = a + bx'$, $z' = c + ex'$. Para que esta recta tenga un contacto de primer órden con la curva propuesta; ó lo que es lo mismo, para que sea tangente de la curva propuesta en un punto qualquiera Z, es necesario que se verifiquen las quatro equaciones $y = a + bx$, $z = c + ex$, $b = \frac{dy}{dx}$, $e = \frac{dz}{dx}$; y substituyendo los valores de b, y e que expresan las dos últimas, en las dos primeras; tendrémos $a = y - x\frac{dy}{dx}$, $c = z - x\frac{dz}{dx}$; y por consiguiente, las equaciones de la tangente TZ serán $y' = y + (x' - x)\frac{dy}{dx}$, $z' = z + (x' - x)\frac{dz}{dx}$.

Es de advertir que la primera de estas dos equaciones representa (núm. 130, 6º) la tangente $Z'T'$ en el punto Z' de la proyeccion $X'Z'$ determinado por las coordenadas x', é y'; y la segunda, la tangente $Z''T''$ de la proyeccion $X''Z''$ en el punto Z'' cuyas coordenadas son x', y z'; por consiguiente, las proyecciones $Z'T'$, $Z''T''$ de la tangente ZT en un punto qualquiera Z de una curva de doble curvatura; son tangentes en los puntos correspondientes Z', Z'' de las proyecciones de dicha curva sobre los planos BAC, BAD.

376. Supongamos ahora que se quiera determinar el círculo osculador en un punto qualquiera Z de la curva propuesta XZ.

Las equaciones generales de un círculo trazado sobre un plano qualquiera, se hallan de un modo muy sencillo, suponiéndole formado por la interseccion de dicho plano que pasa por el centro de una esfera; y en este supuesto, el centro y radio de la esfera lo son igualmente del expresado círculo.

La equacion general de la esfera cuyo radio es r, es $(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2 = r^2$, representando a, b, y c las constantes indeterminadas que fixan la posicion del centro; y la equacion de un plano qualquiera que pasa por dicho centro (núm. 308.) es $x' - a + m(y' - b) + n(z' - c) = 0$: por consiguiente el sistema de estas dos equaciones, representa un círculo trazado sobre un plano qualquiera, cuyo radio es $=r$, y cuyo centro fixan las tres coordenadas a, b, c.

Diferenciando estas equaciones relativamente á x', hallarémos $x' - a + (y' - b)\frac{dy'}{dx'} + (z' - c)\frac{dz'}{dx'} = 0$, $1 + m\frac{dy'}{dx'} + n\frac{dz'}{dx'} = 0$; y haciendo las substituciones correspondientes, tendrémos relativamente á un contacto de primer órden las quatro equaciones de condicion

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,\ x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0$$

$$x - a + (y-b)\frac{dy}{dx} + (z-c)\frac{dz}{dx} = 0,\ 1 + m\frac{dy}{dx} + n\frac{dz}{dx} = 0.,$$

á las quales se podrá satisfacer por medio de quatro de las seis constantes arbitrarias que contienen las equaciones dadas del círculo, y quedarán dos indeterminadas, una de las quales se puede suponer que sea el radio r del círculo, y la otra una de las dos cantidades m, n. Por donde se ve, que la curva propuesta puede tener en uno qualquiera de sus puntos una infinidad de círculos tangentes, ó que tengan con ella un contacto de primer órden.

377. Diferenciando las equaciones $x' - a + (y' - b)\frac{dy'}{dx'} + (z' - c)\frac{dz'}{dx'} = 0$, $1 + m\frac{dy'}{dx'} + n\frac{dz'}{dx'} = 0$, resulta $1 + (y' - b)\frac{d^2y'}{dx'^2} + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 + (z' - c)\frac{d^2z'}{dx'^2} + \left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2 = 0$, $m\frac{d^2y'}{dx'^2} + n\frac{d^2z'}{dx'^2} = 0$; y haciendo las substituciones correspondientes al contacto de segundo órden (núm. 374.), tendrémos relativamente á dicho contacto las dos equaciones de condicion

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} + (z-c)\frac{d^2z}{dx^2} = 0,\ m\frac{d^2y}{dx^2} + n\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

ademas de las quatro que hallamos antes; y como las equaciones del círculo, contienen cabalmente las seis constantes arbitrarias que se necesitan para satisfacer á estas seis equaciones; se verificará el contacto de segundo órden; y el círculo osculador estará determinado en magnitud y posicion.

En efecto; haciendo para abreviar $\frac{dy}{dx} = \alpha$, $\frac{dz}{dx} = \beta$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \gamma$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \sigma$, y $\sqrt{[(n\alpha - m\beta)^2 + (n-\beta)^2 + (m-\alpha)^2]} = A$; las tres equaciones de condicion $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$, $x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0$, $x - a + (y-b)\alpha + (z-c)\beta = 0$, dan

$$x - a = \frac{r(n\alpha - m\beta)}{A},\ y - b = -\frac{r(n-\beta)}{A},\ z - c = \frac{r(m-\alpha)}{A};$$

y substituyendo estos valores en la equacion $1 + \alpha^2 + \beta^2 + (y - b)\gamma + (z - c)\sigma = 0$, hallarémos $r = \frac{(1 + \alpha^2 + \beta^2)A}{(n-\beta)\gamma - (m-\alpha)\sigma}$.

Finalmente, las otras dos equaciones de condicion dan

$$m = \frac{\sigma}{\beta\gamma - \alpha\sigma},\ n = -\frac{\gamma}{\beta\gamma - \alpha\sigma};$$

de donde se infiere $(n-\beta)\gamma - (m-\alpha)\sigma = -\frac{\gamma^2 + \sigma^2 + (\beta\gamma - \alpha\sigma)^2}{\beta\gamma - \alpha\sigma}$,

$$A = \frac{\sqrt{[(\alpha\gamma + \beta\sigma)^2 + (\gamma + \beta^2\gamma - \alpha\beta\sigma)^2 + (\alpha\beta\gamma - \alpha^2\sigma - \sigma)^2]}}{\beta\gamma - \alpha\sigma} = \ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{[\alpha^2\gamma^2 + 2\alpha\beta\gamma\sigma + \beta^2\sigma^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma(\beta\gamma - \alpha\sigma) + \beta^2(\beta\gamma - \alpha\sigma)^2 + \alpha^2(\beta\gamma - \alpha\sigma)^2 - 2\alpha\sigma(\beta\gamma - \alpha\sigma) + \sigma^2}}{\beta\gamma - \alpha\sigma}$$

$$= \frac{\sqrt{[\gamma^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \sigma^2 + \alpha^2\sigma^2 + \beta^2\sigma^2 + (1 + \alpha^2 + \beta^2)(\beta\gamma - \alpha\sigma)^2]}}{\beta\gamma - \alpha\sigma} = \ldots$$

$\frac{\sqrt{[(1 + \alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \sigma^2 + (\beta\gamma - \alpha\sigma)^2)]}}{\beta\gamma - \alpha\sigma}$; y por consiguiente

$$r = -\frac{(1 + \alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{[\gamma^2 + \sigma^2 + (\beta\gamma - \alpha\sigma)^2]}}$$

$$a = x - \frac{(1 + \alpha^2 + \beta^2)(\alpha\gamma + \beta\sigma)}{\gamma^2 + \sigma^2 + (\beta\gamma - \alpha\sigma)^2}$$

$$b = y + \frac{(1 + \alpha^2 + \beta^2)(\gamma + \beta(\beta\gamma - \alpha\sigma))}{\gamma^2 + \sigma^2 + (\beta\gamma - \alpha\sigma)^2}$$

$$c = z + \frac{(1 + \alpha^2 + \beta^2)(\sigma - \alpha(\beta\gamma - \alpha\sigma))}{\gamma^2 + \sigma^2 + (\beta\gamma - \alpha\sigma)^2}.$$

Las cantidades a, b, c, representan las coordenadas de la línea que es el lugar de todos los centros de curvatura de la curva propuesta; pero dicha línea no es por esto la evoluta de la propuesta como sucede en las curvas planas (núm. 160.) Los límites que hemos prescrito á esta obra, no nos permiten extendernos en esta materia, ni manifestar otras varias propiedades de las superficies curvas, y de las curvas de doble curvatura; y así nos contentarémos con aconsejar á los Lectores que deseen conocerlas, que vean las Memorias de *Monge* insertas en los tomos 9.º y 10.º de los Sabios extrangeros; los artículos 139. .... 159. de la obra de *Lagrange* (1); y el capítulo V. del Cálculo diferencial de *Lacroix*.

---

(1) *Théorie des fonctions analytiques, &c. Par* J. L. Lagrange, *de l' Institut-national.*

CAPITULO IX.

Aplicacion del cálculo diferencial á la Mecánica.

Antes de empezar las aplicaciones del cálculo diferencial á la Mecánica; expondrémos con la posible brevedad, algunos principios fundamentales de esta ciencia; los quales nos servirán igualmente en las aplicaciones del cálculo integral.

378. Un cuerpo está en *reposo*, quando permanece constantemente en un mismo lugar. Pero si un cuerpo muda continuamente de lugar; entonces se dice que dicho cuerpo se mueve ó está en *movimiento*.

Un cuerpo permaneceria constantemente en su estado de reposo; si no hubiese alguna causa que le sacase de él, solicitándole al movimiento.

Del mismo modo; un cuerpo puesto en movimiento, continuaria moviéndose siempre en la misma direccion sin alteracion alguna; si no fuese perturbado su movimiento por una causa qualquiera.

Quando un cuerpo en movimiento sigue constantemente la misma direccion; el movimiento se llama *rectilineo*: pero si el cuerpo describe en su movimiento una línea curva; el movimiento es *curvilineo*. Considerémos primeramente el movimiento rectilineo, prescindiendo de las masas de los cuerpos.

379. Si un cuerpo anda espacios iguales en tiempos iguales; ó lo que es lo mismo, quando los espacios que anda un cuerpo, son como los tiempos correspondientes; el movimiento se llama igual ó *uniforme*. Pero si en tiempos iguales el cuerpo anda espacios desiguales; el movimiento es desigual ó *variable*.

Así, *el movimiento de un cuerpo que habiendo recibido un impulso, queda abandonado á sí mismo; es esencialmente uniforme y rectilineo*; y en esto consiste la primera ley del movimiento.

Puesto que en el movimiento uniforme, los espacios andados son proporcionales á los tiempos correspondientes: si representamos por e un espacio qualquiera andado desde el principio del movimiento; y por t el tiempo correspondiente; será $e = vt$, representando v una cantidad constante.

Es evidente que la cantidad del movimiento depende únicamente de la cantidad constante v: quiero decir que el movimiento de un cuerpo será tanto mayor, ó que dicho cuerpo se moverá tanto mas aprisa, quanto mayor fuere dicha cantidad.

380. La cantidad constante v que mide el movimiento uniforme de un cuerpo, se llama *la velocidad del movimiento*. Por consiguiente; *en el movimiento uniforme la velocidad es igual á la razon del espacio al tiempo*.

Si en la equacion $e = vt$, hacemos $t = 1$; tendrémos $v = e$: por donde se ve que *la velocidad es tambien igual al espacio andado en la unidad del tiempo*. Así; si el tiempo se cuenta por segundos, y suponemos que un cuerpo anda 10 pies en cada segundo; dirémos que la velocidad de dicho cuerpo es de 10 pies.

La misma equacion $e = vt$, manifiesta que *el espacio andado, es igual á la velocidad multiplicada por el tiempo*; y por consiguiente, *el tiempo, igual al espacio dividido por la velocidad.*

Si suponemos que la abscisa AP representa el tiempo t (*fig.* 105.), y la ordenada perpendicular PM, el espacio correspondiente e; á causa de la uniformidad del movimiento, la línea AMF que termina los espacios como PM, será una recta que pasa por el orígen A: por consiguiente tendrémos $AP : PM$; ó $t : e :: 1 :$ tang. $MAP = \frac{e}{t}$; y substituyendo v por $\frac{e}{t}$, será $v =$ tang. MAP; por donde se manifiesta, que *la velocidad del movimiento será igual á la tangente del ángulo* MAP, *que la recta* AF *forma con la línea* AB *de las abscisas.*

381. La causa que obra en un cuerpo, y le solicita á variar ó alterar su estado actual, se llama *fuerza* ó *potencia.*

La fuerza se llama *aceleratriz* quando obra en la direccion del movimiento actual del cuerpo, y por consiguiente conspira á aumentarle.

