UNIVERSIDAD DE GRANADA

INSTITUTO DE LA PAZ Y LOS CONFLICTOS

PROGRAMA DE DOCTORADO:

ANÁLISIS Y ESTUDIOS EN PAZ, SEGURIDAD Y DEFENSA

"PROPUESTA DE UN ÍNDICE DE DESIGUALDAD Y OBTENCIÓN DE PUNTOS SINGULARES EN DISTRIBUCIONES DE RENTA"

TESIS DOCTORAL

BENITO VINUESA GUERRERO

GRANADA, 2015

Editor: Universidad de Granada. Tesis doctorales.
Autor: Benito Vinuesa Guerrero.
ISBN: 978-84-9124-572-7
URI: http://hdl.handle.net/10481/42883

Dedicado a:

Manuel Vinuesa Jiménez del Barco,

Miguel Ángel Vinuesa Guerrero y

Miguel Guerrero Camacho

"in memoriam"

AGRADECIMIENTOS

Mi agradecimiento a todas las personas e instituciones que me han ayudado en esta tesis. En estas breves líneas quiero hacer una mención especial a quienes lo han hecho más directamente.

A mi esposa Palmira Alonso y a mis hijos Natalia y Miguel Ángel.

A los Dres. Dª. Rosa María García Fernández, D. José Antonio Esquivel Guerrero y D. Jorge Manuel Bolaños Carmona, codirectores de esta tesis.

A los Dres. D. José Callejón Céspedes y D. Federico Palacios González por sus consejos y sugerencias.

A los Dres. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo y D. Juan Francisco Muñoz Rosas, profesores del Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa de la Universidad de Granada.

Al Dr. D. Manfredo Monforte Moreno, General Jefe de Ingeniería del Mando de Apoyo Logístico del Ejército.

Al Dr. D. Francisco Jiménez Bautista, director del equipo editorial de la Revista Paz y Conflictos.

Al Mando de Adiestramiento y Doctrina, a la Universidad de Granada y al Instituto de la Paz y los Conflictos.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE GRÁFICOS

1 INTRODUCCIÓN

Cada vez son más frecuentes las publicaciones que hacen referencia a la medición de la desigualdad de la renta. El creciente interés en torno a este tema, se debe fundamentalmente a su utilidad para definir objetivos de determinadas políticas económicas así como contrastar el efecto de las correspondientes acciones de política económica y a la estrecha relación existente entre la desigualdad de la renta y el bienestar social.

Conocer y medir la desigualdad de la renta es un instrumento para la construcción de un desarrollo sostenible y una aportación a la interdisciplinariedad que nos lleva a la paz neutra, nuevo paradigma pacífico, que siguiendo a Jiménez (2009), es un concepto complejo, multifactorial y multidimensional.

1.1 Objetivos

El presente trabajo analiza la medición de la desigualdad de la renta en su vertiente cuantitativa proporcionando un procedimiento alternativo que facilite el estudio de la misma.

El principal objetivo es proponer un nuevo índice de desigualdad y la obtención de puntos singulares en distribuciones de renta.

1.2 Metodología

Esta memoria se ha estructurado en seis capítulos, los tres primeros están relacionados con los antecedentes y los aspectos metodológicos que se proponen en este trabajo para cuantificar la desigualdad. En el cuarto capítulo, de carácter empírico, se aplica la metodología propuesta a datos de renta. En el quinto se analizan las conclusiones obtenidas y se proponen futuras líneas de investigación y en el sexto se relacionan las referencias bibliográficas.

En el segundo capítulo con el propósito de analizar el estado de la cuestión, se realiza una revisión de la literatura relacionada con la medición de la desigualdad. Se han revisado los índices de desigualdad más relevantes distinguiendo entre medidas ordinales y objetivas. Dentro de las medidas ordinales se estudia detenidamente la curva de Lorenz, dado que la medida que se propone está relacionada con la misma. Con respecto a las medidas objetivas, se han revisado las más importantes junto a sus propiedades. Se le presta especial atención al índice de Gini debido a que al igual que la curva de Lorenz, está relacionado con la medida de desigualdad propuesta. Adicionalmente se incluyen las medidas de desigualdad normativas definidas en términos de bienestar y las medidas obtenidas a partir del concepto de entropía.

En el tercer capítulo se introducen las nuevas aportaciones con los conceptos más relevantes en torno a los cuales se define la medida propuesta. En primer lugar, se define la función de densidad de Lorenz y se estudian sus propiedades. Posteriormente se obtienen los puntos singulares de la función de densidad de Lorenz. Estos puntos singulares proporcionan umbrales de población que facilitan el análisis de la estructura de la desigualdad. Adicionalmente, se define y calcula el momento de primer orden de la densidad de Lorenz para distribuciones conocidas. Se demuestran las condiciones que debe cumplir un polinomio para definir una curva de Lorenz. Este resultado amplia los procedimientos disponibles en la literatura para generar curvas de Lorenz.

A continuación se introduce el concepto de función de densidad lineal de Lorenz y se propone un primer principio de equivalencia que permite, dada una densidad de Lorenz, obtener su equivalente lineal, que es aquella que tiene el mismo momento de primer orden. Un segundo principio de equivalencia establece que dada una curva de Lorenz, siempre existe una función de Lorenz cuadrática equivalente. Estos dos principios de equivalencia, como se observará en la parte empírica de esta memoria, simplifican de forma notable el proceso a llevar a cabo cuando se analiza la desigualdad. Seguidamente se proporcionan distintas expresiones que permiten obtener a partir de cualquier densidad de Lorenz sus funciones lineales y cuadráticas equivalentes.

Uno de los principales objetivos de esta memoria es definir una nueva medida de desigualdad coherente con las propiedades más importantes que deben verificar las medidas de desigualdad. En el capítulo tercero se define la mencionada medida utilizando los conceptos de función de densidad de Lorenz y los principios de equivalencia definidos anteriormente. Los puntos singulares de la densidad de Lorenz, como se demuestra en este capítulo, permiten relacionar la medida propuesta con el índice de Gini. Este capítulo finaliza proporcionando una relación adicional entre la nueva medida y el índice de Gini que se obtiene a partir del momento de primer orden de la densidad de Lorenz.

Finalmente, una vez desarrollado el esquema metodológico que permite obtener la medida propuesta, se procede a aplicar el mismo a datos de renta para los años 2009 y 2013, procedentes de la Encuesta de Condiciones de Vida para España, elaborada por el Instituto Nacional de Estadística. Tras describir el contexto económico y modelizar la distribución de la renta se aplica el esquema propuesto y se analiza la desigualdad.

2 ANTECEDENTES

2.1 Introducción

En este capítulo se realiza un estado de la cuestión acerca de la medición de la desigualdad de la renta. Para ello se ha procedido a la correspondiente revisión bibliográfica.

Dado que son muchos y variados los procedimientos que se han desarrollado para analizar la desigualdad, se han seleccionado los métodos de uso más frecuente y se han catalogado y expuesto como se describe seguidamente.

Las medidas de desigualdad se clasifican en ordinales y medidas objetivas. Dentro del primer grupo se desarrolla la curva de Lorenz ya que es uno de los instrumentos gráficos que se utiliza con mayor frecuencia para analizar la distribución de la renta. Adicionalmente se analiza la ordenación de distribuciones en términos de desigualdad atendiendo al criterio de dominancia de Lorenz. Se exponen los problemas que surgen cuando las curvas de Lorenz que se pretenden ordenar se cortan y se describen algunas de las soluciones que desde distintos puntos de vista se han desarrollado en la literatura especializada.

Con respecto a las medidas objetivas de desigualdad, una vez analizadas sus propiedades, se describen las más utilizadas en la literatura económica. Se le presta especial atención al índice de Gini ya que está relacionado con el procedimiento y la medida que se propone en esta memoria para analizar la desigualdad.

Adicionalmente se revisan e incluyen en este trabajo las medidas de desigualdad normativas. Para ello se siguen las pautas establecidas por Atkinson (1970), Kolm (1976 a, b) y Sen (1973) que a grandes rasgos vinculan la desigualdad de la renta con el bienestar social de los individuos.

Finalmente se desarrollan las medidas de desigualdad que se obtienen a partir de la teoría de la información. Aunque el uso del concepto de entropía para cuantificar la desigualdad no está exento de críticas, este tipo de medidas pueden descomponerse aditivamente. Esta propiedad hace que estas medidas sean de gran utilidad para analizar la desigualdad por subgrupos de población y por factores (tipos de renta según su procedencia).

2.2 Definición de desigualdad

El primer paso en la medición de la desigualdad es proporcionar un concepto apropiado de la misma que responda a la pregunta: ¿qué queremos medir? La respuesta a esta cuestión se ha abordado desde distintos puntos de vista dando lugar a lo que se conoce como enfoque objetivo y enfoque normativo de medición de la desigualdad. Kuznets (1953) adoptó un enfoque objetivo según el cual el término desigualdad hace referencia a la diferencia o disparidad entre niveles de renta. Citando a este autor "cuando hablamos de desigualdad de la renta, simplemente nos referimos a las diferencias de renta, sin tener en cuenta su deseabilidad como sistema de recompensas o indeseabilidad como esquema que contradice cierta idea de igualdad" (Kuznets, 1953, pág. 27). Sin embargo, la literatura económica se ha interesado no sólo en cuantificar la disparidad entre niveles de renta sino en cuantificar el coste social que genera dicha disparidad. Este segundo enfoque del concepto de desigualdad, denominado normativo, tiene por objeto valorar de forma subjetiva el coste de la disparidad en términos de pérdida de bienestar y requiere explicitar los juicios éticos que conllevan las medidas de desigualdad. Siguiendo a Atkinson (1975, p. 13) el enfoque normativo del concepto de desigualdad recoge "un contenido moral, es decir, existe la presunción de que la igualdad es deseable" (Atkinson,1975; p. 13). Este mismo autor enfatiza las diferencias entre el enfoque objetivo y normativo de desigualdad como sigue " Los dos significados del término son evidentemente diferentes. Un individuo puede disfrutar de una renta mayor que otro, pero puede considerarse que no es injusto ya que tendrá una renta correspondientemente menor el año próximo. La mera existencia de disparidades de renta y riqueza no constituye una base suficiente para realizar afirmaciones sobre la justicia e injusticia; es necesario determinar que los individuos implicados sean comparables en lo que se refiere a otros aspectos relevantes" (Atkinson, 1975; pág. 14).

La diferencia entre los dos enfoques anteriores se traducen en que los índices desarrollados atendiendo al enfoque objetivo tienen por finalidad cuantificar la desigualdad, pudiéndose realizar a posteriori una evaluación ética de la misma. En los índices normativos aparecen ligadas la medición y la evaluación ética de la desigualdad. Aunque la polémica acerca de qué enfoque es más adecuado es amplia, en la práctica pueden considerarse complementarios. Cuando se define una medida objetiva se le exige que verifique un conjunto de axiomas consistentes con el concepto de desigualdad siendo alguno de ellos de carácter normativo. A su vez, es muy complicado que las medidas normativas incluyan todos los elementos de valoración ética del problema. Para solventar esta limitación, normalmente se seleccionan determinados aspectos que dependen del carácter objetivo de la desigualdad.

Como se destacó al principio de este epígrafe, las medidas de desigualdad son un instrumento de gran utilidad para definir los objetivos de determinadas políticas económicas y evaluar su impacto. La comparación de la desigualdad antes y después de impuestos permite observar el impacto redistributivo de una determinada política impositiva. La reducción de disparidades en términos de renta entre regiones o países requiere de la medición y comparación de la desigualdad entre las distintas unidades de nuestro análisis.

La literatura iniciada con las contribuciones de Atkinson (1970) y Kolm (1976a, b), que sentaron las bases axiomáticas que debe verificar una medida de desigualdad, se ha visto estimulada por la creciente disponibilidad de bases de datos con información sobre ingresos y características socioeconómicas de los individuos, que facilita el desarrollo de este tipo de estudios. En este trabajo se desarrollan las medidas de desigualdad que se utilizan con mayor frecuencia en publicaciones empíricas. El orden seguido en la exposición es el siguiente. En primer lugar se define la Curva de Lorenz que como se verá posteriormente permite establecer órdenes parciales entre distribuciones de renta. En segundo lugar, se introducen los indicadores de desigualdad de uso más frecuente, distinguiendo entre medidas objetivas y normativas y finalmente se introducen las medidas definidas a partir de la teoría de la información.

2.3 Medidas de desigualdad y propiedades

Las curvas de Lorenz proporcionan cuasi-ordenaciones de renta. Este hecho, frecuente cuando se trabaja con datos empíricos, dificulta la ordenación en de distribuciones en términos de desigualdad. Adicionalmente, son numerosas las ocasiones en las que se necesita cuantificar la magnitud de los cambios experimentados por la desigualdad de una distribución. En estas situaciones se recurre a los índices completos de desigualdad en el sentido que asocian a cada distribución un número real que refleja su nivel de desigualdad. En término generales un índice de desigualdad, I, es una relación funcional que asocia a cada distribución de renta un número real que sintetiza su nivel de desigualdad. Si D denota el espacio de distribuciones de renta posibles, se tiene que

$$I: D \rightarrow \mathrm{R}.$$

Al estar definido sobre la totalidad del espacio de distribuciones de renta posibles, permite una ordenación completa de todas ellas.

Para que I sea realmente una medida de desigualdad tiene que cumplir determinados axiomas consistentes con la noción de desigualdad. De los axiomas que se exponen a continuación, exigibles a medidas objetivas y normativas, los de normalización, maximalidad, simetría, S-convexidad, Principio de Pigou-Dalton, continuidad y Principio de población de Dalton, son requisitos mínimos que debe verificar cualquier medida candidata a cuantificar la desigualdad. El resto de axiomas son más exigentes y en cierto modo reducen la variedad de índices aceptables.

- **Normalización**

$$I(\mu, \mu, \dots, \mu) = 0$$

donde μ representa la renta media de la distribución.

Esta propiedad indica que el valor mínimo del índice se obtienen cuando cada individuo recibe una renta igual a la media de la distribución. En este caso la renta de distribuye de forma equitativa.

- **Maximalidad**

$$Máx\ I(x) = I(x^*), con\ x^* = (0,0, \dots ,0, x)$$

Es decir el índice alcanza su valor máximo cuando la renta se concentra en un único individuo.

- **Simetría**

$$\forall x \in D, I(\mathbf{P}x) = I(x)$$

donde **P** es una matriz de permutaciones.

Este axioma indica que alteraciones en la posición de las rentas no afectan al valor del índice.

- **S-convexidad**

$$\forall x \in D, I(\mathbf{B}x) = I(x)$$

siendo **B** una matriz biestocástica.

Atendiendo a este axioma la desigualdad asignada a una intermedia entre dos distribuciones toma un resultado comprendido entre los valores que toma el índice los casos extremos.

- **Principio de Pigou-Dalton**

Sean x, x^* dos distribuciones ordenadas de renta, de forma que $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Supongamos que x^* se construye a partir de x mediante una transferencia progresiva de renta:

$$x^* = (x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_j - h, \dots, x_n) \text{ con } 0 < h < (x_j - x_i)/2$$

Según este principio se verifica que $I(x^*) < I(x)$, es decir, transferencias de renta de individuos privilegiados a individuos con rentas más bajas disminuyen el valor del índice.

- **Continuidad**

I es una función continua.

- **Principio de población de Dalton**

Sea y un vector formado por k réplicas de x. Se verifica que:

$$I^k(y) = I(x)$$

es decir, depende de las proporciones de rentistas y no del número de individuos que forman la población.

- **Invariancia por homotecias**

Si $x^* = ax,\ \forall a \in R$ entonces

$$I(x^*) = I(x).$$

Es decir, variaciones proporcionales en todas las rentas no afectan al valor del índice. Este axioma lo verifican las medidas relativas.

- **Varianza por traslaciones**

$$\forall b \in R \quad I(x + b\mathbf{1}) = I(x) \quad donde\, \mathbf{1} = (1,1, \dots ,1)$$

Esta propiedad la verifican los índices absolutos e indica que el valor de la medida de desigualdad disminuye cuando todas las rentas aumentan en una cantidad constante.

- **Decrecimiento del impacto ante transferencias**

Sea la distribución ordenada de rentas:

$$x = (x_{1,} \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n) \text{ con } x_j - x_i = x_l - x_k.$$

Se verifica $\forall\ 0 < c < (x_j - x_i)/2$

$$I\left(x_{1,} \dots, x_i + c, \dots, x_j - c, \dots, x_k, \dots, x_l, \dots, x_n\right) < I(x_{1,} \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k + c, \dots, x_l - c, \dots, x_n)$$

Es decir, cuanto más bajos sean los niveles de renta en los que la transferencia tiene lugar mayor será la reducción de la desigualdad.

Al margen de estos axiomas normativos y ordinales, es frecuente que a los índices de desigualdad se les exija la propiedad de descomponibilidad. Esta propiedad permite conocer dónde se concentra la desigualdad y qué factores contribuyen en mayor medida a explicarla. A grandes rasgos esta propiedad nos permite analizar la estructura de la desigualdad. La literatura se ha centrado en dos tipos de descomponibilidad: por subgrupos de población y por factores.

- **Descomponibilidad por subgrupos de población**

En ocasiones resulta de interés particionar la población en grupos homogéneos según determinadas características como raza, nivel de estudios, categoría socioeconómica, etc. y analizar la parte de desigualdad atribuible a cada grupo de población.

Se considera una partición de la población n en k grupos de forma que $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ y $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$ representan el vector de medias y los tamaños poblacionales de cada grupo. Siguiendo a Shorrocks (1982), un índice es aditivamente descomponible si se puede expresar:

$$I(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j(\mu, n)\, I(x_j) + I(\mu_1 \mathbf{1}^{n_1}, \mu_2 \mathbf{1}^{n_2}, \ldots, \mu_k \mathbf{1}^{n_k})$$

donde $\mathbf{1}^{n_k}$ es un vector de dimensión $n_k x1$ cuyas coordenadas son todas iguales a 1.

En la anterior expresión, el primer término recoge la parte de la desigualdad atribuible a la desigualdad dentro del subgrupo. Como se observa viene dada por la suma ponderada de la desigualdad de los subgrupos, dependiendo los pesos,a_j, del vector de medias y los tamaños de los grupos. El segundo término representa la desigualdad generada por la diferencia de renta entre los subgrupos considerados.

Los índices que verifican esta propiedad permiten, entre otros, analizar la contribución de cada subgrupo a la desigualdad total. Por ejemplo, si se realiza un estudio de la desigualdad por Comunidades Autónomas nos permitiría observar que autonomías tienen más peso en el nivel de desigualdad total existente en el país, así como comprobar si la componente territorial es relevante en el análisis de la desigualdad.

- **Descomponibilidad por factores**

La descomposición por factores de un índice de desigualdad permite cuantificar los determinantes más importantes de la desigualdad. De este modo, se podría cuantificar qué parte de la desigualdad total se puede atribuir a la desigualdad en cada uno de los diferentes tipos de renta según su procedencia (rentas del trabajo, capital, prestaciones sociales, etc.) o su perceptor (sustentador principal, cónyuge, etc.).

Supongamos que existen p factores de renta, de forma que la renta de un individuo puede escribirse como

$$x_i = \sum_{r=1}^{p} x_i^r \, .$$

Siguiendo a Zubiri (1985) “Para decidir qué parte de la desigualdad de x debe asignarse a cada uno de los x_i^r es necesario hacer dos observaciones previas. Primero, que […] la descomposición por factores sólo tiene sentido en tanto en cuanto aceptamos la cardinalidad de la desigualdad. Segundo, que a cada factor le tenemos que asignar tanto sus efectos directos sobre la desigualdad como sus efectos indirectos, y que esos últimos pueden ser negativos. Y es precisamente porque no existe una sola forma de asignar estos efectos indirectos por lo que la descomposición no serán en general única. […] La razón es, obviamente, que existe una correlación entre las distribuciones de los componentes […]. El problema es, entonces, el de cómo incluir esta interacción a la hora de calcular la contribución de cada uno de los factores a la desigualdad total (pág. 310)”.

El anterior párrafo pone de manifiesto que no hay consenso para cuantificar la contribución de una fuente de ingreso r a la desigualdad total. Supongamos que $S_r\ (x^1, x^2, \dots, x^p)$ denota la parte de desigualdad atribuible al factor r. Shorrocks (1982) demuestra que un índice se puede descomponer factorialmente si y sólo si existen n funciones $a_i(x)$ tales que

$$I(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x) x_i$$

lo que implica

$$S_r(.) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,(x) x_i^r.$$

Shorrocks desarrolló diferentes expresiones para $S_r(.)$. No obstante, como destacó este autor y Zubiri la descomposición no es única y para obtener resultados más concretos hay que introducir restricciones adicionales.

2.4 Medidas ordinales. Curva de Lorenz

Sea x una variable aleatoria continua que denota la renta percibida por un determinado individuo. Debido a que normalmente la renta es una variable positiva, la variable *x* toma valores dentro del intervalo $[0, \infty)$.

La función de distribución de la variable aleatoria x atiende a la expresión:

$$p = F(X_p) = \int_0^{X_p} f(x)dx$$

y representa la proporción de individuos que reciben una renta menor o igual que x_p.

La participación proporcional de la renta total en manos de los perceptores con renta menor o igual a $x \geq 0$ viene dada por:

$$q = L(x_p) = \frac{1}{\mu}\int_0^{X_p} xf(x)dx$$

siendo

$$\mu = E[x] = \int_0^{\infty} xf(x)dx$$

el valor esperado de la variable aleatoria x.

Si se representan gráficamente los pares $(F(x), L(x))$ en los ejes de ordenadas y abscisas respectivamente se obtiene la curva de Lorenz de la variable x .

La curva de Lorenz de una variable continua, diferenciable y con valor esperado finito tiene las siguientes propiedades (véase por ejemplo Dagum, 1985):

a) La curva de Lorenz pasa por los puntos (0,0) y (1,1) ya que para $p = 0, L(p) = 0$ y para $p = 1, L(p) = 1$.
b) Se comprueba que para valores positivos de la variable x la curva de Lorenz es estrictamente creciente:

$$\frac{dL(x)}{dF(x)} = \frac{x}{\mu} > 0$$

c) La curva de Lorenz es convexa respecto del eje de abscisas:

$$\frac{dL^2(x)}{dF^2(x)} = \frac{d}{dF(x)}\left(\frac{dL(x)}{dF(x)}\right) = \frac{1}{\mu f(x)} > 0$$

d) La desigualdad será máxima en el punto $x = \mu$, es decir:

$$F(\mu) - L(\mu) = sup_{\{x\}}[F(x) - L(x)]$$

e) La curva de Lorenz es simétrica si y sólo si $1 - p = L(1 - q)$, en este caso la diagonal $p + q = 1$, que biseca la línea de igualdad, corta a la curva de Lorenz en el punto $(F(\mu), L(\mu))$.

f) La curva de Lorenz es asimétrica a la derecha (izquierda) si y solo si

$$F(\mu) + L(\mu) < 1\ (> 1)$$

g) Sea *m* el ingreso mediano. Se verifica :

$$E[|x - m|]/2\mu = \frac{1}{2} - L(\frac{1}{2})$$

Gastwirth (1971) obtuvo una expresión alternativa de la curva de Lorenz utilizando la inversa de la función de distribución:

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(u)du \qquad 0 \leq p \leq 1$$

donde $F^{-1}(u)$ es la inversa de la función de distribución, es decir:

$$F^{-1}(u) = ínf_x\{x: F(x) \geq u\}.$$

Nótese que $L(p) \leq p$; la diagonal principal, $q = L(p) = p$, recibe el nombre de línea de igualdad. La curva de Lorenz se encuentra debajo de esta línea, y si coincidiese con ella no existiría desigualdad o la concentración de la variable *x* sería nula. El área existente entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz se denomina área de concentración.

Finalmente, destacar la curva de Lorenz Generalizada introducida por Shorrocks (1983). Esta curva facilita, entre otros, la comparación de distribuciones de renta con distinta media. La curva de Lorenz generalizada atiende a la siguiente expresión:

$$LG(x,p) = \mu L(x,p)$$

es decir, se obtiene multiplicando la curva de Lorenz por la renta media de la distribución.

- **Ordenación de curvas de Lorenz**

Entre las aplicaciones de la curva de Lorenz destaca su utilización para ordenar distribuciones de renta. Dicha ordenación un orden establece un orden de preferencia, en función de la desigualdad asociada a cada distribución, denominado criterio de dominancia de Lorenz que se define como sigue:

Definición 2.4.1

La distribución y domina en sentido de Lorenz a la distribución x, $y \geq_L x$, si la curva de Lorenz de y permanece por encima de la curva de Lorenz de x no cortándose ambas curvas. De forma equivalente se dice que y domina en sentido de Lorenz a x si y solo si:

$$L_Y \geq_L L_X \qquad 0 \leq p \leq 1$$

con desigualdad estricta para al menos algún $p \in [0,1]$.

Supongamos que la distribución de renta es discreta y los datos se agrupan en k intervalos cuyas marcas de clase, x_i, y frecuencias relativas, p_i,constituyen una distribución de rentas. Asumiendo que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_k$, $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_k$, y que p_i es la proporción de población que recibe un determinado nivel de renta, se consideran los vectores $F_X' = (p_1 x_1, p_2 x_2, \ldots p_k x_k)$ y $F_Y' = (p_1 y_1, p_2 y_2, \ldots p_k y_k)$ .Las curvas de Lorenz asociadas a los anteriores vectores son las siguientes:

$$L_X(p_j) = \frac{1}{\mu_X} \sum_{i=1}^{j} F_{X_i} \qquad L_Y(p_j) = \frac{1}{\mu_Y} \sum_{i=1}^{j} F_{Y_i}$$

donde $\mu_X = \sum_{i=1}^{k} F_{X_i}$ y $\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} F_{Y_i}$.

Si se trabaja manteniendo la distancia entre las abscisas constates, $p_i = \frac{1}{n}$, se tiene:

$$L_X(p_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k} \qquad L_Y(p_j) = \frac{\sum_{i=1}^{j} y_i}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \ .$$

La distribución *y* domina en sentido de Lorenz a la distribución *x* si y solo si

$$\frac{\sum_{i=1}^{j} y_i}{\sum_{k=1}^{n} y_k} \geq \frac{\sum_{i=1}^{j} x_i}{\sum_{k=1}^{n} x_k} .$$

Si las dos distribuciones de renta tienen la misma media la condición anterior queda de la forma:

$$\sum_{i=1}^{j} y_i \geq \sum_{i=1}^{j} x_i \ .$$

Esta última expresión, muestra la equivalencia entre el orden de Lorenz y la mayorización (Arnold, 1986).