Pero quando la fuerza obra en una direccion opuesta á la del movimiento, y por lo mismo, solicita el cuerpo á disminuirle; se llama *retardatriz.*

El movimiento del cuerpo será en ambos casos desigual ó variable; y lo será tambien su velocidad: pero si se supone que al cabo del tiempo t, cese la fuerza que acelera ó retarda el movimiento del cuerpo; este continuará moviéndose uniformemente con la velocidad que tenia al cabo del tiempo t, la qual será por consiguiente igual á un espacio qualquiera del movimiento uniforme, dividido por el tiempo empleado en describirle.

382. Una fuerza se llama *constante*, quando obra siempre del mismo modo en un cuerpo, ó que en intervalos iguales de tiempo produce efectos iguales; y dicha fuerza será aceleratriz ó retardatriz, segun solicite el cuerpo á aumentar ó disminuir su movimiento. Pero quando una fuerza varía continuamente su accion; ó que en intervalos iguales de tiempo produce efectos desiguales; se dice que dicha fuerza es *variable.*

383. Una fuerza constante, que obra continuamente en un cuerpo; se mide por el efecto que produce en un intervalo determinado de tiempo, como por exemplo el espacio que hace andar al cuerpo en un segundo; ó la velocidad que le comunica en el mismo tiempo.

Por lo que toca á una fuerza que varía continuamente su accion; se aprecia en un instante qualquiera por el efecto que produciria en un intervalo determinado de tiempo, si continuase uniformemente su accion qual era en dicho instante.

384. Supongamos que una fuerza aceleratriz constante, exerza su accion al principio de cada intervalo determinado θ de tiempo: quiero decir, que al principio de cada intervalo constante de tiempo θ, dé un impulso al cuerpo, comunicándole una velocidad constante é $= a$. Las velocidades respectivas del cuerpo durante cada uno de los intervalos sucesivos, serán a, $2a$, $3a$, $4a$ ..... na: de manera que si llamamos v la velocidad al cabo del tiempo $t = n\theta$; será $v = na = \frac{ta}{\theta}$.

Por consiguiente *las velocidades adquiridas, al fin de cada intervalo θ del tiempo, son como los tiempos corridos desde el principio del movimiento.*

385. Como el movimiento del cuerpo es uniforme durante cada uno de los intervalos θ de tiempo; los espacios que describe sucesivamente (núm. 380.) serán $a\theta$, $2a\theta$, $3a\theta$, $4a\theta$... $na\theta$; y la suma de estas cantidades será el espacio total andado en el tiempo $t = n\theta$: por lo que, llamando e este espacio, será $e = \frac{n(n+1)}{2} a\theta = v\frac{t+\theta}{2}$.

386. Supongamos ahora que la fuerza aceleratriz, obre continuamente en el móvil sin intermision alguna. El intervalo θ será cero en este supuesto; y por consiguiente tendrémos $e = \frac{vt}{2}$.

El movimiento se llama en este caso *uniformemente acelerado*, á causa de la aceleracion continua y uniforme de la velocidad.

Si suponemos que al cabo del tiempo t, cese la accion de la fuerza aceleratriz; el móvil continuará uniformemente su movimiento con la velocidad adquirida v; y (núm. 379.) andará en el tiempo t un espacio $= vt$, duplo del espacio e que describió en el mismo tiempo en virtud de la accion continua y uniforme de la fuerza aceleratriz.

Por consiguiente *en el movimiento uniformemente acelerado, el espacio que el cuerpo describe en un tiempo qualquiera; es la mitad del que andaria uniformemente en el mismo tiempo con la velocidad adquirida.*

387. Puesto que las velocidades adquiridas son proporcionales á los tiempos correspondientes: si suponemos que la velocidad adquirida en cada unidad de tiempo (como un segundo) sea p; la velocidad correspondiente al tiempo t será pt: tendrémos pues $v = pt$, y $t = \frac{v}{p}$; y substituyendo sucesivamente estos valores en la equacion $e = \frac{vt}{2}$ la transformarán respectivamente en $e = \frac{p}{2}t^2$, $e = \frac{v^2}{2p}$. De donde concluirémos, que *en el movimiento uniformemente acelerado 1º. Los espacios andados desde el principio del movimiento; son proporcionales á los quadrados de los tiempos ó de las velocidades correspondientes. 2º. Los tiempos y las velocidades son como las raices quadradas de los espacios.*

La cantidad constante p, es la medida de la fuerza aceleratriz; y por consiguiente, el movimiento del cuerpo será tanto mayor, quanto mayor fuere dicha cantidad, la qual se suele llamar simplemente *la fuerza aceleratriz.*

388. De las equaciones $v = pt$, $e = \frac{p}{2}t^2$; se infiere $p = \frac{v}{t}$, $p = \frac{2e}{t^2}$. Por consiguiente; *la fuerza aceleratriz, es igual á la razon de la velocidad al tiempo; ó al duplo de la razon del espacio, al quadrado del tiempo.*

Si representamos el tiempo t por la recta AP (*fig. 105.*); y la velocidad correspondiente v por la perpendicular PM; la línea AMF que termina las velocidades, será recta; y formará con la AP un ángulo PAM, cuya tangente será igual á la fuerza aceleratriz p.

389. Tambien se suele tomar por medida de la fuerza aceleratriz, el espacio $\frac{p}{2}$ que el cuerpo anda en la primera unidad del tiempo; y en esto no puede haber inconveniente alguno, con tal que todas las fuerzas que se consideran, se aprecien del mismo modo.

Si la abscisa AP representa el tiempo t (*fig. 106.*); y la ordenada perpendicular PM, el espacio correspondiente e: á causa de $e = \frac{p}{2}t^2$, la línea AMC que termina los espacios, será una *parábola* cuyo exe principal es AH perpendicular á AD; y el parámetro $= \frac{2}{p}$.

390. Si al principio del tiempo t quando empieza á obrar la fuerza aceleratriz, tuviese el cuerpo una velocidad qualquiera a en la direccion de dicha fuerza; esta velocidad se uniria necesariamente á la que produce la fuerza aceleratriz p. Por consiguiente, la velocidad v al cabo del tiempo t, seria $= a + pt$; y el espacio andado $e = at + \frac{p}{2}t^2$.

En este caso el movimiento del cuerpo se compondrá de los dos movimientos parciales representados por los espacios correspondientes at, $\frac{p}{2}t^2$; el primero uniforme, perteneciente á la velocidad constante a que el móvil tenia al principio del tiempo t; y el segundo uniformemente acelerado, causado por la fuerza constante p que obra continuamente en dicho cuerpo.

Representando como antes, respectivamente el tiempo y el espacio correspondiente, por las coordenadas perpendiculares AP, PM (*fig. 107.*); la curva AMC que termina los espacios, será una parábola cuyo vértice estará en el punto B determinado por las coordenadas negativas $AE = -\frac{a}{p}$, $EB = -\frac{a^2}{2p}$: el exe principal será BG; y el parámetro $= \frac{2}{p}$.

391. La observacion y la experiencia manifiestan que *la fuerza de la gravedad;* esto es, la fuerza que solicita los cuerpos á descender verticalmente; es una fuerza aceleratriz constante en un lugar qualquiera de la tierra, prescindiendo de la resistencia del ayre y demas obstáculos: y se determina observando la altura de la qual desciende un cuerpo en la primera unidad del tiempo de su caida.

Así, tomando siempre un segundo por la unidad del tiempo; si se supone que en un lugar determinado de la tierra, anda un cuerpo 15 pies en el primer segundo de su descenso; será (núm. 388.) $\frac{p}{2} = 15$ pies, y $p = 30$ pies. Por consiguiente, la fuerza de la gravedad será $= 30$ pies en dicho lugar: es decir, que comunicará á un cuerpo una velocidad de 30 pies en cada segundo.

392. Quando se quieren comparar entre sí varias fuerzas aceleratrices; se suele tomar por unidad la fuerza de la gravedad en un lugar determinado de la tierra: en cuyo supuesto será $p = 1$, $e = \frac{t^2}{2} = \frac{v^2}{2}$, y $v = t = \sqrt{2e}$.

La fuerza de la gravedad, y en general todas las fuerzas de atraccion que se observan en la naturaleza; obran igualmente en cada una de las partículas materiales que componen un cuerpo, y por consiguiente les comunican la misma velocidad. De donde se sigue que el efecto que estas fuerzas producen, ó la velocidad que comunican á un cuerpo en un tiempo determinado, es independiente del número de partículas materiales que le componen; esto es, *independiente de la masa del cuerpo.*

393. Por lo que toca á las fuerzas que obran exteriormente en los cuerpos; como son la accion de los resortes; la de la resistencia de los fluidos; las fuerzas de presion, &c.; es claro que no pueden producir el mismo efecto quando obran sobre masas desiguales: y que como todas las partículas de materia que componen un cuerpo resisten igualmente al movimiento; la fuerza que le mueve se debe apreciar por el número de partículas materiales, esto es por la masa del cuerpo multiplicada por la velocidad. Así; si llamamos Φ una de estas fuerzas; M la masa del cuerpo; y V, la velocidad que le comunica en un tiempo determinado como de un segundo; tendrémos $\Phi = MV$.

De esta equacion se infiere $V = \frac{\Phi}{M}$, $M = \frac{\Phi}{V}$; esto es, 1.º *Que la velocidad que comunica una fuerza* Φ *á una masa* M *en un tiempo determinado, está en razon directa de la fuerza é inversa de la masa:* 2.º *Que la masa es igual á la fuerza dividida por la velocidad.*

394. Si la misma fuerza Φ obrase sobre otra masa m, y le comunicase una velocidad v; seria tambien $\Phi = mv$; por consiguiente $MV = mv$: de donde se infiere $V : v :: m : M$; esto es que *las velocidades que una misma fuerza comunica á dos masas diferentes* M, m *en un tiempo determinado; estan en razon inversa de estas masas.*

Del mismo modo demostrariamos que quando las masas son iguales, las fuerzas son como las velocidades: y que quando las velocidades son iguales; las fuerzas estan en razon de las masas.

395. El producto de la masa de un cuerpo por la velocidad, se llama *la cantidad de movimiento* de dicho cuerpo. Por consiguiente, las fuerzas que obran exteriormente se miden por la cantidad de movimiento que son capaces de producir en un tiempo determinado.

396. Como en las atracciones recíprocas de los cuerpos; cada partícula de materia del cuerpo que atrae, tiene la misma cantidad de atraccion; la fuerza de atraccion de dicho cuerpo será proporcional al número de sus partículas de materia; esto es, á su masa. Y como el efecto que estas fuerzas producen, es independiente de la masa del cuerpo sobre el qual obran; la velocidad que le comunican será simplemente proporcional á la masa del cuerpo atraente. Es inútil advertir que aquí prescindimos de la desigualdad de las fuerzas de atraccion que provienen de las diferentes distancias á que obran.

La observacion y la experiencia confirman diariamente estos principios.

397. Supongamos que en el punto A (*fig.* 108.) se le dé á un cuerpo un impulso en la direccion AD, el qual le comunica una velocidad uniforme é igual á a; y otro impulso en la direccion AH perpendicular á AD, capaz de imprimir al móvil una velocidad constante $= b$. Es claro, que como las direcciones de estos impulsos son perpendiculares entre sí; el impulso en la direccion AH no puede aumentar ni disminuir la velocidad a comunicada en la direccion AD; y recíprocamente, el impulso en la direccion AD no puede alterar la velocidad b comunicada en la direccion AH; de manera que cada una de estas velocidades se conservará del mismo modo que si exîstiese sola: por consiguiente, llamando x el espacio AP que el cuerpo anda en el tiempo t en la direccion AD; é y el espacio $PM = AB$ andado en el mismo tiempo en la direccion AH; será (núm. 379.) $x = at$, $y = bt$; y eliminando el tiempo t, resultará $y = \frac{b}{a}x$, cuya equacion pertenece á una recta AMC que pasa por el orígen A de las coordenadas, donde forma con el exe AD un ángulo MAP cuya tangente es $= \frac{b}{a}$.

El espacio AM que el móvil andará efectivamente en el tiempo t en virtud de las dos velocidades a, b, será $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = t\sqrt{(a^2 + b^2)}$: de donde concluirémos, *que el movimiento compuesto que resulta de los dos movimientos uniformes comunicados en las direcciones* AD, AH; *es tambien uniforme y rectilíneo; y su velocidad* $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

398. El triángulo rectángulo APM da $1 : \cos. MAP : \cos. AMP :: \sqrt{(a^2 + b^2)} : a : b$; de donde se infiere $\cos. MAP = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, $\cos. MAB = \cos. AMP = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$; y por consiguiente, que la direccion de la velocidad compuesta $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$, forma con los exes AD, AH los ángulos MAP, MAB, cuyos cosenos son respectivamente $\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, $\frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$.

Es evidente que si representamos respectivamente las velocidades a, b por las rectas Ap, Ab, y formamos el paralelógramo $Abmp$; la velocidad compuesta $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ será representada en cantidad y direccion por la diagonal Am de dicho paralelógramo; y en esto consiste el principio fundamental de la composicion del movimiento.

399. Si llamamos A la velocidad compuesta $\sqrt{(a^2 + b^2)}$; α el ángulo MAP que su direccion forma con el exe AD; y β, el ángulo MAB que dicha direccion forma con el exe AH; tendrémos $\cos. \alpha = \frac{a}{A}$, y $\cos. \beta = \frac{b}{A}$; de donde inferirémos $a = A \cos. \alpha = Ap$, $b = A \cos. \beta = Ab$; y por consiguiente, *que la velocidad* Am $=$ A *de un movimiento uniforme, en una direccion qualquiera* AC; *se puede resolver en dos velocidades* A cos. α, A cos. β *en las direcciones* AD, AH *perpendiculares entre sí, las quales forman con la recta* AC *los ángulos* MAP $= \alpha$, MAB $= \beta$, *cuyas velocidades son por consiguiente los lados* Ap, Ab *del paralelógramo rectángulo* Abmp. Este es el principio fundamental de la resolucion ó descomposicion del movimiento.

400. Supongamos que á un cuerpo se le comuniquen á un mismo tiempo dos velocidades representadas en cantidad y direccion por las líneas $AB = A$, y $AC = B$ (*fig. 109.*), las quales forman con los exes AD, AH los ángulos $BAD = \alpha$, $CAD = \alpha'$, $BAH = \beta$, $CAH = \beta'$; si resolvemos cada una de estas velocidades en otras dos en las direcciones AD, AH; la suma de las velocidades en la direccion AD será $= A \cos. \alpha + B \cos. \alpha'$, y $A \cos. \beta + B \cos. \beta'$ en la direccion AH; y en virtud de lo que acabamos de demostrar, estas velocidades darán una velocidad única que llamarémos C; de manera, que llamando λ, μ los ángulos que la direccion de esta velocidad forma con los exes AD, AH; tendrémos las dos equaciones $C \cos. \lambda = A \cos. \alpha + B \cos. \alpha'$, $C \cos. \mu = A \cos. \beta + B \cos. \beta'$.

Si se tiran las rectas CE, BE respectivamente paralelas á AB, AC; y desde el punto E donde se encuentran, se baxan las perpendiculares EF, EG, á los exes AD, AH; será por los principios de la trigonometría $AF = A \cos. \alpha + B \cos. \alpha'$, $AG = A \cos. \beta + B \cos. \beta'$: pero las velocidades AF, AG, dan una velocidad compuesta representada en cantidad y direccion por la diagonal AE del paralelógramo rectángulo $AGEF$, la qual lo es tambien del paralelógramo $ABEC$; luego

Si dos rectas AB, AC, *representan en cantidad y direccion las velocidades que se le comunican ó se intentan comunicar á un cuerpo; la diagonal* AE *del paralelógramo* ABEC, *representará en cantidad y direccion la velocidad compuesta que resulta de las dos velocidades* AB, AC.

En general se echa de ver, que un número qualquiera de velocidades cuyas direcciones se conocen; se pueden reducir á dos en las direcciones AD, AH perpendiculares entre sí; y que estas darán una velocidad única, cuyo valor y direccion será fácil conocer.

401. La composicion y resolucion de las fuerzas se executa del mismo modo y por los mismos principios que la de las velocidades.

En efecto; si suponemos que las líneas $Ap = p$, $Ab = q$ (*fig. 108.*) representan dos fuerzas aceleratrices constantes que solicitan á un mismo tiempo un móvil en las direcciones respectivas AD, AH perpendiculares entre sí; la fuerza q, no aumentará ni disminuirá el efecto de la fuerza p; y recíprocamente, esta no podrá alterar la accion de la fuerza q: por consiguiente, el espacio $AP = x$ andado en el tiempo t en virtud de la fuerza aceleratriz p, será (n. 388.) $= \frac{p}{2} t^2$; y el espacio $AB = PM = y$ producido en el mismo tiempo por la accion contínua de la fuerza q será $= \frac{q}{2} t^2$; y eliminando el tiempo t, resultará la equacion $y = \frac{q}{p} x$, la qual pertenece á una recta AMC que pasa por el orígen A de las coordenadas, formando con el exe AD un ángulo cuya tangente es $\frac{q}{p}$.

Por consiguiente, el espacio AM que el móvil anda efectivamente en el tiempo t en virtud de la accion contínua de las dos fuerzas p, q será $= \sqrt{(x^2 + y^2)} = \frac{\sqrt{(p^2 + q^2)}}{2} t^2$; el qual pertenece á un movimiento uniformemente acelerado cuya fuerza aceleratriz es $\sqrt{(p^2 + q^2)} = Am$.

Por donde se manifiesta, *que la resultante de las dos fuerzas aceleratrices* Ap $=$ p, Ab $=$ q *perpendiculares entre sí, es la diagonal* Am *del paralelógramo* Abmp, *la qual forma con las direcciones* Ap, Ab *los ángulos* CAD, CAH *cuyos cosenos son respectivamente* $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$, $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$.

402. De aquí se sigue, que todo quanto hemos demostrado en los números antecedentes relativamente á la composicion y resolucion de las velocidades; se verifica igualmente respecto de las fuerzas aceleratrices.

Así; si un móvil se halla solicitado á un mismo tiempo por las dos fuerzas $AB = P$, $AC = Q$ cuyas direcciones forman con los exes AD, AH (*fig. 109.*) los ángulos $BAD = \alpha$, $BAH = \beta$, $CAD = \alpha'$, $CAH = \beta'$; la resultante de estas fuerzas será la diagonal AE del paralelógramo $ABEC$; y llamando R esta resultante, y λ, μ los ángulos EAD, EAH que forma con los referidos exes; se verificarán las dos equaciones R cos. $\lambda = P$ cos. $\alpha + Q$ cos. α', R cos. $\mu = P$ cos. $\beta + Q$ cos. β'.

En general, un número qualquiera de fuerzas aceleratrices conocidas en cantidad y direccion, se podrán reducir á dos en las direcciones AD, AH perpendiculares entre sí; y estas darán una fuerza única, cuya cantidad y direccion será fácil conocer.

403. Sentados estos principios, pasemos á hacer las aplicaciones del cálculo diferencial; y consideremos desde luego un movimiento rectilíneo qualquiera acelerado ó retardado, prescindiendo de las masas de los cuerpos.

Supongamos que el tiempo crece uniformemente, y le representen las abscisas $A'P$, AP, AP' (*fig. 110.*); y que las ordenadas perpendiculares $'PM$, PM, $P'M'$, expresen los espacios correspondientes, andados en virtud de la accion contínua de una fuerza qualquiera: la línea curva BMC que termina estos espacios, será cóncava ó convexâ hácia el exe AD de las abscisas, segun fuese el movimiento retardado ó acelerado.

Supongamos que el movimiento sea acelerado; y que al cabo del tiempo $AP = t$, cese de repente la accion de la fuerza aceleratriz. Es evidente que el móvil continuará moviéndose uniformemente con la velocidad que tiene en el punto M; esto es al cabo del tiempo t. Por lo que; si tomamos la recta MF paralela á AD para representar los tiempos del movimiento uniforme; la línea que termina los espacios correspondientes, será (núm. 380.) una recta MT: y como uno qualquiera Fn de estos espacios correspondiente al tiempo PP', es menor que el espacio correspondiente FM' que el móvil hubiese andado en el mismo tiempo en virtud del movimiento acelerado; la recta Mn estará toda entera entre la curva MM' y el exe AD.

Si tomamos el intervalo $'PP = PP'$, y tiramos la ordenada $'P'M$

prolongándola hasta que encuentre en E la MF, y en p la prolongacion de TM; como la velocidad del móvil aumenta continuamente, el espacio qualquiera $Fn = Ep$ andado uniformemente en el tiempo correspondiente PP', será mayor que el espacio $'ME$ andado efectivamente en el tiempo $'PP = PP'$: por consiguiente, la recta pMn que pasa por el punto M de la curva, estará toda entera entre esta y el exe AD, y por lo mismo será tangente en el punto M.

De donde se sigue, que si llamamos e el espacio PM correspondiente al tiempo $AP = t$; y v la velocidad al cabo del mismo tiempo; á causa (núm. 130.) de tang. $FMT = \frac{de}{dt}$, será (núm. 380.) en general $v = \frac{de}{dt}$.

404. Si el movimiento fuese uniformemente acelerado; la velocidad adquirida (núm. 384.) v, seria proporcional al tiempo t; y por consiguiente $\frac{de}{dt} = pt$, siendo p una cantidad constante. Comparando esta equacion con $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{a}x$ (núm. 135.), inferirémos que la curva AMC (*fig. 106.*) que termina los espacios, es una parábola cuyo exe principal es la recta AH perpendicular á AD, y el parámetro $= \frac{2}{p}$; lo mismo que hallamos antes (núm. 388.).

Por consiguiente, será $(AP)^2 = \frac{2}{p}PM$, ó $e = \frac{p}{2}t^2$; y concluirémos como antes (núm. 387.), que en el movimiento uniformemente acelerado, los espacios andados desde el principio del movimiento, son proporcionales á los quadrados de los tiempos ó (á causa de $t = \frac{v}{p}$) de las velocidades correspondientes.

405. Supongamos que la abscisa AP, represente el tiempo t; y la ordenada perpendicular PM (*fig. 110.*), la velocidad correspondiente v de un movimiento variable qualquiera; y que tomando al uno y otro lado del punto P, los intervalos iguales $'PP$, PP' tan pequeños como se quisiere; la fuerza aceleratriz aumente durante el intervalo de tiempo $'PP'$: la parte correspondiente $'MM'$ de la curva BMC que termina las velocidades, será convexâ hácia el exe AD. Esto supuesto; si imaginamos que en el punto M al cabo del tiempo t, cesen las causas que hacen variar la fuerza aceleratriz que llamarémos φ; esta fuerza continuará obrando uniformemente en el cuerpo: por lo que, tomando en la línea MF paralela á AD los tiempos del movimiento uniformemente acelerado que empieza al cabo del tiempo t; las velocidades correspondientes se terminarán en una recta MT, la qual por un razonamiento semejante al del núme-

ro 403., demostrarémos que es tangente en el punto M de la curva BMC.