Definición 2.4.2 (Arnold 1986)

Sean $x, y \in R_n^+$ dos vectores ordenados de forma creciente, se dice que y mayoriza a x, $y \geq_M x$ si

$$\sum_{i=1}^{j} y_i \geq \sum_{i=1}^{j} x_i$$

es decir, si la curva de Lorenz de y está por encima de la curva de Lorenz de x. Como se observa, puede establecerse una equivalencia entre la dominancia de Lorenz y la mayorización.

Utilizando la curva de Lorenz Generalizada de Shorrocks (1983) cuya expresión es la siguiente:

$$LG(y,p) = \mu_Y L(y,p)$$

se dice que *y* domina estrictamente a *x* en el sentido de Lorenz generalizado, $y \geq_{LG} x$, si

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} y_i \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{j} x_i \qquad \forall\ i = 1,2,\ldots,n$$

con desigualdad estricta para al menos un $i \leq n$.

Los anteriores resultados muestran que el criterio de ordenación de Lorenz y el criterio de mayorización son equivalentes. A su vez ambos órdenes están relacionados con el criterio de dominancia estocástica de segundo grado.

A continuación se describe esta relación para el caso continuo, ya que permite observar con mayor claridad las equivalencias entre la dominancia estocástica inversa y la dominancia de Lorenz, y la dominancia estocástica inversa y la dominancia estocástica.

Sea F una clase de funciones de distribución definidas sobre el intervalo $[0,\infty)$, es decir

$$F = \{F : [0,\infty) \to [0,1] : F \text{ no decreciente y continua a la derecha}\}.$$

Se consideran dos variables aleatorias x, y con funciones de distribución $F_1, F_2 \in F$. Las rentas máximas y mínimas alcanzables son:

$$\begin{cases} a_i = \sup\{x : F_i(x) = 0\} \\ b_i = \inf\{x : F_i(x) = 1\} \end{cases} \quad i = 1,2$$

de forma que

$$\begin{cases} a = \min\{a_1, a_2\} \\ b = \max\{b_1, b_2\} \end{cases} \quad a,b \quad \textit{finitos}\ .$$

Se define

$$S_i(x) = \int_{a_i}^{x} F_i(u)du\ .$$

La distribución F_2 domina estocásticamente a la distribución F_1 en segundo grado, $F_2 \geq_2 F_1$, si y sólo si:

$$S_2(x) \leq S_1(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

con desigualdad estricta para algún x.

Muliere y Scarsini (1989) definen el concepto de dominancia estocástica inversa, para lo cual utilizan la inversa de la función de distribución:

$$F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geq p\} \quad 0 \leq p \leq 1$$

que es continua a la izquierda y no decreciente.

Sea

$$F_\alpha^{-1}(p) = \int_0^p F_{\alpha-1}^{-1}(s)ds \qquad 0 \leq p \leq 1$$

$$F_1^{-1} = F^{-1}(p)$$

donde α denota el grado de dominancia.

Dadas las distribuciones $F, G \in F$ habrá dominancia estocástica inversa de grado α, $F \geq_\alpha^{-1} G$, si y sólo si

$$F_\alpha^{-1}(p) \geq G_\alpha^{-1}(p) \qquad \forall\ p \in [0,1]$$

con desigualdad estricta para al menos algún $p \in [0,1]$.

Muliere y Scarsini establecen una equivalencia entre la dominancia estocástica de grado α y la dominancia estocástica inversa de grado α, para $\alpha = 1,2$, por lo tanto la dominancia estocástica de segundo grado es equivalente a la dominancia estocástica inversa de segundo grado. Esta equivalencia no se mantiene para $\alpha \geq 3$.

Si se utiliza la definición de curva de Lorenz propuesta por Gastwirth:

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(z)\, dz \quad \forall p \in [0,1]$$

se tiene

$$y \geq_L x \Leftrightarrow \frac{1}{\mu_2} \int_0^p F_2^{-1}(z)dz \geq \frac{1}{\mu_1} \int_0^p F_1^{-1}(z)dz$$

bajo el supuesto de media constante $\mu_1 = \mu_2$ por lo que

$$y \geq_L x \Leftrightarrow \int_0^p F_2^{-1}(z)dz \geq \int_0^p F_1^{-1}(z)dz$$

esta desigualdad coincide con la condición de dominancia estocástica inversa de segundo grado

$$y \geq_L x \Leftrightarrow F_2^{-1} \geq_2 F_1^{-1}$$

como para $\alpha = 2$ la dominancia estocástica es equivalente a la dominancia estocástica inversa

$$y \geq_L x \Leftrightarrow F_2 \geq_2 F_1 \ .$$

Mosler y Muliere (1998) demuestran la equivalencia entre la dominancia estocástica de segundo grado y el orden de mayorización y demuestran la siguiente equivalencia entre órdenes parciales:

$$y \geq_L x \Leftrightarrow y \geq_M x \Leftrightarrow F_2 \geq_2 F_1$$

Adicionalmente, Mosler y Muliere analizaron la relación existente entre los órdenes de mayorización y de Lorenz y el principio de Pigou-Dalton.

El principio de Pigou (1912) y Dalton (1920) establece que una transferencia entre dos individuos, del más rico al más pobre, conlleva a una disminución de la desigualdad, siempre que se mantenga y no se invierta el orden entre individuos y el rico pase a ser pobre.

El cumplimento de este principio es equivalente a decir que la curva de Lorenz de y domina a la de x o bien que x mayoriza a y.

Los órdenes definidos anteriormente, como ya se ha comentado, son parciales. Si las curvas de Lorenz de dos distribuciones se cortan, el criterio de dominancia de Lorenz no determina que distribución es preferida por presentar menor desigualdad. Este problema se ha abordado en la literatura especializada desde distintos puntos de vista. Se han enunciado condiciones que permiten ordenar distribuciones cuyas curvas de Lorenz se cortan, aunque el mayor grueso de contribuciones que pretenden dar solución a este problema están relacionadas con la construcción de índices o medidas que proporcionen un orden completo.

A continuación se exponen algunos de los criterios que permiten ordenar curvas de Lorenz que se cortan y en epígrafes posteriores se desarrollarán los índices de desigualdad de uso más frecuente en la medición de la desigualdad.

- **Ordenación de curvas de Lorenz que se cortan**

Una de las soluciones que se han propuesto para comparar curvas de Lorenz que se cortan, es la elaboración de criterios de ordenación que permitan clasificar distribuciones cuyas curvas de Lorenz se intersecan a lo sumo una vez, ya que como muestran diversos estudios empíricos (véase por ejemplo Bishop *et al*., 1991) los cortes múltiples de curvas de Lorenz son menos frecuentes que los cortes simples.

Lafuente (1994) propone el siguiente criterio de ordenación para curvas que se cortan a lo sumo una vez:

Lema 2.4.1 (Lafuente,1994)

Sean x e y dos distribuciones de renta que queremos comparar, cuyas funciones de distribución respectivas las vamos a denotar por $F_1, F_2 \in F$, y a sus rentas medias por μ_1 y μ_2. Supongamos que $\mu_1 = \mu_2$, entonces la dominancia estocástica de segundo grado y la dominancia de Lorenz son equivalentes:

$$F_2 \geq_2 F_1 \Leftrightarrow y \geq_L x .$$

Teorema 2.4.1 (Lafuente,1994)

En las mismas condiciones de lema anterior, sea

$$\lambda_n = \int_a^b [1 - F_2(z)]^n dz - \int_a^b [1 - F_1(z)]^n dz \qquad n = 1,2,...$$

Supongamos que las curvas de Lorenz de las distribuciones de renta x e y se intersecan a lo sumo una vez. Entonces, una condición suficiente para que $y \geq_L x$ es que $\lambda_n \geq 0$ para $n = 1,2,...$ con al menos una desigualdad estricta.

Lema 2.4.2 (Lafuente ,1994)

Sean x e y dos distribuciones de renta cuyas funciones de distribución denotamos respectivamente, $F_1, F_2 \in F$. Llamamos μ_1 y μ_2 las rentas medias de cada distribución y supongamos que $\mu_1 = \mu_2$. En estas condiciones podemos establecer que

$$F_2 \geq_2 F_1 \Leftrightarrow y \geq_{LG} x$$

es decir, la dominancia de Lorenz generalizada y la dominancia estocástica de segundo grado son equivalentes.

Teorema 2.4.2 (Lafuente,1994)

En las mismas condiciones del lema 2, si las curvas de Lorenz generalizadas se intersecan una vez, una condición suficiente para que $y \geq_{LG} x$ es que $\lambda_n \geq 0$ para $n = 1,2,...$ con al menos una desigualdad estricta.

Ramos *et al.* (2000) proponen una condición suficiente que les permite ordenar curvas de Lorenz Generalizadas que se cortan a lo sumo una vez.

Recuérdese que dadas dos variables aleatorias X, Y, con funciones de distribución F y G respectivamente, se dice que Y domina en sentido de Lorenz generalizado a X, lo cual se denota $Y \geq_{LG} X$, si se verifica

$$LG(y,p) \geq LG(x,p) \quad \forall p \in [0,1].$$

Los mencionados autores consideran dos variables aleatorias no negativas, X, Y de media finita y funciones de distribución F y G respectivamente. El soporte de estas variables es el siguiente:

$$Supp(G) \subseteq Supp(F) \equiv [a,b] \quad \text{donde} \quad 0 \leq a < b \leq \infty$$

Siendo las funciones de distribución F y G continuas y estrictamente crecientes en el soporte definido anteriormente.

Los siguientes teoremas permiten ordenar curvas de Lorenz Generalizadas que se intersecan una vez.

Teorema 2.4.3 (Ramos *et al*., 2000)

Sea $E[X] \leq E[Y]$, se considera un valor $k \in [a,b]$ tal que $F(x) \geq G(x)$ para $x \in [a,k]$, y $F(x) \leq G(x)$ para $x \in [k,b]$. Entonces $G \geq_{LG} F$.

Sean F y G funciones de distribución absolutamente continuas, cuyas funciones de densidad son f y g respectivamente.

Teorema 2.3.4 (Ramos *et al*. , 2000)

Si $E[X] \leq E[Y]$ y el cociente $g(t)/f(t)$ para $t \in$ *suppf* es unimodal, donde la moda es un supremo, entonces $G \geq_{LG} F$.

Corolario 2.4.1 (Ramos *et al*., 2000)

Si $E[X] \leq E[Y]$ y el cociente $g(t)/f(t)$ es log-cóncavo, entonces $G \geq_{LG} F$.

Las demostraciones de estos teoremas se encuentran en Ramos *et al.* (2000).

Otra alternativa para ordenar curvas de Lorenz que se cortan, consiste en exigir mayores grados de dominancia. En esta línea se encuadran los trabajos de

Atkinson[1] (2008), Shorrocks y Foster (1987) y Dardanodi y Lambert (1988). Estos autores establecieron las condiciones para la dominancia de tercer orden para distribuciones que tienen la misma renta media, y sus respectivas curvas de Lorenz se cortan a lo sumo una vez.

Se consideran dos distribuciones de renta x e y con igual renta media, de forma que la curva de Lorenz generalizada de y corta a la de x una sola vez desde arriba y por la izquierda, se dice que la distribución de renta y domina en tercer grado a x si y sólo si, la varianza de y es menor

$$\sigma^2(y) \leq \sigma^2(x).$$

Davies y Hoy (1994) y Lambert (1993) utilizando la curva de Lorenz generalizada, aplican el anterior resultado al caso de múltiples intersecciones entre las curvas de Lorenz, manteniendo el supuesto de medias constantes. El conjunto de condiciones necesarias y suficientes para la dominancia de tercer orden son: que la curvas de Lorenz de y empiece cortando a la de x por arriba, es decir, la renta mínima de y es mayor que la de x ; que la media de y no sea menor a la de x ; y que la varianza de y de todas la subpoblaciones acumuladas en los puntos en los que las curvas de Lorenz generalizadas se cortan no sean mayores a las de x.

2.5 Medidas objetivas. Índice de Gini

El amplio conjunto de indicadores de desigualdad puede agruparse en tres grandes grupos: medidas objetivas, medidas normativas y medidas derivadas de la teoría de la información. En este epígrafe se desarrollan las medidas de desigualdad objetivas que se utilizan con mayor frecuencia: el coeficiente de variación, la varianza de los logaritmos, la desviación relativa media y el índice de Gini. Como se verá a continuación estos indicadores cuantifican la desigualdad atendiendo al grado de dispersión de las distribuciones de renta objeto de estudio.

[1] Atkison definió la dominancia estocástica de tercer orden en 1973 en un manuscrito que no publicó. Este manuscrito se ha publicado en 2008 con el permiso del autor en Journal of Economic Inequality.

- **Coeficiente de variación**

Si se está interesado en medir la dispersión de una distribución de rentas una primera aproximación sería utilizar la varianza, que para una población de tamaño n viene dada por la expresión:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

Esta medida verifica el principio de Pigou Dalton y por tanto cualquier transferencia de renta de un individuo rico a uno pobre disminuye la varianza. Sin embargo, la varianza es una medida de dispersión absoluta y por ejemplo si duplica la renta de todos los individuos la varianza de la nueva distribución será cuatro veces superior a la original. De esta forma, una distribución que muestre una variabilidad mayor que otra, puede tener una varianza menor si la media es menor en la primera que en la segunda variable. El coeficiente de variación construido a partir de la estandarización de la varianza no presenta este problema y atiende a la siguiente expresión:

$$CV = \frac{\sigma_x}{\mu}$$

El coeficiente de variación es una medida relativa que verifica el principio de Pigou Dalton pero se trata de un indicador muy sensible a las transferencias que se producen en la cola superior de la distribución.

- **Varianza de los logaritmos**

Esta medida relativa de desigualdad asigna mayor peso a las transferencias en el extremo inferior de la distribución pero no verifica el principio de transferencias de Pigou Dalton. Se define como

$$VL(X) = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}[\ln(x_i) - \ln(\mu^*)]^2$$

donde μ^* representa la media geométrica de la distribución.

- **Desviación relativa media**

Se define como la proporción que representa, respecto al total de renta, la suma de los valores absolutos de las diferencias entre las rentas individuales y la media, es decir

$$DRM(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \mu|}{n\mu}.$$

Es un índice relativo que puede interpretarse geométricamente en términos de la curva de Lorenz ya que es dos veces la distancia máxima entre la mencionada curva y la línea de igualdad (recta de 45 grados). Esta medida puede contradecir el principio de Pigou Dalton en el sentido de que transferencias progresivas entre individuos a un lado de la media dejen inalterado el nivel de desigualdad.

- **Índice de Gini**

El índice de Gini (1921) es una de las medidas de desigualdad de uso más frecuente y se dispone de varias expresiones equivalentes para su cálculo (véase, entre otros, el trabajo de Giorgi, 1990) sobre las interpretaciones y extensiones del índice de Gini).

Siguiendo a Yitzhaki (2013) el índice de Gini puede definirse de dos formas alternativas:

- La diferencia media de Gini dividida entre el doble de la media (2 μ). Sean dos variables x_1 y x_2 con valor esperado μ. Se define la diferencia media de Gini como la media de las diferencias en valor absoluto de todas las nxn

combinaciones de rentas de unidades económicas de la población y atiende a la siguiente expresión:

$$\Delta = \mathrm{E}\{|x_1 - x_2|\}$$

El índice de Gini viene dado por

$$G = \frac{\Delta}{2\mu} = \frac{\mathrm{E}\{|x_1 - x_2|\}}{2\mu}$$

- El índice de Gini equivale al área comprendida entre la línea de 45º o línea de igualdad y la curva de Lorenz dividida entre el área comprendida entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz asociada a la distribución de máxima concentración. Esta segunda definición se verifica únicamente para variables con valores no negativos.

La definición más utilizada en la medición de la desigualdad es la segunda que como se mencionó anteriormente está relacionada con la curva de Lorenz. Concretamente se define el índice de Gini como dos veces el área comprendida entre la línea de igualdad y la curva de Lorenz, es decir

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp$$

siendo $L(p)$ la curva de Lorenz.

El coeficiente de Gini es un índice relativo de desigualdad, es decir, rentas proporcionales no alteran el valor del índice. Adicionalmente este índice está comprendido entre 0 y 1. El valor 0 se asocia a la distribución de máxima igualdad o equidistribución y el valor 1 indica que la concentración de la renta es máxima. El que sea un índice normalizado que verifica el principio de Pigou y Dalton junto a la invariancia ante incrementos proporcionales de las rentas ha hecho que sea el índice que tradicionalmente más se ha utilizado en la literatura empírica de la desigualdad. La propiedad de descomponibilidad por subgrupos se verifica siempre que éstos no se solapen.

Lerman y Yitzhaki (1984) demostraron que para una distribución de renta continua con función de distribución F, el índice de Gini se puede obtener a partir de la covarianza entre x y F como sigue:

$$G = \frac{2Cov(x, F(x))}{\mu}$$

Entre las diferentes expresiones del índice de Gini para distribuciones discretas, destacamos la siguiente:

$$\begin{aligned} G(x) = & \frac{n+1}{n} - \frac{2}{n^2\mu}[nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + 2x_{n-1} + x_n] \\ & = \frac{n+1}{n} - \frac{2}{n^2\mu}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)x_i \end{aligned}$$

siendo $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

La anterior fórmula permite observar como este índice asigna a cada individuo una ponderación que es una función decreciente de la posición que ocupe en la distribución ordenada de la renta.

2.6 Medidas normativas. Índice de Atkinson

Las medidas normativas tienen su origen en el índice propuesto por Dalton (1920). Del análisis del índice de Dalton surgieron las medidas y los procedimientos de Atkinson (1970), Kolm (1976b), Sen (1973) y Blackorby y Donalson (1980).

Para desarrollar las anteriores medidas se va seguir la presentación realizada por Lafuente (1994).

Sea $W(x): D \to R$ una función de bienestar social (FBS) que asocia a cada distribución de rentas un número real que representa las preferencias sociales al respecto. Se asume que existen n individuos con la misma función de utilidad $U(.)$. El bienestar de la sociedad, según el criterio utilitarista, se obtiene agregando el bienestar de todos los individuos es decir,

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i).$$

Bajo el supuesto de igualación de la renta de todos los individuos, en el sentido de que cada individuo recibe una renta igual a la media, la función FBS sería

$$W(\mu\,\mathbf{1}^n) = \sum_{i=1}^{n} U(\mu) = nU(\mu)$$

donde μ es la media de la distribución y $\mathbf{1}^n$ es un vector de unos.

Cuando la función de utilidad sea cóncava tendremos que $W(\mathbf{x}) < W(\mu\,\mathbf{1}^n)$, lo que implica que la pérdida porcentual de bienestar social que ocasiona la dispersión de la renta es:

$$D_1 = \frac{W(\mu\,\mathbf{1}^n) - W(\mathbf{x})}{W(\mu\,\mathbf{1}^n)} = 1 - \frac{W(\mathbf{x})}{W(\mu\,\mathbf{1}^n)} > 0$$

y por tanto

$$D = 1 - D_1 = \frac{W(\mathbf{x})}{W(\mu\,\mathbf{1}^n)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} U(x_i)}{nU(\mu)}$$

que la medida propuesta por Dalton.

La anterior medida no es invariante ante transformaciones monótonas de W. Para solventar este problema Atkinson propuso una nueva medida de desigualdad basada en el concepto de renta equivalente. La renta equivalente, x_e, es el nivel de renta mínimo que si se le asignara a todos los individuos de la población por igual proporcionaría según W, el mismo nivel de bienestar que el alcanzado por la distribución original x. De esta forma,

$$W(x_e\mathbf{1}^n) = W(x).$$

Según Atkinson (1970), Kolm (1976 a,b) y Sen (1973) el índice normativo de desigualdad asociado a W viene dado por:

$$I_{AKS}(x) = 1 - \frac{x_e}{\mu}$$

y cuantifica la proporción de renta que una sociedad está desaprovechando por no tener una distribución de la renta igualitariamente distribuida.

El índice I_{AKS} es continuo, varía entre cero y uno y es consistente con el criterio de Lorenz. Nótese que I_{AKS} alcanza el mínimo en el caso de igualdad de renta.

Blackorby y Donalson (1978) demostraron que I_{AKS} es una medida de desigualdad relativa si y solamente si la FBS es homotética. De esta forma para generar medidas de desigualdad relativas es suficiente con especificar FBS continuas, crecientes, s-cóncavas y homotéticas. Si a estas propiedades se le añade la de separabilidad aditiva,

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)$$

se obtiene la función de bienestar

$$W_\alpha(x) = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) x_i^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \alpha \geq 0, \alpha \neq 1 \\ \prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n} & \alpha = 1 \end{cases} .$$

A partir de esta función de bienestar se obtienen la familia de índices relativos propuesta por Atkinson:

$$A_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right) (x_i/\mu)^{1-\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \alpha \geq 0, \alpha \neq 1 \\ 1 - \prod_{i=1}^{n} (x_i/\mu)^{1/n} & \alpha = 1 \end{cases}$$

donde α se interpreta como un parámetro de aversión a la desigualdad, al aumentar α crece el peso atribuido a las transferencias en la cola baja de la distribución y, decrece el peso de las realizadas en la cola superior de la distribución de renta.

2.7 Desigualdad y teoría de la información. Índice de Theil

La medida de desigualdad propuesta por Theil (1967) se deduce de la noción de entropía de la teoría de la información. El desarrollo de esta medida se realiza siguiendo la información contenida en Lafuente (1994).

Consideremos la ocurrencia de un suceso determinado entre otros muchos posibles y numeremos los sucesos posibles por 1,2,3,…, con probabilidades p_1,p_2, p_3,… Si sabemos que el suceso i ha tenido lugar y la probabilidad de que ocurriera era alta, valoraremos la información, con un número real $h(p_i)$ relativamente bajo. Por el contrario, si la probabilidad p_i fuese pequeña, la información obtenida es altamente valiosa y asignaremos un número $h(p_i)$correspondientemente alto. Así pues, la función $h(\cdot)$ será decreciente con p_{i}. En el contexto de la teoría de la probabilidad, si los sucesos j y k son estadísticamente independientes, la probabilidad de que ambos ocurran es $p_j p_k$.

Si se quiere agregar el valor informativo de mensajes relativos a sucesos independientes, es necesario que h tenga la propiedad:

$$h(p_j p_k) = h(p_j) + h(p_k).$$

La función que satisface estas dos condiciones es:

$$h(p_i) = -Ln(p_i).$$

Se recurre al concepto de entropía para describir si un sistema complejo consistente en n estados posibles se caracteriza por un orden mayor o menor:

$$E = \sum_i p_i h(p_i) = -\sum_i p_i Ln(p_i).$$

Para utilizar el concepto de entropía en la medición de la desigualdad se interpretan los n sucesos posibles como los n individuos de la población, y p_i como la proporción s_i que la renta del individuo i representa en la renta total, es decir:

$$s_i = \frac{x_i}{n\,\mu}.$$

Dada una distribución de la renta x, la entropía de la distribución $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de participaciones individuales en la renta total es:

$$E(s) = \sum_i s_i h(s_i) = -\sum_i s_i Ln(s_i).$$

Cuanto más cercanas estén las s_i individuales del peso demográfico de cada individuo $(1/n)$, mayor será $E(s)$ hasta alcanzar el valor máximo $Ln(n)$, cuando $s_i = 1/n$ para todo i. Por el contrario, si una s_i tiende a 1 mientras que las demás se hacen cero, la entropía tiende a su mínimo valor cero. Luego la entropía de la distribución puede interpretarse como una medida de desigualdad.

Sustrayendo entonces la entropía de la distribución actual del máximo valor que aquella puede tomar, se obtiene el índice de Theil, T:$D \rightarrow R$.

$$T(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} Ln\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{i=1}^{n} S_i\, Ln\,(S_i) = \sum_{i=1}^{n} S_i \left[Ln(S_i) - Ln\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu}\, Ln\left(\frac{x_i}{\mu}\right).$$

Uno de los mayores atractivos de este tipo de medidas basadas en la teoría de la información reside en que se puede descomponer aditivamente. Esta propiedad facilita el estudio de la desigualdad por subgrupos de población. No obstante, estas medidas no están exentas de críticas asociadas fundamentalmente con los problemas que surgen cuando se relacionan los conceptos de equidad y bienestar con la teoría de la información (véase por ejemplo Dagum, 2001).

Para finalizar se presenta una tabla resumen que recoge las propiedades o axiomas que verifican los índices estudiados.

Cuadro Resumen	ÍNDICES					
PROPIEDADES	Coeficiente Variación	Desv. estándar de los Log.	Desv. relat. Media	Gini	Atkinson	Theil
Normalización	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Maximalidad	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Simetría	SI	SI	SI	SI	SI	SI
S-convexidad	SI	NO	NO	SI	SI	SI
Pigou-Dalton	SI	NO	NO	SI	SI	SI
Continuidad	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Población	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Invar. por homot.	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Varianza por traslac.	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Princ. Transf. Regres.	SI	NO	NO	SI	SI	SI
Decrec. impacto transf.	NO	NO	NO	NO	SI	SI
Descomponiblidad	NO	SI	NO	NO	NO	SI

Gráfico 1. Propiedades de los índices de desigualdad

Fuente: Lafuente (1994).

3 NUEVO ÍNDICE DE DESIGUALDAD Y UMBRALES

3.1 Introducción

En este capítulo se define la función de densidad de Lorenz, $V(p)$, y se estudian sus propiedades. A modo de ejemplo se obtienen las funciones de densidad de Lorenz de algunas distribuciones conocidas. Seguidamente se definen los puntos singulares de $V(p)$. Estos puntos singulares junto con los centroides proporcionan umbrales de población que permiten agrupar a los individuos según su nivel de renta atendiendo a criterios intrínsecos a la propia distribución. Estos umbrales, como se pone de manifiesto en la aplicación empírica, permiten analizar la estructura de la desigualdad. También se define el momento de primer orden de $V(p)$ y se proporciona la expresión del mismo de algunas distribuciones conocidas.

Adicionalmente, se demuestran las condiciones que deben cumplirse para que un polinomio genere una curva de Lorenz. Las curvas obtenidas mediante este procedimiento se denominan curvas de Lorenz polinómicas.

A continuación se enuncian dos principios de equivalencia que permiten simplificar el procedimiento de medición de la desigualdad. En primer lugar se introduce el concepto de función de densidad lineal, $V_l(p)$, de Lorenz y se calcula su momento de primer orden respecto al eje $p = 1/2$. Teniendo en cuenta que dos densidades de Lorenz son equivalentes si tienen el mismo momento de primer orden respecto a $p = 1/2$, se demuestra que cualquier función de densidad de Lorenz $V(p)$ es equivalente (primer principio de equivalencia) en términos de desigualdad a una función de densidad lineal de Lorenz $V_l(p)$. Asimismo se demuestra el segundo principio de equivalencia que establece que dada una curva de Lorenz siempre existe un función de Lorenz cuadrática equivalente. Adicionalmente, se proporcionan las expresiones que permiten obtener a partir de cualquier curva de Lorenz sus funciones lineales y cuadráticas equivalentes.