Por consiguiente tendrémos (n. 388.) $\varphi = \text{tang.} TMF = \frac{dv}{dt}$; y como v, es igual á $\frac{de}{dt}$; será (núm. 81.) tambien $\varphi = \frac{d^2e}{dt^2}$.

Luego, *si en un movimiento rectilíneo qualquiera se consideran el espacio* e, *y la velocidad* v *como funciones del tiempo correspondiente* t: *el coeficiente diferencial* $\frac{de}{dt}$ *expresará la velocidad; y* $\frac{dv}{dt}$, *ó el coeficiente diferencial de segundo órden* $\frac{d^2e}{dt^2}$, *la fuerza aceleratriz.*

De donde se sigue, que conociendo el espacio en funcion del tiempo; se conocerán inmediatamente la velocidad y la fuerza aceleratriz correspondientes á un tiempo qualquiera.

Por exemplo; como en el movimiento uniformemente acelerado; los espacios son proporcionales á los quadrados de los tiempos; será $e = at^2$, representando a una cantidad constante. Será pues $v = \frac{de}{dt} = 2at$, y $\varphi = \frac{d^2e}{dt^2} = 2a = \frac{v}{t} = \frac{2e}{t^2}$: por donde se ve, que en el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad es proporcional al tiempo ó igual al producto de la fuerza aceleratriz, por el tiempo; y la fuerza aceleratriz, igual á la razon de la velocidad al tiempo, ó al duplo de la razon del espacio al quadrado del tiempo; lo mismo que hallamos en el núm. 388.

406. En lo dicho en los números antecedentes hemos supuesto que el movimiento era acelerado: pero se echa de ver, que si el movimiento fuese retardado; las expresiones de la velocidad y de la fuerza retardatriz, serian las mismas que hemos hallado, con solo la diferencia; de que como en este caso la fuerza φ obra en una direccion opuesta á la del movimiento actual del cuerpo, será negativa, y por lo mismo $\varphi = -\frac{dv}{dt} = -\frac{d^2e}{dt^2}$.

407. Las expresiones generales de la velocidad y de la fuerza aceleratriz en un movimiento rectilíneo qualquiera; se pueden tambien hallar con suma generalidad, elegancia y sencillez por medio del teorema de *Taylor*.

En efecto; si llamamos e, el espacio PM (*fig. 111.*); v, la velocidad; y φ, la fuerza aceleratriz correspondientes al tiempo $AP = t$; y representamos por θ el tiempo $MF = PP'$ que comienza quando t fenece: el espacio FM' correspondiente al tiempo θ, será (núm. 133.) $= \frac{de}{dt}\theta + \frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}\theta^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3e}{dt^3}\theta^3 + \&c.$; y considerando los términos sucesivos de esta expresion, como otros tantos espacios parciales de que se compone el espacio total FM', echarémos de ver; que como solamente el primero $\frac{de}{dt}\theta$, corresponde á un movimiento uniforme, cuya velocidad es $\frac{de}{dt}$; todos los demas pertenecerán necesariamente á la accion de la fuerza aceleratriz durante el tiempo θ. Por consiguiente; si suponemos que en el punto M al cabo del tiempo t, cese la accion de dicha fuerza; los términos $\frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}\theta^2$, $\frac{1}{6}\frac{d^3e}{dt^3}\theta^3$, &c. que dependen de ella, serán cero, y el espacio andado por el móvil en el tiempo θ, se reducirá á $\frac{de}{dt}\theta$. Pero segun acabamos de observar, este espacio se refiere á un movimiento uniforme cuya velocidad es $\frac{de}{dt}$; luego la velocidad al cabo de un tiempo qualquiera t será $\frac{de}{dt}$, y tendrémos en general $v = \frac{de}{dt}$.

Como de todos los espacios parciales $\frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}\theta^2$, $\frac{1}{6}\frac{d^3e}{dt^3}\theta^3$, &c. que produce la fuerza aceleratriz en el tiempo θ, solamente el primero es proporcional al quadrado de dicho tiempo, y por lo mismo pertenece á un movimiento uniformemente acelerado (núm. 387.); los demas $\frac{1}{6}\frac{d^3e}{dt^3}\theta^3$, &c., dependerán precisamente de las causas que hacen variar la accion de la fuerza aceleratriz φ durante el tiempo θ. Por consiguiente; si suponemos que en el instante en que fenece el tiempo t, y comienza el tiempo θ, cesen estas causas; los términos $\frac{1}{6}\frac{d^3e}{dt^3}\theta^3$, &c. que producen serán nulos, y por lo mismo el espacio andado se reducirá en este supuesto á $\frac{1}{2}\frac{d^2e}{dt^2}\theta^2$; de donde inferirémos (núm. 388.) $\varphi = \frac{d^2e}{dt^2}$.

De la equacion $v = \frac{de}{dt}$, se infiere $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2e}{dt^2}$; y por consiguiente será tambien $\varphi = \frac{du}{dt}$.

408. En el supuesto de que la accion de la fuerza aceleratriz cese al cabo del tiempo $AP = t$; los espacios andados con la velocidad uniforme $\frac{de}{dt}$, se terminarán (núm. 380.) en una recta MT, la qual forma con la recta MF que representa el tiempo θ, un ángulo TMF cuya tangente es igual á la velocidad. Será pues tang. TMF

$=\frac{de}{dt}$; y por consiguiente (núm. 130.) inferirémos que la recta MT es tangente en el punto M de la curva BMC.

409. He aquí las equaciones fundamentales del movimiento rectilíneo de los cuerpos. Por lo que toca al movimiento curvilíneo; se reduce por los principios de la composicion y resolucion del movimiento á dos ó tres movimientos rectilíneos, segun se mueve el cuerpo en un solo plano ó en planos diferentes.

En efecto; si suponemos que el móvil describe en su movimiento la curva AMC (*fig. 112.*); y que al cabo del tiempo t, se halle en el punto M; llamando x el espacio AP andado en la direccion del exe AD de las abscisas; é y, el espacio PM en la direccion del exe AH de las ordenadas; estos espacios serán igualmente que el espacio curvilíneo AM, funciones del tiempo t.

Por consiguiente; siempre que se conozcan los valores de dichos espacios en t, eliminando esta variable, resultará una equacion entre x é y, la qual expresará la naturaleza de la curva AMC que el móvil describe.

410. Si el movimiento no se hiciese en un solo plano, la curva descrita por el cuerpo seria de doble curvatura (*fig. 113.*); y la refeririamos á los tres exes AB, AC, AD perpendiculares entre sí, por medio de las coordenadas rectangulares $AP=x$, $PM=y$, $MZ=z$.

Supongamos que el cuerpo se halle en el punto Z al cabo del tiempo t; las coordenadas x, y, y z, respresentarán respectivamente los espacios andados en las direcciones AB, AC, AD, y por lo mismo serán funciones del tiempo t. Por lo que, si suponemos que se conozcan estas funciones; eliminando el tiempo t, resultará una relacion entre x, y, y z, la qual expresará la curva de doble curvatura que el cuerpo describe en su movimiento.

De todo esto se infiere, que las equaciones $v=\frac{de}{dt}$, $\varphi=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2e}{dt^2}$, relativas al movimiento rectilíneo, se aplican igualmente á un movimiento curvilíneo qualquiera; y en general se puede decir que son el fundamento de toda la teoría del movimiento, segun verémos mas adelante.

411. Para dar un exemplo de lo que acabamos de exponer acerca del movimiento curvilíneo; nos propondrémos determinar la naturaleza de la curva que describen los *proyectiles*; esto es de la curva $AMBC$ (*fig. 114.*) que describe un cuerpo arrojado en la direccion AT obliqua al horizonte, prescindiendo de la resistencia del ayre.

Llamemos α el ángulo TAD que la recta AT forma con la horizontal AD; y h, la altura de la qual deberia caer un cuerpo pa-

ra adquirir la velocidad que se le comunica en la direccion AT: esta velocidad será $=\sqrt{2h}$ (núm. 392.) suponiendo $=1$ la fuerza de la gravedad; y resolviéndola en dos, segun las direcciones AD, y AH perpendicular á AD, será (núm. 399.) la primera $=\sqrt{2h}\times\cos.\alpha$, y la segunda $=\sqrt{2h}\times\cos TAH=\sqrt{2h}\times\text{sen.}\,\alpha$. Sentado esto; como la direccion de la gravedad es perpendicular al horizonte; la velocidad horizontal $\sqrt{2h}\times\cos.\alpha$ se conservará sin alteracion alguna; de manera, que llamando x el espacio AP que esta velocidad produce en el tiempo t, será $x=t\sqrt{2h}\times\cos.\alpha$.

Por lo que toca á la velocidad vertical $\sqrt{2h}\times\text{sen.}\,\alpha$, producirá en el mismo tiempo un espacio $=t\sqrt{2h}\times\text{sen.}\,\alpha=Pm$, que el móvil andaria efectivamente en la direccion AH si no obrase en él la fuerza de la gravedad. Pero como esta fuerza obra continuamente en una direccion directamente opuesta á AH; y produce en el tiempo t un espacio $=\frac{1}{2}t^2$; el espacio vertical andado efectivamente por la combinacion de dicha velocidad con la fuerza de la gravedad, será $=t\sqrt{2h}\times\text{sen.}\,\alpha-\frac{1}{2}t^2$. Suponiendo pues que este espacio sea PM, y llamándole y; será $y=t\sqrt{2h}\times\textit{sen.}\,\alpha-\frac{1}{2}t^2$; y substituyendo por t su valor $\frac{x}{\sqrt{2h}\times\cos.\alpha}$, resultará la equacion $y=x\,\text{tang.}\,\alpha-\frac{x^2}{4h\cos.^2\alpha}$, la qual pertenece á una parábola $AMBC$ cuyo vértice está en el punto B determinado por las coordenadas $AE=2h$ sen. α cos. α, $EB=h$ sen.$^2\,\alpha$; y el parámetro de su exe principal BE, es $4h\cos.^2\alpha$: de cuya equacion será fácil deducir las propiedades de la trayectoria ABC que el móvil describe.

Supongamos que el móvil describa en su movimiento una curva qualquiera AMC (*fig. 112.*), y que al cabo del tiempo t se halle el punto M determinado por las coordenadas perpendiculares $AP=x$, $PM=y$: estas coordenadas serán los espacios respectivos que el móvil anda relativamente á los exes AD, AH de dichas coordenadas: por consiguiente, suponiéndoles funciones del tiempo t; la velocidad del cuerpo en la direccion AD será (núm. 403.) $\frac{dx}{dt}$, y en la direccion AH, $\frac{dy}{dt}$, de las quales resulta (núm 397.) una velocidad única $=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ que llamarémos v, cuya direccion forma con el exe AD un ángulo cuyo coseno es $\frac{\frac{dx}{dt}}{v}$: y con el exe AH otro ángulo que tiene por coseno $\frac{\frac{dy}{dt}}{v}$: por lo que, si suponemos que la direccion de la velocidad compuesta v

sea MT, y llamamos α el ángulo TMB que forma con la MB paralela á AD, y β su complemento tendrémos las equaciones $v \cos.\alpha = \frac{dx}{dt}$, $v \cos.\beta = v \operatorname{sen}.\alpha = \frac{dy}{dt}$.

Dividiendo la equacion $v \operatorname{sen}.\alpha = \frac{dy}{dt}$ por $v \cos.\alpha = \frac{dx}{dt}$, tendrémos $\operatorname{tang}.\alpha = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$. Ademas, si llamamos e el arco ó espacio AM, será (núm. 134., 6°) $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{de}{dt} = v$. De donde inferirémos

1° *Que si se representa por* e *el espacio curvilíneo qualquiera* AM *que el móvil describe en el tiempo* t, *y por* v *la velocidad correspondiente; será* $v = \frac{de}{dt}$, *del mismo modo que si el movimiento fuese rectilíneo.*

2° *Que la direccion* MT *de dicha velocidad es tangente á la curva en el punto* M (núm. 130.)