En este capítulo 3 se propone un nuevo índice de desigualdad y se comprueba que verifica las propiedades que se exigen a las medidas que cuantifican la desigualdad. La medida propuesta se deriva de la densidad de Lorenz y es igual al ángulo que forma con la horizontal la recta equivalente o sea, la función de densidad lineal.

Adicionalmente, en este capítulo se propone una nueva expresión del índice de Gini en función de los puntos singulares de $V(p)$. Concretamente se demuestra cómo el índice de Gini se puede obtener a partir de la renta de perfecta igualdad y los umbrales de renta alto (P_a) y bajo (P_b). Se demuestra también cómo el índice de Gini asociado a una densidad de Lorenz es igual al doble del momento su momento respecto al eje $p = 1/2$. Finalmente se obtiene una expresión de la medida propuesta en función del índice de Gini y se particulariza esta relación para distintos tipos de distribuciones.

3.2 Función de densidad de Lorenz

3.2.1 Definición de la función de densidad de Lorenz, $V(p)$

Sea x una variable aleatoria continua que denota la renta de un determinado individuo. Suponemos que x es finita, no negativa y continua. La función de distribución y la media de x se denotan por F(x) y $\mu = E(x)$ respectivamente. Como se ha visto en el apartado 2.2, la curva de Lorenz se puede escribir:

$$L(p) = \frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(t)dt \qquad 0 \leq p \leq 1.$$

Se define $V(p)$, *función de densidad de Lorenz*, como la función derivada de la curva de Lorenz:

$$V(p) = \frac{d\,L(p)}{dp}$$

$$L(p) = \int_0^p V(t)dt\,.$$

Ejemplo: Se considera una distribución uniforme con función de distribución:

$$F(x) = \frac{x-a}{\theta}, \qquad a < x < a+\theta.$$

La curva de Lorenz asociada a una distribución uniforme viene dada por la expresión:

$$L(p) = \frac{ap+\left(\frac{\theta p^2}{2}\right)}{a+\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Para los parámetros $a = 0{,}2$ y $\theta = 3$ se tiene:

$$L(p) = \frac{0{,}2\,p+\left(\frac{3p^2}{2}\right)}{0{,}2+\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{15\,\mathrm{p}^2+2\,\mathrm{p}}{17}.$$

Su derivada, la función de densidad de Lorenz, $V(p)$, es:

$$V(p) = \frac{2(\theta p + a)}{2a + \theta}$$

$$V(p) = \frac{2(3p + 0{,}2)}{2 \times 0{,}2 + 3} = \frac{30\,\mathrm{p} + 2}{17}.$$

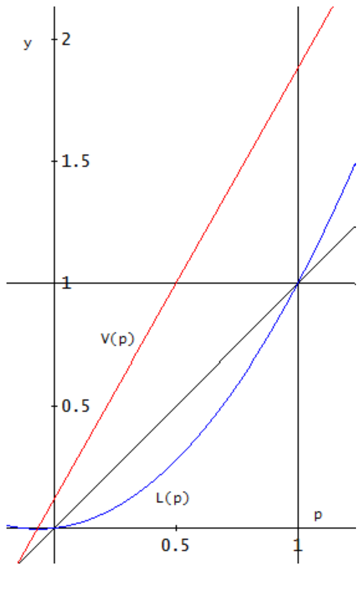

Gráfico 2. L(p) y V(p)

3.2.2 Propiedades de la función de densidad de Lorenz

- **$V(p)$ es una función de densidad**

$V(p)$ es una función de densidad y es obvio que verifica las siguientes condiciones

i)

$$V(p) \geq 0$$

ii)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(p)\mathrm{dp} = 1.$$

Hay que tener en cuenta que el dominio de definición de $V(p)$ es [0, 1] y fuera de ese dominio, vale cero. Es decir, la segunda condición es igual a:

$$\int_{0}^{1} V(p)dp = 1.$$

Esta condición se cumple porque es equivalente a la condición de la curva de Lorenz de pasar por el punto (1, 1). La curva de Lorenz, como se señaló en el epígrafe 2.1.1, siempre pasa por el punto (1, 1) por representar valores acumulados en ambos ejes, lo que significa que la totalidad de la población dispone de la totalidad de la renta.

$$L(1) = 1.$$

- **$V(p)$ es monótona no decreciente**

$L(p)$ representa rentas acumuladas y es monótona no decreciente puesto que, por construcción, los individuos se ordenan por renta creciente. $V(p)$ es la derivada de $L(p)$ y por las propiedades de la función derivada, también es monótona no decreciente. Si $V(p)$ fuera decreciente en algún punto, significaría que ese individuo tiene menos renta que el que está a su izquierda y habría una contradicción ya que tendría que haberse situado antes en la ordenación.

3.2.3 Puntos singulares de $V(p)$

A continuación se definen distintos puntos singulares de la densidad de Lorenz que se van a utilizar en el desarrollo teórico que conduce a la medida de desigualdad que se propone en esta memoria.

Estos puntos son el punto de equidad, el punto de exclusión, el umbral alto y el umbral bajo de renta. Los cuatro puntos vienen dados por la forma de $V(p)$ y se encuentran en el eje de abscisas, en el intervalo [0, 1]. Es decir son puntos que representan porcentajes de población que cumplen una determinada propiedad. La obtención y significado de estos puntos se desarrollan a continuación más detalladamente.

- **Punto de equidad. Favorecidos y Desfavorecidos**

Se llama *punto* de *equidad, Pe,* al punto p para el que $V(Pe) = 1$. Nótese que es la abscisa a la que corresponde una renta exactamente igual a la renta media. Todo individuo a la derecha de Pe tiene una renta mayor que la media y todo individuo a la izquierda de Pe tienen una renta inferior a la media. Se tiene por tanto que Pe divide a la función de densidad de rentas en dos grandes grupos que se denominan: *Favorecidos* y *Desfavorecidos.*

La renta de más que obtienen los favorecidos es exactamente igual a la renta de menos de los desfavorecidos. Corresponden al área entre $V(p)$ y la recta $V(p) = 1$. Debido a que las funciones de densidad de Lorenz no son en general simétricas, Xe no está necesariamente en el centro de este intervalo.

Si $V(p)$ fuese la recta $V(p) = 1$, el punto de equidad sería toda la recta y entonces la distribución de renta sería equitativa. Es decir, cada individuo recibe una renta igual a la media, en este caso al estar trabajando con rentas relativas sería 1. Para una función de densidad equitativa la curva de Lorenz coincide con la bisectriz principal, es decir $L(p) = p$.

El punto de equidad puede ser un segmento continuo pero al menos debe existir un punto de equidad ya que $V(p)$, excepto para el caso de equidad perfecta, debe empezar por debajo de 1 y acabar por encima para que el área debajo de $V(p)$ sea igual a 1. Puesto que $V(0) < 1$ y $V(1) > 1,$ al ser $V(p)$ continua por el teorema de Bolzano, existe un punto P_e tal que $V(P_e) = 1$.

Ejemplo: Sea la curva de Lorenz:

$$L(p) = \frac{3\,p^6 + 2\,p^4 + \,p^3 + 5\,p}{11}$$

cuya derivada o función de densidad de Lorenz, $V(p)$ es:

$$V(p) = \frac{18\,p^5 + 8\,p^3 + 3\,p^2 + 5}{11}$$

$$V(P_e) = \frac{18\,{P_e}^5 + 8\,{P_e}^3 + 3\,{P_e}^2 + 5}{11} = 1$$

$$P_e = 0{,}664372.$$

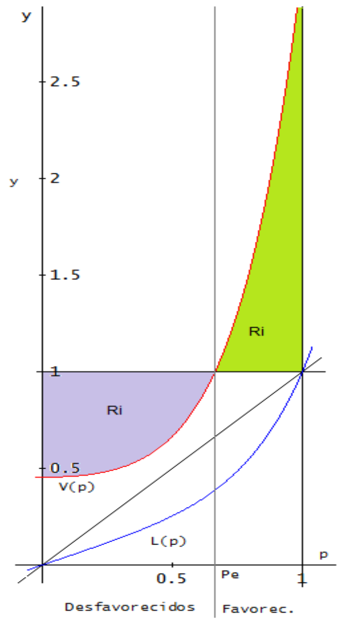

Gráfico 3. Punto de equidad, Favorecidos y Desfavorecidos

- **Renta de Perfecta Igualdad**

El área de la superficie, generalmente de forma triangular, formada por $V(p)$ a la derecha de Pe, que está por debajo de $V(p)$, acotada por las rectas $y = 1$; $p = 1$, es la *Renta de Perfecta Igualdad* (Ri). Igualmente, el área de la superficie, generalmente de forma triangular, formada por $V(p)$ a la izquierda de Pe, que está por encima de $V(p)$ y acotada por las rectas $y = 1$; $p = 0$, es también la *Renta de Perfecta Igualdad*. Ambas superficies deben ser iguales ya que como se ha visto antes:

$$\int_0^1 V(p)dp = 1.$$

La Renta de Perfecta Igualdad coincide con las zonas sombreadas a izquierda y derecha de Pe en el gráfico 3. El nombre viene del hecho de que si una renta igual a Ri pasara desde la derecha de Pe hasta la izquierda de Pe, es decir, desde las rentas altas hacia las rentas bajas, se igualarían las rentas y se lograría la equidad en el reparto de la renta. En este caso la función de densidad de Lorenz sería $V(p) = 1$. Obsérvese que se ha llegado de una forma independiente a lo que se conoce en la literatura como coeficiente de Schutz (1951). Queremos destacar que Ri y el coeficiente de Schutz son similares en el sentido en que dicho coeficiente mide la proporción de renta total que tendría que ser transferida desde las rentas situadas por encima de la media hasta las rentas por debajo de la misma para obtener la igualdad perfecta. No obstante, el coeficiente de Schutz, contrariamente a la medida que se propone, no refleja cambios en la desigualdad cuando las transferencias no traspasan la media. Es decir, resulta inadecuado para ello porque cuando hay transferencias de rentas que no cruzan la media, el coeficiente queda inalterado.

$$R_i = \int_{P_e}^1 (V(p) - 1)dp$$

$$R_i = \int_0^{P_e} \big(1 - V(p)\big)dp$$

- **Punto de exclusión. *Excluidos***

Por la definición que se ha hecho de la función de densidad de Lorenz de reparto de la renta $V(p)$, su valor siempre debe ser mayor o igual que cero. El dominio de $V(p)$ es el intervalo [0, 1] que representa el porcentaje relativo de población, pero puede darse el caso de que haya una parte de la población con renta igual a cero. En este caso, se define la función de densidad de Lorenz a trozos:

$$V(p) = \begin{cases} 0 & 0 \leq p \leq p_0 \\ V_1(p) & p_0 < p \leq 1 \end{cases}$$

siendo

$$\lim_{p \to p_0} V_1\,(p) = 0.$$

Llamaremos *Punto de Exclusión,* a la abscisa que representa el porcentaje de población con renta igual a cero. Su interpretación es muy clara: si este punto existe, el porcentaje de población que se encuentra a su izquierda tiene renta igual a cero, ya que no se consideran rentas negativas. En este caso, a las categorías de *Favorecidos* y *Desfavorecidos,* hay que añadir la de *Excluidos.*

El punto de exclusión P_0, se calcula resolviendo la ecuación $V(p) = 0$ y tomando la raíz comprendida entre 0 y 1.

Sin pérdida de generalidad, vamos a hacer el cálculo para un ejemplo sencillo. Los resultados se han representado en el gráfico 4, donde se ha reducido el eje de ordenadas para facilitar la presentación.

Sea la función lineal:

$$V(p) = 4p - 4 + 2\sqrt{2}.$$

Calculamos el punto de exclusión P_0, igualando a cero y resolviendo. Comprobamos que la raíz obtenida está dentro del intervalo [0, 1] que es el dominio de $V(p)$:

$$4p - 4 + 2\sqrt{2} = 0 \quad \rightarrow \quad P_0 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}292893.$$

Comprobamos que $V(p)$ es una función de densidad:

$$\int_{p_0}^{1} (4p - 4 + 2\sqrt{2})dp = 1$$

Calculamos el punto de equidad Pe, igualando $V(p)$ a uno y resolviendo.

$$4p - 4 + 2\sqrt{2} = 1 \quad \rightarrow \quad P_e = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}542893$$

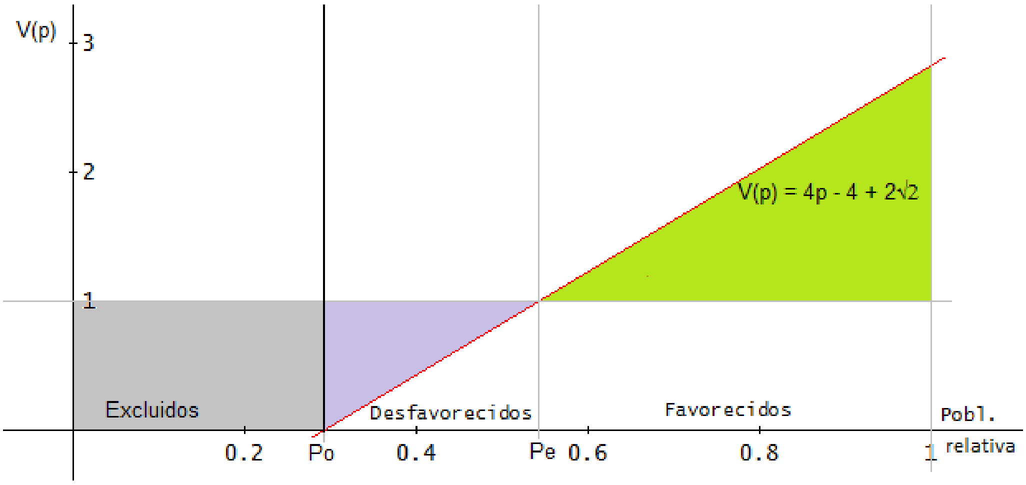

Gráfico 4. Excluidos, Desfavorecidos y Favorecidos

- **Centroides y umbrales**

Los centroides de las superficies que forman la *renta de perfecta igualdad*, Ri, a la izquierda y derecha del punto de equidad Pe, proporcionan unos umbrales que dividen a la población en cuatro categorías distintas según su nivel de renta, (véase Pereira y Salinas, 1978). Estos umbrales son: P_a y P_b. Pueden verse en el gráfico 5 junto con otros elementos que se han definido.

El umbral alto, P_a, viene dado por la coordenada p del centroide de la superficie plana que forma la renta de perfecta igualdad a la derecha de Pe. Es decir, P_a =

p centroide derecha. Los individuos a la derecha de P_a pertenecen al grupo de rentas altas. Los individuos entre Pe y P_a pertenecen al grupo de renta media alta.

El umbral bajo, P_b, viene dado por la coordenada p del centroide de la superficie plana que forma la renta de perfecta igualdad,Ri, a la izquierda de Pe. Es decir, $P_b = p$ es el centroide izquierda. Los individuos a la izquierda de P_b, constituyen el grupo de individuos de renta baja. Los individuos entre P_b y Pe pertenecen al grupo de renta media baja. Los individuos cuya renta esté comprendida entre P_b y P_a son el grupo de renta media con los dos subgrupos que se han mencionado antes.

En el gráfico 5 se representa un ejemplo con todos estos elementos. El eje y representa la renta dividida por la renta total y el eje p representa la población dividida por la población total ordenada de izquierda a derecha por los individuos de menor a mayor renta. Obsérvese que en ocasiones, el eje de ordenadas se dibuja a una escala menor para reducir el tamaño de la gráfica. Esta reducción de escala reduce en igual medida la apariencia de las pendientes de las curvas.

Ejemplo: Sin pérdida de generalidad, se ha tomado por simplicidad una curva de Lorenz:

$$L(p) = \frac{p^3 + 3\,p^2 + 2\,p}{6}$$

cuya derivada o función de densidad de Lorenz, $V(p)$, es:

$$V(p) = \frac{3\,p^2 + 6\,p + 2}{6}.$$

El punto de corte de $V(p)$ con y = 1, Pe y los centroides de ambas superficies son puntos singulares que caracterizan a esa función de densidad de renta particular:

$$V(P_e) = \frac{3\,{P_e}^2 + 6\,P_e + 2}{6} = 1$$

$$P_e = 0{,}527525.$$

Para calcular los centroides hay que conocer previamente la renta de perfecta igualdad, Ri, que queda a la izquierda de Pe:

$$R_i = \int_0^{P_e} \big(1 - V(p)\big)dp = 0{,}188075.$$

La que queda a la derecha de Pe, que como es lógico es igual a la anterior, viene dada por

$$R_i = \int_{P_e}^{1} (V(p) - 1)dp = 0{,}188075.$$

La renta de perfecta igualdad,Ri, está sombreada en el gráfico 5 y sus centroides marcan los umbrales P_a y P_b.

Las coordenadas p de ambos centroides proporcionan los umbrales de población P_b y P_a.El centroide a la derecha, P_a, viene dado por:

$$P_a = P_e + \frac{1}{R_i}\int_{P_e}^{1} (p - P_e)(V(p) - 1)dp$$

$$P_a = 0{,}527525 + \frac{0{,}059933}{0{,}188075} = 0{,}846188$$

$$1 - P_a = 0{,}153812$$

luego hay un 15,38% de población con renta alta.

El umbral de renta alta es igual a:

$$V(P_\mathrm{a}) = \frac{3\,{P_a}^2 + 6\,P_a + 2}{6} = 1{,}537539$$

Es decir, en este ejemplo, una persona se considera que tiene renta alta si su renta está por encima de 1,54 veces la renta media.

El centroide a la izquierda, P_b, equivale a:

$$P_b = \frac{1}{R_i}\int_0^{P_e} p\big(1 - V(p)\big)dp$$

$$P_b = \frac{0{,}034147}{0{,}188075} = 0{,}181561$$

luego hay un 18,16% de población con renta baja.

El umbral de renta baja es:

$$V(P_b) = \frac{3\,{P_b}^2 + 6\,P_b + 2}{6} = 0{,}531376.$$

Es decir una persona se considera que tiene renta baja si su renta está por debajo de 0,53 veces la renta media.

En el gráfico 5 se han marcado también las distintas zonas de renta que determinan estos umbrales permitiendo analizar la renta con umbrales que se adaptan a la estructura de la distribución y no a valores fijados de antemano e iguales para todas las distribuciones (véase Vinuesa y García, 2016).

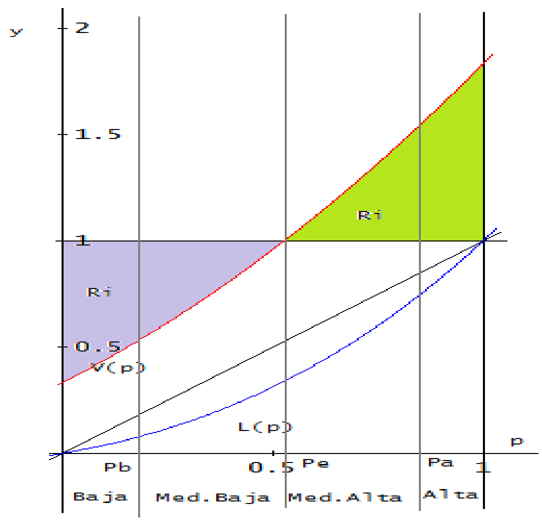

Gráfico 5. Umbrales y grupos de renta

3.2.4 Funciones de densidad de Lorenz de distribuciones conocidas

A continuación se obtienen las densidades de Lorenz asociadas a especificaciones concretas de la curva de Lorenz. Se han seleccionado curvas de distribuciones de uso frecuente.

- **Distribución degenerada**

$$L(p) = p; \quad V(p) = 1$$

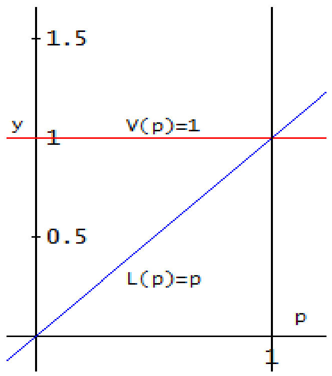

Gráfico 6. Distribución degenerada

- **Distribución exponencial**

$$L(p) = p + (1 - p)Ln(1 - p)$$

$$V(p) = -Ln(1 - p)$$

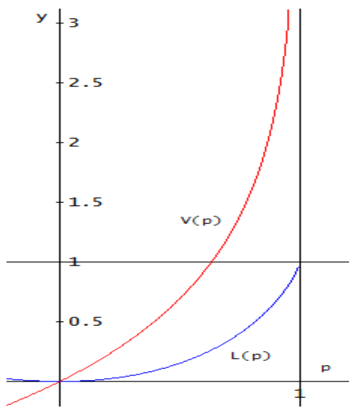

Gráfico 7. Distribución exponencial

- **Distribución exponencial general**

$$L(p) = p + (1+\lambda a)^{-1}(1-p)Ln(1-p) \qquad p > a$$

$$V(p) = \frac{a\lambda - Ln(1-p)}{a\lambda + 1}$$

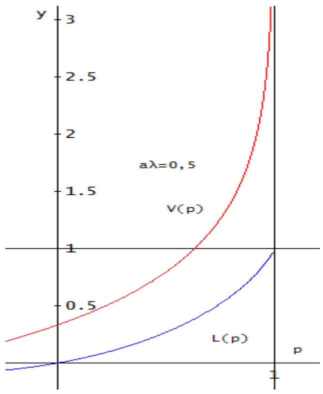

Gráfico 8. Distribución exponencial general

- **Distribución uniforme**

$$L(p) = \frac{ap + \left(\frac{\theta p^2}{2}\right)}{a + \left(\frac{\theta}{2}\right)}; \qquad V(p) = \frac{2(\theta p + a)}{2a + \theta}$$

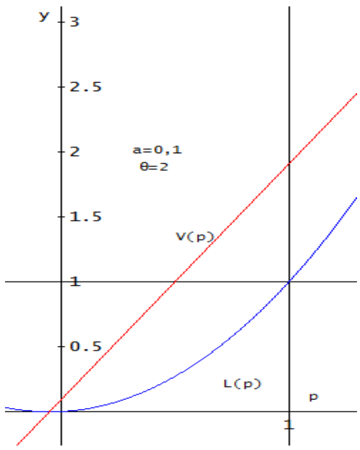

Gráfico 9. Distribución uniforme

- **Distribución de Pareto**

$$L(p) = 1 - (1-p)^{(\alpha-1)/\alpha} \; ; \qquad V(p) = \frac{(\alpha-1)}{\alpha}(1-p)^{-1/\alpha}$$

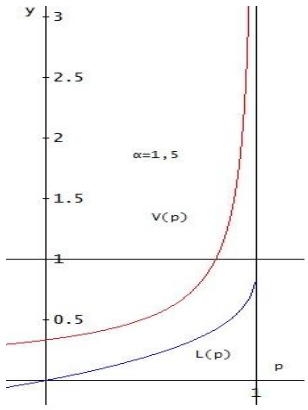

Gráfico 10. Distribución de Pareto

- **Distribución beta incompleta**

$$L(p; a, b)) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^p x^{(a-1)} \, (1-x)^{(b-1)} dx$$

con $a \geq b; \; 0 < b \leq 1$.

$$V(p; a, b)) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{(a-1)} (1-p)^{(b-2)} (a - p(a+b-1)$$

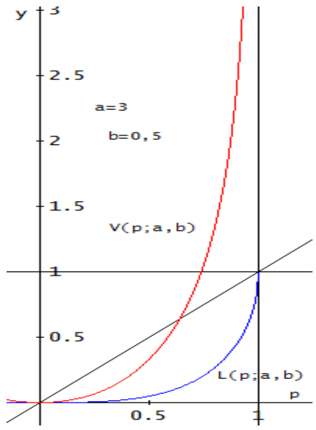

Gráfico 11. Distribución beta incompleta

- **Distribución lognormal**

Llamando Q al factor de normalización:

$$Q = \int_0^1 \left(\frac{1}{p\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{(\log p - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right)$$

$$L(p) = \frac{\int_0^p \left(\frac{1}{p\sigma\sqrt{(2\pi)}} \exp\left(-\frac{(\log p - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \right)}{Q}$$

$$V(p) = \frac{\sqrt{2}}{Q2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\ln(x)^2}{2\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \times x^{\left(\frac{(\mu-\sigma^2}{\sigma^2}\right)}$$

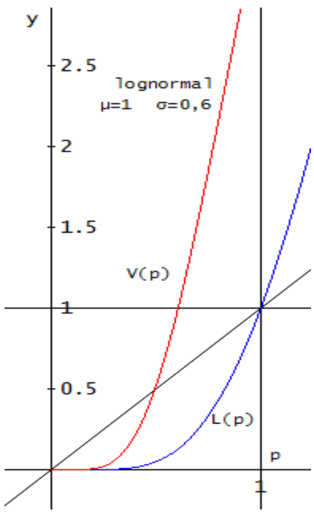

Gráfico 12. Distribución lognormal

3.2.5 Momentos de primer orden de *V(p)*

El momento de orden r de una variable aleatoria viene dado por la expresión (véase por ejemplo Kendall & Stuart, 1977):

$$M_\alpha^r = E[(x - \alpha)^r].$$

Particularizando para $r = 1$ y $\alpha = 1/2$ se tiene:

$$M_{1/2} = E\left[(x - \tfrac{1}{2})\right]$$

El momento de primer orden de la función de densidad de Lorenz $V(p)$, respecto de $p = 1/2$, es la suma de los productos de las áreas elementales bajo la curva por su distancia al eje $p = 1/2$. La suma de las áreas elementales se hace mediante la integral:

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p) dp.$$

El cálculo de estos momentos es importante porque como se verá más adelante están relacionados con la medida de la desigualdad que se propone en esta memoria. A continuación se calculan los momentos respecto al eje $p = 1/2$ de algunas de las distribuciones a las que anteriormente se les ha calculado $V(p)$.

- **Distribución exponencial**

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(-Ln(1-p)\right) dp = \frac{1}{4}.$$

- **Distribución exponencial general**

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a\lambda - Ln(1-p)}{a\lambda + 1}\right) dp = \frac{1}{4(a\lambda + 1)}.$$

- **Distribución uniforme**

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2(\theta p + a)}{2a + \theta}\right) dp = \frac{\theta}{6(2a + \theta)}.$$

- **Distribución de Pareto**

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{(\alpha - 1)}{\alpha} (1-p)^{-\frac{1}{\alpha}}\right) dp\ .$$

Esta integral se ha resuelto numéricamente:

Para $\alpha = 1.5$, el resultado es $M_{1/2} = 1/4$

Para $\alpha = 2$, el resultado es $M_{1/2} = 1/6$

Para $\alpha \ = \ 2.5$, el resultado es $M_{1/2} = 1/8$

Para $\alpha \ = \ 3$, el resultado es $M_{1/2} = 1/10$

Para $\alpha \ = \ 3.5$, el resultado es $M_{1/2} = 1/12$

Luego para la distribución de Pareto:

$$M_{1/2} = \frac{1}{4\alpha - 2} \qquad con \quad \alpha > 1 \,.$$

3.2.6 Renta Equilibrada y Renta Desequilibrada

De la ecuación:

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p) dp$$

se deduce que la parte de renta a la derecha del punto $p = 1/2$, que es simétrica a toda la renta de la parte a la izquierda, se compensa con ella al tener el mismo valor de $V(p)$ y el signo del factor $(p - 1/2)$ cambiado. A la suma de estas dos rentas iguales a derecha e izquierda, le llamamos *Renta Equilibrada*, R:

$$Re = 2 \int_0^{0.5} V(p) dp \,.$$

Como se expondrá posteriormente, la renta que genera desigualdad cuando esta se cuantifica mediante el índice de Gini es el resto de la renta a la derecha de $p = 1/2$ que no es compensado. A esta renta le llamamos *Renta Desequilibrada,* R_d:

$$Rd = 1 - Re \,.$$

Para calcular la renta desequilibrada hay que buscar la función simétrica de V(p) respecto a p = 1/2. Esta función es V(1-p). Haciendo un símil físico, calcular el momento de la distribución respecto al eje p = 1/2 es como si se pesara la distribución colocando una balanza en el centro. El área bajo las curvas simétricas V(p) y V(1-p) está equilibrada y no contribuye a la desigualdad, en este caso al desequilibrio de la balanza. El área que está bajo V(p) pero sobre V(1-p) es la renta desequilibrada y es la única que contribuye a la desigualdad.

Ejemplo: Sin pérdida de generalidad, se obtienen la renta equilibrada y desequilibrada de una función $V(p)$:

$$V(p) = \frac{3\,p^2 + 6\,p + 2}{6}$$

$$V(1-p) = \frac{3\,(1-p)^2 + 6(1-\;p) + 2}{6} = \frac{3\,p^2 - 12\,p + 11}{6}.$$

En el gráfico 13 se observan estas dos rentas.

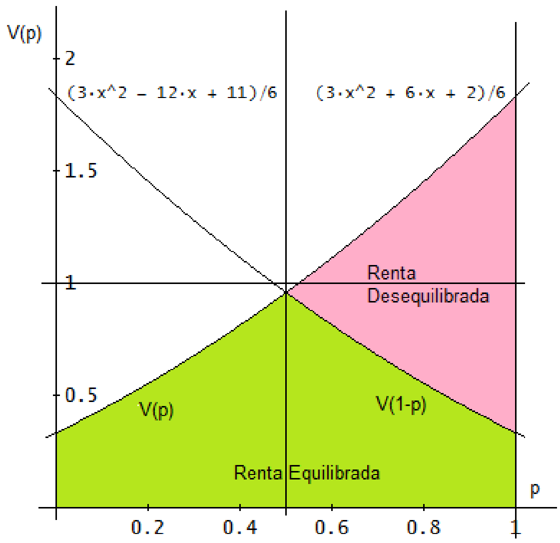

Gráfico 13. Rentas Equilibrada y Desequilibrada

$$Re = 2\int_0^{0.5} V(p)dp = 2\int_0^{0.5}\left(\frac{3\,p^2 + 6\,p + 2}{6}\right)dp = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

$$Rd = 1 - Re = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375\,.$$

En este ejemplo, un 62,5 % de la renta está equilibrada, mientras que un 37,5 % de la renta está desequilibrada.

3.3 Curvas de Lorenz polinómicas

En la literatura especializada relacionada con la Curva de Lorenz se han propuesto, utilizando metodologías diferentes, familias de funciones que generan curvas de Lorenz. Como ejemplo véanse las publicaciones de Casas *et al*. (1990), Callejón (1995), Herrerías *et al*. (2001) y Sarabia *et al*. (2003) entre otros.

En esta memoria se generan curvas de Lorenz de manera sencilla, a partir de cualquier polinomio. La idea es muy simple y se basa en tres consideraciones:

a) Cualquier polinomio con coeficientes no negativos es monótono no decreciente en el intervalo [0, 1]. Todas sus derivadas son también monótonas no decrecientes en el intervalo [0, 1]

b) Al multiplicar un polinomio por la variable p, le estamos añadiendo la raíz $p = 0$ con lo que conseguimos que pase por el origen.

c) Al dividirlo por la suma de sus coeficientes, S, hacemos que pase por el punto (1, 1).

Proposición: Cualquier polinomio $P_n(p)$, con coeficientes c_i, no negativos, a cuya suma le llamaremos S, genera una curva de Lorenz si se multiplica por el factor (p / S):

$$L(p) = \left(\frac{p}{S}\right) P_n(p)$$

donde

$$\forall\, P_n(p) = c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \cdots + c_2 p^n; \qquad c_i \geq 0 \ \ \forall i$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} c_i$$

Demostración: La curva de Lorenz, *L(p),*así obtenida cumple todas las propiedades de las mismas:

i) *L(0)* = 0

$$L(0) = \left(\frac{0}{S}\right) P_n(p) = 0$$

ii) *L(1)* = 1

$$L(1) = \left(\frac{1}{S}\right) P_n(1) = \frac{S}{S} = 1$$

iii) *L´(p) ≥ 0, para 0 ≤ p ≤1*

$$L'(p) = \left(\frac{1}{S}\right) P_n(p) + \left(\frac{p}{S}\right) P'_n(p) \geq 0$$

ya que $c_i \geq 0 \ \forall i$.

iv) *L´´(p) ≥ 0, para 0 ≤ p ≤1*

$$L''(p) = \left(\frac{2}{S}\right) P_n'(p) + \left(\frac{p}{S}\right) P''_n(p) \geq 0$$

dado que $c_i \geq 0 \ \forall i$.

v) *L(p) ≤ p, para 0 < p < 1*

$$\frac{P_n(p)}{S} \leq 1 \qquad para\, 0 \leq p \leq 1$$

$$L(p) = p\left(\frac{P_n(p)}{S}\right) \leq p\, x\, 1 \qquad para\, 0 < p < 1$$

vi) $0 \leq \int_0^1 L(p)dp \leq 1/2$

Para $0 < p < 1$, $0 \leq L(p)$ ya que todos sus términos son no negativos.

Por lo tanto:

$$0 \leq \int_0^1 L(p)dp\,.$$

Por otro lado, por la propiedad v), $L(p) \leq p$, luego está siempre por debajo de la bisectriz del primer cuadrante que tiene un área igual a $1/2$:

$$\int_0^1 L(p)dp \leq \int_0^1 pdp = \left.\frac{p^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

En la proposición anterior, la condición de que todos los coeficientes del polinomio sean no negativos, es suficiente pero no necesaria. Puede haber casos en que algún coeficiente sea negativo y siga siendo válida.

A continuación se desarrollan tres ejemplos que permiten observar cómo se obtiene la curva de Lorenz a partir de un polinomio.

Ejemplo 1: Sea $P_1(p)$ un polinomio cualquiera de primer grado con coeficientes no negativos:

$$P_3(p) = 2p + 5$$

La suma de sus coeficientes es:

$$S = 2 + 5 = 7$$

luego:

$$L_1(p) = \left(\frac{p}{7}\right) P_1(p) = \left(\frac{p}{7}\right)(2p + 5) = \frac{2p^2 + 5p}{7}$$

es una curva de Lorenz.

Ejemplo 2: Sea $P_3(p)$ un polinomio cualquiera de tercer grado con coeficientes no negativos:

$$P_3(p) = 4p^3 + p + 1.$$

La suma de sus coeficientes es:

$$S = 4 + 0 + 1 + 1 = 6$$

y por tanto:

$$L_2(p) = \left(\frac{p}{6}\right) P_3(p) = \left(\frac{p}{6}\right)(4p^3 + p + 1) = \frac{4p^4 + p^2 + p}{6}$$

es una curva de Lorenz.

Ejemplo 3: Sea P6(p) un polinomio cualquiera de sexto grado con coeficientes no negativos:

$$P_6(p) = 7p^6 + 4p^2 + 2p + 3$$

La suma de sus coeficientes es:

$$S = 7 + 0 + 0 + 0 + 4 + 2 + 3 = 16$$

por lo que:

$$L_3(p) = \left(\frac{p}{16}\right)(7p^6 + 4p^2 + 2p + 3) = \frac{7p^7 + 4p^3 + 2p^2 + 3p}{16}$$

es una curva de Lorenz.

Las tres curvas de Lorenz obtenidas anteriormente, L1(p), L2(p) y L3(p) se representan en el gráfico 14.

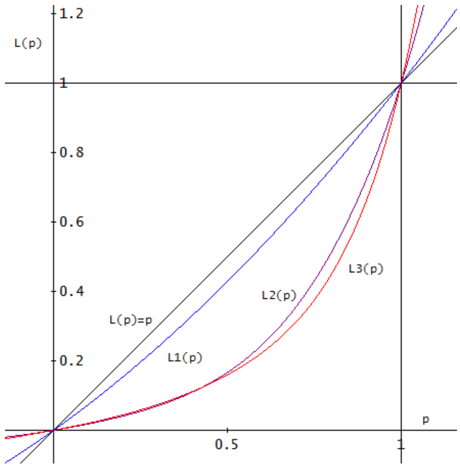

Gráfico 14. Curvas de Lorenz $L_1(p)$, $L_2(p)$ y $L_3(p)$

3.4 Principios de Equivalencia

3.4.1 Función de densidad lineal de Lorenz

Los desarrollos que se exponen a continuación se han realizado para una función $V(p)$ lineal. Posteriormente se generalizaran utilizando funciones $V(p)$ asociadas a distribuciones de uso frecuente en la modelización de la renta.

Junto a la función de densidad uniforme o función de densidad equitativa, en la que $V(p) = 1$, destaca por su sencillez la función de densidad lineal cuya $V(p)$ es una línea recta:

$$V(p) = s \times \mathrm{p} + b \qquad (3.1)$$

donde s es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen.

En la función de densidad lineal se distinguen dos casos: un primer caso cuando la pendiente de la recta varía de 0 a 2; y un segundo caso cuando la pendiente de la recta es mayor que 2. El área de la superficie por debajo de la recta debe ser igual a uno lo que implica en el primer caso, que todas las rectas de pendiente menor o igual a 2 deben pasar por el punto (0,5; 1). No así para el segundo caso. En el primer caso *b,* la ordenada en el origen, es positiva o cero y en el segundo caso negativa. Para $s = 2$, la recta pasa por el origen.

En el gráfico 15 se representan varias funciones de densidad lineal de Lorenz para diferentes valores de la pendiente: $s = 0$, $s = 2$, $s = 3$ y $s = 4$. Para $p = 0$ se tiene la función de reparto equitativo $V(p) = 1$. Las funciones de densidad lineal pueden representar de forma continua, funciones de densidad de Lorenz desde $s = 0$ hasta p infinito que vendría representado por la recta vertical $p = 1$.

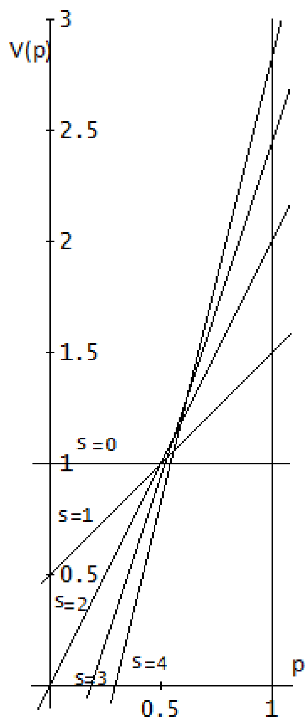

Gráfico 15. Funciones de densidad lineal; s=0; s=1; s=2; s=3 y s=4

- **Caso a) No hay exclusión:** $\mathbf{0 \leq s \leq 2}$

Relación entre s y b

$$\int_0^1 (s \times p + b)\, dp = 1; \qquad \frac{s}{2}p^2 + bp\Big]_0^1 = 1$$

$$s = 2(1 - b); \quad b = 1 - \frac{s}{2}. \qquad (3.2)$$

La ecuación de la recta es:

$$V(p) = s \times p - \frac{s}{2} + 1 = s \times p + \left(\frac{2 - s}{2}\right). \qquad (3.3)$$

Mediante una sencilla transformación queda:

$$(V(p) - 1) = s \times \left(p - \frac{1}{2}\right)$$

que es la ecuación del haz de rectas con pendiente s que pasan por el punto (1/2, 1).

Las ecuaciones de las rectas del gráfico 15 con $s = 0$ y $s = 1$, son respectivamente:

$$V(p) = 1 \qquad Vp = p + \frac{1}{2}.$$

Momento de primer orden respecto al eje $\mathbf{p = 1/2}$

$$\int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)(s \times p + b)\, dp =$$

$$= \int_0^1 \left(s \times p^2 - \frac{s}{2}p + bp - \frac{b}{2}\right) dp =$$

$$= \left(\frac{s}{3}p^3 - \frac{s}{4}p^2 + \frac{b}{2}p^2 - \frac{b}{2}p\right)\Big]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{s}{12}$$

$$M_{1/2} = \frac{s}{12}. \qquad (3.4)$$

- **Caso b) Hay exclusión: $\boldsymbol{s \geq 2}$**

  Relación entre s y b:

El punto de corte de la recta con el eje p, que denotamos por p_0, es:

$$s \times p_0 + b = 0; \quad p_0 = -\frac{b}{s}$$

p_0 es un número positivo que toma valores entre 0 y 1 ya que b es negativo en este caso.

Como no se consideran rentas negativas, la integral empieza en p_0:

$$\int_{p_0}^1 (s \times p + b)\, dp = 1; \qquad \left(\frac{s}{2} \times p^2 + b \times p\right)\Big]\begin{matrix}1\\p_0\end{matrix} = 1$$

$$\frac{s}{2} + b - \frac{s}{2}\left(-\frac{b}{s}\right)^2 - b\left(-\frac{b}{s}\right) = 1; \qquad \frac{b^2}{2s} + b + \left(\frac{s}{2} - 1\right) = 0$$

De las dos soluciones: $b = -s \pm \sqrt{2s}$

nos quedamos con:

$$b = -s + \sqrt{2s} \qquad (3.5)$$

donde $b = 0$ para $s = 2$. Sustituyendo en (3.1) se obtiene la ecuación de la recta:

$$V(p) = \begin{cases} 0 & 0 \leq p \leq p_0 \\ s \times p - s + \sqrt{2s} & p_0 < p \leq 1 \end{cases} \qquad (3.6)$$

Las ecuaciones de las rectas con $s = 2$, $s = 3$ y $s = 4$ que se han representado en el gráfico 15 son respectivamente:

$$V(p) = 2p; \qquad V(p) = 3p - 3 + \sqrt{2 \times 3}$$

$$V(p) = 4p - 4 + \sqrt{2 \times 4}\,.$$

- **Momento de primer orden respecto al eje $\mathbf{p = 1/2}$**

Como la recta forma un triángulo con el eje p y la recta $p = 1$, el momento se puede calcular como el producto del área del triángulo por la distancia de su centroide al eje $p = 1/2$.

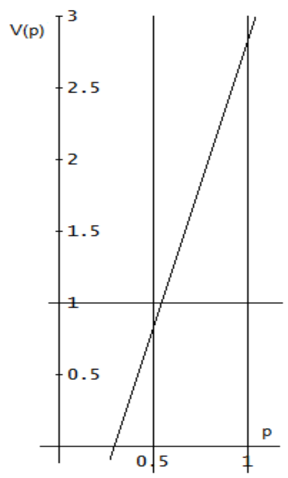

Gráfico 16. Función de densidad lineal con exclusión

El punto de corte de la recta con el eje p es:

$$V(p) = s \times p - s + \sqrt{2s} = 0$$

Cuya solución es:

$$p = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}.$$

La abscisa del centroide del triángulo es:

$$p_c = \frac{1}{3}\left(1 + 1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}\right)\right) = 1 - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s}}.$$

El área y la distancia entre el centroide y la recta $p = 1/2$ es:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{s}}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{s}}.$$

El momento respecto a la recta $p = 1/2$, es esta distancia multiplicada por área del triángulo, que es igual a 1 por ser una función de densidad.

$$M_{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{s}}. \qquad (3.7)$$

Proposición: Cuando no hay exclusión y los cálculos se hacen sobre la función de densidad lineal de Lorenz equivalente, $V_l(p)$,

$$R_i = \frac{s}{8} \ . \qquad (3.8)$$

Demostración: Por la definición de Ri y por (3.3)

$$R_i = \int_{P_e}^{1} (V(p) - 1)dp = \int_{1/2}^{1} \left(sp + \left(\frac{2-s}{2}\right) - 1\right) dp = \frac{s}{8}.$$

3.4.2 Regla del 1/6

Proposición: Cuando no hay exclusión y los cálculos se hacen sobre la función de densidad lineal de Lorenz equivalente, $V_l(p)$, el punto de equidad está siempre en el centro de la población y los umbrales alto y bajo, siempre a 1/6 de los extremos respectivos.

Demostración: Según se ha visto en (3.3):

$$V(p) = s \times p + \left(\frac{2-s}{2}\right)$$

$$V(\mathrm{P_e}) = s \times \mathrm{P_e} + \left(\frac{2-s}{2}\right) = 1$$

cuya solución es: $P_e = 1/2$.

Al no haber exclusión, Ri forma siempre dos triángulos rectángulos entre las rectas $X = 0$ y $Y = 1$ en la izquierda y entre la recta $X = 1$ y $Y = 1$ a la derecha. Los centroides de los triángulos son la media aritmética de sus vértices luego para la izquierda:

$$P_b = \frac{(0 + 0 + 0{,}5)}{3} = \frac{1}{6}.$$

Igualmente para la derecha:

$$P_a = \frac{(1 + 1 + 0{,}5)}{3} = \frac{5}{6}.$$

Su distancia al extremo es:

$$1 - P_a = \frac{1}{6}.$$

Esta regla puede ser un criterio simple y consistente para definir umbrales a priori cuando se sabe que no hay exclusión.

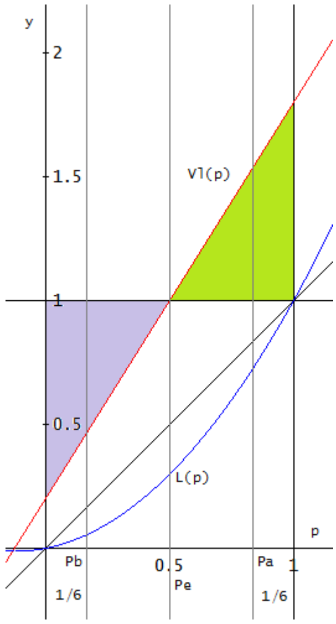

Gráfico 17. Regla de 1/6 para umbrales

3.4.3 Principio de Equivalencia para *V(p)*

- **Definición de equivalencia**

El momento respecto al eje $p = 1/2$ de una función es una característica de la misma que es única y existe siempre. Este momento es un número que varía desde cero para una distribución equitativa, $V(p) = 1$, donde la parte a la izquierda y a la derecha de $p = 1/2$ son iguales y se compensan, hasta el valor 1/2 que equivale al caso en el que toda la distribución de área igual a uno, está en la recta $p = 1$ que está a una distancia 1/2 del eje $p = 1/2$.

Diremos que dos funciones son equivalentes cuando tienen el mismo momento respecto del eje $p = 1/2$.

En este epígrafe, tomando como punto de partida que dos densidades de Lorenz son equivalentes si poseen el mismo momento de primer orden respecto a $p = 1/2$, se demuestra que cualquier función de densidad de Lorenz $V(p)$, es equivalente, a efectos de desigualdad, a una función de densidad lineal de Lorenz $V_l(p)$. Esta función $V_l(p)$ existe siempre y es única para cada $V(p)$. Ambas funciones tienen el mismo momento respecto al eje $p = 1/2$. A esta función $V_l(p)$,se le llama función de densidad lineal equivalente de $V(p)$.

- **Función de densidad lineal equivalente $V_l(p)$**

Proposición: Una función de densidad de Lorenz $V(p)$ tiene una función de densidad lineal equivalente, $V_l(p)$, única que viene dada por:

$$V_l(p) = \begin{cases} 12M \times p + (1-6M); & 0 \leq \mathrm{M} \leq \dfrac{1}{6} \\ s \times p - s + \sqrt{2s}; & \dfrac{1}{6} \leq \mathrm{M} \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.9}$$

donde

$$M = M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp$$

$$s = \frac{8}{9(1-2M)^2}.$$

Demostración: Sea una función de densidad de Lorenz $V(p)$, su momento respecto al eje $p = 1/2$, como se ha visto en el apartado 3.8 es:

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp$$

que aquí se llamará M por simplicidad.

- **Caso a):** Si no hay exclusión, como se ha visto en (3.3) y (3.4), la recta:

$$V_l(p) = s * p - \frac{s}{2} + 1 = s * p + \left(\frac{2-s}{2}\right)$$

de pendiente s:

$$s = 12\,M$$

y ordenada en el origen:

$$\left(\frac{2-s}{2}\right)=\left(\frac{2-12\,M}{2}\right)=(1-6\text{ M})$$

tiene el mismo momento respecto al eje $p\ =\ 1/2$ que $V(p)$.

Sustituyendo s en $V_l\ (p)$ se tiene

$$V_l(p)=12\,M\times p+(1-6\,M)\,.$$

Esta recta es única ya que cualquier otra recta que tenga el mismo momento, por (3.4) tendría que tener la misma pendiente y por (3.2) la misma ordenada en el origen, luego sería la misma recta.

- **Caso b):** Si hay exclusión, como se ha visto en (3.6) y (3.7), la recta:

$$V_l(p)=s\times p-s+\sqrt{2s}$$

cuya pendiente s, se obtiene despejando la ecuación (3.7):

$$\text{M}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{s}}$$

$$s=\frac{8}{9(1-2M)^2}\,.$$

Para $M\ <\ 1/2$

$$V_l(p)=\frac{8}{9(1-2M)^2}\times p-\frac{8}{9(1-2M)^2}+\frac{4}{3(1-2M)}$$

tiene el mismo momento respecto al eje $p=1/2$ que $V(p)$.

Esta recta es única ya que cualquier otra recta que tenga el mismo momento, por (3.7) tendría que tener la misma pendiente y por (3.5) la misma ordenada en el origen, luego sería la misma recta

Como se ha visto en el epígrafe 3.4.1, el límite de la exclusión es para $s=2$, que por (3.4) e igualmente por (3.7), corresponde a $M=1/6$.

Resumiendo, una función de densidad de Lorenz $V(p)$ tiene una función de densidad de Lorenz lineal equivalente $V_l(p)$ única que viene dada por:

$$V_l(p) = \begin{cases} 12M \times p + (1 - 6M); & 0 \leq \mathrm{M} \leq \dfrac{1}{6} \\ s \times p - s + \sqrt{2s}; & \dfrac{1}{6} \leq \mathrm{M} \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (3.9)$$

donde

$$s = \frac{8}{9(1 - 2M)^2}.$$

En función del índice de Gini, teniendo en cuenta que este se puede expresar como $G = 2\,M$, (véase epígrafe 3.5.2 de esta memoria) $V_l(p)$ se puede escribir:

$$V_l(p) = \begin{cases} 6G \times p + (1 - 3G); & 0 \leq \mathrm{G} \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{8 \times (p - 1)}{9(1 - \mathrm{G})^2} + \dfrac{4(1 - 3G)}{9(1 - \mathrm{G})^2}; & \dfrac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases}. \quad (3.10)$$

A continuación se demuestra que ambas funciones tienen el mismo momento respecto al eje $p = 1/2$.

Según (3.9) se distinguen dos casos:

Caso a) $0 \leq \mathrm{M} \leq 1/6$

$$V_l(p) = 12M * p + (1 - 6M)$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V_l(p)dp =$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) \left(12M \times p + (1 - 6M)\right)dp =$$

$$= \left.\frac{12Mp^3}{3}\right]_0^1 + \left.\frac{(1-12M)p^2}{2}\right]_0^1 + \left.\frac{(6M-1)p^1}{2}\right]_0^1 = \mathrm{M}.$$

Caso b) $1/6 \leq \mathrm{M} \leq 1/2$

$$V_l(p) = \frac{8 \times p}{9(1-2\mathrm{M})^2} + \frac{4(1-6M)}{9(1-2\mathrm{M})^2}$$

$$V_l(\mathrm{P_o}) = 0$$

$$\mathrm{P_o} = \frac{(6\mathrm{M}-1)}{2}$$

$$M_{1/2} = \int_{\mathrm{P0}}^{1} \left(p - \frac{1}{2}\right) V_l(p)dp = \mathrm{M}.$$

3.4.4 Funciones lineales equivalentes de funciones conocidas

Para calcular la función lineal equivalente se necesita conocer previamente el momento respecto al eje $p = 1/2$. Según el epígrafe 3.2.8 y sustituir su valor en (3.9).

- **Distribución exponencial**

$$V(p) = -Ln(1-p)$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(-Ln(1-p)\right)dp = \frac{1}{4}$$

$$V_l(p) = \frac{8}{9(1-2M)^2} \times p - \frac{8}{9(1-2M)^2} + \frac{4}{3(1-2M)} =$$

$$V_l(p) = \frac{32}{9} \times p - \frac{8}{9}$$

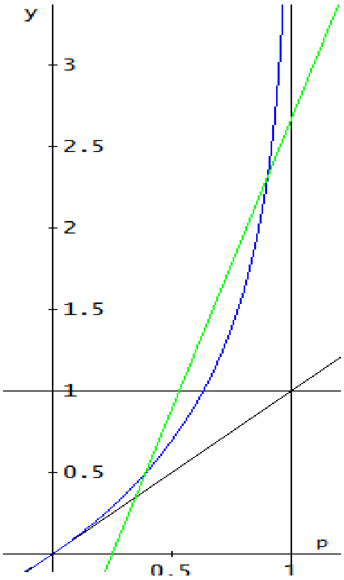

Gráfico 18. V(p) exponencial y lineal equivalente

- **Distribución exponencial general**

$$V(p)=\frac{a\lambda-Ln(1-p)}{a\lambda+1}$$

$$M_{1/2}=\int_0^1\left(p-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a\lambda-Ln(1-p)}{a\lambda+1}\right)dp=\frac{1}{4(a\lambda+1)}$$

En función del valor de $a\lambda$ hay que tomar una u otra ecuación en (3.9)

$$\frac{1}{4(a\lambda+1)}=\frac{1}{6}$$

$$a\lambda=\frac{1}{2}$$

$$V_l(p)=\begin{cases}12M\times p+(1-6M); & 0\leq \mathrm{M}\ \leq\frac{1}{6}\\ s\times p-s+\sqrt{2s}; & \frac{1}{6}\leq \mathrm{M}\ \leq\frac{1}{2}\end{cases}$$

donde

$$s=\frac{8}{9(1-2M)^2}$$

luego

$$V_l(p)=\begin{cases}1+\dfrac{6p-3}{2(a\lambda+1)}; & \dfrac{1}{2}\leq a\lambda\\ \dfrac{32p\,(a\lambda+1)^2-8(2a\lambda-1)(a\lambda+1)}{9(2a\lambda+1)^2}; & a\lambda\leq\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

Para

$$a\lambda=\frac{1}{2}$$

se tiene:

$V_l(p)=2p$ Este es el límite de la exclusión.