3° Por consiguiente, *si las fuerzas que obran en el cuerpo cesasen sus acciones en el punto* M *al cabo del tiempo* t; *dicho cuerpo continuaria su movimiento en la tangente* MT *con la velocidad constante* $\frac{de}{dt}$ *que tenia en el punto* M.

413. La fuerza aceleratriz del cuerpo en la direccion AD será en el punto M, $\frac{d^2x}{dt^2}$ (núm. 405.), y en la direccion AH, $\frac{d^2y}{dt^2}$: por lo que si llamamos R la fuerza resultante de estas dos; y λ, μ los ángulos que su direccion forma con los exes AD, AH, tendrémos (núm. 401.) $R = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = R \cos.\lambda$, $\frac{d^2y}{dt^2} = R \cos.\mu = R \operatorname{sen}.\lambda$.

Así; si se conociesen las leyes del movimiento del cuerpo; esto es, los valores de x, é y en t; diferenciando dos veces estos valores se conocerian fácilmente por medio de las dos equaciones antecedentes la fuerza aceleratriz R, y el ángulo λ que determina su direccion; pero si, al contrario, se conociese la fuerza aceleratriz R, y el ángulo λ que fixa su direccion como sucede en casi todos los problemas de la mecánica; seria necesario para hallar los valores de x é y, en t, integrar las dos equaciones diferenciales de segundo órden $\frac{d^2x}{dt^2} = R \cos.\lambda$, $\frac{d^2y}{dt^2} = R \operatorname{sen}.\lambda$. De aquí es, que las aplicaciones del cálculo diferencial á la Mecánica son en muy corto número: y al contrario, se hace un uso continuo del cálculo integral en dicha ciencia.

414. Llamemos σ el ángulo que la direccion de la fuerza R hace con la tangente MT; será $\sigma = \pm \lambda \mp \alpha$, y la accion de la fuerza R en la direccion MT, $= R \cos.\sigma = R(\cos.\lambda \cos.\alpha + \operatorname{sen}.\lambda \operatorname{sen}.\alpha)$; por lo que multiplicando la equacion $\frac{d^2x}{dt^2} = R \cos.\lambda$ por $\cos.\alpha$, y la equacion $\frac{d^2y}{dt^2} = R \operatorname{sen}.\lambda$ por $\operatorname{sen}.\alpha$, y sumándolas, tendrémos $\frac{d^2x}{dt^2}\cos.\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sen}.\alpha = R \cos.\sigma$. Pero si se diferencia la equacion $\frac{de}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ relativamente á t, y se substituye luego por $\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$ su igual $\cos.\alpha$, y $\operatorname{sen}.\alpha$ en lugar de $\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$ resultará $\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\cos.\alpha + \frac{d^2y}{dt^2}\operatorname{sen}.\alpha$; luego será $\frac{d^2e}{dt^2} = R \cos.\sigma$: luego *la fuerza aceleratriz* R cos. σ *en la direccion* MT *del movimiento actual del cuerpo es igual á* $\frac{d^2e}{dt^2}$, *del mismo modo que si el movimiento fuese rectilíneo.*

Si representamos por p, q, las fuerzas aceleratrices en las direcciones AD, AH; será $\frac{d^2x}{dt^2} = p$, $\frac{d^2y}{dt^2} = q$. Sentado esto: diferenciando la equacion $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ hallarémos $v\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$, de donde se infiere $\frac{dv}{dt} = \ldots\ldots\ \frac{p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}}{\frac{de}{dt}} = p\frac{dx}{de} + q\frac{dy}{de}$.

Si se supone que el cuerpo está solicitado por una sola fuerza p en la direccion del exe AD; será $q = 0$, y por consiguiente $v\frac{dv}{dt} = p\frac{dx}{dt}$.

415. Si el móvil se hallase solicitado en el punto M correspondiente al tiempo t por dos fuerzas P, Q, de las quales la primera forma con los exes AD, AH los ángulos λ, μ; y la segunda los ángulos λ', μ'; la fuerza total en la direccion AD seria P cos. $\lambda + Q$ cos. λ'; y en la direccion AH, P cos. $\mu + Q$ cos. $\mu' = P$ sen. $\lambda + Q$ sen. λ: pero los espacios andados en las mismas direcciones son respectivamente x é y; luego (núm. 405.) será $\frac{d^2x}{dt^2} = P \cos. \lambda + Q \cos. \lambda'$, $\frac{d^2y}{dt^2} = P \cos. \mu + Q \cos. \mu' = P \text{ sen. } \lambda + Q \text{ sen. } \lambda'$: y lo mismo dirémos respecto de un número qualquiera de fuerzas.

416. Quando el cuerpo describe en su movimiento una curva de doble curvatura, se refiere á los tres exes AB, AC, AD (*fig. 113.*) por medio de las tres coordenadas perpendiculares $AP = x$, $PM = y$, $MZ = z$, las quales son los espacios andados en las mismas direcciones correspondientes al tiempo t. Por consiguiente, las velocidades en las direcciones AB, AC, AD serán respectivamente $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; de las quales resulta una velocidad compuesta $=$ ....
$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$ que llamarémos v, cuya direccion forma con dichos exes tres ángulos cuyos cosenos son respectivamente (núm. 398.) $\frac{\frac{dx}{dt}}{v}$, $\frac{\frac{dy}{dt}}{v}$, $\frac{\frac{dz}{dt}}{v}$: de manera, que llamando α, β, γ estos ángulos, tendrémos las tres equaciones $\frac{dx}{dt} = v \cos. \alpha$, $\frac{dy}{dt} = v \cos. \beta$, $\frac{dz}{dt} = v \cos. \gamma$.

Si representamos por e la curva ó espacio curvilíneo que el cuerpo describe en el tiempo t, y le consideramos como funcion de t; será $\frac{de}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = v$; por consiguiente *la velocidad del móvil correspondiente al tiempo* t, *será como en el movimiento rectilíneo* $= \frac{de}{dt}$.

Tomemos las rectas Zp, pm, mn paralelas á los exes AB, AC, AD para representar las velocidades $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ en las direcciones de estos exes: la velocidad v será representada en cantidad y direccion (núm. 397.) por la recta Zn, cuya proyeccion sobre el plano BAC será Zm, y tendrémos tang. $mZp = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$. Del mismo modo; la proyeccion de la línea Zn sobre el plano BAD, forma con el exe AB un ángulo cuya tangente es $\frac{dz}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dx}$. Luego estos ángulos (núm. 375.) serán los mismos que forman con el exe AB las proyecciones de la tangente en el punto Z sobre los planos BAC, BAD, y por consiguiente la direccion Zn de la velocidad será la tangente de la curva en el punto Z. De donde concluirémos (del mismo modo que en el movimiento en un solo plano) *que si las fuerzas que obran continuamente en el móvil, cesasen de repente sus acciones en el punto* Z *al cabo del tiempo* t: *el móvil continuaria moviéndose uniformemente en la direccion* Zn *de la tangente en el punto* Z, *con la velocidad* $\frac{de}{dt}$ *que tenia en dicho punto.*

Las fuerzas aceleratrices del cuerpo en las direcciones AB, AC, AD, serán respectivamente $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, de las quales resulta una fuerza única $R = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$, cuya direccion hace respectivamente con dichos exes los ángulos λ, μ, ω, de manera que será $\frac{d^2x}{dt^2} = R \cos. \lambda$, $\frac{d^2y}{dt^2} = R \cos. \mu$, $\frac{d^2z}{dt^2} = R \cos. \omega$.

417. Quando el cuerpo se halla solicitado por un número qualquiera de fuerzas P, Q, &c.; la primera de las quales forma con los exes AB, AC, AD los ángulos λ, μ, ω; la segunda, los ángulos λ', μ', ω'; &c.: la suma de las fuerzas en la direccion AB, será P cos. $\lambda + Q$ cos. $\lambda' +$ &c.; en la direccion AC, P cos. $\mu + Q$ cos. $\mu' +$ &c.; y en la direccion AD, P cos. $\omega + Q$ cos. $\omega' +$ &c.: de donde resultarán las tres equaciones $\frac{d^2x}{dt^2} = P \cos. \lambda + Q \cos. \lambda' + \&c.$; $\frac{d^2y}{dt^2} = P \cos. \mu + Q \cos. \mu' + \&c.$; $\frac{d^2z}{dt^2} = P \cos. \omega + Q \cos. \omega' + \&c.$

Si llamamos respectivamente p, q, r estas fuerzas; diferenciando la equacion $v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, tendrémos $v\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt} + r\frac{dz}{dt}$.

418. En lo demostrado en los números antecedentes, hemos hecho abstraccion de las masas de los cuerpos que las fuerzas solicitan: y como las fuerzas se miden por el efecto que producen en un tiempo determinado, cuyo efecto está en razon directa de la fuerza (número 393.) é inversa de la masa; quando se quiere llevar en cuenta la masa del cuerpo solicitado por una fuerza, es necesario dividir el valor absoluto de dicha fuerza por la masa.

Así; suponiendo que sea M la masa del cuerpo en movimiento, las equaciones del núm. 416. serán $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{R}{M} \cos. \lambda$, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{R}{M}$

$\cos.\ \mu$, $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{R}{M}\cos.\ \omega$; ó $M\frac{d^2x}{dt^2}=R\cos.\ \lambda$, $M\frac{d^2y}{dt^2}=R\cos.\ \mu$, $M\frac{d^2z}{dt^2}=R\cos.\ \omega$; y las del número antecedente

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=P\cos.\ \lambda+Q\cos.\ \lambda'+\&c.$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2}=P\cos.\ \mu+Q\cos.\ \mu'+\&c.$$

$$M\frac{d^2z}{dt^2}=P\cos.\ \omega+Q\cos.\ \omega'+\&c.$$

$$Mv\frac{dv}{dt}=p\frac{dx}{dt}+q\frac{dy}{dt}+r\frac{dz}{dt}.$$

419. Supongamos que el movimiento se haga en un solo plano; y que la fuerza aceleratriz R, se dirija constantemente hácia un punto fixo A orígen de las coordenadas (*fig. 115.*) en cuyo caso la fuerza R se llama *central*. Representando siempre λ el ángulo MAD que la direccion de dicha fuerza forma con el exe AD; y resolviéndola en dos segun las direcciones AD, AH, la primera será $=-R\cos.\ \lambda$, y la segunda $=-R\ \text{sen.}\ \lambda$; damos á estas fuerzas el signo negativo, porque obran realmente en las direcciones DA, HA; tendrémos pues las dos equaciones $\frac{d^2x}{dt^2}=-R\cos.\ \lambda$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-R\ \text{sen.}\ \lambda$.

Sentado esto, si llamamos r la distancia ó radio vector AM, el triángulo rectángulo APM dará $x=r\cos.\ \lambda$, é $y=r\ \text{sen.}\ \lambda$, de donde se infiere

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos.\ \lambda-r\frac{d\lambda}{dt}\text{sen.}\ \lambda,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\cos.\ \lambda-2\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\text{sen.}\ \lambda-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\cos.\ \lambda-r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\text{sen.}\ \lambda,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\text{sen.}\ \lambda+r\frac{d\lambda}{dt}\cos.\ \lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2r}{dt^2}\text{sen.}\ \lambda+2\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\cos.\ \lambda-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\text{sen.}\ \lambda+r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\cos.\ \lambda,$$

y substituyendo estos valores en las equaciones $\frac{d^2x}{dt^2}+R\cos.\ \lambda=0$, $\frac{d^2y}{dt^2}+R\ \text{sen.}\ \lambda=0$, se transformarán en $\frac{d^2r}{dt^2}\cos.\ \lambda-2\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\text{sen.}\ \lambda-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\cos.\ \lambda-r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\text{sen.}\ \lambda+R\cos.\ \lambda=0$, $\frac{d^2r}{dt^2}\text{sen.}\ \lambda+2\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt}\cos.\ \lambda-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2\text{sen.}\ \lambda+r\frac{d^2\lambda}{dt^2}\cos.\ \lambda+R\ \text{sen.}\ \lambda=0$.