Ejemplo 1: $a\lambda=\frac{1}{4}$

$$V1(p)=\frac{a\lambda-Ln(1-p)}{a\lambda+1}=\frac{1-4\text{Ln}\,(1-p)}{5}$$

$$V_l1(p)=\frac{32p\,(a\lambda+1)^2-8(2a\lambda-1)(a\lambda+1)}{9(2a\lambda+1)^2}=\frac{10p-1}{4}$$

Ejemplo 2: $a\lambda=\frac{1}{2}$

$$V2(p)=\frac{a\lambda-Ln(1-p)}{a\lambda+1}=\frac{1-2\text{Ln}\,(1-p)}{3}$$

$$V_l2(p)=2\text{p}$$

Ejemplo 3: $a\lambda=1$

$$V3(p)=\frac{a\lambda-Ln(1-p)}{a\lambda+1}=\frac{1-\text{Ln}\,(1-p)}{2}$$

$$V_l3(p)=1+\frac{6p-3}{2(a\lambda+1)}=\frac{6p+1}{4}$$

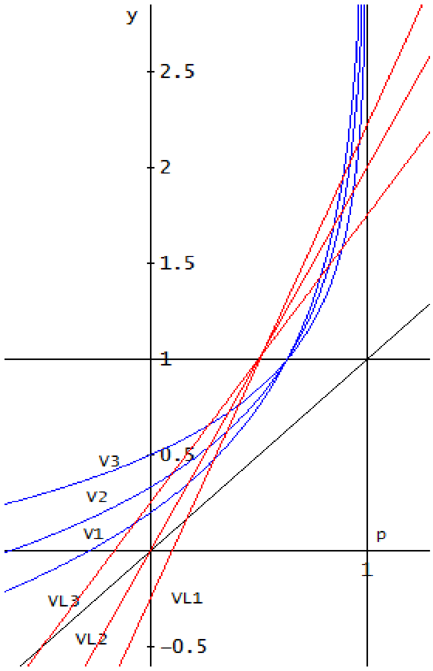

Gráfico 19. V(p) exponencial general y lineal equivalente

- **Distribución uniforme**

$$V(p) = \frac{2(\theta p + a)}{2a + \theta}$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2(\theta p + a)}{2a + \theta}\right) dp = \frac{\theta}{6(2a + \theta)}$$

$$V_l(p) = \begin{cases} 12M \times p + (1 - 6M); & 0 \leq \mathrm{M} \leq \dfrac{1}{6} \\ s \times p - s + \sqrt{2s}; & \dfrac{1}{6} \leq \mathrm{M} \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

donde

$$s = \frac{8}{9(1 - 2M)^2}$$

Si sustituimos el valor de M en $V_l(p)$ obtenemos $V(p)$ como era de esperar, ya que es una recta y su equivalente lineal es ella misma:

$$V_l(p) = 12\left(\frac{\theta}{6(2a+\theta)}\right)p + \left(1 - 6\left(\frac{\theta}{6(2a+\theta)}\right)\right) = \frac{2(\theta p + a)}{2a+\theta} = V(p)\,.$$

- **Distribución de Pareto**

$$V(p) = \frac{(\alpha-1)}{\alpha}(1-p)^{-1/\alpha}$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{(\alpha-1)}{\alpha}(1-p)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)dp$$

$$M_{1/2} = \frac{1}{4\alpha-2} \qquad\qquad con \quad \alpha > 1$$

En función del valor de α, se toma una u otra ecuación en (3.9).

$$\frac{1}{4\alpha-2} = \frac{1}{6}$$

$$\alpha = 2$$

$$V_l(p) = \begin{cases} 12M \times p + (1-6M); & 0 \leq \mathrm{M} \leq \frac{1}{6} \\ s \times p - s + \sqrt{2s}; & \frac{1}{6} \leq \mathrm{M} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

donde

$$s = \frac{8}{9(1-2M)^2}\,.$$

Luego sustituyendo el valor de M obtenido:

$$V_l(p) = \begin{cases} \dfrac{6p + 2(\alpha-2)}{2\alpha-1}; & 2 \leq \alpha \\ \dfrac{2p\,(2\alpha-1)^2 + 2(\alpha-1)(\alpha-2)}{9(\alpha-1)^2}; & \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Para $\alpha = 2$ se tiene:

$V_l(p) = 2\mathrm{p};$ Este es el límite de la exclusión.

Ejemplo 1: $\alpha = 1{,}5$

$$V1(p) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha}(1-p)^{-1/\alpha} = \frac{1}{3}(1-p)^{-2/3}$$

$$V_l1(p) = \frac{2p\,(2 \times 1{,}5 - 1)^2 + 2(1{,}5-1)(1{,}5-2)}{9(1{,}5-1)^2} = \frac{16p-1}{7}$$

Ejemplo 2: $\alpha = 2$

$$V2(p) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha}(1-p)^{-1/\alpha} = \frac{1}{2}(1-p)^{-1/2}$$

$V_l2(p) = \frac{2p\,(2\times2-1)^2+2(2-1)(2-2)}{9(2-1)^2} = 2\text{p}.$

Ejemplo 3: $\alpha = 2{,}5$

$$V3(p) = \frac{(\alpha - 1)}{\alpha}(1-p)^{-1/\alpha} = \frac{3}{5}(1-p)^{-2/5}$$

$$V_l3(p) = \frac{6p + 2(2{,}5-2)}{2 \times 2{,}5 - 1} = \frac{6p+1}{4}$$

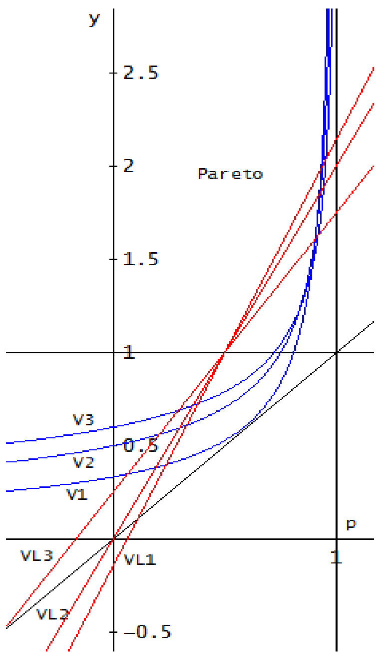

Gráfico 20. V(p) de Pareto y lineal equivalente

3.4.5 **Principio de Equivalencia para L(p)**

En el segundo capítulo de esta memoria se definió el índice de Gini mediante la expresión:

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp\,.$$

La siguiente Proposición relaciona las funciones de Lorenz equivalentes cuadráticas con el índice de Gini.

Proposición: Dada una función de Lorenz L(p) cualquiera, siempre existe una y solo una función de Lorenz equivalente L_2(p),que es cuadrática y tiene el mismo índice de Gini que ella.

Demostración: Más adelante, (véase epígrafe 3.5.2 de esta memoria), se demostrará que el índice de Gini es igual al doble del momento de la función de densidad de Lorenz $V(p)$, respecto al eje $p = 1/2$:

$$G = 2\,M.$$

Con esto y teniendo en cuenta que *V(p)* es la derivada de *L(p),* la proposición queda demostrada. Para obtener la ecuación de la función de Lorenz cuadrática equivalente, basta con hacer la integración de (3.9), sustituyendo previamente M por G/2.

$$V_l(p) = \begin{cases} 6G \times p + (1 - 3G); & 0 \leq \mathrm{G} \leq \frac{1}{3} \\ s \times p - s + \sqrt{2s}; & \frac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases}$$

$$V_l(p) = \begin{cases} 6G \times p + (1 - 3G); & 0 \leq \mathrm{G} \leq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{9(1-\mathrm{G})^2} \times p + \frac{4(1-3G)}{9(1-\mathrm{G})^2}; & \frac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases} \quad .(3.10)$$

De esta forma se pone de manifiesto que dos funciones de densidad de Lorenz equivalentes tienen el mismo índice de Gini.

Si se realiza la integral de (3.10) se tiene:

$$L_2(p) = \begin{cases} 3G \times p^2 + (1 - 3\,G) \times p; & 0 \leq \mathrm{G} \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{s \times p^2}{2} + \left(-s + \sqrt{2s}\right) \times p + Cte; & \dfrac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases}$$

siendo

$$s = \frac{8}{9(1 - \mathrm{G})^2}.$$

La constante de integración tiene que tener un valor tal que

$$L_2(1) = 1$$

luego:

$$\frac{s \times 1}{2} + \left(-s + \sqrt{2s}\right) \times 1 + Cte = 1$$

$$Cte = \frac{s}{2} - \sqrt{2s} + 1$$

y sustituyendo en (3.10) resulta:

$$L_2(p) = \begin{cases} 3Gp^2 + (1 - 3\,G)p; & 0 \leq \mathrm{G} \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{s \times p^2}{2} + \left(-s + \sqrt{2s}\right) \times p + \left(\dfrac{s}{2} - \sqrt{2s} + 1\right); & \dfrac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases}$$

$$L_2(p) = \begin{cases} 3Gp^2 + (1 - 3G)p; & 0 \leq \mathrm{G} \leq \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{9(1-G)^2}\right)(4p^2 + 4(1 - 3G)p + (1 - 3G)^2) & \frac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases}.$$

Esta es la función cuadrática que es equivalente, a efectos de desigualdad, a cualquier otra curva de Lorenz, cualquiera que sea su ecuación, pero con el mismo índice de Gini.

Cuando no hay exclusión, la función cuadrática obtenida pasa por el origen pero cuando hay exclusión, esta función pasa por el punto de exclusión y por supuesto por el punto (1, 1). La curva de Lorenz en ese caso está compuesta por una recta, superpuesta al eje p de abscisas, que va desde el origen hasta el punto de exclusión y a partir de aquí por la función cuadrática obtenida.

Obsérvese que para $\mathrm{G} = \frac{1}{3}$

$$L_2(p) = p^2$$

En ambos casos este es el resultado que se espera obtener al aplicar la fórmula:

$$G = 1 - 2\int_0^1 p^2 dp = 1 - 2 \times \frac{p^3}{3}\bigg]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Este valor del índice de Gini y esta curva de Lorenz, son el límite que determina la existencia o no de exclusión. Para valores superiores de G, la ecuación de segundo grado ya no pasa por el origen, su punto de corte con el eje p de abscisas, va desplazándose desde 0 hasta 1 conforme G aumenta, llegando a 1 para $G = 1$ y convirtiéndose en la recta vertical $p = 1$.

Veamos dos ejemplos, uno sin excluidos y otro con excluidos.

Ejemplo 1: Sea $L(p)$ una función de Pareto con $\alpha = 2{,}5$:

$$L(p) = 1 - (1-p)^{\frac{(2.5-1)}{2.5}} = 1 - (1-p)^{\frac{3}{5}}$$

$$V(p) = \frac{2.5 - 1}{2.5}(1-p)^{-\frac{1}{2.5}} = \frac{3}{5}(1-p)^{-\frac{2}{5}}$$

Ambas están representadas en el gráfico 21.

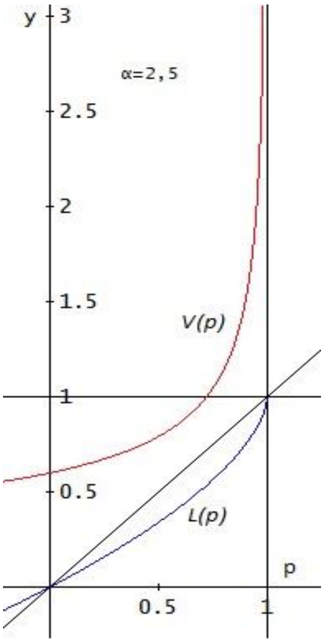

Gráfico 21. Distribución de Pareto con α =2,5

Vamos a calcular sus funciones lineal y cuadrática equivalentes. El momento de $V(p)$ respecto al eje $p = 1/2$ es según (3.4.4):

$$M_{1/2} = \frac{1}{4\alpha - 2} = \frac{1}{4 \times 2{,}5 - 2} = \frac{1}{8}.$$

Teniendo en cuenta (3.9):

$$V_l(p) = 12M \times p + (1 - 6M) = \frac{3}{2} \times p + \frac{1}{4} = \frac{6p + 1}{4}.$$

El índice de Gini, según (3.12) es:

$$G = 2 \times M = \frac{1}{4}.$$

Luego según (3.4):

$$L_2(p) = 3Gp^2 + (1 - 3G)p = \frac{3}{4}\, p^2 + \frac{1}{4}\, p = \frac{p(3p + 1)}{4}.$$

Ambas se han representado en el gráfico 22.

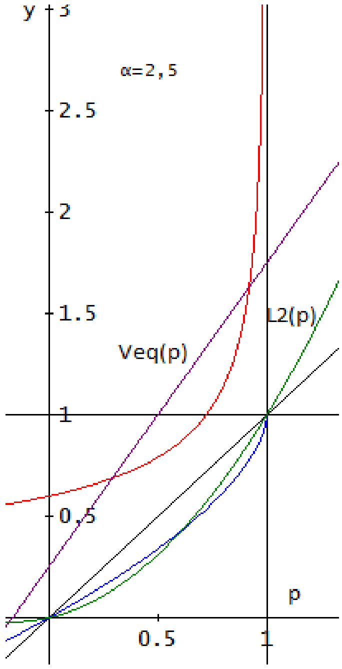

Gráfico 22. Funciones lineal y cuadrática equivalentes de Pareto

Por tanto, a efectos de desigualdad, la curva de Lorenz de Pareto:

$$L(p) = 1 - (1-p)^{\frac{(2.5-1)}{2.5}} = 1 - (1-p)^{\frac{3}{5}}$$

y la curva cuadrática:

$$L_2(p) = \frac{3}{4}\,p^2 + \frac{1}{4}\,p = \frac{p(3p+1)}{4}$$

son equivalentes.

Igualmente, son equivalentes, a efectos de desigualdad, la función de densidad de Lorenz de Pareto:

$$V(p) = \frac{3}{5}(1-p)^{-\frac{2}{5}}$$

y la recta:

$$V_l(p) = \frac{3}{2} \times p + \frac{1}{4} = \frac{6p+1}{4}.$$

En el gráfico 22 puede apreciarse como las áreas debajo de las respectivas curvas son las mismas.

Ejemplo 2: Sea $L(p)$ la curva de Lorenz polinómica de séptimo grado obtenida en el ejemplo 3 del epígrafe 3.3.

$$L(p) = \frac{7p^7 + 4p^3 + 2p^2 + 3p}{16}.$$

Vamos a calcular su índice de Gini:

$$\int_0^1 \left(\frac{7p^7 + 4p^3 + 2p^2 + 3p}{16} \right) \mathrm{dp} = \frac{97}{384}$$

$$G = 1 - 2 \times \frac{97}{384} = \frac{95}{192} \approx 0{,}494792\,.$$

Para obtener la curva cuadrática, sustituimos este valor de G obtenido en (3.10), teniendo en cuenta que G > 1/3.

$$L_2(p) = \frac{16384\,p^2 - 7936\,p + 961}{9409}.$$

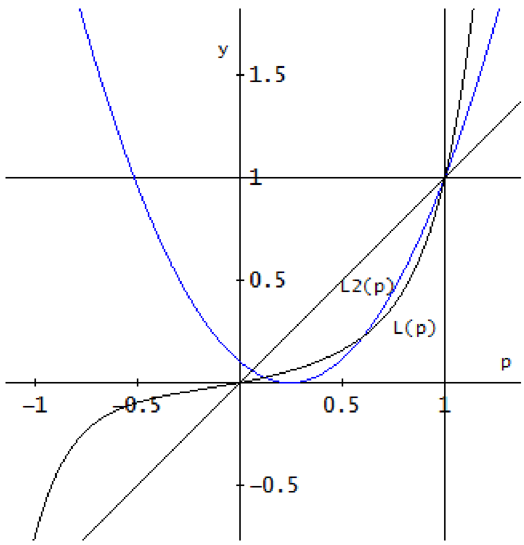

Gráfico 23. Curva de Lorenz de 7º grado y su equivalente de 2º

Las curvas de Lorenz de séptimo grado y su cuadrática equivalente, se representan en el gráfico 23, donde para que se vea la forma de los polinomios, se han dibujado también fuera del dominio de definición, [0,1].

Obsérvese en el gráfico que la curva cuadrática es tangente al eje p de abscisas. El punto de tangencia es exactamente el punto de exclusión $P_{o.}$ Desde el origen hasta ese punto, la curva de Lorenz es una recta coincidente con el eje de abscisas.

Para calcular P_o hay que buscar la raíz doble de la curva cuadrática.

$$\frac{16384\, P_0^2 - 7936\, P_o + 961}{9409} = 0\,.$$

$$P_o = \frac{31}{128} \approx 0{,}242186$$

hay un 24,22% de exclusión.

Vamos a calcular para este ejemplo, $V(p)$ y su equivalente lineal.

$$V(p) = \frac{1}{16}\frac{\mathrm{d}(7p^7 + 4p^3 + 2p^2 + 3p)}{\mathrm{dp}} = \frac{49p^6 + 12p^2 + 4\mathrm{p} + 3}{16}$$

Su función lineal equivalente, sustituyendo el valor de G en (3.9), se obtiene:

$$V_l(p) = \frac{8}{9\left(1 - \frac{95}{192}\right)^2} \times p + \frac{4\left(1 - 3 \times \frac{95}{192}\right)}{9\left(1 - \frac{95}{192}\right)^2} =$$

$$V_l(p) = \frac{32768}{9409} \times p - \frac{7936}{9409}\,.$$

esta ecuación se puede obtener también directamente, derivando la curva cuadrática obtenida:

$$V_l(p) = \frac{d\big(L_2(p)\big)}{dp} = \frac{256 \times (128\,\mathrm{p} - 31)}{9409}\,.$$

En el gráfico 24 se representa todas las curvas obtenidas.

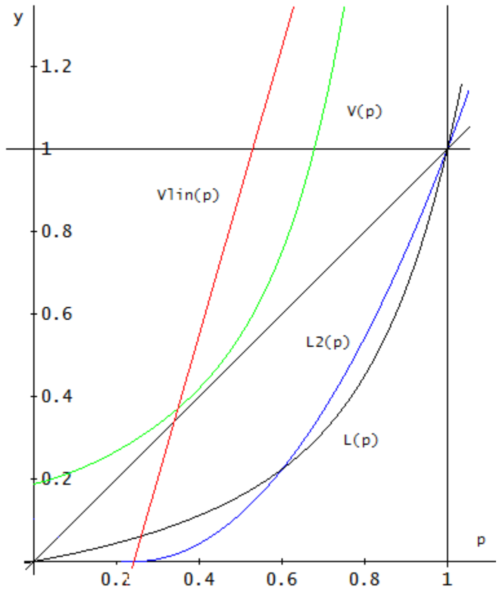

Gráfico 24. Curva de Lorenz cuadrática y lineal equivalentes

Resumiendo, la curva de Lorenz y su función de densidad:

$$L(p) = \frac{7p^7 + 4p^3 + 2p^2 + 3p}{16}$$

$$V(p) = \frac{49p^6 + 12p^2 + 4\mathrm{p} + 3}{16}$$

por el principio de equivalencia, tienen una curva de Lorenz cuadrática y una función de densidad lineal de Lorenz equivalentes, que vienen dadas por:

$$L_2(p) = \frac{16384\, p^2 - 7936\, p + 961}{9409}$$

$$V_l(p) = \frac{32768}{9409} \times p - \frac{7936}{9409}$$

que tienen los mismos índices de desigualdad. Las equivalentes, además de ser más sencillas, nos indican, en el corte con el eje de abscisas, el punto de exclusión de la distribución de renta correspondiente.

3.4.6 Funciones cuadráticas equivalentes de funciones de Lorenz

- **Distribución exponencial**

$$L(p) = p + (1-p)Ln(1-p)$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(-Ln(1-p)\right)dp = \frac{1}{4}$$

$$G = 2M = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$L_2(p) = \begin{cases} 3Gp^2 + (1-3G)p & 0 \leq \mathrm{G} \leq \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{9(1-G)^2}\right)\left(4p^2 + 4(1-3G)p + (1-3G)^2\right) & \frac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$L_2(p) = \left(\frac{1}{9(1-0{,}5)^2}\right)\left(4p^2 + 4(1-3 \times 0{,}5)p + (1-3 \times 0{,}5)^2\right)$$

$$L_2(p) = \frac{16p^2 - 8p + 1}{9}$$

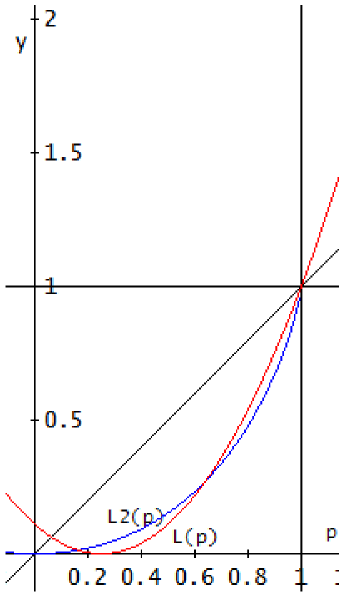

Gráfico 25. C. de Lorenz exponencial y su cuadrática equivalente

- **Distribución exponencial general**

$$L(p) = p + (1 + \lambda a)^{-1}(1 - p)Ln(1 - p)$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{a\lambda - Ln(1-p)}{a\lambda + 1}\right) dp = \frac{1}{4(a\lambda + 1)}$$

$$L_2(p) = \begin{cases} 3Gp^2 + (1 - 3G)p & 0 \leq \mathrm{G} \leq \frac{1}{3} \\ \left(\frac{1}{9(1-G)^2}\right)(4p^2 + 4(1 - 3G)p + (1 - 3G)^2) & \frac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$G = 2M = 2 \times \frac{1}{4(a\lambda + 1)} = \frac{1}{2(a\lambda + 1)}$$

$$\frac{1}{2(a\lambda + 1)} = \frac{1}{3}$$

$$a\lambda = \frac{1}{2}$$

Es el nuevo límite al cambiar las variables. Hay dos casos:

$$L_2(p) = 3\left(\frac{1}{2(a\lambda + 1)}\right)p^2 + \left(1 - 3\left(\frac{1}{2(a\lambda + 1)}\right)\right)p \qquad \frac{1}{2} \leq a\lambda$$

$$L_2(p) = \left(\frac{1}{9\left(1 - \left(\frac{1}{2(a\lambda+1)}\right)\right)^2}\right)\left(4p^2 + 4\left(1 - 3\left(\frac{1}{2(a\lambda + 1)}\right)\right)p + \left(1 - 3\left(\frac{1}{2(a\lambda + 1)}\right)\right)^2\right) \qquad a\lambda \leq \frac{1}{2}$$

Simplificando:

$$L_2(p) = \frac{3\,p^2 + (2a\lambda - 1)\,p}{2(a\lambda + 1)} \qquad \frac{1}{2} \leq a\lambda$$

$$L_2(p) = \frac{16\,p^2(a\lambda + 1)^2 + 8p(2a\lambda + 1)(a\lambda + 1) + (2a\lambda - 1)^2}{9(2a\lambda + 1)^2} \quad a\lambda \leq \frac{1}{2}$$

Para $a\lambda = \frac{1}{2}$

$$L_2(p) = p^2 \, .$$

En el gráfico 26 se representan $L(p)$ y $L_2(p)$ para $a\lambda = 1/2$.

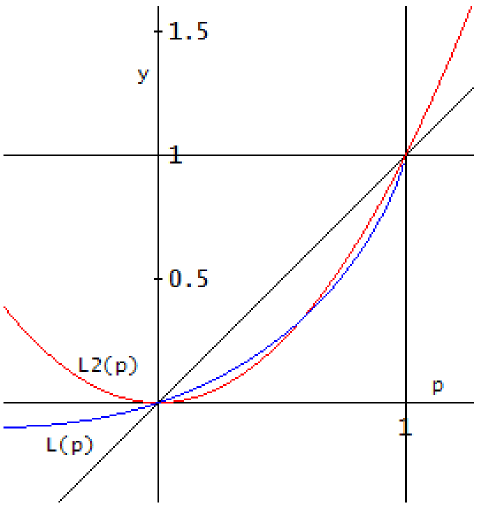

Gráfico 26. C. Lorenz exp. general y su cuadrática equivalente

- **Distribución uniforme**

$$L(p) = \frac{ap + \left(\frac{\theta p^2}{2}\right)}{a + \left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{2(\theta p + a)}{2a + \theta}\right) dp = \frac{\theta}{6(2a + \theta)}$$

$$L_2(p) = \begin{cases} 3Gp^2 + (1 - 3G)p & 0 \leq \mathrm{G} \leq \dfrac{1}{3} \\ \left(\dfrac{1}{9(1 - G)^2}\right)(4p^2 + 4(1 - 3G)p + (1 - 3G)^2) & \dfrac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1 \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$G = 2M = 2 \times \frac{\theta}{6(2a + \theta)} = \frac{\theta}{3(2a + \theta)}$$

$$G = \frac{1}{3} \rightarrow a = 0$$

$$L_2(p) = \frac{\theta\, p^2 + 2a\, p}{2a + \theta} = L(p) \qquad 0 \leq a$$

Para $a = 0$ se tiene:

$$L_2(p) = p^2 \,.$$

Obsérvese que como la curva de Lorenz es de segundo grado, coincide con su cuadrática.

- **Distribución de Pareto**

$$L(p) = 1 - (1-p)^{(\alpha-1)/\alpha}$$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{(\alpha-1)}{\alpha}(1-p)^{-\frac{1}{\alpha}}\right) dp$$

$$M_{1/2} = \frac{1}{4\alpha - 2} \qquad con \quad \alpha > 1$$

$$G = 2M = \frac{1}{2\alpha - 1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2\alpha - 1} \qquad \rightarrow \ \alpha = 2$$

$$L_2(p) = \begin{cases} 3Gp^2 + (1-3G)p & 0 \leq \mathrm{G} \ \leq \dfrac{1}{3} \\ \left(\dfrac{1}{9(1-G)^2}\right)(4p^2 + 4(1-3G)p + (1-3G)^2) & \dfrac{1}{3} \leq \mathrm{G} \ \leq 1 \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$L_2(p) = 3\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)p^2 + \left(1 - 3\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)\right)p \qquad 2 \leq \alpha$$

$$L_2(p) = \left(\frac{1}{9\left(1-\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)\right)^2}\right)\left(4p^2 + 4\left(1 - 3\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)\right)p\right) +$$

$$+\left(1 - 3\left(\frac{1}{2\alpha-1}\right)\right)^2 \quad 1 \leq \alpha \leq 2$$

$$L_2(p) = \begin{cases} \dfrac{3p^2 + (2\alpha - 4)p}{2\alpha - 1} & 2 \le \alpha \\ \dfrac{(2\alpha - 1)^2 p^2 + (2\alpha - 4)(2\alpha - 1)\mathrm{p} + (\alpha - 2)^2}{9(\alpha - 1)^2} & 1 \le \alpha \le 2 \end{cases}$$

Para $a = 2$, se tiene:

$$L_2(p) = p^2.$$

En el gráfico 27 se representan varios ejemplos de curvas de Lorenz de distribuciones de Pareto para distintos valores del parámetro, así como sus correspondientes funciones cuadráticas.

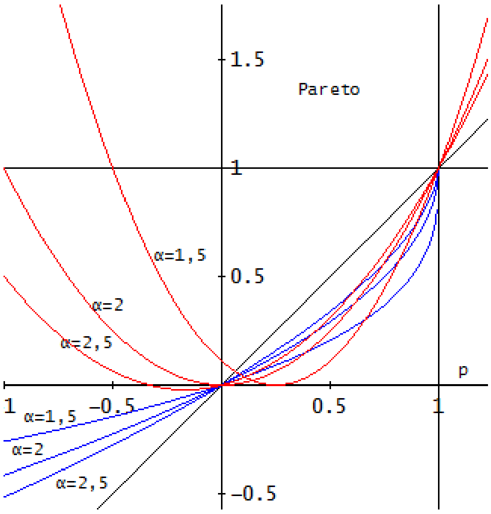

Gráfico 27. Curvas de Lorenz de Pareto y cuadráticas

3.5 Índice de desigualdad *V*

Dada una función de densidad de Lorenz $V(p)$, cuya función lineal equivalente es:

$$y = s \times p + b$$

se define un nuevo índice, V, para medir la desigualdad:

$$V = \frac{2}{\pi} Arctan(s)$$

donde s es la pendiente de la recta equivalente.

Este nuevo índice propuesto es intuitivo y posiblemente el más sencillo que se pueda construir. En un reparto de renta, excepto para el caso en el que hay equidistribución, hay diferencias de renta de unos individuos a otros. El efecto conjunto de todas esas diferencias de renta entre individuos, cuando se hace una descripción global a nivel de toda la población es lo que llamamos desigualdad. Es decir las diferencias individuales, cuando subimos de nivel individual al grupal y las consideramos todas de forma conjunta se convierten en desigualdad. La medida de la desigualdad es el intento de obtener un número o índice que represente para toda la población, el grado de esas diferencias individuales. Podemos decir que la desigualdad es la variable emergente de las diferencias de renta individuales. Un símil puede ser la temperatura de un gas que es una medida a nivel macroscópico de la energía cinética media de las moléculas que componen el gas.

Para construir este nuevo índice se procede de la siguiente forma. En primer lugar, dada una función de densidad de Lorenz $V(p)$ cualquiera, aplicando el principio de equivalencia, se obtiene una recta equivalente que cumpla dos condiciones: que tenga el mismo momento de primer orden respecto al eje $\mathrm{p} = 1/2$ que $V(p)$ y que sea una función de densidad. En segundo lugar, se mide el ángulo en radianes que forma esa recta con la horizontal. En tercer lugar, como el ángulo varía desde 0, horizontal, hasta π/2, vertical, se multiplica ese ángulo por 2/π con lo que se normaliza y la variación es de 0 a 1. Finalmente, y esta es la parte intuitiva, se asimila el concepto físico de desnivel de la curva que representa el densidad de Lorenz con el concepto económico de desigualdad ya que ese desnivel es la diferencia de renta, eje y, que tiene la población, eje x. Con esto se consigue además de la sencillez, un índice que por construcción varía linealmente.

Obsérvese que si los ángulos en vez de medirse en radianes, se miden en grados centesimales, V es exactamente la medida del ángulo que forma la recta equivalente con la horizontal, dividida entre cien.

3.5.1 Propiedades de *V*

Los índices de desigualdad han de cumplir unos requisitos para ser considerados como tales. Estas propiedades se describen de forma más detallada en el epígrafe de antecedentes de esta memoria. De estos requisitos o propiedades, como se indica en Lafuente (1994), los siete primeros son exigibles y los deben cumplir todos los índices que pretendan cuantificar la desigualdad, mientras que los restantes son deseables. A continuación se demuestra que el índice propuesto verifica los mencionados requisitos o propiedades. Adicionalmente se demuestra y se enfatiza la importancia de que el nuevo índice sea lineal.

- **Normalización**

El valor mínimo del índice se obtiene cuando todas las rentas coincidan. Es decir cuando la igualdad es total, el índice ha de ser igual a cero.

En el caso de equidistribución, $V(p) = 1$, la recta es horizontal y su pendiente es igual a cero.

$$V = \frac{2}{\pi}\, arctan(0) = 0$$

- **Maximalidad**

El índice converge a su valor máximo cuando la renta tiende a concentrarse en un único perceptor.

Cuando la renta tiende a concentrarse en un único perceptor, $V(p)$ tiende a la recta vertical $p = 1$ cuya pendiente s tiende a ∞.

$$V = \frac{2}{\pi} \lim_{x \to \infty} arctan(x) = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi}{2} = 1$$

- **Simetría**

Alteraciones en la posición de las rentas no afectan al valor del índice.

Cualquier función que represente un densidad de Lorenz en la que solo varíe la posición de los individuos que perciben esas rentas, al ordenarlas de menor a mayor renta, dan una misma función $V(p)$ y por consiguiente un mismo valor del índice V.

- **S-convexidad**

La medida de desigualdad asignada a una situación intermedia entre dos distribuciones toma un resultado comprendido entre los valores correspondientes a los casos extremos.

Dadas dos funciones de densidad de Lorenz $V_1(p)$ y $V_2(p)$, cuyas funciones lineales equivalentes tienen pendientes s_1 y s_2 respectivamente, con $s_1 < s_2$, y con índices de desigualdad V_1 y V_2, respectivamente:

$$V_1 = \frac{2}{\pi} arctan(s_1) < V_2 = \frac{2}{\pi} arctan(s_2)$$

Cualquier función $V_m(p)$ intermedia entre $V_1(p)$ y $V_2(p)$, tiene una función lineal equivalente con s_m comprendida entre s_1 y s_2.

Si $s_1 < s_m < s_2$, entonces el índice de desigualdad V_m, está comprendido entre los índices extremos:

$$V_1 = \frac{2}{\pi} arctan(s_1) < V_m = \frac{2}{\pi} arctan(s_m) < V_2 = \frac{2}{\pi} arctan(s_2)$$

- **Principio de Pigou-Dalton**

Siempre que se redistribuyen rentas desde individuos privilegiados hacia perceptores de rentas más bajas, el valor del índice de desigualdad disminuye.

Cualquier redistribución de rentas desde individuos privilegiados, situados a la derecha en la ordenación, hacia perceptores de rentas más bajas, situados a la izquierda, hace que el valor de p correspondiente a esa renta transferida, disminuya. Por consiguiente, la distancia al eje $p = 1/2$ disminuye, disminuyendo asimismo el valor del momento de primer orden respecto al eje $p = 1/2$ que como se observa en el epígrafe, 3.5.2, la relación con la pendiente de la recta equivalente s:

$$\int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(\mathrm{p})dp = \frac{\mathrm{s}}{12}$$

$$\int_0^1 \left(\mathrm{p} - \frac{1}{2}\right) V(\mathrm{p})dp = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mathrm{s}}}.$$

Se toma una ecuación u otra dependiendo de si hay o no exclusión, pero en ambos casos si disminuye p disminuye s y al disminuir s disminuye el índice V. Obsérvese que en el segundo caso el que s esté en un término negativo del segundo miembro de la ecuación se compensa al estar en el denominador.

- **Continuidad**

El índice es una función continua.

$$V = \frac{2}{\pi}\, arctan(\mathrm{s})$$

La función $arctan(x)$ es continua para todo el eje real, desde -∞ hasta +∞. Cuando s varía en el intervalo [0, +∞); se tiene que $arctan(s)$ varía en el intervalo [0, $\pi/2$] de forma continua.

- **Principio de población de Dalton**

El índice de desigualdad no depende del número de individuos que componen la población, sino únicamente de las proporciones de rentistas.

El dominio p de la función de densidad de Lorenz $V(p)$, es:

$$p = \frac{n_i}{N}$$

Siendo N el número total de individuos que componen la población. La variable p es relativa y varía en el intervalo [0, 1] independientemente del valor de N. Si las proporciones de rentistas son iguales, $V(p)$ es igual y V es igual. En consecuencia el índice de desigualdad V no depende de N.

- **Invariancia por homotecias**

Variaciones proporcionales en todas las rentas no afectan al valor del índice.

En el apartado 3.1 cuando se define la función de densidad de Lorenz $V(p)$, el eje de ordenadas y es relativo y representa el cociente de la renta individual entre la renta media. Si todas las rentas se multiplican por una constante k, la nueva media también vendrá multiplicada por esa constante, no variando el valor de y. Como $V(p)$ queda invariable, el índice V tampoco varía:

$$y = \frac{k \times r_i}{k \times \mu} = \frac{r_i}{\mu}$$

- **Varianza por traslaciones**

El valor de la medida de desigualdad disminuye cuando todas las rentas aumentan en una cantidad constante.

Sea y_1 el valor de la ordenada de una función de densidad de Lorenz $V(p)$. Según la definición de $V(p)$ dada en el apartado 3.1 se tiene:

$$y_1 = \frac{r_i}{\mu}$$

donde ri es la renta del individuo i y μ es la renta media dada por:

$$\mu = \frac{R}{N}$$

siendo R la suma de todas las rentas individuales y N el número total de individuos. A continuación se muestra el valor de la nueva ordenada y_2 cuando la renta de cada individuo aumenta en una cantidad constante k.

El nuevo valor de R, R' es ahora:

$$R' = R + k\,N$$

El nuevo valor de la renta media es:

$$\mu' = \frac{R'}{N} = \frac{R + k\,N}{N} = \mu + k$$

luego

$$y_2 = \frac{r_i + k}{\mu + k}.$$

En esta nueva distribución, el punto de equidad Pe queda invariable ya que corresponde al individuo que tiene una renta igual a la media.

Para el punto de equidad se tiene: $ri = \mu$ luego $y_1 = y_2 = 1$

Para los desfavorecidos donde $ri < \mu$ se tiene, dado un α positivo y $ri = \mu - \alpha$:

$$y_1 = \frac{r_i}{\mu} = \frac{\mu - \alpha}{\mu} = 1 - \frac{\alpha}{\mu}$$

$$y_2 = \frac{r_i + k}{\mu + k} = \frac{\mu - \alpha + k}{\mu + k} = 1 - \frac{\alpha}{\mu + k}$$

$$y_1 < y_2\,.$$

Para los favorecidos donde $ri > \mu$ se tiene, dado un α positivo; $ri = \mu + \alpha$:

$$y_1 = \frac{r_i}{\mu} = \frac{\mu + \alpha}{\mu} = 1 + \frac{\alpha}{\mu}$$

$$y_2 = \frac{r_i + k}{\mu + k} = \frac{\mu + \alpha + k}{\mu + k} = 1 + \frac{\alpha}{\mu + k}$$

$$y_1 > y_2 .$$

Luego el efecto de sumar una cantidad constante a las rentas es aumentar la renta relativa de los desfavorecidos y disminuir la renta relativa de los favorecidos con la consiguiente disminución del índice V. Cuando $V(p)$ es sustituido por su función lineal equivalente, tiene lugar un giro de la recta respecto al punto $(Pe,1)$ disminuyendo la pendiente s y por consiguiente el índice V.

- **Principio de transferencias regresivas**

El valor del índice experimenta un aumento cuando se transfieren rentas desde individuos situados en estratos bajos hacia otros de estratos superiores.

La demostración de este principio es similar a la del Principio de Pigou-Dalton. La única diferencia es que en este caso al transferir renta desde los individuos situados en estratos inferiores, situados a la izquierda en la ordenación, hacia otros de estratos superiores, situados a la derecha. El valor de p correspondiente a esa renta transferida aumenta, aumentando igualmente s y el índice V.

- **Linealidad de *V***

La linealidad es una propiedad que no es exigible pero es muy importante para cualquier escala de medida. La linealidad hace que incrementos iguales en la magnitud medida se traduzcan en incrementos iguales en el resultado de la medida. Las escalas no lineales, producen incrementos o decrementos no proporcionales con lo que tienen el efecto de sobreestimar o subestimar la variable medida, en este caso la desigualdad.

Al asociar la inclinación de la recta que representa las rentas relativas con la desigualdad y definir el índice de desigualdad V como el ángulo que forma la recta equivalente con la horizontal, es evidente que los ángulos varían linealmente con las inclinaciones y por consiguiente el índice así definido es lineal. Las pendientes sin embargo, al igual que la función tangente, no varían linealmente con el ángulo.

En el caso del índice de desigualdad *V*, la no linealidad de la pendiente s, se compensa exactamente con la no linealidad de la función arco tangente ya que son funciones inversas y su resultado es el ángulo que sí es lineal:

$$s = Tan(\theta)$$

$$V = \frac{2}{\pi} Arctan\,(s) = \frac{2}{\pi} Arctan\,\big(Tan\,(\theta)\big) = \frac{2}{\pi}\theta.$$

3.5.2 Relaciones de los umbrales con el índice de Gini

- **Relación de G con la renta de perfecta igualdad y los umbrales**

El índice de Gini se puede obtener a partir de la curva de Lorenz, $L(p)$, pero como se ha visto en el apartado anterior también se puede calcular utilizando la curva $V(p)$. Concretamente a partir de los umbrales y la renta de perfecta igualdad. Esta relación proporciona una nueva especificación del índice de Gini que se desarrolla a continuación.

Proposición: El índice de Gini asociado a una función de densidad de renta con renta de perfecta igualdad Ri, umbral alto, P_a y umbral bajo, P_b viene dado por:

$$G = 2\,Ri\,(\,Pa - Pb) \qquad (3.11)$$

Demostración: Ri, a la izquierda de Pe es el área que hay por debajo de la recta $p = 1$ y por encima de $V(p)$, es decir:

$$Ri = \int_0^{Pe} \big(1 - V(p)\big)dp.$$

Ri a la derecha de Pe es:

$$Ri = \int_{Pe}^{1} (V(p) - 1)dp.$$

El centroide p de Ri a la derecha es:

$$Pa = \frac{\int_{Pe}^{1} p\,(V(p)-1)dp}{Ri}.$$

El centroide p de Ri a la izquierda es:

$$Pb = \frac{\int_{0}^{Pe} p\,\left(1-V(p)\right)dp}{Ri}$$

$$2\,Ri\,(\,Pa - Pb) = 2\left(\int_{Pe}^{1} p\,(V(p)-1)dp - \int_{0}^{Pe} p\,\left(1-V(p)\right)dp\right) =$$

$$= 2\int_{0}^{1} p\,(V(p)-1)dp = 2\int_{0}^{1} p\,V(p)dp - 2\,\frac{p^2}{2}\Bigg]_0^1 =$$

$$= 2\int_{0}^{1} p\,V(p)dp - 1$$

integrando por partes: $\int udv = uv - \int vdu$

con $u = p$; $du = dp$; $dv = V(p)dp$; $v = \int V(p)dp = L(p)$

$$2Ri(Pa - Pb) = 2\left\{pL(p)]_0^1 - \int_0^1 L(p)dp\right\} - 1 = 2 \text{ x } 1 - 2\int_0^1 L(p)dp - 1 =$$

$$= 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = G$$

ya que $L(1) = 1$ y $L(0) = 0$.

Como se observa, a partir de los nuevos umbrales de población definidos, surge una nueva interpretación para el índice de Gini. El índice de Gini es el doble de la renta de perfecta igualdad multiplicada por la distancia entre los umbrales alto y bajo. Esta expresión alternativa indica que si se transfiriera una renta igual al doble del índice de Gini desde P_a hasta P_b, la nueva función de densidad obtenida sería equitativa.

- **Regla de los 4/3**

Proposición: Cuando no hay exclusión y los cálculos se hacen sobre la función de densidad lineal de Lorenz equivalente, $V_l(p)$, el índice de Gini es igual a los 4/3 de la renta de perfecta igualdad.

$$G = \frac{4\ R_i}{3}$$

Demostración: Según se ha visto en el apartado 3.4.2, cuando no hay exclusión:

$$(\ Pa - Pb) = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$$

por otro lado según (3.11):

$$G = 2\ Ri\ (\ Pa - Pb) = 2\ Ri \times \frac{2}{3} = \frac{4\ R_i}{3}.$$

- **El índice de Gini es igual al centroide vertical**

Proposición: Cuando no hay exclusión y los cálculos se hacen sobre la función de densidad lineal de Lorenz equivalente, $V_l(p)$, el índice de Gini es igual a la distancia entre el centroide del triángulo que forma el área de perfecta igualdad Ri y la recta .

Demostración: Si llamamos h a la altura del triángulo que forma Ri, como la base es igual a 1/2 se tiene que:

$$Ri = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times\ h = \frac{h}{4}$$

por otro lado el centroide vertical es la media aritmética de las coordenadas de sus vértices. Como la base del triángulo está sobre la recta de perfecta equidistribución $V_l(p) = 1$, el centroide vertical equivale a:

$$G = Centroide\ vertical = \frac{(0 + 0 + h))}{3} = \frac{h}{3} = \frac{4\ R_i}{3}$$

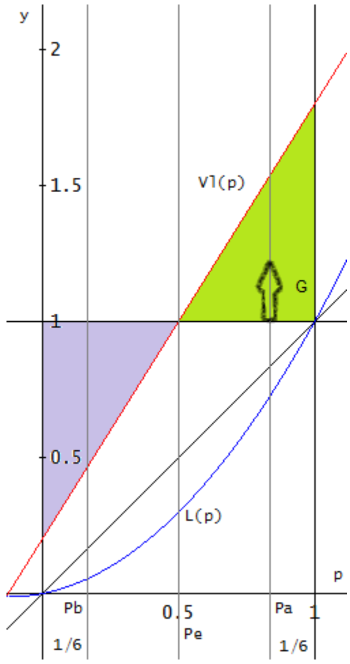

Gráfico 28. G es el centroide vertical

- **Relación de G con la función de densidad de Lorenz, *V(p)***

Proposición: El índice de Gini asociado a una función de densidad de Lorenz $V(p)$ es igual al doble del momento de la función de densidad de Lorenz, respecto al eje $p = 1/2$ o al centro de la población:

$$G = 2\int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp = 2\,\mathrm{M}_{1/2}\,. \qquad (3.12)$$

Demostración: El centro de la población es la recta $p = 1/2$

$$2\int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp = 2\int_0^1 p\,V(p)\,dp - \int_0^1 V(p)dp$$

teniendo en cuenta que *V(p)* es una función de densidad,

$$\int_0^1 V(p)dp = 1$$

y realizando la integral por partes la primera integral del segundo término: $\int udv = uv - \int vdu$ con $u = p,\quad du = dp,\quad dv = V(p)dp,$ y $v = \int V(p)dp = L(p)$, se tiene:

$$2\int_0^1 p\,V(p)\,dp = 2\left\{pL(p)]_0^1 - \int_0^1 L(p)dp\right\} = 2*1-2\int_0^1 L(p)dp$$

ya que $L(1) = 1$ y $L(0) = 0$. Por tanto,

$$2\int_0^1 \left(p-\frac{1}{2}\right)V(p)dp = (2\times 1 - 2\int_0^1 L(p)dp) - 1 = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = G$$

Ejemplo 1: Sea la función de densidad de Lorenz *V(p)*

$$V(p) = \frac{2p+1}{2}$$

$$L(p) = \int_0^p V(t)dt = \frac{p^2+p}{2}$$

$$2\int_0^1 \left(p-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p+1}{2}\right)dp = 2\int_0^1 \left(p^2-\frac{1}{4}\right)dp =$$

$$= 2\left\{\frac{p^3}{3}\bigg]_0^1 - \frac{p^1}{4}\bigg]_0^1\right\} = \frac{2}{3}-\frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

Por otro lado se tiene:

$$\int_0^1 L(p)dp = \int_0^1 \left(\frac{p^2+p}{2}\right)dp = \frac{p^3}{6}\bigg]_0^1 + \frac{p^2}{4}\bigg]_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = 1 - 2\times\frac{5}{12} = \frac{1}{6}$$

que coincide con el valor del momento.

Ejemplo 2: Sea la función de densidad de Lorenz *V(p)*

$$V(p) = \frac{3p^2+6p+2}{6}$$

$$L(p) = \int_0^p V(x)dx = \frac{p^3+3p^2+2p}{6}$$

$$2\int_0^1 \left(p-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3p^2+6p+2}{6}\right)dp = 2\int_0^1 \left(\frac{p^3}{2}+\frac{3p^2}{4}-\frac{p}{6}-\frac{1}{6}\right)dp =$$

$$= 2\left(\frac{p^4}{8}\Big]_0^1 + \frac{3p^3}{12}\Big]_0^1 - \frac{p^2}{12}\Big]_0^1 - \frac{p^1}{6}\Big]_0^1\right) = \frac{1}{4}$$

Por otro lado se tiene:

$$\int_0^1 L(p)dp = \int_0^1 \left(\frac{p^3+3p^2+2p}{6}\right)dp = \frac{p^4}{24}\Big]_0^1 + \frac{3p^3}{18}\Big]_0^1 + \frac{2p^2}{12}\Big]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{24}+\frac{3}{18}+\frac{2}{12} = \frac{3}{8}$$

$$G = 1-2\int_0^1 L(p)dp = 1-2\times\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

que coincide con el valor del momento.

Ejemplo 3: Sea la función de densidad de Lorenz *V(p)*

$$V(p) = \frac{2p^3+9p^2+11p+3}{12}$$

$$L(p) = \int_0^p V(x)dx = \frac{p^4+6p^3+11p^2+6p}{24}\Big]_0^p$$

$$2\int_0^1 \left(p-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p^3+9p^2+11p+3}{12}\right)dp =$$

$$= 2\int_0^1 \left(\frac{p^4}{6}+\frac{2p^3}{3}+\frac{13p^2}{24}-\frac{5p}{24}-\frac{1}{8}\right)dp =$$

$$= 2\left(\frac{p^5}{30}\Big]_0^1 + \frac{2p^4}{12}\Big]_0^1 + \frac{13p^3}{72}\Big]_0^1 - \frac{5p^2}{48}\Big]_0^1 - \frac{p^1}{8}\Big]_0^1\right) = \frac{109}{360}.$$

Por otro lado se tiene:

$$\int_0^1 L(p)dp = \int_0^1 \left(\frac{p^4+6p^3+11p^2+6p}{24}\right)dp =$$

$$= \frac{p^5}{120}\Big]_0^1 + \frac{p^4}{96}\Big]_0^1 + \frac{11p^3}{72}\Big]_0^1 + \frac{6p^2}{48}\Big]_0^1 = \frac{1}{120} + \frac{6}{96} + \frac{11}{72} + \frac{6}{48} = \frac{251}{720}$$

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = 1 - 2 \times \frac{251}{720} = \frac{109}{360}$$

que coincide con el valor del momento.

La proposición (3.12) muestra claramente que en el índice de Gini influyen tanto la renta como la distancia de la misma al centro de la población. Esto queda oculto al calcular el índice de Gini con la curva de Lorenz en el que depende solo del área de una superficie. No obstante, no hay contradicción puesto que la forma de la curva de Lorenz, al hacer la integral de $V(p)$, ya ha tenido en cuenta la distancia.

- **Relación de G con la pendiente s de la recta equivalente**

Caso a) No hay exclusión: $0 \leq s \leq 2$

Por (3.4) se tiene:

$$M_{1/2} = \frac{s}{12}.$$

Por otro lado por (3.12)

$$G = 2\int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right)V(p)dp = 2\,\mathrm{M}_{1/2}$$

luego:

$$G = \frac{s}{6} \qquad 0 \leq \mathrm{s} \leq 2$$

o bien:

$$s = 6\,\mathrm{G} \qquad 0 \leq \mathrm{G} \leq \frac{1}{3}$$

Caso b) Sí hay exclusión: $s \geq 2$

Por (3.7) se tiene:

$$M_{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{s}}.$$

Por otro lado por (3.12)

$$G = 2\int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp = 2\ \mathrm{M}_{1/2}$$

luego:

$$G = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{s}}\ ; \qquad \mathrm{s} \geq 2$$

o bien:

$$s = \frac{8}{9(1-G)^2}\ ; \qquad \frac{1}{3} \leq \mathrm{G} \leq 1$$

3.5.3 Relación entre los índices de desigualdad V y G

Como se ha visto en el epígrafe 3.5.2, la ecuación que relaciona la pendiente s de la función lineal equivalente con el momento de primer orden, depende de que haya o no zona de exclusión. En el apartado 3.5.2 se ha visto la relación del índice de Gini con la pendiente s de la recta equivalente. Por otro lado, en la definición de V, s es el argumento de la función arco tangente. El límite de la zona de exclusión es $s = 2$ que corresponde exactamente a $G = 1/3$. Por consiguiente, la relación entre V y G, también depende de la existencia o no de la zona de exclusión. Sustituyendo en la definición de V, el valor de s relacionado con G, obtenido en el apartado anterior, se tiene:

$$V = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} Arctan(6G)\,, & 0 \leq G \leq \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2}{\pi} Arctan\left(\dfrac{8}{9(1-G)^2}\right), & \dfrac{1}{3} \leq G \leq 1 \end{cases}.$$

Despejando G obtenemos la relación de G con V.

$$G = \begin{cases} \dfrac{1}{6}\tan\left(\dfrac{\pi V}{2}\right), & 0 \leq G \leq \dfrac{1}{3} \\ 1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi V}{2}\right)}}, & \dfrac{1}{3} \leq G \leq 1 \end{cases}$$

cuya representación está en el gráfico 29.

Hay que tomar Ga para $G < 1/3$ y Gb para $G > 1/3$ con lo que la relación entre G y V queda como muestra el gráfico 30.