Multiplicando la primera por $\cos.\ \lambda$, la segunda por $\text{sen.}\ \lambda$, y sumándolas; y restando luego la primera multiplicada por $\text{sen.}\ \lambda$, de la segunda multiplicada por $\cos.\ \lambda$, resultarán finalmente las dos equaciones

$$(a)\ \ldots\ldots\ \frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2+R=0,\quad (b)\ \ldots\ldots\ r\frac{d^2\lambda}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt}=0,$$

las quales contienen solamente las tres cantidades indeterminadas r, λ, R; y por lo mismo son mas sencillas que las primeras $\frac{d^2x}{dt^2}=-R\cos.\ \lambda$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-R\ \text{sen.}\ \lambda$.

420. En las aplicaciones del cálculo integral á la Mecánica, manifestarémos como se determinan en el caso actual las circunstancias del movimiento del cuerpo suponiendo conocida la fuerza central R. El cálculo diferencial segun insinuamos (núm. 413.) antes, solo puede aplicarse al caso contrario; esto es, á determinar la fuerza R suponiendo conocidas las leyes del movimiento del cuerpo.

Supongamos por exemplo que el móvil M (*fig. 116.*) describa en su movimiento el círculo DMB.

La direccion de la fuerza central R, será en este caso constantemente perpendicular á la del movimiento, y por consiguiente la velocidad del cuerpo será siempre la misma. De donde se sigue, que si la llamamos a; y t el tiempo empleado en andar un espacio ó arco qualquiera DM, será este $=at$. Pero llamando r el radio AD, será tambien $DM=r\lambda$; tendrémos pues $\lambda=\frac{a}{r}t$, y $\frac{d\lambda}{dt}=\frac{a}{r}$. Substituyendo este valor en la equacion (a); y observando que en este caso $\frac{d^2r}{dt^2}$ es cero; se transformará en $R=\frac{a^2}{r}$.

Por donde se ve, que *en el movimiento circular, la fuerza central es igual al quadrado de la velocidad comunicada dividido por el radio.*

421. Propongámonos por segundo exemplo, el determinar por medio de las dos primeras leyes de *Kepler*, la naturaleza de la fuerza que solicita continuamente los planetas hácia el sol, y en virtud de la qual describen sus órbitas respectivas.

Aquel célebre Astrónomo era de opinion que los planetas describian sus órbitas respectivas en virtud de una fuerza que se dirigia constantemente hácia el sol; y observó: Que suponiendo que sea A el centro del sol (*fig. 115.*); M un planeta; y DMB la curva que describe en su movimiento; la superficie del sector MAD es proporcional al tiempo empleado en describirle (1): y en esto consiste *la primera ley de Kepler*.

Esta propiedad de la fuerza central que descubrió *Kepler* por la observacion; fue luego demostrada por *Newton* con suma facilidad (2),

(1) *De Stella Martis, pág. 165 y sig.*
(2) *Philosophiae naturalis, principia mathematica.* Lib. I. Secc. II. Prop. I.

por medio de la primera ley del movimiento (núm. 379.), y de la proposicion núm. 400.

La segunda ley de *Kepler*, consiste en que la curva DMB que un planeta qualquiera describe, es una elipse, en cuyo foco A está el centro del sol.

De donde se sigue, que si llamamos $2a$ el exe mayor BD; $2b$, el exe menor; e, la excentricidad; s, el sector MAD; t, el tiempo correspondiente; r, el radio vector AM; y λ, el ángulo MAD, será $\frac{b^2}{r} = a - e \cos. \lambda$; y en virtud de la primera ley de *Kepler*, $s = nt$, y $\frac{ds}{dt} = n$, representando n una cantidad constante. El coeficiente diferencial $\frac{ds}{d\lambda}$ es $= \frac{r^2}{2}$ (núm. 298.); pero como s y λ se deben considerar como funciones del tiempo t, multiplicarémos la equacion antecedente por $\frac{d\lambda}{dt}$, y tendrémos $\frac{ds}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{r^2}{2} \frac{d\lambda}{dt} = n$, de donde se infiere $\frac{d\lambda}{dt} = \frac{2n}{r^2}$.

Diferenciando la equacion de la elipse relativamente á t, tendrémos $\frac{b^2}{r^2} \frac{dr}{dt} = - e \frac{d\lambda}{dt}$ sen. λ, y substituyendo por $\frac{d\lambda}{dt}$ su valor, $\frac{dr}{dt} = - \frac{2en}{b^2}$ sen. λ. Volviendo á diferenciar, hallarémos $\frac{d^2r}{dt^2} = - \frac{2en}{b^2} \frac{d\lambda}{dt} \cos. \lambda$, y substituyendo por $\frac{d\lambda}{dt}$, y $\cos. \lambda$ sus valores respectivos, $\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{4n^2}{r^3} - \frac{4an^2}{b^2r^2}$. Finalmente, substituyendo estos valores en la equacion (a), se transformará en $R - \frac{4an^2}{b^2r^2} = 0$, ó haciendo $\frac{4an^2}{b^2} = c$, en $R = \frac{c}{r^2}$. De donde concluirémos, que la fuerza R que solicita continuamente un planeta hácia el sol, está en razon inversa del quadrado de la distancia AM del planeta al sol.

La fuerza R es en este caso una fuerza de atraccion; y como estas fuerzas (núm. 396.) son proporcionales á las masas de los cuerpos atraentes; inferirémos *que la fuerza de atraccion que obra continuamente en un cuerpo; está en razon directa de la masa del cuerpo atraente, é inversa del quadrado de la distancia de dichos cuerpos.*

Si atendiendo á la suma pequeñez de la excentricidad de las órbitas de los planetas, supusiésemos que son circulares; la proposicion antecedente, esto es; que la fuerza de atraccion disminuye en la misma proporcion que aumenta el quadrado de la distancia, se demostraria mas brevemente por medio de la tercera ley de *Kepler*; y es que *los quadrados de los tiempos de las revoluciones de los planetas, son como los cubos de sus distancias respectivas al sol.*

Pues si llamamos θ el tiempo de una revolucion entera del planeta M (*fig.* 116.) en la órbita circular DMB; y r el radio AD; di-

cha ley se podrá expresar por la equacion $\theta^2 = br^3$, representando b una constante indeterminada. Pero llamando π la razon del radio á la circunferencia, y haciendo $t = \theta$ en la equacion $\lambda = \frac{a}{r} t$ (número 420.), se transformará en $\pi = \frac{a}{r} \theta$; de donde inferirémos $a = \frac{\pi r}{\theta}$, $a^2 = \frac{\pi^2 r^2}{\theta^2} = \frac{\pi^2}{br}$; y substituyendo este valor de a^2 en la equacion $R = \frac{a^2}{r}$ del número citado, y haciendo $\frac{\pi^2}{b} = c$, hallarémos $R = \frac{c}{r^2}$, por donde se ve, que *la fuerza central* R *que el sol exerce sobre un planeta; es recíprocamente proporcional al quadrado de la distancia del planeta al sol.*

422. Los principios antecedentes proporcionan un medio muy sencillo para determinar las masas de los planetas que tienen algun satélite.

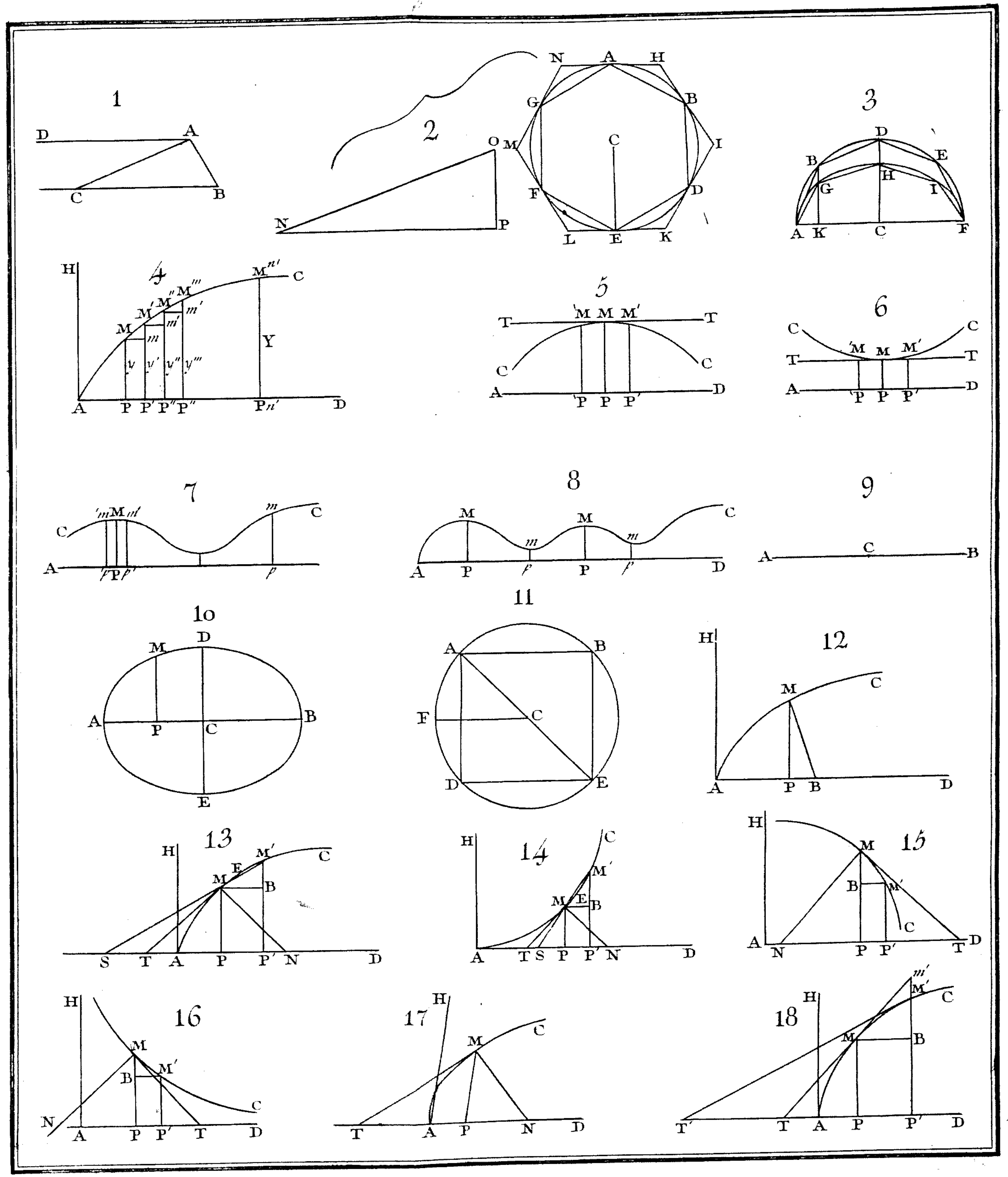
En efecto; substituyendo en la equacion $R = \frac{a^2}{r}$, $\frac{\pi^2 r^2}{\theta^2}$ en lugar de a^2, se transformará en $R = \frac{\pi^2 r}{\theta^2}$: pero llamando m la masa del cuerpo atraente, la fuerza R es igual á $\frac{cm}{r^2}$; será pues $\frac{cm}{r^2} = \frac{\pi^2 r}{\theta^2}$, y $m = g \frac{r^3}{\theta^2}$ haciendo $\frac{\pi^2}{c} = g$; por donde se ve, que la masa del cuerpo atraente es proporcional al cubo de la distancia r dividido por el quadrado de la revolucion periódica θ.