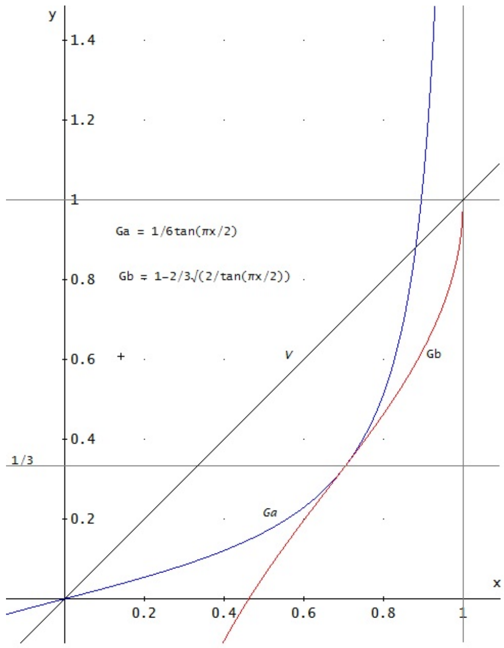

Gráfico 29. Tramos de G: Ga y Gb

Obsérvese como el valor de unión de ambas curvas $G = 1/3$, es un punto singular. Por encima de este valor se presenta la exclusión. Es decir un porcentaje de la población tiene renta cero. Visto al contrario, este punto singular es todavía más interesante. Si las rentas iguales a cero no las tenemos en cuenta para modelizar la distribución, el índice de Gini nunca pasará de 1/3. Este hecho nos induce a introducir los conceptos de *sesgo de exclusión* y la *resistencia G = 0,33,* que han surgen al estudiar la relación de V y G y que se proponen como futuras líneas de investigación.

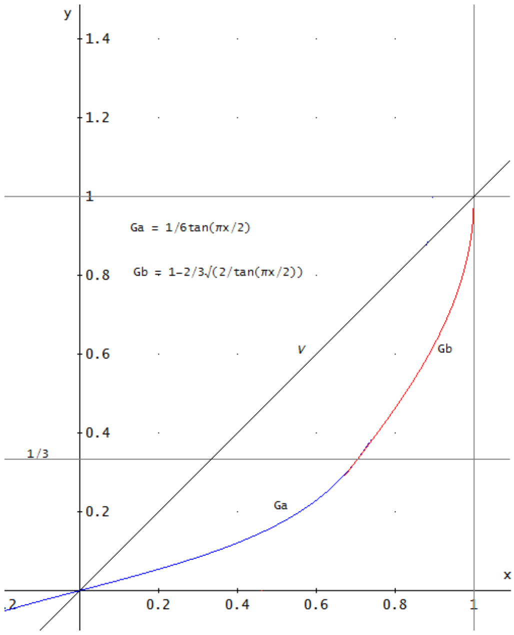

Gráfico 30. Linealidad de V frente a G

Obsérvese en el gráfico 30 la linealidad de V frente a G y cómo G va por debajo de V subestimando la desigualdad.

Por ejemplo para una desigualdad cuyo valor de G = 0,333333;

la pendiente de la función de densidad de Lorenz es:

$$s = 6 \times G = 2.$$

Este índice de Gini que puede parecer bajo, significando que hay poca desigualdad, en realidad implica lo siguiente según (3.3):

$$V_l(p) = s \times p + \left(\frac{2-s}{2}\right) = 2\text{p}$$

$$\int_0^{0,5} (2p)\,dp = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0,5}^{1} (2p)\,dp = \frac{3}{4}$$

Los desfavorecidos, que en este caso son exactamente la mitad de la población, disponen de un cuarto de la renta mientras que los favorecidos disponen de tres cuartos. Tres veces más. Se puede ver en el gráfico 33. En este caso el índice de desigualdad $V = 0{,}704833$.

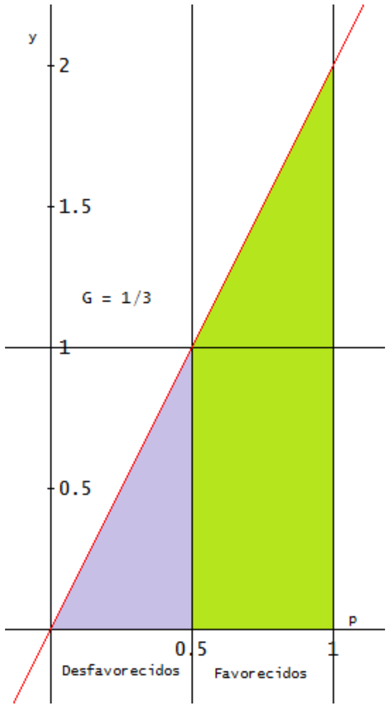

Gráfico 31. Reparto de rentas para G = 1/3

Esa recta $V_l = 2p$ representa el reparto de rentas, con una pendiente igual a 2, formando un ángulo de 70,4833 grados centesimales con la horizontal. Esta es otra ventaja del nuevo índice V propuesto. Mientras G es difícil de calcular y no da una idea exacta de la desigualdad real, V es inmediato y su interpretación geométrica y visual es lineal y directa. Corresponde exactamente a los grados centesimales de la pendiente de la recta equivalente divididos por cien.

3.5.4 Cálculos de V y G para distintas distribuciones

Con lo visto anteriormente, los cálculos de V y G son muy fáciles y rápidos para distribuciones conocidas.

Por (3.12), $G = 2M$, por el epígrafe 3.5.3, se tiene que:

- **Distribución exponencial**

$$G = 0.5$$

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{8}{9(1-0.5)^2}\right) = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{32}{9}\right) = 0.825460$$

- **Distribución exponencial general**

$$G = \frac{1}{2(a\lambda+1)}$$

Si $a\lambda \geq 1/2$ entonces $G \leq 1/3$:

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{3}{a\lambda+1}\right)$$

Si $a\lambda \leq 1/2$ entonces $G \geq 1/3$

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{8}{9\left(1-\left(\frac{1}{2(a\lambda+1)}\right)\right)^2}\right)$$

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{32(a\lambda+1)^2}{9(2a\lambda+1)^2}\right)$$

- **Distribución uniforme**

$$G = \frac{\theta}{3(2a+\theta)}$$

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{2\theta}{(2a+\theta)}\right)$$

- **Distribución de Pareto**

$$G = \frac{1}{2\alpha - 1} \qquad con \quad \alpha \geq 1$$

Si $\alpha \geq 2$ entonces $G \leq 1/3$:

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{6}{2\alpha - 1}\right)$$

Si $\alpha \leq 2$ entonces $G \geq 1/3$:

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{8}{9\left(1 - \left(\frac{1}{2\alpha - 1}\right)\right)^2}\right)$$

$$V = \frac{2}{\pi}\text{Arctan}\left(\frac{2(2\alpha - 1)^2}{9(\alpha - 1)^2}\right)$$

3.5.5 Relación de V y G con el punto de exclusión

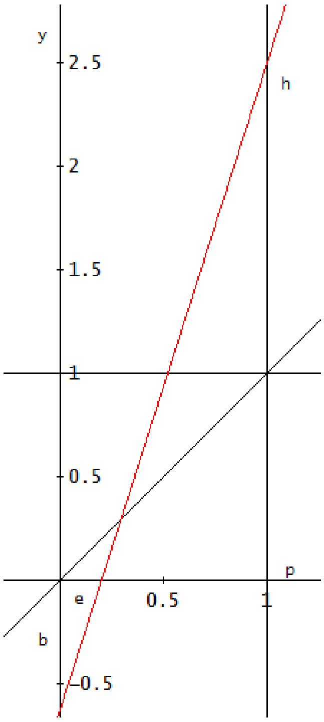

Gráfico 32. Función de densidad lineal de Lorenz con exclusión

En el gráfico 33 se representa una función de densidad lineal de Lorenz con exclusión.

Se va a calcular a continuación la ecuación de esa recta, como el área del triángulo debe ser igual a uno, se tiene que:

$$\frac{1}{2} \times (1-e) \times h = 1; \qquad h = \frac{2}{1-e}$$

La pendiente de la recta es:

$$s = \frac{h}{1-e} = \frac{2}{(1-e)^2}$$

La ordenada en el origen se calcula teniendo en cuenta que el triángulo pequeño es semejante al grande y tienen la misma pendiente.

$$\frac{-b}{e} = s = \frac{2}{(1-e)^2}\ ; \qquad b = \frac{-2\, e}{(1-e)^2}$$

luego la ecuación de la recta es:

$$V_l(p) = \begin{cases} 0; & 0 \le p \le e \\ \dfrac{2\, p - 2e}{(1-e)^2}; & e \le p \le 1 \end{cases}$$

que depende solamente de e. Por definición del índice V de desigualdad, se tiene:

$$V = \frac{2}{\pi} Arctan(s) = \frac{2}{\pi} Arctan\left(\frac{2}{(1-e)^2}\right).$$

Para calcular la cuadrática de Lorenz equivalente, se integra la ecuación de la recta.

$$\int V_l(p)\, dp = \frac{p^2 - 2e\, p}{(1-e)^2} + cte$$

la constante de integración se ajusta para que la integral pase por el punto (1, 1):

$$1 = \frac{1^2 - 2e\,1}{(1-e)^2} + cte\,; \qquad Cte = \frac{e^2}{(1-e)^2}$$

por lo que la ecuación cuadrática es:

$$L_c(p) = \begin{cases} 0; & 0 \le p \le e \\ \dfrac{p^2 - 2e\,p + e^2}{(1-e)^2}; & e \le p \le 1 \end{cases}$$

que igualmente, solo depende de e y es tangente al eje p en el punto de exclusión.

$$\int_e^1 L_c(p)\,\mathrm{dp} = \int_e^1 \left(\frac{p^2 - 2e\,p + e^2}{(1-e)^2}\right) \mathrm{dp} = \frac{(1-e)}{3}$$

$$G = 1 - 2\int_e^1 L_c(p)\,\mathrm{dp} = \frac{(1+2\,e)}{3}$$

luego las relaciones de los índices con e son:

$$\begin{cases} V = \dfrac{2}{\pi} Arctan\left(\dfrac{2}{(1-e)^2}\right) \\ G = \dfrac{(1+2\,e)}{3} \end{cases}.$$

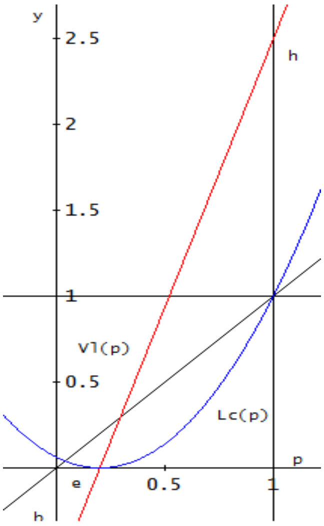

Gráfico 33. Lineal y cuadrática con exclusión

4 APLICACIÓN EMPÍRICA

4.1 Introducción

En este capítulo se aplica la metodología desarrollada en esta memoria a datos de renta procedentes de la Encuesta de Condiciones de Vida para los años 2009 y 2013.

En primer lugar se proporciona una descripción de la encuesta y se justifica porqué se utiliza la renta disponible de los individuos por unidad de consumo para analizar la desigualdad.

En segundo lugar se modeliza la distribución de la renta en 2009 y 2013 utilizando funciones de densidad no paramétricas. A partir de estas estimaciones se obtiene el índice de Gini, la curva de Lorenz y su densidad. En base a estos resultados y aplicando los principios de equivalencia enunciados se obtiene la curva de Lorenz cuadrática y la función de densidad de Lorenz lineal. Esta última función proporciona la medida de desigualdad propuesta y los umbrales. A partir de los mismos se analiza la estructura de la desigualdad.

Los resultados obtenidos se analizan teniendo presente el contexto económico en el que se encontraba inmersa la economía española en los años 2009 y 2013.

4.2 Datos utilizados. Descripción de la encuesta

El propósito de esta sección es realizar una aplicación empírica en la que se utilicen los conceptos expuestos en los capítulos anteriores de esta memoria. Con esta finalidad, se analiza la desigualdad de la renta para los años 2009 y 2013 utilizando datos procedentes de la Encuesta de Condiciones de Vida (ECV) elaborada por el Instituto Nacional de Estadística (INE).

La ECV pertenece al conjunto de operaciones estadísticas armonizadas para los países de la Unión Europea. Se publicó por primera vez en 2004, sustituyendo al Panel de Hogares de la Unión Europea, y su periodicidad es anual. Esta encuesta está dirigida a los hogares, aunque también proporciona información por individuo. De forma más específica, provee información sobre los ingresos y situación económica de los hogares; pobreza y privación material; empleo y actividad; situación socioeconómica de las personas mayores (pensiones y jubilación); vivienda y costes asociados a la misma; nivel de formación; salud y desarrollo regional. La variedad de información que proporciona la ECV hace que sea la fuente estadística más utilizada en trabajos que analizan la distribución de la renta, la composición de la pobreza y la exclusión social en España. A su vez, el carácter comunitario de la misma permite la realización de comparaciones con otros países de la Unión Europea (véase INE 2013, para mayor información con respecto a la metodología de la encuesta).

El estudio empírico de la desigualdad requiere de la selección de un variable proxy del bienestar alcanzado por los individuos. Aunque hay autores que destacan que el consumo (gasto) es un indicador más preciso que la renta para determinar la posición del hogar (véase por ejemplo Ruiz-Castillo, 1987; Slesnick, 1991 y 1993) la mayor parte de los trabajos empíricos, sobre todos los que realizan comparaciones internacionales, utilizan la renta para medir el nivel de vida de un hogar. En esta memoria se utiliza la renta disponible del hogar, es decir, neta de impuestos directos y transferencias correspondientes a los años 2009 y 2013. Dicha variable se refiere al año anterior a la realización de la encuesta, es decir la renta del hogar que aparece en la ECV del año 2009 es realmente la del año 2008.

En el año 2013 la ECV cambió la metodología de producción de datos relativos a ingresos del hogar. Actualmente este tipo de datos se elaboran mediante una metodología mixta que combina la información proporcionada por la persona encuestada con registros administrativos de la Agencia Estatal de Administración Tributaria, la Seguridad Social, la Hacienda Tributaria de Navarra y la Diputación Foral de Vizcaya. Este cambio metodológico supone una ruptura de la serie en la encuesta de 2013 que hace que los datos de renta no sean comparables con los publicados en años anteriores. Para subsanar este problema el INE ha realizado estimaciones retrospectivas desde 2009 comparables con los datos de 2013. Por este motivo nuestro análisis comprende los años 2009 y 2013, el primer y último año de los datos comparables disponibles. Se han seleccionado sólo dos años de la serie disponible porque el objetivo de esta sección es mostrar empíricamente los instrumentos que se proponen en esta memoria y no realizar un análisis pormenorizado de la desigualdad.

Para obtener medidas de desigualdad no es adecuado considerar como unidad el hogar, ya que el nivel adquisitivo de una familia es distinto según sea en número de miembros que la componen. A su vez, hay que tener en cuenta las economías de escala en el consumo ya que hay determinados gastos (calefacción, luz etc.) que no dependen linealmente del tamaño del hogar sino que crecen a una tasa menos proporcional que en número de miembros de un hogar. La solución adoptada para comparar hogares con distinto tamaño con y necesidades diferentes es utilizar escalas de equivalencia (véase por ejemplo Jenkins, 1999). En esta memoria se utiliza la escala de la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico) modificada. Esta escala, asigna el valor 1 al primer adulto, 0.5 al segundo adulto y a los siguientes y 0.3 a los menores de 14 años. Una vez calculada la renta disponible por unidad de consumo o renta equivalente se le imputa a cada uno de los miembros del hogar.

Finalmente, para tener en cuenta el efecto de la inflación durante el periodo considerado, los datos de renta se han deflactado utilizando el IPC (índice de precios al consumo) de 2011 publicado por el INE (www.ine.es). De esta forma las comparaciones se realizan en términos reales.

A continuación se describe brevemente, con el objeto de poder contextualizar los resultados empíricos obtenidos, la situación económica de España en el periodo que contiene a los años seleccionados. Para ello recurrimos a la evolución de las indicadores PIB (producto interior bruto), empleo y desempleo. Como es ampliamente conocido, la economía española ha atravesado un dura etapa de crisis e inestabilidad marcada por altos niveles de endeudamiento, crisis en la construcción y caída del consumo privado junto a una contracción del crédito. Aunque a finales del año 2007 comenzó a hacerse visible el menor crecimiento de la economía fue en el 2008 cuando estos signos de desaceleración se hicieron más visibles presentado los principales indicadores macroeconómicos una evolución adversa.

En el 2009 se produjo una fuerte contracción del PIB siendo la tasa de variación con respecto a 2008 de -3.82%. Aunque el PIB empezó a recuperarse en 2010, esta recuperación quedó ensombrecida por la crisis de la deuda soberana a finales de 2011. La baja calificación de la deuda soberana encareció la financiación para algunos países (principalmente los países del sur de la eurozona como España) disparándose la prima de riesgo. La disminución del déficit público era necesaria para frenar la crisis de la deuda, dificultando este hecho el impulso de la actividad económica por parte de las Administraciones Públicas. Los procesos de ajuste necesarios para controlar el déficit público limitaron el crecimiento de la economía española que muy modesto en 2011. Este crecimiento no se consolidó retornando a tasas negativas de crecimiento en los años 2012 y 2013 como se puede observar en la tabla 4.1.

La tabla 4.1 muestra la tasa de empleo, obtenida mediante el cociente entre el número total de ocupados y la población total, para el periodo 2009-2013. Como se observa, la caída de la tasa de empleo fue bastante importante en el año 2009 y aunque en los años 2010 y 2011 fue menor, vuelve a acentuarse en 2012 debido, entre otras causas, a la reforma laboral de 2012 que flexibilizó las condiciones para la extinción de los contratos y a la continuidad en el recorte de la oferta de empleo público.

Otra magnitud macroeconómica que se ha visto fuertemente afectada por la crisis económica y financiera es la tasa de desempleo. Como se muestra en la tabla 4.1 ha pasado del 8.23% en 2007 al 26.09% en 2013 situándose entre las más altas de la eurozona.

Tabla 4.1. Indicadores económicos

Año	Tasa de desempleo	Tasa de empleo	Tasa de crecimiento anual del PIB (variaciones de volumen %)
2007	8.23	54.4	
2008	11.25	53.32	
2009	17.86	49.43	-3.8
2010	19.86	48.31	-0.2
2011	21.39	47.43	0.1
2012	24.79	45.43	-1.6
2013	26.09	44.36	-1.2

Fuente. Elaboración propia a partir de los datos de la Encuesta de Población Activa y Contabilidad Regional de España elaborada por el INE

La evolución de estas magnitudes macroeconómicas tienen una traducción inmediata a nivel micro. La renta media equivalente o por unidades de consumo a precios constantes ha disminuido un 14.38 % de 2009 a 2013. La renta equivalente mediana también ha experimentado un descenso del 15.12 % (véase tabla 4.2). Como era previsible, el hecho de que la mayor parte de las rentas de los hogares provengan de las retribuciones salariales, hace que el comportamiento del mercado laboral tenga serias repercusiones en la distribución de la renta y en la evolución de la desigualdad.

Tabla 4.2. Descriptivos muestrales

Año	Media	Desviac. típica	Mediana	Observ.
2009	18612.84	12534.17	16152.61	30420
2013	15934.78	10816.76	13709.14	26436

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la ECV

4.3 Ajuste de densidades

Con el propósito de realizar un análisis más detallado de la distribución de la renta y la desigualdad, se han estimado funciones de densidad asociadas a la variable renta equivalente por unidad de consumo para los años 2009 y 2013. En una primera aproximación se estimaron, para modelizar la distribución de la renta, densidades Lognormales (Aitchinson y Brown, 1957; Lambert, 1993, p. 56) y Gamma (Lafuente 1994, Chotikapanich y Griffiths, 2008). Ninguno de los ajustes superó el test de bondad de ajuste de Chi-cuadrado por lo que se decidió optar por métodos más flexibles y utilizar densidades no paramétricas.

Cada vez es más frecuente la utilización de funciones de densidad no paramétricas en el estudio de la distribución de la renta (véase entre otros los trabajos de Jenkins 1995, Herrerías *et al*. 2001, Gradín *et al*. 2006). La estimación de la densidad no paramétrica atiende a la siguiente expresión (Silverman, 1986):

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

donde n es el tamaño muestral, x_i la observación i-ésima, h el parámetro suavizador o ventana y $k(u)$ es el núcleo. En este trabajo se ha utilizado el núcleo de Epanechnicov que viene dado por la siguiente expresión:

$$k(u) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - u^2) & si\ |u| \leq 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

La elección del parámetro h se ha hecho utilizando el método del *plug in* (véase Jones *et al*. ,1996, Sheather and Jones, 1991 y Pittau and Zelly, 2006).

El gráfico 34 muestra las estimaciones de las densidades no paramétricas correspondientes a los años 2009 ($h = 2995$) y 2013 ($h = 2501$). Utilizando el test de Chi-cuadrado se acepta la hipótesis nula de que provengan de poblaciones distribuidas según la densidad especificada, a un nivel de significación del 5%. Los p-valores son 0.6016 y 0.9943 para 2009 y 2013 respectivamente.

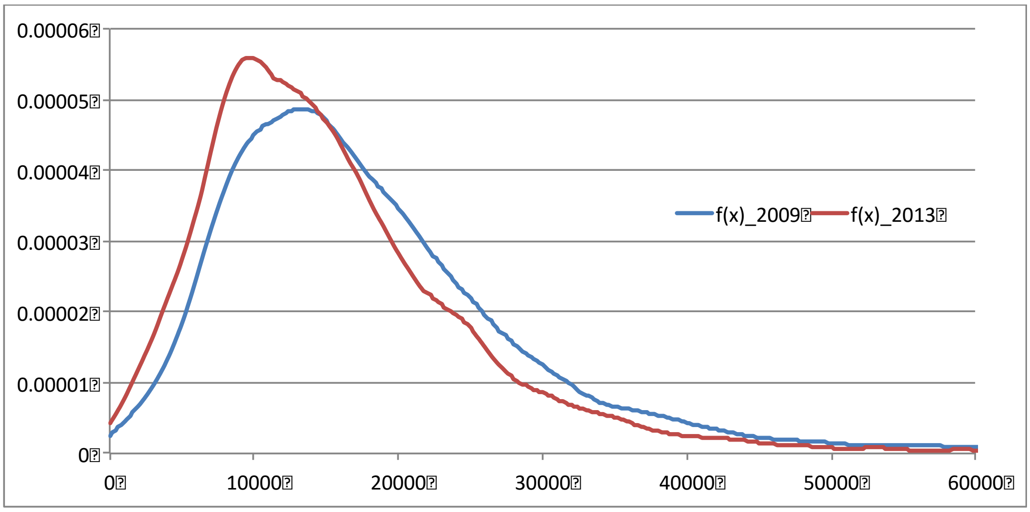

Gráfico 34. Densidades estimadas 2009, 2013

La contracción de renta que tuvo lugar de 2009 a 2013 se ve reflejada en el gráfico 34 con el consecuente desplazamiento hacia la izquierda de la función de densidad en el 2013. El porcentaje de individuos con renta baja y media baja se ha incrementado notablemente en 2013 en detrimento del peso la clase media y media alta. En este contexto de disminución de la clase media cabe esperar un reparto de la renta más desigual como revela la curva de Lorenz y los índices de desigualdad recogidos en la tabla 4.3.

Una vez estimada la distribución de la renta se procede a realizar un análisis más detallado de la desigualdad aplicando las herramientas desarrolladas en esta memoria. Aplicando el principio de equivalencia, se obtiene la curva cuadrática de Lorenz y la función de densidad lineal. A partir de aquí se obtendrá el índice de desigualdad V. Se representarán gráficamente las curvas y umbrales obtenidos para cada año (véanse los gráficos 35 a 40). La tabla 4.3 contiene los índices de Gini y V . Adicionalmente se han calculado los índices de Theil y la varianza de los logaritmos.

Los resultados permiten observar que la desigualdad ha aumentado del 2009 al 2013. Todas las medidas tienen un comportamiento similar que refleja un aumento de la desigualdad de la renta. Sin embargo, la medida propuesta V, es lineal, es más fácil de calcular y su interpretación geométrica y visual es inmediata ya que es el ángulo centesimal que forma la recta equivalente con la horizontal.

Tabla 4.3

Año	Theil	Gini	Varlog	CV	V
2009	0.174759	0.319596	0.437519	0.673415	0.693981
2013	0.184824	0.328391	0.514153	0.678815	0,701012

Fuente: Elaboración propia a partir de datos de la ECV

4.4 ECV año 2009

De la curva de Lorenz no paramétrica obtenida, se integra numéricamente y se calcula el índice de Gini:

$$\int_0^1 L(p)dp = 0{,}340202$$

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = 0{,}319596$$

Se calcula el momento de $V(p)$ respecto del eje $p = 1/2$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp = 0.159798$$

$$2 \times M_{\frac{1}{2}} = 2 \times 0.159798 = 0{,}319596 = G.$$

La función cuadrática de Lorenz, se obtiene sustituyendo el valor de G en (3.10):

$$L_2(p) = 3Gp^2 + (1 - 3G)p = 0{,}958788\,p^2 + 0{,}041212\,p\,.$$

La función de densidad lineal se obtiene sustituyendo el valor de G en (3.9)

$$V_l(p) = 6G \times p + (1 - 3G) = 1{,}917576\,p + 0{,}041212$$

aunque también se puede obtener derivando la cuadrática de Lorenz.

Conocida la pendiente de $V_l(p)$, se calcula el índice de desigualdad V:

$$V = \frac{2}{\pi} Arctan\,(s) = \frac{2}{\pi} Arctan\,(6G) = \frac{2}{\pi} Arctan\,(1{,}917576) = 0{,}693981$$

Se comprueba que $s = 6\,G$.

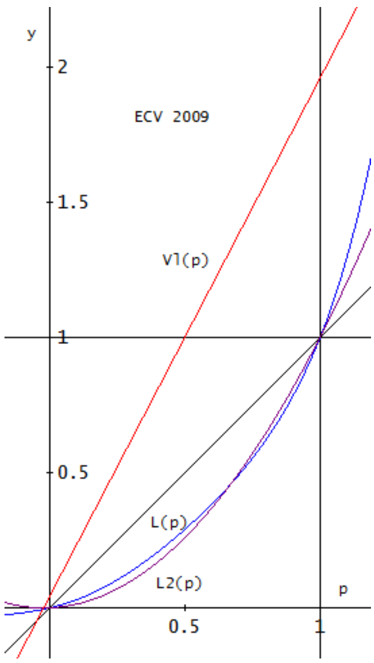

Gráfico 35. ECV 2009 Curva de Lorenz, cuadrática y lineal

No hay excluidos ya que $G < 1/3$. La función de densidad lineal de Lorenz no corta al eje de abscisas dentro del intervalo [0, 1].

Por facilidad y simplificación en los cálculos y para mostrar todo el proceso de obtención, el punto de equidad y los umbrales se van a calcular sobre la recta equivalente $V_l(p)$ que tiene forma explícita:

$$V_l(P_e) = 1{,}917576\, P_e + 0{,}041212 = 1$$

$$P_e = 0{,}5.$$

Como era de esperar, al no haber exclusión, la recta equivalente pasa por el punto (0,5; 1) y el punto de equidad está en el centro de la población.

$$\int_0^{0,5} (1{,}917576\, p + 0{,}041212)\, dp = 0{,}260303$$

$$\int_{0,5}^{1} (1{,}917576\, p + 0{,}041212)\, dp = 0{,}739697.$$

Es decir, los favorecidos, la mitad más rica de la población, tienen el 73,97% de la renta mientras que la otra mitad, los desfavorecidos, el 26,03% de la misma.

Se va a calcular Ri a la derecha y a la izquierda y, al obtener el mismo valor, su igualdad sirve de comprobación.

$$R_i = \int_{P_e}^{1} (V(p) - 1) dp = 0{,}239697$$

$$R_i = \int_0^{P_e} \big(1 - V(p)\big) dp = 0{,}239697.$$

Se comprueba que se cumple la relación (3.8)

$$R_i = \frac{s}{8} = \frac{1{,}917576}{8} = 0{,}239697.$$

La renta de perfecta igualdad, Ri, está sombreada en el gráfico 36 y sus centroides marcan los umbrales P_a y P_b.

El centroide a la derecha, P_a, tiene un valor:

$$P_a = P_e + \frac{1}{R_i}\int_{P_e}^{1}(p - P_e)(V(p) - 1)dp$$

$$P_a = 0{,}5 + \frac{0{,}079899}{0{,}2396973} = 0{,}833333$$

$$1 - P_a = 0{,}166666$$

$$\int_{0{,}833}^{1}(1{,}917576\,p + 0{,}041212)\,dp = 0{,}299832.$$

Luego hay un 16,67% de población con renta alta que disponen del 30% de la renta.

El umbral de renta alta es: $V_l(P_{\mathrm{a}}) = \ 1{,}917576\ \ P_{\mathrm{a}} + 0{,}041212 = 1{,}639192$

es decir, una persona se considera que tiene renta alta si su renta está 1,64 veces por encima de la renta media.

El centroide a la izquierda, P_b, es igual a:

$$P_b = \frac{1}{R_i}\int_{0}^{P_e} p\big(1 - V(p)\big)dp$$

$$P_b = \frac{0{,}0399495}{0{,}239697} = 0{,}166667$$

$$\int_{0}^{P_b}(1{,}917576\,p + 0{,}041212)\,dp = 0.033501$$

luego hay un 16,67% de población con renta baja que disponen de un 3,35% de la renta.

El umbral de renta baja es: $V_l(P_b) = 1{,}917576\,P_b + 0{,}041212 = 0{,}360808$

es decir, una persona se considera que tiene renta baja si su renta está por debajo de 0,36 veces la renta media.

Se comprueba que se cumple (3.11)

$$G = 2\ Ri\ (\ Pa - Pb) = 2 \times 0{,}239697 \times (0{,}8333 - 0{,}1667) = 0{,}319596$$

$$G = \frac{4}{3} Ri = \frac{4 \times 0{,}239697}{3} = 0{,}319596\,.$$

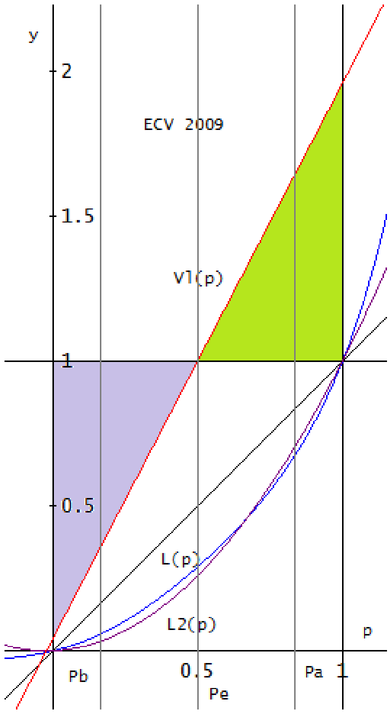

Gráfico 36. ECV Renta 2009. Umbrales

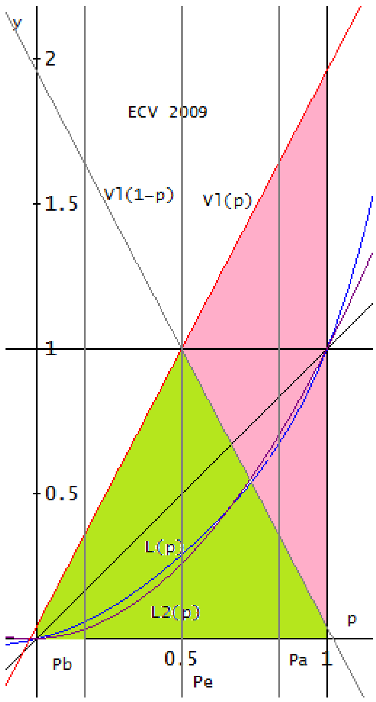

Gráfico 37. Renta equilibrada y desequilibrada 2009

Para calcular la renta equilibrada y desequilibrada, se calcula previamente $V(1-p)$ que como se ha visto en el epígrafe 3.8 es la función simétrica de $V(p)$ respecto del eje $p = 1/2$:

$$\mathrm{V}(1-p) = 1{,}917576\ (1-\mathrm{p}) + 0{,}041212 = 1{,}9588 - 1{,}9176\, p.$$

La renta equilibrada es:

$$Re = 2\int_0^{0.5} V(p)dp = 2\int_0^{0.5} (1{,}917576\, p + 0{,}041212)dp = 0{,}520606$$

$$R_d = 1 - Re = 0{,}479394$$

luego hay un 52% de renta equilibrada, frente a un 48% de renta desequilibrada.

4.5 ECV año 2013

De la curva de Lorenz no paramétrica obtenida, se integra numéricamente y se calcula el índice de Gini:

$$\int_0^1 L(p)dp = 0{,}3358045$$

$$G = 1 - 2\int_0^1 L(p)dp = 0{,}328391$$

Se calcula el momento de $V(p)$ respecto del eje $p = 1/2$

$$M_{1/2} = \int_0^1 \left(p - \frac{1}{2}\right) V(p)dp = 0.1641955$$

$$2 \times M_{\frac{1}{2}} = 2 \times 0.1641955 = 0{,}328391 = G.$$

La función cuadrática de Lorenz, se obtiene sustituyendo el valor de G en (3.10):

$$L_2(p) = 3Gp^2 + (1-3G)p = 0{,}985173\, p^2 + 0{,}014827\, p.$$

La función de densidad lineal se obtiene sustituyendo el valor de G en (3.9):

$$V_l(p) = 6G \times p + (1 - 3G) = 1{,}970346\, p + 0{,}041212$$

aunque también se puede obtener derivando la cuadrática de Lorenz.

Conocida la pendiente de $V_l(p)$, se calcula el índice de desigualdad V:

$$V = \frac{2}{\pi} Arctan\,(s) = \frac{2}{\pi} Arctan\,(1{,}970346) = 0{,}701012.$$

Se comprueba que $s = 6\,G$.

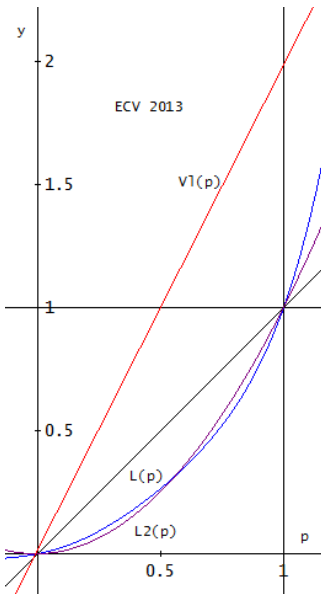

Gráfico 38. ECV 2013 Curva de Lorenz, cuadrática y lineal

No hay excluidos ya que $G < 1/3$. La función de densidad lineal de Lorenz no corta al eje de abscisas dentro del intervalo [0, 1].

Igualmente que para 2009, el punto de equidad y los umbrales se van a calcular sobre la recta equivalente $V_l(p)$ que tiene forma explícita.

$$V_l(P_e) = 1{,}970346\, P_e + 0{,}014827 = 1$$

$$P_e = 0{,}5.$$

Como era de esperar, al no haber exclusión, la recta equivalente pasa por el punto (0,5; 1) y el punto de equidad está en el centro de la población.

$$\int_{0}^{0,5} (1{,}970346\, p + 0{,}014827)\, dp = 0{,}253707$$

$$\int_{0,5}^{1} (1{,}970346\, p + 0{,}014827)\, dp = 0{,}746233$$

es decir, los favorecidos, la mitad más rica de la población, tienen el 74,627% de la renta mientras que la otra mitad, los desfavorecidos, el 25,37% de la misma. Si se comparan estas cifras con las obtenidas para 2009 se observa como el porcentaje de renta que tiene la mitad más rica es mayor.

Se va a calcular Ri a la derecha y a la izquierda y, al obtener el mismo valor, su igualdad sirve de comprobación:

$$R_i = \int_{P_e}^{1} (V(p) - 1) dp = 0{,}246293$$

$$R_i = \int_{0}^{P_e} \big(1 - V(p)\big) dp = 0{,}246293.$$

Se comprueba que se cumple la relación (3.8)

$$R_i = \frac{s}{8} = \frac{1{,}970346}{8} = 0{,}246293.$$

La renta de perfecta igualdad, Ri, está sombreada en el gráfico 39 y sus centroides marcan los umbrales P_a y P_b.

El centroide a la derecha, P_a, tiene un valor:

$$P_a = P_e + \frac{1}{R_i} \int_{P_e}^{1} (p - P_e)(V(p) - 1) dp$$

$$P_a = 0{,}5 + \frac{0{,}082098}{0{,}246293} = 0{,}833333$$

$$1 - P_a = 0{,}166666$$

$$\int_{0,833}^{1} (1{,}970346\, p + 0{,}014827)\, dp = 0{,}303497.$$

Por tanto, hay un 16,67% de población con renta alta que disponen del 30,35% de la renta.

El umbral de renta alta es:

$$V_l(P_\mathrm{a}) = \ 1{,}970346 \ \ P_\mathrm{a} + 0{,}014827 = 1{,}656782$$

es decir una persona se considera que tiene renta alta si su renta está 1,66 veces por encima de la renta media. Nótese que estos niveles son similares a los del 2009.

El centroide a la izquierda, P_b, es igual a :

$$P_b = \frac{1}{R_i}\int_0^{P_e} p\big(1 - V(p)\big)dp$$

$$P_b = \frac{0{,}041048875}{0{,}246293} = 0{,}166667$$

$$\int_0^{P_b} (1{,}970346\, p + 0{,}014827)\, dp = 0.029837.$$

De donde se deduce que el 16,67% de población con renta baja que disponen de un 2,98% de la renta. Obsérvese que aunque el porcentaje de población con renta baja es similar al de 2009, disponen de un menor porcentaje de renta.

El umbral de renta baja es:

$$V_l(P_b) = 1{,}970346\, P_b + 0{,}014827 = 0{,}343218.$$

Es decir, una persona se considera que tiene renta baja si su renta está por debajo de 0,343 veces la renta media. Esta cuantía disminuye con respecto a 2009 debido a la contracción que experimenta la media.

Se comprueba que se cumple (3.11):

$$G = 2\ Ri\ (\ Pa - Pb) = 2 \times 0{,}246293 \times (0{,}8333 - 0{,}1667) = 0{,}328391$$

$$G = \frac{4}{3}Ri = \frac{4 \times 0{,}246293}{3} = 0{,}328391.$$

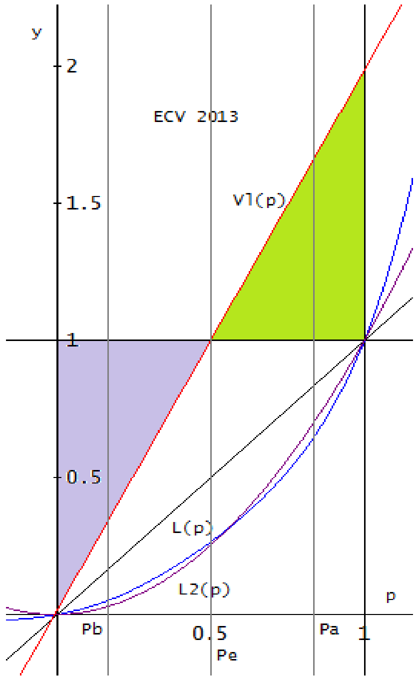

Gráfico 39. ECV Renta 2013. Umbrales

Para calcular la renta equilibrada y desequilibrada, se calcula previamente

$$V(1-p) = 1{,}970346\,(1-p) + 0{,}014827 = 1{,}985173 - 1{,}970346\,p\,.$$

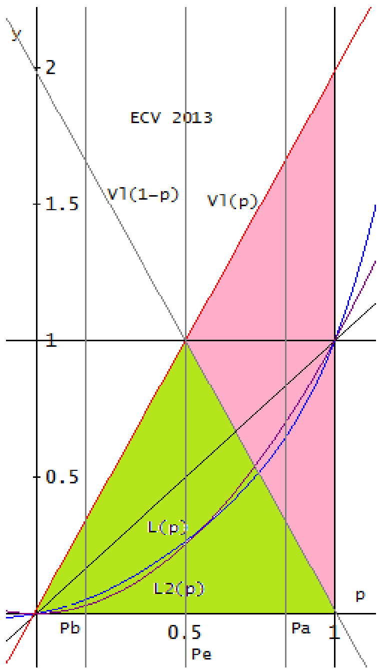

Gráfico 40. Renta equilibrada y desequilibrada 2013

La renta equilibrada es:

$$Re = 2\int_0^{0.5} V(p)dp = 2\int_0^{0.5} (1{,}970346\,p + 0{,}014827)dp = 0{,}5074135$$

$$R_d = 1 - Re = 0{,}492586.$$

Luego hay un 50,7% de renta equilibrada, frente a un 49,3% de renta desequilibrada. Como se ha visto en el epígrafe 3.8 esto significa que solo esta última contribuye a la desigualdad.

Resumiendo, la contracción de la renta como consecuencia de la crisis económica y financiera se ha traducido en un aumento de la desigualdad como muestran las medidas calculadas. Los cambios que se han producido en los umbrales calculados permiten observar los cambios en la estructura de la desigualdad. En 2013 aumenta, aunque ligeramente, el porcentaje de renta equivalente sobre el total que perciben los individuos con rentas altas. Por el contrario, se reduce la participación en el total de la renta de los individuos pertenecientes al grupo de rentas bajas. A su vez, el umbral de renta alta aumenta en 2013 en detrimento del umbral de renta baja que disminuye de 2009 a 2013. Estos resultados ponen de manifiesto que la crisis ha golpeado más intensamente a los individuos peor posicionados en términos de renta.

5 CONCLUSIONES

5.1 Principales conclusiones

A continuación se exponen las principales conclusiones a las que se ha llegado en la presente memoria.

La revisión detallada de la literatura especializada pone de relieve la importancia de disponer de herramientas estadísticas que permitan y faciliten el estudio de la desigualdad. En esta línea, en este trabajo se ha propuesto una nueva metodología para analizar la desigualdad de la renta y la estructura de la misma. La estrategia que se ha seguido utiliza como punto de partida la función de densidad de Lorenz definida en el capítulo tercero de esta memoria. Los puntos singulares de dicha densidad definen umbrales de población que permiten clasificar a los individuos en grupos de renta atendiendo a criterios consistentes. Estos umbrales, como se pone de manifiesto en la aplicación empírica, facilitan el estudio de la estructura de la desigualdad y permiten conocer si se están acentuando las diferencias entre los individuos situados en las partes altas y bajas de la distribución de la renta.

Se ha desarrollado un procedimiento alternativo para obtener curvas de Lorenz explícitas a partir de cualquier polinomio con coeficientes no negativos. Esta aportación amplia los instrumentos existentes para generar curvas de Lorenz.

Se han enunciado dos principios de equivalencia. El primero de ellos permite reducir cualquier función de densidad de Lorenz a una recta equivalente. El segundo principio permite reducir cualquier curva de Lorenz a una curva de Lorenz cuadrática equivalente. Estos resultados simplifican y facilitan el análisis de la distribución de la renta y lo que es más importante, han permitido definir un nuevo índice de desigualdad. Esta medida es igual al ángulo que forma con la horizontal la recta equivalente y, como se pone de manifiesto, verifica las propiedades básicas que han de cumplir las medidas de desigualdad y además es lineal.

Se ha propuesto una expresión alternativa para el índice de Gini en función del momento de primer orden de la densidad de Lorenz y se demuestra la relación existente entre la medida propuesta y el índice de Gini.

En el capítulo cuarto de este trabajo se analiza la distribución de la renta y la desigualdad utilizando el procedimiento propuesto con el objeto de mostrar su utilidad. Para este fin se han utilizado datos de renta procedentes de la ECV para los años 2009 y 2013. Los resultados muestran la capacidad de la nueva metodología para analizar la desigualdad de la renta y su estructura. La medida propuesta refleja un aumento de la desigualdad de la renta. A su vez, los puntos singulares de la densidad de Lorenz permiten observar que la crisis ha golpeado más duramente a los individuos situados en las partes medias y baja de la distribución que han empeorado su situación en beneficio de los mejor posicionados.

5.2 Futuras líneas de investigación

En lo que concierne a las líneas de investigación futuras, esta memoria plantea nuevas vías de trabajo de gran interés en la medición de la desigualdad. El problema que surge al ordenar curvas de Lorenz que se cortan puede abordarse utilizando los principios de equivalencia enunciados en el capítulo tercero.

La medida propuesta se ha relacionado únicamente con el índice de Gini aunque resultaría de interés extender esta relación a otras medidas que se obtienen a partir de la curva de Lorenz.

Asimismo, la propiedad de linealidad de la nueva medida y sus implicaciones redistributivas requiere un estudio más pormenorizado. Finalmente destacar el interés de aplicar la metodología propuesta a analizar otros aspectos distributivos como la polarización de la renta y su relación con la generación de conflicto social.

.

6 BIBLIOGRAFÍA

Aitchinson, J. y Brown, J.A.C. (1957) *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press.

Arnold B.C. (1986) Majoritazion and the Lorenz Order: A Brief Introduction, Berlin, Springer-Verlag.

Atkinson, A.B. (1970) "On the Measurement of Inequality", *Journal of Economics Theory*, núm. *2*, pp. 244-263.

Atkinson, A.B. (1975) *The economics of inequality*, London, Oxford University Press.

Atkinson, A.B. (2008) "More on the Measurement of Inequality", *Journal of Economic Inequality*, núm. 6, pp. 277-283.

Bishop J.A., J.P. Formby y P.D. Thistle (1991) "Rank dominance and international comparisons of income distributions", *European Economic Review*, núm. 35, pp. 1399-1409.

Blackorby, C y D. Donaldson (1978) "Measures of relative inequality and their meaning in terms of social welfare", *Journal of Economic Theory*, núm.18, pp. 59-80.

Blackorby, C y D. Donaldson (1980) "A theoretical treatment of indices of absolute inequality", *International Economic Review*, núm. 21 (1), pp. 107-136.

Callejón C., J. (1995): Funciones generadoras de una curva de Lorenz Actas IX Reunión ASEPELT-ESPAÑA*,* pp.345-350.

Casas, J.M., Herrerias R. y J.J. Nuñez J.J. (1990): Familias de formas funcionales para estimar la curva de Lorenz. Actas de la IV Reunión de ASEPELT-ESPAÑA, pp. 171-175.

Chotikapanich, D. and W.E. Griffiths (2008). Estimating Income Distributions Using a Mixture of Gamma Densities. D. Chotikapanich, editor, *Modeling Income Distributions and Lorenz Curves*, Springer, New York, 285-302.

Dagum C. (1985) *Encyclopedia of Statistical Sciences*, vol. 4, 156-160, New York, John Wiley & Sons.

Dagum, C. (2001) "Desigualdad del rédito y bienestar social, descomposición, distancia direccional y distancia métrica entre distribuciones", *Estudios de Economía Aplicada*, núm. 17, pp. 5-52.

Dalton H. (1920) "The Measurement of the Inequality of Incomes", *Economics Journal*, núm 30, pp. 348-61.

Dardanoni, V. y Lambert, P. J. (1988) "Welfare rankings of income distributions: a role for the variance and some insights for tax reform", *Social Choice and Welfare*, núm. 5, pp. 1-17.

Davis J. y Hoy M. (1994) "The Normative Significance of Using Third-Degree Stochastic Dominance in Comparing Income Distributions", *Journal of Economic Theory*, núm. 64, pp. 520-530.

Gastwirth, J.L.(1971) "A General Definition of the Lorenz Curve", *Econometrica* núm. 39, pp.1037-1039.

Gini, C. (1921) "Measurement of inequality of incomes", *Economic Journal*, núm.31, pp. 124-126.

Giorgi G. M. (1990) "Bibliographic portrait of the Gini concentration ratio", *Metron*, núm. 48, pp. 183-221.

Gradín L. C., Del Río O. C. y Cantó S. O. (2006): *La distribución de la renta en Galicia. Análisis territorial de la desigualdad y pobreza.* CIEF, Centro de Investigación Económica y Financiera. Fundación Caixa Galicia.

Herrerías P. R., Palacios G. F. y Ramos R. A. (2001): Una metodología flexible para la modelización de la distribución de la renta. *Aplicaciones estadísticas y económicas de los sistemas de funciones generadoras*. Editorial Universidad de Granada.

Herrerías, R. ,Palacios G. F. y García, R.M.(2001): Análisis preferencial de curvas de Lorenz poligonales con igual índice de Gini, Actas de XV Reunión ASEPELT-ESPAÑA**.**

Instituto Nacional de Estadística (2013): Encuesta de Condiciones de Vida. Metodologia. http://www.ine.es/daco/daco42/condivi/ecv_metodo.pdf

Jenkins, S. P. and Cowell, F. A. (1994) "Parametric equivalence scales and scale relativities", *Economic Journal*, núm.104, pp. 891-900.

Jenkins S. P. (1995) "Did the middle class shrink during the 1980s?UK evidence from kernel density estimates", *Economics Letters* , núm. 49, pp. 407-413.

Jiménez Bautista, F. (2009) Saber Pacífico: La paz neutra. Marco para una agenda de Estudios para la paz, Loja, Ecuador, UTP Loja.

Jiménez Bautista, Francisco; Arzate -Salgado, Jorge y Cstillo Fernández, Didimo. (2014) Crisis capitalista, pauperización social y sistema de bienestar en España y México, Toluca, Universidad Autónoma del Estado de México/Editorial Porrúa, 210 págs. ISBN: 978-607-401-882-0

Jones MC, Marron JS, Sheather SJ. (1996) "A brief survey of bandwidth selection for density estimation", *Journal of the American Statistical Association*, núm. 91, pp. 401–407.

Kendall & Stuart (1977) *The Advanced Theory of Statistic* 1, London, Griffin.

Kolm, S.C. (1976a) "Unequal inequalities I", *Journal of Economic Theory,* núm. 13, pp. 416-442.

Kolm, S.C**.** (1976b) "Unequal inequalities II", *Journal of Economic Theory,* núm. 13, pp. 82-111.

Kuznets, S. (1953) Shares of Upper Income Groups in Income and Savings, New York, NBER.

Lafuente Lechuga, M. (1994). Medidas de cuantificación de la desigualdad: La desigualdad de la renta en España según la EPF 1009-91. *Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.*

Lambert, P. J. (1993) *The Distribution and Redistribution of Income: A Mathematical Analysis*, 2nd edition, Manchester, Manchester University Press.

Lerman, R. I. and S. Yitzhaki (1984) “A note on the calculation and interpretation of the Gini index”, *Economic Letters*, núm.15, pp. 363-368.

Mosler K. y Muliere P. (1998) “Welfare means and equalizing transfers”, *Metron*, núm. 56, pp. 11-52.

Muliere, P. y M. Scarsini (1989) “A note on stochastic dominance and inequality measures”, Journal of Economic Theory, núm. 42, pp.81-95.

Pereira N y Salinas P. (1978) “A relation between the Gini and Eleto mesures of inequality”. *Quality and Quantity*, 12, pp. 175-178.

Pigou A. (1922) *Wealth and Welfare*, New York, Macmillan.

Pittau M.G. y Zelli, R. (2006) “Empirical evidence of income dynamics across EU Regions”, *Journal of Applied Econometrics*, núm. 21, pp. 605-628.

Ramos Romero, H. M., Ollero J. y Sordo M. A. (2000) “A Sufficient Condition for Generalized Lorenz Order”, *Journal of Economic Theory*, núm. 90, pp. 286-292.

Ruiz- Castillo, J. (1987) *La medición de la pobreza y la desigualdad en España, 1980-81*. Banco de España. Servicio de Estudios. Estudios Económicos, 42.

Sarabia J.M., Pascual M. y Sarabia M. (2003), Curvas de Lorenz de Gupta Generalizadas, Actas de 27 Congreso Nacional de Estadísstica e Investigación Operativa.

Sen A. (1973) *On economic Inequality*, Oxford, Claredom Press University Press.

Silverman B. W., (1986) Density Estimation for Statistical and Data Analysis. Chapman and Hall.

Slesnick, D. T. (1991) “The standard of living in the United States”, Review of Income and Wealth, núm. 37, pp. 363–386.

Slesnick, D. T. (1993) “Gaining ground: poverty in the postwar United States”, *Journal of Political Economy*, núm.101, pp. 1–38.

Sheather SJ, Jones MC. (1991) “ A reliable data-based bandwidth selection method for kernel density estimation”, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B núm. 53, pp. 683–690.

Shorrocks, A.F. (1982) “Inequality decomposition by factor components”, *Econometrica*, núm. 50(1), pp. 193-211.

Shorrocks, A.F. (1983) “Ranking income distributions”, *Economica*, núm. 50;pp. 3-17.

Shorrocks A.F. y Foster J.E. (1987) “Transfer Sensitive Inequality Measures”, *Review of Economic Studies*, núm. 54, pp. 485-497.

Schutz, R.R. (1951) “On the measurement of Income Inequality”. *The American Economic Review*, núm. 41, pp. 107-122.

Theil, H. (1967): “Economics and information theory” en *North-Holland publishing Company- Amsterdam*, pp. 91-134.

Vinuesa G. B. y García F. R. M. “Nueva medida y umbrales para la desigualdad y su relación con la conflictividad”, Pendiente de publicación en *Revista de Paz y Conflictos*, vol (9), núm 1, 2016.

Zubiri I. (1985) “Una introducción al problema de la medición de la desigualdad”, Hacienda Pública Española, núm. 92, pp. 291-317.

Yitzhaki S. y Schechtman E. (2013) *The Gini Methodology. A Primer on a Statistical Metholodogy*, Springer, New York Heidelberg Dordrecht London.