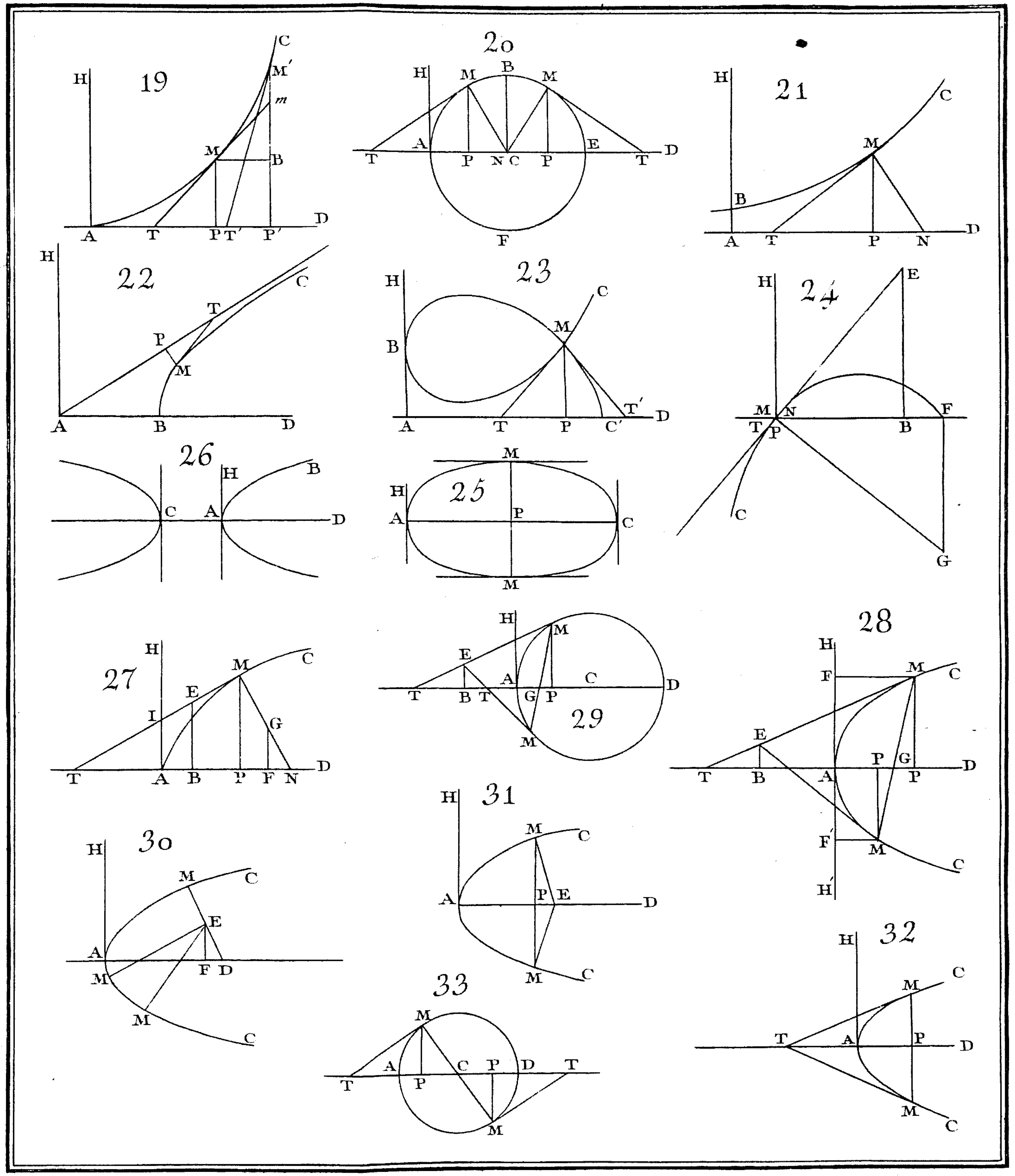
De donde se infiere que si llamamos m, la masa de un planeta; r, la distancia media de dicho planeta á uno de sus satélites; θ la revolucion periódica de este; m', la masa del sol; r', su distancia media á la tierra; y θ' la revolucion periódica de esta ó el año sideral; tendrémos $m : m' :: \frac{r^3}{\theta^2} : \frac{r'^3}{\theta'^2}$. Por consiguiente, tomando la masa m' del sol, la distancia correspondiente r', y el año sideral θ', por las unidades respectivas de las masas, de las distancias, y de las revoluciones periódicas; será $m = \frac{r^3}{\theta^2}$.

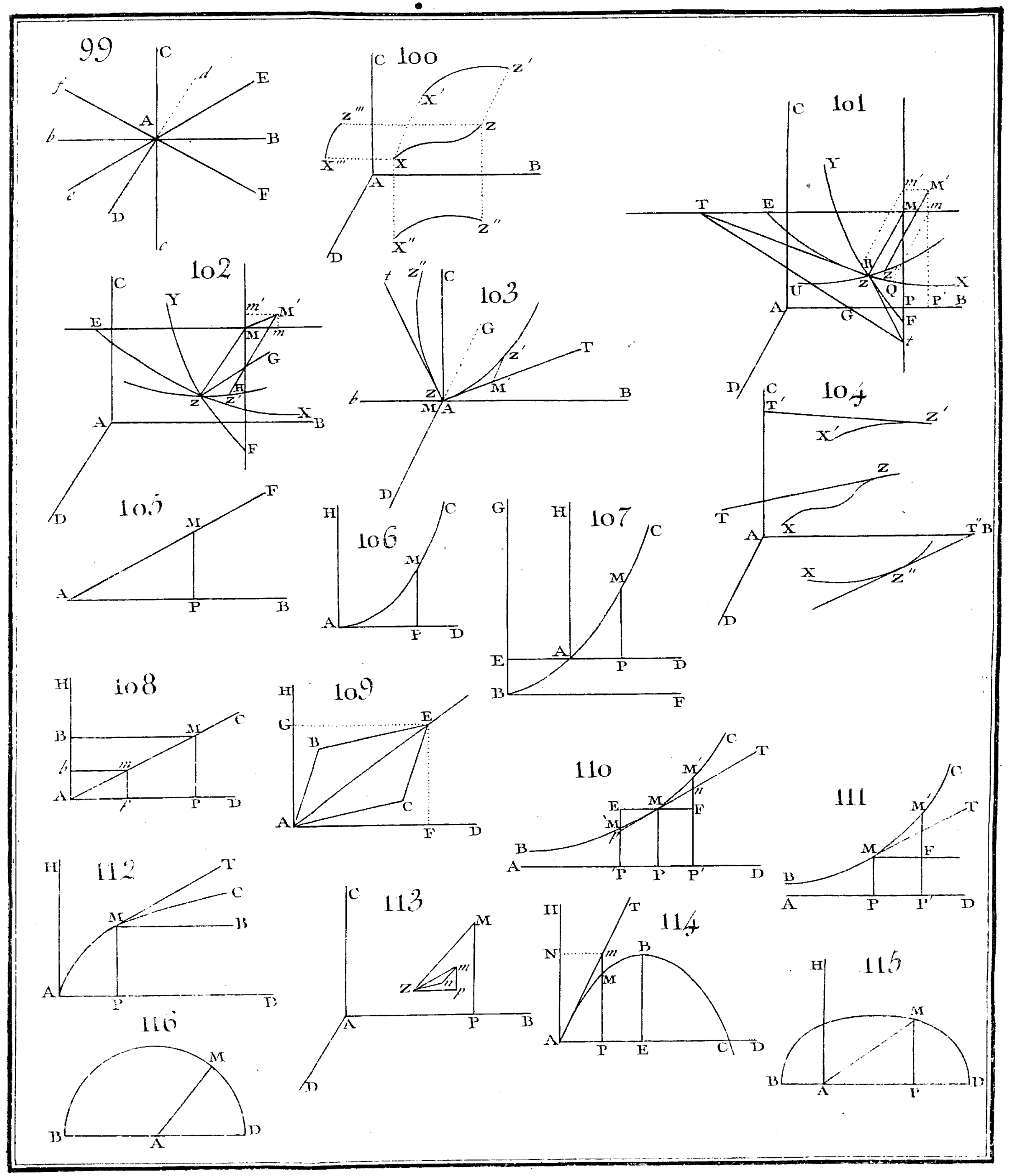
Si para determinar la masa de Júpiter por exemplo, suponemos que su distancia media r al quarto satélite es $= 0,012512$; la revolucion periódica de dicho satélite 16,689 dias; y el año sideral 365,256 dias; será $\theta = 0,045691$, y $m = \frac{r^3}{\theta^2} = \frac{1}{1066}$; cuyo resultado manifiesta que la masa de Júpiter es $= \frac{1}{1066}$ de la del sol.

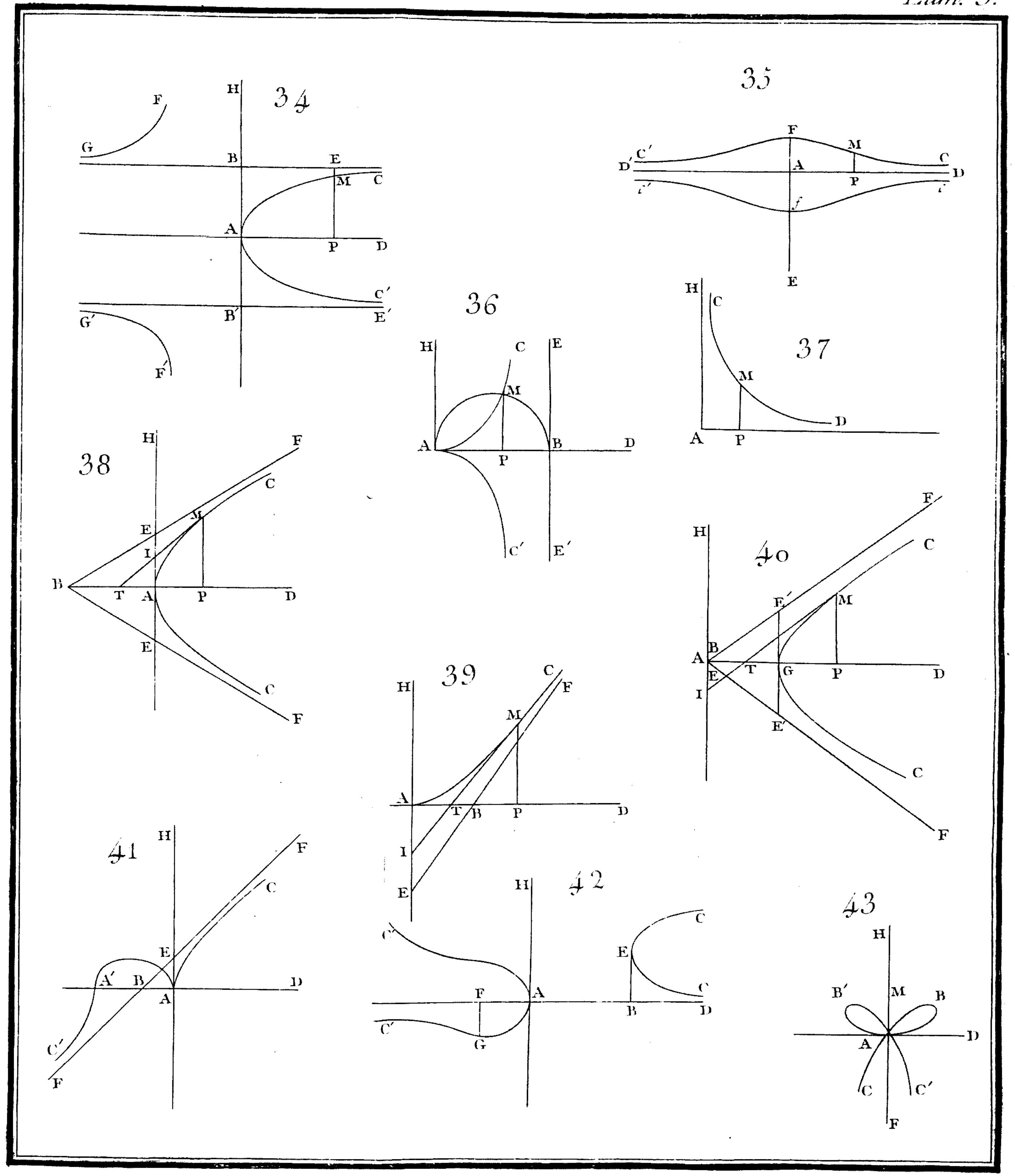
Con igual facilidad se determinará la masa de Saturno, y la de Herschel ó Urano.

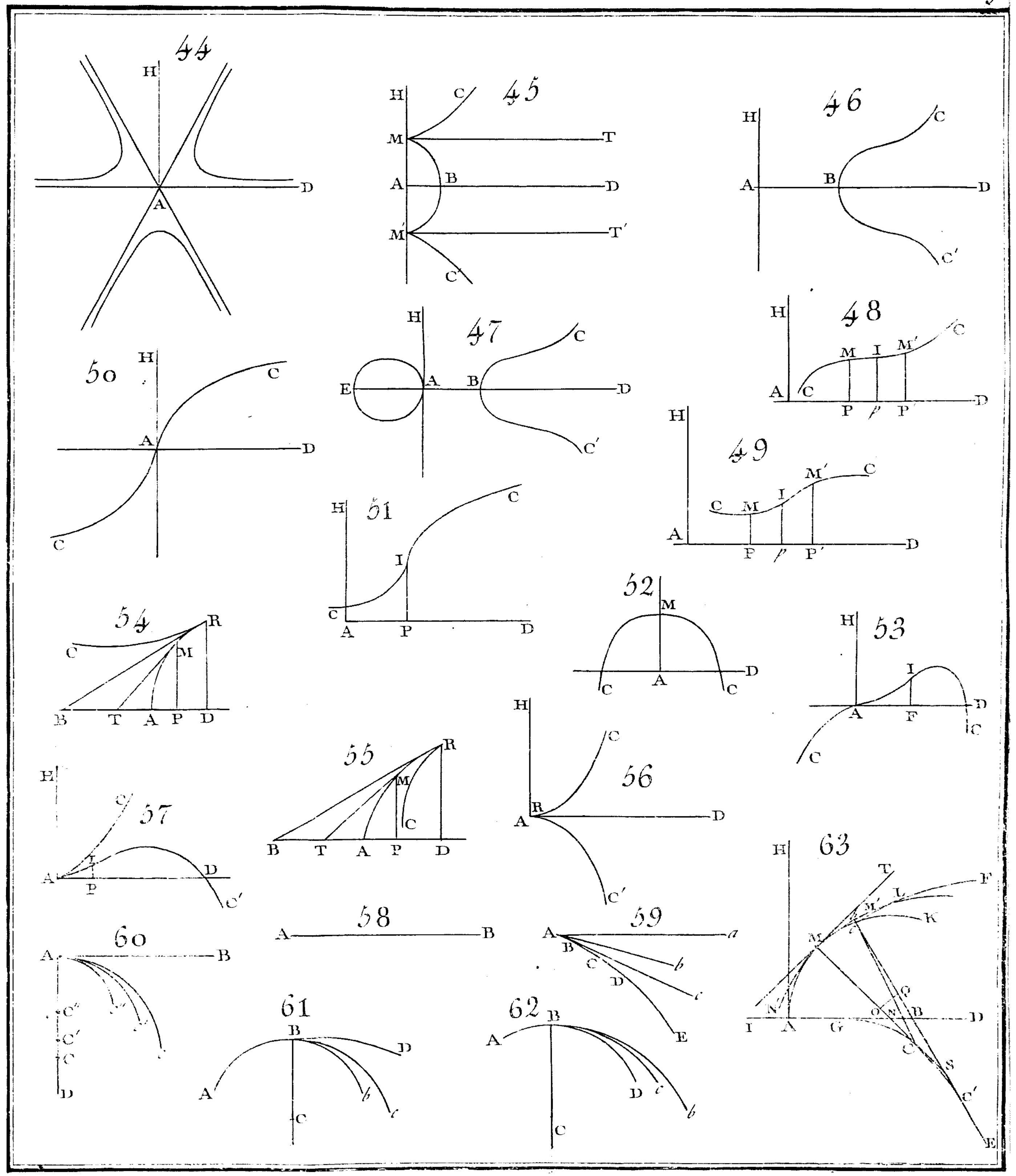
FIN DEL TOMO PRIMERO.

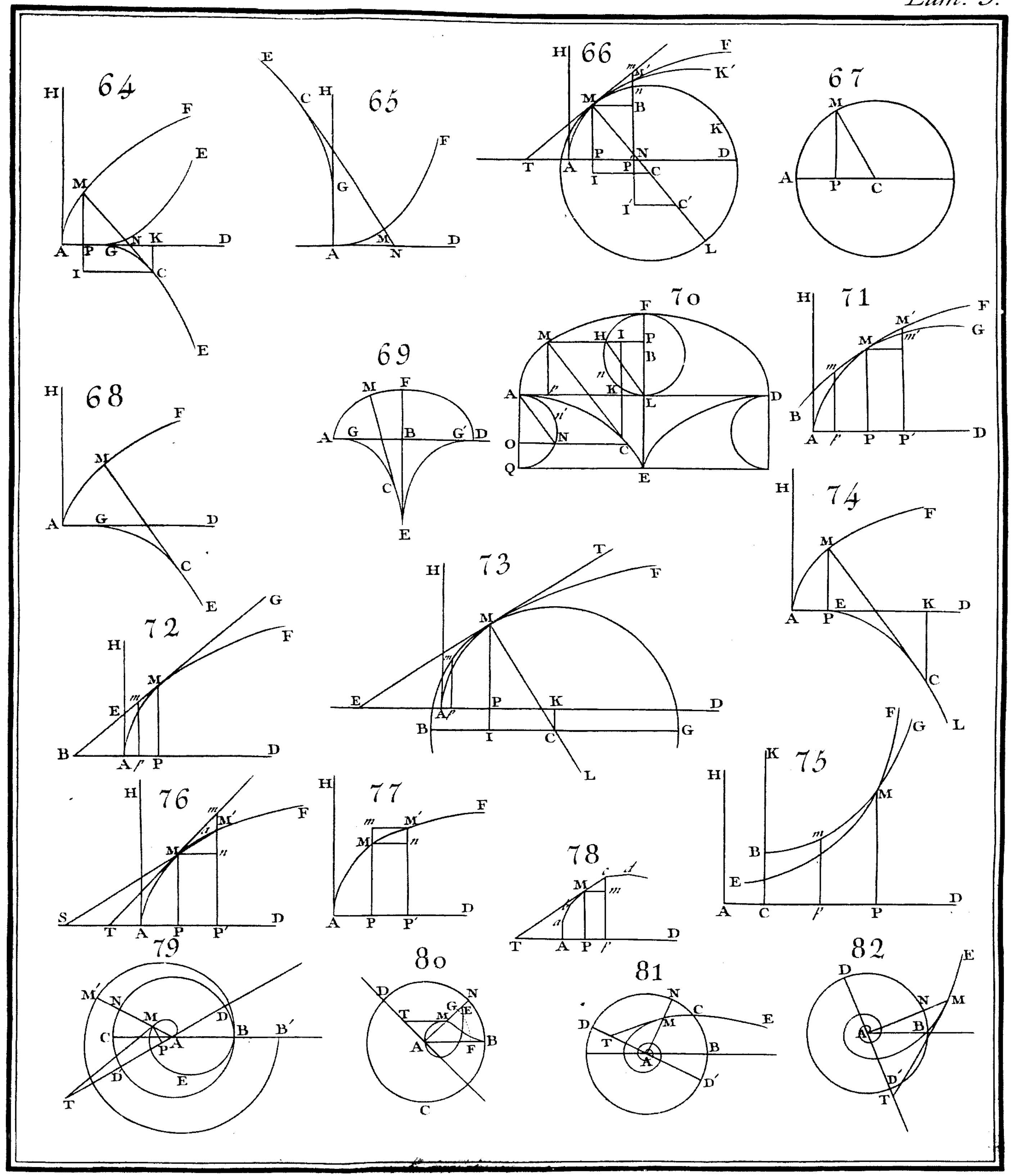


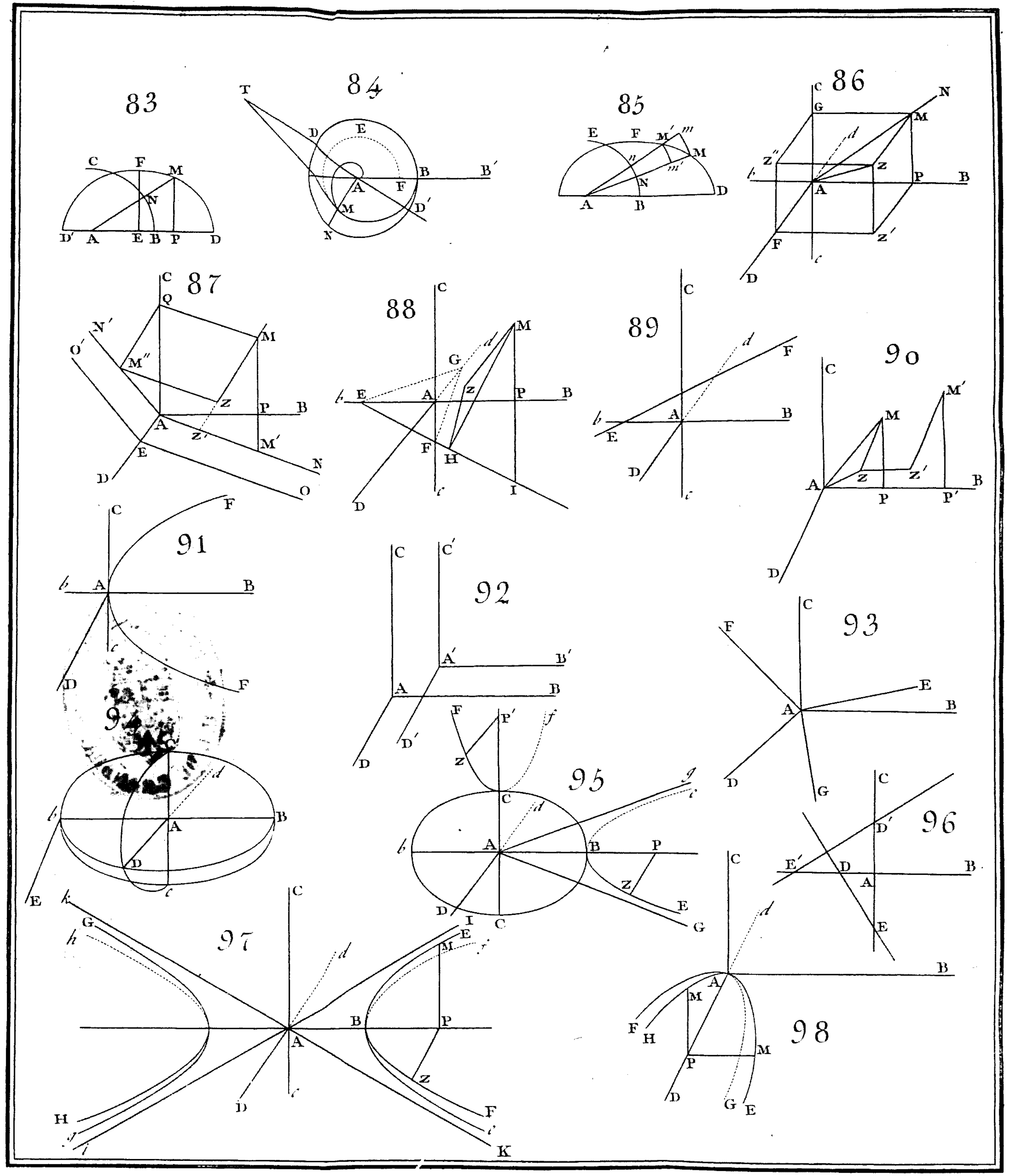

19
20
21
22
23
24
26
25
27
29
28
30
31
33
32


99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116


34
35
36
37
38
39
40
41
42
43


44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63


64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82


83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
95
96
97
98